Penerapan Turunan

A. PENDAHULUAN

- **Turunan** dapat digunakan untuk:
  1) Perhitungan nilai limit dengan dalil l'Hôpital
  2) Menentukan persamaan fungsi kecepatan dan percepatan dari persamaan fungsi posisi
  3) Membentuk persamaan garis singgung suatu fungsi kurva
  4) Menentukan sifat dan grafik fungsi kurva
  5) Menentukan nilai maksimum dan minimum suatu fungsi kurva

B. DALIL L'HÔPITAL

- **Nilai limit fungsi** dengan bentuk tak tentu $\frac{0}{0}$ dan $\frac{\infty}{\infty}$ dapat diselesaikan dengan **dalil l'Hôpital**:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Contoh:

$$\lim_{x\to 3}\frac{2x^3-5x^2-2x-3}{4x^3-13x^2+4x-3} = \lim_{x\to 3}\frac{6x^2-10x-2}{12x^2-26x+4}$$

$$= \frac{6(3)^2-10(3)-2}{12(3)^2-26(3)+4} = \underline{\frac{11}{17}}$$

C. PERSAMAAN PADA KINEMATIKA GERAK

- **Pada kinematika gerak,** terdapat tiga besaran utama, yaitu posisi (s), kecepatan (v), dan percepatan (a).
- **Besaran** tersebut dapat dibentuk persamaan yang nilainya berubah terhadap waktu (t).
- **Kecepatan (v)** merupakan turunan pertama dari fungsi posisi.

$$v = s' = \frac{ds}{dt}$$

- **Percepatan (a)** merupakan turunan pertama fungsi kecepatan dan turunan kedua fungsi posisi.

$$a = v' = s'' = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}$$

Contoh:

Tentukan kecepatan dan percepatan pada t = 1 s dari fungsi posisi $s = 2t^2 + 3t - 5$!

Jawab:

$s' = 2.2.t^{(2-1)} + 1.3.t^{(1-1)} + 0.1$

$v = 4t + 3$ m/s　　$v(1) = 4(1) + 3$

　　$\underline{v(1) = 7 \text{ m/s}}$

$s'' = 1.4.t^{(1-1)} + 0.3$　　$\underline{a = 4 \text{ m/s}^2}$ (konstan)

D. PERSAMAAN GARIS SINGGUNG KURVA

- **Persamaan garis singgung** suatu kurva f(x) pada sembarang titik dapat dibentuk dengan turunan.

Gradien garis singgung

$$m = f'(x)$$

Pada garis ax + by + c = 0 dengan kemiringan α, nilai gradien:

$$m = -\frac{a}{b} = \tan\alpha$$

Gradien dua garis sejajar:

$$m_1 = m_2$$

Gradien dua garis tegak lurus:

$$m_1 = -\frac{1}{m_2}$$

Membentuk persamaan garis singgung

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

Contoh 1:

Tentukan persamaan garis singgung pada kurva $y = 8 - 5x + x^2$ di titik:

a. (1, 7),
b. berabsis 4,
c. berordinat 2.

Jawab:

$m = f'(x) = -5 + 2x$

a. $m = -5 + 2(0) = -5$

$y - 7 = -5(x - 1)$　　$\underline{y = -5x + 12}$

b. berabsis 4: x = 4

$m = -5 + 2(4) = 3$

$y = 8 - 5(4) + (4)^2 = 4$

$y - 4 = 3(x - 4)$　　$\underline{y = 3x - 8}$

c. berordinat 2: y = 2

$2 = 8 - 5x + x^2$　　$m_1 = -5 + 2(2) = -1$

$0 = 6 - 5x + x^2$　　$m_2 = -5 + 2(3) = 1$

$0 = (x - 2)(x - 3)$

$x = 2$　$y - 2 = -1(x - 2)$　$\underline{y = -x + 4}$ (pers. 1)

$x = 3$　$y - 2 = 1(x - 3)$　$\underline{y = x - 1}$ (pers. 2)

Contoh 2:

Tentukan persamaan garis singgung pada kurva $y = x^3 + 5$ yang tegak lurus garis x + 3y = 2!

Jawab:

Gradien garis singgung dapat dihitung:

$m_1 = -\frac{1}{3}$, $m_1 \perp m_2$, maka $m_2 = 3$

Cari titik singgung:

$m = y' = 3x^2 = 3$

$x^2 = 1$ $\quad$ $x = 1$ $\quad$ $y = (1)^3 + 5 = 6$

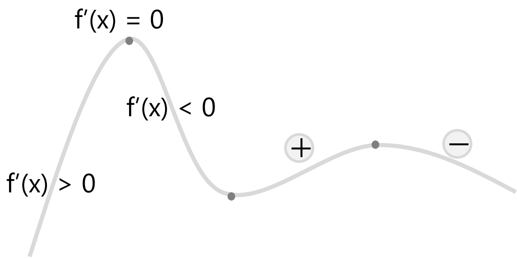
$\quad$ $x = -1$ $\quad$ $y = (-1)^3 + 5 = 4$

$y - 6 = 3(x - 1)$ $\quad$ $\underline{y = 3x + 3}$ (pers. 1)

$y - 4 = 3(x - (-1))$ $\quad$ $\underline{y = 3x + 7}$ (pers. 2)

E. SIFAT DAN GRAFIK FUNGSI

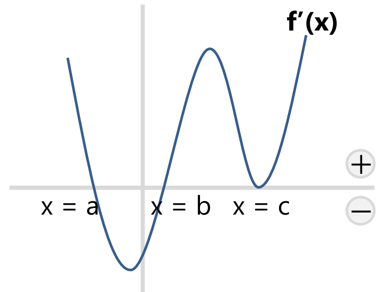
- **Sifat dan grafik fungsi** suatu kurva f(x) dapat ditentukan dengan turunan.
- **Sifat-sifat fungsi** pada interval tertentu:



Sifat fungsi	Syarat
Fungsi naik	$f'(x) > 0$
Fungsi turun	$f'(x) < 0$
Titik stasioner	$f'(x) = 0$
Selalu naik	$f'(x) > 0$
Selalu turun	$f'(x) < 0$
Tidak pernah naik	$f'(x) \leq 0$
Tidak pernah turun	$f'(x) \geq 0$

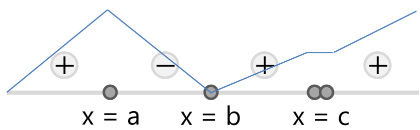
- **Sketsa grafik** dapat dilihat dari:

Grafik turunan fungsi (f'(x))



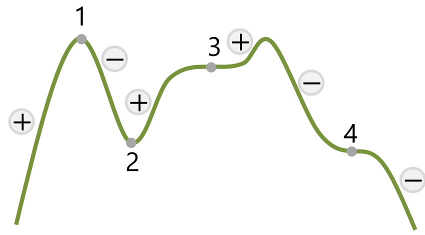
1) Grafik f'(x) di atas sumbu x menunjukkan interval fungsi naik pada f(x),
2) Titik pada sumbu x grafik f'(x) menunjukkan titik stasioner pada f(x),
3) Grafik f'(x) di bawah sumbu x menunjukkan interval fungsi turun pada f(x).

Garis bilangan turunan pertama fungsi (f'(x))

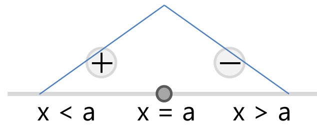


1) Garis bilangan dan nilai x adalah himpunan penyelesaian turunan fungsi (f'(x)).
2) Tanda +/– dan garis biru menunjukkan sifat fungsi naik, turun, dan titik stasioner pada f(x).

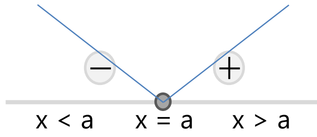
- **Jenis titik stasioner** dilihat dari garis bilangan turunan pertama fungsi (f'(x)):



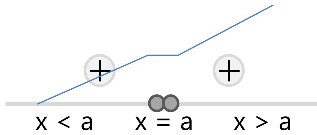
1) Titik balik maksimum



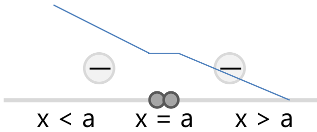
2) Titik balik minimum



3) Titik belok positif



4) Titik belok negatif



- **Jenis titik stasioner** juga dapat ditentukan dari turunan kedua fungsi (f''(x)).

1) Jika pada suatu titik **f'(x) = 0** dan **f''(x) ≠ 0**, maka titik itu adalah **titik balik**.
   a. Titik balik maksimum bila **f''(x) < 0**.
   b. Titik balik minimum bila **f''(x) > 0**.
2) Jika pada suatu titik **f'(x) = 0** dan **f''(x) = 0**, maka titik itu adalah titik belok yang jenisnya diuji dengan turunan pertama fungsi (f'(x)).

Contoh 1:

$f(x) = 3x^4 + 4x^3 + 2$, tentukan:

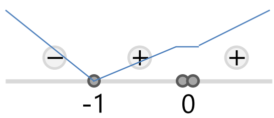
a. Interval naik dan turun
b. Nilai dan titik stasioner, beserta jenisnya

Jawab:

$f'(x) = 12x^3 + 12x^2 = 0$

$0 = 12x^2(x + 1)$

$x = 0$ $\quad$ $x = 0$ $\quad$ $x = -1$



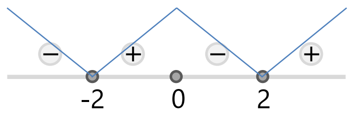
a. $\underline{\text{Interval naik}}$: $\underline{x > -1, x \neq 0}$

$\underline{\text{Interval turun}}$: $\underline{x < -1}$

b. Terdapat dua titik stasioner:
Balik minimum di x = -1,
Nilai balik minimum : $f(-1) = 12(-1)^3 + 12(-1)^2$
$f(-1) = 0$
Titik balik minimum : (-1, 0)
Belok positif di x = 0,
Nilai belok positif : $f(0) = 12(0)^3 + 12(0)^2$
$f(0) = 0$
Titik belok positif : (0, 0)

Contoh 2:
$f(x) = (x^2 – 4)^2$, tentukan:
a. Interval naik dan turun
b. Titik dan nilai stasioner, beserta jenisnya

Jawab:
$f'(x) = 2.(x^2 – 4).(2x) = 0$
$0 = 4x(x – 2)(x + 2)$
x = 2 x = 0 x = -2



a. Interval naik : $-2 < x < 0 \ V \ x > 2$
Interval turun : $x < -2 \ V \ 0 < x < 2$
b. Terdapat tiga titik stasioner:
Balik minimum di x = -2,
Nilai balik minimum : $f(-2) = ((-2)^2 – 4)^2$
$f(-2) = 0$
Titik balik minimum : (-2, 0)
Balik maksimum di x = 0,
Nilai belok positif : $f(0) = ((0)^2 – 4)^2$
$f(0) = 16$
Titik belok positif : (0, 16)
Balik minimum di x = 2,
Nilai balik minimum : $f(2) = ((2)^2 – 4)^2$
$f(2) = 0$
Titik balik minimum : (2, 0)

Contoh 3:
Tunjukkan bahwa fungsi berikut:
a. $f(x) = –x^3 + 6x^2 – 12x + 8$ tidak pernah naik.
b. $g(x) = x^3 + 2x^2 + 8x + 6$ selalu naik.

Jawab:
a. Syarat: $f'(x) \leq 0$
$f'(x) = –3x^2 + 12x – 12$
$f'(x) = –3(x^2 – 4x + 4)$
$f'(x) = –3.(x – 2)^2$ (selalu negatif), $f'(x) < 0$
$- \times + = -$ ($f'(x) = 0$ di x = 2), $f'(x) \leq 0$

b. Syarat: $f'(x) > 0$
$f'(x) = 3x^2 + 4x + 8$
$f'(x) = 3.(x^2 + \frac{4}{3}x + \frac{8}{3})$ (kuadrat sempurna)
$f'(x) = 3.([x + \frac{2}{3}]^2 + \frac{20}{9})$
$f'(x) = 3.(x + \frac{2}{3})^2 + \frac{20}{3}$ (selalu positif), $f'(x) > 0$
$+ \quad + \quad +$ (ada konstanta), $f'(x) \neq 0$

- **Dari sketsa grafik,** dapat dibuat gambar grafik fungsi kurva f(x).
- **Langkah-langkah** menggambar grafik fungsi:

1) Menentukan titik potong kurva f(x) dengan sumbu y.
2) Menentukan sketsa grafik dengan garis bilangan.
3) Menentukan titik stasioner dengan turunan pertama fungsi kurva f(x).

$f'(x) = 0$

4) Menentukan titik belok dengan turunan kedua fungsi kurva f(x).

$f''(x) = 0$

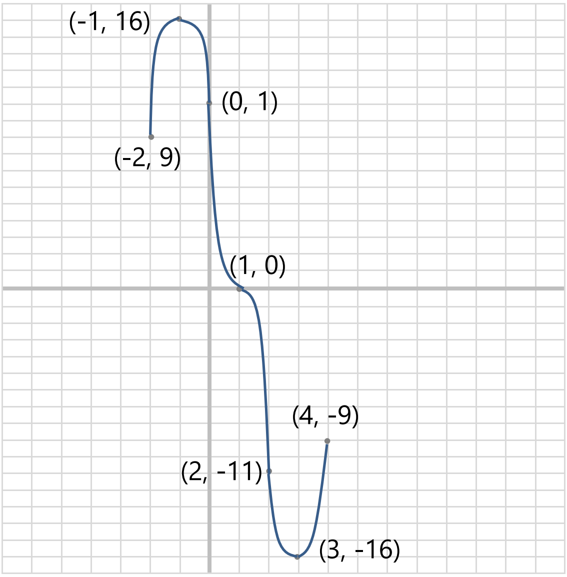
5) Menentukan titik bantu di sekitar titik stasioner untuk mempertajam grafik.

Contoh:
Gambarlah grafik dari $y = x^3 – 3x^2 – 9x + 11$.

Jawab:
Titik potong dengan sumbu y (x = 0),
$y = (0)^3 – 3(0)^2 – 9(0) + 11 = 11$ (0, 11) ...(1)
Titik stasioner,
$y' = 3x^2 – 6x – 9 = 0$
$0 = x^2 – 2x – 3$
$(x – 3)(x + 1)$
x = 3 $y = (3)^3 – 3(3)^2 – 9(3) + 11 = -16$
(3, -16) ...(2)
x = -1 $y = (-1)^3 – 3(-1)^2 – 9(-1) + 11 = 16$
(-1, 16) ...(2)
Titik belok,
$y'' = 6x – 6 = 0$
x = 1 $y = (1)^3 – 3(1)^2 – 9(1) + 11 = 0$
(1, 0) ...(4)
Titik bantu,

x	-2	2	4
y	9	-11	-9

Maka grafik dapat digambar:



F. NILAI MAKSIMUM DAN MINIMUM

- **Nilai maksimum dan minimum** suatu sfungsi kurva f(x) pada suatu interval dapat ditentukan dengan turunan.
- **Langkah-langkah** menentukan nilai maksimum dan minimum fungsi f(x) pada interval $a \leq x \leq b$:
  1) Tentukan nilai titik a dan titik b (f(a) dan f(b)),
  2) Tentukan titik-titik dan nilai-nilai stasioner pada interval tersebut,
  3) Tentukan mana nilai terbesar (maksimum) dan nilai terkecil (minimum) dari semua nilai di atas.

  Contoh:

  Tentukan nilai maksimum dan minimum $f(x) = x^3 - 6x^2 - 15x + 20$ pada interval $0 \leq x \leq 6$!

  Jawab:

  $f(0) = (0)^3 - 6(0)^2 - 15(0) + 20$ $\quad f(0) = 20$ ...(1)

  $f(6) = (6)^3 - 6(6)^2 - 15(6) + 20$ $\quad f(6) = -70$ ...(2)

  $f'(x) = 3x^2 - 12x - 15 = 0$

  $0 = x^2 - 4x - 5$ $\quad x = 5$

  $(x - 5)(x + 1)$ $\quad x = -1$ (tidak memenuhi)

  $f(5) = (5)^3 - 6(5)^2 - 15(5) + 20$ $\quad f(5) = -80$ ...(3)

  Maka, pada interval $0 \leq x \leq 6$,

  <u>Nilai maks f(x) = 20</u> <u>Nilai min f(x) = -80</u>

- **Nilai maksimum dan minimum** dapat diterapkan dalam permasalahan sehari-sehari.
- **Langkah-langkah** menyelesaikan permasalahan yang berkaitan dengan nilai maksimum dan minimum:
  1) Buat persamaan menggunakan permisalan dengan variabel-variabel (misalnya x dan y).
  2) Nyatakan fungsi yang ingin dicari nilai maksimum dan minimumnya dalam satu variabel saja.
  3) Cari suatu persamaan yang dapat menghubungkan variabel-variabel agar dapat dilakukan substitusi sehingga fungsi yang ingin dicari menjadi dalam satu variabel saja.
  4) Lakukan langkah-langkah menentukan nilai maksimum dan minimum fungsi.

Contoh 1:

Diketahui jumlah dua bilangan positif adalah 24, tentukan kedua bilangan tersebut dan hasil kali maksimumnya.

Jawab:

Misalkan kedua bilangan adalah a dan b, maka:

$a + b = 24$ $\quad b = 24 - a$

HK = a.b

$HK = a(24 - a) = 24a - a^2$

$HK' = 24 - 2a = 0$

<u>a = 12</u> $\quad$ HK maks = 12.12

$b = 24 - 12$ <u>b = 12</u> $\quad$ <u>HK maks = 144</u>

Contoh 2:

Biaya suatu pekerjaan per hari mengikuti persamaan $f(x) = (24 - 2x^2)$ dalam ribu rupiah. Jika pekerjaan tersebut selesai dalam x hari, tentukan biaya pekerjaan minimum!

Jawab:

Karena persamaan f(x) memenuhi biaya pekerjaan per hari, maka persamaan yang memenuhi biaya pekerjaan x hari adalah:

$BP = x(24 - 2x^2) = 24x - 2x^3$

$BP' = 24 - 6x^2 = 0$

$0 = 4 - x^2$ $\quad x = -2$ hari (tidak mungkin)

$(2 - x)(2 + x)$ $\quad x = 2$ hari

$BP\ min = 24(2) - 2(2)^3$

<u>BP min = 32 ribu rupiah</u> (Rp32.000)

Contoh 3:

Perusahaan memproduksi x unit mobil tiap hari dengan biaya produksi $P(x) = x^2 + 30x + 50$ dalam juta rupiah.

Jika harga jual tiap unit mobil Rp150.000.000, tentukan keuntungan maksimum perusahaan tersebut setiap harinya!

Jawab:

keuntungan = harga jual – biaya produksi

$K = 150x - (x^2 + 30x + 50) = -x^2 + 120x - 50$

$K' = -2x + 120 = 0$ $\quad x = 60$ unit

$K\ maks = -x^2 + 120x - 50$

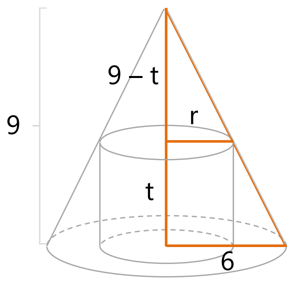
$K\ maks = -(60)^2 + 120(60) - 50$

<u>K maks = 3550 juta rupiah</u> (Rp3.550.000.000)

Contoh 4:

Sebuah kerucut tegak dengan jari-jari alasnya 6 cm, tingginya 9 cm, di dalamnya dibuat tabung yang alas dan titik pusatnya berimpit dengan alas dan titik pusat kerucut. Tentukan volume maksimum dari tabung tersebut.

Jawab:



$\frac{r}{6} = \frac{9-t}{9}$

$9r = 54 - 6t$

$6t = 54 - 9r$

$t = 9 - \frac{3}{2}r$

$V = \pi r^2 t$

$V = \pi r^2(9 - \frac{3}{2}r) = 9\pi r^2 - \frac{3}{2}\pi r^3$

$V' = 18\pi r - \frac{9}{2}\pi r^2 = 0$

$18\cancel{\pi r} = \frac{9}{2}\cancel{\pi r^2}$ $\quad$ $r = 4$ cm

$t = 9 - \frac{3}{2}(4)$ $\quad$ $t = 3$ cm

V maks $= \pi.(4)^2.(3)$ $\quad$ <u>V maks = 48π cm^3</u>

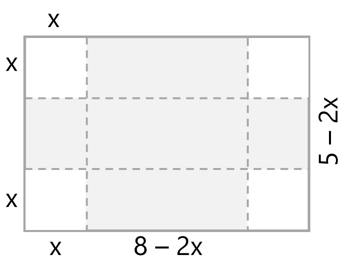
Contoh 5:

Karton berbentuk persegi panjang dengan ukuran 5 x 8 dm, keempat pojoknya dipotong persegi dengan sisi x dm.

Dari bangun yang didapat, dibuat sebuah kotak tanpa tutup. Tentukan ukuran kotak agar volumenya maksimum!

Jawab:

Misalkan daerah yang diarsir adalah bangun yang didapat,



$p = 8 - 2x$

$l = 5 - 2x$

$t = x$

$V = p.l.t$

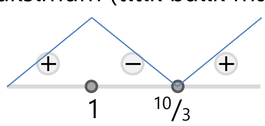
$V = (8 - 2x).(5 - 2x).(x) = 48x - 26x^2 + 4x^3$

$V' = 40 - 52x + 12x^2 = 0$

$0 = 3x^2 - 13x + 10$ $\quad$ $x = 1$

$(3x - 10)(x - 1)$ $\quad$ $x = \frac{10}{3}$

Uji dengan turunan pertama untuk menentukan mana titik maksimum (titik balik maksimum),



Dari garis bilangan, diketahui bahwa nilai maksimum terjadi pada x = 1, maka:

$p = 8 - 2(1)$ $\quad$ <u>p = 6 dm</u>

$l = 5 - 2(1)$ $\quad$ <u>l = 3 dm</u>

$t = (1)$ $\quad$ <u>t = 1 dm</u>

Contoh 6:

Diketahui sebuah kotak beralas persegi. Jika luas permukaan kotak 192 cm^2. Tentukan ukuran kotak agar volumenya maksimum jika,

a. Kotak tidak memiliki tutup,
b. Kotak memiliki tutup.

Jawab:

Jika kotak beralaskan persegi maka,

$p = x$ $\quad$ $t = y$

$l = x$ $\quad$ $V = p.l.t = x^2y$

a. $x^2 + 4xy = 192$ $\quad$ $y = \frac{192 - x^2}{4x}$

$V = x^2.\frac{192 - x^2}{4x} = 48x - \frac{1}{4}x^3$

$V' = 48 - \frac{3}{4}x^2 = 0$

$x^2 = 64$ $\quad$ $x = -8$ (tidak mungkin)

$x = 8$

$y = \frac{192 - (8)^2}{4(8)} = \frac{128}{32} = 4$

V maks $= (8)^2.4$

<u>V maks = 256 cm^3</u>

b. $2x^2 + 4xy = 192$ $\quad$ $y = \frac{96 - x^2}{2x}$

$V = x^2.\frac{96 - x^2}{2x} = 48x - \frac{1}{2}x^3$

$V' = 48 - \frac{3}{2}x^2 = 0$

$x^2 = 32$ $\quad$ $x = -4\sqrt{2}$ (tidak mungkin)

$x = 4\sqrt{2}$

$y = \frac{192 - (4\sqrt{2})^2}{4(4\sqrt{2})} = \frac{160}{16\sqrt{2}} = 5\sqrt{2}$

V maks $= (4\sqrt{2})^2.\ 5\sqrt{2}$

<u>V maks = $160\sqrt{2}$ cm^3</u>