MAKALAH KALKULUS LANJUT

DERET POSITIF :

UJI INTEGRAL DAN UJI LAIN-LAINNYA

OLEH :

KELOMPOK 2:

1. **NI LUH PUTU SUARDIYANTI (0813011005)**
2. **I WAYAN WIDNYANA (0813011008)**
3. **LUH PUTU PRAJAYANTHI W. (0813011027)**

JURUSAN PENDIDIKAN MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS PENDIDIKAN GANESHA SINGARAJA

2011

KATA PENGANTAR

Om Swastiastu

Puji syukur penulis panjatkan kehadapan Ida Sang Hyang Widhi Wasa karena atas Asung Kerta Wara Nugraha-Nya penulis dapat menyelesaikan makalah kalkulus lanjut tentang **deret positif: uji integral serta uji-uji lainnya** tepat pada waktunya. Makalah ini disusun dalam rangka memenuhi persyaratan dalam mata kuliah kalkulus lanjut.

Makalah ini dapat terselesaikan karena bantuan dari berbagai pihak. Untuk itu, melalui kesempatan ini penulis menyampaikan terima kasih kepada:

1) Dra. I Gusti Ayu Mahayukti, M.Si selaku dosen pengampu mata kuliah kalkulus lanjut.
2) Rekan-rekan mahasiswa yang secara langsung ataupun tidak langsung telah membantu penulis dalam penyusunan makalah ini.

Penulis menyadari sepenuhnya bahwa apa yang tersaji dalam makalah ini masih jauh dari sempurna, karena keterbatasan kemampuan yang penulis miliki. Oleh karena itu, dengan segala kerendahan hati penulis sangat mengharapkan saran dan kritik yang konstruktif guna penyempurnaan makalah ini. Pada akhirnya, penulis berharap mudah-mudahan makalah ini bermanfaat bagi pembaca.

Om Santih, Santih, Santih Om.

Singaraja, September 2011

Penulis

DAFTAR ISI

BAB I
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Barisan dan deret takhingga diperkenalkan secara singkat dalam pengantar kalkulus dalam hubungannya dengan paradoks Zeno dan bentuk desimal bilangan. Pentingnya kedua hal ini dalam kalkulus muncul dari gagasan Newton yang menyatakan fungsi sebagai jumlah deret takhingga. Banyak fungsi yang muncul dalam fisika dan kimia matematis, seperti fungsi Bessel, didefinisikan sebagai jumlah deret, sehingga sangatlah penting untuk mempelajari konsep dasar konvergensi barisan dan deret takhingga.

Dalam mempelajari deret, selalu ada dua pertanyaan penting yang dapat diajukan. *Pertama*, apakah deret itu konvergen? Sedangkan *kedua*, apabila deret tersebut konvergen, berapakah jumlahnya? Untuk menentukan apakah suatu deret konvergen atau divergen dapat ditentukan dari barisan jumlah-jumlah parsial $\{S_n\}$ dari deret tersebut. Jika $\{S_n\}$ konvergen menuju S (dimana S adalah jumlah dari deret tersebut), maka deret takhingga tersebut konvergen. Jika $\{S_n\}$ divergen, maka deret tersebut divergen.

Pada umumnya, tidaklah mudah menghitung jumlah yang eksak dari suatu deret. Perhitungannya dapat dilakukan untuk deret dengan rumus S_n (jumlah parsial ke-n) yang eksak, misalnya deret geometrik dan deret kolaps. Tetapi biasanya tidaklah mudah menghitung $\lim_{n\to\infty} S_n$ untuk jenis deret yang lain. Untuk mengatasi masalah tersebut, dikembangkan beberapa uji yang memungkinkan untuk menentukan apakah suatu deret konvergen atau divergen tanpa menghitung jumlahannya secara eksplisit. Oleh karena itu, penulis ingin mengulas materi tentang "Deret Positif: Uji Integral dan Uji-Uji Lainnya" untuk menentukan kekonvergenan suatu deret positif pada makalah ini.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang yang telah dipaparkan sebelumnya, ada beberapa permasalahan yang dirumuskan dalam penulisan makalah ini, antara lain sebagai berikut.

1.2.1 Bagaimanakah menentukan kekonvergenan suatu deret positif dengan menggunakan uji integral?

1.2.2 Bagaimanakah menentukan kekonvergenan suatu deret positif menggunakan uji kekonvergenan selain uji integral?

1.3 Tujuan Penulisan

Adapun tujuan dari penulisan makalah ini adalah sebagai berikut.

1.3.1 Untuk dapat mengetahui kekonvergenan suatu deret positif dengan menggunakan uji integral.

1.3.2 Untuk mengetahui cara menentukan suatu deret positif konvergen atau divergen menggunakan uji-uji lain selain uji integral.

BAB II
PEMBAHASAN

2.1 Deret Positif: Uji Integral

Sebelum membahas kekonvergenan suatu deret positif menggunakan uji integral, perlu diperhatikan hal-hal penting yang akan sering dipergunakan dalam pembahasan selanjutnya.

PENTING UNTUK DIINGAT

$$a_1, a_2, a_3, \ldots$$

adalah sebuah barisan

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots.$$

adalah sebuah deret.

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$$

adalah jumlah parsial ke-n dari deret.

$$S_1, S_2, S_3, \ldots$$

adalah barisan jumlah parsial dari deret. Deret konvergen jika dan hanya jika

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n$$

berlaku dan terhingga, dalam hal mana S disebut jumlah deret.

Dalam pasal ini dan pasal berikutnya, pembahasan tentang deret akan dibatasi hanya pada deret dengan suku-suku positif (atau setidaknya tidak negatif). Dengan pembatasan ini, dapat disusun sejumlah uji kekonvergenan yang sangat sederhana. Uji untuk deret dengan suku – suku yang tandanya sembarang tidak akan dibahas pada makalah ini.

JUMLAH PARSIAL YANG TERBATAS

Salah satu hasil yang dapat dijabarkan langsung dari *Teorema Barisan Monoton* tentang kekonvergenan deret dijabarkan dalam teorema berikut.

Teorema A (Uji Jumlah Terbatas)

Suatu deret $\sum a_k$ yang sukunya tak negatif adalah konvergen jika dan hanya jika jumlah parsialnya terbatas di atas.

Bukti:

(bukti ke kanan)

Apabila deret $\sum a_k$ konvergen menuju S, berarti $\lim_{n\to\infty} S_n = S$. Diketahui $\sum a_k \geq 0$, maka $S_{n+1} \geq S_n$. Berarti barisan $\{S_n\}$ adalah barisan yang tak turun. Selanjutnya, untuk setiap n berlaku:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k < \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_k = S$$

Dengan demikian, S merupakan batas atas dari barisan $\{S_n\}$ *(berarti jumlah parsial deret $\sum a_k$ memiliki batas atas).*

(bukti ke kiri)

Andaikan barisan jumlah parsial $\{S_n\}$ terbatas atas (ada bilangan U sehingga $S_n \leq U$ untuk semua n). Karena $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$ dan $a_k \geq 0$ maka $S_{n+1} \geq S_n$; jadi $\{S_n\}$ adalah barisan yang tidak turun. Menurut *Teorema Barisan Monoton*, barisan $\{S_n\}$ konvergen, sehingga sesuai definisi (*pada materi deret tak terhingga*), deret $\sum a_k$ juga konvergen. Apabila tidak, S_n akan melampui tiap bilangan dan hal ini, $\{S_n\}$ divergen.

Contoh 1

Buktikan bahwa deret $\frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots$ konvergen.

Penyelesaian:

Kita akan membuktikan bahwa jumlah-jumlah parsial S_n terbatas di atas.

Perhatikan bahwa

$n! = 1.2.3\ldots n \geq 1.2.2\ldots.2 = 2^{n-1}$

dan sehingga $1/n! \leq 1/2^{n-1}$. Jadi,

$$\begin{aligned} \mathrm{S_n} &= \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} \\ &\leq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} \end{aligned}$$

Suku-suku yang terakhir ini adalah deret geometri dengan r = ½. Oleh karena $|r| < 1$, deret geometri tersebut konvergen dengan jumlah $S = \frac{a}{1-r}$ dan jumlah parsial ke-n $S_n = \frac{a-ar^n}{1-r}$. Sehingga diperoleh

$$S_n \leq \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}} = 2\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right] < 2$$

Jadi, menurut *Teorema A (Uji Jumlah Terbatas)*, deret ini konvergen. Dari hasil tersebut, jumlah S tidak lebih dari 2. Akan diperlihatkan kemudian bahwa S = e – 1 ≈ 1,71828.

DERET DAN INTEGRAL TAK WAJAR.

Kelakuan deret $\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$ dan integral tak wajar $\int_1^{\infty} f(x)dx$ mengenai kekonvergenan adalah serupa sehingga kita dapat menjadikannya sebagai pengujicoba.

Teorema B (Uji Integral)

Andaikan f suatu fungsi yang kontinu, positif dan tidak naik pada selang [1,∞). Andaikan $a_k = f(k)$ untuk semua k positif bulat. Maka deret tak terhingga

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

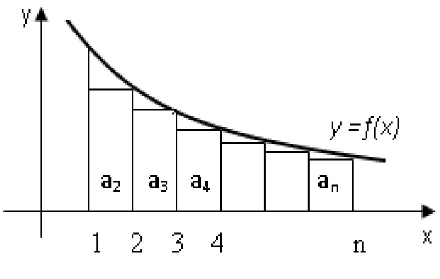
konvergen, jika dan hanya jika integral takwajar

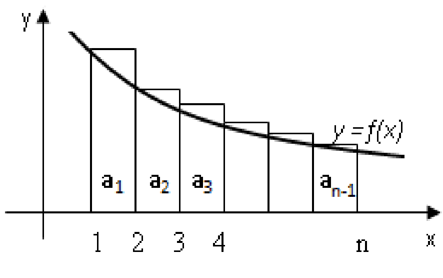
$$\int_1^{\infty} f(x)dx$$

konvergen.

Bukti

Diagram pada gambar 1 memperlihatkan bagaimana kita dapat mengartikan jumlah parsial deret $\sum a_k$ sebagai luasan dan dengan demikian mengkaitkan deret itu dengan integral bersangkutan.





Gambar 1

Perhatikan bahwa luas tiap persegi panjang sama dengan tingginya, oleh karena panjang alasnya adalah 1.

Kemudian:

1. $\int_1^n f(x)dx =$ Luas daerah di bawah kurva $y = f(x)$ di kuadran 1 dari 1 ke n.
2. $a_2 + a_3 + a_4 + \ldots + a_n$ = Jumlah luas persegi panjang yang berada di bawah kurva $y = f(x)$ dari 1 ke n.
3. $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1}$ = Jumlah luas persegi panjang dengan batas bawah sumbu-x dan batas atas ruas garis di atas kurva $y = f(x)$ dari 1 ke n.

Dari gambar di atas, dengan mudah terlihat

$$a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_n \le \int_1^n f(x)dx \le a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1}$$

$$\sum_{k=2}^{n} a_k \le \int_1^n f(x)dx \le \sum_{k=1}^{n-1} a_k$$

Oleh karena itu,

(1) *(bukti ke kiri)*

Andaikan $\int_1^\infty f(x)dx$ konvergen, maka menurut pertidaksamaan sisi kiri, kita peroleh

$$\sum_{k=2}^{n} a_k \le \int_1^n f(x)dx \le \int_1^\infty f(x)dx$$

karena $f(x) \ge 0$. Jadi

$$S_n = a_1 + \sum_{k=2}^{n} a_k \le a_1 + \int_1^\infty f(x)dx = M$$

Karena $S_n \le M$ untuk semua n, barisan $\{S_n\}$ terbatas di atas. Juga

$$S_{n+1} = S_n + a_{n+1} \ge S_n$$

karena $a_{n+1} = f(n+1) \ge 0$. Jadi, $\{S_n\}$merupakan barisan tak turun. Berdasarkan *Teorema Uji Jumlah Terbatas*, $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergen.

(2) *(bukti ke kanan)*

Misalkan $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergen, menurut ketaksamaan sisi kanan, maka apabila $t < n$, kita peroleh

$$\int_1^t f(x)dx \le \int_1^n f(x)dx \le \sum_{k=1}^{n-1} a_k \le \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

Oleh karena $\int_1^t f(x)dx$ naik apabila bertambah dan terbatas di atas, maka $\lim_{t\to\infty} \int_1^t f(x)dx$ harus ada; jadi $\int_1^\infty f(x)dx$ konvergen.

CATATAN 1

Teorema B dapat juga diartikan bahwa deret $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ dan integral tak wajar $\int_1^\infty f(x)dx$ bersama-sama konvergen atau divergen.

Jika $\int_1^\infty f(x)dx$ divergen, maka $\int_1^n f(x)dx$ menuju tak hingga, sebab $f(x) \ge 0$. Sehingga kita peroleh

$$\int_1^n f(x)dx \le \sum_{k=1}^{n-1} a_k = s_{n-1}$$

dan karenanya $S_{n-1} \to \infty$. Akibatnya, $S_n \to \infty$ sehingga $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ divergen.

CATATAN 2

Ketika kita menggunakan Uji Integral, deret atau integral tidak harus dimulai dari n = 1. Misalnya, dalam menguji deret

$$\sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{(n-3)^2} \text{ kita gunakan } \int_4^\infty \frac{1}{(x-3)^2}dx$$

Juga, f tidak harus selalu turun. Yang penting adalah bahwa *f pada akhirnya* turun, artinya , turun untuk x yang lebih besar daripada suatu bilangan N. Maka $\sum_{n=N}^{\infty} a_n$ konvergen karena sejumlah terhingga suku tidak mempengaruhi konvergensi atau divergensi suatu deret.

Contoh 2

Ujilah deret $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$ apakah konvergen atau divergen.

Penyelesaian

Fungsi $f(x) = 1 / (x^2 + 1)$ kontinu, positif, dan turun pada $[1,\infty)$, sehingga kita gunakan Uji Integral :

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2+1}\,dx = \lim_{t\to\infty}\int_1^t \frac{1}{x^2+1}\,dx = \lim_{t\to\infty}\tan^{-1}x]_1^t$$

$$= \lim_{t\to\infty}\tan^{-1}t - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$$

Jadi, $\int_1^\infty 1/(x^2+1)dx$ merupakan integral yang konvergen dan karenanya, menurut *Uji Integral*, deret $\sum 1/(n^2+1)$ konvergen.

Contoh 3 *(Uji Deret-p)*

Deret

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p} = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \frac{1}{4^p} + \cdots$$

dengan p sebuah konstanta dinamakan deret–*p*. Untuk nilai berapakah deret tersebut konvergen?

Penyelesaian

Jika $p < 0$, maka $\lim_{n\to\infty}(1/n^p) = \infty$. Jika $p = 0$, maka $\lim_{n\to\infty}(1/n^p) = 1$. Dalam kedua kasus ini $\lim_{n\to\infty}(1/n^p) \neq 0$, sehingga deret di atas divergen menurut *Teorema Uji Kedivergenan dengan Suku ke-n.*

Apabila *p > 0*, fungsi $f(x) = 1/x^p$ kontinu, positif dan tidak naik pada selang $[1,\infty)$, sedangkan $f(n) = 1/n^p$. Maka menurut *Teorema Uji Integral*, $\sum(\frac{1}{n^p})$ konvergen jika dan hanya jika $\lim_{t\to\infty}\int_1^t x^{-p}dx$ ada (sebagai bilangan terhingga).

Bila $p \neq 1$

$$\int_1^\infty f(x)dx = \int_1^\infty x^{-p}dx = \lim_{t\to\infty}\int_1^t x^{-p}dx$$

$$= \lim_{t\to\infty}\left[\frac{x^{1-p}}{1-p}\right]_1^t = \lim_{t\to\infty}\left[\frac{t^{1-p}}{1-p}\right] = \frac{1}{1-p}\lim_{t\to\infty}t^{1-p}$$

Apabila $p = 1$

$$\int_1^\infty x^{-p}dx = \lim_{t\to\infty}\int_1^t x^{-p}dx = \lim_{t\to\infty}\int_1^t x^{-1}dx = \lim_{t\to\infty}[\ln x]_1^t = \lim_{t\to\infty}\ln t$$

Oleh karena $\lim_{t\to\infty}t^{1-p} = 0$ apabila $p>1$ dan $\lim_{t\to\infty}t^{1-p} = \infty$ apabila $p<1$ dan oleh karena $\lim_{t\to\infty}\ln t = \infty$, kita dapat menarik kesimpulan *(berdasarkan*

Teorema Uji Integral) bahwa deret–p konvergen apabila $p > 1$ dan divergen apabila $0 \le p \le 1$.

Perhatikan bahwa jika $p=1$, deret–p menjadi deret harmonik yang divergen.

Deret-p ini merupakan deret yang penting dan sering digunakan dalam menguji kekonvergenan suatu deret. Oleh karena itu, pembahasan pada *contoh 3* di atas dapat dirangkum sebagai berikut.

Deret-p $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ konvergen jika $p > 1$ dan divergen jika $0 \le p \le 1$

Contoh 4

(a) Deret

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} = \frac{1}{1^3} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \cdots$$

konvergen sebab deret ini merupakan deret-p dengan $p = 3 > 1$.

(b) Deret

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/3}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}} = 1 + \frac{1}{\sqrt[3]{2}} + \frac{1}{\sqrt[3]{3}} + \frac{1}{\sqrt[3]{4}} + \ \ldots$$

divergen sebab deret ini adalah deret-p dengan $p = \frac{1}{3} < 1$.

Contoh 5

Apakah $\sum_{k=4}^{\infty} \frac{1}{k^{1,001}}$ konvergen atau divergen?

Penyelesaian

Perhatikan bahwa, deret $\sum_{k=4}^{\infty} \frac{1}{k^{1,001}}$ merupakan deret-p dengan $p = 1,001 > 1$. Berdasarkan *Uji Deret-p* $\sum_{k=4}^{\infty} (\frac{1}{k^{1,001}})$ konvergen.

Kekonvergenan atau kedivergenan suatu deret tidak dipengaruhi, apabila dari deret itu dihilangkan atau ditambahkan beberapa suku yang banyaknya terhingga (tetapi mempengaruhi jumlahnya). Jadi deret yang diketahui akan konvergen.

Contoh 6

Periksa apakah deret $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k\ \ln k}$ konvergen atau divergen.

Penyelesaian

Hipotesis dalam *Uji Integral* dipenuhi untuk $f(x) = 1/(x\ \ln x)$ pada [2,∞). Intervalnya bukan [1,∞). Hal ini dimungkinkan berlaku sesuai dengan catatan yang diberikan pada Teorema B (*Uji Integral*) . Sekarang,

$$\int_{2}^{\infty} \frac{1}{x \ln x} dx = \lim_{t \to \infty} \int_{2}^{t} \frac{1}{x \ln x} dx = \lim_{t \to \infty} \int_{2}^{t} \frac{1}{\ln x} d\,(\ln x) \ = \lim_{t \to \infty} [\ln \ln x]_{2}^{t} = \infty$$

Sehingga $\int_{2}^{\infty} f(x) dx$ divergen. Jadi, berdasarkan *Teorema B (Uji Integral)*, deret $\sum 1/(k \ln k)$ divergen.

CATATAN 3

Kita tidak dapat menyimpulkan dari Uji Integral bahwa jumlah deret ini sama dengan nilai integral. Kenyataannya,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \qquad sementara \qquad \int_{1}^{\infty} \frac{1}{x^2} dx = 1$$

Jadi, secara umum,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \neq \int_{1}^{\infty} f(x)\, dx$$

Contoh 7

Tentukan apakah deret $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$ konvergen atau divergen.

Penyelesaian

Fungsi *f(x)* = (ln *x*) / *x* positif dan kontinu untuk x > 1 sebab fungsi logaritma kontinu. Tetapi tidak jelas apakah *f* turun atau tidak, sehingga kita hitung turunannya :

$$f'(x) = \frac{(1/x)x - \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

Jadi, *f'(x)* < 0 bila ln *x* > 1, yakni, *x* > *e*. Dengan demikian *f* turun bila *x* > *e* dan karenanya kita dapat menerapkan Uji Integral:

$$\int_1^\infty \frac{\ln x}{x}\,dx = \lim_{t\to\infty}\int_1^t \frac{\ln x}{x}\,dx = \lim_{t\to\infty}\left.\frac{(\ln x)^2}{2}\right]_1^t = \lim_{t\to\infty}\frac{(\ln t)^2}{2} = \infty$$

Karena integral tak wajar ini divergen, deret $\sum(\ln n)/n$ juga divergen menurut *Uji Integral.*

EKOR SUATU DERET

Awal suatu deret tidaklah penting dalam hal kekonvergenan dan kedivergenannya. Yang penting hanyalah "ekor"-nya. Yang dimaksud dengan "ekor" suatu deret atau suku sisa ***(R_n)*** adalah:

$$R_n = S - S_n = a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} + \cdots$$

dimana *n* adalah suatu bilangan besar sembarang. Dengan demikian, dalam pengujian kekonvergenan dan kedivergenan suatu deret, kita dapat mengabaikan suku-suku awalnya atau bahkan menggantinya. Tetapi, jelas bahwa jumlah suatu deret tergantung pada semua sukunya, termasuk suku awal.

Contoh 8

Dengan menggunakan integral tak wajar, tentukanlah batas atas yang sebaik mungkin bagi kesalahan jika kita ambil jumlah lima suku pertama dan deret konvergen

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{e^{n^2}}$$

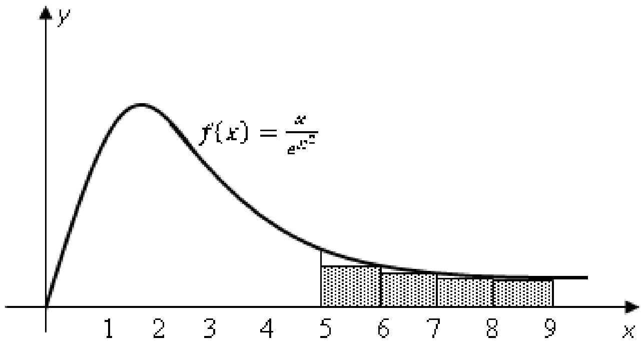
untuk mengaproksimasi jumlah deret.

Penyelesaian

Kesalahan E adalah besarnya suku ***(R_n)***. Diperoleh

$$E = R_n = S - S_n = \sum_{n=6}^{\infty}\frac{n}{e^{n^2}}$$

Dimana S_n yang diambil adalah lima suku pertama.



Gambar 2

Perhatikan fungsi $f(x) = x/e^{x^2}$ fungsi ini pada selang [5,∞) adalah kontinu dan tidak naik (lihat gambar 2). Jadi

$$E = \sum_{n=6}^{\infty} \frac{n}{e^{n^2}} < \int_5^{\infty} xe^{-x^2} dx$$

$$= \lim_{t\to\infty} -\frac{1}{2}\int_5^{\infty} e^{-x^2}(-2x\, dx)$$

$$= \lim_{t\to\infty} -\frac{1}{2}\int_5^{\infty} e^{-x^2}\, d(-x^2)$$

$$= \lim_{t\to\infty} -\frac{1}{2}[e^{-x^2}]_5^t = \frac{1}{2}e^{-25} \approx 6{,}94 \times 10^{-12}$$

Jadi batas atas yang sebaik mungkin bagi kesalahan *(error)* adalah 6,94 × 10^{-12}.

Contoh 9

Hampiri jumlah dari deret $\sum \frac{1}{n^3}$dengan menggunakan jumlah 10 suku pertama. Taksirlah kesalahan yang muncul dalam hampiran ini.

Penyelesaian:

Kita perlu mengetahui $\int_n^{\infty} f(x)dx$, dengan $f(x) = \frac{1}{x^3}$. Kita peroleh

$$\int_n^{\infty} \frac{1}{x^3} dx = \lim_{t\to\infty} \int_n^t \frac{1}{x^3} dx = \lim_{t\to\infty} \left[-\frac{1}{2x^2}\right]_n^t = \lim_{t\to\infty} \left(-\frac{1}{2t^2} + \frac{1}{2n^2}\right) = \frac{1}{2n^2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \approx S_{10} = \frac{1}{1^3} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \cdots + \frac{1}{10^3} \approx 1{,}1975$$

Menurut taksiran suku sisa, kita dapatkan

$$E = \sum_{n=11}^{\infty} \frac{1}{n^3} < \int_{10}^{\infty} \frac{1}{x^3} dx = \lim_{t\to\infty} \int_{10}^{t} \frac{1}{x^3} dx$$

$$= \lim_{t\to\infty} \left[-\frac{1}{2x^2}\right]_{10}^{t}$$

$$= \lim_{t\to\infty}\left(-\frac{1}{2t^2}+\frac{1}{2(10)^2}\right)=\frac{1}{200}$$

Jadi besarnya kesalahan dari taksiran jumlah deret tersebut menggunakan 10 deret pertama adalah tidak lebih dari 0,005.

2.2 Deret Positif: Uji-Uji Lainnya

Sebelumnya telah dianalisa secara tuntas kekonvergenan dan kedivergenan dua deret, yaitu deret geometri dan deret-p, dimana hasilnya adalah sebagai berikut.

$\sum_{n=1}^{\infty} r^n$ konvergen apabila $-1<r<1$; divergen untuk $|r| \geq 1$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ konvergen untuk $p > 1$; divergen untuk $p \leq 1$

Deret-deret tersebut dapat digunakan sebagai standar atau model untuk menentukan kekonvergenan atau kedivergenan deret lain. Ingat bahwa kita masih tetap meninjau deret yang sukunya positif (atau paling sedikit tak negatif).

MEMBANDINGKAN SUATU DERET DENGAN DERET LAIN

Gagasan dalam uji perbandingan adalah membandingkan deret yang diberikan dengan deret yang telah diketahui konvergen atau divergen. Teorema Uji Banding ini hanya berlaku untuk deret dengan suku-suku positif. Jika suatu deret suku-sukunya lebih kecil daripada suku-suku suatu deret yang diketahui *konvergen*, maka deret tersebut juga *konvergen*. Sedangkan, jika terdapat suatu deret yang suku-sukunya lebih besar daripada suku-suku suatu deret yang diketahui *divergen*, maka deret tersebut juga *divergen*. Hal ini, dituangkan dalam teorema berikut.

Teorema A (Uji Banding)

Andaikan untuk $n \geq N$ berlaku $0 \leq a_n \leq b_n$

(i) Jika $\sum b_n$ konvergen, maka $\sum a_n$ konvergen

(ii) Jika $\sum a_n$ divergen, maka $\sum b_n$ divergen

Bukti

(i) Andaikan $N = 1$; Jika $\sum b_n$ konvergen *(misalnya dengan jumlah t)*, dimana

$$t = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

Misalkan

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} a_i \qquad t_n = \sum_{i=1}^{n} b_i$$

Karena kedua deret ($\sum a_n$ dan $\sum b_n$) mempunyai suku-suku positif, barisan $\{s_n\}$ dan $\{t_n\}$ adalah barisan yang tidak turun ($s_{n+1} = s_n + a_{n+1} \geq s_n$). Juga $t_n \to t$, sehingga $t_n \leq t$ untuk semua n. Karena $a_i \leq b_i$, kita peroleh $s_n \leq t$. Jadi, $s_n \leq t$ untuk semua n. Ini berarti bahwa $\{s_n\}$ tidak turun dan terbatas di atas dan menurut *Teorema Uji Jumlah Terbatas,* $\sum a_n$ konvergen.

(ii) Jika $\sum a_n$ divergen, maka $S_n \to \infty$ (karena $\{S_n\}$ tidak turun). Tetapi $b_i \geq a_i$ sehingga $s_n \leq. t_n$. Akibatnya, $t_n \to \infty$. Dengan demikian, $\sum b_n$ divergen.

Contoh 1

Tunjukkan apakah deret berikut konvergen atau divergen.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n + 1}$$

Penyelesaian

Bentuk deret $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n+1}$ mengingatkan kita akan deret $\sum_{n=1}^{\infty} 1/2^n$, yang merupakan deret geometrik dengan $r = \frac{1}{2}$ sehingga deret geometri tersebut konvergen. Karena deret $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n+1}$ sangat mirip dengan suatu deret konvergen, kita dapat perkirakan bahwa deret ini pun pasti konvergen. Dan kenyataannya memang demikian. Ketaksamaan

$$\frac{1}{2^n + 1} < \frac{1}{2^n}$$

menunjukkan bahwa deret $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n+1}$ yang diberikan mempunyai suku-suku yang lebih kecil daripada suku-suku deret geometrik tadi dan karenanya semua jumlah parsialnya juga lebih kecil daripada 1 (jumlah deret geometrik tersebut). Ini berarti bahwa jumlah parsialnya membentuk suatu barisan naik dan terbatas, yang tentunya konvergen. Juga dapat disimpulkan bahwa jumlah deret di atas lebih kecil daripada jumlah deret geometrik :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n + 1} < 1$$

Jadi berdasarkan *Uji Banding* bagian (i), deret tersebut konvergen.

Contoh 2

Apakah $\sum \frac{n}{5n^2-4}$ konvergen atau divergen?

Penyelesaian

Kita dapat menduga deret divergen, sebab untuk *n* yang cukup besar suku ke-n mirip dengan *1/5n*. Tetapi uraian di atas bukan bukti tepat untuk memperoleh bukti yang eksak. Perhatikan

$$\frac{n}{5n^2 - 4} > \frac{n}{5n^2} = \frac{1}{5} . \frac{1}{n}$$

Kita ketahui jika deret harmonik $\sum 1/n$ divergen, sehingga $\sum \frac{1}{5} . \frac{1}{n}$ juga divergen (*sesuai dengan teorema*). Jadi menurut *Uji Banding Biasa* deret $\sum \frac{n}{5n^2-4}$ divergen.

Contoh 3

Tentukan apakah deret $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{2n^2+4n+3}$ konvergen atau divergen.

Penyelesaian

Untuk *n* yang besar, suku yang dominan pada penyebutnya adalah $2n^2$ sehingga kita bandingkan deret di atas dengan deret $\sum 5/(2n^2)$. Amati bahwa

$$\frac{5}{2n^2 + 4n + 3} < \frac{5}{2n^2}$$

Sebab ruas kiri mempunyai penyebut yang lebih besar. (Dalam notasi pada uji perbandingan, a_n adalah ruas kiri dan b_n adalah ruas kanan). Kita tahu bahwa

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{2n^2} = \frac{5}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

Konvergen karena deret ini merupakan suatu konstanta dikalikan dengan deret-*p* dengan $p = 2 > 1$. Jadi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{2n^2 + 4n + 3}$$

konvergen menurut bagian (i) dari uji perbandingan.

Contoh 4

Apakah $\sum \frac{n}{2^n(n+1)}$ konvergen atau divergen?

Penyelesaian

Agaknya deret ini konvergen, sebab untuk *n* cukup besar suku ke-*n* mirip dengan $(1/2)^n$. Tepatnya $\frac{n}{2^n(n+1)} = (\frac{1}{2})^n \frac{n}{(n+1)} < (\frac{1}{2})^n$

Deret geometri $\sum (\frac{1}{2})^n$ konvergen, sebab pembandingannya (***r***) adalah ½ . jadi deret yang diketahui juga konvergen.

Satu-satunya kesulitan dalam menggunakan *Uji Banding* tersebut terletak pada pemilikan deret banding yang tepat. Andaikan kita hendak menentukan kekonvergenan atau kedivergenan deret

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(n-2)^2} = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n^2 - 4n + 4}$$

Kita cenderung untuk membandingkan $1/(n-2)^2$ dengan $1/n^2$, tetapi sayang bahwa

$$\frac{1}{(n-2)^2} > \frac{1}{n^2}$$

Jadi *Teorema Uji Banding* tidak dapat digunakan karena arah pertidaksamaan seperti yang kita inginkan. Akan tetapi, setelah beberapa kali percobaan, kita akan menemukan bahwa

$$\frac{1}{(n-2)^2} \leq \frac{9}{n^2}$$

Untuk $n \geq 3$;

Kita tinjau kekonvergenan deret $\sum 9/n^2$.

$$\sum \frac{9}{n^2} = \sum 9\frac{1}{n^2}$$

Kita ketahui bahwa $\sum 1/n^2$ adalah deret-p dengan $p = 2$, sehingga menurut teorema, $\sum 9\frac{1}{n^2}$ juga konvergen.

Oleh karena $\sum 9/n^2$ konvergen, maka deret $\sum \frac{1}{(n-2)^2}$ juga akan konvergen (*sesuai Teorema Uji Banding*).

CATATAN 1

Walaupun persyaratan $a_n \leq b_n$ atau $a_n \geq b_n$ dalam uji perbandingan dikenakan untuk semua n, kita hanya perlu memeriksa apakah persyaratan ini dipenuhi untuk $n \geq N$, dengan N suatu bilangan bulat positif, sebab konvergensi deret tidak dipengaruhi oleh sejumlah terhingga suku. Ini terlihat pada contoh berikut.

Contoh 5

Ujilah apakah deret $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$ konvergen atau divergen.

Penyelesaian

Deret ini telah diuji (menggunakan *Uji Integral*) pada contoh 7 pada subbab 2.1, tetapi kita dapat pula menguji deret ini dengan membandingkannya dengan deret harmonik. Amati bahwa $\ln n > 1$ untuk $n \geq 3$ dan karenanya

$$\frac{\ln n}{n} > \frac{1}{n} \qquad n \geq 3$$

Kita tahu bahwa $\sum 1/n$ divergen (deret-p dengan $p = 1$). Jadi, deret yang diberikan adalah divergen menurut uji perbandingan.

CATATAN 2

Suku-suku deret yang diuji harus lebih kecil daripada suku-suku suatu deret konvergen atau lebih besar daripada suku-suku suatu deret divergen. Jika suku-sukunya lebih besar daripada suku-suku suatu deret konvergen atau lebih kecil daripada suku-suku suatu deret divergen, maka uji perbandingan tidak berlaku. Tinjau, misalnya, deret

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n - 1}$$

Ketaksamaan

$$\frac{1}{2^n - 1} > \frac{1}{2^n}$$

tak berguna sepanjang yang ditinjau adalah uji perbandingan sebab $\sum b_n = \sum \left(\frac{1}{2}\right)^n$ konvergen dan $a_n > b_n$. Namun demikian, kita mempunyai dugaan bahwa $\sum 1 / (2^n - 1)$ haruslah konvergen sebab deret ini sangat mirip dengan deret geometrik $\sum \left(\frac{1}{2}\right)^n$ yang konvergen. Dalam kasus demikian uji berikut dapat digunakan.

Teorema B *(Uji Banding Limit)*

Andaikan $a_n \geq 0$, $b_n \geq 0$ dan

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L$$

Apabila $0 < L < \infty$ maka $\sum a_n$ dan $\sum b_n$ bersama-sama akan konvergen atau divergen. Apabila $L=0$ dan $\sum b_n$ konvergen; maka $\sum a_n$ konvergen.

Bukti

Karena $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L$ berarti untuk setiap $\varepsilon=L/2$ ada bilangan positif N sedemikian hingga untuk setiap $n \geq N \to \left|\left(\frac{a_n}{b_n}\right) - L\right| < L/2$

$$-\frac{L}{2} < \left(\frac{a_n}{b_n}\right) - L < \frac{L}{2}$$

Pertidaksamaan ini setara dengan

$$\frac{L}{2} < \left(\frac{a_n}{b_n}\right) < \frac{3L}{2}$$

(dengan menambahkan L pada seluruh ruas)

$$\frac{L}{2} b_n < (a_n) < \frac{3L}{2} b_n$$

(semua ruas dikalikan b_n)

Akibatnya,

$$\frac{L}{2} \sum b_n < \sum a_n < \frac{3L}{2} \sum b_n$$

Jadi untuk $n \geq N$,

$$\frac{L}{2}\sum b_n < \sum a_n \text{ dan } \sum a_n < \frac{3L}{2}\sum b_n$$

Berdasarkan kedua pertidaksamaan tersebut dan sesuai dengan *Uji Banding Biasa*, terlihat bahwa

(1) Jika $\sum a_n$ konvergen, maka $\frac{L}{2}\sum b_n$juga konvergen sehinnga$\sum b_n$

(2) Jika $\sum b_n$ konvergen, maka $\frac{3L}{2}\sum b_n$ juga konvergen sehinnga$\sum a_n$

Sehingga $\sum a_n$ dan $\sum b_n$ bersama-sama konvergen atau divergen.

Diketahui $a_n \geq 0$ dan $b_n \geq 0$. Karena L=0 maka $\frac{a_n}{b_n} \to 0$ untuk n yang cukup besar. Ini berakibat $0 < a_n < b_n$. Karena $\sum b_n$ konvergen maka berdasarkan *Teorena Uji Banding* $\sum a_n$ konvergen.

Contoh 6

Ujilah apakah deret $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n - 1}$ konvergen atau divergen.

Penyelesaian

Kita gunakan uji perbandingan limit dengan

$$a_n = \frac{1}{2^n - 1} \qquad b_n = \frac{1}{2^n}$$

dan memperoleh $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{2^n - 1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1 - 1/2^n} = 1 > 0$

Karena limit ini ada dan $\sum 1/2^n$ merupakan deret geometrik yang konvergen, deret di atas konvergen menurut Uji Perbandingan Limit.

Perhatikan bahwa dalam menguji banyak deret kita memperoleh suatu deret pembanding $\sum b_n$ yang cocok, cukup dengan menyisakan pangkat tertinggi pada pembilang dan penyebutnya.

Contoh 7

Tentukan apakah deret-deret berikut konvergen atau divergen.

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n-2}{n^3 - 2n^2 + 11}$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+19n}}$

Penyelesaian

Kita gunakan *Uji Banding Limit*. Untuk ini kita terlebih dahulu harus menentukan pembanding suku ke-*n* deret ini. Kita harus memeriksa bentuk suku ke-*n* untuk *n* yang besar; yang dapat kita tentukan dengan melihat suku-suku derajat tertinggi dalam pembilang dan penyebut suku umum.

(a) Untuk deret (a), bagian dominan dari pembilang adalah *3n* dan bagian dominan dari penyebut adalah n^3. Hal ini mendorong kita untuk mengambil

$a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n-2}{n^3-2n^2+11}$ dan $b_n = \frac{3n}{n^3} = \frac{3}{n^2}$

sehingga

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(3n-2)/(n^3-n^2+11)}{3/n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{3n^2-2n^2}{3n^3-6n^2+33} = 1$$

Karena $\sum b_n = \sum \frac{3}{n^2} = \sum 3\,\frac{1}{n^2}$, dimana $\sum 1/n^2$ adalah deret-*p* dengan *p=2*, maka $\sum b_n$ adalah deret konvergen. Jadi, sesuai dengan *Teorema Uji Banding Limit*, deret (a) konvergen.

(b) Untuk deret (b), bagian dominan dari pembilang adalah 1 dan bagian dominan dari penyebut adalah $\sqrt{n^2}$. Hal ini mendorong kita untuk mengambil

$a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+19n}}$ dan $b_n = \frac{1}{\sqrt{n^2}} = \frac{1}{n}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1/\sqrt{n^2+19n}}{1/n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{n^2}{n^2+19n}} = 1$$

Karena $\sum b_n = \sum \frac{1}{n}$, dimana $\sum 1/n$ adalah deret harmonik yang divergen maka sesuai dengan *Teorema Uji Banding Limit*, deret (b) divergen.

Contoh 8

Tentukan apakah deret $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2+3n}{\sqrt{5+n^5}}$ konvergen atau divergen!

Penyelesaian

Bagian dominan dari pembilang adalah $2n^2$ dan bagian dominan dari penyebut adalah $\sqrt{n^5} = n^{5/2}$. Ini mendorong kita untuk mengambil

$$a_n = \frac{2n^2 + 3n}{\sqrt{5 + n^5}} \qquad b_n = \frac{2n^2}{n^{5/2}}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n^2 + 3n}{\sqrt{5 + n^5}} \cdot \frac{n^{1/2}}{2} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n^{5/2} + 3n^{3/2}}{2\sqrt{5 + n^5}}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2 + \frac{3}{n}}{2\sqrt{\frac{5}{n^5} + 1}} = \frac{2 + 0}{2\sqrt{0 + 1}} = 1$$

Karena $\sum b_n = 2 \sum 1 / n^{1/2}$ divergen (deret-*p* dengan $p = \frac{1}{2} < 1$), deret di atas divergen menurut uji perbandingan limit.

Contoh 9

Apakah $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2}$ konvergen atau divergen ?

Penyelesaian

Ke bentuk mana kita akan membandingkan $\frac{\ln n}{n^2}$?

Jika kita bandingkan dengan $\sum 1/n^2$ kita peroleh

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n^2} : \frac{1}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \ln n = \infty$$

Membandingkan dengan $\sum 1/n^2$ tampak tidak berhasil, kita coba dengan deret $\sum 1/n$, kita peroleh

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n^2} : \frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n} = 0$$

Hasil ini juga tidak memberikan kesimpulan karena deret $\sum 1/n$ divergen. Mungkin dengan deret yang sukunya antara $1/n^2$ dan $1/n$ dapat menghasilkan sesuatu. Misalnya $1/n^{3/2}$ dalam hal ini

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n^2} : \frac{1}{n^{3/2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{\sqrt{n}} = 0$$

(hasil terakhir ini menggunakan kaidah I'Hopital pada bentuk $\lim_{x\to\infty} \ln x/\sqrt{x}$). Oleh karena $\sum 1/n^{3/2}$ konvergen maka deret $\sum(lnx)/n^2$ konvergen (menurut bagian kedua uji coba banding limit).

MEMBANDINGKAN SUATU DERET DENGAN DIRINYA

Untuk dapat menggunakan *Uji Banding* diperlukan wawasan luas tentang macam-macam deret yang telah diketahui kekonvergenan atau kedivergenannya. Kecualinya itu kita harus dapat memilih deret yang hendak dibandingkan. Oleh karena kesulitan-kesulitan itu, kita kemukakan di bawah ini suatu pengujian yang tidak memerlukan pengetahuan deret lain, kecuali deret yang hendak kita selidiki itu.

Teorema C *(Uji Hasil Bagi)*

Andaikan $\sum a_n$ sebuah deret yang sukunya positif dan andaikan

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \rho$$

(i) Jika $\rho < 1$, maka deret konvergen

(ii) Jika $\rho > 1$, maka deret divergen

(iii) Jika $\rho = 1$, pengujian ini tidak memberikan kepastian.

Bukti

Inilah yang dimaksudkan oleh uji hasilbagi. Oleh karena $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \rho$, maka $a_{n+1} \approx \rho a_n$; ini berarti bahwa deret ini berperilaku seperti suatu deret geometri dengan pembanding ρ. Suatu deret geometri akan konvergen apabila hasilbagi ρ kurang dari 1 dan divergen apabila hasilbagi itu lebih dari 1. Uraian di atas itu tentunya akan kita tuangkan dalam ungkapan yang lebih tepat sebagai berikut.

(i) Oleh karena $\rho < 1$, kita dapat memilih bilangan r sehingga $\rho < r < 1$ (misalnya, $r = (\rho+1)/2$).

Karena $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_n} = \rho$ maka dapat dipilih bilangan asli N sedemikian sehingga untuk $n \geq N$ berlaku $\frac{a_{n+1}}{a_n} < r$ maka

$$a_{N+1} < ra_N$$

$$a_{N+2} < ra_{N+1} < r^2 a_N$$

$$a_{N+3} < ra_{N+2} < r^3a_N$$

……….

Oleh karena $ra_N + r^2a_N + r^3a_N + ...$ deret geometri dengan $0<r<1$, maka deret ini akan konvergen. Dengan menggunakan uji banding, biasa $\sum_{n=N+1}^{\infty} a_n$ konvergen sehingga $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ juga konvergen.

(ii) Andaikan ρ > 1, karena $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_n} = \rho$ maka dapat dipilih bilangan asli N sedemikian sehingga $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ untuk semua $n \geq N$. Jadi

$$a_{N+1} > a_N$$

$$a_{N+2} > a_{N+1} > a_N$$

………………

Jadi, $a_n>a_N>0$ untuk semua $n > N$, yang berarti bahwa $\lim_{n\to\infty} a_n$ tidak mungkin sama dengan nol. Maka menurut Uji Coba suku-*n*, deret $\sum a_n$ divergen.

(iii)Kita tahu $\sum 1/n$ divergen sedangkan $\sum 1/n^2$ konvergen. Untuk deret yang pertama,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} : \frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$$

Untuk deret kedua,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(n+1)^2} : \frac{1}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} = 1$$

Jadi, *Uji Hasilbagi* ini tidak dapat membedakan deret yang konvergen dengan deret yang divergen apabila $\rho = 1$.

Uji hasilbagi itu selalu akan gagal untuk sebuah deret yang suku ke-*n* nya adalah bentuk rasional dalam *n*, sebab dalam hal ini $\rho = 1$ (kasus $a_n=1/n$ dan $a_n=1/n^2$ telah dibahas di atas). Untuk sebuah deret yang suku ke-*n* nya memuat *n!* atau r^n, *Uji Hasilbagi* ini dapat memberikan penyelesaian yang baik.

Contoh 10

Tentukan apakah deret $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^{2n}}{n!}$konvergen atau divergen!

Penyelesaian

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{5^{2n+1}}{(n+1)!^2} \cdot \frac{n!}{5^{2n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{5^{2n+1}}{(n+1)5n^{2n}} = \frac{5^2}{n+1} \to 0 < 1$$

Menurut *Uji Hasilbagi* deret itu konvergen.

Contoh 11

Apakah deret $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$ konvergen atau divergen ?

Penyelesaian

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}}{(n+1)!^2} \cdot \frac{n!}{2^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{(n+1)} = 0$$

Menurut *Uji Hasilbagi* deret itu konvergen.

Contoh 12

Selidiki apakah $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^{20}}$ konvergen atau divergen

Penyelesaian

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}}{(n+1)^{20}} \cdot \frac{n^{20}}{2^n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{20} .2 = 2$$

Kita simpulkan bahwa deret itu divergen.

Contoh 13

Periksalah apakah deret $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n+n}{n!}$ konvergen atau divergen!

Penyelesaian

Perhatikan bentuk deret tersebut.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n + n}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4^n}{n!} + \frac{n}{n!}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{n!} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n!}$$

Kita perhatikan jumlahan yang pertama.

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{4^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{4^n} = \frac{4}{n+1} \to 0 < 1$$

Sehingga deret $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{n!}$ konvergen menurut *Uji Hasil Bagi*.

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n} = \frac{1}{n} \to 0 < 1$$

Sehingga deret $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n!}$ konvergen menurut *Uji Hasil Bagi*.

Jadi, dengan menggunakan sifat kelinieran, deret $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n+n}{n!}$ konvergen.

Contoh 14

Selidiki deret $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$

Penyelesaian menurut *teorema*

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

Sehingga

$$\rho = \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}.\frac{n^n}{n!} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{(\frac{n+1}{n})^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n} = \frac{1}{n} < 1$$

Jadi deret konvergen.

UJI AKAR

(i) Jika $a_n>0$ dan $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = R < 1$, maka deret $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergen.

(ii) Jika $a_n>0$ dan $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = R > 1$, maka deret $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergen.

Jika $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = 1$, maka Uji Akar tidak memberi informasi apapun. Deret $\sum a_n$ bisa konvergen atau divergen. (Jika ρ = 1 dalam Uji Rasio, jangan mencoba Uji Akar karena R akan tetap sama dengan 1)

Bukti:

(i) Diketahui $a_n>0$ dan $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = R < 1$

Misalkan r adalah bilangan antara R dan 1 dimana $0 \leq R < r < 1$, maka $\sqrt[n]{a_n} < r$ jadi $a_n < r^n$ untuk n yang cukup besar. Karena $\sum r^n$ adalah deret geometri yang konvergen (dimana $0 < r < 1$), maka menurut *Teorema Uji Banding* $\sum a_n$ *konvergen.*

(ii) Diketahui $a_n>0$ dan $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = R > 1$

Misalkan r adalah bilangan antara R dan 1 dimana $1 < r < R$, maka $\sqrt[n]{a_n} > r$ jadi $a_n > r^n$ untuk n yang cukup besar. Karena $\sum r^n$ adalah deret geometri yang divergen (dimana $r \geq 1$), maka menurut *Teorema Uji Banding* $\sum a_n$ *divergen.*

Contoh 15

Ujilah konvergensi deret $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+3}{3n+2}\right)^n$

Penyelesaian

$$a_n = \left(\frac{2n+3}{3n+2}\right)^n$$

$$\sqrt[n]{a_n} = \frac{2n+3}{3n+2} = \frac{2+\frac{3}{n}}{3+\frac{2}{n}} \to \frac{2}{3} < 1$$

Jadi, deret di atas konvergen menurut *Uji Akar*.

BAB III
PENUTUP

3.1 Simpulan

Untuk menguji apakah deret $\sum a_n$ dengan suku-suku positif itu konvergen atau divergen, perhatikan a_n dengan seksama.

1. Jika deret berbentuk $\sum 1 / n^p$, deret ini merupakan deret-*p*, yang kita tahu konvergen jika $p>1$ dan divergen jika $p \leq 1$.
2. Jika deret berbentuk $\sum ar^{n-1}$ atau $\sum ar^n$, deret ini merupakan deret geometrik, yang konvergen jika $| r | < 1$ dan divergen jika $| r | \geq 1$. Suatu manipulasi aljabar mungkin perlu dilakukan untuk mengubah deret ke bentuk ini.
3. Jika deret mempunyai bentuk yang mirip dengan deret-*p* atau deret geometrik, maka salah satu dari uji-uji perbandingan ini harus dipertimbangkan. Khususnya, jika a_n merupakan fungsi rasional atau fungsi aljabar dari n (melibatkan akar polinom), maka deret harus dibandingkan dengan suatu deret-*p*.
4. Jika anda dapat melihat sekilas bahwa $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, maka Uji Divergensi harus digunakan.
5. Deret yang melibatkan faktorial atau hasilkali lainnya (termasuk suatu konstanta yang dinaikkan menjadi pangkatan ke-*n*) seringkali lebih mudah diuji dengan Uji Rasio. Ingat bahwa $| a_{n+1} / a_n | \to \infty$ untuk semua deret-*p* dan karenanya semuanya merupakan fungsi rasional atau aljabar dari n. Jadi, Uji Rasio tidak dapat digunakan untuk deret demikian.
6. Jika a_n berbentuk $(b_n)^n$, maka Uji Akar mungkin berguna.
7. Jika $a_n = f(n)$, di mana $\int_1^\infty f(x)dx$ dengan mudah dapat dihitung, maka Uji Integral akan efektif (dengan asumsi bahwa hipotesis-hipotesis untuk uji ini dipenuhi).

3.2 Saran

Saran yang bisa penulis berikan dalam penulisan makalah ini adalah perlu adanya pengkajian lebih lanjut dalam pengujian kekonvergenan deret, dimana pengujian kekonvergenan tidak hanya dilakukan untuk deret dengan suku-suku positif saja tetapi juga untuk deret yang lain.

DAFTAR PUSTAKA

Purcell, Edwin J. dan Dale Varberg. 1987. *Kalkulus dan Geometri Analitis.* Jilid 1. Edisi kelima. Penerjemah: I Nyoman Susila, dkk. Jakarta: Penerbit Erlangga.

Purcell, Edwin J. dan Dale Varberg. 1987. *Kalkulus dan Geometri Analitis.* Jilid 2. Edisi kelima. Penerjemah: I Nyoman Susila, dkk. Jakarta: Penerbit Erlangga.

Purcell, Edwin J. dan Dale Varberg. 1987. *Kunci/Penyelesaian Soal-soal Kalkulus dan Geometri Analitis.* Jilid 2. Edisi keempat. Penerjemah: I Nyoman Susila, dkk. Jakarta: Penerbit Erlangga.

Stewart, James. 2003. *Kalkulus.* Edisi keempat. Penerjemah: I Nyoman Susila dan Hendra Gunawan. Jakarta: Penerbit Erlangga

Sugiman. 2005. *Kalkulus Lanjut.* Malang: Penerbit Universitas Negeri Malang