Ministerio de Educación Pública
CENADI

MATEMÁTICAS
10º AÑO

TELESECUNDARIA DE COSTA RICA
2005

CRÉDITOS

Compiladora
Lilliam Rojas Artavia
Asesora de Matemática
CENADI-MEP

Autor: Ministerio de Educación Pública
Centro Nacional de Didáctica

Enero, 2005

AUTORIDADES NACIONALES

Manuel Antonio Bolaños Salas
Ministro de Educación Pública

Wilfrido Blanco Mora
Viceministro Académico de Educación Pública

Marlen Gómez Calderón
Viceministra Administrativa de Educación Pública

Daisy Orozco Rodríguez
Directora Ejecutiva del CENADI

Emma Fernández Jarquín
Directora de Telesecundaria

PRESENTACIÓN

El Centro Nacional de Didáctica (CENADI) el cual, por la naturaleza de su creación, procura el desarrollo cualitativo de la educación costarricense, se complace en presentar esta obra a todas las actoras y los actores educativos de los Colegios de Telesecundaria.

La labor tesonera del CENADI, en aras de recopilar, adaptar y crear recursos de apoyo a los procesos educativos, se ve materializada, una vez más, en el presente Compendio para Matemática X año.

El documento se pone a la disposición de docentes y estudiantes de Telesecundaria para enfrentar los retos que demanda este nivel educativo, en la asignatura de Matemática como una fuente de información y, sobretodo, como un estímulo e inspiración para profundizar en la investigación y autoaprendizaje de las y los estudiantes.

La producción de este tipo de materiales didácticos, vienen a constituir un eslabón más de esa gran cadena de esfuerzos conjuntos, que buscan garantizar el éxito y la consolidación de un modelo psicopedagógico dirigido a la formación de estudiantes de las zonas más alejadas del país.

Por lo tanto, reciban con todo cariño esta obra, que fue planificada, escrita y publicada para ustedes.

Cordialmente

Máster Daisy Orozco Rodríguez
Directora Ejecutiva del Centro Nacional de Didáctica

INTRODUCCIÓN

La presente Antología de Matemática para 10º año se ha preparado para la ampliación de la Telesecundaria de Costa Rica a la Educación Diversificada.

Ésta incluye material perteneciente a México, país que ha brindado todo su apoyo a la iniciativa costarricense. Contiene material desarrollado en el Centro de Información Electrónica, del CENADI, cuya base de datos ha permitido el desarrollo de algunos temas. Por otra parte, la red de Internet también ha sido consultada y aprovechada. Asimismo, presenta material inédito de algunas personas, asesores y docentes del Ministerio de Educación Pública, cuya colaboración ha sido sumamente valiosa para el propósito que nos ocupa.

Los diferentes artículos poseen características que les distingue. Las diferentes fuentes de información se citan al final del documento. Es importante tomar en cuenta que este compendio no pretende suplir todas las necesidades que requiere el proceso educativo y representa un esfuerzo abierto a todo tipo de observación y aporte que le pueda enriquecer.

Esperando que la lectura, análisis y aprovechamiento se centre en el componente principal de la educación: la juventud. Al mismo tiempo, que la sabia guía docente sea, como ya lo ha logrado antes, el soporte acertado para el éxito educativo en nuestros Colegios de Telesecundaria.

Lilliam Rojas Artavia
Asesora de Matemática
Telesecundaria 2005

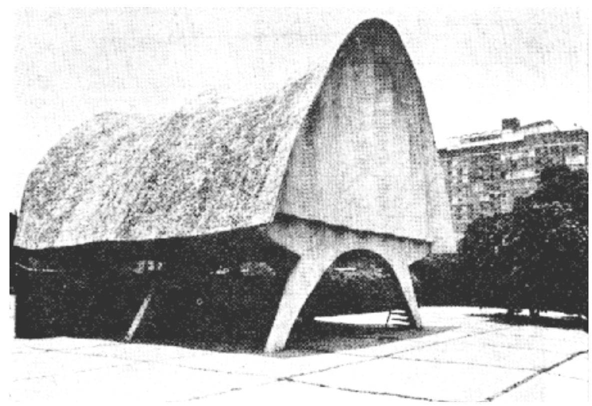
ÍNDICE

ECUACIONES CUADRÁTICAS(12)

Reseña histórica

"A fines del siglo XVI el matemático francés **Francisco Vietta (1540-1603)** introdujo por primera vez expresiones tales como $ax^2 + b = 3$ donde a y b podían ser números cualesquiera. La genialidad de Vietta permitió dar uno de los saltos más importantes del álgebra. Con mucha razón, a veces, se le llama el padre del álgebra moderna."[1]

Concepto de la ecuación cuadrática



Antes de iniciar la discusión del concepto de ecuación cuadrática, es necesario destacar la importancia que tiene para la humanidad el estudio del álgebra. Los científicos y los técnicos, tienen al álgebra como su herramienta, pues; estudiando a la resolución de problemas como los siguientes: ¿Cuál es la trayectoria que sigue un cohete disparado en la Tierra para llegar a la Luna? ¿Qué velocidad inicial debe imprimírsele a dicho cohete para que pueda vencer la fuerza de gravedad terrestre?, trabajan constantemente con ecuaciones.

En el cálculo de muchas estructuras se utilizan diversas ecuaciones, entre las cuales algunas son de segundo grado.

¿Qué es una ecuación?

Recordemos: Una ecuación, es una igualdad que se establece entre dos expresiones matemáticas que involucran números y letras.

Ejemplos:
a) 3x+2 = -7
b) $2x^2 - 3x + 6 = 2$
c) $\sqrt{2}x^2 + 3x - 7 = 2x - 1$

La ecuaciones de acuerdo a su grado se clasifican en:

DE PRIMER GRADO: son aquellas en donde la incógnita, sólo aparece con exponente uno.

CUADRÁTICAS: son aquellas en donde la incógnita tiene como mayor exponente el dos.

[1] Barahona, Manuel. Matemática Elemental por objetivos. 9º año. 1993. San José, Costa Rica. Editorial Librería Francesa.

CÚBICAS: son aquellas en donde la incógnita tiene como mayor exponente el tres.

No solo éstas ecuaciones existen, las hay también de 4º grado y mayores grados.

De acuerdo con la clasificación anterior tenemos que:

Una ecuación cuadrática es una igualdad algebraica donde el mayor exponente de la incógnita (x) es dos.

La forma general de una ecuación cuadrática es la siguiente: **$ax^2 + bx + c = 0$.**

En los ejemplos anteriores son ecuaciones cuadráticas las siguientes:

b) $2x^2 - 3x + 6 = 2$
c) $\sqrt{2}x^2 + 3x - 7 = 2x - 1$

Por conveniencia , se usa preferentemente la letra **"a"** para designar al coeficiente de la incógnita con exponente 2, se usa la **"b"** para designar al coeficiente de la incógnita con exponente 1 y **"c"** para designar al término independiente; **a, b, c** son números reales y **a** siempre es diferente de cero.

Explique con sus propias palabras: ¿Por qué **a** debe ser diferente de cero?

En el ejemplo b) $2x^2 - 3x + 6 = 2$ el término independiente **NO** es 6 pues la ecuación debe estar igualada a cero para poder designar los valores de a, b y c respectivamente, por lo que es necesario igualar a cero la ecuación, para ello restamos a ambos lados de la igualdad el número 2. Obteniendo como resultado lo siguiente: $2x^2 - 3x + 6 - 2 = 0$ o sea $2x^2 - 3x + 4 = 0$ entonces, de acuerdo a la forma general de la ecuación cuadrática se tiene a = 2, b = -3 y c= 4.

ACTIVIDAD:

Iguale la ecuación del ejercicio c) $\sqrt{2}x^2 + 3x - 7 = 2x - 1$ a cero y determine los valores de a, b y c.

Sugerencia: Sume términos semejantes.

Solución de una ecuación de segundo grado o ecuación cuadrática

Las soluciones de una ecuación son los valores de la incógnita (x) que satisfacen la igualdad. A esos valores se les llama también **raíces o ceros** del polinomio en cuestión.

Ejemplo:

3 es la solución de la ecuación: $x^2 - 2x = 3$

Pues al sustituir x por 3 en la ecuación, se satisface la igualdad.

Observe:

$$\begin{aligned} x^2 - 2x &= 3 \\ 3^2 - 2 \cdot 3 &= 3 \\ 9 - 6 &= 3 \\ 3 &= 3 \end{aligned}$$

Fórmula general para obtener la solución de una ecuación cuadrática

En la resolución de ecuaciones de segundo grado se puede utilizar la fórmula general y casos especiales de la formula general.

Las raíces o ceros de la ecuación: **ax² + bx + c = 0** , con **a, b, c** $\in$ **R** ; **a** $\neq$ **0,**

se puede obtener mediante la aplicación de la formula general: $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

En la fórmula general, se llama discriminante al subradical y puede ser representado con el símbolo Δ.

Observe en la fórmula:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

El discriminante es Δ **= b² - 4ac**

I. Cuando el subradical es un número mayor que cero, la ecuación respectiva tiene dos soluciones reales y diferentes.

II. Cuando el subradical es cero, la ecuación correspondiente, tiene una sola solución real.

III. Cuando el subradical es un número menor que cero, la ecuación no tiene soluciones reales

Para utilizar la fórmula general es necesario determinar el caso en el que se está trabajando, para ello analice los ejemplos que se presentan a continuación.

1. Caso: cuando a, b y c son diferentes de cero.

EJEMPLO

Hallar las raíces o ceros de la ecuación **$6x^2 + 5x - 4 = 0$**

Resolución:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad \mathbf{a = 6 \quad b = 5 \quad c = -4}$$

Sustituimos los valores de a, b y c en la fórmula:

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 6 \cdot (-4)}}{2 \cdot 6} \Rightarrow x = \frac{-5 \pm \sqrt{25 + 96}}{12} \Rightarrow x = \frac{-5 \pm \sqrt{121}}{12}$$

$$x = \frac{-5 \pm 11}{12} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{-5 + 11}{12} = \dfrac{6}{12} = \dfrac{1}{2} & \text{O sea } x_1 = \dfrac{1}{2} \\ x_2 = \dfrac{-5 - 11}{12} = \dfrac{-16}{12} = \dfrac{-4}{3} & \text{O sea } x_2 = \dfrac{-4}{3} \end{cases}$$

Respuesta:

Las raíces o ceros de **$6x^2 - 5x + 4 = 0$** son $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{4}$

ACTIVIDAD:

Encontrar las raíces o ceros de las siguientes ecuaciones:

1) **$4x^2 - 7x + 10 = 0$**
2) **$-2x^2 - x + 15 = 0$**
3) **$(2x - 1)(3x + 2) = 1 + x - 3x^2$**
4) **$\dfrac{4x^2 - 3}{11} - \dfrac{2x - 3}{3} = \dfrac{x^2 + 1}{5}$**

Respuestas

1)no hay solución,

2) $x_1 = \dfrac{1 + \sqrt{1201}}{-4}, x_2 = \dfrac{1 - \sqrt{1201}}{-4}$,

3) $x_1 = \dfrac{-1 + \sqrt{109}}{18}, x_2 = \dfrac{-1 - \sqrt{109}}{18}$

4) $x_1 = 3, x_2 = 1{,}07$

2. Caso: cuando a y b son diferentes de cero y c es igual a cero:

EJEMPLO:

Hallar las raíces o ceros de la ecuación **6 x^2 - 7 x = 0**

Este ejercicio se puede resolver de dos formas:

1) sustituyendo, cada valor en la fórmula general y procediendo como el ejemplo anterior ó

2) abreviar la aplicación de la fórmula general $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, ya que el término **4ac** se anula por ser c = 0 quedando

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2}}{2a} = \begin{cases} x_1 = \frac{-b-b}{2a} = \frac{-2b}{2a} = \frac{-b}{a} \\ x_2 = \frac{-b+b}{2a} = \frac{a}{2a} = 0 \end{cases}$$

De modo que el ejercicio

6 x^2 - 7x = 0 se resuelve sustituyendo b = -7, a = 6 en $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2}}{2a}$

así, $x = \frac{-(-7) \pm \sqrt{7^2}}{2 \cdot 6} = \frac{7 \pm 7}{12}$

$$x_1 = \frac{7+7}{12} = \frac{14}{12} = \frac{7}{6} \quad \text{o} \quad x_1 = \frac{-b}{a} = \frac{-(-7)}{6} = \frac{7}{6}$$

luego

$$x_2 = \frac{7-7}{12} = \frac{0}{12} = 0 \quad \text{o} \quad x_2 = \frac{0}{2a} = 0$$

ACTIVIDAD:

Encontrar las raíces o ceros de las siguientes ecuaciones:

1. **x^2 - 2x = 0**
2. **$6x^2$ - 10x =0**
3. **3- $2x^2$ = -6x**
4. **$(x + 3)^2$ - 9 = 0**

Respuestas

1) $x_1 = 2, x_2 = 0$, 2) $x_1 = \frac{5}{3}, x_2 = 0,$ 3) $x_1 = -3, x_2 = 0$, 4) $x_1 = -6, x_2 = 0$

3. Caso: cuando a y c son diferentes de cero y b es igual a cero.

Hallar las raíces ó ceros de la ecuación **$3x^2 - 12 = 0$**
Para resolver este tipo de ecuaciones utilizamos el siguiente método.
Si se tiene **$ax^2 + c = 0$** entonces $\boldsymbol{ax^2 = -c}$

$$\boldsymbol{x^2 = \frac{-c}{a}}$$

$$\boldsymbol{x = \pm\sqrt{\frac{-c}{a}}}$$

en nuestro ejemplo aplicando la fórmula abreviada, tenemos que:

$$3x^2 = 12$$

$$x^2 = \frac{12}{3}$$

$$x^2 = 4$$

$$x = \pm\sqrt{4}$$

$$x = \pm 2 \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -2 \end{cases}$$

ACTIVIDAD:

Encontrar las raíces o ceros de las siguientes ecuaciones:

1) $\boldsymbol{9x^2 - 1 = 0}$
2) $\boldsymbol{x^2 - 36 = 0}$

Respuestas:

1) $\boldsymbol{x_1 = \frac{1}{3}, x_2 = \frac{-1}{3}}$, 2) $\boldsymbol{x_1 = 6, x_2 = -6}$

Fuentes de Información

Barahona, Manuel.(1992) Matemática Elemental por Objetivos. 9º. San José, Costa Rica: Ediciones Librería Francesa.

RESOLUCIÓN DE ECUACIONES CUADRÁTICAS MEDIANTE FACTORIZACIÓN(12)

Resolución de ecuaciones cuadráticas mediante factorización aplicando los productos notables

Anteriormente se estudió la ecuación cuadrática y la resolución de ecuaciones cuadráticas mediante la fórmula general. También es posible resolverlas mediante la aplicación de productos notables.

Se pueden recordar las siguientes “fórmulas notables”.

Primera fórmula notable: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

Segunda fórmula notable: $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

Tercera fórmula notable: $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$

Ejemplos:

a) $(2x+3y)^2 = (2x)^2 + 2(2x)(3y) + (3y)^2 = 4x^2 + 12xy + 9y^2$

b) $(3x-5y)^2 = (3x)^2 - 2(3x)(5y) + (5y)^2 = 9x^2 - 30xy + 25y^2$

c) $(x+2y)(x-2y) = x^2 - (2y)^2 = x^2 - 4y^2$

Observe que las dos primeras fórmulas notables son trinomios cuadrados perfectos.

Actividad

Investigue y construya con sus propias palabras la definición de los siguientes términos:
cuadrado perfecto:…..
trinomio cuadrado:…..

Un método práctico y cómodo de resolver ecuaciones cuadráticas de la forma $ax^2 + bx + c = 0$ con a, b, c $\in \Re$, es la aplicación de la factorización del trinomio $ax^2 + bx + c$.

El trinomio $ax^2 + bx + c$ es factorable por producto notable si al calcular el discriminante $\Delta = b^2 - 4ac$ de la fórmula general $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, se obtiene que $\Delta = 0$.
En este caso debemos recordar de la práctica Nº 1 que la ecuación posee dos raíces iguales $x_1 = x_2$.

Esta condición del discriminante hace que la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ se pueda expresar $\left(\sqrt{a}x + \sqrt{c}\right)^2 = 0$, en donde a y c son cuadrados perfectos.

Ejemplo resuelto:

Resolver la ecuación $9x^2 - 30x + 25 = 0$

Procedimiento: Lo primero que se debe hacer es el cálculo del discriminante:

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = (-30)^2 - 4 \cdot 9 \cdot 25$$

$$\Delta = 900 - 900$$

$\Delta = 0$ la ecuación posee dos raíces iguales, por lo tanto la ecuación:

$9x^2 - 30x + 25 = 0$ se puede expresar de la siguiente manera: $\left(\sqrt{9x^2} - \sqrt{25}\right)^2 = 0$ o sea

$\Delta = 0$ $9x^2 - 30x + 25 = 0$ es factorizable de acuerdo a la segunda fórmula notable en:

$$(3x - 5)^2 = 0$$

Explique: ¿Cómo se obtuvo el resultado 3x en la expresión anterior?................................

¿Cómo se obtuvo el resultado 5 en la expresión anterior?..................................

Continuando con el proceso de solución de la ecuación $9x^2 - 30x + 25 = 0$ se tiene que: $(3x - 5)^2 = 0$, aquí se puede proceder de dos formas:

a)	b)
Expresar $(3x - 5)^2 = 0$ como $(3x - 5)^2 = (3x - 5)(3x - 5) = 0$ De–donde se concluye que 3x - 5 = 0– o que el otro factor 3x - 5 = 0 3x = 5 x = $\frac{5}{3}$	Partiendo de que en $(3x - 5)^2 = 0$ se puede despejar x, quitando el exponente 2 con la aplicación de raíz cuadrada a ambos. 3x - 5 = 0 luego se despeja: 3x = 5 x = $\frac{5}{3}$

En ambos procedimientos se obtiene como solución a x = $\frac{5}{3}$

Ejemplos de ecuaciones que pueden resolverse aplicando la primera o la segunda fórmula notable:

$a) 4x^2 - 12x + 9 = 0$

$b) x^2 + 6x + 9 = 0$

$c) 16x^2 - 16x + 4 = 0$

$d) 25x^2 + 10x + 1 = 0$

$e) \frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{4}x + \frac{9}{16} = 0$

El caso de la tercera fórmula notable se presenta cuando en la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$, b=0 y c es el opuesto de un cuadrado perfecto.

La estructura de la ecuación es $ax^2 - c = 0$

Ejemplos de estas ecuaciones son:

$$a)4x^2 - 9 = 0$$

$$b)x^2 - \frac{4}{25} = 0$$

$$c)36x^2 - 64 = 0$$

$$d)\frac{9}{49}x^2 - \frac{1}{81} = 0$$

Para encontrar la solución de este tipo de ecuaciones, utilizamos la factorización por tercera fórmula notable.

Ejemplo resuelto:

Resolver la ecuación $64x^2 - 49 = 0$

Procedimiento:

$64x^2$ es el cuadrado perfecto de 8x y **49** es el cuadrado perfecto de 7. Por lo tanto, $64x^2 - 49 = 0$ se puede factorizar como: $(8x + 7)(8x - 7) = 0$

Recordemos que en un producto a·b = 0 , alguno de los dos factores o ambos deben ser 0. En el procedimiento de solución de $(8x + 7)(8x - 7) = 0$

se tiene que – 8x + 7 = 0 ó 8x - 7 = 0

$\Rightarrow$ 8x = -7 $\Rightarrow$ 8x = 7

$$x = \frac{-7}{8} \qquad x = \frac{7}{8}$$

Por lo tanto, las raíces de la ecuación $64x^2 - 49 = 0$ son

$$x = \frac{-7}{8} \text{ y } x = \frac{7}{8}.$$

Nota: Cuando las ecuaciones cuadráticas no corresponden a ninguno de los casos de las tres fórmulas notables expuestas anteriormente, utilizamos para su resolución la fórmula general o la evaluación (división sintética)

Rompecabezas matemático

Instrucciones: Copie el siguiente cuadriculado en una cartulina. Luego recorte los doce cuadrados. El juego consiste en construir el cuadriculado de manera que cada ecuación quede coincidentemente “a la par” de su conjunto de solución.

$\{-2;\ 5\}$ $2x^2 = 3x$ $\{-1;\ 3\}$	$x^2 - 2x - 3 = 0$ $\left\{\frac{3}{2};\ \frac{-3}{2}\right\}$ $t^2 - 8t = -14$ $25y^2 - 25y + 6 = 0$	$3x^2 = -7$ $\left\{\frac{1}{2}\right\}$	$\{0,4;\ 0,6\}$ $4x^2 - 4x = -1$ $\{-1\}$
$\{0,5;\ 0,2\}$ $x^2 - 9 = 0$ $\{3-\sqrt{2};\ -3-\sqrt{2}\}$	$(x+2)(x-5)$ $x^2 + (x+5)^2 = 5 + 4(3-x)$	$\{-3;\ 1\}$ $\{4+\sqrt{2};\ 4-\sqrt{2}\}$ $\{-3;\ 3\}$ $\left\{5;\ \frac{1}{2}\right\}$	$x^2 + 2\sqrt{2}x - 7 = 0$ $w^2 - 2{,}5w + 1 = 0$
$\{1{,}5;\ 0\}$ $x^2 = 49$ $3x(2x+4) = 18$	$\{-7;\ 7\}$ $x^2 - 0{,}7x + 0{,}1 = 0$	$\left\{\frac{-7+\sqrt{33}}{2};\ \frac{-7-\sqrt{33}}{2}\right\}$ $4x^2 = 9$ ϕ	$2x^2 - 11x + 5 = 0$ $(x+1)^2 = 0$ $\left\{\frac{1}{2};2\right\}$

Fuente de Información

Ubicación: San Pedro de Montes de Oca, Biblioteca de la Universidad de Costa Rica.

Barahona, Manuel.(1992) **Matemática Elemental por Objetivos. 9º.** San José, Costa Rica: Ediciones Librería Francesa.

SOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN CUADRÁTICA UTILIZANDO LA CALCULADORA *EQUATION*(13)

Antecedentes

El desarrollo humano es tal que a la par del conocimiento puro se van creando los instrumentos, la técnica y otros apoyos para trabajar con el conocimiento. El caso de las calculadoras es un ejemplo de ello.

En la historia antigua de América se verifica la existencia de medios para facilitar el cálculo, en Mesoamérica hay indicios de un ábaco similar al ábaco oriental. El quipú en la cultura Inca servía para mantener la memoria del pueblo pero también para conteos.

En 1642, el francés Blaise Pascal inventó la primera calculadora digital y le llamó Pascaline, este instrumento se asemejaba a una calculadora mecánica de los años 1940.

Controversia

Hay quienes se oponen al uso de la calculadora, sin embargo, otras personas la utilizan apropiadamente.

La calculadora obliga al usuario a mantener el orden lógico, a tener claridad en los conceptos matemáticos, por otra parte facilita y motiva la solución de problemas.

Un caso particular

CASIO tiene un modelo denominado *EQUATION*, la cual soluciona ecuaciones cuadráticas.

La calculadora reporta **E** cuando la ecuación no tiene soluciones reales.

Indica **x** seguido por un número cuando la ecuación tiene una sola solución.

Reporta **x1** y un número cuando hay dos soluciones reales, posteriormente muestra la otra solución.

Para utilizar esta opción de la *EQUATION* se debe tener muy clara la forma de la ecuación.

Las siguientes son ecuaciones cuadráticas, pero no todas están listas para usar la calculadora en su solución:

$x^2+2+3x=0$	$-2x+5+x^2=0$	$x^2+2x+3=1$
$x^2+2=2x$	$x^2-12x+3=0$	$5-x^2+2x+3=12$
$-2x^2+2=0$	$x^2-6x=0$	$x^2-x+3=-2x^2+3x$

Para determinar la o las soluciones de cada ecuación con la calculadora es necesario igualar a cero, ordenar en forma decreciente, utilizar suma entre los términos y *completar* con ceros donde no hay término.

Observe detenidamente los cambios de las ecuaciones anteriores:

$x^2 + 3x + 2 = 0$	$x^2 + -2x + 5 = 0$	$x^2 + 2x + 2 = 0$
$x^2 + -2x + 2 = 0$	$x^2 - 12x + 3 = 0$	$-x^2 + 2x + -4 = 0$
$-2x^2 + 0x + 2 = 0$	$x^2 + -6x + 0 = 0$	$3x^2 + -4x + 3 = 0$

¿Cuáles cambios se hicieron en cada ecuación?

¿Qué características comunes observa en los ejemplos?

¿En relación con la forma de la escritura de las ecuaciones cuál(es) detalle(s) observa?

Una de las formas de anotar una ecuación cuadrática es la utilizada en las ecuaciones anteriores.

Se puede afirmar que todas cumplen la forma simbólica: $ax^2 + bx + c = 0$

Siempre que se va a utilizar la *EQUATION* es necesario remitirse a este formato, de lo contrario, la información obtenida será falsa.

Para ejecutar los comandos en la calculadora se debe reconocer cada uno de los coeficientes de la ecuación, de ahí la importancia del cuidado en la forma de escritura.

A continuación se determinarán los coeficientes a, b y c de las ecuaciones expuestas. Complete las casillas en gris.

Ecuación cuadrática	**a**	**b**	**c**
$x^2 + 3x + 2 = 0$	1	3	2
$x^2 + -2x + 2 = 0$		-2	
$-2x^2 + 0x + 2 = 0$	-2	0	2
$x^2 + -2x + 5 = 0$	1	-2	5
$x^2 - 12x + 3 = 0$			
$x^2 + -6x + 0 = 0$	1	-6	0
$x^2 + 2x + 2 = 0$	1		
$-x^2 + 2x + -4 = 0$	-1	2	-4
$3x^2 + -4x + 3 = 0$			

Elija un ejemplo, determine correctamente los coeficientes, verifique que la ecuación esté igualada a cero y ejecute el siguiente procedimiento:

- Encienda la calculadora.
- Presione la tecla "MODE", está junto al Shift.
- Presione 1.
- *Aparece una letra a con u¿ signo de interrogación:* **a ?**. Digite el valor del coeficiente a.
- Presione la tecla M+, está en una esquina inferior.
- *Aparece una letra b con u¿ signo de interrogación:* **b ?**. Digite el valor del coeficiente b.
- Presione la tecla M+.

- *Aparece una letra c con u¿ signo de interrogación:* **c ?**. Digite el valor del coeficiente c.
- Presione la tecla M+.

A continuación la pantalla le mostrará:

- Una **E**, si el conjunto de solución es vacío, o sea si el conjunto de solución es ϕ.
- Una **x** seguida de un número si la ecuación tiene dos soluciones iguales, en este caso el conjunto de solución es el conjunto con ese número, por ejemplo: $\{-3\}$.
- El símbolo **x1** seguido de un número. En este caso, hay dos soluciones distintas. Para ver la otra solución se presiona la tecla M+. Entonces aparece **x2** seguido de un número. El conjunto se solución tiene como elementos a esos dos números. Por ejemplo: $\{\ 0;\ -17\}$

Actividad complementaria

1. Utilizando calculadora determine la solución de cuatro de las ecuaciones expuestas en el documento.
2. En grupos de tres, inventen tres ecuaciones cuadráticas e intercambien los ejercicios. Posteriormente, preparen una exposición de la solución de los ejercicios.

Fuentes de información

María Rojas Artavia, egresada de Ingeniería en Sistemas de la UNA.

Rojas Artavia, Lilliam. (2000) **Ábaco.** Documento escrito del KIOSCO DE INFORMACION, CENADI-MEP.

Castillo Sánchez, Mario. (1998) **Biografía de Blaise Pascal.** Documento escrito del KIOSCO DE INFORMACION, CENADI-MEP.

COLECCIÓN DE EJERCICIOS DE ECUACIÓN CUADRÁTICA(11)

De http://www.ice.unican.es/sosmath/algebra/QUADRATICEQ/BDEF/bdefs.html

Una **ecuación cuadrática** es cualquier ecuación equivalente a una de la forma: $ax^2 + bx + c = 0$

Algunos ejemplos de ecuaciones cuadráticas…

$x^2 - 9 = 0$		$x^2 - x + 1 = 0$	
	$x^2 + 2x + 1 = 0$		$-x^2 + 2x = 0$

Resuelva cada ecuación anterior, con el método que desee y luego compare sus respuestas con las y los compañeras(os)

Los siguientes ejercicios son copia del sitio http://dit.inictel.gob.pe/proyectoteleed/curso-mat/Ecua-segu/ejercicioeg.htm

Ejercicio Resolver las siguientes ecuaciones

01) $x^2 = 81$

02) $14x^2 - 28 = 0$

03) $(x + 6)(x - 6) = 13$

04) $(2x - 5)(2x + 5) - 119 = 0$

05) $(x + 11)(x - 11) = 23$

06) $x^2 = 7x$

07) $21x^2 + 100 = - 5$

08) $2x^2 - 6x = 6x^2 - 8x$

09) $(x - 3)^2 - (2x + 5)^2 = - 16$

10) $(4x - 1)(2x + 3) = (x + 3)(x - 1)$

11) $x^2 + 12x + 35 = 0$

12) $x^2 - 3x + 2 = 0$

13) $x^2 + 4x =285$

14) $5x(x - 1) - 2(2x^2 - 7x) = - 8$

15) $(x + 2)^2 = 1 - x(x + 3)$

16) $\frac{2x}{3} + \frac{3}{2x} = \frac{13}{6}$ *OPTATIVO*

17) $\frac{x+4}{x+5} - \frac{x+2}{x+3} = \frac{1}{24}$ *OPTATIVO*

18) $\frac{x^2}{4} + \frac{x}{2} = 2$

19) $\frac{x}{6} + \frac{x^2}{2} = \frac{2x}{3}$

20) $\frac{5x-8}{x-1} = \frac{7x-4}{x+2}$ *OPTATIVO*

Cuyas soluciones aparecen en la dirección http://dit.inictel.gob.pe/proyectoteleed/curso-mat/Ecua-segu/respuestaeg.htm

RESPUESTA DE LOS EJERCICIOS

1	$\{-9; 9\}$	8	$\{0; 0,5\}$	15	$\{-3; -0,5\}$
2	$\{\sqrt{2}; -\sqrt{2}\}$	9	$\left\{-8\frac{2}{3}; 0\right\}$	16	$\{2,25; 1\}$
3	$\{-7; 7\}$	10	$\left\{0; -1\frac{1}{7}\right\}$	17	{ 3, - 11 }
4	$\{-6; 6\}$	11	{ - 5 , - 7 }	18	{ - 4 , 2 }
5	$\{\sqrt{12}; -\sqrt{12}\}$	12	{1 , 2 }	19	{ 0 , 1 }
6	$\{0; 7\}$	13	{ 15 , -19 }	20	$\{4; 2,5\}$
7	$\{0; 5\}$	14	{ - 1 , - 8}		

Literatura consultada

Ubicación: Internet

Ejercicios de ecuaciones de segundo grado <http://dit.inictel.gob.pe/proyectoteleed/curso-mat/Ecua-segu/ejercicioeg.htm> *"ejercicios de ecuaciones"* (12 de marzo 2001)

Quadratic Equations: Basic Definitions <URL: http//www.ice.unican.es/sosmath/algebra/QUADRATICEQ/BDEF/bdefs.html:> *"ecuaciones cuadráticas"* (12 de marzo 2001)

COMPLETACIÓN DE CUADRADOS(13)

El mecanismo de completar cuadrados está fundamentado en el hecho de que el trinomio cuadrado perfecto está constituido así:

El cuadrado del primer término $\pm$
el doble del 1º por el 2º **+**
el cuadrado del segundo término.

En una ecuación del tipo $x^2 \pm bx + c = 0$ lo primero es verificar si es o no un cuadrado perfecto. De no ser un cuadrado perfecto, se aísla a c restando "c" a ambos lados (*pasando a restar*):

$$x^2 \pm bx = -c$$

Para lograr un trinomio cuadrático se requiere que el coeficiente de *x* sea igual al doble del primer coeficiente por el segundo término.

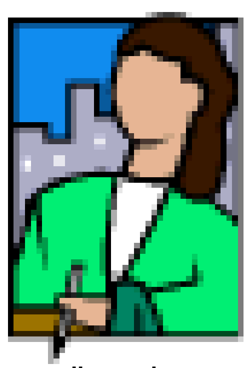
El segundo término <u>debe ser</u> el cuadrado de la mitad del coeficiente de *x*, por lo tanto, primero se calcula la mitad de ese coeficiente, es decir $\frac{b}{2}$ y luego se le suma a la ecuación la expresión $\left(\frac{b}{2}\right)^2$:

$$x^2 \pm bx + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = -c + \left(\frac{b}{2}\right)^2$$

recuerde se suma a ambos lados.

Efectivamente, si se analiza la expresión del lado izquierdo $x^2 \pm bx + \frac{b^2}{4}$ se verifica que se trata de un trinomio cuadrático, pues:

$$\begin{aligned}\left(x \pm \frac{b}{2}\right)^2 &= x^2 \pm 2 \cdot \frac{b}{2} x + \left(\frac{b}{2}\right)^2 \\ &= x^2 \pm \cancel{2} \cdot \frac{b}{\cancel{2}} x + \frac{b^2}{4} \\ &= x^2 \pm bx + \left(\frac{b}{2}\right)^2\end{aligned}$$



Y... ¿cómo se aplica en la solución de la ecuación?

Como se obtuvo un cuadrado perfecto en el lado izquierdo de la ecuación entonces se puede extraer raíz cuadrada a ambos lados:

$$x^2 \pm bx + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = -c + \left(\frac{b}{2}\right)^2$$

$$\left(x \pm \frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - c$$

$$\sqrt{\left(x \pm \frac{b}{2}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c}$$

$$x \pm \frac{b}{2} = \pm\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c}$$

Por lo tanto, si se continúa con el despeje de la ecuación se obtiene:

$$x = \pm\frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c}$$

Cuando la ecuación es de la forma $ax^2 + bx + c = 0$ se divide todo por a.

<u>Ejemplos</u>

a) $12x - 1 + 9x^2 = 0$

Se ordena la ecuación: $9x^2 + 12x - 1 = 0$

Se divide por 9:

$$\frac{9}{9}x^2 + \frac{12}{9}x - \frac{1}{9} = 0$$

$$x^2 + \frac{4}{3}x - \frac{1}{9} = 0$$

Se despeja el término independiente: $x^2 + \frac{4}{3}x = \frac{1}{9}$

Se calcula la mitad del coeficiente de x: $\dfrac{\frac{4}{3}}{2} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

Se determina su cuadrado: $\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$

Se suma a ambos lados

$$x^2+\frac{4}{3}x+\frac{4}{9}=\frac{1}{9}+\frac{4}{9}$$

$$x^2+\frac{4}{3}x+\frac{4}{9}=\frac{5}{9}$$

Se escribe el cuadrado y se aplica raíz cuadrada

$$\sqrt{\left(x+\frac{2}{3}\right)^2}=\sqrt{\frac{5}{9}}$$

$$x+\frac{2}{3}=\pm\frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$x=\frac{-2}{3}\pm\frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$x=\frac{-2\pm\sqrt{5}}{3}$$

b) $x+11=10x^2$

Se *acomoda* la ecuación: $-10x^2+x+11=0$

Se divide por -10:

$$\frac{-10}{-10}x^2+\frac{-1}{10}x+\frac{11}{-10}=0$$

$$x^2-\frac{1}{10}x-\frac{11}{10}=0$$

Se aísla el término independiente: $x^2-\frac{1}{10}x=\frac{11}{10}$

Se calcula la mitad del coeficiente de x: $\frac{\frac{1}{10}}{2}=\frac{1}{20}$

Se suma a ambos lados el cuadrado de lo obtenido:

$$x^2-\frac{1}{10}x+\frac{1}{400}=\frac{11}{10}+\frac{1}{400}$$

$$\left(x-\frac{1}{20}\right)^2=\frac{441}{400}$$

Se obtiene la raíz cuadrada a ambos lados:

$$\sqrt{\left(x-\frac{1}{20}\right)^2}=\pm\sqrt{\frac{441}{400}}$$

$$x-\frac{1}{20}=\pm\frac{\sqrt{441}}{20}$$

Se despeja y se obtienen las dos soluciones:

$$x = \frac{1}{20} \pm \frac{\sqrt{441}}{20}$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{441}}{20}$$

Ejercicios$_{(14)}$

Resuelva completando el cuadrado..

1) $x^2 - 6x - 3 = 0$ 2) $y^2 - 10y - 3 = 0$ 3) $2y^2 - 6y + 3$

4) $2d^2 - 4d + 1 = 0$ 5) $3x^2 + 5x - 4 = 0$ 6) $x^2 + mx + n$

Soluciones

1) $\left\{3 + 2\sqrt{3};\ 3 - 2\sqrt{3}\right\}$ 2) $\left\{5 + 2\sqrt{7};\ 5 - 2\sqrt{7}\right\}$

3) $\left\{\frac{3 + \sqrt{3}}{2}; \frac{3 - \sqrt{3}}{2}\right\}$ 4) $\left\{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}; 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$

5) $\left\{\frac{-5 + \sqrt{73}}{6}; \frac{-5 - \sqrt{73}}{6}\right\}$ 6) $\left\{\frac{\sqrt{m^2 - 4n}}{2} - \frac{m}{2};\ -\frac{\sqrt{m^2 - 4n}}{2} - \frac{m}{2}\right\}$

Literatura consultada

Ubicación: Colección personal

Baldor Aurelio. (1978) **Álgebra.** México: Editorial Publicaciones Cultural.

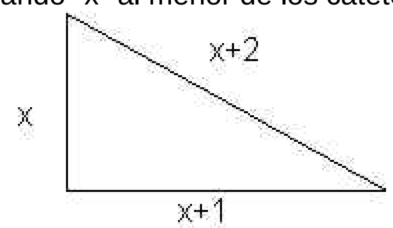
Barnett, Raymond; Ziegler, Michael R. y Byleen, Kart E. **Precálculo Funciones y Gráficas** 4ª edición. México: McGraw – Hill

PROBLEMAS QUE SE RESUELVEN CON ECUACIÓN CUADRÁTICA

Lista Uno(29)

Problema 1.- Calcular la hipotenusa de un triángulo rectángulo, sabiendo que las medidas de sus lados son tres números consecutivos

Solución: Se puede realizar el siguiente dibujo del problema, teniendo en cuenta que la hipotenusa el el lado mayor y llamando "x" al menor de los catetos.

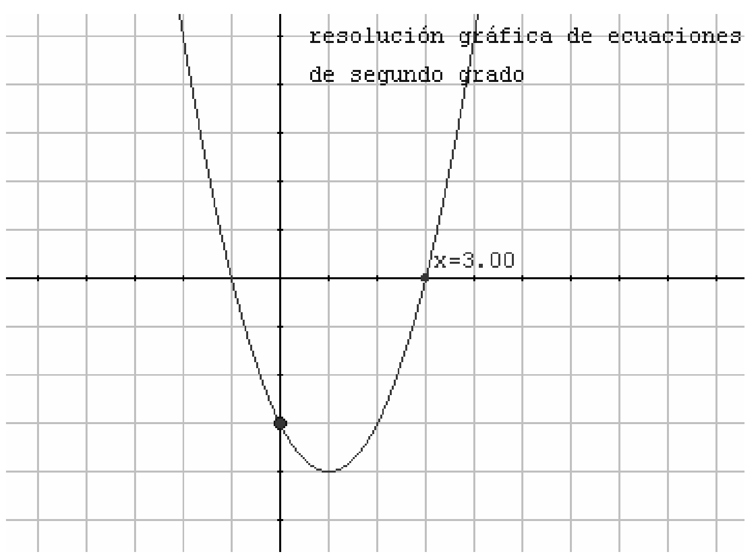


Teniendo en cuenta el teorema de Pitágoras, se cumple: $\mathbf{(x+2)^2 = (x+1)^2 + x^2}$.

Operando: $\mathbf{x^2 + 4x + 4 = x^2 + 2x + 1 + x^2}$.

Agrupando todos los términos en el segundo miembro y simplificando: $\mathbf{x^2 - 2x - 3 = 0}$

Ecuación que sabes resolver numéricamente, con soluciones: **x = 3** y **x = -1** como se aprecia en la imagen siguiente:



Naturalmente la solución x = -1 hay que rechazarla porque un lado no puede tener una medida negativa, luego nos queda:

Hipotenusa: x + 2 = **5** ; **Cateto mayor**: x + 1 = **4** ; **Cateto menor**: x = **3.**

Plantea la ecuación necesaria en cada caso para resolver los siguientes problemas.

Resuélvelos numéricamente y también gráficamente

Problema 2.- Un rectángulo la base mide el triple que la altura. Si disminuimos en 1 cm. cada lado, el área inicial disminuye en 15 cm . Calcular las dimensiones y el área del rectángulo inicial.

(Sugerencia: Realiza un dibujo del problema).

Solución: Base = 12 cm. Altura = 4 cm.

Problema 3.- Hallar tres números impares consecutivos, tales que si al cuadrado del mayor se le restan los cuadrados de los otros dos se obtiene como resultado 7.

(Solución: 5, 7, y 9)

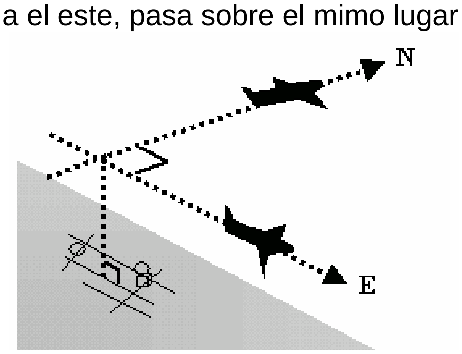
Problema 4.- La edad de un padre es el cuadrado de la de su hijo. Dentro de 24 años la edad del padre será el doble de la del hijo. ¿Cuántos años tiene ahora cada uno?
(Solución: 6 y 36)

Lista Dos$_{(30)}$

36 La hipotenusa de un triángulo rectángulo mide 5 cm. Halle la medida de los catetos sabiendo que su suma es 6 cm.

37 Se rodea por un camino de ancho uniforme u terreno rectangular de dimensiones 26 m por 30ml Se sabe que el área del camino es 240 m^2, determine el ancho del camino.

39 Un avión vuela hacia el norte a 200 millas por hora y pasa por cierto lugar en tierra a las 2:00 p.m. Otro avión, que vuela hacia el este, pasa sobre el mimo lugar a las 2:30 p.m. (ver figura)



(a) Si t denota el tiempo (en horas) después de las 2:30 p.m., exprese la distancia d entre los aviones, en términos de t.

(b) ¿A qué hora la distancia entre los aviones es de 500 millas?

41 Un trozo de alambre de 100 pulg de largo, se corta en dos y cada pedazo se dobla para que tome la forma de un cuadrado. SI la suma de las áreas formadas es 375 pulg^2, encuentre la longitud de cada pedazo de alambre.

49 En una hoja de papel de 24 X 36 cm se va a imprimir una fotografía, con el lado menor en la parte de abajo. El margen en los lados y en la parte de arriba debe ser el mismo ancho, y el margen de abajo debe ser el doble de los otros. Halle el ancho de los márgenes si el área que se va a imprimir es de 661,5 cm^2.

OPTATIVO
Una caja sin tapa se debe construir cortando cuadrados de 3 pulgadas de un hoja de lata rectangular, cuya longitud es el doble de su ancho. ¿Qué tamaño de hoja producirá una caja con un volumen de 60 pulg^3?

RESPUESTAS

36 Si a es un cateto, el otro es 6-a, utilizando el teorema de Pitágoras se plantea la ecuación $a^2 + (6 - a)^2 = 25$, se resuelve la ecuación cuadrática. (recuerde usar la fórmula notable para (6-a)^2.

37 2 pie

39 (a) d= $\sqrt{(400t)^2 + (200t + 100)^2} = 100\sqrt{20t^2 + 4t + 1}$
(b) 3:30 p.m.

41 24 pulg, 76 pulg

49 1,5 pulg en los lados y la tapa; 3 pulg en la base

FACTORIZACIÓN(4)

Factorizar significa escribir como el producto de varios factores.

Examine la siguiente factorización del número 120.

Hay muchas formas de factorizar este número, entre ellas: $\begin{cases} 120 = 24 \cdot 5 \\ 120 = 10 \cdot 12 \\ 120 = 30 \cdot 4 \end{cases}$

Si en la factorización se utilizan sólo factores primos se dice que es la factorización prima o completa.

$$120 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$$

Un número o polinomio es factor de un polinomio **p(x)** si existe un número o polinomio que multiplicado por él genere **p(x)**.

Ejemplos:

1. $x - 2$ es factor de $x^2 - 2x$, porque $(x-2) \bullet x$ genera a $x^2 - 2x$.

2. En el polinomio $x^2 + 5x + 6$, uno de los factores es $x + 3$.
   $(x+3) \bullet (x+2)$ es igual a $x^2 + 5x + 6$.

3. En (x + 5) (x - 4) (8x + 8) un factor es **8** pues el polinomio equivale a:
   (x + 5) (x - 4) **8** (x + 1)

Un polinomio está factorizado completamente cuando todos los factores son primos, es decir son factores que "*ya no se pueden factorizar más*".

Para los polinomios, existen varias formas de factorizar, las cuales se pueden utilizar una después de la otra hasta conseguir *factorizar completamente* el polinomio.

Factor Común

En el estudio de la factorización el primer método que se sugiere utilizar, siempre, antes de cualquier otro, es el Factor Común.

Factor común numérico

$$12x^2 - 12x + 3$$

Si los números son enteros, se obtiene el máximo divisor común de ellos.

$$\begin{array}{ccc|c} 12 & 12 & 3 & 3 \\ & & & \uparrow es \\ 4 & 4 & 1 & el\ \ MDC \end{array}$$

Se divide cada coeficiente numérico por el MDC obtenido y se realiza la factorización.

$$12x^2 - 12x + 3 =$$
$$3\ (4x^2 - 4x + 1)$$

$$\frac{2}{5}w^2 - \frac{32}{125}$$

Cuando los coeficientes numéricos están en notación fraccionaria, se determina el MDC del numerador y el MDC del denominador

$$\begin{array}{cc|c} 2 & 32 & 2 \\ 1 & 16 & \end{array} \qquad \begin{array}{cc|c} 5 & 125 & 5 \\ 1 & 25 & \end{array}$$

$$\frac{2}{5}\left(w^2 - \frac{16}{25}\right)$$

En caso de que los números tengan parte decimal distinta de cero, se puede utilizar la notación fraccionaria en sustitución de la decimal.

$$0{,}5z^3 + 0{,}25z^2 - 0{,}125$$

$$0{,}5 = \frac{5}{10} \qquad 0{,}25 = \frac{25}{100}$$

$$0{,}125 = \frac{125}{1000}$$

$$0{,}5z^3 + 0{,}25z^2 - 0{,}125 = \frac{5}{10}z^3 + \frac{25}{100}z^2 - \frac{125}{1000} =$$

$$\frac{5}{10}\left(z^3 + \frac{5}{10}z^2 - \frac{25}{100}\right)$$

Ejercicio Factorice $120ab - 210ac + 150bc$

Factor común literal

Si un literal se presenta en todos los términos de un polinomio entonces se “saca” como factor común.

$$\frac{15}{7}a+\frac{8}{5}ab^2-ab^3=$$
$$a\left(\frac{15}{7}+\frac{8}{5}b^2-b^3\right)$$

Cuando el literal está presente en todos los términos pero con exponentes distintos el factor común literal tiene el menor exponente.

$$3m^5-15mn+7nm^2=$$
$$m\left(3m^4-15n+7nm\right)$$

El factor común literal puede constar de más de una letra.

$$-12xy^3z^2+17x^2y^2z^3=$$
$$xy^2z^2\left(-12y+17xz\right)$$

Al factorizar se divide cada literal entre el factor común determinado.

$$a^5b^3+6a^3b^4-2a^2b^5=$$
$$a^2b^3\left(a^3+6ab-2b^2\right)$$

RECUERDE:
Al dividir potencias de igual base, se conserva la base común y se restan los exponentes

Ejercicio Factorice $ab^2c^3m^2n-a^2bc^2m^3n+a^3b^3c^2m^4n$

Factor común monomio

En un polinomio el factor común puede considerar números y letras. Ejemplos:

1) $\frac{12}{5}abc^2-\frac{2}{15}ab^2c+\frac{6}{35}a^2b^3c \;=\; \frac{2}{5}abc\left(\frac{6}{1}c-\frac{1}{3}b+\frac{3}{7}ab^2\right) \;=\; \frac{2}{5}abc\left(6c-\frac{1}{3}b+\frac{3}{7}ab^2\right)$

2) $49x^2y^3-35x^2yz+70xy^2 \;=\; \langle 7xy\rangle 7xy^2-\langle 7xy\rangle 5xz+\langle 7xy\rangle 10y \;=$

$= 7xy\left(7xy^2-5xz+10y\right)$

3) $-1{,}21w^3+0{,}33w^2-11w \;=\; \frac{-121}{100}w^3+\frac{33}{100}w^2-11w \;=\; -11w\left(\frac{11}{100}w^2-\frac{3}{100}w+1\right)$

$= -11w\left(0{,}11w^2-0{,}03w+1\right)$

Ejercicio Factorice $125ab^3-0{,}125a^2b^2+\frac{25}{7}a^3b$

Factor común polinomio

En algunos casos el factor común es un polinomio.	$(2a+5)x^2y^3+(2a+5)zw^3 =$ $(2a+5)\ (x^2y^3 + zw^3)$
Si el factor común "*no viene acompañado*" en alguno de sus términos debe recordarse colocar un 1 en su lugar.	$6x-y+(6x-y)ab =$ $(6x-y)\ (1+ab)$
En ocasiones, es necesario, utilizar, previamente la factorización en una parte del polinomio.	$2a-4b+(a-2b)c=$ $\underbrace{2}_{\text{factor común}}(a-2b)+(a-2b)c=$ $(a-2b)\ (2+c)$
El factor común polinomio puede ser de más de una expresión.	$15\,(x-1)^2(x+3)+\ 17(x+3)(x+2)(x-1)=$ $(x-1)(x+3)\ \ (15(x-1)+\ 17(x+2))=$ $(x-1)(x+3)(15x-15+17x+34)=$ $(x-1)(x+3)(32x+19)$

Ejercicio Factorice

$$(x^2+2x-1)(x+3)^3(x-1)+(x^2+2x-1)(x-1)^2(x+3)-(x+3)(x-1)(x^2+2x-1)^2$$

Factorización de la diferencia de cuadrados

Después de verificar la posibilidad de factor común, si un polinomio o uno de sus factores se puede escribir como la diferencia de cuadrados, se factoriza con la denominada "tercera fórmula notable".

Ejemplos

1) $121w^2-81$ Se verifica si hay factor común. NO hay factor común. (*no lo hay*)
Como es una resta de dos términos, entonces se examina si estos son cuadrados perfectos. Lo son: $\begin{cases}121w^2=(11w)^2\\ 81=9^2\end{cases}$

Por tanto, la factorización es:

$$121w^2-81=(11w)^2\ -\ 9^2\ =(11w-9)(11w+9)$$

2) $\dfrac{-5}{9}z^2 + \dfrac{20}{25}$ Hay factor común cinco.

$5\left(\dfrac{-1}{9}z^2 + \dfrac{4}{25}\right)$ Una vez que se obtuvo el factor común se acomoda.

$5\left(\dfrac{4}{25} - \dfrac{1}{9}z^2\right)$ Se observa que hay dos cuadrados perfectos: $\begin{cases} \dfrac{4}{25} = \left(\dfrac{2}{5}\right)^2 \\ \dfrac{1}{9}z^2 = \left(\dfrac{1}{3}z\right)^2 \end{cases}$

Por tanto, se factoriza como: $5\left(\dfrac{2}{5} - \dfrac{1}{3}z\right)\left(\dfrac{2}{5} + \dfrac{1}{3}z\right)$

NOTA: También se puede expresar como: $-5\left(\dfrac{1}{3}z - \dfrac{2}{5}\right)\left(\dfrac{1}{3}z + \dfrac{2}{5}\right)$

3) $w^4 - 81$

$w^4 = (w^2)^2$ y $81 = 9^2$ por lo tanto, se trata de una diferencia de cuadrados

$w^4 - 81 = (w^2 - 9)(w^2 + 9)$ se observa que uno de los factores es a su vez una diferencia de cuadrados…

$$w^4 - 81 = (w^2 - 9)(w^2 + 9) = \\ = (w - 3)(w + 3)(w^2 + 9)$$

la última expresión es la factorización completa del polinomio $w^4 - 81$

Ejercicio Factorizar completamente

a) $y^4 - 625$ $\quad$ b) $\dfrac{-9}{16} + x^2$ $\quad$ c) $12w^2 - 3$

Factorización del trinomio de segundo grado

Recuerde que un polinomio se llama **trinomio de segundo grado** si tiene tres términos y su grado es dos. Simbólicamente: $ax^2 + bx + c$, donde $a \neq 0$, b y c son números reales; se llama trinomio de segundo grado.

El trinomio de segundo grado puede factorizarse, básicamente, de tres formas:

- ♦ Reconociendo una fórmula notable
- ♦ Inspección
- ♦ Determinando sus raíces o ceros

Factorización del trinomio de segundo grado por reconocimiento de fórmulas notables

De la página 7, retomemos los resultados

Primera fórmula notable: $\boldsymbol{(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2}$

Segunda fórmula notable: $\boldsymbol{(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2}$

En estos casos se dice que el trinomio es un trinomio cuadrático.

La factorización utilizando estos resultados consiste en reconocer el desarrollo de la fórmula y factorizar de acuerdo con la fórmula. Ejemplos:

1) $\frac{1}{4}z^2 + 3z + 9$ Se verifica factor común. NO hay.

Es un polinomio de tres términos, se examina si es la primera fórmula notable.

Se observan dos cuadrados perfectos: $\begin{cases} \frac{1}{4}z^2 = \left(\frac{1}{2}z\right)^2 \\ 9 = 3^2 \end{cases}$

Además se calcula el doble de cada base anterior: $2 \cdot \frac{1}{2}z \cdot 3 = 3z$, el cual está en el polinomio.

Por tanto, la factorización es: $\frac{1}{4}z^2 + 3z + 9 = \left(\frac{1}{2}z + 3\right)^2$

3) $a^2b^2 + 169 - 26ab$ Se examina si hay factor común. NO hay.

Es un polinomio de tres términos y tiene una resta, puede ser la segunda fórmula notable.

Hay dos cuadrados perfectos: $\begin{cases} 169 = 13^2 \\ a^2b^2 = (ab)^2 \end{cases}$

Además el doble del producto de las bases es $2 \cdot 13 \cdot ab = 26ab$.

Por lo tanto, la factorización es: $a^2b^2 + 169 - 26ab = (ab)^2 - 2 \cdot 13ab + 13^2 = (ab+13)^2$

Ejercicio Factorice los siguientes polinomios $a)\ z^2 + \frac{25}{36}w^2 - \frac{5}{3}zw$ b) $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{x}^2 - \mathrm{x}$

Factorización del trinomio de segundo grado por inspección(12)

Para factorizar el polinomio $x^2 - 9x + 18$ se utilizará el método conocido como inspección o tanteo.

Actividad

1) Determine los valores de los coeficientes numéricos en el polinomio $\boldsymbol{x^2 - 9x + 18}$ y escríbalos en los espacios correspondientes:

a = ___________
b= ___________
c = _____________

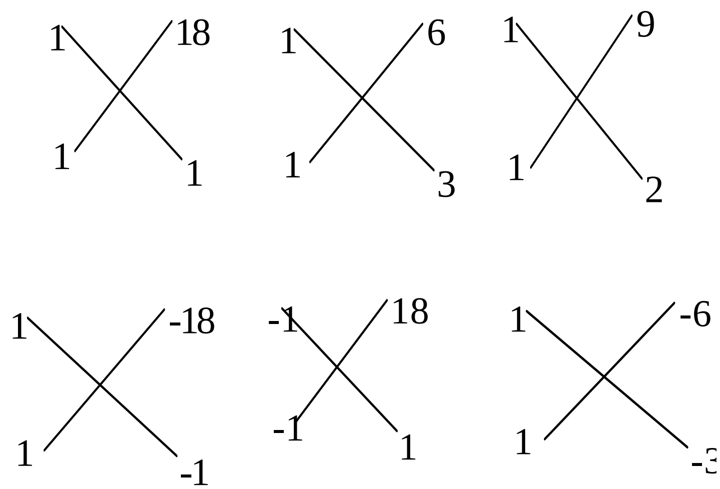
2) Busque dos números que multiplicados entre sí, den como resultado el valor del coeficiente numérico correspondiente al valor a=1.

Observe: 1 se puede obtener únicamente de dos productos: 1 • 1 o de -1 • -1

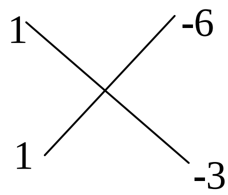
3) Busque dos números que multiplicados entre sí, den como resultado el valor del coeficiente numérico correspondiente al valor c = 18.

Observe: que el valor 18 se puede obtener de los siguientes productos:
18 • 1, 9 •· 2, 6 • 3, -18 • -1, - 9 • -2, -6 • - 3.

Analice las diferentes maneras en que se pueden combinar los productos obtenidos en los dos pasos anteriores:

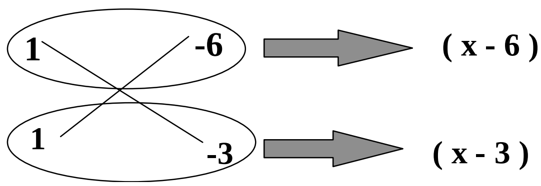


La combinación de estos arreglos que se utiliza para factorizar el trinomio, es la que cumpla con la siguiente condición: Al multiplicar en equis y sumar los resultados tiene que dar el valor de b = -9. Si se analizan los distintos arreglos presentados anterior mente se puede determinar que el arreglo que cumple con la condición dada es el siguiente:



$(1 \bullet -3) + (1 \bullet -6) = -3 + -6 = -9$

Es decir: este arreglo el que construye el valor de b. Para encontrar los factores del trinomio $\boldsymbol{x^2 - 9x + 18}$ se procede como lo muestra la siguiente figura:



Por lo tanto, la factorización de $\boldsymbol{x^2 - 9x + 18}$ es (x - 6) (x - 3).

Ejercicios Halle la factorización completa de los siguientes trinomios, utilizando el método de inspección:

a) $2x^2 + 11x + 12$ b) $2x^2 + 11x - 6$

Respuestas:
a) (t + 4)(2t + 3)

b) (2x - 1)(x + 6)

Literatura consultada

Ubicación: San Pedro de Montes de Oca, Biblioteca de la Universidad de Costa Rica.
Barnett-Uribe. (1988) **Matemáticas 4.** Segunda edición. Colombia: Editorial McGraw-Hill.

Camacho Araya, Orlando. (1990). **Matemática. Ejercicios y Problemas I. Tercer ciclo y Bachillerato.** Primera edición. San José, Costa Rica: Litografía e Imprenta Universal.

Meneses Rodríguez, Roxana. **(**1992) .**Matemática. Enseñanza - Aprendizaje. 11º año.** San José, Costa Rica: Ediciones Farben.

Factorización y teorema del factor(13)

Orden descendente de un polinomio

Los polinomios se ordenan de acuerdo con el exponente de una de sus variables. El orden descendente consiste en que los exponentes van de mayor a menor.

Ejemplos:

1) El polinomio $-3x^2 + 4 + x$, ordenado descendentemente queda: $-3x^2 + x + 4$

2) $-8x + x^3 - 9$, queda $x^3 - 8x - 9$.

Si se desea, el término x^2 que no aparece, se completa con cero: $x^3 + 0x^2 - 8x - 9$.

3) $134 - 15x^8 + y^7 - 17x^7y^8$ ordenado descendentemente

Respecto a y, queda: $-17x^7y^8 + y^7 - 15x^8 + 134$.

Respecto a x, queda: $-15x^8 - 17x^7y^8 + y^7 + 134$.

4) $x^2 - 5x^5 + \frac{1}{2}x + 54 - 18x^6$, ordenando y completando:

$$-18x^6 - 5x^5 + 0x^4 + 0x^3 + x^2 + \frac{1}{2}x + 54.$$

Los coeficientes de un polinomio y el término independiente

En cada término del polinomio se puede reconocer el coeficiente numérico y el factor literal.

El factor literal está compuesto por las letras y sus exponentes. El coeficiente numérico es el *número que multiplica a las letras*.

Los coeficientes de un polinomio se pueden dar de acuerdo con el orden descendente, y se dice que es cero si un término no aparece. Al primer coeficiente se le llama “principal” y al último, “término independiente”.
Ejemplos:

Polinomio	Coeficientes	Coeficiente principal	Término independiente
1) $-3x^2 + x + 4$	-3; 1 y 4	-3	4
2) $x^3 - 8x - 9$	1; 0; -8 y -9	1	-9
3) $-15x^8 - 17x^7y^8 + y^7 + 134$	-15; -17; 0; 0; 0; 0; 0; 0 y 134	-15 *(respecto a la variable x)*	134
4) $-18x^6 - 5x^5 + x^2 + \frac{1}{2}x + 54$	-18; -5; 0; 0; 1; $\frac{1}{2}$ y 54	-18	54
5) $-2x^5 + 87x^3 + 17x^2 + 89$	-2; 0; 87; 17; 0 y 89	-2	89

Raíz o cero de un polinomio

Si en un polinomio, al sustituir la variable por un número real y efectuar las operaciones se obtiene un valor numérico igual a 0, se dice que el número es una **raíz o cero** del polinomio.

El número de raíces o ceros de un polinomio es igual o menor que su grado:
Un polinomio cuadrático tiene no más de dos raíces, un polinomio de tercer grado tiene a lo sumo tres ceros.

Ejemplos:

1. Considere el polinomio $3x^2 + 5x - 2$.

Al calcular el valor numérico del polinomio en $x = {}^{-}2$, se obtiene:

$$3 \bullet \left({}^{-}2\right)^2 + 5 \bullet {}^{-}2 - 2 =$$
$$3 \bullet 4 + {}^{-}10 - 2 =$$
$$12 + {}^{-}10 - 2 =$$
$$2 - 2 =$$
$$0$$

Por lo tanto, $x = {}^{-}2$ es una raíz o cero del polinomio $3x^2 + 5x - 2$.

2. Determinar si $x = {}^{-}5$ es un cero de $p(x) = x^2 + x - 4$.

Se sustituye el valor en el polinomio:

$$p(^-5) = \left(^-5\right)^2 + {}^-5 - 4 =$$

$$25 + {}^-5 - 4 =$$

$$20 - 4 =$$

$$16$$

Por lo tanto, $x = {}^-5$ **NO** es una raíz o cero de $p(x) = x^2 + x - 4$.

Relación entre una raíz de un polinomio y los factores del mismo

Al conocer una raíz de un polinomio se puede deducir un factor del polinomio y viceversa. Observe los ejemplos.

Raíz o cero del polinomio	Factor del polinomio
$x = {}^-1$	$x + 1$
$x = 6$	$x - 6$
$x = 2$	$x - 2$
$x = 0$	x

Ejercicio: complete la siguiente información

Raíz o cero del polinomio	Factor del polinomio
$x = {}^-3$	$x +$ ____
$x =$ ____	$x + 2$
$x = 8$	$x -$ ____
$x = {}^-7$	________
$x = 13$	________
$x = 1$	________

Si 3 es una raíz de un polinomio, entonces (x - 3) es un factor del polinomio.

Si $^-7$ es un cero del polinomio, entonces un factor del polinomio es (x + 7).

Describa la relación entre las raíces y los factores de un polinomio:

____

____

____

Si un valor "**a**" es una raíz de un polinomio p(x), entonces (x - **a**) es un factor de p(x).

<u>Cuando la raíz es una fracción</u>

Observe detenidamente el ejemplo:

$x = \frac{2}{7}$ es una raíz o cero de un polinomio $g(x)$. Determine un factor de $g(x)$.

De la expresión $x = \frac{2}{7}$ se despeja para obtener un cero después del igual:

$$x = \frac{2}{7}$$

$$7x = 2$$

$$7x - 2 = 0$$

El factor es $(7x - 2)$.

Ejemplos:

Raíz o cero	Factor
$\frac{7}{4}$	$(4x - 7)$
$\frac{^-7}{4}$	$(4x + 7)$
$\frac{5}{9}$	$(9x - 5)$
$\frac{^-5}{9}$	$(9x + 5)$
$\frac{^-1}{2}$	$(2x + 1)$
$\frac{1}{2}$	$(2x - 1)$

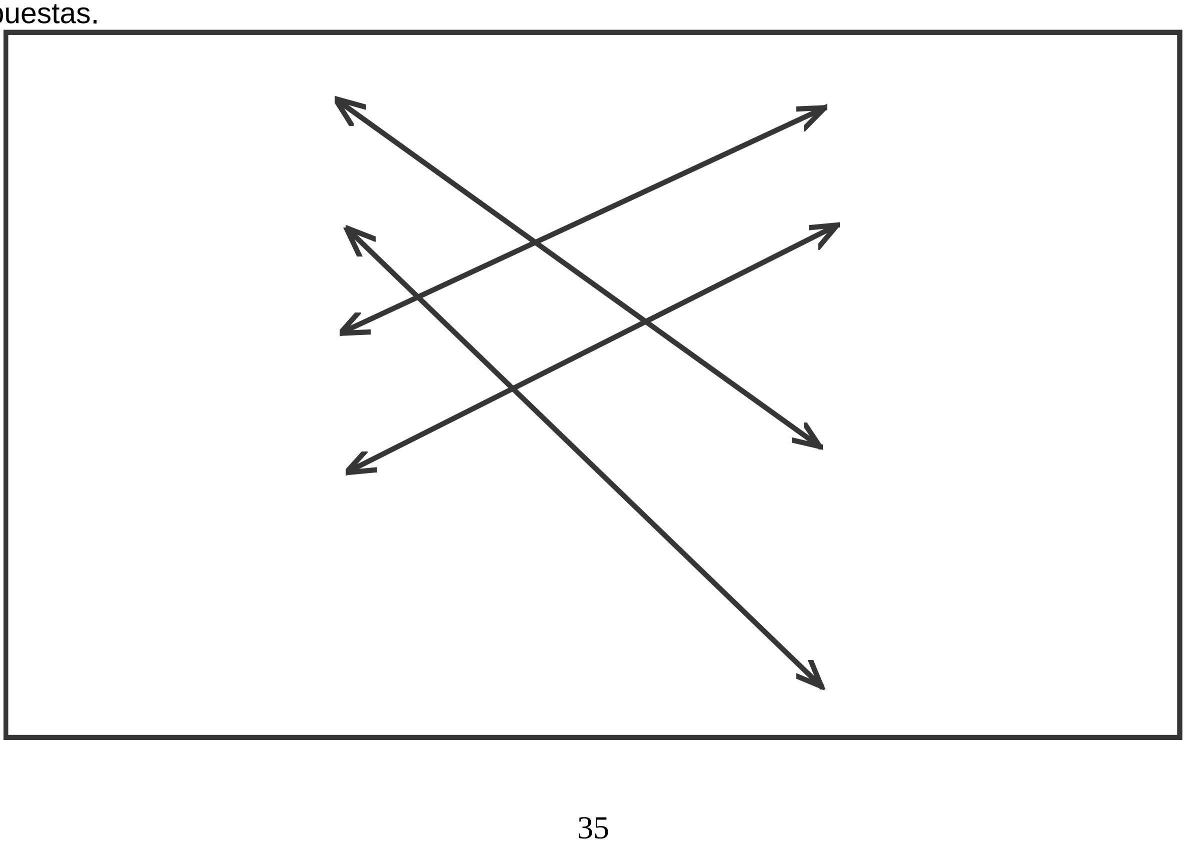
Ejercicio

A ¿Cuál es el factor si la raíz es $x = \frac{3}{5}$? ________________________.

B Trace líneas, uniendo cada raíz con el factor que determina:

	$(3x - 11)$
$\frac{-5}{6}$	$(4x + 7)$
$\frac{11}{3}$	$(5x + 1)$
$\frac{-7}{4}$	$(5x - 1)$
	$(5x - 6)$
$\frac{1}{5}$	$(4x - 7)$
	$(6x + 5)$

Calque las siguientes líneas y sobrepóngalas en el cuadro anterior para comprobar sus respuestas.



¿Cómo determinar los ceros de un polinomio y factorizar?

En el caso particular de los polinomios de segundo grado existe la posibilidad del uso de fórmula notable o fórmula general (utilizando o no la calculadora).

Ejemplos

Trinomio cuadrático	Raíces o ceros	Factorización
$x^2 - 8x + 15$	5 y 3	$(x-5)(x-3)$
$x^2 + x - 2$	1 y $^-2$	$(x-1)(x+2)$
$x^2 + 11x + 30$	$^-6$ y $^-5$	$(x+6)(x+5)$
$x^2 + 8x - 48$	$^-12$ y 4	$(x+12)(x-4)$

Ejercicio Después de leer el ejemplo, resuelva el completar.

Ejemplo: "Si un trinomio cuadrático tiene como raíz a 6, entonces un factor de su factorización es $\underline{(x-6)}$."

Complete:

- Si una raíz de un trinomio cuadrático es 9, entonces un factor del trinomio es: __________
- Suponiendo que un cero de un polinomio es $^-3$, se tiene que un factor del polinomio es $(x+3)$. Si un cero o raíz de un polinomio es $^-5$, entonces un factor es: _____________
- Si las raíces de un trinomio cuadrático son 2 y $^-4$, entonces la factorización es: $(\_\_\_\_\_\_)(\_\_\_\_\_\_)$.
- Suponiendo que la información siguiente es correcta, anote la factorización de los polinomios:

Trinomio cuadrático	Raíces o ceros	Factorización
$x^2 - 10x + 21$	7 y 3	
$x^2 + 4x - 32$	4 y $^-8$	
$x^2 + 13x + 22$	$^-11$ y $^-2$	
$x^2 - 8x - 48$	$^-4$ y 12	

Comprobación

Para verificar una factorización se toman los factores y se multiplican. Ejemplo:

Si para el polinomio $6x^2 - 17x - 3$ se halló la factorización $(6x+1)(x-3)$, entonces para comprobar, se multiplica:

$$(6x+1)(x-3) = 6x^2 - 18x + 1x - 3 = 6x^2 - 17x - 3$$

Como la operación brinda como resultado el **polinomio original**, entonces se sabe que la factorización es correcta.

Ejercicio: Determine las raíces de los siguientes polinomios, escriba cada factorización y compruébelas.

$10x^2 + 13x - 3$ $\qquad$ $6x^2 - 17x - 3$

$2x^2 + x - 1$ $\qquad$ $6x^2 + x - 15$

Raíces compartidas

Los trinomios cuadráticos opuestos, tienen las mismas raíces o ceros.

Ejemplos:

Trinomio 1	Trinomio 2	Factorizaciones *Trinomio 1*	Factorizaciones *Trinomio 2*	Raíces o ceros
$^{-}7x^2 + 37x - 10$	$7x^2 - 37x + 10$	$(^{-}7x+2)(x-5)$	$(7x-2)(x-5)$	$\frac{2}{7}$ y 5
$2x^2 + x - 1$	$^{-}2x^2 - x + 1$	$(x+1)(2x-1)$	$(x+1)(^{-}2x+1)$	$^{-}1$ y $\frac{1}{2}$

Por esto, a veces, se confunde la factorización . Ejemplo:

Para $^{-}7x^2 + 37x - 10$, se hallan las raíces $\frac{2}{7}$ y 5, se factoriza como $(7x-2)(x-5)$, pero al comprobar se obtiene: $(7x-2)(x-5) = 7x^2 - 37x + 10$ ¡¡ NO se obtuvo el polinomio original!!

Para determinar la verdadera factorización, basta con cambiar el signo a los términos de sólo un factor: $(^{-}7x+2)(x-5)$.

Otra forma de determinar raíces o ceros

Existe una forma de determinar raíces y, por tanto, de factorizar, basada en un método de división de polinomios planteado por Pablo Ruffini, italiano que la publicó en 1804. En 1819 el inglés W.G. Horner divulgó básicamente lo mismo. Existen trabajos matemáticos chinos del siglo XIII con antecedentes de este procedimiento.

Este procedimiento se asocia a la denominada "división sintética". Para aplicarlo se debe, previamente, realizar unos pasos sencillos…

A) Se ordena el polinomio en orden descendente. Se completa con ceros aquellos términos faltantes. Ejemplos:

1) $x^3 - 6 - 7x \quad = \quad x^3 + 0x^2 - 7x - 6$
2) $-x + 2x^3 - 5 \quad = \quad 2x^3 + 0x^2 - x - 5$
3) $-x^2 + 4 - x \quad = \quad -x^2 - x + 4$

B) Se identifican los coeficientes, en orden. Se distingue el término independiente. Ejemplos:

1. Polinomio $x^3 - 6 - 7x$

   Se ordena y se completa $\quad x^3 + 0x^2 - 7x - 6$

   Los coeficientes son **1**, **0**, **⁻7** y **⁻6**.

   El término independiente es **- 6**

2. Polinomio $2x^2 - 13x + 10 + x^3$

   Se ordena y completa $\quad x^3 + 2x^2 - 13x + 10$.

   Los coeficientes son **1**, **2**, **⁻13** y **10**.

   El término independiente es **10**

C) Se determinan los divisores del término independiente. Ejemplo:

1. Determine los divisores del término independiente en $x^3 - 6 - 7x$.

   $$x^3 - 6 - 7x \quad = \quad x^3 + 0x^2 - 7x - 6$$

   El término independiente es $^-6$.

   Sus divisores son: 1, 2, 3, 6, -1, -2, -3, -6.

<u>Regla de Ruffini</u>

Determine las raíces o ceros del polinomio $x^3 - 6 - 7x$.

$x^3 + 0x^2 - 7x - 6$	Coeficientes:	$1 \quad 0 \quad {}^{-}7 \quad {}^{-}6$
	Término independiente:	${}^{-}6$.
	Factores de -6:	$1;\ 2;\ 3;\ 6;\ {}^{-}1;\ {}^{-}2;\ {}^{-}3$ y ${}^{-}6$.

Como un polinomio no puede tener más raíces que su grado, en el ejemplo, a lo sumo tres factores del término independiente servirán.

Primer intento: Se prueba con 2.

El coeficiente principal se copia de nuevo, así:

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & {}^{-}7 & {}^{-}6 & 2 \\ & & & & \\ \hline 1 & & & & \end{array}$$

Se multiplica el 1 por el factor que se está probando y el resultado se copia debajo del segundo coeficiente, cero:

Se multiplica

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & {}^{-}7 & {}^{-}6 & 2 \\ & 2 & & & \\ \hline 1 & & & & \end{array}$$

Se coloca

Se suman el cero y el dos:

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & {}^{-}7 & {}^{-}6 & 2 \\ & 2 & & & \\ \hline 1 & 2 & & & \end{array}$$

Con el resultado de la suma se realiza de nuevo el proceso: se multiplica por el factor investigado, se coloca debajo del respectivo coeficiente y se suma:

Se multiplican

Se suman

Se coloca

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & {}^{-}7 & {}^{-}6 & 2 \\ & 2 & 4 & & \\ \hline 1 & 2 & {}^{-}3 & & \end{array}$$

Con el dato obtenido (${}^{-}3$) se hace el mismo procedimiento:

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & {}^{-}7 & {}^{-}6 & 2 \\ & 2 & 4 & {}^{-}6 & \\ \hline 1 & 2 & {}^{-}3 & {}^{-}12 & \end{array}$$

El último número es ${}^{-}12$, por lo tanto 2 **NO** es una raíz o cero del polinomio.

Segundo intento: Se prueba con $^{-}2$

Se “baja” el 1, se multiplica por $^{-}2$, el resultado se coloca debajo del coeficiente respectivo y se suma:

$$\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & ^{-}7 & ^{-}6 & ^{-}2 \\ & ^{-}2 & & & \\ \hline 1 & ^{-}2 & & & \end{array}$$

Con el dato obtenido se multiplica el factor estudiado, se coloca y se suma:

$$\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & ^{-}7 & ^{-}6 & ^{-}2 \\ & ^{-}2 & 4 & & \\ \hline 1 & ^{-}2 & ^{-}3 & & \end{array}$$

Se hace el mismo proceso y si se obtiene 0, entonces $^{-}2$ es un cero o raíz del polinomio en cuestión.

$$\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & ^{-}7 & ^{-}6 & ^{-}2 \\ & ^{-}2 & 4 & 6 & \\ \hline 1 & ^{-}2 & ^{-}3 & 0 & \end{array}$$

Se obtuvo **0**, esto indica que el **- 2** es una raíz del polinomio en cuestión.

Entonces un factor es $x+2$.

Se buscan los otros ceros

Se prueba con otros divisores del término independiente. Por motivo de la extensión del documento **no** se anotan los intentos fallidos.

El $^{-}1$ es también una raíz del polinomio pues:

$$\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & ^{-}7 & ^{-}6 & ^{-}1 \\ & ^{-}1 & 1 & 6 & \\ \hline 1 & ^{-}1 & ^{-}6 & 0 & \end{array}$$

Se obtuvo un 0, por lo tanto -1 es un cero o raíz del polinomio.

Por lo tanto, otro factor del polinomio es $x+1$.

Al probar con **3** se obtiene:

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & ^{-}7 & ^{-}6 & 3 \\ & 3 & 9 & 6 & \\ \hline 1 & 3 & 2 & 0 & \end{array}$$

Se obtuvo un 0, por lo tanto x - 3 es un factor del polinomio.

La factorización de x^3-6-7x es: $x^3-6-7x=(x+2)(x+1)(x-3)$

Ejercicio: Determine las raíces o ceros de los siguientes polinomios y factorícelos

Polinomio	Raíces o ceros	Factorización
x^2+2x-3		
$x^2-2x-35$		
x^2-4		
x^2-5x-6		
$x^2+13x+36$		

Literatura consultada

Ubicación: Biblioteca del Kiosco de Información.
Protti Ramírez, Orietta y Tsijli Angelaki, Teodora. (1997) **Matemáticas 8**. Serie Hacia el siglo XXI. Costa Rica: Editorial de la Universidad de Costa Rica.

Ubicación: Colección personal
Bolaños, Guiselle. (1993) **Matemática Activa. 9º.** San José, Costa Rica: Editorial. Textos Modernos Cattleya.

Combinación de métodos

En ocasiones, después de factorizar por factor común se obtiene un factor que a su vez es factorizable.

Ejemplos

1) $20az^2 + 30az + 45a \quad = \quad 5a\left(4z^2 + 6z + 9\right) \; = \; 5a\left(2z + 3\right)^2$

2) $5x^3 - 80x \quad = \quad 5x\left(x^2 - 16\right) \; = \; 5x\left(x - 4\right)\left(x + 4\right)$

3) $a^2(6a - b) + a(6a - b) - 6(6a - b) = (6a - b)\left(a^2 + a - 6\right) = (6a - b)(a - 2)(a + 3)$

O bien aplicar alguna de las fórmulas y obtener a la vez un polinomio que se debe factorizar

Ejemplo

1) $x^4 - 16$

$$
\begin{aligned}
x^4 - 16 &= \left(x^2 - 4\right)\left(x^2 + 4\right) \\
&= (x - 2)(x + 2)\left(x^2 + 4\right)
\end{aligned}
$$

Factorización por agrupamiento[15]

Algunos polinomios de más de tres términos pueden ser factorizados, si comenzamos agrupando los términos de modo que cada grupo sea factorizable, y al hacerlo descubrimos un factor común o un producto especial.

Ejemplos

1) Para factorizar el polinomio $2x^2 + 2xy + 3x + 3y$, podemos comenzar agrupando los primeros dos términos y los últimos dos:

$$(2x^2 + 2xy) + (3x + 3y).$$

Luego factorizamos cada uno de los grupos:

$$2x\,(x + y) + 3\,(x + y).$$

Ahora notamos que $(x + y)$ es factor común a ambos grupos y terminamos factorizando como

$$(2x + 3)\,(x + y).$$

2) La factorización de $x^2 + 2xy - 1 + y^2$, puede conseguirse agrupando los primeros dos términos y el último. De esa manera, re-escribimos el polinomio como

$$(x^2 + 2xy + y^2) - 1.$$

Ahora notamos que el primer grupo es el cuadrado de $(x + y)$, por lo cual podemos expresar el polinomio como

$(x + y)^2 - 1^2$, que reconocemos como una diferencia de cuadrados

Entonces la factorización es $(x + y +1)\ (x + y -1)$.

Ejercicio: Factorice completamente

14) $7x^2 + 7xy - 2x - 2y$ 15) $x^2 y^2 - 9x^2 - y^2 + 9$ 16) $-t^4 + t^2 + 2rt + r^2$

Ejemplo(16)

$5x^4y + 3x^2y -9xy -15xy^2$

De acuerdo a las características se puede agrupar los términos centrales y el primero con el último

El primer grupo es: $5x^4y -15xy^2$

Y su Factor Común Monomio: $5xy\ (x^3 -3y)$

El segundo grupo es: $3x^3y -9y$

Y su Factor Común Monomio: $3y\ (x^3 -3y)$

Entonces: $5x^4y + 3x^2y -9xy -15xy^2 = 5xy\ (x^3 -3y) +3y\ (x^3 -3y)$

Y ahora aplicamos Factor común Polinomio, ya que nos damos cuenta que el polinomio $(x^3 -3y)$ se repite.

La respuesta finalmente será: $(x^3 -3y)(5xy +3y)$

Gracias al Agrupamiento se pueden factorizar polinomios que, a simple vista, no se distinguen como factorizables.

Ejemplos

1) $x^2 - 4y^2 - 2x + 1$

$$x^2 - 4y^2 - 2x + 1 = \left(x^2 - 2x + 1\right) - 4y^2 =$$
$$(x-1)^2 - 4y^2 = \left(x - 1 - 4y^2\right)\left(x - 1 + 4y^2\right)$$
$$= \left(x - 4y^2 - 1\right)\left(x + 4y^2 - 1\right)$$

2) $-a^2 + b^2 - 4ab + 4a^2 - x^2 - 2ax$

$$-a^2 + b^2 - 4ab + 4a^2 - x^2 - 2ax = \left(4a^2 - 4ab + b^2\right) - \left(x^2 + 2ax + a^2\right)$$
$$= \quad (2a-b)^2 \quad - \quad (x+a)^2 =$$
$$= \left((2a-b) - (x+a)\right)\left((2a-b) + (x+a)\right) \ \ por\ diferencia\ de\ cuadrados$$
$$= (2a - b - x - a)(2a - b + x + a)$$
$$= (a - b - x)(3a - b + x)$$

Ejercicios Factorice completamente los polinomios siguientes:

Parte A$_{(17)}$

23) $7u^4 - 7u^2v^2 =$
24) $kx^3 + 2kx^2 - 63kx =$
25) $5x^3 - 55x^2 + 140x =$
26) $4m^2n^2 + 24m^2n - 28m^2 =$
27) $7hkx^2 + 21\ hkx + 14hk =$
28) $wx^2y - 9wxy + 14wy =$
29) $2x^3 + 10x^2 + x + 5$
30) $px + py + qx + qy =$

Parte B$_{(18)}$

08) $x(a + 7) - 5(a + 7)$
09) $2x(a - 1) - 3y(a - 1)$
10) $x(a + 9) - a - 9$
11) $- x - y + a(x + y)$
12) $(a + 5)(a + 1) - 2(a + 1)$
13) $(a + b - 2)(a^2 + 2) - a^2 - 2$
14) $(3x^2 + 8)(x + y - z) - (3x^2 + 8) - (x + y - 4)(3x^2 + 8)$
15) $xm - ym + xn - yn$
16) $a^2x^2 - 8bx^2 + a^2y^2 - 8by^2$
17) $1 + a + 8ab + 8b$
18) $6ax - 2by - 2bx - 12a + 6ay + 4b$
19) $a^2b^3 - m^5 + a^2b^3x^2 - m^5x^2 - 3a^2b^3x + 3m^5x$
20) $(x + 3)(x + 2)(x + 5) + (x + 2)(x + 5) + (x + 5)$

Parte C$_{(19)}$

1. Factorizar $P(x) = x^3 - x^2 - 2x$
2. Factorizar $P(x) = x^3 - 2x^2 - 8x$
3. Factorizar $P(x) = x^3 - 7x^2 + 12x$
4. Factorizar $P(x) = x^3 + 3x^2 - 10x$
5. Factorizar $P(x) = x^3 - 5x^2 - 6x$
6. Factorizar $P(x) = x^3 + 4x^2 - 21x$

Respuestas

Parte A$_{(17)}$

23) $7u^2(u^2 - v^2) = 7u^2(u + v)(u - v)$
24) $kx(x^2 + 2x - 63) = kx(x + 9)(x - 7)$
25) $5x(x^2 - 11x + 28) = 5x(x - 4)(x - 7)$
26) $4m^2(n^2 + 6n - 7) = 4m^2(n + 7)(n - 1)$
27) $7hk(x^2 + 3x + 2) = 7hk(x + 1)(x + 2)$
28) $wy(x^2 - 9x + 14) = wy(x - 2)(x - 7)$
29) $(2x^2 + 1)(x + 5)$
30) $(p + q)(x + y)$

Parte C

1) $x(x-2)(x+1)$
2) $x(x-4)(x+2)$
3) $x(x-4)(x-3)$
4) $x(x+5)(x-2)$
5) $x(x-6)(x+1)$
6) $x(x+7)(x-3)$

Parte B$_{(18)}$

08) $(a + 7)(x - 5)$
09) $(a - 1)(2x - 3y)$
10) $(a + 9)(x - 1)$
11) $(x + y)(a - 1)$
12) $(a + 1)(a + 3)$
13) $(a^2 + 2)(a + b - 3)$
14) $(3x^2 + 8)(3 - z)$
15) $(x - y)(m + n)$
16) $(x^2 + y^2)(a^2 - 8b)$
17) $(a + 1)(8b + 1)$
18) $(6a - 2b)(x + y - 2)$
19) $(a^2b^3 - m^5)(1 - 3x + x^2)$
20) $(x + 5)(x + 3)^2$

EXPRESIONES ALGEBRAICAS(28)

Una expresión algebraica es una expresión en la que se relacionan valores indeterminados con constantes y cifras, todas ellas ligadas por un número finito de operaciones de sumas, restas, productos, cocientes, potencias y raíces.

Ejemplos:

a) $x^2 + 2xy$ b) $\sqrt{2x} + y^2x^3$ c) $\dfrac{xy - 2x}{x^2 + 1}$ d) $\dfrac{3}{\sqrt{x^2 + 1}} + 2y$

EXPRESIONES RACIONALES(20)

Liliana camina todas las mañanas 5 km en una hora.

Los primeros 3 km los recorre a una velocidad constante v pero, ya cansada, recorre los últimos 2 km a una velocidad v-2 km por hora.

¿Con qué velocidad camina en cada tramo?

Recordemos que, en esta situación, el espacio recorrido (e) se relaciona con la velocidad (v) y el tiempo (t) por la fórmula:

$$e = v \cdot t$$

	Espacio recorrido	**Velocidad con que recorre el tramo**	**Tiempo que tarda en recorrerlo**
Primer tramo	3	v	$\frac{3}{v}$
Segundo tramo	2	v-2	$\frac{2}{v-2}$

Como el tiempo que tarda en el recorrido es $\frac{3}{v}+\frac{2}{v-2}$, resulta:

$$\frac{3}{v}+\frac{2}{v-2}=1$$

A cada una de las expresiones $\frac{3}{v}$ y $\frac{2}{v-2}$ se les llama **fracciones algebraicas**.

DEFINICIÓN
Dados dos polinomios P(x) y Q(x); $Q(x) \neq O_p(x)$ llamaremos fracción algebraica a toda expresión de la forma $\frac{P(x)}{Q(x)}$.
La indeterminada x podrá tomar aquí cualquier valor real siempre que dicho valor no anule al denominador.

Como puedes observar toda expresión algebraica racional puede expresarse como cociente de polinomios.

EJEMPLOS

a) $\frac{2x^3+1}{x^2+2}$

b) $\frac{-x}{x-3}$; $x \neq 3$

Existe una gran similitud entre definiciones y operaciones entre fracciones algebraicas y números fraccionarios

Simplificación de expresiones algebraicas

Para simplificar una expresión racional seguimos los siguientes pasos:

1. Factorizar completamente el numerador y el denominador.
2. Dividir el numerador y el denominador por los factores comunes en ambos. Esto se hace cancelando los factores comunes en el numerador y el denominador.

Ejemplos para discusión:

1) $\frac{15}{40}=\frac{3\cdot 5}{2\cdot 2\cdot 2\cdot 5}=\frac{3}{2\cdot 2\cdot 2}=\frac{3}{8}$

2) $\frac{35}{5x-15}=\frac{35}{5(x-3)}=\frac{5\cdot 7}{5(x-3)}=\frac{7}{x-3}$

3) $\frac{y^2-16}{y^2+9y+20}=\frac{y^2-4^2}{y^2+9y+5\cdot 4}=\frac{(y-4)(y+4)}{(y+4)(y+5)}\underbrace{=}_{\text{Con } y\neq -4}\frac{y-4}{y+5}$

4) $$\frac{3x+6}{3x^2-21x-54}=\frac{3(x+2)}{3(x^2-7x-18)}=\frac{3(x+2)}{3(x+2)(x-9)}\underset{\text{Se asume } x\neq -2}{=}\frac{1}{(x-9)}$$

5) $$\frac{2x^2-xy-y^2}{x^2-y^2}=\frac{(2x+y)(x-y)}{(x-y)(x+y)}\underset{x\neq y}{=}\frac{2x+y}{x+y}$$

Ejercicio: Simplifica cada una de las siguientes expresiones racionales, recuerde hacer la restricción para los valores que indeterminan la expresión.

1) $\dfrac{8x}{x^2-3x}$

2) $\dfrac{y+5}{y^2+14y+45}$

3) $\dfrac{5x^2-20}{5x^2+5x-30}$

4) $\dfrac{a^2-36b^2}{a^2-3ab-18b^2}$

Recordemos que: si a, b y r son números reales b ≠ 0 y r ≠ 0 entonces:

$$\frac{a\,.r}{b\,.r}=\frac{a}{b}$$

En este caso decíamos que habíamos simplificado los factores comunes de la fracción.

DEFINICIÓN

Dada la fracción algebraica $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ tal que $Q(x)\neq O_p(x)$.

Si P(x) y Q(x) son divisibles por el mismo polinomio d(x) entonces existen dos polinomios M(x) y N(x) tales que:

$P(x) = M(x)\,d(x)$ y $Q(x) = N(x)\,d(x)$ con $N(x) \neq O_p(x)$.

Luego se verifica que:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}\quad\frac{M(x).d(x)}{N(x).d(x)}=\frac{M(x)}{N(x)}$$

En este caso diremos que $\dfrac{M(x)}{N(x)}$ simplificación de $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$

EJEMPLO

Si x ≠ 0

$$\frac{x^2+3x}{x^3+2x}=\frac{x+3}{x^2+2}$$

A las fracciones $\dfrac{a\,.\,r}{b\,.\,r}$ y $\dfrac{a}{b}$ las llamamos fracciones equivalentes.
Ej: $\dfrac{3}{5}$; $\dfrac{6}{10}$; $\dfrac{15}{25}$ son fracciones equivalentes.

DEFINICIÓN

Dos fracciones algebraicas $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ y $\dfrac{M(x)}{N(x)}$ son equivalentes si una de ellas es la simplificación de la otra.

EJEMPLO

$$\frac{x^3 - 2x^2 + x}{x\,(x - 1)} \;;\; \frac{(x - 1)^2}{(x - 1)} \;;\; (x - 1)$$

$x \neq 0$; $x \neq 1$

Se dice que una fracción está simplificada si numerador y denominador no poseen factores comunes. Ejemplo:

$$\frac{6x^2 + 4x}{2x^2 + 2x}$$

$$= \frac{2x(3x + 2)}{2x(x + 1)}$$

$$= \frac{2x}{2x} \cdot \frac{3x + 2}{x + 1}$$

$$= \frac{3x + 2}{x + 1}$$

OBSERVACIÓN: Siguiendo el camino inverso podemos obtener una fracción equivalente a $\dfrac{Q(x)}{P(x)}$ multiplicando numerador y denominador por un mismo polinomio H(x) distinto de cero.

Reducción a común denominador de fracciones algebraicas

Recordemos:
Si a, b, c y d son números reales, $b \neq 0$, $d \neq 0$ y $b \neq d$; las fracciones $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ se podían reducir a común denominador considerando dos fracciones equivalentes con igual denominador.

$$\frac{a}{b} = \frac{a.d}{b.d} \qquad \frac{c}{d} = \frac{c.b}{d.b}$$

DEFINICIÓN

Dadas las fracciones $\frac{P(x)}{Q(x)}$ y $\frac{M(x)}{N(x)}$ con $Q(x) \neq O_p(x)$, $N(x) \neq O_p(x)$
Las expresiones:

$$\frac{P(x).\,N(x)}{Q(x).\,N(x)} \quad y \quad \frac{M(x).Q(x)}{N(x).Q(x)}$$

son fracciones algebraicas equivalentes a las dadas con igual denominador.

A Q(x) . N(x) se lo llama denominador común.

EJEMPLO

Dadas las fracciones: $\frac{x+3}{x^2}$; $\frac{x^2+1}{x-1}$; $x\neq0$; $x\neq1$

Para escribirlas con igual denominador buscamos fracciones equivalentes a las dadas con esa propiedad

$$\frac{(x+3)}{x^2} = \frac{(x+3)\,(x-1)}{x^2\,(x-1)} = \frac{x^2+2x-3}{x^3-x^2}$$

$$x \neq 0\ ;\ x \neq 1$$

$$\frac{x^2+1}{x-1} = \frac{(x^2+1)\,x^2}{(x-1)\,x^2} = \frac{x^4+x^2}{x^3-x^2}$$

Las fracciones algebraicas dadas fueron reducidas a común denominador.

Observación: Aunque cualquier denominador común es válido, las operaciones resultarán más sencillas si elegimos de todos los posibles denominadores comunes el de menor grado.
A este denominador se lo llama mínimo común denominador.

Regla práctica para hallar el mínimo común denominador.

- Se factorizan los polinomios de los denominadores.
- Se multiplican todos los factores diferentes.
- Si existen dos factores con la misma base y distinto exponente es suficiente tomar como factor aquel que tiene mayor exponente.

EJEMPLO

Si debemos hallar el mínimo común denominador de las fracciones algebraicas:

$$\frac{x+1}{x^2};\ \frac{x-2}{x^3\,(x-1)};\ \frac{3x^2}{(x-1)^2}$$

debemos tener en cuenta los factores x^3 y $(x-1)^2$
El mínimo común denominador es:

$$x^3\,(x-1)^2$$

Operaciones con expresiones racionales

El proceso para multiplicar, dividir, sumar y restar expresiones racionales es muy similar a efectuar operaciones con números racionales.

Se parecen a las operaciones con números racionales

Tal vez debamos repasarlas

A. Multiplicación

Para multiplicar expresiones racionales seguimos los siguientes pasos:

1. Factorizar completamente cada una de las expresiones en el numerador y el denominador.
2. Cancelar los factores comunes que aparecen en el numerador y denominador.
3. Multiplicar los numeradores y denominadores.

Ejemplos para discusión:

1) $\frac{7}{2}\cdot\frac{4}{35}=\frac{7}{2}\cdot\frac{2\cdot 2}{5\cdot 7}=\frac{1}{1}\cdot\frac{2}{5}=\frac{2}{5}$

2) $\dfrac{3x-6}{10y}\cdot\dfrac{5xy}{x^2-4}=\dfrac{3(x-2)}{2\cdot 5y}\cdot\dfrac{5xy}{(x-2)(x+2)}=\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{x}{(x+2)}=\dfrac{3x}{2(x+2)}=\dfrac{3x}{2x+4}$

3) $\dfrac{y+7}{y^2-y-7}\cdot\dfrac{y^2-9}{y^2+10y+21}=\dfrac{y+7}{y^2-y-7}\cdot\dfrac{(y-3)(y+3)}{(y+7)(y+3)}=\dfrac{y-3}{y+7}$

Ejercicio Efectúa las operaciones indicadas.

1) $\dfrac{x}{2x-4}\cdot\dfrac{4x-8}{12}$

2) $\dfrac{x^2-6x+9}{5xy}\cdot\dfrac{5x^2-15x}{x^2-9}$

B. División

En la división seguimos los pasos a continuación:

1. Multiplicar la primera expresión racional por el recíproco de la segunda.
2. Simplificar usando el procedimiento de la multiplicación de expresiones racionales.

Ejemplos para discusión:

1) $\dfrac{3}{4}\div\dfrac{21}{16}=\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{16}{21}=\dfrac{3}{2\cdot 2}\cdot\dfrac{2\cdot 2\cdot 2\cdot 2}{3\cdot 7}=\dfrac{1}{1}\cdot\dfrac{2\cdot 2}{7}=\dfrac{4}{7}$

2) $\dfrac{2y+14}{4y^2}\div\dfrac{y+7}{8y}=\dfrac{2(y+7)}{2\cdot 2y^2}\bullet\dfrac{2\cdot 2\cdot 2y}{y+7}=\dfrac{1}{y}\cdot\dfrac{4}{1}=\dfrac{4}{y}$

3) $\dfrac{4x+6}{x^2+2x-15}\div\dfrac{2x^2+3x}{x+5}=\dfrac{4x+6}{x^2+2x-15}\bullet\dfrac{x+5}{2x^2+3x}=\dfrac{2(2x+3)}{(x+5)(x-3)}\cdot\dfrac{x+5}{x(2x+3)}=$

$\dfrac{2}{x-3}\cdot\dfrac{1}{x}=\dfrac{2}{x(x-3)}=\dfrac{2}{x^2-3x}$

Ejercicio Efectúa la operación indicada:

1) $\dfrac{y^2-16}{y^2-6y+8}\div\dfrac{y^2+7y+12}{5y-10}$

2) $\dfrac{3a+15}{a^2+2a-8}\div\dfrac{6a^2-6}{a-2}\cdot\dfrac{a^2-6a-7}{a+5}$

C. Suma y resta de fracciones racionales

Si tienen el denominador igual, se suman los numeradores y el denominador se copia.

Ejemplo

$$\frac{x-1}{\left(x^2+4x+4\right)}+\frac{2-2x}{(x+2)^2}+\frac{1}{(x+2)(x+2)}=\frac{x-1+2-2x+1}{x^2+4x+4}=\frac{-x+2}{x^2+4x+4}=\frac{2-x}{(x+2)^2}$$

Si los denominadores son diferentes entre sí, se determina el mínimo denominador común.

Ejemplo

$$\frac{2x-1}{x^2-49}+\frac{x}{x^2-5x-14}-\frac{3-x}{x^2+4x+4}\qquad=\qquad\frac{2x-1}{(x-7)(x+7)}+\frac{x}{(x-7)(x+2)}-\frac{3-x}{(x+2)^2}$$

Se han factorizado todos los denominadores.

El denominador común es $(x-7)(x+7)(x+2)^2$

A continuación se homogenizan las fracciones.

$$\frac{2x-1}{(x-7)(x+7)}=\frac{(2x-1)(x+2)^2}{(x-7)(x+7)(x+2)^2}$$

$$\frac{x}{(x-7)(x+2)}=\frac{x(x+2)(x+7)}{(x-7)(x+2)(x+2)(x+7)}=\frac{x(x+2)(x+7)}{(x-7)(x+7)(x+2)^2}$$

$$\frac{3-x}{(x+2)^2}=\frac{(3-x)(x+7)(x-7)}{(x+2)^2(x+7)(x-7)}$$

Se suman los numeradores y el denominador es el mínimo denominador común.

$$\frac{2x-1}{x^2-49}+\frac{x}{x^2-5x-14}-\frac{3-x}{x^2+4x+4}\qquad=\qquad\frac{2x-1}{(x-7)(x+7)}+\frac{x}{(x-7)(x+2)}-\frac{3-x}{(x+2)^2}=$$

$$\frac{(2x-1)(x+2)^2+x(x+7)(x-2)-(3-x)(x-7)(x+7)}{(x+2)^2(x-7)(x+7)}=$$

$$\frac{(2x-1)(x^2+2x+4)+x(x^2-2x+7x-14)-(3-x)(x^2-49)}{(x+2)^2(x^2-49)}=$$

$$\frac{(2x^3+4x^2+8x-x^2-2x-4)+x(x^2+5x+14)-(3x^2-147-x^3+49x)}{(x+2)^2(x^2-49)}=$$

$$\frac{(2x^3+3x^2+6x-4)+(x^3+5x^2+14x)-(-x^3+3x^2+49x-147)}{(x+2)^2(x^2-49)}=$$

$$\frac{2x^3+3x^2+6x-4+x^3+5x^2+14x+x^3-3x^2-49x+147}{(x+2)^2(x^2-49)}=$$

$$\frac{4x^3+5x^2-29x+143}{(x+2)^2(x^2-49)}$$

Ejemplos para discusión:

1) $\dfrac{9}{x^2+5x}+\dfrac{2}{x}$

2) $\dfrac{3}{2x-14}-\dfrac{x}{x-7}$

3) $\dfrac{x}{6x-30}+\dfrac{7}{2x-10}$

4) $\dfrac{2x+1}{25x^2+10x+1}-\dfrac{6x}{25x+5}$

Ejercicio Efectúa las operaciones indicadas:

1) $\dfrac{2}{x^2-6}+\dfrac{x}{x-4}$

2) $\dfrac{a}{a^2+11a+30}-\dfrac{5}{a^2+9a+20}$

3) $\dfrac{4x+2}{x^2+x-12}-\dfrac{3x+8}{x^2+6x+8}$

Ecuaciones Racionales

NO ES PARTE DE NUESTRO PROGRAMA pero se incluye como material recomendado

En esta ocasión pasaremos a resolver ecuaciones que contienen expresiones racionales para el valor de una variable desconocida, siguiendo los siguientes pasos:

1. Hallar el mínimo común múltiplo de los denominadores de todas las expresiones racionales en la ecuación.
2. Multiplicar ambos lados de la ecuación por el mínimo común múltiplo para eliminar todos los denominadores.
3. Resolver la ecuación resultante para la variable.
4. Verificar la solución sustituyendo en la ecuación original. Descartar todos los valores que hacen que la expresión en la ecuación original no esté definida.

Ejemplos para discusión:

1) $\dfrac{3}{y+2} = \dfrac{9}{y}$

2) $\dfrac{4x}{x-5} - 4 = \dfrac{5}{x}$

3) $\dfrac{2}{3} + \dfrac{5}{x-4} = \dfrac{x+6}{3x-12}$

Ejercicio

Halla el valor de la variable en cada ecuación:

1) $\dfrac{4}{x} = \dfrac{5}{x} - \dfrac{1}{2}$

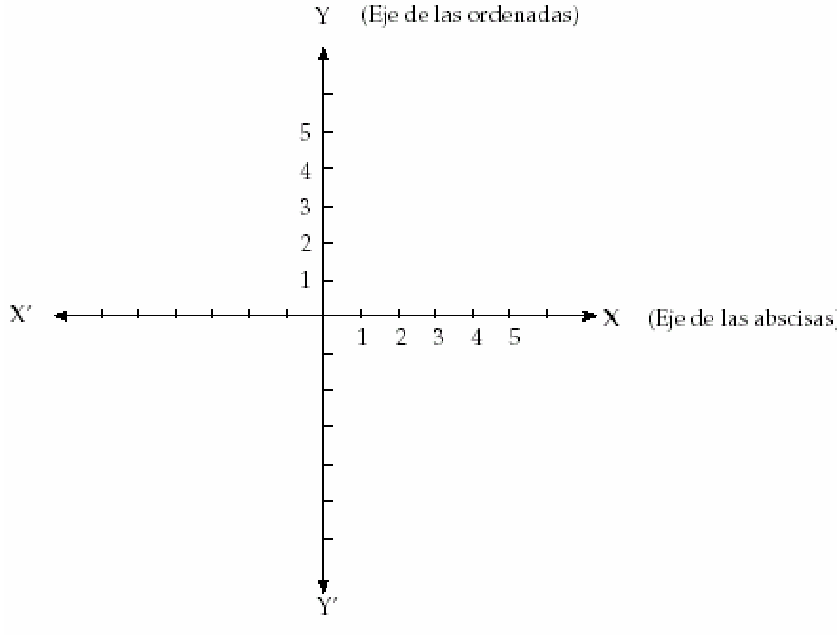
2) $\dfrac{3}{x+5} - \dfrac{1}{x-5} = \dfrac{5}{x^2-25}$

PLANO CARTESIANO(1)

Observa el programa de televisión (sesión GA 3.25 ¡Ubícalos!). En él, mostrarán cómo se constituye un plano cartesiano, y además cómo se utiliza en la localización de puntos en el mismo. Comenta después brevemente, con un compañero lo que aprendiste, y continúa la siguiente lectura en parejas. Un navegante o cualquier persona que utiliza instrumentos que sirvan para orientarse o para llegar a un lugar determinado, utiliza herramientas que son muy comunes: la brújula y la rosa de los vientos.

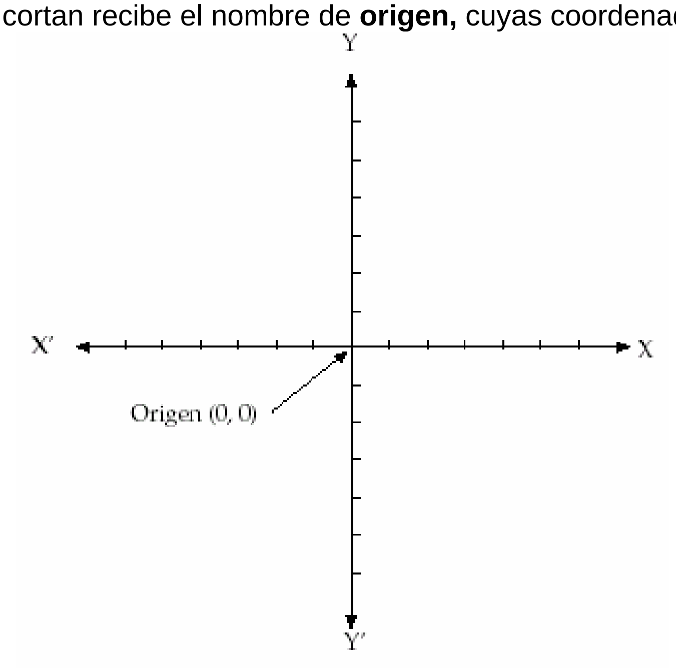
En el estudio de la matemática existe la necesidad de localizar puntos en el plano.

Para poder describir la posición de un punto en el plano se necesitan dos rectas numéricas. Con éstas se construye un sistema de ejes coordenados, los cuales determinan un plano que se le conoce técnicamente como plano cartesiano. El trazo de las dos rectas se ejecuta perpendicularmente; la recta que se encuentra en **posición horizontal** se le identifica como el eje de las abscisas o **de las x** y la recta que tiene la **posición vertical** se conoce como **el eje de las ordenadas** o **de las y.**



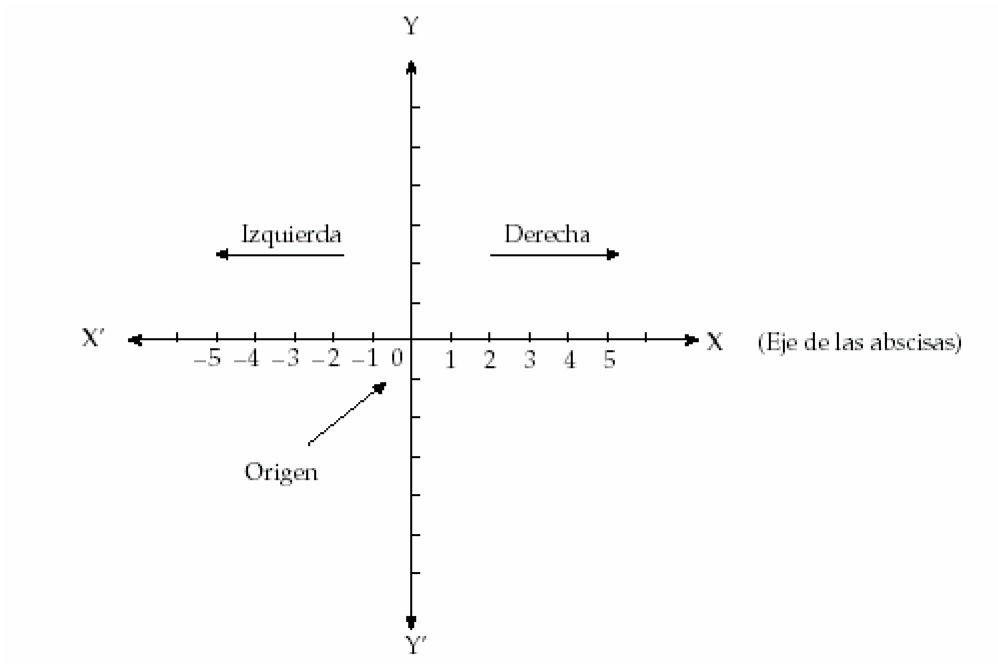
Plano cartesiano

Las rectas perpendiculares **x**, **y**, son conocidas como **ejes coordenados,** y el punto donde éstas se cortan recibe el nombre de **origen,** cuyas coordenadas son (0,0).

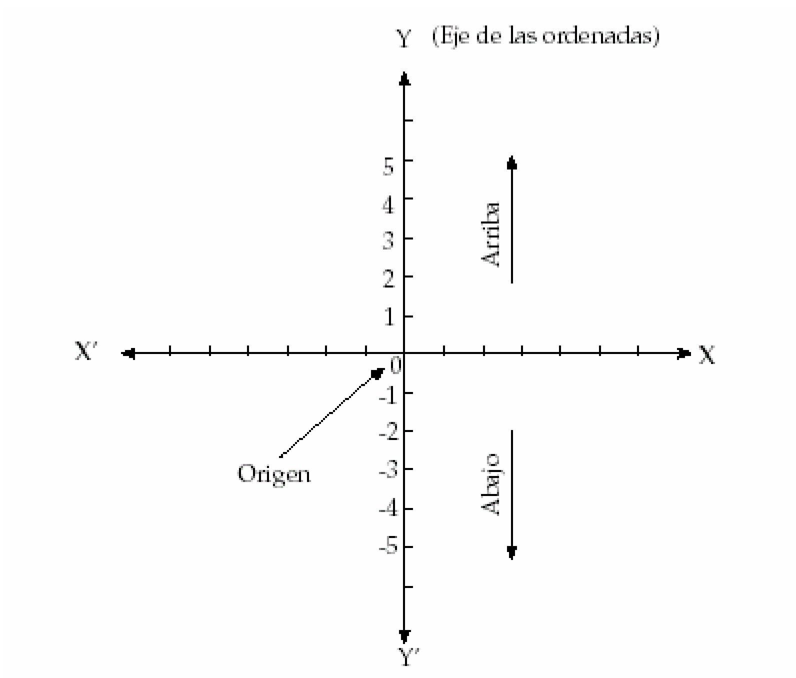


Ejes coordenadas X, X', Y, Y'

Si uno se sitúa en el origen, observa que hacia la derecha están los **valores positivos**. Asimismo, se percata de que del origen hacia la izquierda se tienen **valores negativos**.



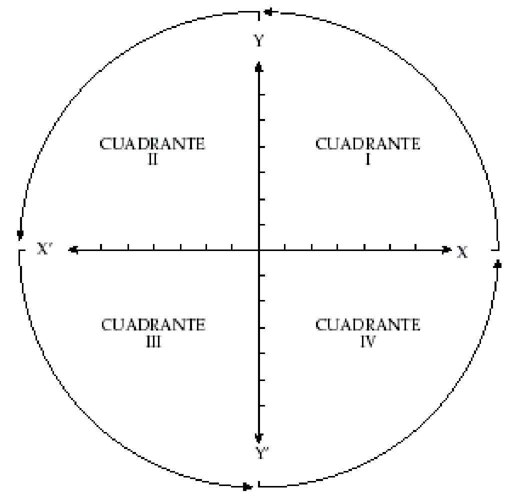
Ahora, ubicándose de nueva cuenta en el origen se tiene que hacia arriba están **valores positivos** y hacia abajo los **valores negativos.**



De esto se deduce que:

1) En el primer cuadrante la abscisa y la ordenada son positivas.
2) En el segundo cuadrante la abscisa es negativa y la ordenada positiva.
3) En el tercer cuadrante tanto la abscisa como la ordenada son negativas.
4) En el cuarto cuadrante la abscisa es positiva y la ordenada negativa.

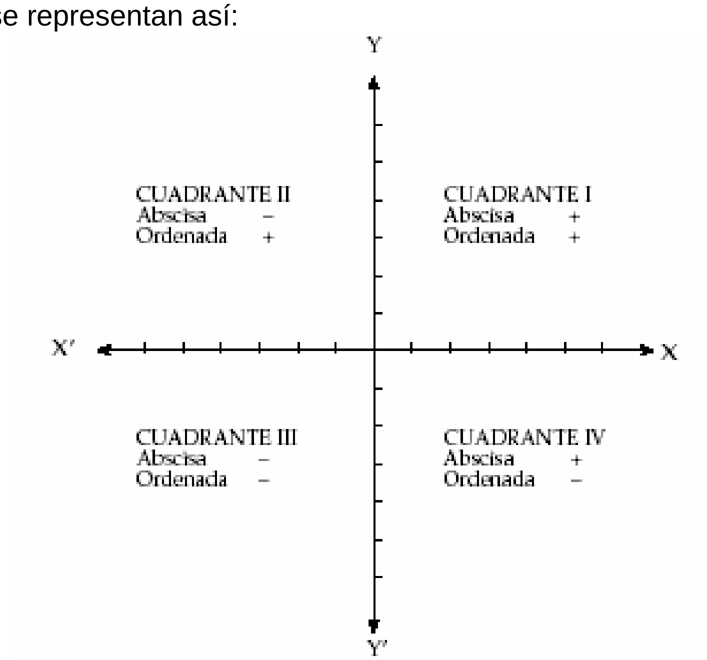
Como puede observarse, el plano cartesiano está dividido en **cuatro partes,** las cuales son conocidas como **cuadrantes.** Dichos cuadrantes se simbolizan con números romanos; por lo que respecta al **orden de los cuadrantes**, éste se establece en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj, comenzando por el cuadrante superior derecho y terminando con el cuadrante inferior derecho.



Una vez que se ha determinado el plano cartesiano se está en posibilidad de representar **pares ordenados de números** en dicho plano.

Si se tiene la pareja ordenada (**a**; **b**), hay que considerar que **a** es la **primera componente** y se localiza en el eje de las abscisas, por lo tanto se le llama la **abscisa del punto.** En tanto que **b** es la **segunda componente** y se localiza en el eje de las ordenadas; así pues, se le llama **ordenada del punto**. Al par ordenado también se le conoce como las coordenadas de un punto.

Una vez hechas estas consideraciones es importante señalar que los valores en cada cuadrante del plano cartesiano se representan así:



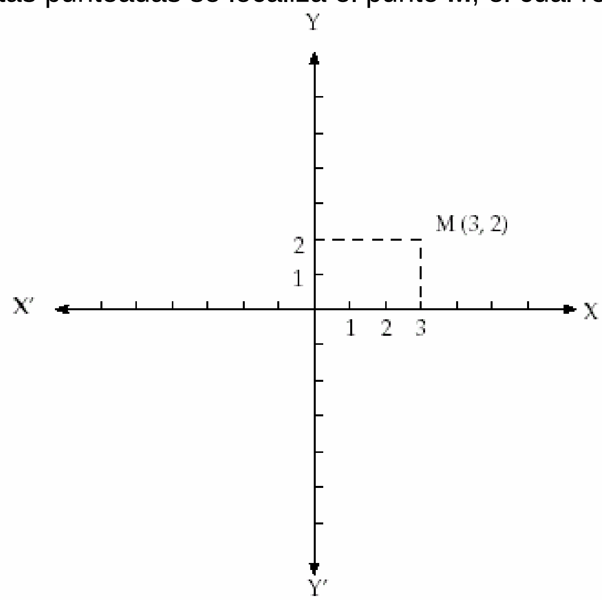
Con estos elementos se pueden localizar puntos en el plano. Graficar un par ordenado de números significa localizar un punto en el plano cartesiano. ¿Cómo se logra esto?

Supóngase que se necesita localizar el punto M cuyas coordenadas son (3; 2).
Se procede de la siguiente manera:

1. Se localiza en el **eje de las abscisas** la “primera componente” (en este caso es 3) de la pareja ordenada. A partir de ese punto se traza una recta punteada paralela al **eje de las ordenadas.**

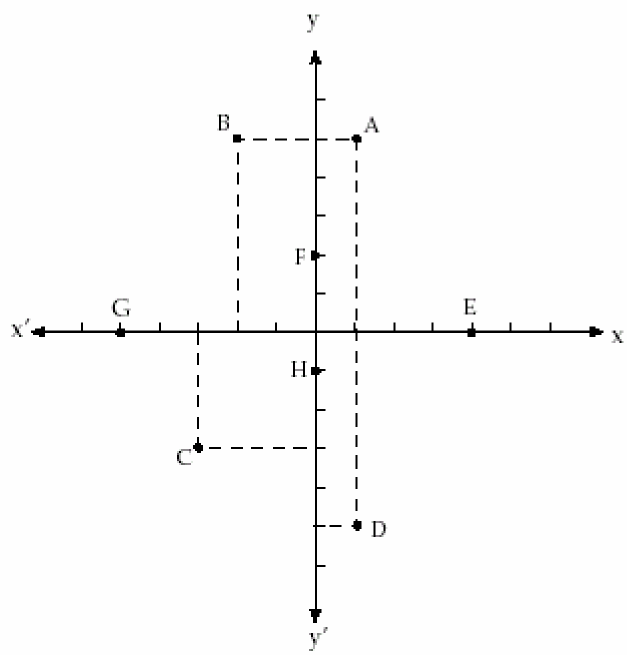
2. Se localiza en el **eje de las abscisas** la “segunda componente” (en este caso es 2) de la pareja ordenada. Se traza también una recta (punteada) paralela al **eje de las abscisas.**

3) En el cruce de las rectas punteadas se localiza el punto **M**, el cual representa a la pareja.



Ejemplos:

Localiza en un plano cartesiano los siguientes pares ordenados: A (1; 5), B (–2; 5), $C(-3;-3)$, D (1;–5), E (4; 0), F (0; 2), G (–5; 0), H (0; –1), I (0; 0).



Al adquirir la habilidad en el uso del plano cartesiano, podrás desarrollar la capacidad de representar e interpretar gráficamente expresiones algebraicas; asimismo, se te facilitará el aprendizaje de otros temas de nivel superior.

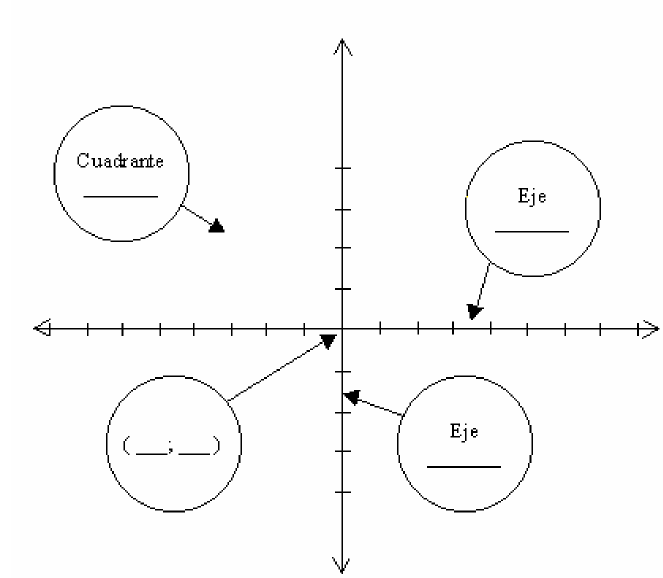
Ejercicios Completa las siguientes cuestiones:

a) Para trazar un plano cartesiano se requieren dos ____________________. La que identificamos con la letra **x**, se le denomina _________ de las _______________________ y la identificada con la letra **y** se le denomina __________ de las __________________________ .

b) Las rectas perpendiculares cortadas entre sí en un plano cartesiano, se conocen como ejes ____________________________. El punto donde se cortan estas rectas recibe el nombre de ____________________ , por lo cual sus coordenadas son (,).

Verifica tus respuestas y coméntalas posteriormente a otra bina, si tienes errores, corrígelos.

Continúa trabajando en tu bina, y anota en los círculos vacíos la expresión, número o literal que señala la flecha en el esquema de la derecha.



Ahora resuelve las siguientes cuestiones:

a) ¿En cuántas partes se encuentra dividido un plano cartesiano?

____

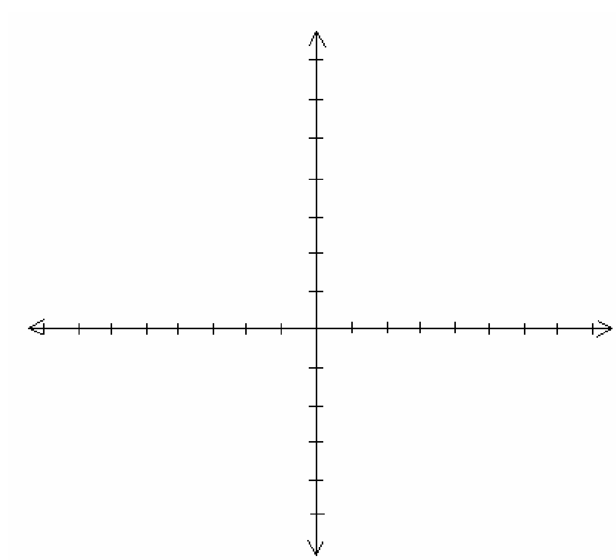
b) ¿Cómo se establece el orden de los cuadrantes del plano?

____

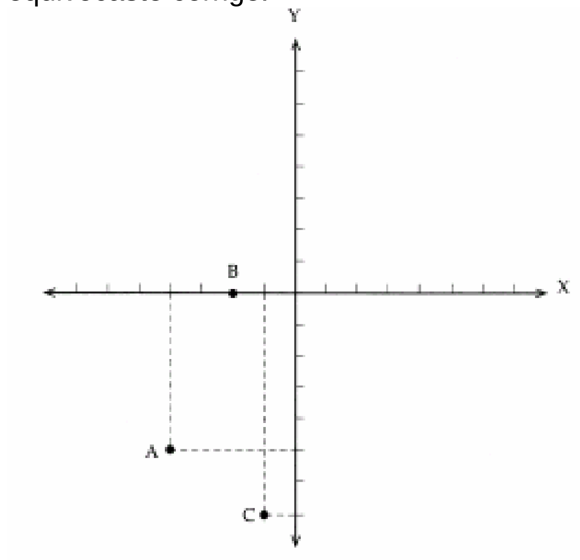
c) En la pareja ordenada (-20;-3), el punto que la representa se ubica en el __________ cuadrante.

Comenta tus respuestas con tu compañero de equipo y si tienes dudas consulta la teoría.

Continúa trabajando con tu compañero y localiza en el plano cartesiano los siguientes pares ordenados: A(5,1), B(-5,-4), C(1,-1), D(7,0), E(-2,0).



Compara tu plano cartesiano con el de otra bina, si te equivocaste corrige.

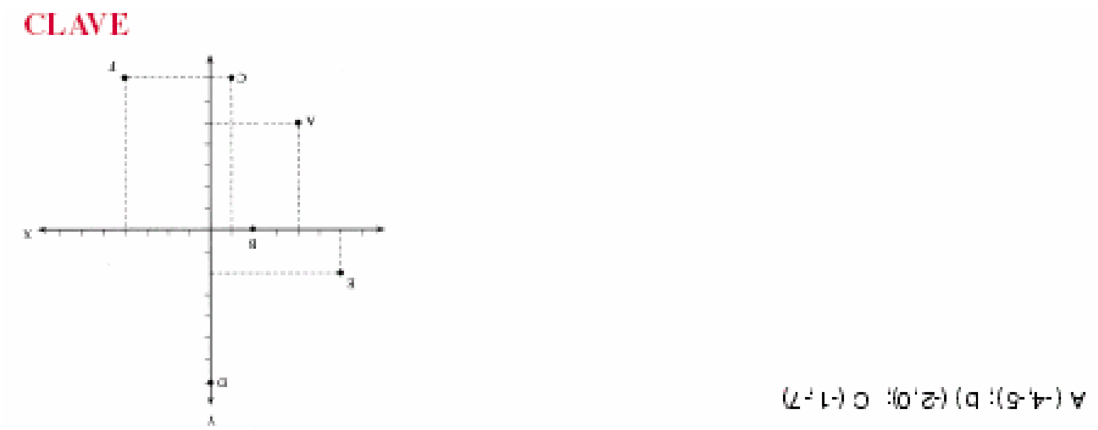


Ahora trabaja individualmente y encuentra las coordenadas de los puntos del tercer cuadrante y anótalos:

A(;), B(;), C(;).

Localiza en el mismo plano las siguientes parejas ordenadas: D(0;7), E(-5;2), F(4;-7).

Verifica tus coordenadas y compara tus respuestas con la clave.



FUNCIONES$_{(2)}$

Videocinta correspondiente a GA 3.26 Uno depende de otro.

Existen cosas que cambian en **función** de otra. Por ejemplo, la hora del día varía en función de la posición del Sol con respecto al cenit. Si se desea hacer un viaje, el costo del pasaje variará en función de la distancia del lugar que se desea visitar.

El término de función es muy importante en matemáticas y sin él muchos de sus conceptos no habrían evolucionado hasta ser lo que son ahora.

Considérese el siguiente ejemplo:

Se desea conocer el perímetro de algunos círculos conociendo la medida de sus diámetros.

Se toma $\pi = 3{,}1416$

Círculo 1 = 10 cm de diámetro, por tanto P = 31,416 cm
Círculo 2 = 15 cm de diámetro, por tanto P = 47,12 cm
Círculo 3 = 18 cm de diámetro, por tanto P = 56,54 cm
Círculo 4 = 25 cm de diámetro, por tanto P = 78,54 cm
Círculo 5 = 32 cm de diámetro, por tanto P = 100,53 cm

Dando valores a la medida del diámetro es posible encontrar el perímetro del círculo, aplicando la regla que existe entre esos dos valores, ésta es:

$$P = \pi \bullet d$$

En esa expresión se localizan la constante π y las variables **P**, **d**.

Un símbolo o literal que representa un valor específico recibe el nombre de **constante.**

Una literal o símbolo que puede adquirir diferentes valores recibe el nombre de **variable.**

Así, en la expresión anterior, la π sólo puede tomar un valor, por tanto es constante.

En cambio, la medida de los diámetros varía independientemente en cada círculo y sus perímetros dependen de la medida que adquiera el diámetro.

Por tanto **d** y **P** son variables.

En este caso, por variar independientemente de otras medidas, a la medida del diámetro se le conoce como **variable independiente.**

Como la medida del perímetro depende del valor del diámetro se le conoce como **variable dependiente.**

Asígnesele a la medida del diámetro la letra **x** y a la del perímetro la letra **y**.
Se puede observar que siempre que cambia el valor de x cambia el valor de y.

Esto es:

Si el diámetro es 10 cm, el perímetro es 31,416 cm.
Si el diámetro es 15 cm, el perímetro es 47,12 cm.
Si el diámetro es 18 cm, el perímetro es 56,54 cm.

En el ejemplo anterior, la regla de funcionalidad es P = π d y sustituyendo en ella **x**, **y** quedaría como:

$$y = \pi \ x$$

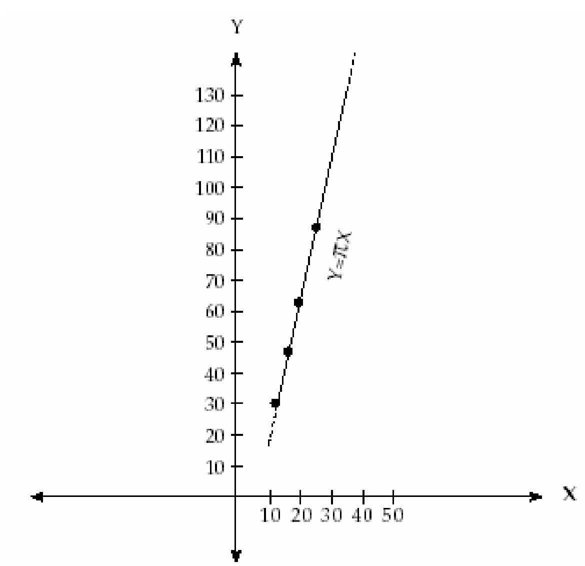
Así, de acuerdo con los valores que adquiere **x** (variable independiente) variará el valor de **y** (variable dependiente), y se formarán con cada pareja correspondiente **(x, y)** los **pares ordenados o coordenadas de la gráfica.**

Los datos de **x** y **y** se pueden agrupar en una tabla, que puede ser horizontal o vertical, anotando en el primer renglón los valores de **x**, y en segundo los de **y**.

x	10	15	18	25	32
y = π x	31,416	47,12	56,54	78,58	100,53

x	y	coordenadas
10	31,416	$(10; 31{,}416)$
15	47,12	$(15; 47{,}12)$
18	56,54	$(18; 56{,}54)$
25	78,58	$(25; 78{,}54)$
32	100,53	$(32; 100{,}53)$

Estos datos pueden representarse en forma gráfica localizando en el plano cartesiano los pares ordenados y uniendo dichos puntos.



Esta es la representación gráfica de la función: $y = \pi x$.

Véase otro ejemplo con la siguiente función:

$$y = -2x + 3$$

Para realizar la tabulación se dan valores arbitrarios a **x**, pues es la variable independiente de los cuales se obtendrán los valores de **y**, la variable dependiente.

$y = -2x + 3$

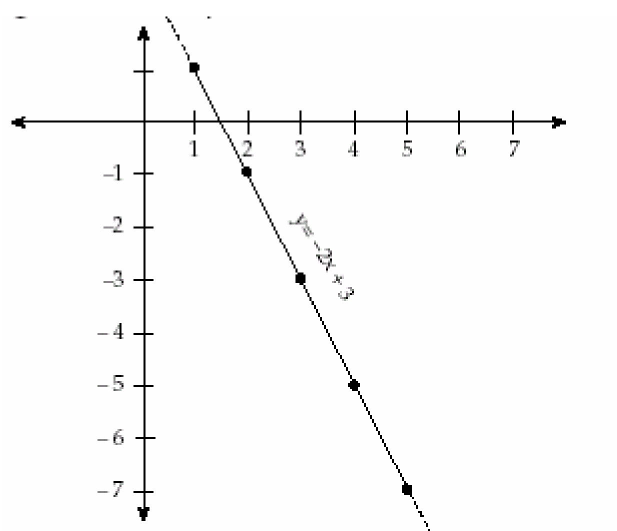
x	y
1	1
2	–1
3	–3
4	–5
5	–7

$$y = -2(1) + 3$$
$$y = -2(2) + 3$$
$$y = -2(3) + 3$$
$$y = -2(4) + 3$$
$$y = -2(5) + 3$$

De esa forma se obtienen las parejas ordenadas con las cuales se establecen las coordenadas de la gráfica correspondiente.

Si se localizan en la gráfica las coordenadas **x**, **y** no consideradas en la tabulación, y se sustituyen en la regla de funcionalidad, se puede comprobar que se cumplen.

Tómense las coordenadas (4,5; –6) para comprobar con ellas la regla:



Si se localizan en la gráfica las coordenadas **x**, **y** no consideradas en la tabulación, y se sustituyen en la regla de funcionalidad, se puede comprobar que se cumplen.

Tómense las coordenadas (4,5; –6) para comprobar con ellas la regla:

$$\begin{aligned} y &= -2x + 3 \\ -6 &= -2\,(4{,}5) + 3 \\ -6 &= -9 + 3 \\ -6 &= -6 \end{aligned}$$

Esta regla se cumple para cualquier punto de la gráfica correspondiente, la cual es única, independientemente de los valores asignados a **x**.

Una función puede ser de primero, segundo, tercero u otro grado, de acuerdo con el mayor exponente que tenga **x** en la ecuación, y la representación gráfica de cada una de ellas tendrá características particulares.

Ejercicios Corresponden a “Uno depende del otro”

Muchas cosas que suceden a nuestro alrededor dependen unas de otras. El clima de una región depende, entre otras cosas, de la latitud y la altitud en que se encuentre ubicada.

Del programa de televisión, comenta con tus compañeros qué entendiste por **función**.

RECUERDA Localiza en el plano cartesiano los siguientes puntos:

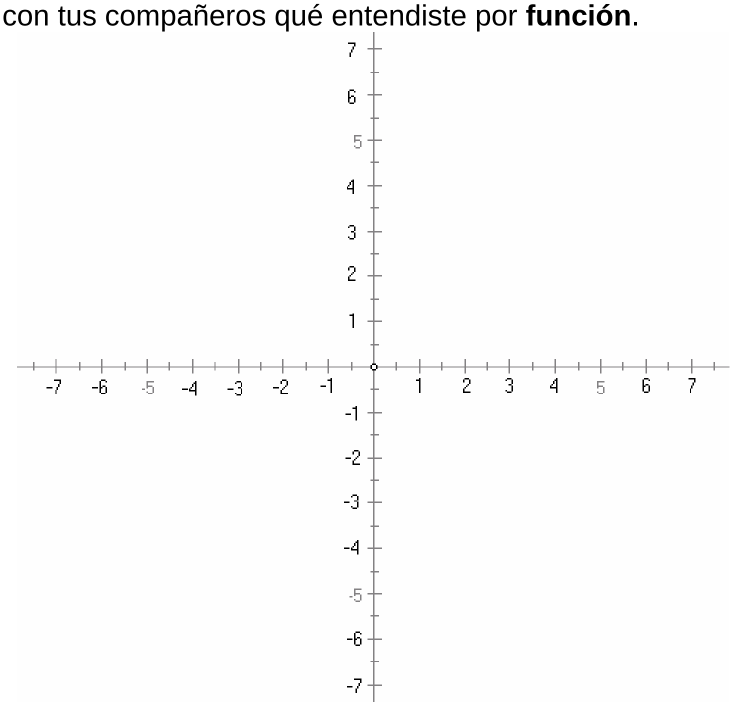
A (-4; -5)

B (-6; 4)

C (0; 3)

D (-4; -2)

E (3; 5)



Discute en tu grupo qué es una variable dependiente y qué una variable independiente.

Reúnete con un compañero y contesta las siguientes preguntas de acuerdo con la ecuación $y = 3x - 2$

1. ¿Cuáles son las dos variables? ____
2. ¿Cuál de ellas es la variable independiente? ____________________________
3. ¿Cuál es la variable dependiente? ______________________________________
4. ¿Por qué? ____
5. ¿Qué otro nombre recibe? ____

Lee en voz alta tus respuestas. Discútelas con tus compañeros y corrige si es necesario.

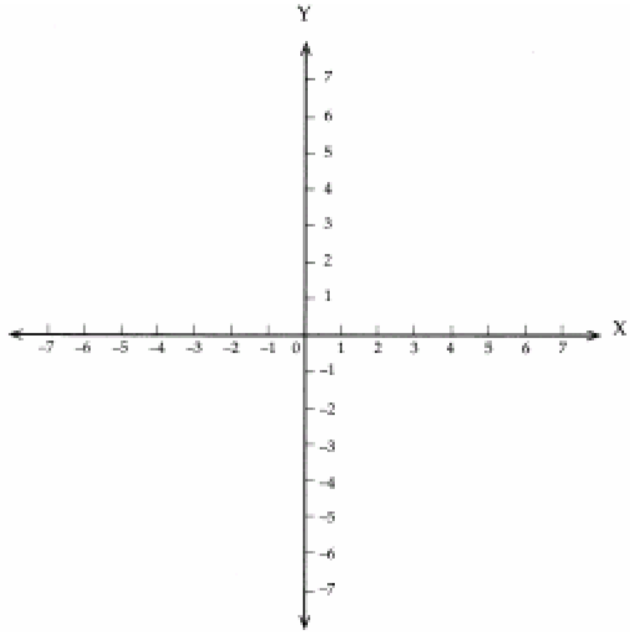
Con un compañero, realiza el ejercicio siguiente: De acuerdo con la función y = 2x – 2

1) Tabula de acuerdo con los valores asignados a **x**.

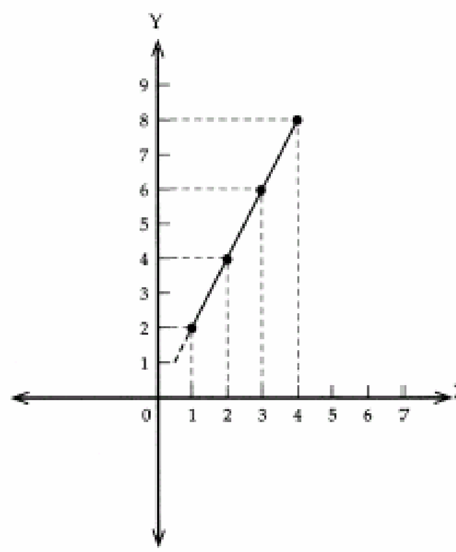
2) Realiza la gráfica correspondiente

y = 2x – 2

x	y
-2	
-1	
0	
1	
2	



Realiza en equipo el siguiente ejercicio.
Observa la siguiente gráfica y contesta las preguntas.



1. ¿Cuál es el valor de **y** cuando **x** = 1 ? __________ .
2. ¿Qué valor adquiere **y** cuando **x** = 2? ___________ .
3. ¿Cuál cuando **x** = 3? _________________________
4. ¿Y cuando **x** = 4? ___________________________ .
5. Escribe las coordenadas que resultan con esos valores.
   (1,), (2,), (3,), (4,)
6. ¿Cuáles son los valores que toma la variable independiente?
   ____
7. ¿Cuáles los de la variable dependiente?
   ____

8. ¿Cuál es la función que determina esa gráfica?
   ______________________0_______________________________________ .
9. Toma un par ordenado de la gráfica y comprueba la regla:

Compara tus resultados con los de la clave. Si hay diferencias revisa tu cuestionario y si es necesario corrige.

CLAVE

1. 2; 2. 4; 3. 6; 4. 8; 5. (1, 2), (2, 4), (3, 6), (4, 8); 6. 1, 2, 3, 4; 7. 2, 4, 6, 8; 8. f(x) = 2x o y = 2x; 9. Respuesta abierta de acuerdo con las coordenadas que se tomen.

CONCEPTO DE FUNCIÓN(3)

En la vida cotidiana existen muchos tipos de relaciones que generan lo que en matemáticas se conoce como funciones.

Hasta el momento se ha utilizado el término “función” para describir una relación o correspondencia entre dos conjuntos no vacíos que asocia **a cada** elemento del primer conjunto **un único** elemento del segundo conjunto. En adelante esta será la definición de función.

Ejemplo

Supongamos que tenemos el conjunto de estudiantes de décimo año de esta Telesecundaria y el conjunto de números naturales y se quiere establecer una correspondencia entre estudiante y su edad en años cumplidos. Podemos tener entonces las siguientes dos situaciones:

1. A cada estudiante se le asocia su respectiva edad
2. La edad se asocia con el estudiante.

En el primer caso, el primer conjunto sería el conjunto de estudiantes y el segundo conjunto sería el conjunto de números naturales. En esta situación a **cada** elemento (estudiante) del primer conjunto se le asigna **un único** elemento (su edad) del segundo conjunto. ¿Por qué único? Note que a cada estudiante sólo se le puede asignar un número, ya que no es posible que un estudiante tenga dos edades distintas.

Por lo tanto, se establece una función entre el conjunto de estudiantes y el conjunto de números naturales.

En el segundo caso, el primer conjunto sería el conjunto de números naturales y el segundo conjunto sería el conjunto de estudiantes. En esta situación sucede que:

a) en el conjunto de números naturales hay elementos (números) que no se pueden asociar a ningún estudiante pues esa edad no corresponde a ninguno de ellos.
b) en el conjunto de números naturales hay elementos que se pueden asociar a más de un estudiante pues varios estudiantes pueden tener la misma edad.

Por lo tanto, en este caso NO se establece una función ya que a cada elemento del primer conjunto NO se le puede asignar siempre un elemento del segundo conjunto y además en algunos casos el elemento del segundo conjunto no es único.

Representación de una función

Las funciones se pueden representar de diferentes maneras mediante diagrama sagital, tabla de valores, gráfica o símbolos.

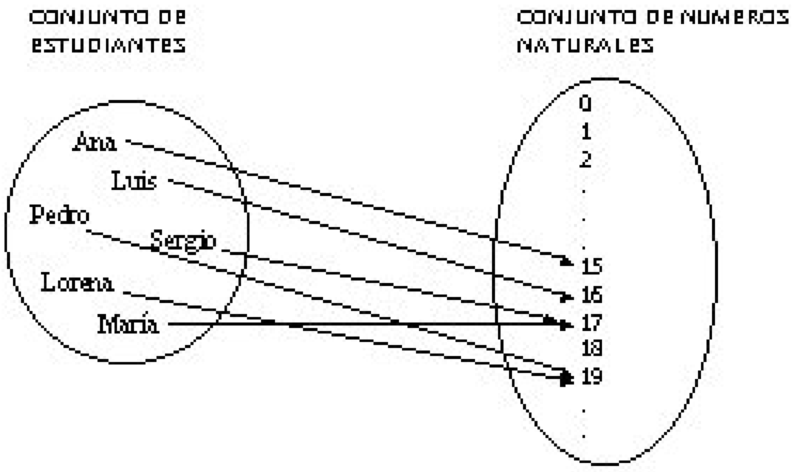
Diagrama sagital

En el diagrama sagital encontramos los conjuntos entre círculos o óvalos. El primer conjunto es el de la izquierda y el segundo es el de la derecha y las relaciones entre los elementos las establecemos mediante flechas.

Ejemplos

1) Utilizando el ejemplo anterior

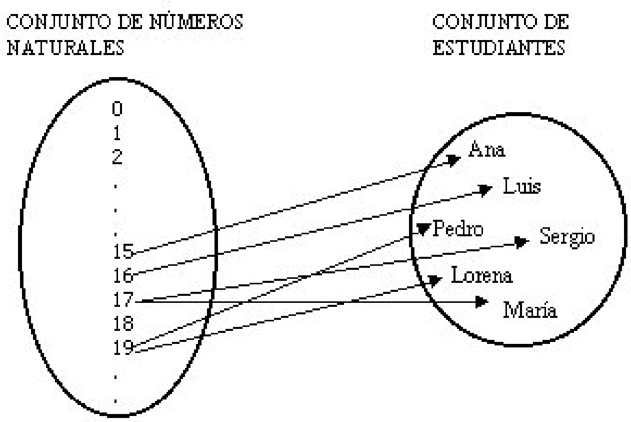
I caso



Observe que a cada elemento del primer conjunto se le asigna un único elemento del segundo conjunto.

Por lo tanto, se establece una función

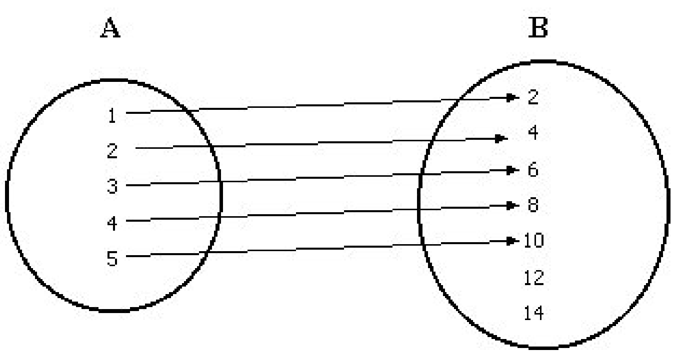
II caso



Observe que a algunos elementos del primer conjunto NO se le asigna un elemento del segundo conjunto. Y además en algunos casos el elemento que se asigna del segundo conjunto NO es único.

Por lo tanto, NO se establece una función

2)



Observe que esta relación sí es una función pues a cada elemento del primer conjunto se le asocia un único elemento del segundo conjunto.

Tabla de valores
Una función también se puede representar mediante una tabla de valores, donde los elementos del primer conjunto son los valores de la primera fila o columna y los elementos del segundo conjunto son los elementos del segundo conjunto.

Ejemplos

1)

x	-2	-1	3	4
y	-3	-6	9	12

En este caso, el primer conjunto es { -2, -1, 3, 4 } y el segundo conjunto es {-6,-3, 9, 12 } y con la tabla se establece que a -2 le corresponde el -3, a –1 le corresponde –6 , a 3 el 9 y a 4 el 12. Por lo tanto, esta relación corresponde a una función pues a cada elemento del primer conjunto se le asigna un único elemento del segundo conjunto.

2)

x	y
-5	4
-3	7
8	9
9	10
10	12
8	3

En este caso el primer conjunto es { -5,-3, 8, 9, 10 } y el segundo conjunto es { 4, 7, 9, 10, 12, 3} pero obsérvese que a un elemento del primer conjunto (8) se le asignan dos elementos del segundo (el 9 y el 3) por lo tanto, esta relación NO es función.

Simbólicamente
Una función se puede representar simbólicamente. Supongamos que tenemos una función y le vamos a llamar **f**. Los elementos del primer conjunto se representarán con **x** y los elementos del segundo conjunto, con **f(x)**.

Ejemplos

1) Se tienen los conjuntos A ={ 12, 13, 14 } y B = { 24, 26, 28 } y la función **f** está definida por **f(x) = 2x** es decir que a cada elemento **x** del primer conjunto se le asigna el elemento **f(x)** que va ser igual al doble de **x** en el segundo conjunto así tendríamos que a 12 se le asigna 24 , a 13 se le asigna 26 y a 14 se le asigna 28.

2) La expresión **f(x) = x + 8** significa que a cada elemento **x** del primer conjunto se le asigna el elemento **f(x)** que es igual a **x** aumentado en 8, así por ejemplo, si 3 es un elemento del primer conjunto entonces con esta función se le asignaría el 1 pues, -7 + 8 = 1.

Ejercicios$_{(4)}$
La comunicación es básica para el desarrollo humano. El consenso en relación con el significado de cada vocablo facilita la comunicación: todas las personas "entienden" lo mismo ante el término en cuestión. Para comunicar ideas nos valemos de muchos medios, en el caso de las funciones, éstas pueden ser explicitadas o ilustradas de diversas maneras.


En grupos, comente algunas relaciones de su vida cotidiana que correspondan o no a funciones. Determine en cuáles casos sí satisface las condiciones para ser función.

En grupos resuelva los siguientes ejercicios.
(I) Completa con la o las palabras que mejor se adapten a lo solicitado.

- Dados dos conjuntos, A y B, una relación de A a B es una función siempre y cuando a cada elemento de A se le asigne ____ de B.
- La representación simbólica de la función que a cada número real le asocia su triple puede ser $f(x)=$ ________
- Para deteminar la cantidad de dinero a pagar en un autobus, María estableció que en función de la cantidad de personas x, el costo es $p(x)=145x$

  Complete la tabla de valores que a continuación se presenta:

x	0	1	
p(x)	0		435

- Describa la relación establecida en la siguiente tabla de valores.
  (Anote una descripción en lenguaje común)

x	-2	-1	0	1	2
g(x)	0	1	2	3	4

____
____
____

En parejas resuelva los siguientes ejercicios

1. Construya un diagrama sagital para la siguiente relación
   A cada nombre de estudiantes, María, Juan, Esteban, Julia y Ernesto se le asocia con su primer apellido de acuerdo con la información: María Rojas, Juan Logan, Iván Rojas, Julia Salas y Ernesto Artavia.
2. Construya una tabla de valores para la función que simbólicamente se representa como $h(x)=2x+1$

Individualmente indique cuáles de las siguientes relaciones son funciones. Señale con una X las que son funciones.

1.( ) A cada elemento de un primer conjunto compuesto por Ana, Julio, Enrique y Sofía se le relaciona con el número de hermanas(os). El segundo conjunto es $\{0;1;2;3;4;5\}$ y la información requerida es Ana no tiene ni hermanas ni hermanos, Julio tiene tres hermanas y cuatro hermanos, Enrique tiene un hermano y Sofía tiene tres hermanas.

2.( ) A las personas de un país se les asocia con su respectivo padre biológico(conocido o no).

3.( ) Relación entre las mujeres solteras de la ciudad de León Cortés, mayores de 15 años, con su grado de escolaridad. El segundo conjunto es de cero a infinito, $[0;\infty[$

4.( ) A cada habitante de Costa Rica se le relaciona con su número de identificación, sea cédula o cédula de residencia.

CLAVE: **Sólo 2 y 3 son relaciones que son funciones.** En el caso 1 algunos elementos del primer conjunto no están asociados a alguno del segundo conjunto. En el tres no todo habitante tiene número oficial de identificación (por ejemplo, indocumentados)

LAS FUNCIONES Y SUS APLICACIONES(5)

Obsérvese la videocinta respectiva a la sesión GA 3.27 La función debe continuar.

El concepto de función se encuentra implícito en diversas actividades, y su empleo es innegable en ciencias como la física, la geometría, la medicina, etc.

Obsérvense algunos ejemplos.

Se sabe que la velocidad de la luz es de 300 000 km con lo cual se puede establecer la distancia que recorre en cuatro, cinco, seis, siete, segundos, etcétera.

Si en un segundo recorre 300 000 km
en tres segundos recorre 900 000 km
en cinco segundos recorre 1 500 000 km
en siete segundos recorre 2 100 000 km
en nueve segundos recorre 2 700 000 km

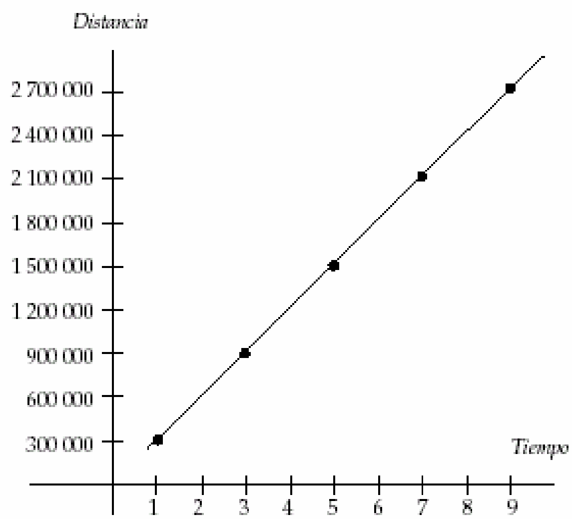
Se puede apreciar que la distancia que recorre la luz depende del tiempo transcurrido; por tanto el tiempo es la variable independiente (**x**), la distancia es la variable dependiente (**y**), y la regla de funcionalidad:

Distancia = (velocidad de la luz) (tiempo)
y = 300 000 x

Aplicándola, se obtiene la tabulación de la derecha, con la que se puede realizar la gráfica.

y = 300 000 x

x	y
1	300 000
3	900 000
5	1 500 000
7	2 100 000
9	2 700 000



La gráfica muestra cómo a mayor tiempo transcurrido, mayor distancia recorrida por la luz.

Si se toman coordenadas de la gráfica no consideradas en la tabulación puede comprobarse la regla de funcionalidad.

Tómense las coordenadas (4, 1 200 000)

$$y = 300\,000\,x$$
$$1\,200\,000 = 300\,000\,(4)$$
$$1\,200\,000 = 1\,200\,000$$

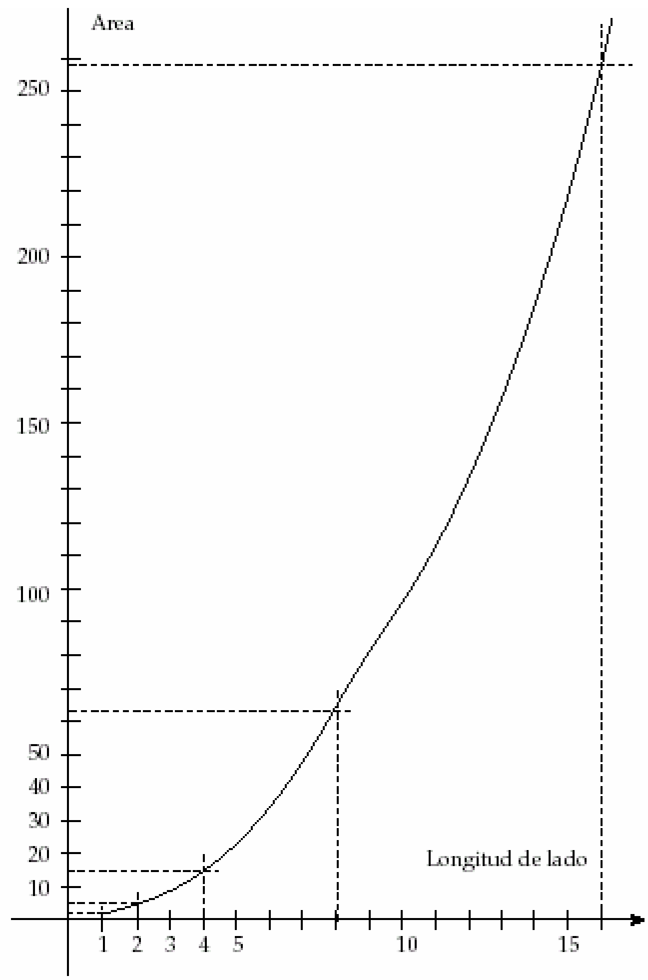
En geometría se sabe que al duplicar las longitudes de un dibujo en una escala de ampliación, su área se cuadruplica. De modo que si un cuadrado tiene de lado una unidad, su área es de 1 u2; si tiene 2 u de lado, su área será de 4 u2; si tiene 4 u de lado su área será de 16 u2, etcétera.

Se observa que el área del cuadrado depende de la longitud de su lado, por tanto, el área es la variable dependiente y la longitud del lado la variable independiente.

Y graficando esos valores se tiene:

$y = x^2$

x	y
1	1
2	4
4	16
8	64
16	256



Se observa que las gráficas de las funciones anteriores presentan características particulares; la primera es una recta, por lo que dicha función es llamada lineal y su regla de funcionalidad es de primer grado y la de la segunda es cuadrática con la que se obtiene una curva.

Otro problema en donde se utilizan las funciones es el siguiente:

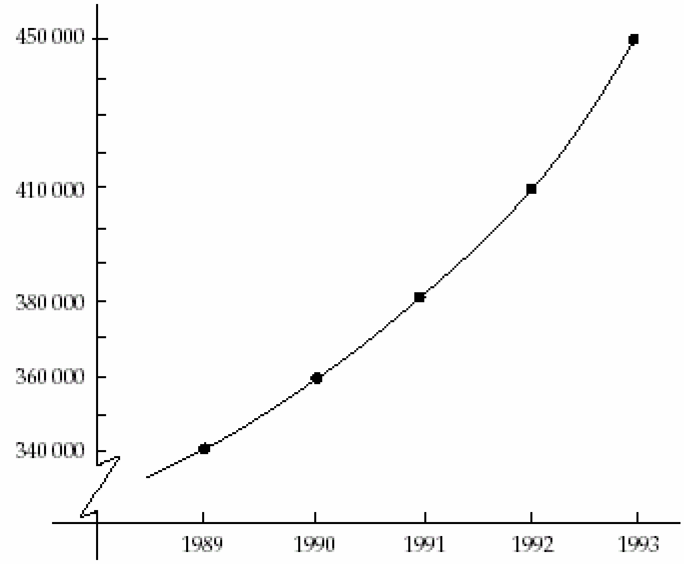
En los últimos cinco años se reportó la población de un lugar con las siguientes cifras:

1989 ———— 340 000
1990 ———— 360 000
1991 ———— 380 000
1992 ———— 410 000
1993 ———— 450 000

En este caso, los años representan la variable independiente, y la población la dependiente.

Cuya gráfica será la siguiente:

x	y
1989	340,000
1990	360,000
1991	380,000
1992	410,000
1993	450,000



Estas son sólo algunas aplicaciones de las funciones y, si se analiza, se encuentran en muchas otras actividades humanas.

Ejercicios Corresponden a “La función debe continuar”.

Seguramente has observado que en ciencias como la medicina, la física o la economía se requiere de gráficas que ilustren mejor ciertos cambios que ocurren al variar algunos fenómenos. Esas son aplicaciones de las funciones.

Comenta, del programa, en tu grupo, otras actividades en que puedas emplear las funciones.

RECUERDA En la función: y = 4 – x.
1. ¿Cuál es la constante? ___________ 2. ¿Cuáles son variables? ___________
3. ¿Cuál es la variable independiente? ___________ 4. ¿Cuál es la dependiente? __________
5. ¿Cuál es la regla de funcionalidad? _________________

Comenta en tu grupo los datos que se necesitan para hacer la gráfica de una función.

Reúnete con un compañero y analiza el siguiente problema.

Enrique hará un viaje en su automóvil a una población que se encuentra a una distancia de 240 km. ¿Cuánto tiempo tardará en llegar si maneja a una velocidad constante?

El tiempo depende de la velocidad a la que viaje, por tanto, la variable independiente es __________________ y se representa con la letra _______ .

La variable dependiente es _______________ y se representa con la letra ______ .

Dividiendo la distancia entre la velocidad a la que viaje, se encuentra el tiempo que tardará Enrique en llegar. Esto es:

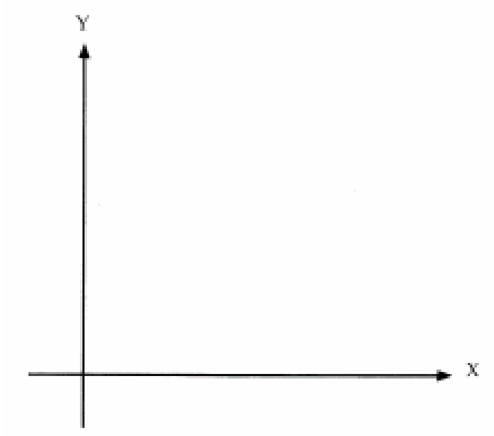
Tiempo = ___________________________

Sustituyendo **y** por tiempo y **x** por velocidad se tiene la regla: y = _________________________

Señalando diferentes velocidades (**x**) encuentra el tiempo que tardaría Enrique para llegar en cada caso y traza la gráfica correspondiente.

$$\mathbf{y} = \frac{\text{distancia}}{\mathbf{x}}$$

x	y
20	
40	
60	
120	



Consulta los resultados de tus compañeros. Si hay diferencias, discútelas y corrige si es necesario.

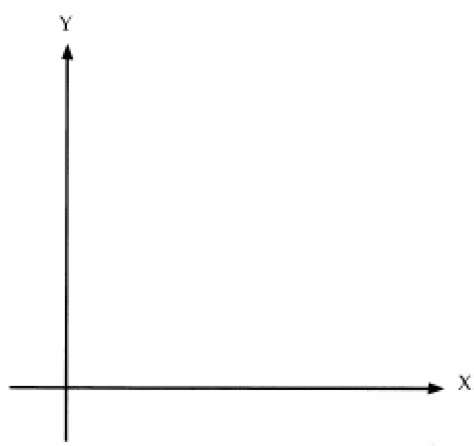
En binas, realiza el siguiente ejercicio.

Una empresa con 20 trabajadores tuvo en su primer año de labores $120 000,00 de ganancias. Al siguiente año duplicó el número de empleados, situación que triplicó sus ganancias. El tercer año despidió a la cuarta parte y sus ganancias bajaron una tercera parte.

Realiza la tabulación.

x	y
20	120 000

Traza la gráfica correspondiente.



x = Número de empleados contratados por año.
y = Ganancias por año.
¿Cuál es la variable independiente? ____
¿Cuál es la variable dependiente? ____

Comenta con el profesor tus respuestas y corrige si es necesario.

De manera individual, lee el siguiente enunciado y haz lo que se te pide.

A un cuerpo elástico se le aplica una carga de 50 gramos y sufre un alargamiento de 5 cm. Calcula qué alargamientos tendrá cuando las cargas sean de 100, 150 y 200 gramos (de acuerdo con la Ley de Hocke, la deformación de un cuerpo elástico es directamente proporcional a la carga), la regla de funcionalidad es:

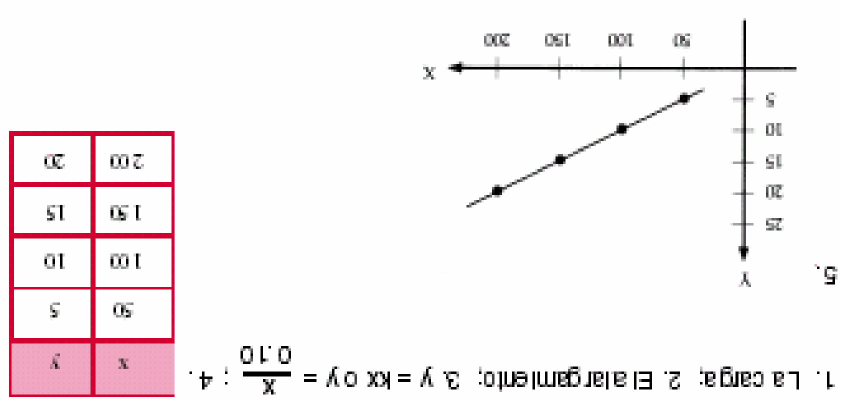
$$y = k\,x \qquad \text{siendo } k = 0{,}10\ \frac{\text{cm}}{\text{g}}$$

1. ¿Cuál es la variable independiente? ______________________________________
2. ¿Cuál es la variable dependiente? ____
3. ¿Cuál es la regla de funcionalidad? _______________________________________
4. Tabula los datos.

x	y
50	5
100	
150	
200	

5. Grafica esos datos en tu cuaderno.
Consulta la clave para observar la veracidad de tus respuestas. Si hay errores, corrige.

CLAVE



EXPRESIONES ALGEBRAICAS QUE DESCRIBEN FUNCIONES (4)

El lenguaje ha permitido la comunicación a través del tiempo en los distintos grupos humanos. A través de él se logra transmitir conocimiento, valores, ideas, sentimientos. En el caso de la ciencia, es muy importante conservar la información y compartirla.

La matemática posee su propio lenguaje para expresar relaciones. Para ello se recurre a símbolos, números y letras.

A continuación algunos ejemplos.

Lenguaje común	Lenguaje matemático
Por cada artículo de venta se paga un 13% de impuesto sobre su precio.	*Si* **x** *es el precio, el impuesto* **I** *corresponde a* **I** = 13%**x**
El número de profesores corresponde a la décima parte de los estudiantes.	*Si* **n** *es la cantidad de estudiantes, entonces la cantidad de docentes* **D** *es* $\mathbf{D} = \frac{n}{10}$
El área de un rectángulo, cuyo largo es el triple del ancho.	*Si el largo es* **b** *entonces el área* **A** *está dada por* $\mathbf{A} = \mathbf{b} \cdot 3\mathbf{b}$
En la producción de determinado artículo, el costo del mismo es de 250 colones en materiales por cada unidad más 300 colones de mano de obra.	*Si* **C** *es el costo de producción y* **x** *es la cantidad de artículos elaborados, entonces la relación es* $\mathbf{C}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} \cdot (250 + 300)$
Un vendedor recibe una comisión del 5% por cada diez artículos que venda a la semana, además de su salario semanal de 20 000 colones	*El salario total* **S** *recibido por un vendedor que logre vender* **g** *grupos de diez artículos es* $\mathbf{S} = 20\,000 + \frac{5}{100}\,\mathbf{g}$
En la renta de automóviles, el costo diario es de 200 dólares más un 15% por número de millas recorridas.	*Si* **C** *es el valor de renta diario y* **x** *es el número de millas recorridas, la función es* $\mathbf{C} = 200 + 0{,}15\,\mathbf{x}$

Ejercicio

Un campesino cobra, por limpiar un terreno, 1500 colones más 150 colones por cada hora de trabajo. Establezca la función que permite calcular el precio **P** de las labores en función de la cantidad **x** de horas.

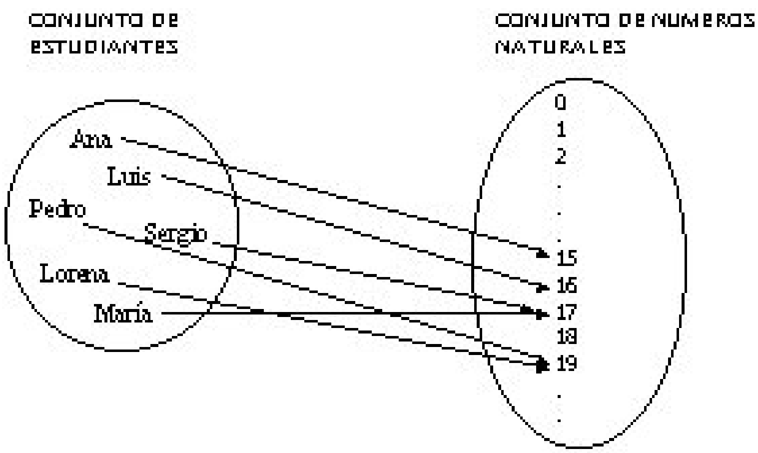
DOMINIO, RANGO Y OTROS CONCEPTOS(6)

Conocer el territorio en el cual están vigentes algunas creencias, normas o leyes, es importante en la vida humana para desenvolverse adecuadamente.

En el estudio de las funciones es básico conocer en cuáles conjuntos se establece este tipo de relación.

El conjunto en el cual se define o establece una función se denomina **dominio** de la función.

Recordemos la función que relacionaba un conjunto de estudiantes y el conjunto de números naturales, de acuerdo con el criterio “años cumplidos”.



El dominio de esta función es

$\{$Ana, Luis, Pedro, Sergio, Lorena, María$\}$

En el caso de la relación con el criterio $\frac{1}{x}$ es necesario tener presente que carece de sentido para x=0, pues la división por cero no existe.

Para $\frac{1}{x}$ ***un dominio*** *puede ser:*
el conjunto de números enteros excepto el cero. Es decir: $Z \setminus \{0\}$.

También se puede definir en dominios más grandes o más pequeños, por ejemplo: $\{-4;\ -2;\ 0{,}5;\ 2\}$.

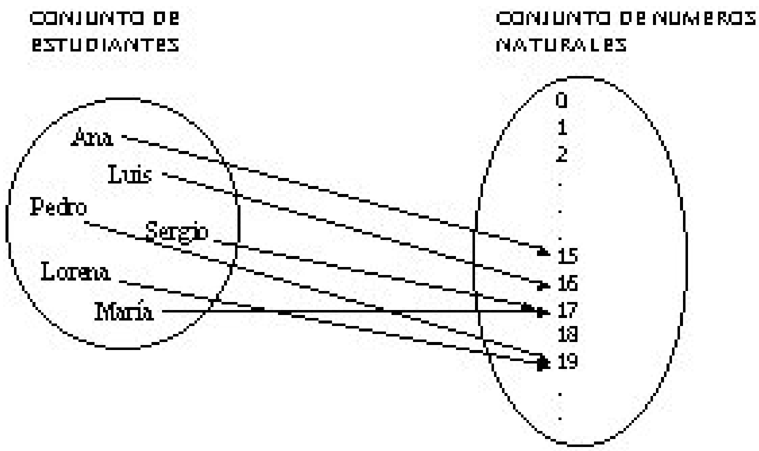
El conjunto obtenido de la aplicación de la función en su dominio recibe diversos nombres: **recorrido**, **rango**, **ámbito**.

El ámbito, rango o recorrido es el conjunto con los elementos resultantes de aplicar la función en el dominio. Por ejemplo en la función $\frac{1}{x}$ definida en el dominio $\{-4;\ -2;\ 0{,}5;\ 2\}$ el ámbito es $\left\{\frac{-1}{4};\ \frac{-1}{2};\ 2;\ \frac{1}{2}\right\}$

El **rango** o **ámbito** tiene menos o igual número de elementos que el **codominio**.

Ejemplos:

1) La función que relaciona un conjunto de estudiantes y el conjunto de números naturales, de acuerdo con el criterio "años cumplidos".



De acuerdo con la ilustración de la izquierda, el **ámbito** de esta función es el conjunto de números que contiene las edades en años cumplidos, es decir:

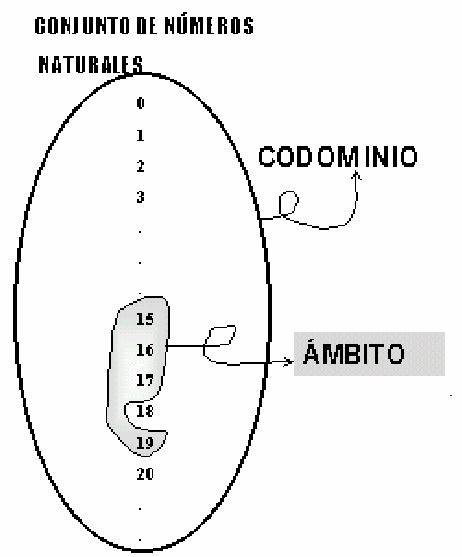
$$\{15;\ 16;\ 17;\ 19\}$$

En cambio, el **codominio** es el conjunto de números naturales, IN.

Siempre el codominio es mayor o idéntico al rango.

Esto significa que el rango o recorrido es un *subconjunto* del codominio.

En el ejemplo anterior se puede visualizar tal como aparece a la derecha.



2)Defínase la función $f(x) = x^2$ en el dominio $\{-4; -3; 0; 3; 4\}$ y con codominio $[-8;\ 20[$. Para determinar el ámbito se usa la tabla de valores de la derecha.

x	-4	-3	0	3	4
x^2	$(-4)^2 = 16$	$(-3)^2 = 9$	$0^2 = 0$	$3^2 = 9$	$4^2 = 16$

$f(x) = x^2$ en $\{-4;\ -3;\ 0;\ 3;\ 4\}$ y con codominio $[-8;\ 20[$ tiene rango: $\{0;\ 9;\ 16\}$

Una <u>forma simbólica</u> para indicar dominio y codominio de una función consiste en utilizar una letra para la función e indicar los conjuntos. Generalmente se usan las letras f, g, h, p para las funciones.

Ejemplo 1. $g : \mathrm{IR} \to \mathrm{IR}$
Esta expresión indica que el dominio es IR y el codominio es IR.

Ejemplo 2. $f : \{-1;\ 0,5;\ 1;\ 2;\ 3\} \to \mathrm{IR}$
La función f tiene dominio $\{-1;\ 0,5;\ 1;\ 2;\ 3\}$ y codominio IR

En algunos textos, cuando se mencionan las relaciones entre conjuntos, denominan como “conjunto de salida” al primer conjunto y como “conjunto de llegada” al segundo conjunto. Cuando se trata de una función el “conjunto de salida” es el dominio, y el “de llegada” es el codominio.

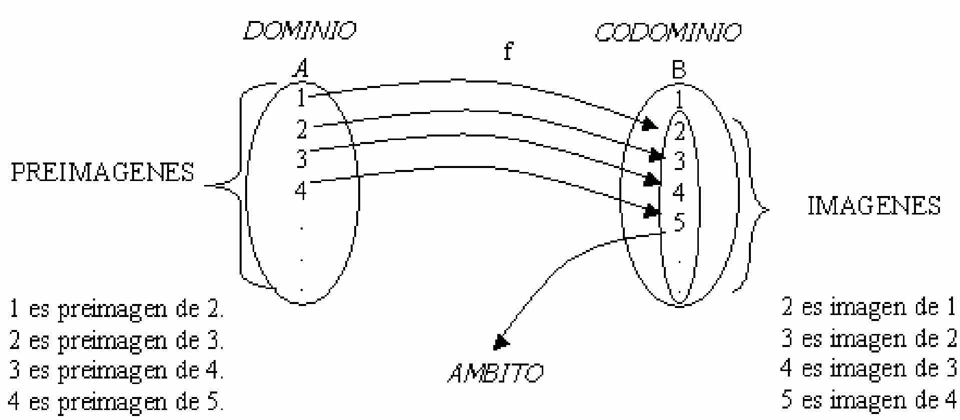
A los elementos del **dominio** de una función se les denomina **preimágenes**. A los elementos del **ámbito** o rango, **imágenes**.

<u>Definición</u>

Sea $f : A \to B$, una función. Si un elemento “a” del dominio A, tiene asignado a él un elemento “b” en el codominio B, se dice que “b” es la **IMAGEN** de “a”; de igual manera, se dice que “a” es la **PREIMAGEN** de “b”.

<u>EJEMPLOS</u>

1) Sea $f : \{1,2,3,...\} \to \{1,2,3...\}$, con *f(x)= x + 1*.



Para denotar al ámbito se utiliza la expresión f(A).

Observe que el 1 es elemento del Codominio, pero no es elemento de f(A).

2) En el ejemplo donde $f:\{-1;\ 0{,}5;\ 1;\ 2;\ 3\} \rightarrow \text{IR}$ con el criterio $f(x)=\frac{1}{x}$ para el cual se estableció la tabla de valores

x	-1	$0{,}5$	1	2	3
$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{-1}=-1$	$\frac{1}{0{,}5}=2$	$\frac{1}{1}=1$	$\frac{1}{2}=0{,}5$	$\frac{1}{3}=0{,}\overline{33}$

Se verifica que:

preimágenes
-1 es preimagen de –1
0,5 es preimagen de 2
1 es preimagen de 1
2 es preimagen de 0,5
3 es la preimagen de $\frac{1}{3}$

imágenes
-1 es la imagen de -1
2 es la imagen de 0,5
1 es la imagen de 1
0,5 es la imagen de 2
$\frac{1}{3}$ es la imagen de 3

Ejercicios

Conocer un territorio, su geografía y sus fronteras permite la planificación, la investigación y el aprovechamiento máximo del mismo. En el caso matemático de las funciones, conocer en cuál conjunto se puede definir es importante para analizar la función, trazar su gráfica, establecer algunas características y con ello comprender fenómenos que la función modela de la ciencia, arte, medicina, economía y otros campos.

Del texto anterior, “Dominio, rango y otros conceptos”, anote los términos más relevantes.

En grupo resuelva los ejercicios

1) En una relación que es función al conjunto “de salida” se le denomina ________________.

2) El conjunto de llegada de una función se denomina ____________________

3) Tres nombres con los que se puede denominar al conjunto de imágenes: ___________________, __________________ y_______________

4) Los elementos del dominio de una función se denominan __________________________.

En parejas analice cada explicación y anote una X dentro del paréntesis correspondiente.

A) En toda función, los elementos del conjunto de “salida” son
( ) imágenes
( ) preimágenes

B) En toda función, los elementos del codominio cumplen que
( ) todos son imágenes de algún elemento del dominio
( ) algunos podrían no ser imagen de algún elemento del dominio

C) A cada elemento del dominio de una función le corresponde un
( ) elemento o más del codominio
( ) único elemento del codominio

D) Entre el codominio y el recorrido de una función se establece que
( ) el recorrido es subconjunto del codominio
( ) el codominio es subconjunto del recorrido

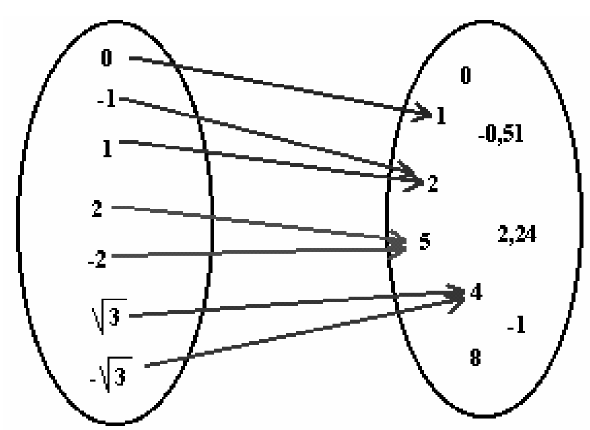
De acuerdo con cada información indique dominio, ámbito y codominio de la respectiva función.

a) Considérese la función $g:\{-3;\ -1;\ 0;\ 1;\ 2;\ 5\} \rightarrow IR$ tal que $g(x)=\dfrac{x+1}{2}$, cuya tabla de valores es

x	-3	-1	0	1	2	5
$\mathbf{\dfrac{x+1}{2}}$	-1	0	0,5	1	1,5	3

Dominio: ___________________
Codominio: _________________
Rango: ____________________

b) La función con representación sagital



Dominio: ___________________
Codominio: _________________
Rango: ______________________

CÁLCULO DE IMÁGENES(6)

De acuerdo con lo atendido hasta el momento, la imagen de un determinado elemento del dominio *bajo* una función se puede visualizar en la tabla de valores. Esta sesión trata cómo se procede para determinar imágenes, realizando cálculos aritméticos acordes al criterio de la función.

Calcular la imagen de un determinado valor, bajo una función, consiste en evaluar la función en el valor dado.

Se sustituye la variable por el valor en cuestión, se hacen la operaciones y si es posible, se simplifica.

<u>EJEMPLOS</u>

1. Hallar la imagen de $x = 1$ bajo la función $f(x) = \frac{{}^{-}3}{5}x + \frac{1}{5}$.

   Solución:

   Se sustituye la incógnita **"x"**, por el valor 1 y se realizan las operaciones indicadas:

   $f(1) = \frac{{}^{-}3}{5} \bullet 1 + \frac{1}{5} = \frac{{}^{-}3}{5} + \frac{1}{5} = \frac{{}^{-}2}{5}$.

   La imagen de $x = 1$ bajo la función $f(x) = \frac{{}^{-}3}{5}x + \frac{1}{5}$ es $\frac{{}^{-}2}{5}$.

   El par ordenado que se determinó es $\left(1;\ \frac{{}^{-}2}{5}\right)$.

2. Determinar la imagen de $x = {}^{-}2$ bajo la función $f(x) = x^2 - 3x + 1$.

   Solución:

   Se sustituye la incógnita por el valor ${}^{-}2$ y se realizan las operaciones:

   $f({}^{-}2) = ({}^{-}2)^2 - 3 \bullet {}^{-}2 + 1$, $f({}^{-}2) = ({}^{-}2)^2 - 3 \bullet {}^{-}2 + 1 = 4 + 6 + 1 = 11$.

   11 es la imagen de $x = {}^{-}2$ bajo la función $f(x) = x^2 - 3x + 1$.

3. La imagen de ${}^{-}3$, en $g(x) = {}^{-}x^3$ es 27, porque: $g({}^{-}3) = {}^{-}\left({}^{-}3\right)^3 = {}^{-}({}^{-}27) = 27$.

4. Al evaluar la función $h(x)=2^x$ en $x=5$, se tiene $h(5)=2^5=32$.

   32 es la imagen de 5 bajo la función exponencial $h(x)=2^x$.

5. Determinar la imagen de –9 bajo la función $g(x)=\sqrt{7-x}$.

   Al sustituir x por –9, en el subradical queda 7- ⁻ 9, es decir 7+ 9, o sea, 16. Entonces $g(-9)=\sqrt{16}$.

   Por lo tanto, la imagen de –9 de acuerdo con la función g(x) es **4**.

6. La imagen de $^-3$ bajo la función $h(x)=\dfrac{1-x}{5+x}$

   Solución:

   $$h(^-3)=\frac{1-^-3}{5+^-3}=\frac{1+3}{5+^-3}=\frac{4}{2}=2.$$

   La imagen de $^-3$ bajo la función $h(x)=\dfrac{1-x}{5+x}$, es 2.

7. Si $g(x)=\dfrac{x-3}{1-x^2}$, entonces la imagen de $x{=}^-4$ se obtiene al evaluar y hacer las operaciones:

   $$g(x)=\frac{^-4-3}{1-\left(^-4\right)^2}=\frac{^-7}{1-16}=\frac{^-7}{^-15}=\frac{7}{15}.$$

La imagen de $x{=}^-4$, bajo la función $g(x)=\dfrac{x-3}{1-x^2}$ es $\dfrac{7}{15}$.

8. Si $h(x)=2-3x^2$ entonces, la imagen de “a” es

   A. 0

   B. ^-1a

   C. $^-a^2$

   D. $2-3a^2$

Solución:

Al sustituir se obtiene: $h(a) = 2 - 3a^2$.

La expresión anterior no se puede simplificar, por lo tanto, la imagen de a bajo la función $h(x)$ es $2 - 3a^2$, correspondiente a la opción D.

9. Hallar la imagen de “$m + 2$”, en la función $f(x) = x^2 - 4$.

   Solución:

$$f(m+2) = (m+2)^2 - 4 = \left(m^2 + 4m + 4\right) - 4 = m^2 + 4m + 4 - 4 = m^2 + 4m.$$

Primer fórmula notable

4 - 4 = 0

La imagen buscada es “$m^2 + 4m$”.
Esta expresión se puede factorizar, por factor común, y se obtiene $m(m+4)$.

10. Determinar la imagen de “$b - 1$”, en la función $h(x) = {}^{-}1 - 3x^2$.

    Solución:

$$h(b-1) = {}^{-}1 - 3(b-1)^2 = {}^{-}1 - 3\left(b^2 - 2b + 1\right) = {}^{-}1 - \left(3b^2 - 6b + 3\right) = {}^{-}1 - 3b^2 + 6b - 3 = {}^{-}3b^2 + 6b - 4$$

Segunda fórmula notable

Restar un polinomio es sumar su opuesto

La imagen “$b - 1$”, en la función $h(x) = {}^{-}1 - 3x^2$ es ${}^{-}3b^2 + 6b - 4$.

Ejercicios

En parejas, comente la lectura anterior.

Responda brevemente cada expresión de manera que tenga sentido lógico y verdadero.

1) Cuando se evalúa una función en un valor ***a*** se dice que ***f(a)*** es la ______________ de ***a*** bajo la función f.
2) Para determinar la imagen de un valor bajo una función se _________________________ en la ecuación de la función.
   Dada la función $g(x) = x + 1$ la imagen de x = 1 corresponde a _______________________

Determine el valor de cada función de acuerdo con el criterio de la función respectiva

FUNCIÓN	PREIMAGEN	IMAGEN
$f(x)=\dfrac{1}{x-2}$	**0**	
$g(x)=3x-1$	**1**	
$f(x)=x^2+5x$	**-2**	
$h(x)=6x$	$\dfrac{2}{3}$	
$g(x)=\sqrt{x+3}$	**6**	

Resuelva, individualmente, los siguientes ejercicios de selección única

1) La imagen de $^{-}1$, bajo la función $h(x)=2x^2+32x-2$, es

A. $^{-}32$
B. $^{-}33$
C. $^{-}36$
D. $^{-}42$

2) Si $f(x)=\frac{1}{3}x-1$ entonces, la imagen de $^{-}6$ es

A. $^{-}1$
B. $^{-}2$
C. $^{-}3$
D. $^{-}4$

3) La imagen de $x=0$, en la función $h(x)={}^{-}2x^2+3x+4$ es

A. 3
B. 4
C. 5
D. 7

4) Si $g(x)=3x-x^2$, entonces la imagen de $x=-3$ es

A. 0
B. -3
C. -15
D. -18

5) Si $g(x)=1-x^2$ entonces, la imagen de "$1+b$" es

A. b^2
B. $^{-}b^2$
C. $2b+b^2$
D. $^{-}2b+{}^{-}b^2$

CLAVE 1A 2C 3B 4D 5D

Con la información del cálculo de imágenes, se puede retomar los conceptos de dominio, rango y codominio

Determine dominio, codominio y rango de las siguientes funciones.

(1) Sea la función $g(x) = -2 + x$ definida de $\{-3;\ -2;\ 0;\ 4;\ 7\}$ a IR, construya una tabla de valores y luego indique dominio, codominio y ámbito.

x	-3	-2	0	4	7
g(x)					

Dominio: ____________________
Codominio: __________________
Rango: __________________

(2) La función $h : \mathrm{IR} \to \mathrm{IR}$ tal que $h(x) = x^2$

Dominio: __________________
Codominio: _________________
Rango: _____________________

(3) $g :]-3{,}5;\ 5[\to [-9;\ \infty[$ tal que $g(x) = x - 0{,}5$

Dominio: ___________________
Codominio: _________________
Rango: _____________________

(4) La función $h : \mathrm{IR} \to \mathrm{IR}$ tal que $h(x) = x^3$

Dominio: ___________________
Codominio: _________________
Rango: _____________________

(5) $f(x) = 2x^2 - 1$ $\quad f(x) :]-2; 4] \to \mathrm{IR}$.

Dominio: ___________________
Codominio: _________________
Rango: _____________________

CLAVE

(1) Dominio $\{-3; -2; 0; 4; 7\}$ Rango $\{-5; -4; -2; 2; 5\}$ Codominio IR
(2) Dominio IR Rango IR^+ Codominio IR
(3) Dominio $]-3{,}5;\ 5[$ Rango $]-4;\ 4{,}5[$ Codominio $[-9;\ \infty[$
(4) Dominio IR Rango IR Codominio IR
(5) Dominio $]-2; 4]$ Rango $[-1; 31]$ Codominio IR

CÁLCULO DE PREIMÁGENES(6)

Dada una función, determinar la preimagen de un valor (imagen) consiste en averiguar cuál elemento del dominio se utilizó en la función para obtener ese valor.

En algunos casos, se conoce la tabla de valores y con los datos se puede resolver el ejercicio. En otros, se iguala la función al valor dado y se despeja la variable independiente

Ejemplos

1. Hallar la preimagen de 3 si $g(x) = x + 2$.

Solución:

Se iguala $x + 2$ a 3 y se resuelve la ecuación obtenida:

$$\begin{aligned} x + 2 &= 3 \\ x &= 3 - 2 \\ x &= 1 \end{aligned}$$

La preimagen de 3, en la función $g(x) = x + 2$, es **1**.

2. Determinar la preimagen de $^{-}1$, si $f(x) = 2 - 2x$.

Solución:

$$\begin{aligned} 2 - 2x &= {}^{-}1 \\ -2x &= {}^{-}1 - 2 \\ -2x &= {}^{-}3 \\ x &= \frac{{}^{-}3}{{}^{-}2} \\ x &= \frac{3}{2} \end{aligned}$$

La preimagen de $^{-}1$, si $f(x) = 2 - 2x$ es $\frac{3}{2}$

3. Sea la función $f(x) = \dfrac{1 - x}{3 + x}$ hallar la preimagen de $\dfrac{1}{2}$

Solución:

Se iguala al valor $\frac{1}{2}$ y se resuelve la ecuación resultante.

$$\frac{1-x}{3+x}=\frac{1}{2}$$
$$2(1-x)=1(3+x) \quad \textit{se usa la operación contraria}$$
$$2-2x=3+x \quad \textit{se multiplica usando la propiedad distributiva}$$
$$2-3=x+2x \quad \textit{se usa la operación contraria}$$
$$-1=3x$$
$$\frac{-1}{3}=x \qquad \textit{La preimagen de } \frac{1}{2} \textit{ es } \frac{-1}{3}$$

4. Si $f(x)=3x-\frac{5}{4}$ entonces, determinar la preimagen de 1.

Solución:

Se iguala a 1: $3x-\frac{5}{4}= 1.$

Se despeja la incógnita:

$$\left\{\begin{aligned} 3x-\frac{5}{4}&= 1\\ 3x&=1+\frac{5}{4}\\ 3x&=\frac{4+5}{4}\\ 3x&=\frac{9}{4}\\ x&=\frac{9}{4}\div 3\\ x&=\frac{9}{12}\\ x&=\frac{3}{4}\end{aligned}\right.$$

En la función $f(x)=3x-\frac{5}{4}$, la **preimagen** de 1, es $\frac{3}{4}$.

5. Sea f(x)=3x-1, hallar la preimagen correspondiente a 11.

Procedimiento:

f(x) = 3x-1 sustituimos el valor de f(x) por el número 11

11 = 3x-1 resolvemos la ecuación resultante

11+1 = 3x

12 = 3x

$\frac{12}{3} = x \Rightarrow$ x = 4 Por lo tanto 4 es la preimagen del número 11 bajo la función f.

5. Calcular la preimagen de 8 en $f(x) = 2^x$.

Solución: Una forma de solución consiste en construir una tabla de valores.

x	-1	0	1	3
2^x	$2^{-1} = \frac{1}{2}$	$2^0 = 1$	$2^1 = 2$	$2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$

La preimagen de 8 en la función $f(x) = 2^x$ es 3.
NOTA: Este tipo de función se estudiará, posteriormente, con mayor profundidad.

Ejercicios

En parejas comente el cálculo de preimágenes. Revise dudas con el o la docente.

En parejas o tríos resuelva lo siguiente.

- La preimagen es un elemento del conjunto de salida, es decir, pertenece al ________________
- Para cada preimagen existe una y sola una imagen en el _____________________________
- Para determinar una preimagen se puede utilizar la gráfica, sin embargo, hasta el momento se ha estudiado dos formas: con ____________________ o bien resolviendo una ______________
- Para averiguar la preimagen de un valor se __________________ el criterio de la función a ese valor y se despeja la variable independiente.
- Averiguar la preimagen de 0 bajo la función $f(x) = x - 3$ consiste en “averiguar” a cuál número se le resta tres y se obtiene 0, es decir, que la preimagen, en este caso, es _________

(I) Resuelva cada una de las siguientes ecuaciones.

a) $\frac{3}{5}x + 1 = -1$ b) $\frac{-3}{4} = x + 8$ c) $f(x) = 2$ Si $f(x) = 3x + 4$

(II) Determine la preimagen en cada caso

Función	Imagen	Ecuación a resolver	Preimagen
$h(x)=\frac{1}{4}x$	1		
$f(x)=x+\frac{1}{2}$	0		
$g(x)=5+4x$	$\frac{1}{6}$		

Resuelva individualmente los siguientes ejercicios

PARTE A Selección Única

1) La preimagen de $^{-}1$ en la función $g(x)=2x+11$ es

A. 5

B. 9

C. $^{-}6$

D. $^{-}10$

2) La preimagen de cero en la función $h(x)=\frac{^{-}2}{5}x+\frac{1}{3}$ es

A. $\frac{5}{6}$

B. $\frac{1}{15}$

C. $\frac{^{-}5}{6}$

D. $\frac{^{-}2}{15}$

3) Si $f(x)=\frac{x-1}{2-x}$ entonces, la preimagen de cero es

A. 1
B. 2
C. $^{-}1$
D. $\frac{1}{2}$

4) Si $g(x)=3^{x}$ entonces, la preimagen de 9 es

A. 2

B. 3

C. 27

D. 19 683

5) Si la función $h(x)$ consiste en asociar cada número con su doble, entonces la preimagen de 8 es el número

A. 2
B. 4
C. 8
D. 16

PARTE B. Elabore, en cada caso, una tabla de valores para determinar la preimagen o preimágenes que se solicitan.

1) Bajo la función $g(x)=\sqrt{2-x}$ hallar las preimágenes de 4; 1 y 0.

x					
$\sqrt{2-x}$					

2) Considerando la función $h(x)=\dfrac{4x}{3}$ determinar las preimágenes de 0; 1 y $\dfrac{2}{5}$

x					
$\dfrac{4x}{3}$					

PARTE C.

Determine las preimágenes de la función g(x) tal que asocia a un número con su doble y cuyos dominio y codominio se enuncian a continuación . (Puede utilizar un diagrama sagital)

$$g:\{-2;\ -1;\ 0;\ 0{,}5;\ 1;\ 2;\ 3\ \}\rightarrow\{-6;\ -4;\ -2;\ 0;\ 1;\ 2;\ 4;\ 6;\ 8\}$$

Indique las preimágenes de cada valor del recorrido o rango de la función

Imagen	Preimagen
__________	__________
__________	__________
__________	__________
__________	__________
__________	__________
__________	__________
__________	__________

Diagrama Sagital

CLAVE

Parte A: 1C, 2A, 3A, 4A Y 5B.

Parte B: 1) Preimagen de 4 es –14, de 1 es 1, de 0 es 2.

2)
$$\begin{array}{c|c|c|c} x & 0 & \frac{3}{4} & \frac{3}{10} \\ \hline \frac{4}{3}x & 0 & 1 & \frac{2}{5} \end{array} \quad \begin{array}{l} \leftarrow \textit{preimágenes} \\ \leftarrow \textit{imágenes} \end{array}$$
.

Parte C:

Imágenes	-4	-2	0	1	2	4	6
$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$
Preimagenes	-2	-1	0	0,5	1	2	3

Observación: -6 y 8 No son parte del rango o ámbito.

DOMINIO MÁXIMO(4)

Cuál es la mayor temperatura a la que se puede exponer un medicamento o un alimento, cuál es el mayor depósito en dólares que se puede hacer en un banco, cuál la capacidad máxima de un establecimiento, o cuál es el mayor número recomendado de estudiantes en un grupo, son situaciones en las cuáles se establece un máximo. En la organización humana estas condiciones tienen, a veces, implicaciones drásticas. En el caso de las funciones, se puede establecer el conjunto más grande dónde se puede considerar como bien definida.

Se considera al conjunto de números reales, IR, como el conjunto en el cual se estudiarán las condiciones y propiedades necesarias para considerar una relación entre dos conjuntos como función.

Algunas funciones se pueden definir en todo IR, pero otras poseen restricciones, por ejemplo, aquellas que conllevan del cálculo de denominadores y/o raíces de índice par.

Una función puede definirse en muchos conjuntos, es decir, para una función se pueden establecer diversos dominios tal como se estudio en las páginas . Pero existe el conjunto “más grande” que sirve de dominio.

Al conjunto con el mayor número de elementos que sirve de dominio de una función se denomina **dominio máximo**.

Por el momento, se analizarán tres tipos de funciones:

TIPO DE FUNCIÓN	EJEMPLO	DOMINIO
POLINÓMICAS. Corresponden a polinomios.	$g(x)=3x^4-2x^3+\frac{2}{5}x^2-x+\frac{3}{4}$	En todos los casos el dominio máximo es **el conjunto de números reales IR**
FRACCIONES RACIONALES En estos casos se debe considerar que el denominador nunca sea igual a cero	$h(x)=\frac{2x+3}{1-x}$ Dominio máximo $\mathrm{IR}/\{1\}$	Dominio máximo IR menos aquel o aquellos valores que anulan el denominador
RADICAL CON ÍNDICE PAR El subradical siempre debe ser no negativo.	$f(x)=\sqrt{x}$ Dominio máximo: [0; 00)	La función tiene sentido para todo número que mantenga al subradical positivo o cero

Funciones Polinómicas

Toda función cuya ecuación sea un polinomio tiene como dominio máximo al conjunto de números reales, IR.

No importa la "forma" como se exprese la función, si corresponde a un polinomio, entonces su dominio máximo es IR

Ejemplos:

1) g(x) = (x+2) (x-3)
2) h(x) = 3x (5-x)^3
3) h(x) =   polinomio dividido por 2 "parece fracción"
4) f(x) = con coeficientes radicales y/o fraccionarios

Funciones con fracciones racionales

En estos casos la función tiene expresiones con denominadores en los cuales "aparece" la variable independiente. Siempre se debe analizar el denominador . Aquellos o aquel valor que produzca un cero en el denominador se excluye de IR.

Ejemplos
Tomados de material del Centro de Información Electrónica.

1. $f(x) = \frac{^{-}5}{x}$

Si en el lugar de la x se coloca un cero, queda una división por cero, lo cual no existe. Por lo tanto, el valor 0 no está en el dominio.

El único valor que indefine la expresión es 0.

Por lo tanto, el dominio máximo es el conjunto de números reales menos el cero. Esto se puede escribir como: IR $/\{0\}$.

2. $f(x) = \frac{2}{x-1}$

El denominador es $x-1$.

¿En cuál valor, da cero? ¿Cuál número al restarle 1 da cero?

Si x toma el valor de 1, el denominador ($x-1$), se convierte en cero.

Por lo tanto, 1 no es parte del dominio.

El dominio máximo de la función $f(x) = \frac{2}{x-1}$ es el conjunto de números reales, excepto el 1. Una forma de expresarlo es IR $-\{1\}$.

3. $g(x)=\dfrac{2+x}{5-x}$

El denominador es $5-x$. ¿Cuál es el número real que hace que este denominador dé cero? ¿Qué número se le debe restar a 5 para que se obtenga cero?

La expresión 5 – x por sí sola se puede igualar a cero y determinar cuál es la restricción para la función g(x).

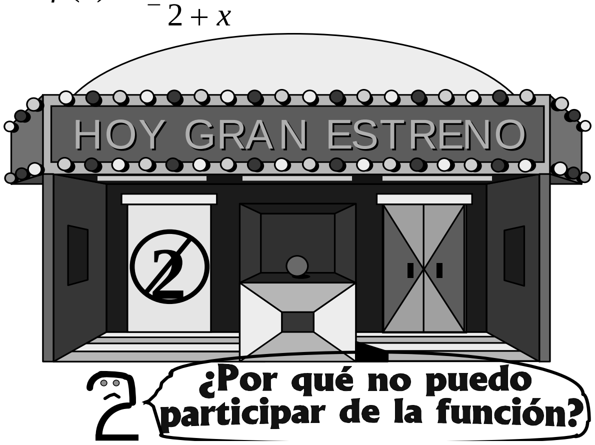
$$x-5=0$$
$$x=0+5$$
$$x=5$$

El dominio máximo de la función $g(x)=\dfrac{2+x}{5-x}$ es el conjunto de números reales menos ese valor (el que provoca un cero en el denominador).

Por lo tanto, el dominio máximo es $\mathrm{IR}/\{5\}$, o sea $\mathrm{IR}-\{5\}$.

Si se prefiere la notación en intervalos, se puede indicar como una unión de intervalos abiertos, en ninguno de ellos se incluye al 5: $]-\infty;\ 5[\ \cup\ ]5;\ \infty[$. Sin embargo, en este caso no se considera como la forma "más elegante" de escribirlo.

4. $f(x)=\dfrac{x^2-x}{{}^-2+x}$



En este ejemplo el denominador es ${}^-2+x$.

Para determinar en cuál valor se anula esta expresión se resuelve la ecuación:

$${}^-2+x=0$$
$$x=0+2$$
$$x=2$$

El dominio máximo de la función es $\mathrm{IR}/\{2\}$

5. $g(x)=\dfrac{x+11}{3-2x}$

¿Cuál es el denominador de la función?

Una ecuación para hallar el valor que indefine a la función es $3-2x=0$.

¿En cuál valor de *x*, se indefine, la función? ____________________________.

Al resolver la ecuación $3-2x=0$ se tiene:

$$3-2x=0$$
$$^{-}2x=0-3$$
$$^{-}2x={}^{-}3$$
$$x=\frac{^{-}3}{^{-}2}$$
$$x=\frac{3}{2}$$

La función se indefine en tres medios. El dominio máximo de esta función es $\mathrm{IR}-\left\{\frac{3}{2}\right\}$.

6. $h(x)=\dfrac{x-6}{(x-3)(x+3)}$

En este caso el denominador tiene una expresión que es un producto, (x-3) (x+3)

Tanto el 3 como el $^{-}3$ no pueden estar en el dominio de la función, porque hacen cero al denominador.

El dominio máximo de la función es $\mathrm{IR}/\left\{3;\ ^{-}3\right\}$.

7. $g(x)=\dfrac{x^2-3x+8}{(3+x)}$

El denominador es $(3+x)$. El número que lo anula es $^{-}3$. El dominio máximo es $\mathrm{IR}/\left\{^{-}3\right\}$.

8. $h(x)=\dfrac{3x+12}{x^2}$

El denominador, x^2, se anula en 0 , por lo tanto, el dominio máximo es $\mathrm{IR}/\left\{0\right\}$.

9. $g(x)=\dfrac{x+17}{x^2+1}$

El denominador es una expresión que, en el conjunto de números reales, nunca se hace cero. Por lo tanto, el dominio máximo es el conjunto de números reales.

El máximo dominio de $g(x)=\dfrac{x+17}{x^2+1}$ es IR.

Cuando la fracción algebraica tiene un denominador que no se anula, el dominio es todo el conjunto de números reales.

Ejercicios

En grupos de tres personas, elaboren una definición no formal del concepto estudiado en la lectura anterior. Recuerde los dos casos que se estudian en esta sesión.

Responda a lo siguiente y revise sus respuestas con el resto del grupo.

- Se entiende por dominio máximo aquel subconjunto de IR para el cual una función ____.
- En el caso de las funciones polinómicas, el dominio máximo es ______________________.
- Cuando el criterio de una función contiene fracciones racionales, para determinar el dominio máximo, se debe prestar especial atención a su ______________________________.
- Siempre que una función posea un denominador en el cual "aparece" la variable independiente, es necesario excluir del dominio aquel o aquellos valores para los cuales el denominador se ____________
- En el caso de radicales con índice par, se debve cumplir que el subradical sea ____________________

CLAVE. Posibles respuestas: /denominador/ positivo o cero/ todo IR/ está bien definida/ anula o se hace cero (NO están en orden)

En parejas realice lo siguiente.

A continuación se presentan dos columnas. A la derecha una lista de funciones y a la izquierda sus posibles dominios máximos. Asocie el dominio máximo, colocando la letra respectiva dentro del paréntesis, con una función. Sobran dos funciones.

Dominio máximo		Función
Conjunto de números reales	( ) ( )	A. $f(x)=\dfrac{x+5}{2}$
		B. $h(x)=\sqrt{x-4}$
		C. $g(x)=x^3+\dfrac{1}{x}$
IR/$\{0\}$	( ) ( )	D. $h(x)=\dfrac{3}{x}$
		E. $f(x)=\dfrac{2}{3+x}$
IR/ $\{1\}$	( ) ( )	F. $g(x)=\dfrac{3x}{x-1}$
		G. $h(x)=x^3-x^2+3$
		H. $f(x)=\dfrac{2-x}{1-x}$

Individualmente resuelva los siguientes ejercicios. Tomados de material del Centro de Información Electrónica.

1. El dominio máximo de $f(x) = \dfrac{1}{x}$ es

A. IR
B. $\mathrm{IR}/\{1\}$
C. $\mathrm{IR}/\{0\}$
D. $\mathrm{IR}/\{-1\}$

2. El dominio máximo de $g(x) = \dfrac{x}{x+7}$ es

A. IR
B. $\mathrm{IR}/\{0\}$
C. $\mathrm{IR}/\{7\}$
D. $\mathrm{IR}/\{-7\}$

3. El máximo dominio de $h(x) = \dfrac{x^2}{2(x-3)}$ es

A. IR
B. $\mathrm{IR}/\{0\}$
C. $\mathrm{IR}/\{3\}$
D. $\mathrm{IR}/\{-2;3\}$

4. El dominio máximo de $g(x) = \dfrac{x^3+2}{x(6-x)}$ es

A. $\mathrm{IR}-\{0\}$
B. $\mathrm{IR}-\{6\}$
C. $\mathrm{IR}-\{0;6\}$
D. $\mathrm{IR}-\{0;-6\}$

5. El dominio máximo de $h(x) = \dfrac{x}{5x-1}$ es

A. $\mathrm{IR}-\{0\}$
B. $\mathrm{IR}-\left\{\dfrac{1}{5}\right\}$
C. $\mathrm{IR}-\{1\}$
D. $\mathrm{IR}-\{5\}$

6. El dominio máximo de $g(x) = \dfrac{8-x}{x^6+10}$ es

A. IR
B. $\mathrm{IR}/\{8\}$
C. $\mathrm{IR}/\{^{-}10\}$
D. $\mathrm{IR}/\{\sqrt[6]{10}\}$

7. El dominio máximo de $h(x) = \dfrac{x^2+14}{2-2x}$ es

A. IR
B. $\mathrm{IR}-\{2\}$
C. $\mathrm{IR}-\{1\}$
D. $\mathrm{IR}-\{2;\ ^{-}14\}$

8. El dominio máximo de $g(x) = \dfrac{x^3+2x}{5}$ es

A. IR
B. $\mathrm{IR}/\{0\}$
C. $\mathrm{IR}/\{5\}$
D. $\mathrm{IR}/\{^{-}5\}$

CLAVE 1C 2D 3C 4C 5B 6A 7C 8A

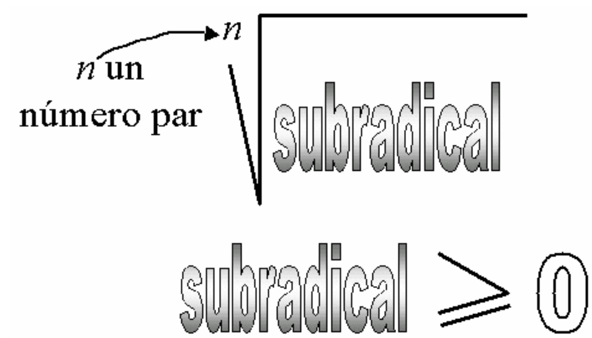
DOMINIO MÁXIMO (RADICALES)(6)

La validez de una expresión, depende en gran parte del contexto. Sabemos que la forma de hablar varía de un lugar a otro, por ello es tan importante reconocer el medio en el cual nos desenvolvemos.

En el caso de las funciones con radicales de índice par sobre su variable independiente, es muy importante definir “el contexto” en el cual la expresión tenga sentido.

Funciones con radicales de índice par sobre su variable independiente

Cuando el criterio de una función contempla radicales de índice par, es necesario que el subradical sea mayor o igual a cero.



es decir, positivo o cero

Para delimitar el dominio de estas funciones es necesario comprender la expresión del subradical y determinar en cuáles números alcanza un valor mayor o igual a cero; por ejemplo:

La expresión x – 3 siempre es mayor que cero si “x” es mayor que tres y es cero en x=3.

Ejemplos

1) Determinar el dominio máximo de $f(x) = 3\sqrt[6]{x-4}$

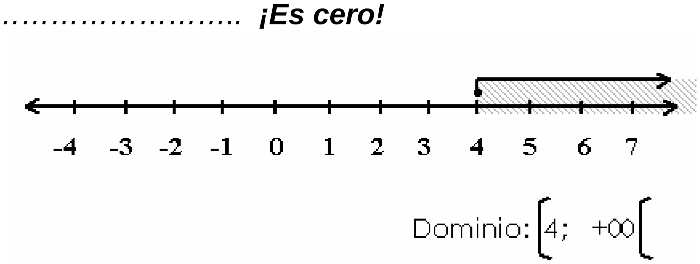
Solución:
Para que el radical con índice seis tenga sentido en IR es necesario que la expresión x – 4 se refiera, únicamente, o al cero o a números positivos.

¿En cuáles valores de “x” se tiene que “x – 4” es cero o positivo?

Experimentemos…

- *Si x = 10 entonces x – 4 es igual a 10 - 4, es decir 6.* ***¡Es positivo!***
- *Si cambiamos la “x” por 0 se obtiene 0 – 4 = -4.* ***Es negativo****.*
- *En x = 2…………………………… X – 4 da 2 – 4= -2.* ***Es negativo.***
- *En x = 4 …………………………………………………..* ***¡Es cero!***

En una representación en la recta, se puede visualizar que a partir de 4 todos los valores que se obtienen son positivos o cero.



Recordar: Para indicar intervalos se utilizan los símbolos [y].

→] [Ninguno de los extremos es parte del conjunto.

→[ ] incluye a ambos extremos.

→]] es “abierto” en el extremo izquierdo, pero es cerrado en el extremo derecho.

Cuando un intervalo sí tiene al extremo izquierdo y no al derecho se utiliza [[

2) Hallar el dominio máximo de $g(x) = \sqrt{x-6}$

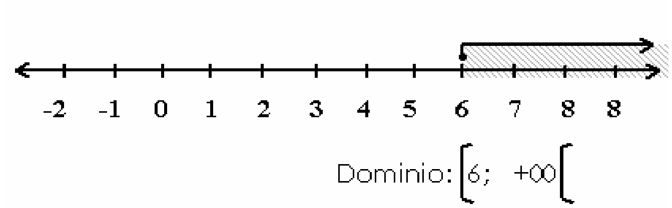
Solución:

Es un requisito que el subradical sea mayor o igual a cero, pues no existen radicales índice par de números negativos.

“x – 6” debe ser mayor que cero (o sea, positivo) o bien cero.

Como es una resta, sabemos que si “x” es seis, entonces “x –6” da cero.

Y para todos los “x” mayores que seis “ x – 6” es positivo.



3) Determinar el dominio máximo de $g(x) = \sqrt[6]{x-11}$

Solución:

Se puede utilizar una inecuación:

$$x - 11 \geq 0$$

Se suma once $x \geq 0 + 11$

$$x \geq 11$$

El dominio es el conjunto de todos los números *mayores o iguales a once.*

Es decir: $[11; +\infty[$

Inecuaciones de primer grado

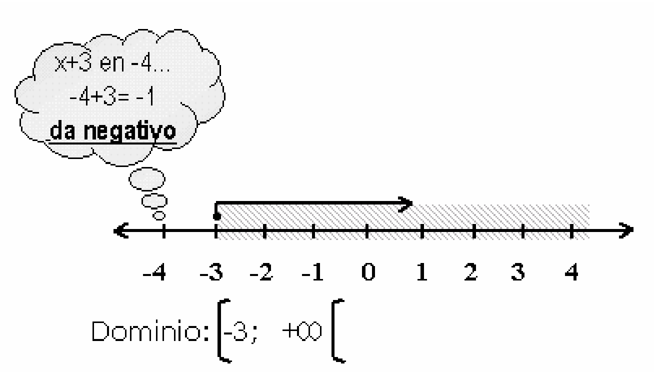
Las desigualdades se trabajan utilizando la operación contraria para despejar la variable.

Cuando hay suma o resta, se cambia a resta o suma respectivamente, la desigualdad se mantiene.

Cuando se trata de multiplicación o división, se cambia a la operación contraria ***pero*** *se debe tener presente que:*

Si el número es negativo → la desigualdad cambia de sentido.

4) Indicar el dominio máximo de $h(x)=\frac{1}{3}\sqrt[4]{x+3}$



Solución:

La inecuación relacionada es $x+3\geq 0$.

Se resta 3 $\quad x\geq 0-3$

$$x\geq -3$$

Por lo tanto, el dominio es el conjunto de todos los números reales mayores o iguales a menos tres

5) Determinar en cuál conjunto está bien definida la expresión $\sqrt{x+\frac{2}{5}}$

Solución:

La desigualdad asociada al cuestionamiento es $\quad x+\frac{2}{5}\geq 0$

Se resta dos quintos $\quad x\geq 0-\frac{2}{5}$

Por lo tanto, la expresión queda bien definida para x, tal que: $x\geq \frac{-2}{5}$

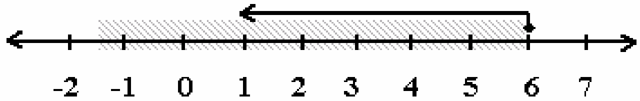
El conjunto para el cual la expresión está bien definida es $\left[\frac{-2}{5};+\infty\right[$

6) Hallar el dominio máximo de $g(x)=\sqrt{6-x}$

Solución:

$\sqrt{6-x}$ tiene sentido siempre y cuando 6 – x sea positivo o cero.

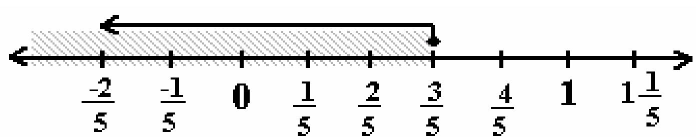
$$6-x\geq 0$$
$$6\geq 0+x$$
$$6\geq x \quad x \text{ menor o igual a seis}$$

Representación gráfica	**Como intervalo**
	$\left]-\infty;\ 6\right]$

7) Indicar el dominio máximo de $f(x)=\dfrac{\sqrt[8]{3-5x}}{12}$

El subradical es 3 – 5x y se requiere que sea positivo o cero.

$$\begin{aligned}
3-5x &\geq 0\\
-5x &\geq 0-3\\
-5x &\geq -3\\
x &\leq -3 \div -5 \quad \textit{cambia la desigualdad pues se divide por un número negativo}\\
x &\leq \frac{3}{5}
\end{aligned}$$



$$\left]-\infty;\ \frac{3}{5}\right]$$

8) Determinar el dominio máximo de $f(x)=\sqrt[4]{x^2+x^4}$

Solución:

En este caso el subradical es una expresión que sin importar el valor de la variable “ x ”, <u>siempre</u> da un valor positivo o cero.

Por lo tanto, el dominio es el conjunto de números reales: IR

9) Determinar el dominio máximo de $g(x)=\sqrt{\dfrac{2-x}{5}}$

Solución:

El subradical debe ser mayor o igual a cero, es decir,

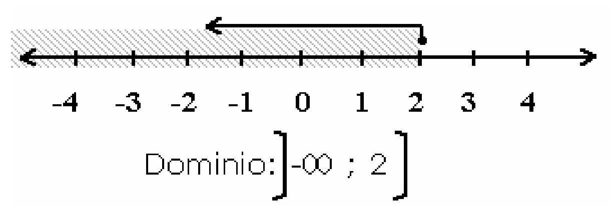
$$\frac{2-x}{5} \geq 0$$

$2 - x \geq 0 \bullet 5$ *se conserva la desigualdad pues se multiplico por un número positivo*

$2 - x \geq 0$

$2 \geq 0 + x$

$2 \geq x$



10) Hallar el dominio máximo de la función $f(x) = \sqrt[5]{x+3}$

Solución:

Cuando el índice del radical es impar, no existe restricción. El dominio máximo es IR.

Ejercicios

En parejas escriba una explicación del dominio máximo para funciones con radicales de índice par.

Continúa el trabajo en parejas. Responda brevemente a cada interrogante.

a) ¿En cuáles casos de radicales es necesario, para que esté bien definido, que el subradical sea positivo o cero? ____

b) La condición de que un subradical sea mayor o igual a cero se puede describir, también, como que el subradical es ______________________________________

c) En la determinación del dominio máximo de una función con radical de índice par se puede utilizar la estructura matemática denominada ___________________________

d) En funciones de la forma $h(x) = \sqrt[par]{\text{expresión}}$ la desigualdad que debe resolverse es como la siguiente: “expresión ____ 0”

En grupos de 4 personas resuelva los ejercicios siguientes.

1.) Anote en cada paso la justificación.
Determine el dominio máximo de la función $g(x) = \sqrt{1-x}$

Solución: **Justificación**

Debe cumplirse que $1 - x \geq 0$ ______________________________

$-x \geq 0 - 1$ ______________________________

$-x \geq -1$ ______________________________

$x \leq -1 \div -1$ ______________________________

$x \leq 1$ ______________________________

El dominio máximo es $]-\infty; 1\,]$ ______________________________

2.) Complete con las expresiones matemáticas que faltan

Hallar el dominio máximo de $h(x) = \sqrt{3+x}$

Solución:
Como el radical es de índice par se requiere que $3 + x \geq$ _____ $\leftarrow$

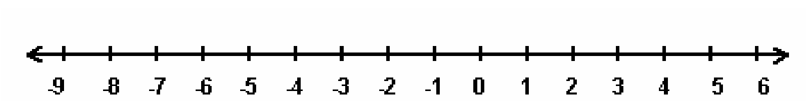
Esta inecuación se resuelve de la siguiente forma:

$3 + x \geq 0$

$x \geq 0 - 3$ ______________________________ $\leftarrow$

$x \geq -3$

Represente esta solución en la recta:



Como intervalo, el dominio de la función es: __________________ $\leftarrow$

3.) Observe cada función y determine el dominio. Los dominios aparecen después del ejercicio, identifique a cuál función corresponde cada uno. Sobra un conjunto.

$h(x) = \sqrt{x+1}$ $\qquad$ $g(x) = \sqrt[7]{2-x}$ $\qquad$ $h(x) = \sqrt[4]{x-3}$

$f(x) = \sqrt[6]{x^2}$ $\qquad$ $g(x) = \sqrt{x-5}$ $\qquad$ $f(x) = \sqrt{x}$

Conjuntos que sirven de dominio:

$[0; +\infty[$ IR $\quad [-1; +\infty[$ $\quad]-\infty; 2\,]$ $\quad$ IR $\quad [3; +\infty[$ $\quad [5; +\infty[$

En grupos determinen el dominio de cada función. Represente la solución en una recta y escríbala como intervalo.

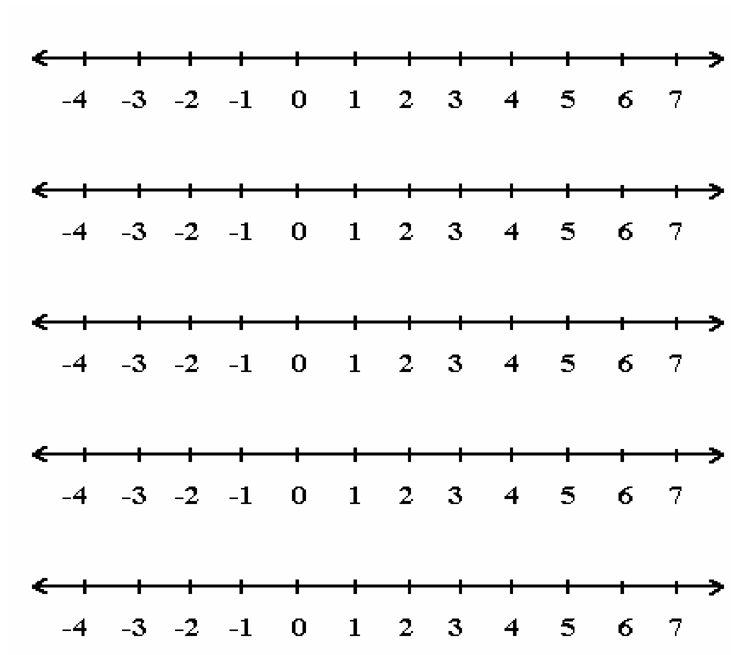
a) $f(x)=\sqrt[12]{2-x}$

b) $f(x)=\sqrt[4]{x-3}$

c) $g(x)=\sqrt{x+7}$

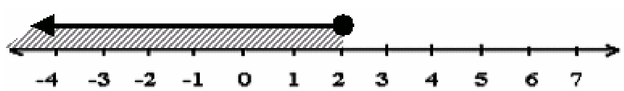
d) $h(x)=\sqrt[6]{x^3}$

e) $f(x)=\sqrt[5]{x+6}$

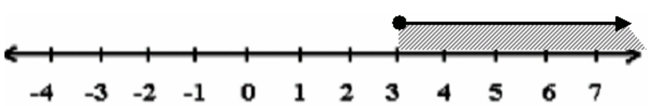


CLAVE:

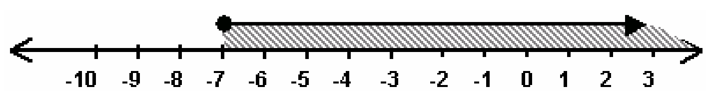
a) $]-\infty;\ 2]$



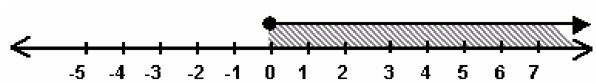
b) $[3;\ +\infty\ [$



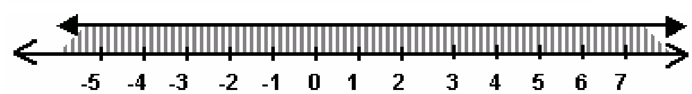
c) $[\ -7;+\infty[$



d) $[0;+\infty\ [$



e) IR



PARA PENSAR

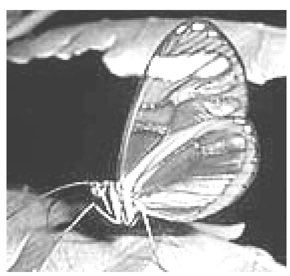
¿Cómo es el dominio máximo de funciones como las siguientes?

1) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+1}}{1-x}$ 2) $g(x)=\sqrt[3]{\dfrac{2+x}{x-4}}$ 3) $h(x)=\dfrac{3+x}{\sqrt{-x-5}}$

EL ÉXITO

Se construye y cada pieza, aún la considerada fracaso, es importante.

Es proceso, no sólo un resultado acabado y está en función de tu esfuerzo, alegría y dedicación.



INTERPRETACIÓN GRÁFICA (DOMINIO Y ÁMBITO)

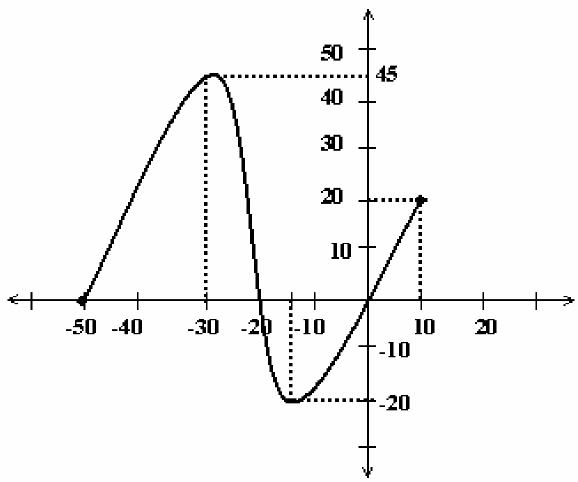
La representación gráfica ha sido, en la historia humana, no sólo una expresión artística sino también, una excelente forma de comunicación. Una idea puede ser transmitida con mayor claridad con un apoyo gráfico.

En matemática, en particular en el estudio de las funciones, la representación gráfica sintetiza características y datos generales de una relación entre conjuntos de números. Como, en ocasiones, las funciones modelan situaciones reales de las ciencias sociales o naturales, la importancia de la representación gráfica es aún mayor.

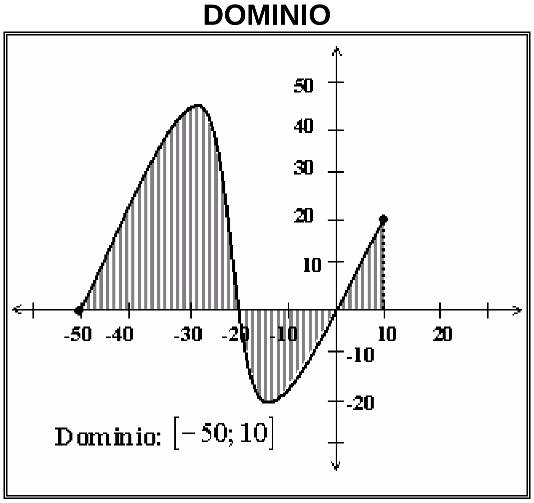
El dominio de una función se evidencia en el eje x. Y el ámbito o recorrido de la función en el eje y. Observe la presentación en power point "Lectura de gráficos: dominio y rango" y coméntala.

A continuación algunos ejemplos:

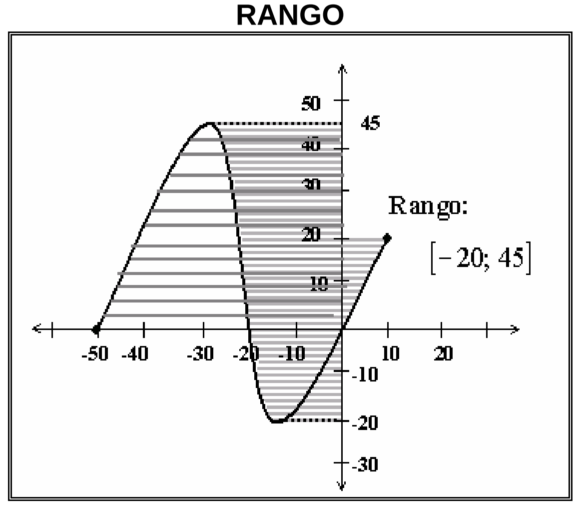
A) La gráfica de la función es



DOMINIO



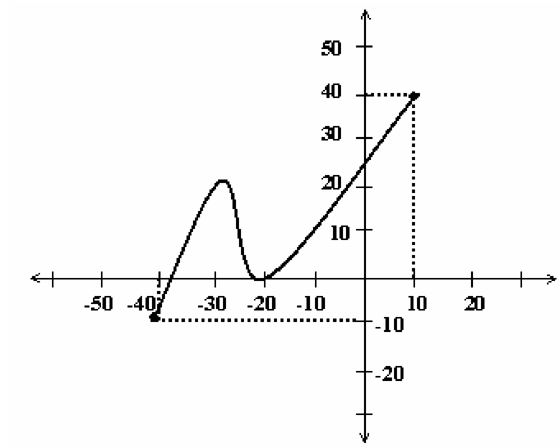
RANGO



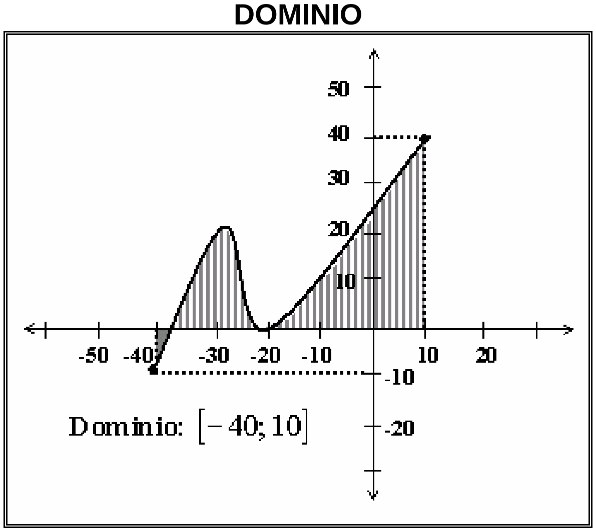
Se verifica que los extremos sean parte de la función, en este caso SÍ son parte del dominio.

En el caso del ámbito o rango es importante observar los puntos "más altos" y los "más bajos".

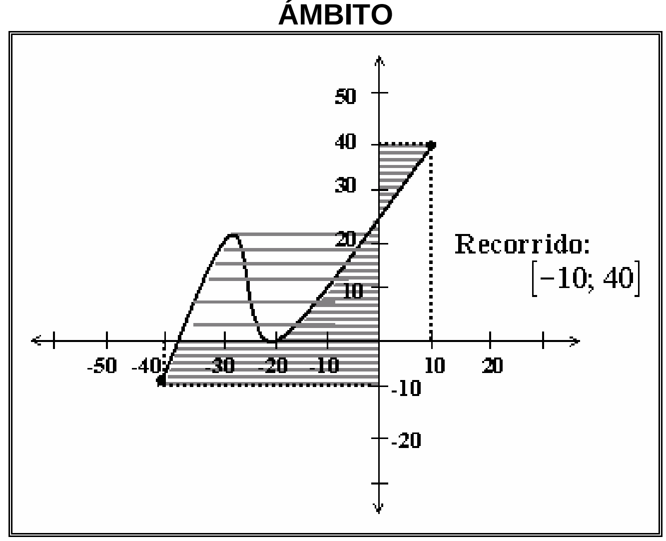
B) La gráfica de la función es…



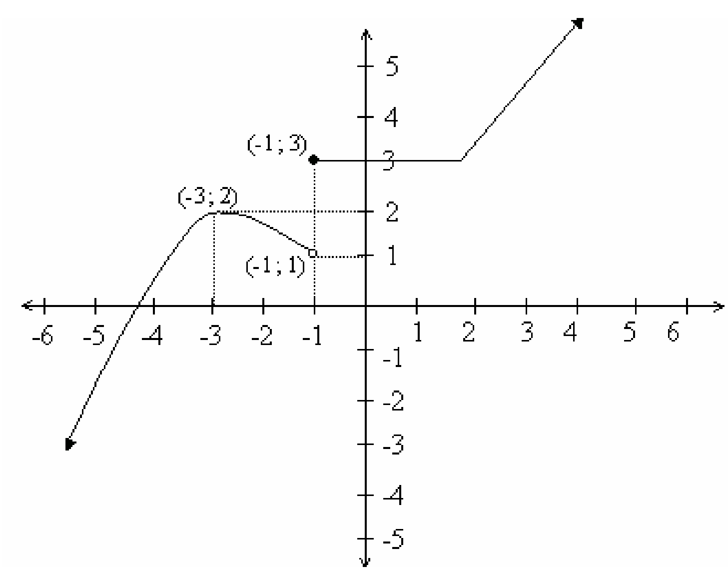
DOMINIO



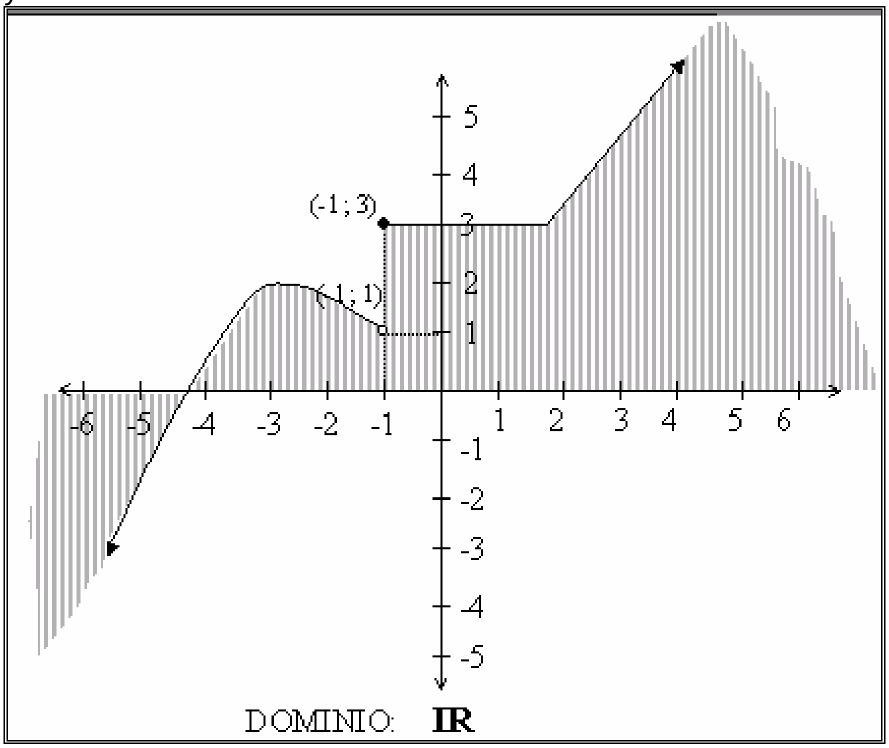
ÁMBITO



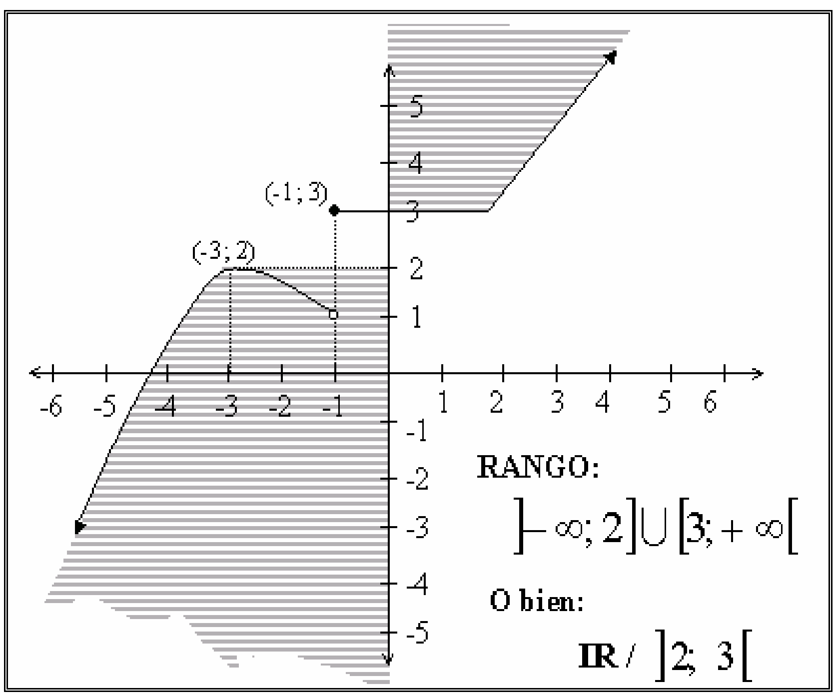
C) En el caso de la siguiente función, el trazo se extiende al infinito tanto en el lado negativo como en el positivo.



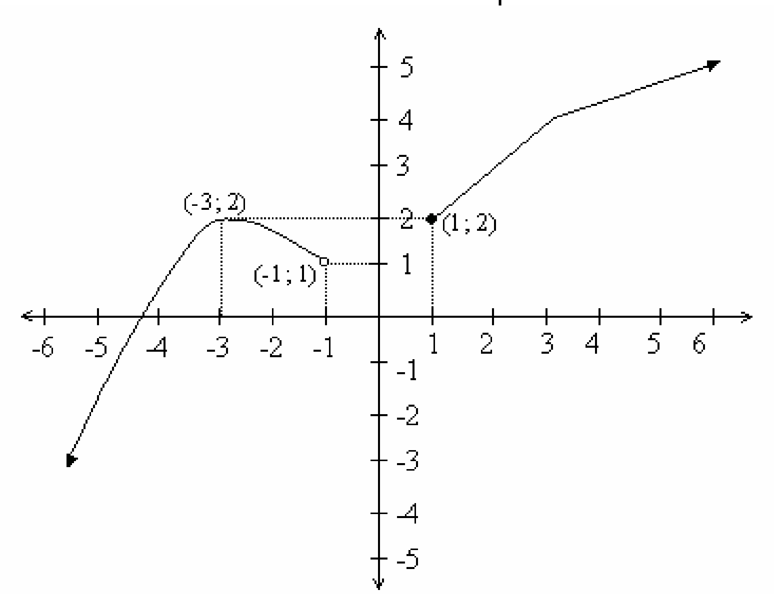
El dominio incluye a todos los números reales.



Al analizar al conjunto de imágenes, se observa que los números comprendidos entre 2 y 3 no "funcionan" como imágenes para algún valor del dominio.



D) En el siguiente caso la gráfica de la función no se puede realizar en un solo trazo, se dice que es una función *discontinua*. Aquí nos interesa analizar su dominio y su ámbito.



En relación con el dominio, se puede observar que

- todos los números menores que –1 son parte del dominio; pero el –1 NO.
- todos los números mayores o iguales a 1 pertenecen al dominio.

Es decir el <u>dominio</u> es $\left]-\infty; -1\right[\cup \left[1; +\infty\right[$

El <u>rango</u> o ámbito incluye a todos los números reales, es decir: **IR**

Ejercicios

De la lectura anterior elabore un resumen.

Reúnete con un compañero y completa las siguientes expresiones

1) Para determinar el dominio de una función desde la observación de su gráfica se analiza en el eje ______

2) El ámbito se busca en el eje _______

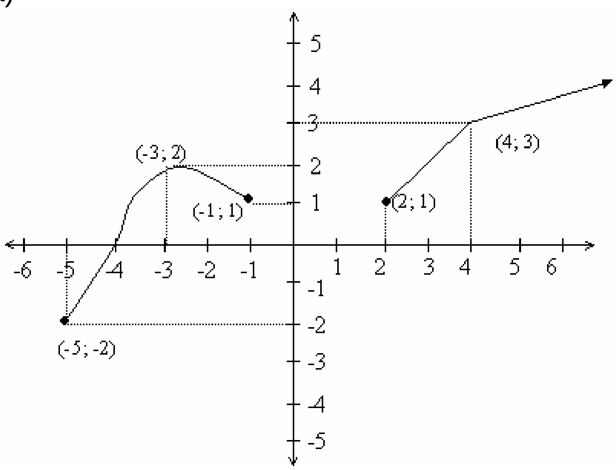
3) Si "al pintar", en una gráfica, desde el trazo hasta el eje x, se verifica que la función utiliza preimágenes desde menos infinito hasta 3 incluido, entonces el dominio es el intervalo ______________

4) Si en la gráfica de g(x), al pintar desde el trazo hasta el eje y, se obtuvo que el ámbito es $\left]-5; +\infty\right[$, entonces esto significa que el rango se extiende desde __________ ____________________ hasta infinito.

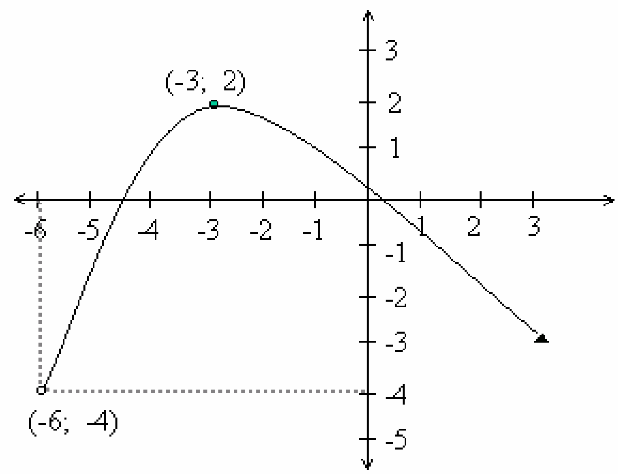
5) Si "al pintar" en busca del dominio, se determina que todo el eje x *participa* entonces el dominio es el conjunto _____, el cual como intervalo se puede expresar como _______________

Con un compañero, determine dominio y ámbito de cada función graficada.

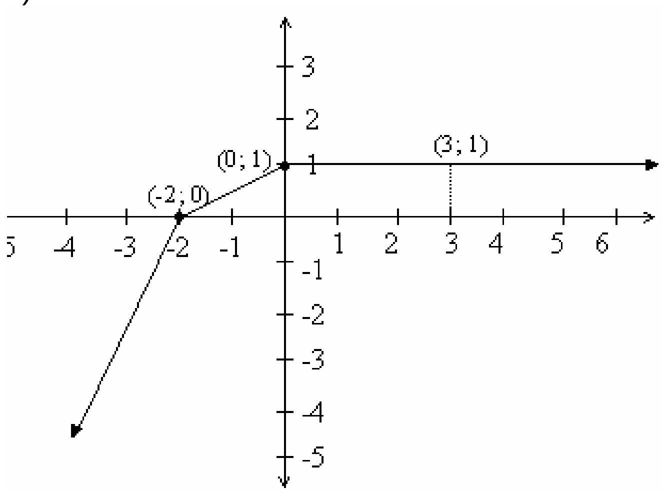
a)



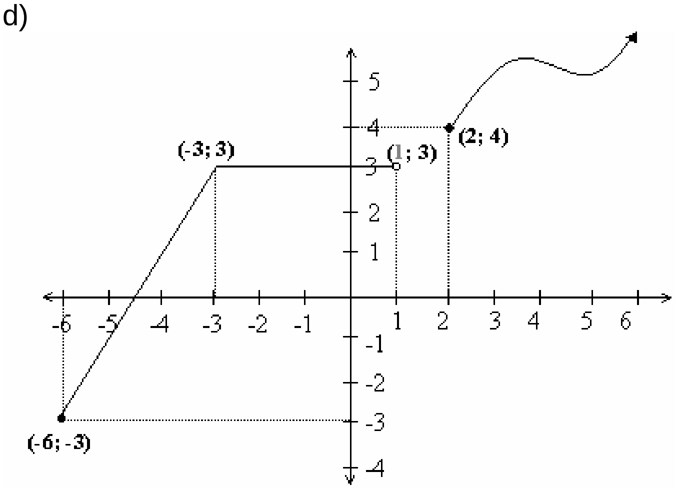
b)



c)

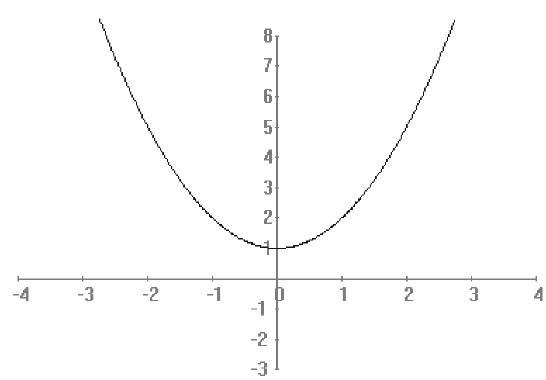


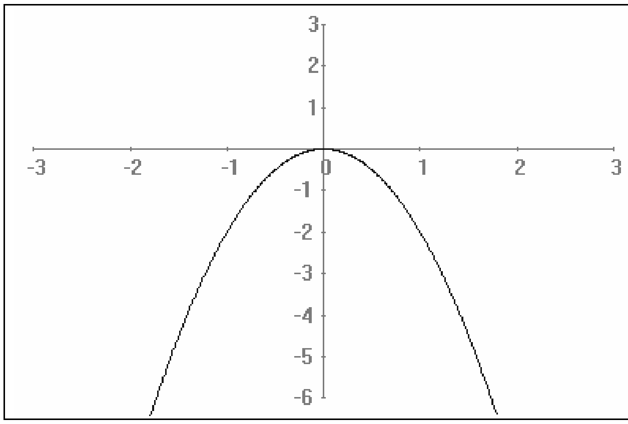
d)



Individualmente resuelva cada ejercicio.

1.) Determine el dominio de la función de la derecha.



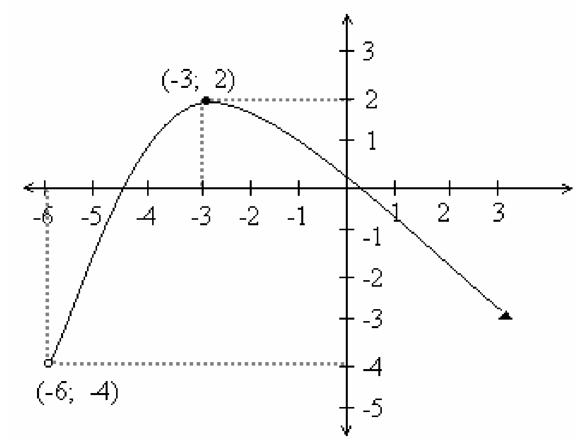


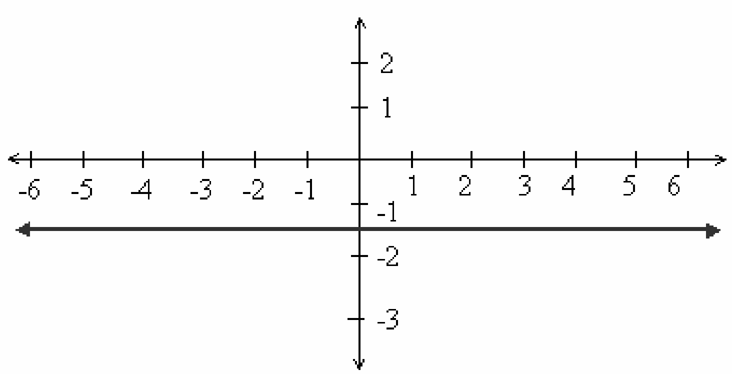
2.) Halle el rango o contradominio de la función de la izquierda.

3.) En relación con la gráfica de la derecha, indique SI o NO para cada pregunta.

Pregunta

¿-6 pertenece al dominio?	( )Sí ( )No
¿2,5 pertenece al rango?	( )Sí ( )No
¿Es 7 un elemento del dominio?	( )Sí ( )No
¿-4 es elemento del dominio?	( )Sí ( )No
¿1 pertenece al ámbito?	( )Sí ( )No
¿0 pertenece al dominio?	( )Sí ( )No





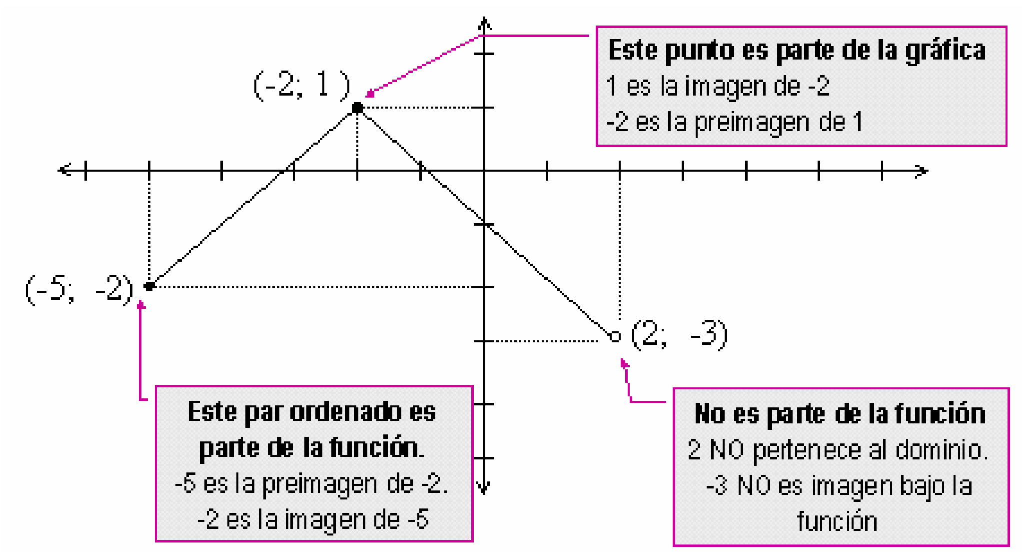
4.) Determine el ámbito de la función de la izquierda.

CLAVE: 1) IR 2)]-∞ ; 0] 3) NO-NO-SI-SI-SI-SI 4){ -1,5 }

INTERPRETACIÓN GRÁFICA (IMÁGENES Y PREIMÁGENES)

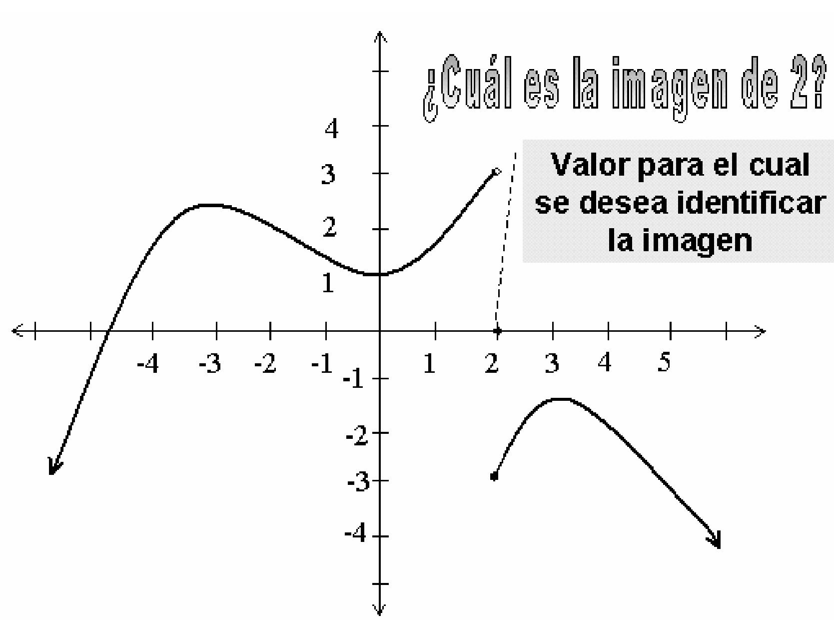
Es importante reconocer cuándo un par ordenado es parte de la representación gráfica de una función. Si el punto en el plano cartesiano se representa abierto, °, significa que el par ordenado NO es parte de la gráfica. Si el punto es cerrado, •, entonces el par ordenado SÍ pertenece a la gráfica.

Ejemplo:

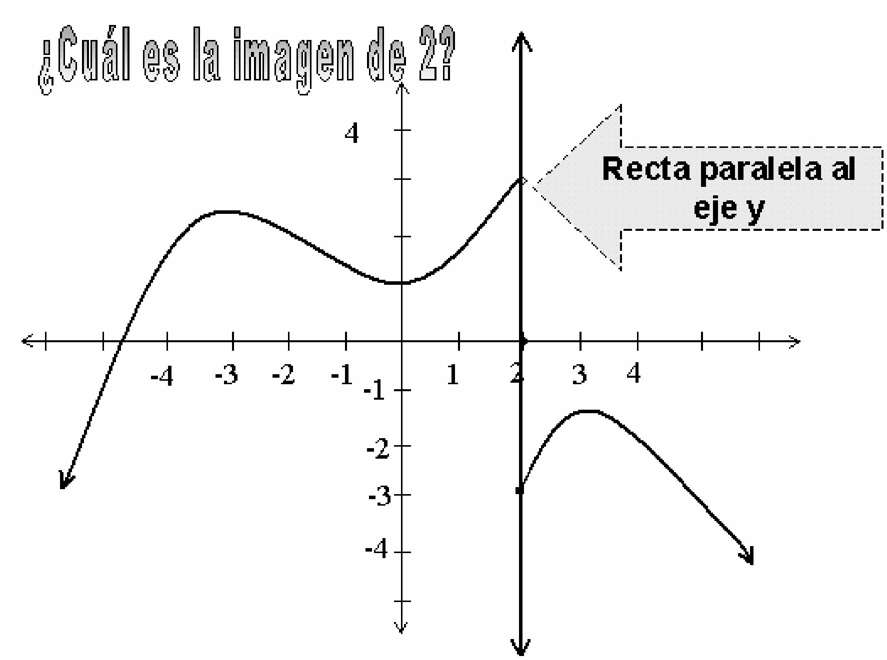


Para identificar imágenes bajo una función se puede proceder tal como expone la presentación en power point que trata este tema. Si pudo ver tal presentación, en parejas, comente las ideas expuestas. A continuación el detalle de tal explicación.

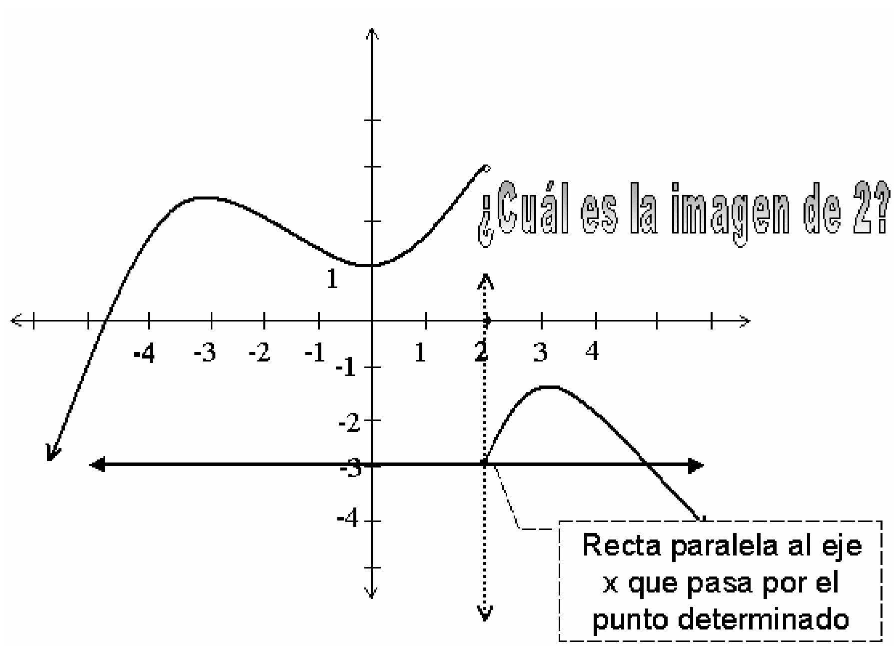
1. Se localiza el valor del dominio al cual se le busca la imagen. Esto se realiza en el eje x.



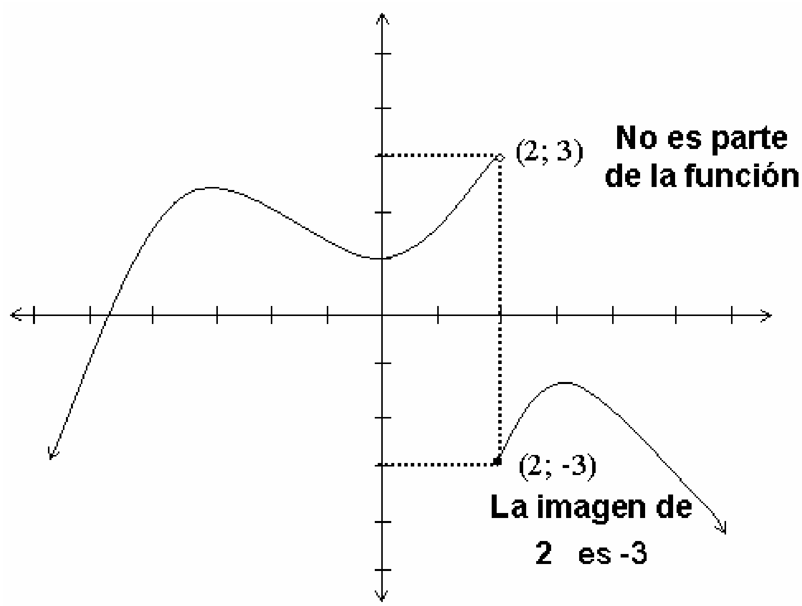
2. Se traza una línea vertical que pase por ese valor del dominio y que "toque" el trazo de la función. Esta línea es paralela al eje y.



3. Desde el punto en el cual la línea trazada "corta" a la gráfica de la función, se construye una línea paralela al eje x.



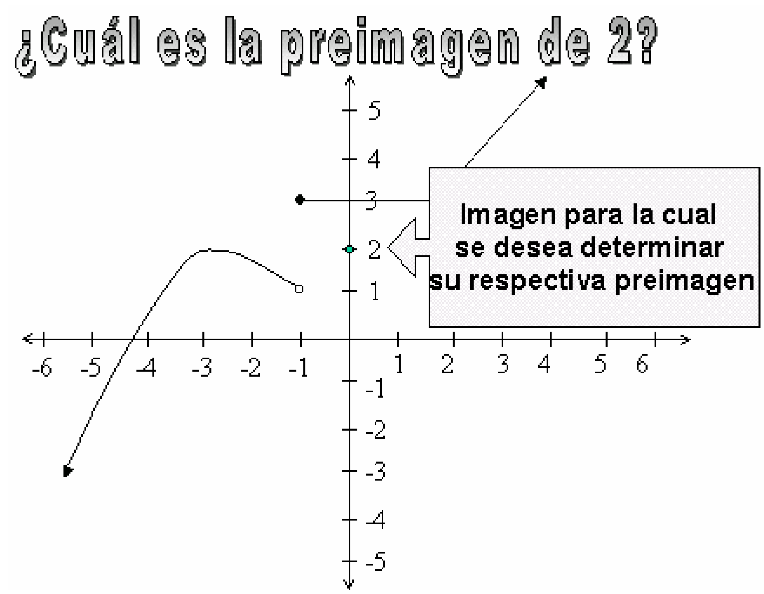
4. El valor en el eje "y" que se encontró con el último paso, es la imagen buscada.

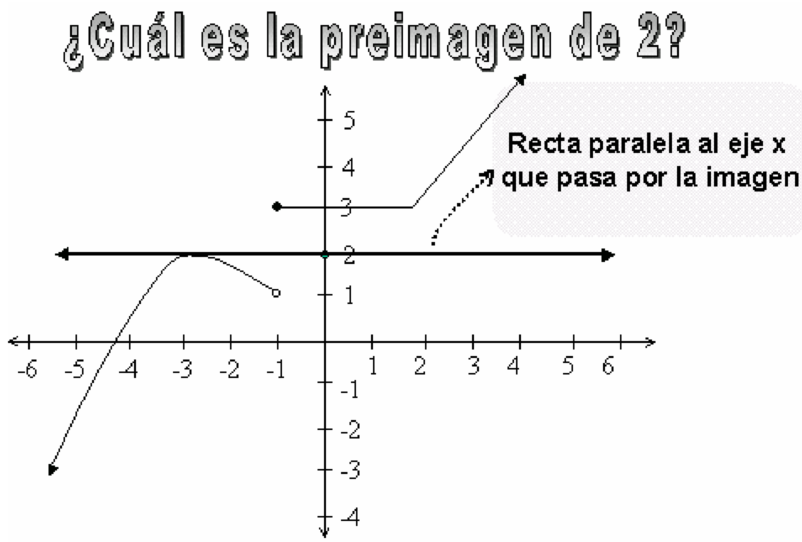


Determinación de preimágenes en una representación gráfica

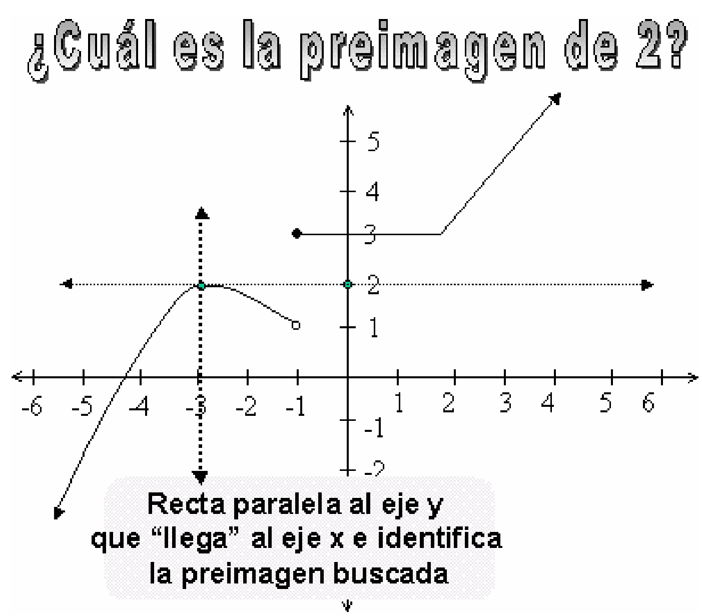
Cuando lo que se desea establecer es una preimagen se procede de la siguiente forma…

1. Se localiza la imagen para la cual se desea encontrar su preimagen. Esto se realiza en el eje y



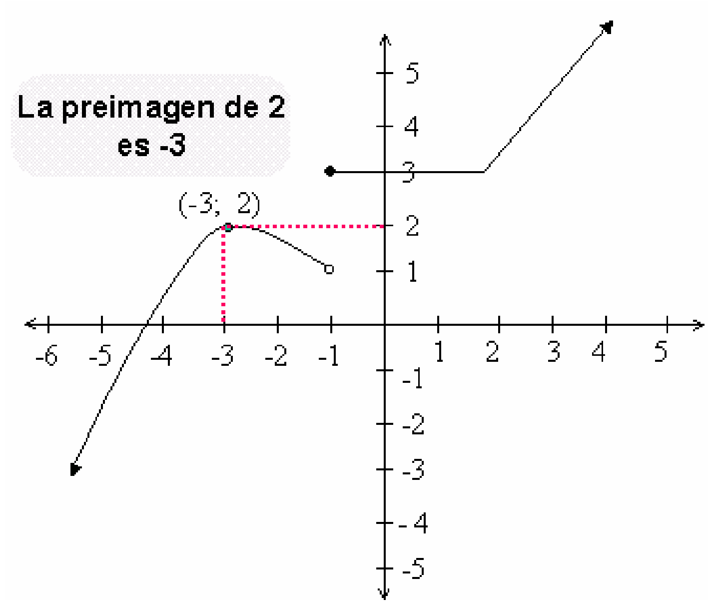


2. Se traza una recta paralela al eje x de manera que “pase” por la imagen. Esta recta intersecará la gráfica de la función, si no lo hace es que 2 no es parte del contradominio o rango.

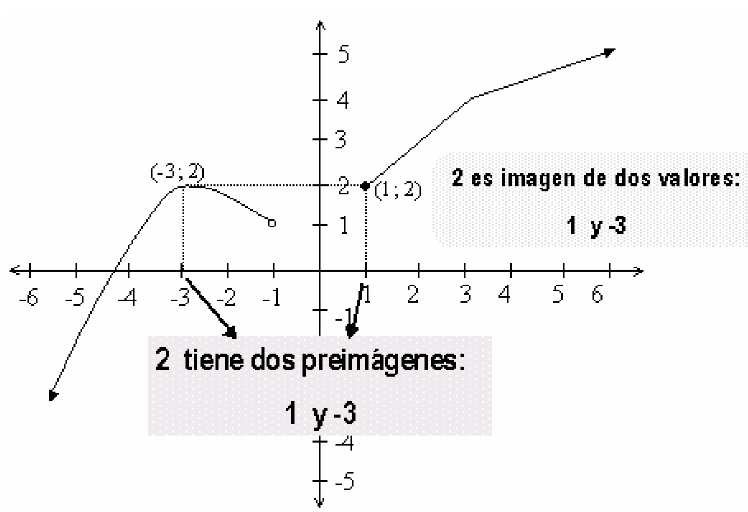


3. Desde el punto en la gráfica, se traza una paralela al eje “y” de manera que localiza un valor en el eje x, esa es la preimagen.

4. El valor hallado en el eje x es la preimagen buscada.

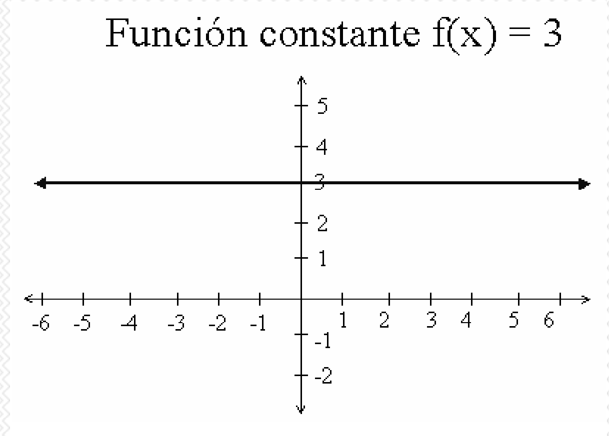


Existen casos en los cuales hay más de una preimagen. Por ejemplo:



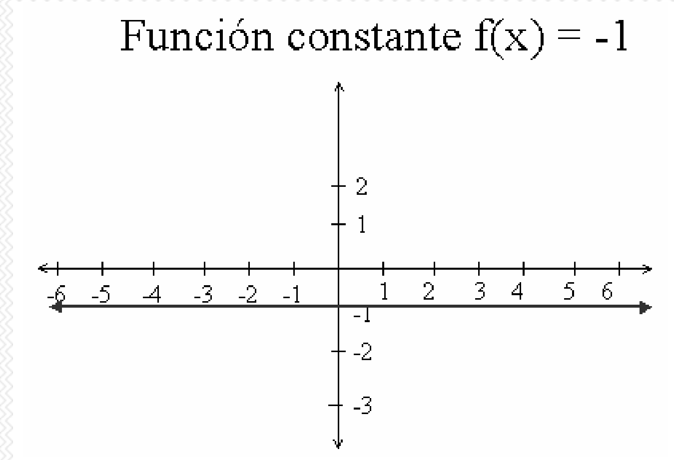
Hay un caso muy especial: **la función constante**. Esta función toma un solo valor para todo el dominio. Su gráfica es una línea recta paralela al eje x.

Ejemplos:



Todos los elementos del dominio, IR tienen como imagen al tres.

Por lo tanto, 3 tiene infinitas preimágenes.



Algunas preimágenes de –1 son, por ejemplo:

-5; 2; $\frac{35}{7}$; 0,874; $\sqrt[7]{-568}$

Ejercicios

Comenta, con una compañera o con un compañero, la lectura relacionada con la determinación de imágenes y preimágenes en la gráfica de una función.

En grupos resuelva las siguientes interrogantes.

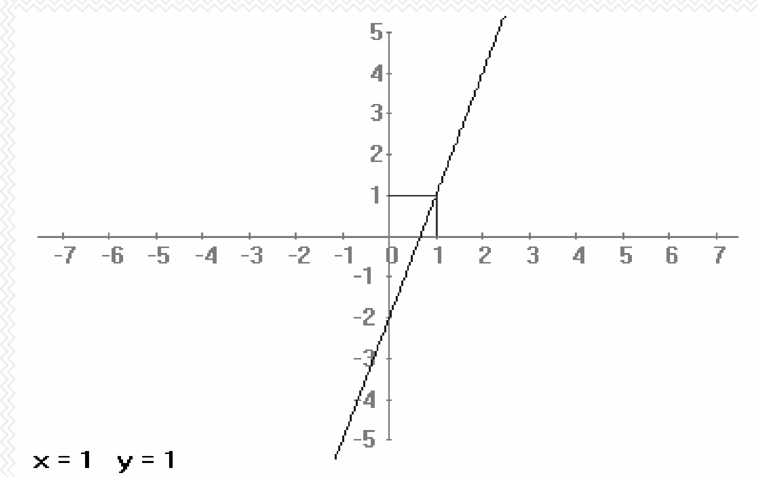
(1) ¿Cómo se reconoce, en una gráfica, si un par ordenado es parte de la gráfica de una función?
(2) ¿En cuál eje se identifican las imágenes de una función?
(3) ¿En cuál eje se localizan las preimágenes de una función?
(4) ¿Puede una preimagen tener más de una imagen? ( ) SI ( )NO Explique.
(5) ¿Es posible que una imagen posea más de una preimagen? ( ) SI ( )NO Justifique con, al menos, un ejemplo.

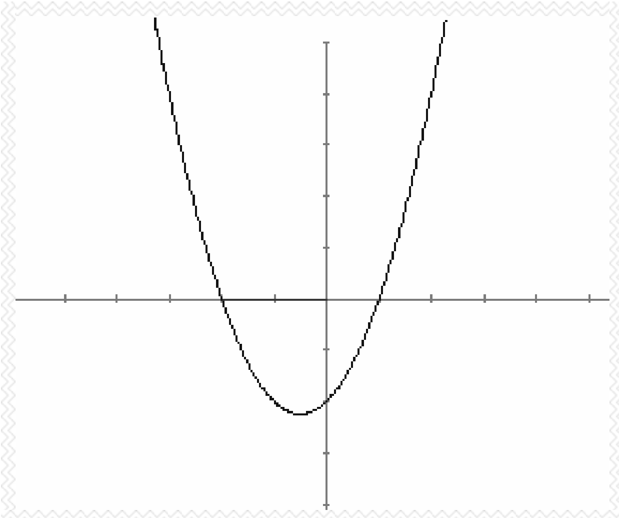
En parejas resuelva los siguientes ejercicios.

A.) De acuerdo con la gráfica de la derecha, identifique los siguientes elementos:

a) Imagen de 0 __________

b) Preimagen de 1 __________





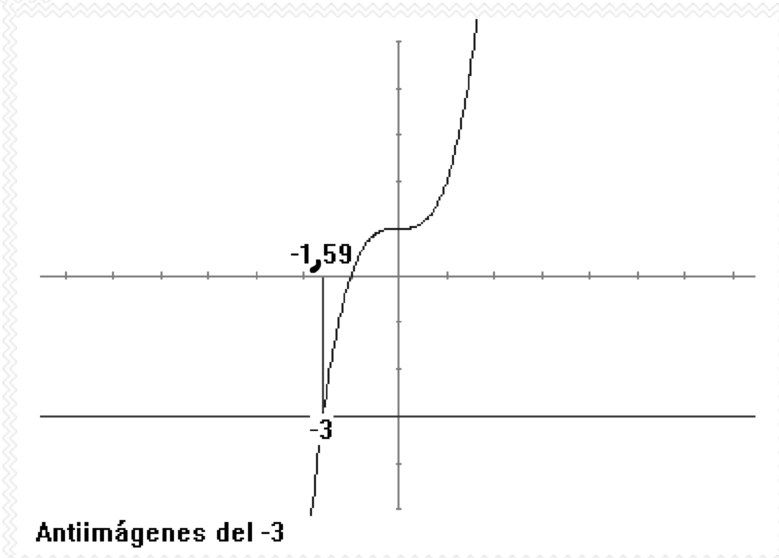
B.) De acuerdo con la gráfica de la izquierda y suponiendo que cada marca en los ejes va de unidad en unidad, la **preimagen** de 0 es _______

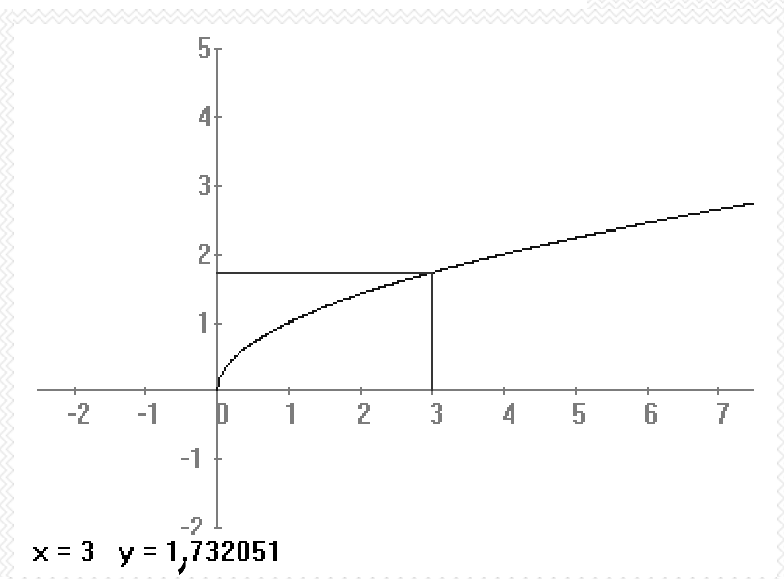
C.) En la gráfica de la función polinomial de la derecha se ilustra el procedimiento para determinar la relación imagen – preimagen.

De acuerdo con la terminología empleada en el texto anterior complete las siguientes expresiones siguientes

-3 es la ________________ de –1,59

-1,59 es la _______________ de -3





D.) A la izquierda aparece la gráfica de la función $\sqrt{x}$. Los datos anexos son aproximaciones.

De acuerdo con la información complete:

1) La imagen de 3 es __________

2) La preimagen de $\sqrt{3}$ es _____

De acuerdo con la gráfica adjunta resuelva cada ejercicio.

1) Determine siete preimágenes para y=3.

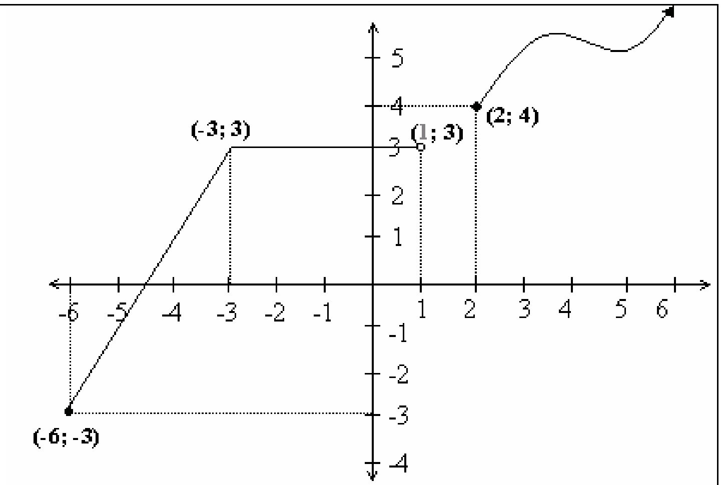
2) Deduzca la preimagen de y=0.

3) Halle la imagen de x= -6.

4) Indique la imagen de x=0.

5) ¿Tiene imagen, bajo esta función, el 1?

6) ¿Es – 4 imagen de algún *x* ?



CLAVE

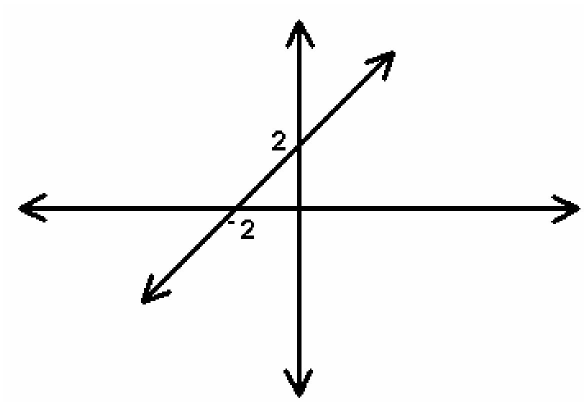
1) Cualquier número en $\left[-3; 1\right[$. No puede ser el 1. Puede ser el –3; -2,99; -2,5; 0,5; 0,99 y otros.
2) – 4,5.
3) –3.
4) 3
5) NO. No es parte del dominio.
6) NO. De hecho el rango o ámbito de esta función es $\left[-3; 3\right] \cup \left[4; +\infty\right[$

FUNCIONES DE LA FORMA y = mx + b(7)

Ver la videocinta respectiva a la sesión de GA 3.28 CON DOS SE PUEDE

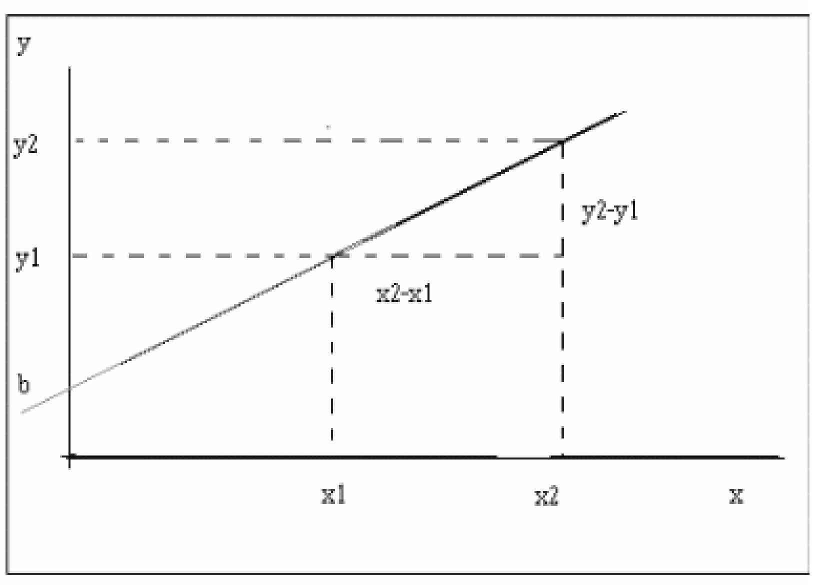
Una función *f: IR → IR,* definida ***f(x) = m x + b*** , con m y b en IR se llama **función lineal**. También se expresa como ecuación en la forma ***y= m x + b.***

Ejemplo: f(x) = x + 2



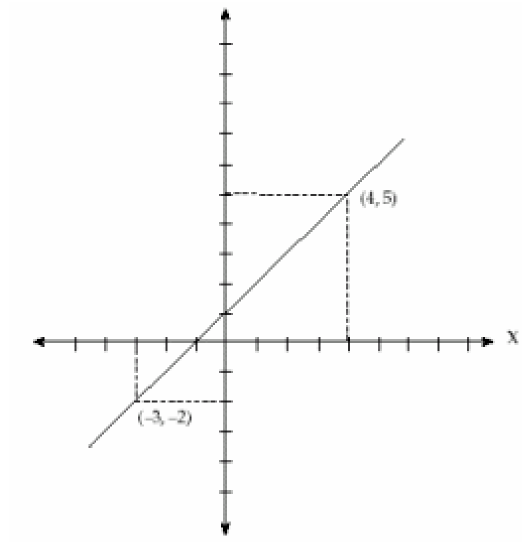
Su representación gráfica corresponde a una recta caracterizada por las constantes ***m*** y ***b*** llamadas respectivamente pendiente y ordenada al origen o intersección con el eje *Y*.

La intersección con el eje *Y* es el valor en el cual la recta corta al eje **y** (es decir: en el punto de coordenadas **(0, b)**); y la pendiente ***m*** mide la inclinación de la recta.



Dados (x_1, y_1) y (x_2, y_2) dos puntos de la recta la pendiente $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

GRAFICA



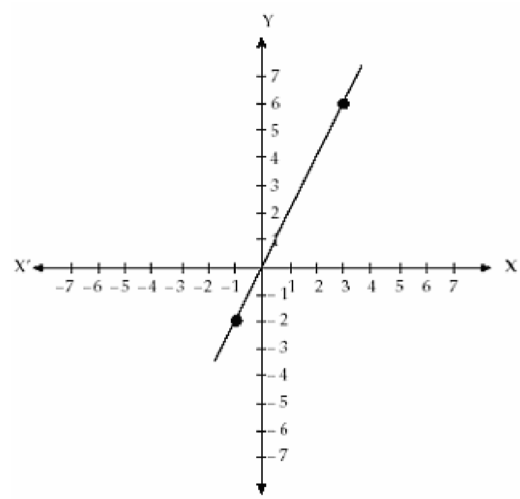
En este tipo de funciones "**y**" representa la variable dependiente, "**x**" la variable independiente y **m** y **b** son constantes, es decir, su valor no varía aunque cambien los valores de las variables en una función.
Analícense algunos casos para la función

❖ y = mx + b, con m > 0, b > 0

Gráfica de la función y = x + 1:
Se tabula para encontrar los valores de ***x*** y de ***y***.

x	y	puntos
-3	2	(-3,2)
4	5	(4, 5)

Nótese que la recta interseca al eje de las ordenadas en el punto 1 —que es el valor de la constante b en la función dada— y que el ángulo que forma con el eje de las abscisas es menor de 90º.

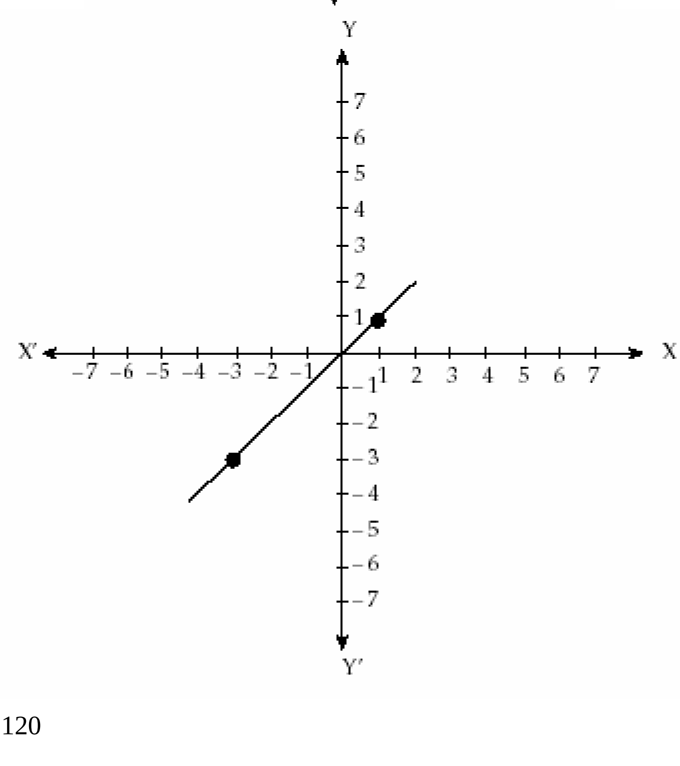


❖ y = mx + b, con m > 0, b = 0

Gráfica de la función y = 2x + 0
Al tabular se obtiene:

x	y	Puntos
-1	-2	(-1,-2)
3	6	(3, 6)

Obsérvese que, en este caso, la recta pasa por el origen y forma un ángulo menor que 90º con el eje de las abscisas.



Ahora se revisará la gráfica para y = mx+b; por ejemplo y = x + 0, o sea, y = x, esto es, cuando **m** = 1 y **b** = o.

y = 1 + 0 y = -3 + 0
y = 1 y = -3

x	y	Puntos
1	1	(1, 1)
-3	-3	(-3, -3)

Véase que la recta obtenida forma un ángulo de 45° con el eje de las abscisas y que pasa por el origen.

Ejercicios

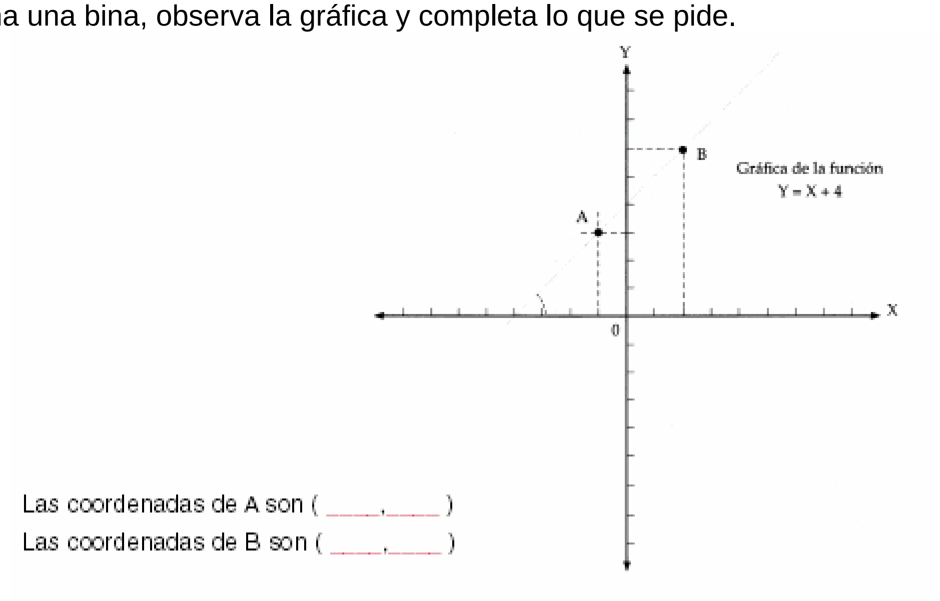
RECUERDA Anota en tu cuaderno qué entiendes por **variable independiente** y qué por **variable dependiente**.

Resume el texto.

Intégrate a un equipo como lo indique el profesor y contesta las siguientes cuestiones:

a) ¿Cuáles son las constantes en una función de la forma y = mx + b? _________
¿Cuáles son las variables? ____
b) ¿Qué es una función lineal? ____
c) ¿Qué indica la ordenada al origen en una función lineal? _________________
____
d) ¿Cuánto mide el ángulo que forma la recta con el eje de las abscisas en la función $y = x$?
____
Compara tus respuestas con las de otro equipo, si no coinciden, consulta a tu maestra(o).

Forma una bina, observa la gráfica y completa lo que se pide.



Sustituye los valores de **x** y **y** en la función

Para el punto A	Para el punto B
y = x + 4	y = x + 4
____ = ____ + 4	____ = ____ + 4
____ = ____	____ = ____

En la función y = x + 4, ¿qué valor tiene la constante “**b**”? ________

¿Por qué punto del eje de las ordenadas pasa la recta? ______________________
¿Qué relación tiene ese punto con **b**? _____________________________________
Compara tus respuesta con las de otra bina y corrige si es necesario.

Tú solo resuelve el ejercicio siguiente:

1. En tu cuaderno, completa las tabulaciones y traza la gráfica de las funciones

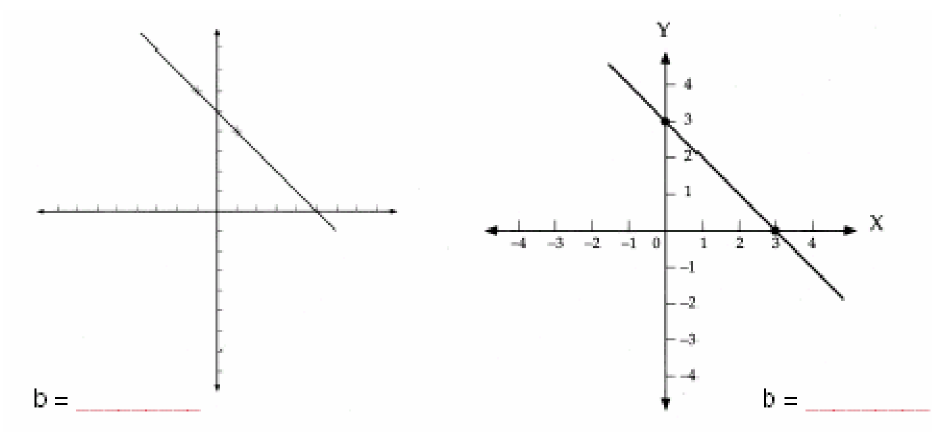
$y = 3x$

x	y	puntos
1		
-1		

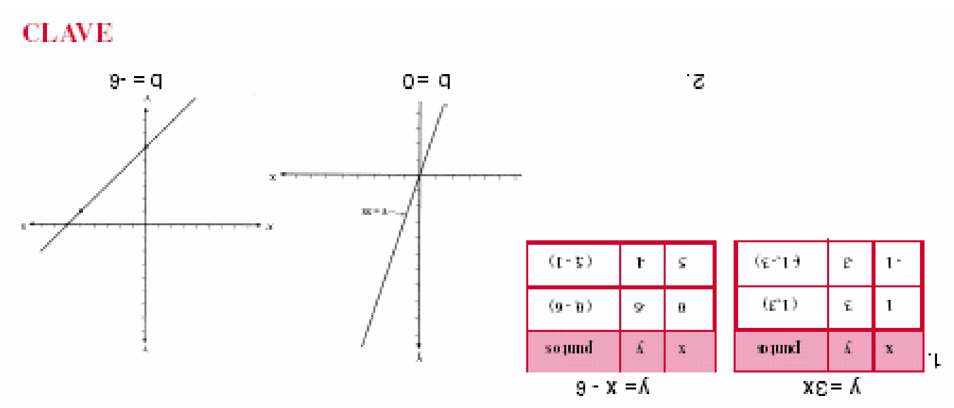
$y = x - 6$

x	y	puntos
0		
5		

2. Indica cuál es el valor de la ordenada al origen en las siguientes gráficas.



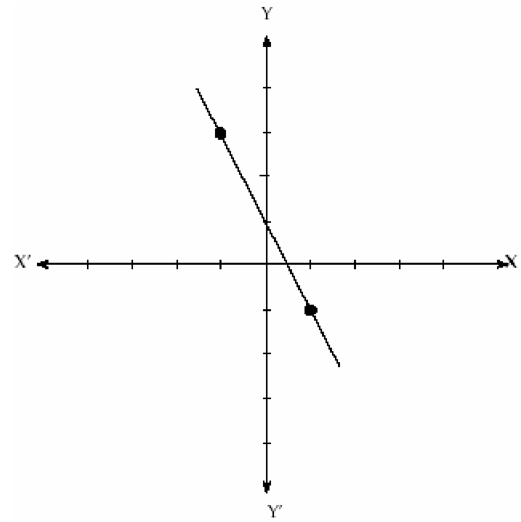
Compara tu ejercicio con el de otro compañero; en caso necesario, consulta la clave.



GRAFICA DE FUNCIONES DE LAS FORMAS y = mx + b, con m menor que cero(8)

Ver la videocinta correspondiente a la sesión de GA 3.29 ALGO CAMBIA

Como se explicó en sesión anterior, una función de la forma y = mx + b da origen a una recta, por lo que se conocen como funciones lineales. Enseguida, se verán las gráficas correspondientes a y = mx + b, con $m < 0$, $b \neq 0$



Gráfica de la función y = –2x + 1

Se tabula para obtener los puntos,

y = –2 (–1) + 1	y = –2 (1) + 1
y = 2+1	y = –2 + 1
y = 3	y = –1

x	y	Puntos
-1	3	(-1,3)
1	-1	(1, -1)

Obsérvese que la recta forma un ángulo mayor de 90° con el eje de las abscisas.

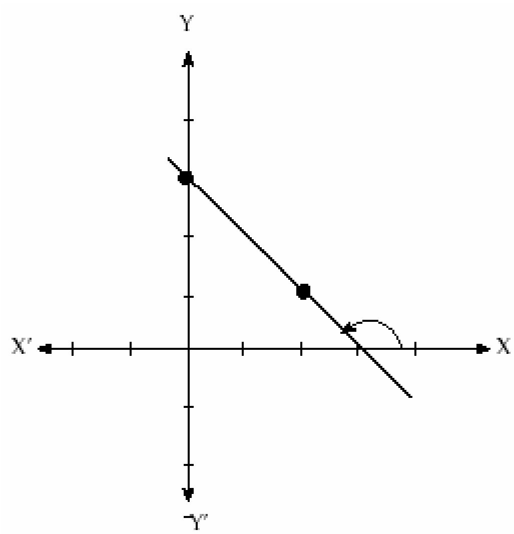
Además, corta al eje de las ordenadas en el punto 1, que es el mismo valor de b en la función.

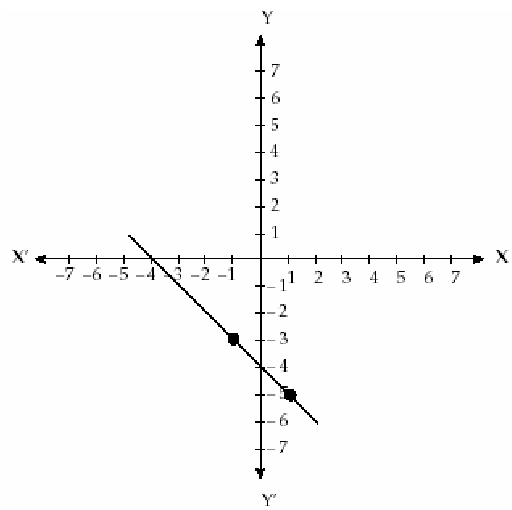
Gráfica de la función y = –1 x + 3

Se tabula para obtener los puntos

y = –1 (0) + 3	y = –1 (2) + 3
y = 0 + 3	y = –2 + 3
y = 3	y = 1

x	y	Puntos
0	3	(0,3)
2	1	(2, 1)





Graficar la función y = –x –4 donde m = –1 y b = –4

Se tabula encontrando las coordenadas de dos de sus puntos

y = –x – 4	y = –x – 4
y = – (–1) – 4	y = –(1) – 4
y = 1 – 4	y = – 1 – 4
y = – 3	y = – 5

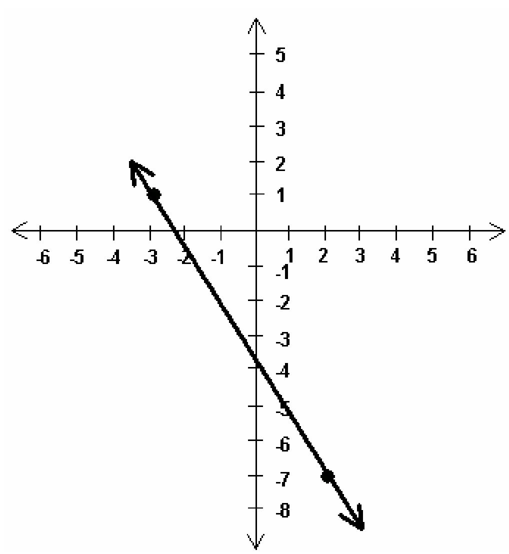
x	y	*Puntos*
-1	-3	$(-1;-3)$
1	-5	$(1;-5)$

b) Graficar la función y = –2x –3 donde m = –2 y b = – 3
Se tabula buscando las coordenadas de dos puntos.

y = –2x – 3	y = –2x – 3
y = –2 (–2) – 3	y = –2 (2) –3
y = 4 – 3	y = –2 (2) – 3
y = 1	y = –7

x	y	Puntos
2	-7	(2, -7)
-2	1	(-2, 1)

Con esos dos puntos es posible realizar la gráfica.



Observando las gráficas se puede ver que las rectas cruzan el eje de las ordenadas en el punto señalado por b, esto es, en el eje vertical donde las ordenadas son negativas y que el ángulo formado por las rectas con el eje de las abscisas es mayor de 90° y menor de 180°.

Ejercicios

¿Cuántas veces te ha sucedido que un pequeño detalle cambie la dirección de lo que tenías planeado?

De acuerdo con el programa televisivo se vio cómo cambia la dirección de estas rectas con respecto a las gráficas estudiadas en la sesión anterior.

RECUERDA Contesta brevemente las preguntas:
a) ¿Cuántos puntos son necesarios para trazar una recta? ____________________
b) ¿Cómo se llama al eje de las **x**? ____
c) ¿Cómo se llama al eje de las **y**? ____
d) ¿Cómo encontramos los valores de **y** al tabular la función? ________________
Lee en voz alta tus respuestas, según lo indique tu maestro, y corrige si es necesario.

Reúnete con un compañero y anota, en tu cuaderno, lo que consideres más importante de la lectura **Gráfica de funciones de las formas y = -mx + b, y = -mx – b**.

Continúa en bina y contesta las siguientes preguntas:

a) ¿Cómo se le llama a una función que da origen a una recta? _______________
b) En la función y = -mx + b, ¿cuáles son las constantes? ____________________
c) En la misma función, ¿cuál es la variable dependiente y cuál es la variable independiente?
____
d) ¿Cómo se obtienen los valores de **x**? ___________________________________
e) ¿Cómo se obtienen los valores de **y**? ___________________________________
f) ¿Cuál es el primer paso para graficar una función? ________________________
g) ¿Qué se toma en cuenta para hacer la tabulación? ______________________
____
Compara tus respuestas con otra bina. Si hay diferencias, discute y obtén una conclusión.

Forma una trina y completa las siguientes tablas, grafícalas en tu cuaderno.

a) y = -3x - 1

x	y	puntos

b) y = -7x + 2

x	y	puntos

Compara tu ejercicio con el de otra trina y corrígelo si es necesario.

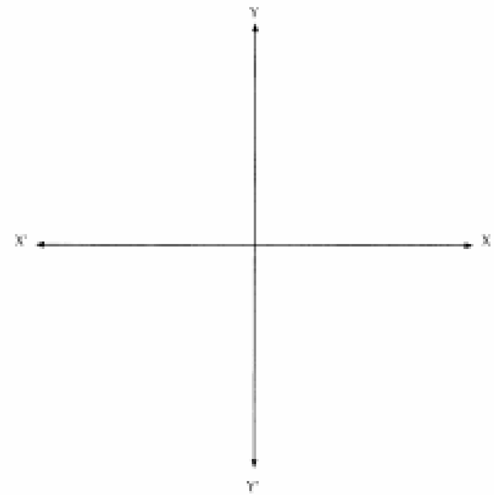
Individualmente, realiza los siguientes ejercicios.

1. De la función y = -5x - 8 se puede afirmar que:
   - a) La función de **x** es igual a ____
   - b) El valor de **b** es ___________________ y el valor de **m** es ___________________
   - c) La gráfica es una recta que cruza al eje de las ordenadas en el punto _________

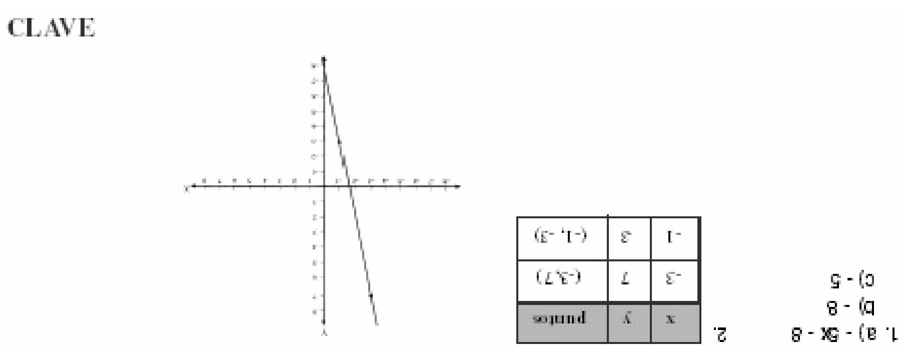
2. Tabula la función anterior y grafícala.

$y = -5x - 8$

x	y	puntos
-3		
-1		



Compara tus resultados con los de la clave, si hay diferencias, revisa tus procedimientos y corrige.



FAMILIA DE RECTAS DE LA FORMA y = mx + b(9)

¿Te han hablado de lo revoltosa que es la familia Carrillo? No, ¡qué bueno!, porque las familias que vamos a estudiar nada tienen que ver con ellos.

Observa con atención el programa televisivo, en él te hablarán del comportamiento que presenta una familia muy conocida por ti. Al finalizar el programa, comenta con tus compañeros el tema principal.

En las sesiones anteriores se vio la construcción de gráficas de ecuaciones de la forma $y = mx + b$ (ecuaciones lineales o de primer grado). Recordarás que toda ecuación lineal o de primer grado con dos variables tiene por gráfica una línea recta.

En esta ocasión se verán dos casos particulares del comportamiento de una familia de gráficas de la forma y = mx + b; cuando las gráficas que se obtienen son líneas paralelas entre sí o cuando corresponden a líneas que se cortan.

Véase el siguiente ejemplo que corresponde a una familia de rectas (forma y = mx + b)
Para construir su gráfica es necesario dar valores a x y encontrar los valores correspondientes a y, como sigue:

1.

y = 2 x – 1
y = 2 x + 2
y = 2 x + 4

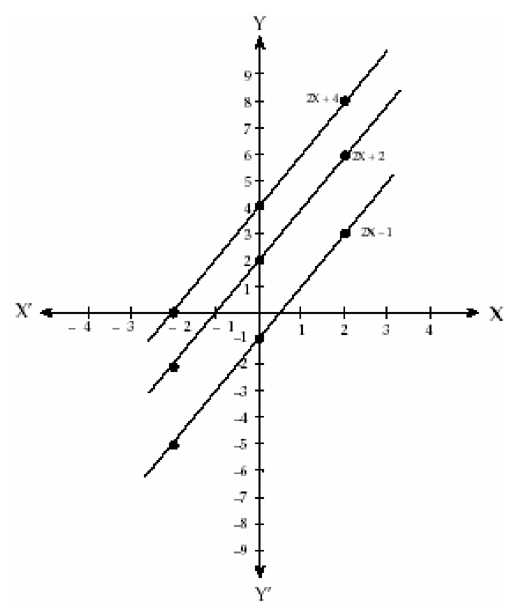
Para construir su gráfica es necesario dar valores a “x” y encontrar los valores correspondientes a y, como sigue:

y = 2x – 1	
x	y
-4	-9
-2	-5
0	-1
2	3

y = 2x + 2	
x	y
-4	-6
-2	-2
0	2
2	6

y = 2x + 4	
x	y
-4	-4
-2	0
0	4
2	8

Se observa que las gráficas de esta familia de rectas son paralelas entre sí, ¿y, en qué coinciden las tres? Si te fijas en la variable independiente x, aparece en las tres ecuaciones el mismo valor del coeficiente (m = 2). Esto significa que cuando se tiene una familia de rectas correspondientes a las funciones de la forma y = mx + b y el coeficiente de la variable independiente tiene el mismo valor, las líneas que representan estas funciones serán paralelas entre sí.



Ahora considérese el siguiente ejemplo:

Primero se asigna un valor a x, para encontrar los correspondientes de -y, y así poder construir sus gráficas.

2.

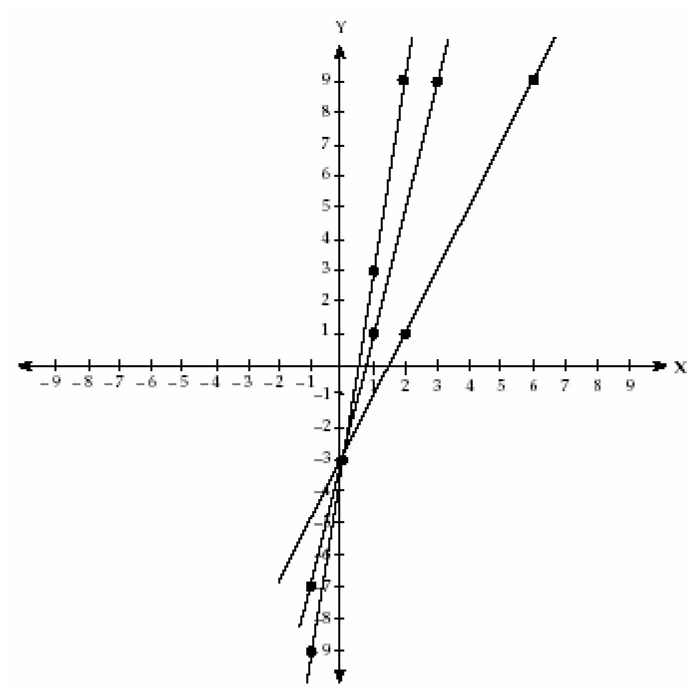
y = 2 x – 3
y = 4 x – 3
y = 6 x – 3

y = 2x – 3	
x	y
-3	-9
1	3
2	1
6	9

y = 4x – 3	
x	y
-1	-7
0	-3
1	1
3	9

y = 6x – 3	
x	y
-1	-9
0	-3
1	3
2	9

Ahora se observa un comportamiento diferente en estas gráficas, ya que se cortan o intersecan en un punto determinado. ¿Qué las hace tener ese punto en común?; efectivamente, el término b tiene un valor constante en las tres ecuaciones (b = –3). Esto quiere decir que cuando en la familia de rectas de la forma y = mx + b se tiene un mismo valor para b, las rectas que se obtienen se cortan en ese punto.



De acuerdo con los ejemplos anteriores se puede concluir que el comportamiento de una familia de gráficas que corresponda a la forma y = mx + b, se resume de la forma siguiente:

1 . Cuando la variable independiente x tenga un coeficiente constante (m), las rectas que se obtienen en la gráfica serán siempre paralelas entre sí.

2. Cuando el término independiente b tenga un valor constante, las rectas que se obtendrán en la gráfica se cortarán en un punto.

Ejercicios

RECUERDA Contesta las siguientes preguntas:
1. ¿Por qué a la función y = mx + b se le llama lineal? ______________________________________
____
2. A los segmentos perpendiculares que determinan el plano cartesiano se les llama
_________________________________ y __________________________________
Compara tus respuestas con tus compañeros; si son diferentes, discute y anota tu conclusión.

En relación con la lectura anterior comenta la diferencia que existe entre la familia de rectas paralelas y rectas que se cortan en un punto o intersecan, y que sirven para graficar familias diferentes de funciones.

Con tu equipo, contesta lo que se pide a continuación.

1. ¿Cuándo son paralelas las rectas que grafican una familia de funciones de la forma $y = mx + b$?

____

____

2. ¿Cuándo se cortan las rectas que grafican una familia de funciones de la forma $y = mx + b$?

____

____

Compara tus respuestas con otro equipo, si hay error, discute y corrige.

Con tu equipo, traza la gráfica de las siguientes familias de rectas.

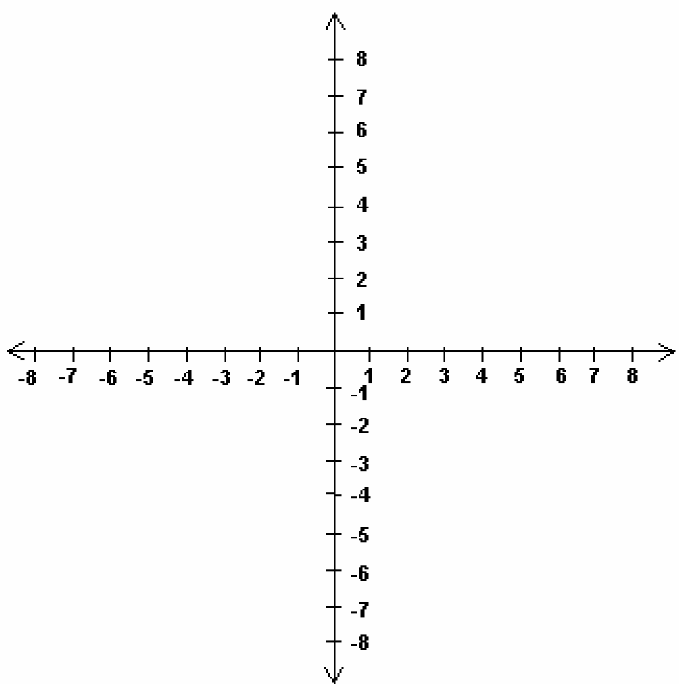
y = x + 3; y = x - 3; y = x + 2

Completa los valores correspondientes a **y**.

y = x + 3	
x	**y**
-4	
0	
+4	

y = x - 3	
x	**y**
-4	
0	
+4	

y = x + 2	
x	**x**
-4	
0	
+4	



a) ¿Cuál es el coeficiente de cada variable independiente? ______, ______, ______

b) Entonces, ¿cómo son las gráficas de estas tres ecuaciones? ________________

____

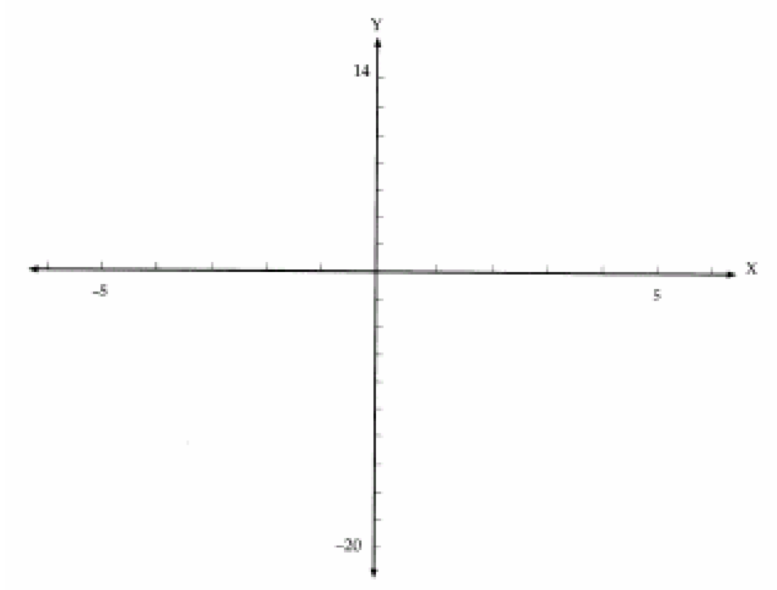
y = 2x - 4; y = 3x - 4; y = x - 4

Calcula los valores que le corresponden a **y**.

y = 2x – 4	
x	y
-5	
0	
+5	

y = 3x – 4	
x	y
-5	
0	
+5	

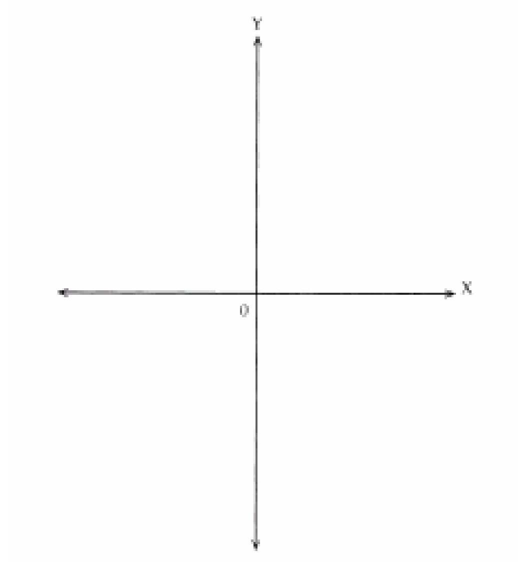
y = x – 4	
x	y
-5	
0	
+5	



a) ¿Cuál es el valor del término independiente? ___________________________
b) Entonces ¿qué tipo de comportamiento tiene esta familia de rectas? _________
____
Compara tus gráficas y respuestas con tus compañeros, si tienes dudas, pregunta al profesor.

Con tu compañero de bina, resuelve el ejercicio.
1. Traza las siguientes gráficas e identifica el comportamiento que tendrán sus rectas.

A
$$y = \frac{1}{2}x - 2$$
$$y = \frac{1}{2}x$$
$$y = \frac{1}{2}x + 2$$

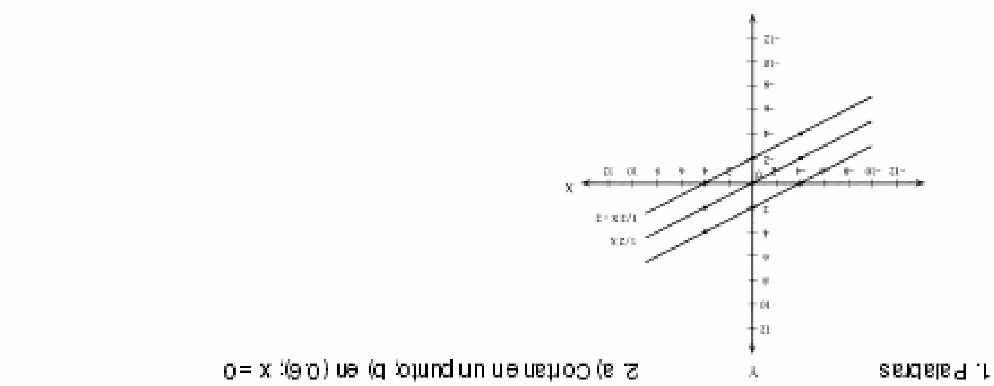


2. De la siguiente familia de ecuaciones, contesta lo siguiente:

$$B \left\{ \begin{array}{l} y = 4x + 6 \\ y = 2x + 6 \\ y = x + 6 \end{array} \right.$$

a) ¿Cómo serán sus gráficas? ____
b) ¿En qué punto se cortan las rectas? ________________ que es cuando x = ________________
Compara tus respuestas con otra bina, si no coinciden consulta la clave.

CLAVE



ANALISIS DE LAS GRAFICAS DE FUNCIONES LINEALES(10)

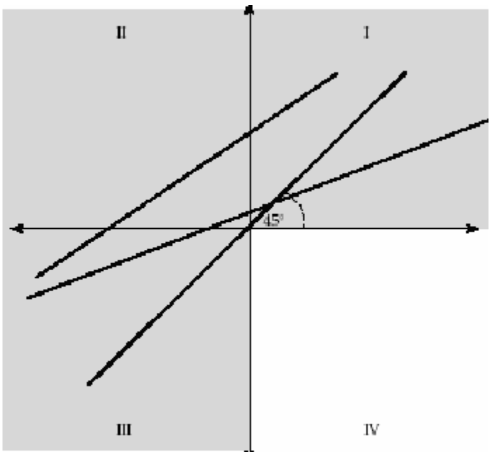
Dentro de las funciones lineales se presentan cuatro casos, ¿ya sabes cómo identificarlos?

Observa el programa de televisión correspondiente a GA 3.31 UNA FUNCION EN CUATRO ACTOS, ya que en él se muestran algunas características que presentan las funciones lineales y ello te permitirá identificarlas fácilmente.

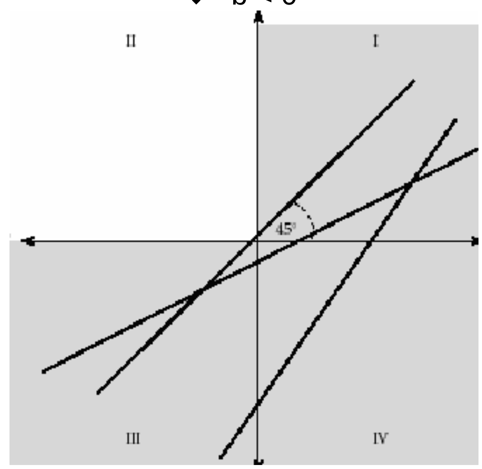
El análisis de las gráficas de las funciones lineales consiste en ver las características comunes que éstas presentan. A continuación se verán algunas de ellas.

Funciones de la forma y = mx + b, con m > 0

❖ b >0



❖ b < 0



Las características que presentan las funciones de la forma y = mx + b, cuando **m** es positiva son las siguientes:

a) Cuando la ordenada al origen **b** toma el valor de cero, y **m** el valor de uno, la recta que resulta de graficar la función forma un ángulo de 45º con respecto al eje de las abscisas.

b) Los ángulos que forman las rectas que resultan de graficar cualquiera de estas funciones, están comprendidos entre 0º y 90º con respecto al eje de las abscisas.

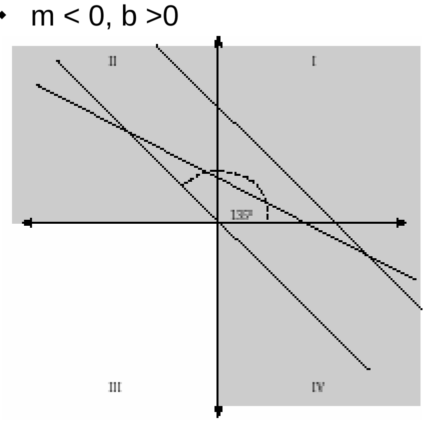
c) Cuando la ordenada al origen **b** es positiva, las rectas intersecan al eje vertical en donde las ordenadas son positivas.

d) Si la ordenada al origen **b** es negativa, las rectas intersecan al eje vertical donde las ordenadas son negativas.

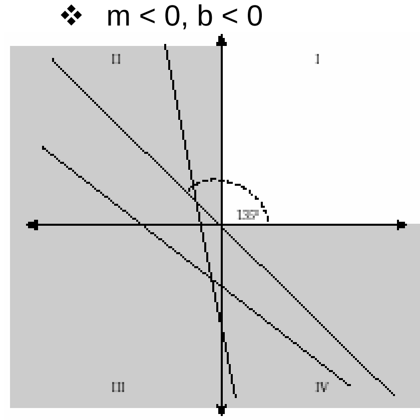
e) Cuando la ordenada al origen **b** es positiva, las gráficas de las funciones no aparecen en el IV cuadrante; mientras que cuando es negativa, las gráficas de las funciones no aparecen en el II cuadrante.

2. **Funciones de la forma y = mx + b, con m < 0**

❖ m < 0, b >0



❖ m < 0, b < 0



Las características que presentan las funciones de la forma y = mx + b, cuando **m** es negativa son las siguientes:

a) Cuando la ordenada al origen **b** toma el valor de cero, y **m** tiene un valor de –1, la recta que resulta de la gráfica forma un ángulo de 135° con respecto al eje de las abscisas.

b) Los ángulos que forman las rectas que resultan de graficar cualquiera de las funciones de la forma y = mx + b, con **m < 0** están comprendidos entre 90° y 180° con respecto al eje de las abscisas.

c) Si la ordenada al origen **b** es negativa, esto indica que las rectas intersecan al eje vertical en donde las ordenadas son negativas.

d) Cuando la ordenada al origen **b** es positiva, las gráficas de estas funciones no aparecen en el III cuadrante, mientras que cuando es negativa, las gráficas de las funciones no aparecen en el I cuadrante.

Con base en lo anterior se concluye que:

> Si en una función de la forma y = mx + b, **m** es positiva y **b** positiva o negativa, la gráfica de la función formará ángulos menores o iguales que 90° con respecto al eje de las abscisas.
> Si en una función de la forma y = mx + b, **m** es negativa y **b** positiva o negativa, la gráfica de la función formará ángulos comprendidos entre 90° y 180° con respecto al eje de las abscisas.
> El valor que tenga **b** indicará el punto del eje de las ordenadas en donde la recta lo intersecara

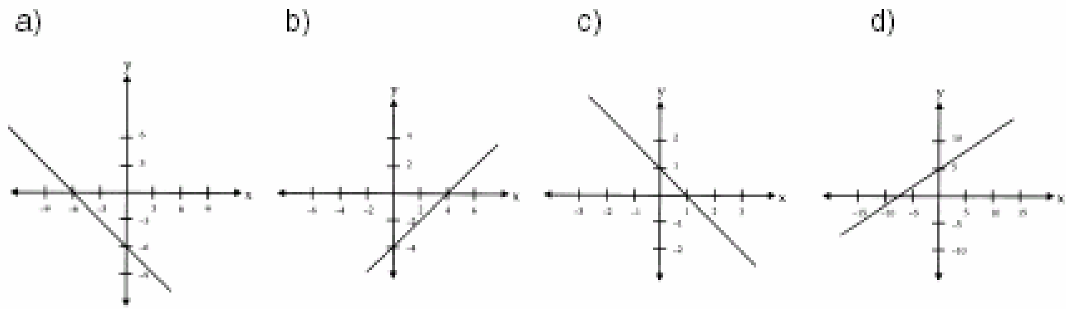
Ejercicios

RECUERDA En la función -x -2 = y, escribe qué valor tienen **m** y **b**.

Comente en parejas la lectura **Análisis de las gráficas de funciones lineales**, después comenta ante el grupo las dudas que hayas tenido.

Forma una trina con otros compañeros y contesta lo que se pide a continuación:
Dada la función y = 3x - 5.
a) ¿Qué valores tienen **m** y **b**? ____
b) ¿En que punto la gráfica de dicha función interseca al eje de las ordenadas? _______________
c) ¿Qué cuadrante no ocupará la gráfica? ________________________________
d) El ángulo que forma la gráfica de esta función, ¿entre qué valores estará comprendido? ____
e) Grafica en tu cuaderno la función dada y con ello comprueba tus respuestas.
Espera a que el profesor dé las respuestas, si tienes errores, corrígelos.

Sigue con tus compañeros y contesta las siguientes cuestiones:
1. Dadas las gráficas de cuatro funciones, escribe debajo de cada una de ellas la forma de la función que corresponda.



______________ ______________ ______________ ______________

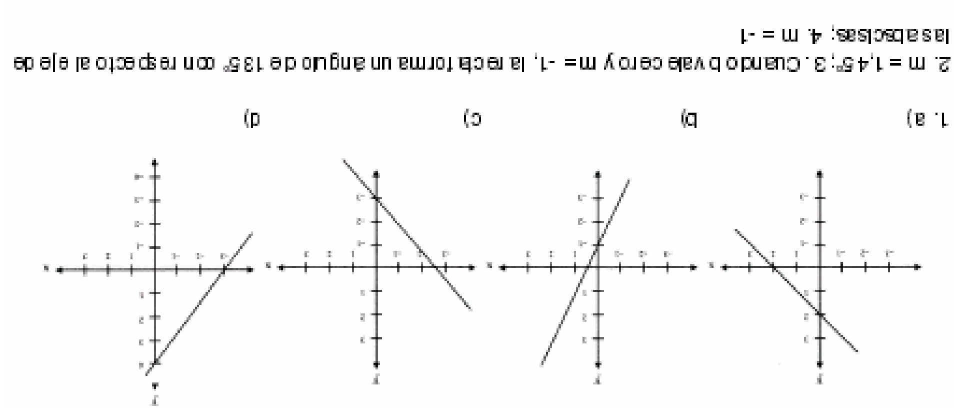
2. Obtén el valor de la ordenada al origen de cada función.
a) __________ b) __________ c) __________ d) __________

3. De acuerdo con la función correspondiente, sombrea los cuadrantes que ocuparán las rectas que se obtengan de cada una (sobre las cuatro gráficas que ya se tienen).
Compara tus respuestas con las otras trinas, en caso de haber resultados diferentes, espera a que el profesor dé las respuestas correctas.

En forma individual, contesta los siguientes ejercicios:
1. Traza en tu cuaderno una gráfica para cada una de las funciones siguientes, la única condición es que la recta pase por la ordenada al origen que se indica.
a) y = -mx + 2 b) y = mx - 1 c) y = -mx - 3 d) y = mx + 4

2. Cuando se tiene la función y = x + b, en donde b = 0, ¿cuál es el valor de **m**?____________
¿Qué ángulo forma la recta que se obtiene con respecto al eje de las abscisas? ____________
3. ¿Qué característica tienen en común las funciones lineales de la forma y = -mx + b?
____
4. En la función y = -x, ¿qué valor tiene **m**? ______________________________
Compara tus respuestas con las de otro compañero; en caso de existir diferencias, consulta la clave.

CLAVE



FUNCIONES DE LAS FORMAS y = mx + b, IMÁGENES, PREIMÁGENES, PENDIENTE, DOMINIO Y OTROS(4)

(Repaso y extensión de sesiones anteriores)

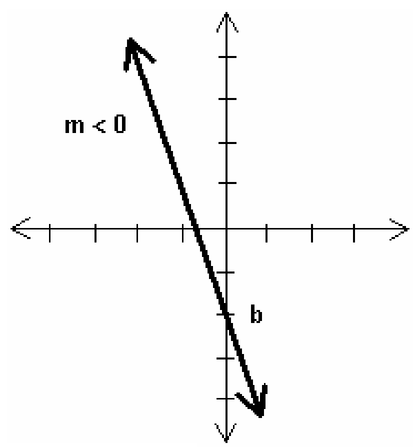
Toda **función lineal** tiene dominio máximo IR, el codominio es igual al rango o ámbito, IR. Su gráfica es siempre una línea recta.

Las imágenes se obtienen sustituyendo un determinado valor para la variable independiente y realizando las operaciones que indique la función lineal. Las preimágenes se calculan resolviendo una ecuación de primer grado con una incógnita.

La inclinación o pendiente de la gráfica depende del valor m en la ecuación de la recta $y = mx + b$.

Si m es positiva, $m \rangle 0$ entonces

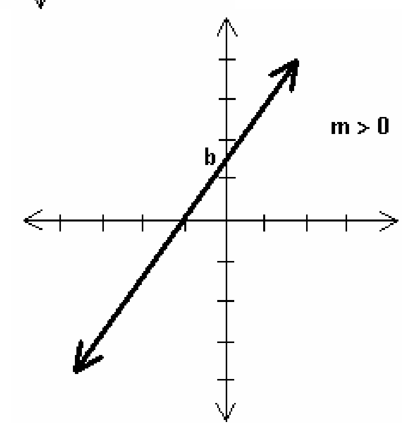
- la gráfica se inclina a la derecha,
- a mayor valor de preimagen, mayor valor de la imagen (es una función estrictamente creciente)



Si m es negativa, $m \langle 0$ entonces

- la inclinación es hacia la izquierda,
- a mayor valor de preimagen, menor el valor de la imagen (es una función estrictamente decreciente)

El valor *b* en la ecuación de una función lineal se puede interpretar como que la gráfica interseca al eje y en el par ordenado **(0; *b*)**.



En relación con el eje x, para conocer dónde corta la línea recta se debe resolver la ecuación $mx + b = 0$

Ejemplo 1

$h(x) = 3 - x$

- La gráfica es una línea recta inclinada a la izquierda pues m (coeficiente de x) es - 1
- Se puede observar que "a mayor x menor y"

Se toman valores cada vez mayores

x	-5	-3	0	2	3	5	8	10
y	18	6	3	1	0	-2	-5	-7

Se obtienen valores cada vez menores

Es decir que se trata de una función decreciente.

- La gráfica corta al eje y en $(0;\ 3)$
- El corte con el eje x.

$3 - x = 0$

$3 = x$

es decir, la gráfica corta en $(3; 0)$ al eje de las abscisas.

- Dominio máximo IR, codominio IR, contradominio o rango IR
- Las imágenes de $x = -2;$ $x = 8;$ $x = \frac{2}{5}$

$y = 3 - x$ $y = 3 - -2$ $y = 3 + 2$ $y = 5$ Imagen de –2 bajo la función $g(x) = 3 - x$ es cinco	$y = 3 - x$ $y = 3 - 8$ $y = -5$ La imagen de 8 bajo la función $g(x) = 3 - x$ es menos cinco	$y = 3 - x$ $y = 3 - \frac{2}{5}$ $y = \frac{15 - 2}{5}$ $y = \frac{13}{5}$ La imagen de $\frac{2}{5}$ es trece quintos

❖ ¿Cuáles son las preimágenes respectivas a $-2;\ \frac{5}{7};\ 3{,}5$ bajo la función?

Preimagen de -2

$$y = 3 - x$$
$$-2 = 3 - x$$
$$-2 - 3 = -x$$
$$-5 = -x$$
$$5 = x$$

Preimagen de –2 bajo la función $g(x) = 3 - x$ es cinco

Preimagen de cinco sétimos

$$y = 3 - x$$
$$\frac{5}{7} = 3 - x$$
$$\frac{5}{7} - 3 = -x$$
$$\frac{5-21}{7} = -x$$
$$\frac{-16}{7} = -x$$
$$\frac{16}{7} = x$$

$\frac{16}{7}$ es la preimagen de $\frac{5}{7}$ bajo la función $g(x) = 3 - x$

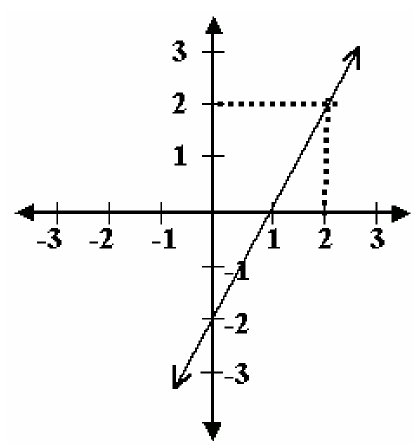
Preimagen de 3,5

$$y = 3 - x$$
$$3{,}5 = 3 - x$$
$$3{,}5 - 3 = -x$$
$$0{,}5 = -x$$
$$-0{,}5 = -x$$
$$x = 0{,}5$$

La preimagen de 3,5 es cinco décimos, es decir un medio

Ejemplo 2

La función lineal graficada a la derecha con dominio IR y codominio IR.



❖ La gráfica se inclina a la derecha, por lo tanto, su pendiente es positiva.

❖ Es estrictamente creciente.

❖ Corta al eje “y” en –2.

❖ El corte con el eje “x” es 1.

❖ El ámbito o contradominio es IR.

❖ Cálculo de imágenes

En la gráfica se observan tres pares ordenados: (2; 2), (0; -2) y (1; 0). Entonces se puede asegurar que la imagen de

2 es 2
0 es -2
1 es 0

❖ Preimágenes

De acuerdo con los pares conocidos se puede afirmar que :

La preimagen de 0 es 1.

La preimagen de 2 es 2.

La preimagen de -2 es 0.

Ejercicios

Comenta la lectura anterior en una bina.

Forma una pareja o trío y resuelve:

a) Toda función de la forma $y = mx + b;\quad \text{con } m \neq 0$ tiene por gráfica __________________

b) ¿Cómo se sabe, viendo la gráfica, si una función lineal es creciente o decreciente?

____

c) ¿Hacia dónde se inclina la gráfica de una función lineal con pendiente negativa?
____

d) Si una gráfica de función lineal se inclina hacia la derecha, entonces ¿cómo es el valor *m* de su ecuación? ___________________________

d) ¿Cómo se “refleja” en la gráfica el valor b de una ecuación del tipo $y = mx + b;\quad \text{con } m \neq 0$?
____

Compara tus respuestas con las de otro equipo, si no coinciden, consulta a tu maestra(o).

Forma una bina, observa la gráfica y completa lo que se pide.

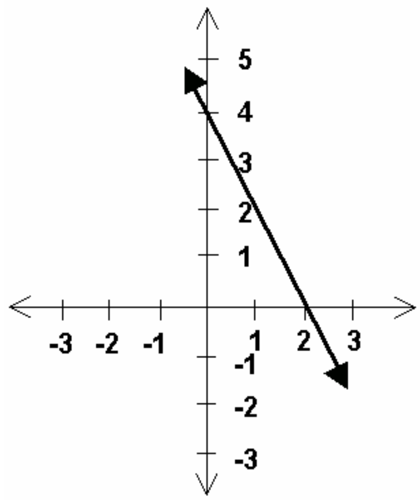
¿A qué tipo de función corresponde esta gráfica? _________

El dominio máximo es _______________

De acuerdo con la gráfica, ¿cuál es el valor de b? _________

Según la gráfica, la función es:
( ) creciente ( ) decreciente

De acuerdo con la gráfica, en la ecuación $y = mx + b$, m cumple:
( ) $m > 0$ ( ) $m < 0$



Compara tus respuesta con las de otra bina y corrige si es necesario.

Individualmente resuelva cada caso. Analice cuidadosamente y elija la opción más acertada.

Caso 1

Condiciones	**Corresponde a una función lineal cuya ecuación satisface…**
La línea recta pasa por (0; 5) y es inclinada a la izquierda.	A. ( ) $y = 5x + b$ con $b < 0$ B. ( ) $y = mx + 5$ con $m > 0$ C. ( ) $y = 5x + b$ con $b > 0$ D. ( ) $y = mx + 5$ con $m < 0$

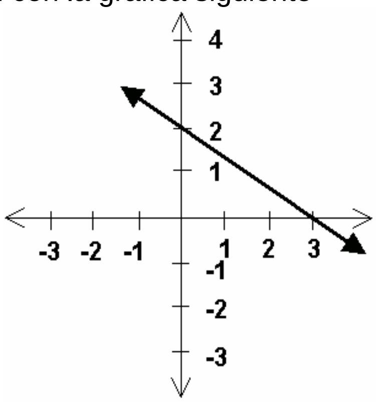
Caso 2

<table>
<tr><th>Condiciones</th><th>Satisface</th></tr>
<tr><td>Función lineal con tabla de valores
<table>
<tr><td>x</td><td>-8</td><td>0</td><td>1</td><td>6</td></tr>
<tr><td>y</td><td>21</td><td>5</td><td>3</td><td>-7</td></tr>
</table></td><td>A. ( ) tiene pendiente positiva y es creciente
B. ( ) es decreciente, pendiente positiva
C. ( ) tiene pendiente negativa y es creciente
D. ( ) es decreciente, tiene pendiente negativa</td></tr>
</table>

Caso 3

Condiciones

Función con la gráfica siguiente



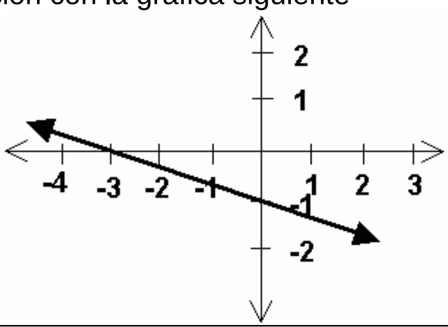
Entonces

A. ( ) Dominio IR, creciente, b = 2
B. ( ) Codominio IR, decreciente, b = 3
C. ( ) Ámbito IR, decreciente, b = 2
D. ( ) Dominio IR, creciente, b = 3

Caso 4

Condiciones

Función con la gráfica siguiente



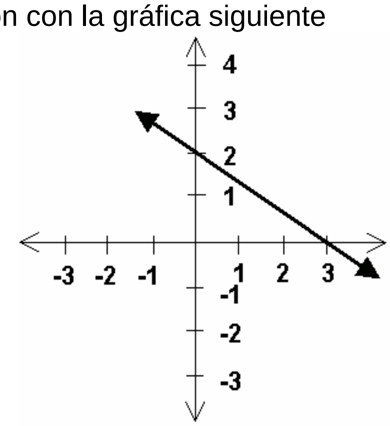
Entonces

A. ( ) Preimagen de 0 es -1
B. ( ) Imagen de 1 es -1
C. ( ) Preimagen de -3 es 0
D. ( ) Imagen de 0 es -1

Caso 5

Condiciones

Función con la gráfica siguiente



Entonces

A. ( ) Preimagen de 0 es 3
B. ( ) Imagen de 2 es 0
C. ( ) Preimagen de 0 es 2
D. ( ) Imagen de 0 es 0

Compara tu ejercicio con el de otro compañero; en caso necesario, consulta la clave.

CLAVE

Caso 1 D Caso 2 D Caso 3 C

Caso 4 D Caso 5 A

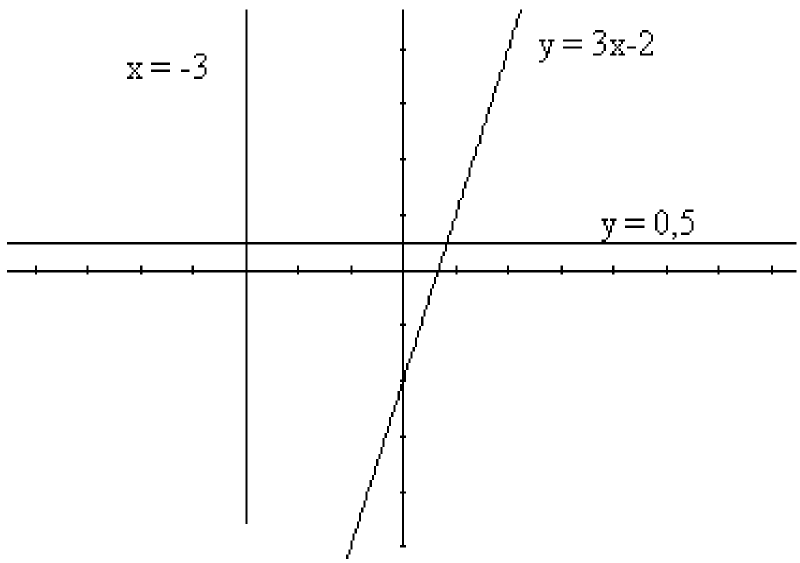
RECTAS Y ECUACIONES, ¿SON FUNCIONES?(4)

En el plano cartesiano podemos tener diversas líneas rectas. Las gráficas de funciones lineales son todas líneas rectas. Pero existen unas líneas rectas que NO son funciones. Observa la presentación en power point “Son o no funciones”, coméntala en parejas y luego continua la lectura.

En las sesiones anteriores se vio que las ecuaciones de la forma $y = mx + b$ (con m y b números reales) tienen una representación gráfica lineal.

En esta ocasión, se verán rectas en el plano que son funciones lineales, rectas que corresponden a funciones constantes, rectas que ni siquiera son funciones y el cálculo de sus respectivas ecuaciones.

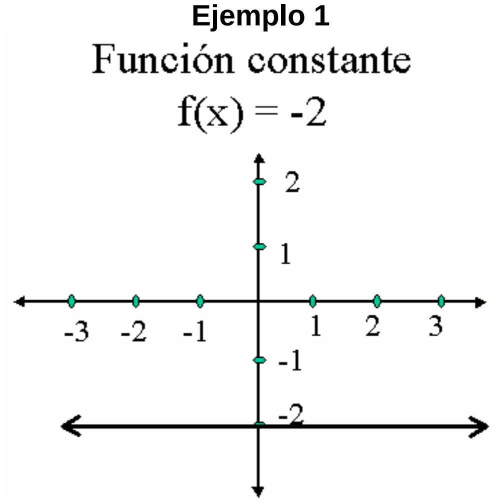
A la derecha se ilustran los tres posibles casos.



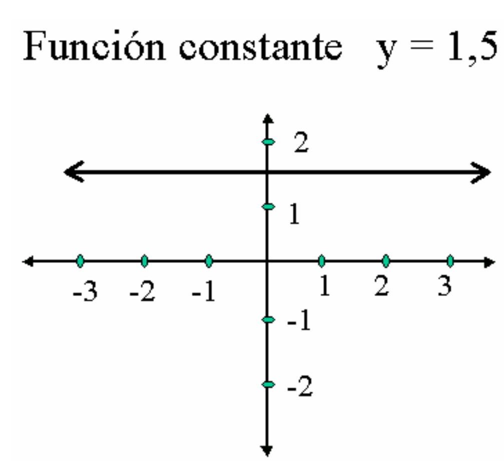
La ecuación de cada caso difiere. Las líneas rectas horizontales corresponden a funciones constantes, las rectas verticales NO corresponden a función alguna.

La ecuación de las <u>funciones constantes</u> es del tipo $f(x) = a$, donde a es un número real. También se utiliza la forma “ $y = a$ ”.

Ejemplo 1



Ejemplo 2



Toda función constante tiene como gráfica una línea recta horizontal, es paralela al eje x y por tanto, perpendicular al eje *y*. Todas las gráficas de funciones constantes cortan al eje y.

Si se construye una tabla de valores para una función constante ocurre que todos los "y" son iguales.

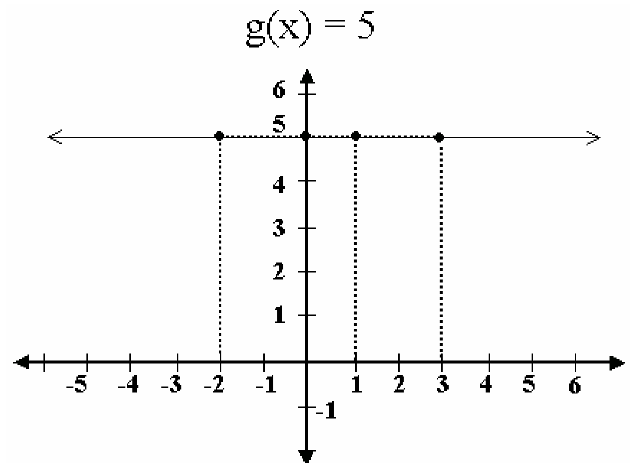
Ejemplo 3

Función $g(x)=5$

x	-2	0	1	3
$g(x)$	5	5	5	5

Se representan los pares ordenados obtenidos $(-2;\ 5)$, $(0;\ 5)$, $(1;\ 5)$, $(3;\ 5)$ y se traza la línea recta correspondiente.

Corta al eje y en **(0; 5)**.



El dominio máximo de <u>toda función constante</u> es el conjunto de números reales, IR.

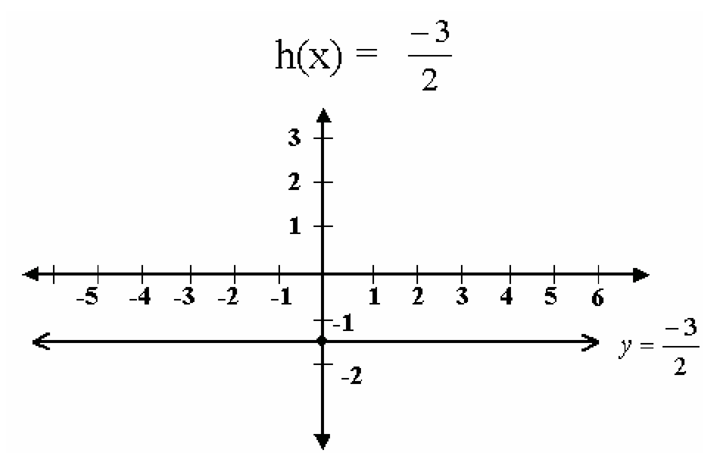
El codominio puede definirse como IR. El ámbito o rango únicamente tiene un elemento.

Ejemplo 4

$h(x)=\frac{-3}{2}$

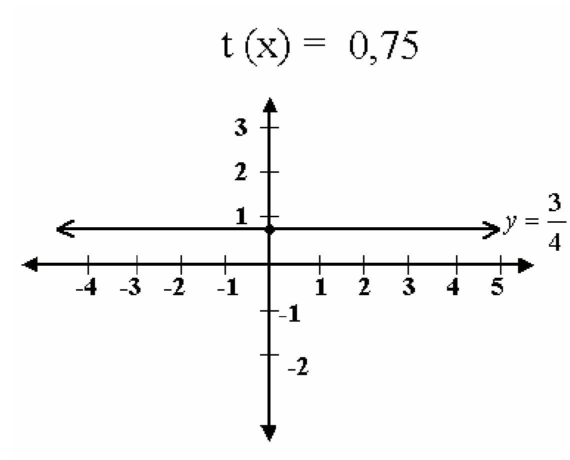
Dominio máximo IR
Codominio IR
Ámbito $\left\{\frac{-3}{2}\right\}$ o bien $\{-1{,}5\}$

Corta al eje y en **(0; -1,5)**



Ejemplo 5

La función constante que pasa por el punto $(-3;\ 0{,}75)$



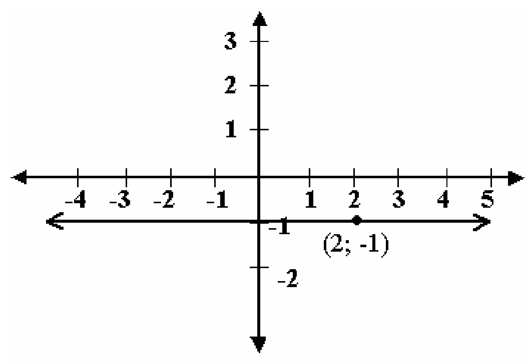
Dominio máximo IR
Codominio IR
Ámbito $\left\{\frac{3}{4}\right\}$

Corta al eje y en (0; 0,75)

<u>Observación</u>: el número setenta y cinco centésimos se puede expresar como fracción o con notación decimal.

Ejemplo 6

Determinar la ecuación de la línea recta paralela al eje x y que pasa por el punto $(2;\ -1)$



ECUACIÓN

$y = -1$

o bien,

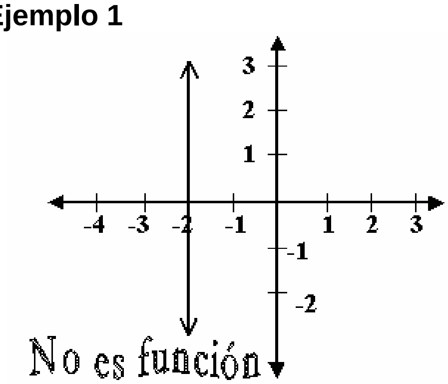
$f(x) = -1$

Dominio máximo IR
Codominio IR
Ámbito $\{-1\}$
Corta al eje y en el punto (0; -1)

Verticales, rectas pero no funciones.

Las líneas rectas en el plano cartesiano que son verticales tienen una forma de expresarse como ecuación, se puede listar pares ordenados que pertenecen a ellas en una tabla de valores, pero **NO** son funciones. Todas ellas son paralelas al eje y. Su ecuación es del tipo $x = a$ donde a es un número real. Una tabla de valores para estas líneas rectas tiene la fila de las abscisas con el mismo número.

Ejemplo 1



ECUACIÓN

$x = -2$

TABLA DE VALORES

x	-2	-2	-2	-2
y	-4	-1	0	3

Es una línea recta vertical. Por lo tanto, es paralela al eje de las ordenadas y perpendicular al eje x.

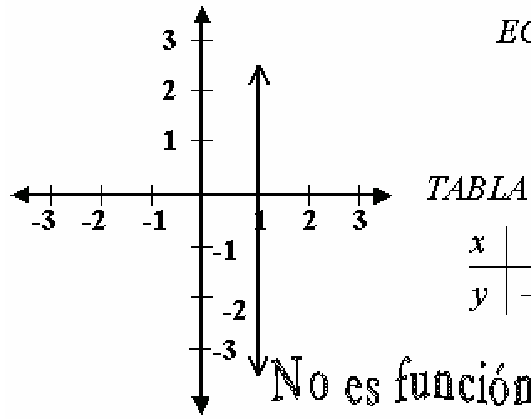
Existe un conjunto de salida y un conjunto de llegada, pero **<u>no</u>** se establece una relación que sea función.

Conjunto de salida $\{-2\}$
Conjunto de llegada IR

La recta $x = -2$ corta al eje x en el punto $(-2;\ 0)$

Ejemplo 2

Línea recta vertical que pasa por $(1;\ -3)$



ECUACIÓN

$x = 1$

TABLA DE VALORES

x	1	1	1	1
y	-3	0	1	2

Esta recta es paralela al eje *y* y es perpendicular al eje *x* en el punto (**1; 0**)

Ejercicios

¿Cuántas veces entre personas de una misma región, origen o forma de vida, muestran características totalmente distintas?

¿Observó la presentación en power point para esta sesión?

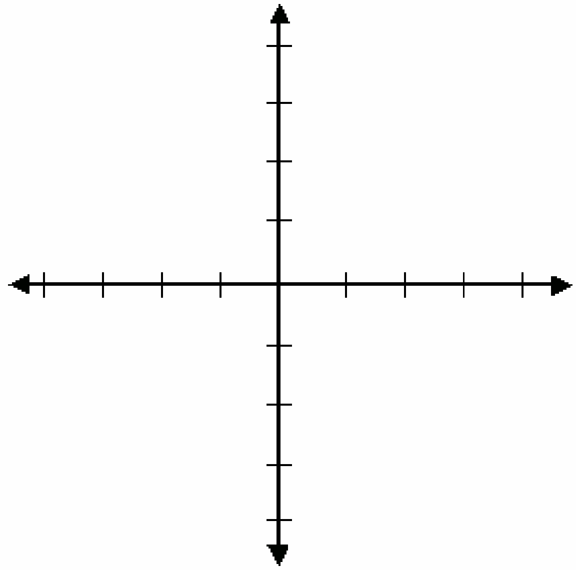
RECUERDA Contesta brevemente las preguntas:
a) ¿Cuántos tipos de rectas se pueden trazar en el plano? ___________________
b) ¿En relación con el eje de las x cómo son las verticales ? _____________________
c) ¿Cómo son las rectas paralelas al eje de las **y**? _______________________________
d) ¿Cuál es la condición de las funciones constantes en relación con *"m"*? ___________
Lee en voz alta tus respuestas y corrige si es necesario.

Anota en tu cuaderno lo que consideres más importante de la lectura.

Continúa en bina y contesta las siguientes preguntas:
a) ¿Cómo se le llama a una función cuya recta es paralela al eje x? _______________
b) Para la ecuación y = mx + b, con $m \neq 0$ ¿cómo es su recta? ___________________
c) ¿Cuál es la forma de la ecuación de rectas verticales? ________________________
d) ¿Cómo son las rectas con ecuaciones de la forma $x = a,\ a \text{ un número real}$? ________
e) De las rectas estudiadas, ¿cuáles no corresponden a una función ? ________________
Compara tus respuestas con otra bina. Si hay diferencias, discute y obtén una conclusión.

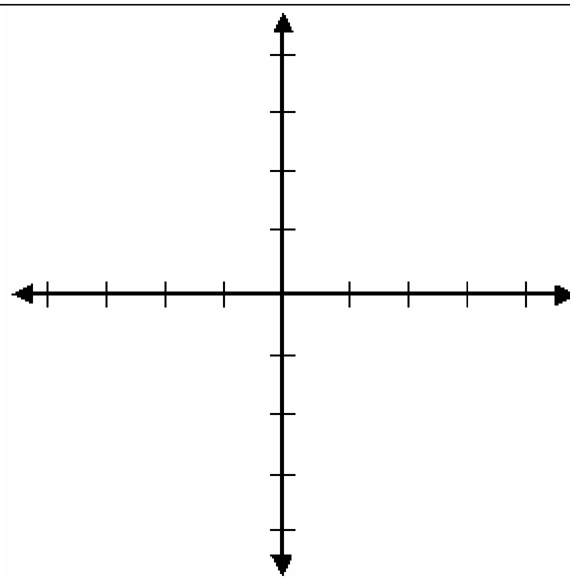
Forma una trina y para caso ilustra la situación en un plano cartesiano, indica la clase de recta y concluye si se puede relacionar con una función y dé tipo.

A) Un caracol se desplaza en línea recta desde el punto $(-2;3)$ hasta el punto (-2; 0)



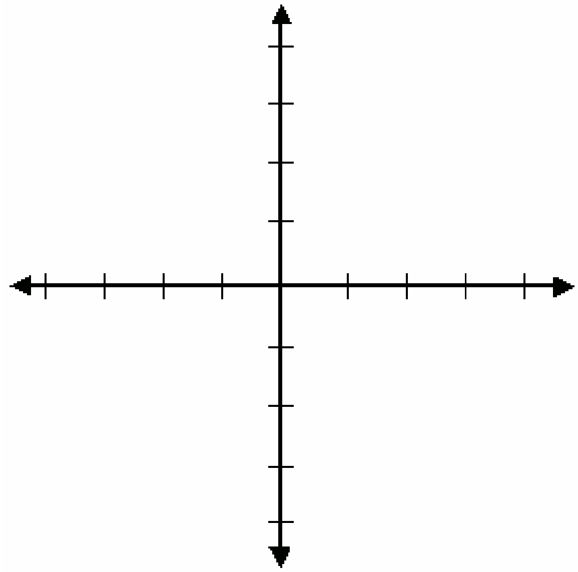
B) En un estudio se analizó la temperatura de una sustancia durante 45 segundos. Los datos son los siguientes

Tiempo en segundos	5	10	15	45
Temperatura en grados Celsius	20	20	20	20



C) En un aparato sometido a una fuerza, una de sus unidades gira de manera que: “cada tres segundos sus rotaciones se incrementaban en dos”.

Suponga que en el primer segundo da cinco revoluciones.



Compara tu ejercicio con el de otra trina y más que determinar si las respuestas son “correctas”, lleguen a profundizar en la teoría estudiada y procuren comprender aquellas posiciones distintas a las propias.

Individualmente, determine la ecuación de las siguientes rectas.

1) Pasa por (2; 5) y es perpendicular al eje y.
2) Es paralela al eje *y* y pasa por (-2; -1).
3) Pasa por (8; 2) y (8; -1)
4) Es perpendicular al eje x en –5.
5) Corta al eje y en 4 y es paralela al eje x.

CLAVE: 1) $y = 5$ 2) $x = -2$ 3) $x = 8$ 4) $x = -5$ 5) $y = 4$

¿CUÁL ES TU ECUACIÓN?(6)

Cuando las líneas rectas de un plano cartesiano son inclinadas (es decir, no son verticales ni horizontales) se pueden expresar mediante una ecuación en la cual, como ya se ha mencionado, se tiene a la pendiente o inclinación (m) y la intersección con el eje *y* (b)

En esta sesión se analizará cómo determinar la ecuación de una línea recta a partir de alguna información concreta.

<u>Se sabe cuál es la pendiente y un punto en la gráfica</u>

Ejemplo

Determinar la ecuación de la línea recta que pasa por $(3; -2)$ y cuya inclinación es $m = 8$.

Solución
La ecuación es de la forma $y = mx + b$

Un *x* y un *y* son: $x = 3$ y $y = -2$ $\rightarrow$ Información del par ordenado dado.
Utilizando la pendiente y esos valores concretos, la ecuación se transforma en

$$y = mx + b$$
$$-2 = 8 \cdot 3 + b$$

cuando se despeja la b de esta ecuación se obtiene

$$-2 = 24 + b$$
$$-2 - 24 = b$$
$$-26 = b$$

Por lo tanto, la ecuación es $y = 8x - 26$

Cuando se conoce un par ordenado de la gráfica y la pendiente, se sustituyen los valores y se despeja el valor de la intersección, b.

<u>Conociendo la intersección y un par ordenado de la gráfica</u>

Ejemplo
Determinar la ecuación de la línea recta que pasa por $(3; -2)$ y cuya intersección es $b = 4$.

Solución
La ecuación tiene la forma $y = mx + 4$

Se sustituyen los valores *x* y *y* del par ordenado y se despeja *m*.

$$-2 = m \cdot 3 + 4$$
$$-2 - 4 = 3m$$
$$-6 = 3m$$

$\rightarrow$ La ecuación es $y = -2x + 4$

$$\frac{-6}{3} = m$$
$$-2 = m$$

<u>Se conocen dos pares ordenados de la gráfica</u>

Cuando se conocen dos pares ordenados en la gráfica, se calcula la pendiente de la siguiente forma:

(a) Se restan las ordenadas de los pares ordenados
(b) Se restan las abscisas de los pares ordenados, pero con el cuidado de hacerlo en el orden que se hizo la resta anterior
(c) Se divide lo obtenido en el paso (a) entre lo obtenido en el paso (b)

Posteriormente, se procede a utilizar un par ordenado y la pendiente para calcular el valor de *b*.

Ejemplos

- La recta pasa por (-2; 3) y (1; 4), ¿cuál es la ecuación?

Determinación de m

(a) Se restan las ordenadas: $3 - 4 = -1$
(b) Se restan las abscisas: $-2 - 1 = -3$
(c) Se obtiene la pendiente como la fracción $\frac{-1}{-3} = \frac{1}{3}$

Es importante observar que si, para el paso (a) se toma primero la ordenada del primer par ordenado, entonces en el paso (b) se debe tomar primero la abscisa del primer par.

Cálculo de b

$$y = mx + b$$

$$4 = \frac{1}{3} \cdot 1 + b \quad \text{Se usó el par (1; 4) y la pendiente hallada.}$$

$$4 - \frac{1}{3} = b$$

$$\frac{11}{3} = \text{b} \quad \text{Se usó resta de fracciones.}$$

Ecuación

$$y = \frac{1}{3}x + \frac{11}{3}$$

- Ecuación de la línea recta que corta al eje *x* en –3 y al eje *y* en 7.

En este caso se están mencionando dos pares ordenados

$$\begin{cases} (-3;\ 0) & \text{corte con eje de abscisas} \\ & y \\ (0;\ 7) & \text{corte con eje de ordenadas} \end{cases}$$

Cálculo de pendiente

(a) Se restan las ordenadas: $7 - 0 = 7$
(b) Se restan las abscisas: $0 - -3 = 3$
(c) Se obtiene la pendiente como la fracción $\frac{7}{3} = 2\frac{1}{3}$

Intersección

En este caso, fue dado en el enunciado b = 7

Ecuación

Cualquiera de las siguientes

$y = \frac{7}{3}x + 7$ $\qquad$ $y = 2\frac{1}{3}x + 7$ $\qquad$ $y = 2,\overline{3}x + 7$

♦ Los puntos $\left(\frac{-1}{2};\ \frac{3}{4}\right)$ y $\left(\frac{-3}{2};\ \frac{1}{4}\right)$ son puntos en la línea recta, ¿cuál es su ecuación?

Determinación de m

(a) Se restan las ordenadas: $\frac{1}{4} - \frac{3}{4} = \frac{1-3}{4} = \frac{-2}{4} = \frac{-1}{2}$

(b) Se restan las abscisas: $\frac{-3}{2} - \frac{-1}{2} = \frac{-3--1}{2} = \frac{-3+1}{2} = \frac{-2}{2} = -1$

Obsérvese que como en el primer paso se inició la resta con el 2º par ordenado, entonces en este paso también se inicia con ese par ordenado.

(c) Se obtiene la pendiente como la fracción $\frac{\frac{-1}{2}}{-1} = \frac{-1}{2 \cdot -1} = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}$

Cálculo de b

$$y = mx + b$$

$\frac{3}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{-1}{2} + b$ Se usó el par $\left(\frac{-1}{2};\ \frac{3}{4}\right)$ y la pendiente hallada.

$$\frac{3}{4} = \frac{-1}{4} + b$$

$$\frac{3}{4} + \frac{1}{4} = \mathrm{b}$$

$\frac{4}{4} = \mathrm{b}$ suma de fracciones

$$1 = \mathrm{b}$$

Ecuación

$$y = \frac{1}{2}x + 1$$

Ejercicios

¿Te han hablado de lo importante que puede ser una “receta”? A veces las fórmulas nos resultan como una receta de cocina, nos da las pautas para lograr una meta.

Comente, en parejas, la forma de determinar la pendiente de una línea recta cuando se conocen dos de sus pares ordenados.

En equipo, contesta lo que se pide a continuación.

1. Si en una gráfica se brinda el corte con el eje y, ¿cuál constante de la ecuación $y = mx + b$ se conoce directamente? ____
2. Si se conoce un punto de una recta y su pendiente, ¿cuál es el procedimiento para hallar la ecuación $y = mx + b$? ____

Compara tus respuestas con otro equipo, si hay error, discute y corrige.

Con tu equipo, determina la pendiente de las siguientes rectas.

1) Pasa por (1; 0) y (-2; 1)
2) Corta al eje y en –5 y pasa por (2; 3)
3) Tiene la siguiente tabla de valores:

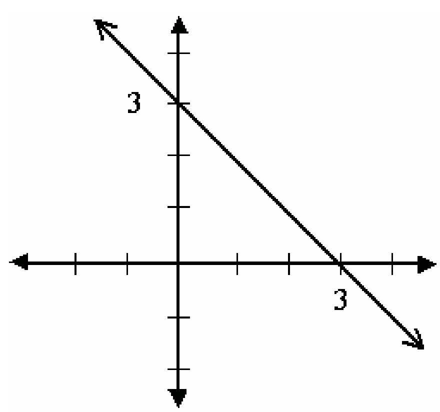
x	$\frac{-1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	1
$g(x)$	-3	-2	-1	1

4) Pasa por (-3; -1) y (2; -5)
5) Corta al eje x en –8 y pasa por (0; 1)

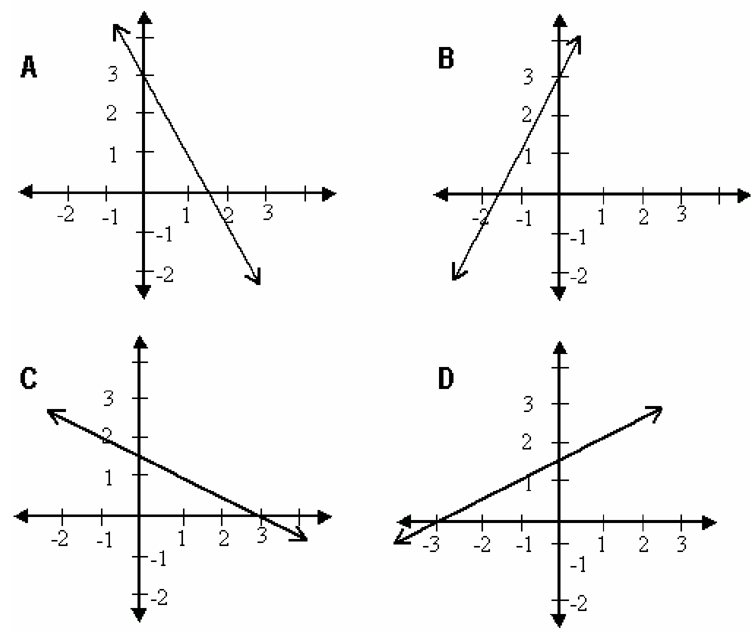
Individualmente, elija la opción que responde correctamente cada ítem.

1) La ecuación de la recta ilustrada a la derecha

A. ( ) $y = 3$
B. ( ) $y = x + 3$
C. ( ) $y = -x + 3$
D. ( ) $y = -x - 3$



2) La gráfica de la función lineal con ecuación $y = -2x + 3$

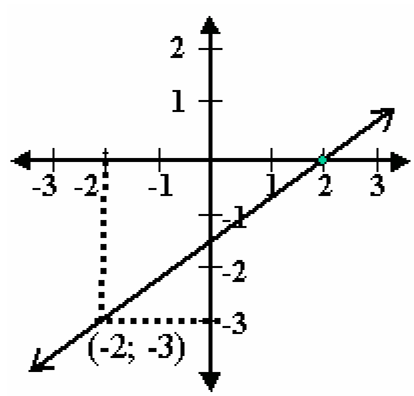


3) La intersección con eje y de la recta que pasa por (-1; -3) y (-2; -5)
A. ( ) 2
B. ( ) 1
C. ( ) 0
D. ( ) -1

4) La pendiente de la recta que pasa por $\left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right)$ y $\left(\frac{-2}{3}; \frac{1}{3}\right)$

A. ( ) 3
B. ( ) $\frac{1}{3}$
C. ( ) $\frac{-1}{3}$
D. ( ) -3

5) La ecuación de la línea recta de la derecha



A. ( ) $y = \frac{3}{4}x + 2$
B. ( ) $y = \frac{3}{4}x - \frac{3}{2}$
C. ( ) $y = \frac{3}{4}x + \frac{6}{4}$
D. ( ) $y = \frac{-3}{4}x - 3$

CLAVE: 1) C 2) A 3) D 4) B 5) B

IGUAL DE INCLINADAS(6)

Después de ver la presentación en power point relativa al tema, comente en parejas la información recibida, posteriormente lean lo siguiente.

En los dibujos y esquemas así como en muchas construcciones de aparatos, arquitectónicas y muebles, el paralelismo cumple un papel muy importante. El tema del paralelismo ha planteado interesantes cuestiones a la geometría euclídea y de ahí se han generado nuevas geometrías.

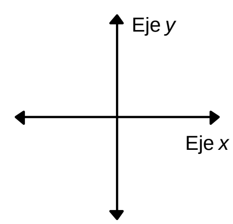
En relación con la función lineal, se nos presenta una característica en la graficación y la ecuación de las rectas paralelas.

Cuando, en el plano, dos o más líneas rectas tienen la misma inclinación son líneas paralelas. Las rectas paralelas entre sí NUNCA se intersecan. Sin embargo, si se considera que una línea recta es paralela a sí misma, entonces esta es la excepción y se podría afirmar que se "cortan en todos sus puntos".

Realice la lectura y copie en su cuaderno aquellas partes en las cuales usted debe realizar alguna actividad.

1) Considere las ecuaciones: $y = x + 3$; $y = x - 2$; $y = x + 1$.

a. Grafique las líneas rectas en un mismo plano cartesiano.

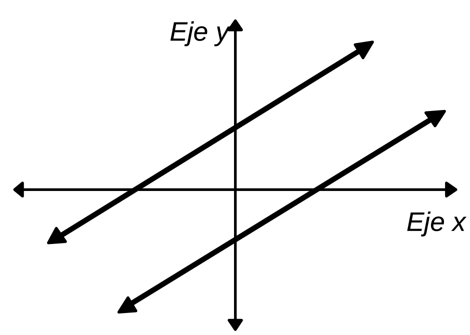


Plano cartesiano

b. ¿Cuál característica tienen, en común, estas gráficas?
____

c. ¿Cuál característica tienen en común las ecuaciones $y= x + 3$; $y= x - 2$; $y = x +1$?
____

2) Observe las líneas rectas de la derecha.

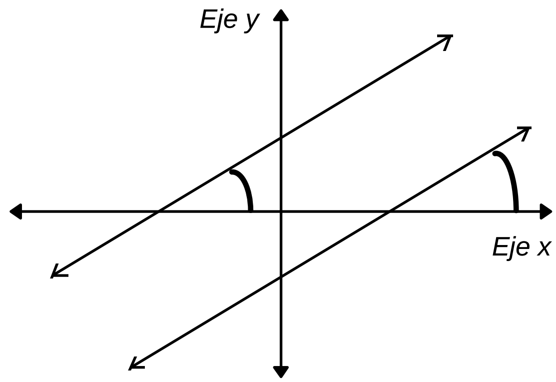


a. Sabemos que las pendientes respectivas a estas líneas rectas son positivas, o sea, son mayores que cero. Ahora bien al observar las gráficas, ¿cuál relación hay entre las pendientes de las líneas rectas? ____

b. Recuerde que una forma de estudiar la inclinación de las líneas rectas es a través del ángulo **agudo** formado entre el eje *x* y la línea recta.

Mida con un transportador dichos ángulos en cada línea recta.

¿Existe alguna relación entre los datos obtenidos? ¿Cuál? ___________

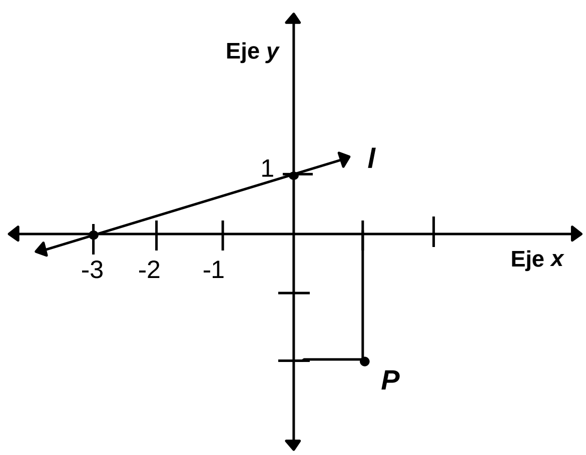


c. ¿Qué tipo de líneas rectas son las dibujadas? __________________________

> Cuando dos o más líneas rectas son paralelas, sus pendientes o inclinaciones son iguales.
>
> Por lo tanto, en las ecuaciones de rectas paralelas, el valor de " **m**" es el mismo para todas.

Determinación de la ecuación de una línea recta paralela a otra

1.) Con ayuda de instrumentos geométricos, trace una línea recta paralela a ***l***, que contenga al par ordenado señalado como ***P***.



La nueva línea recta debe tener la misma inclinación que la línea recta ***l***.

l pasa por los puntos (⁻ 3; 0) y (0; 1), tal como se observa en la gráfica, por lo tanto, la pendiente es igual a:

$$\frac{0-1}{{}^{-}3-0}=\frac{{}^{-}1}{{}^{-}3}=\frac{1}{3}$$

Esta es la pendiente de las dos líneas rectas graficadas.

En la ecuación, el paralelismo se evidencia en el coeficiente de la incógnita *x*. Es el mismo coeficiente en las ecuaciones de las líneas rectas.

La nueva ecuación inicia así: $y=\frac{1}{3}x$ ...

Complete el resto de la ecuación.

Como la **línea recta paralela** a "*l* " pasa por el punto ***P*** (1 ; ⁻ 2), se puede calcular el valor de la intersección con el eje *y*.

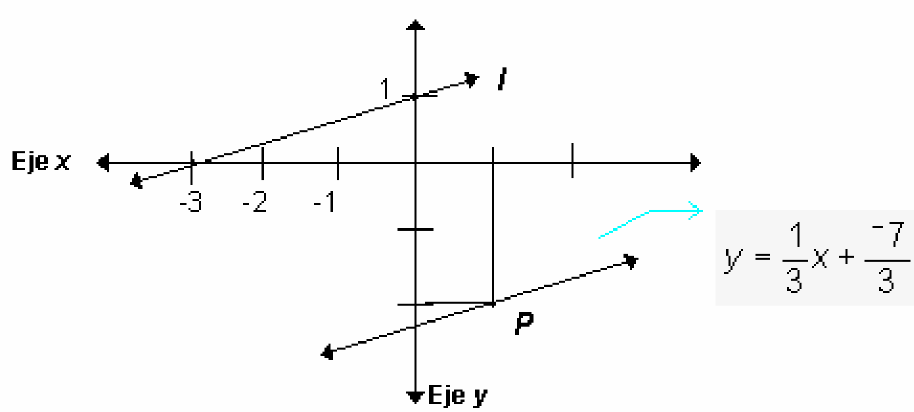
$$b={}^{-}2-\frac{1}{3}\bullet 1$$

$$b={}^{-}2-\frac{1}{3}$$

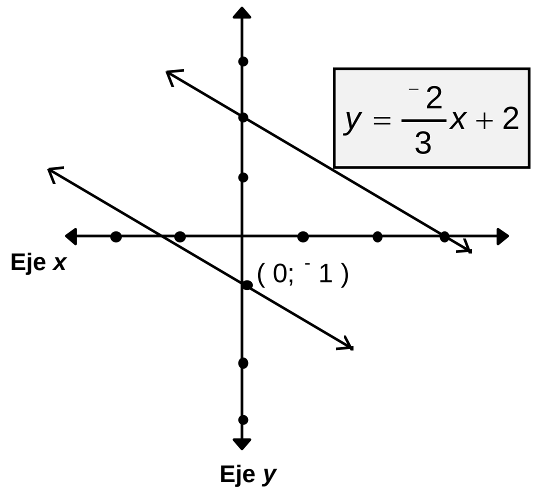
$$b=\frac{{}^{-}6-1}{3}$$

$$b=\frac{{}^{-}7}{3}$$

Entonces, la ecuación de la línea recta buscada es: $y=\frac{1}{3}x+\frac{{}^{-}7}{3}$ y su gráfica es:



2.) En el plano cartesiano de la derecha, se representan dos funciones lineales, cuyas líneas rectas son paralelas.



Si una de ellas tiene pendiente $\frac{^{-}2}{3}$, tal como lo indica la ecuación, entonces la otra línea recta tiene, también, pendiente $\frac{^{-}2}{3}$.

Además pasa por el punto $(0; {}^{-}1)$.

Para dar la ecuación "pendiente - intersección" (nombre con el cual se le denomina a la forma en que hemos estudiado al criterio de la función lineal), falta el valor de **b**.

$$b = {}^{-}1 - \frac{^{-}2}{3} \bullet 0$$

$$b = {}^{-}1 - 0$$

$$b = {}^{-}1$$

Este procedimiento **no** es indispensable, pues es notorio, en la gráfica, que la intersección con el eje *y* es $^{-}1$.

La ecuación de la línea recta paralela a $y = \frac{^{-}2}{3}x + 2$ es: $y = \frac{^{-}2}{3}x + {}^{-}1$.

Ejercicios

En parejas, comenta la forma de determinar la ecuación de rectas paralelas entre sí.

En equipo, contesta lo siguiente.

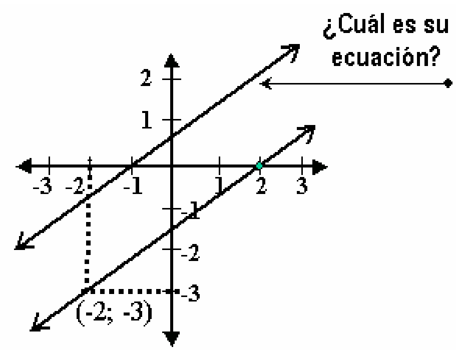
1. Si dos líneas rectas, correspondientes a funciones lineales, son paralelas, entonces ¿cuál es la característica básica de sus gráficas representadas en un mismo plano cartesiano? ____
2. Si dos funciones lineales tienen por gráficas líneas rectas paralelas, entonces, en sus ecuaciones $y = mx + b$ ¿cuál es el dato común a ambas? ____
3. Si una recta es paralela al eje x, ¿qué se puede decir de las pendientes de ambas rectas?
4. ¿Qué ocurre con las rectas paralelas al eje y?

Compara tus respuestas con otro equipo, y comenten las posibles respuestas, no tienen que ser iguales, pero sí implicar lo mismo.

Con tu equipo, determina la pendiente de las siguientes rectas.

1) Pasa por (1; 0) y es paralela a $y = 3 - x$
2) Corta al eje y en –5 y es paralela a $y = \frac{1}{2}x - 3$
3) Pasa por (0; -2) y es paralela a la recta que pasa por (0; 1) y (-2; 3)

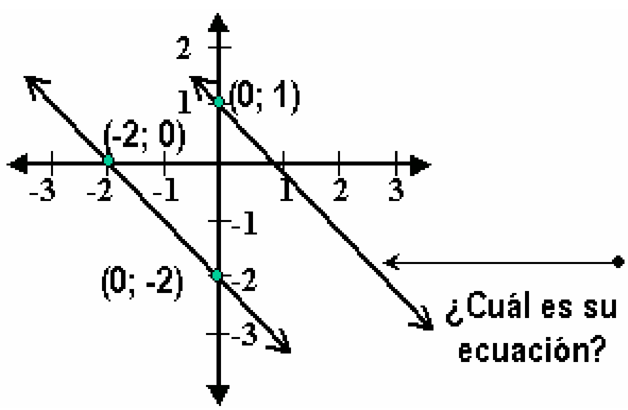
Individualmente, determine la ecuación de cada una de las funciones que se le solicitan.

1) 

2) Pasa por (2; 5) y es paralela a $-2y = 8x + 12$ (Cuidado: *observe la ecuación que se le da*)

3) Paralela a $y = \frac{-2}{5}x + \frac{1}{5}$ e intersección eje y en (0; -3)

4) Pasa por (-1; -5) y paralela a una recta de pendiente $\frac{-5}{8}$

5) 

CLAVE

1) $y = \frac{3}{4}x + \frac{3}{4}$ 2) $y = -4x + 13$ 3) $y = \frac{-2}{5}x - 3$

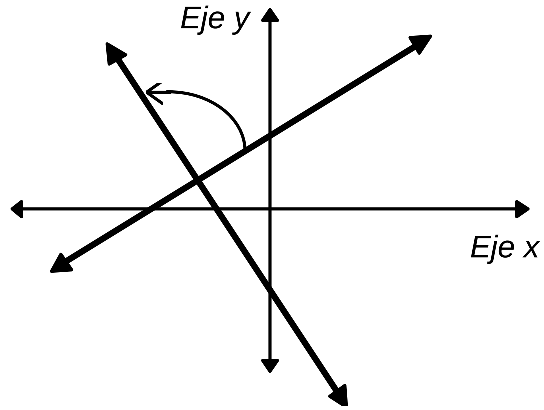
4) y) $\frac{-5}{8}x - 8$ 5) $y = -x + 1$

ME HACES LA CRUZ(6)

Cuando, en el plano, dos o más líneas rectas son líneas perpendiculares forman un ángulo de 90º. Entre los valores de las pendientes se da la relación de que al multiplicarlas se obtiene –1. Esta situación se puede describir diciendo que “una es el opuesto del inverso multiplicativo de la otra”, sin embargo, lo importante es comprender primero la relación tanto gráfica como de cálculo de las ecuaciones.

En el gráfico de la derecha se representan dos funciones lineales cuyas gráficas son **líneas rectas perpendiculares**.

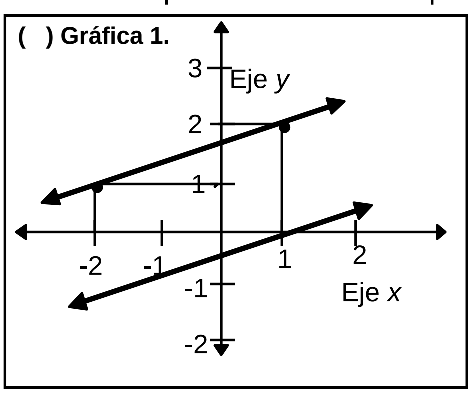
Mida el ángulo formado entre las líneas rectas. Anote la medida: _______

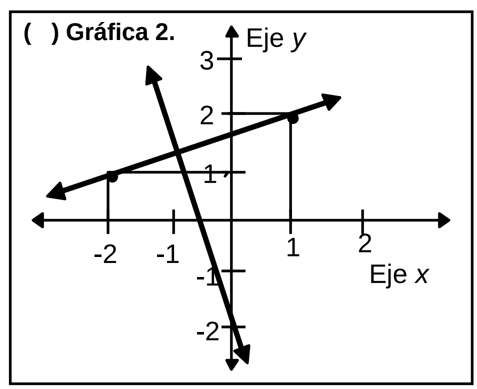


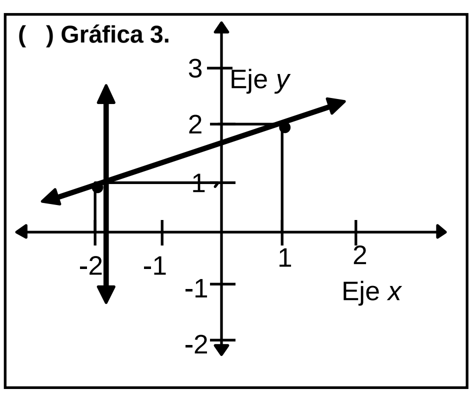
En todo par de líneas rectas perpendiculares, los cuatro ángulos determinados entre ellas tienen la misma medida. Por lo tanto puede decirse, con certeza:

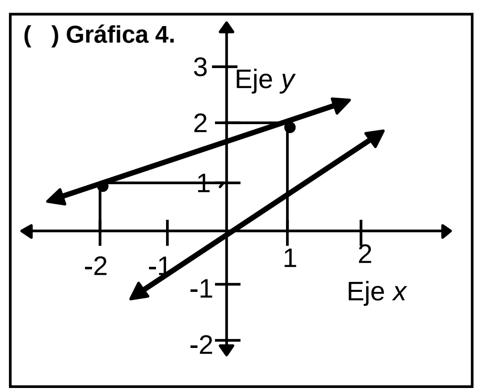
“ Todo par de líneas rectas perpendiculares forman 4 ángulos de ___ grados cada uno.”

A continuación aparecen varios planos cartesianos. Marque X dentro del paréntesis correspondiente a un par de líneas rectas perpendiculares.









Relación de las pendientes de líneas rectas perpendiculares entre sí

En el siguiente cuadro, se anotan las pendientes de dos líneas rectas perpendiculares entre sí. Obsérvelo y luego realice las ejercicios propuestos.

Pares de pendientes de líneas rectas perpendiculares	
Pendiente 1	*Pendiente 2*
1.) $^{-}2$	$\frac{1}{2}$
2.) $\frac{^{-}5}{6}$	$\frac{6}{5}$
3.) $\frac{1}{20}$	$^{-}20$
4.) $\frac{1}{2}$	$^{-}2$
5.) $^{-}7$	$\frac{1}{7}$
6.) $\frac{7}{9}$	$\frac{^{-}9}{7}$
7.) $^{-}12$	$\frac{1}{12}$
8.) 8	$\frac{^{-}1}{8}$

I Anote la relación entre las pendientes de líneas rectas perpendiculares entre sí:

____

____

II Coloque **F** dentro del paréntesis si la expresión es falsa, **V** si es verdadera.

( ) Si dos líneas rectas son perpendiculares entonces sus pendientes son iguales.

( ) Las pendientes de dos líneas rectas perpendiculares entre sí, tienen signo contrario.

( ) Siempre dos líneas rectas con pendientes opuestas son perpendiculares entre sí

( ) Si una línea recta tiene la pendiente de la forma $\frac{a}{b}$, entonces una línea recta perpendicular a ella, tiene pendiente de la forma $\frac{b}{a}$.

( ) Al multiplicar las pendientes de dos líneas rectas perpendiculares, se obtiene $^{-}1$.

Respuestas: *F - V - F - F - V.*

III Asocie las parejas de funciones lineales cuyas líneas son perpendiculares.

$y = {}^{-}2x + 3$	$y = \frac{{}^{-}1}{5}x - 3$
$y = -5 + \frac{{}^{-}1}{4}x$	$y = \frac{1}{2}x - 1$
$y = \frac{1}{2}x - 7$	$y = {}^{-}\ 2x + 10$
$y = 5x + 1$	$y = 4x + 5$

Cuando dos líneas rectas son perpendiculares entre sí, sus pendientes cumplen que al multiplicarse da ${}^{-}1$.

Esto se representa, simbólicamente así:

$$m_1 \bullet m_2 = {}^{-}1$$

Considerando a m_1 como una pendiente y a m_2 como la otra pendiente.

Suele decirse: La pendiente m_1 es el número ***opuesto al recíproco*** de m_2. Y se representa así:

$$m_1 = \frac{{}^{-}1}{m_2}$$

Para entender esta expresión, se puede hacer un cuadro con tres columnas: un número, el recíproco y el opuesto del recíproco:

Número	**Recíproco**	**Opuesto del recíproco**
1	1	${}^{-}1$
${}^{-}3$	$\frac{{}^{-}1}{3}$	$\frac{1}{3}$
$\frac{{}^{-}2}{5}$	$\frac{{}^{-}5}{2}$	$\frac{5}{2}$

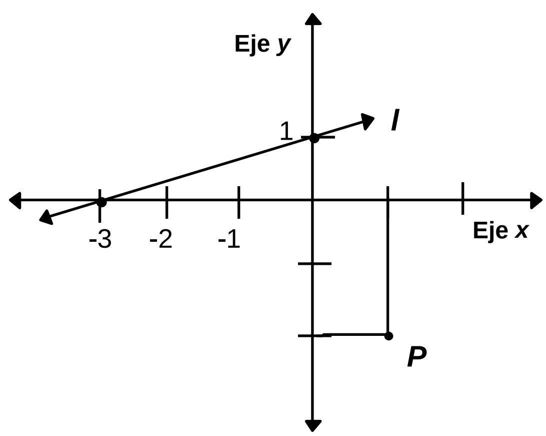
Número	Recíproco	Opuesto del recíproco
$\frac{10}{7}$	$\frac{7}{10}$	$\frac{^{-}7}{10}$
$^{-}1$	$^{-}1$	1
12	$\frac{1}{12}$	$\frac{^{-}1}{12}$

Estas parejas de números sirven como pendientes de líneas rectas perpendiculares entre sí.

IV Invente parejas de funciones lineales cuyas gráficas sean perpendiculares.

Determinación de la ecuación de una línea recta perpendicular a otra

1.) Con ayuda de instrumentos geométricos, trace una línea recta perpendicular a ***l***, que contenga al par ordenado señalado como ***P***. Determine su ecuación.



La nueva línea recta tiene inclinación relacionada con la de la línea recta ***l***.

a) ***l*** pasa por los puntos ($^{-}$3; 0) y (0; 1), tal como se observa en la gráfica.

Calcule la pendiente de ***l.***

La pendiente de ***l*** es igual a:

$$\frac{0-1}{^{-}3-0}=\frac{^{-}1}{^{-}3}=\frac{1}{3}$$

El recíproco de este número es $\frac{3}{1}$.

El opuesto de este recíproco es $-\frac{3}{1}$.

Entonces la pendiente de la <u>nueva línea recta</u> es $^{-}3$.

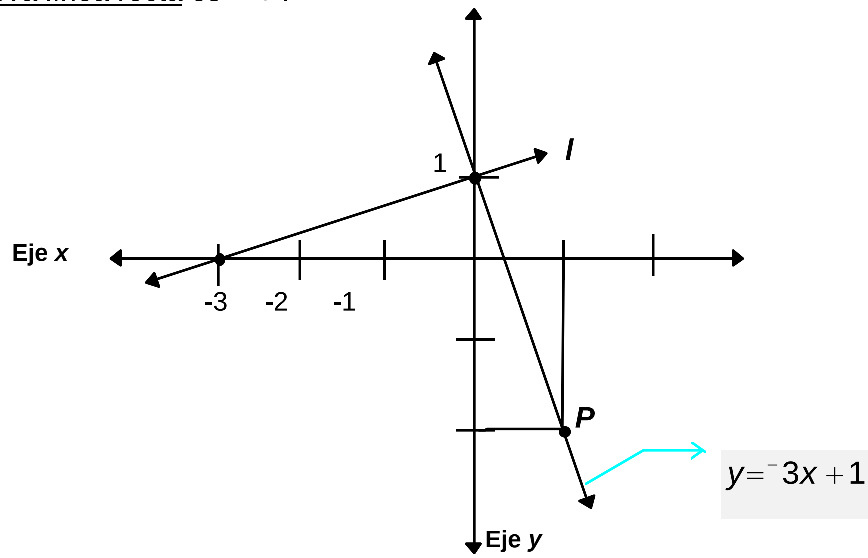
b) Como la <u>nueva línea recta</u> pasa por P (1; $^{-}$ 2) entonces la intersección con el eje *y* es:

$b = {^{-}2} - {^{-}3} \bullet 1$

$b = {^{-}2} - {^{-}3}$

$b = {^{-}2} + 3$

$b = 1$



2.) Una línea recta pasa por **P** ($^{-}$ 2; 0) y perpendicular a la línea recta *y* = 5*x*, halle la ecuación de la línea recta.

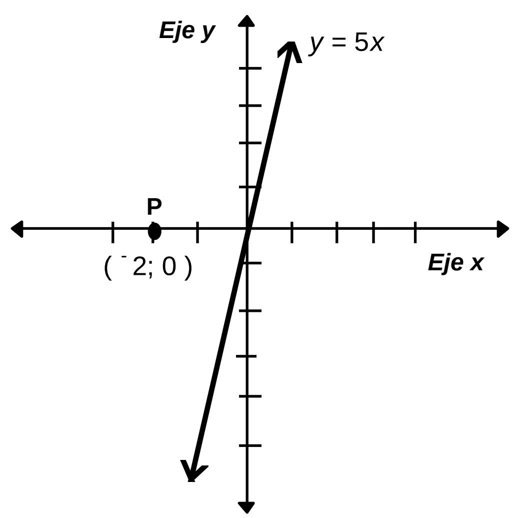
a) Trace la gráfica de la perpendicular.

b) La pendiente de la línea recta dada, es $m_1 = 5$, entonces la pendiente de la perpendicular a ella es: $m_2 =$ ______________.

c) Calcule el valor de la intersección de la nueva línea recta.

____

____



Ésta pasa por ($^{-}$ 2; 0) y tiene pendiente $\frac{^{-}1}{5}$.

$$b = 0 - \frac{^{-}1}{5} \bullet {}^{-}2$$

$$b = 0 - \frac{2}{5}$$

$$b = \frac{^{-}2}{5}$$

d) Anote la ecuación de la línea recta perpendicular a y = 5 *x*, a la cual pertenece el par ordenado P (⁻ 2; 0).

y = ____________________

Verifique su respuesta: $y = \frac{^{-}1}{5}x + \frac{^{-}2}{5}$

3.) Halle la ecuación de la línea recta que pasa por (2; ⁻ 1) y es perpendicular a la línea recta que pasa por (0; 5) y (5; 0).

a) Represente los pares ordenados (0; 5) y (5; 0).

b) Trace la línea recta que pasa por ellos.

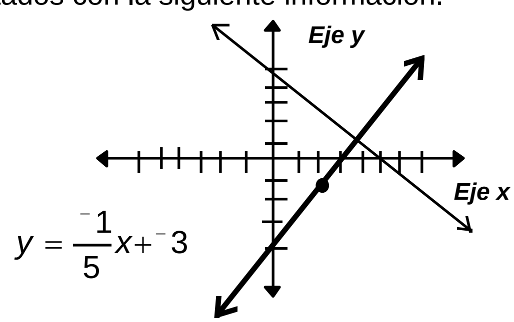
c) ¿Cuál es la inclinación de esta línea recta?

d) Dibuje la línea recta perpendicular a ella y que pasa por (2; ⁻ 1).

e) Si la inclinación o pendiente de la primer línea recta es negativa entonces la de la línea recta perpendicular es de signo ___________________________.

f) Halle la intersección con el eje y, de la perpendicular cuya pendiente es 1.

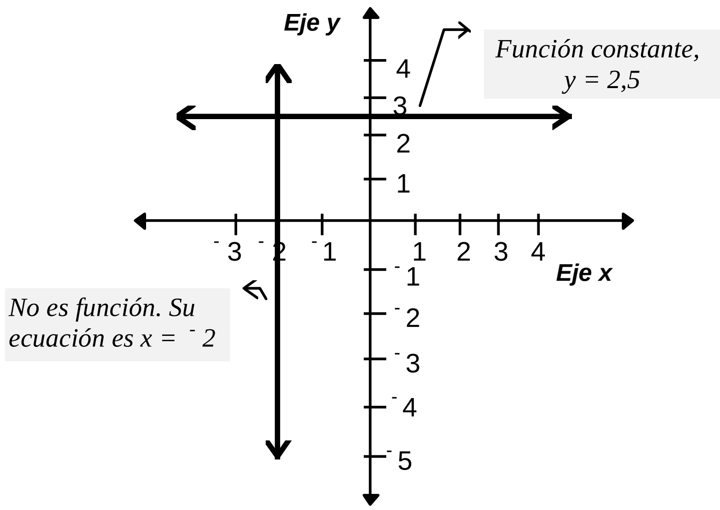
g) Compare sus resultados con la siguiente información.

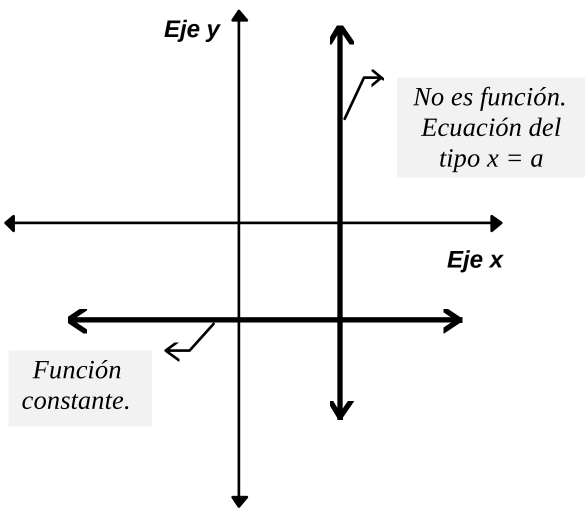


Otras líneas rectas perpendiculares

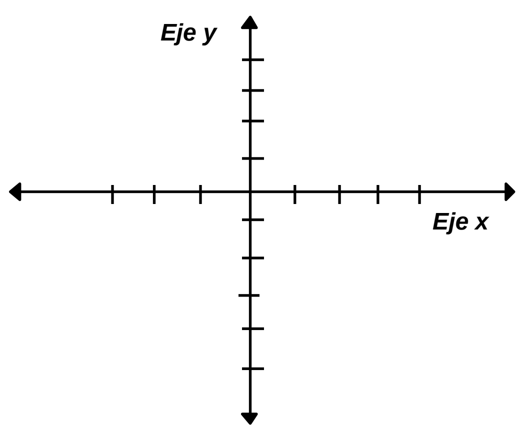
Los siguientes dibujos, representan líneas rectas perpendiculares entre sí.

En <u>ninguno</u> de los siguientes gráficos se representan funciones lineales.





Dibuje un ejemplo de este caso de perpendiculares, en el plano de la derecha, y anote las ecuaciones.



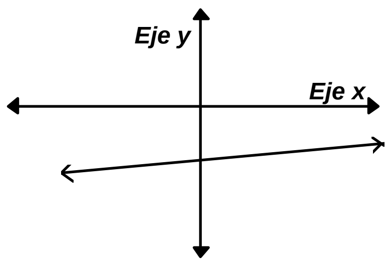
Actividad complementaria

Con ayuda de compañeras y compañeros, prepare un material, para realizar prácticas en equipos.

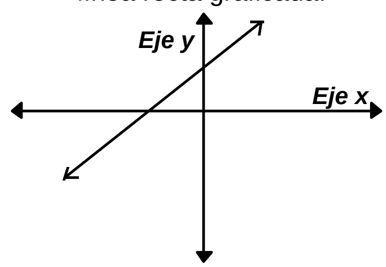
Genere tarjetas como las siguientes:

1. Sobre las representaciones en el plano cartesiano.

Trace una línea recta perpendicular a la línea recta graficada:



Trace una línea recta perpendicular y otra paralela a la línea recta graficada:



2. Sobre la parte teórica.

Responda falso o verdadero. ( ) Si dos líneas rectas, L_1 y L_2 son paralelas entre sí, una tercer línea recta perpendicular a cualquiera de ellas es también perpendicular a la otra. ( ) Si dos líneas rectas son perpendiculares a una tercera, entonces, necesariamente ellas son paralelas entre sí.		Determine la ecuación de una línea recta cuya pendiente es $\frac{3}{5}$, que pasa por $(^-6;\ 3)$ y es perpendicular a la línea recta $y = \frac{^-5}{3}x + {^-7}$.

3. Sobre valores

Sólo amando nuestras capacidades con desinterés, podremos disfrutarlas al mismo tiempo que las ponemos al servicio de los demás.

Jamás se ha resuelto nada con el ánimo enardecido ni con el corazón yerto.

Billy Graham

4. Sorpresas

Invente tarjetas pidiendo la ejecución de actividades jocosas.

Procedimiento:

En clase se reúnen todas las tarjetas, las cuales no deben diferenciarse unas de las otras, para no prejuiciar al jugador.

Se forman subgrupos. Se rifa el orden de participación para hacer rondas.

Cada vez, juegan todos los equipos. Pero, el del turno, tiene derecho a ser esperado y es el que puede ganarse los puntos.

Los demás equipos, contra el tiempo, resuelven y presentan sus respuestas al coordinador (a) o profesor (a). Se debe tener el cuidado de anotar el orden de respuestas y si son correctas o no.

Un representante de un grupo elige al azar una tarjeta. Si este equipo contesta mal o no quiere hacerlo, gana los puntos el equipo que presentó primero una respuesta correcta.

Puntuación:

Si la tarjeta es sobre un pensamiento, el equipo en turno lo lee en voz alta y hace un breve comentario. Valor 2 puntos.

Si se trata de una tarjeta sobre la materia y se responde bien se adjudican 2 puntos.

Cuando es un reto, broma o sorpresa, si el equipo en turno lo hace recibe, 3 o más puntos.

Ejercicios

La perpendicularidad está presente en la naturaleza y es básica para la estabilidad en muchas construcciones.

En parejas realice una esquema con lo básico de la lectura, no incluya explicaciones.

En equipo, contesta lo siguiente.

1. Si dos líneas rectas, correspondientes a funciones lineales, son perpendiculares, entonces ¿cuál es la característica gráfica de este tipo de rectas? ______________________________
2. Si dos rectas son perpendiculares, entonces el valor de las pendientes “m” de las ecuaciones satisfacen que al multiplicarlas se obtiene ___________
3. Cuando, en el plano, dos líneas rectas se cortan formando un ángulo de 90º , estas se denominan rectas _________________________

4. Si los valores de “m” en las ecuaciones de líneas rectas cumplen ser el opuesto del inverso multiplicativo entonces sus gráficas son ________________________
5. La línea recta de una función constante puede ser perpendicular a una línea recta paralela al eje _____

1. Si dos líneas rectas son perpendiculares y una de ellas tiene pendiente 1, entonces la pendiente de la otra es ______
2. Suponga que la línea recta ℓ_1 con ecuación $y = \frac{-2}{5}x + \frac{1}{2}$ satisface que $\ell_1 \perp \ell_2$, entonces se puede afirmar con certeza que el valor de la pendiente de ℓ_2 corresponde a ______
3. Compruebe que los pares de rectas cumplen ser perpendiculares (multiplicando sus pendientes)

   a) $2y = 4 - 8x$ $\qquad y = \frac{1}{4}x - 5$

   b) $\frac{-5}{2}x + \frac{3}{2}y = 0$ $\qquad 5y = -3x + 10$

   c) $4y + 4 = 5x$ $\qquad 4x + 5y = 1$

Determine las ecuaciones que se le solicitan

a) Línea recta perpendicular a $2y - 4x + 12 = 0$ que pasa por $(0; -3)$

b) Línea recta que pasa por $\left(\frac{3}{7}; \frac{-4}{5}\right)$ y es perpendicular a $y = \frac{1}{4} - x$

c) Línea perpendicular a $y = \frac{2x - 10}{4}$ que pasa por $(9; -3)$

d) Una recta que pasa por $(-1; 2)$ y es perpendicular a una línea recta paralela al eje x.

CLAVE

a) $2y + x + 6 = 0$ $\qquad$ b) $y = x + \frac{43}{35}$ $\qquad$ c) $y = -2x + 15$ $\qquad$ d) $x = -1$

SISTEMAS DE ECUACIONES(6)

De compras y dudas a posteriori

Pedro y Lucía compraron tres prendas en una tienda.
Por dos pantalones y una camiseta pagaron 12 500 colones.
Aunque habían exigido factura, Pedro la dejó olvidada donde una amiga y ahora sólo recuerdan que un pantalón costaba el doble que la camiseta. ¿Cuánto costó cada prenda, si los pantalones comprados eran del mismo precio?

Lucía “Los doce mil quinientos están en dos partes: lo de los pantalones y lo de la camiseta”

Pedro “O sea, sabemos que si sumamos el costo de pantalones más el de la camiseta es 12 500”

Ambos “Pero la camiseta costó la mitad del pantalón”

Lucía “ O lo que es lo mismo: un pantalón cuesta el doble que la camiseta”

Pedro “Usemos lo de gráficas de funciones”

Lucía “Está bien, yo dibujo que la suma es 12 500. Si quiere represente la otra función

Pedro “ Pero, ¿cuáles van a ser las variables?”

Definieron variables y construyeron la gráfica.

x es el precio de los pantalones y es el precio de la camiseta

La compra total formula la ecuación:

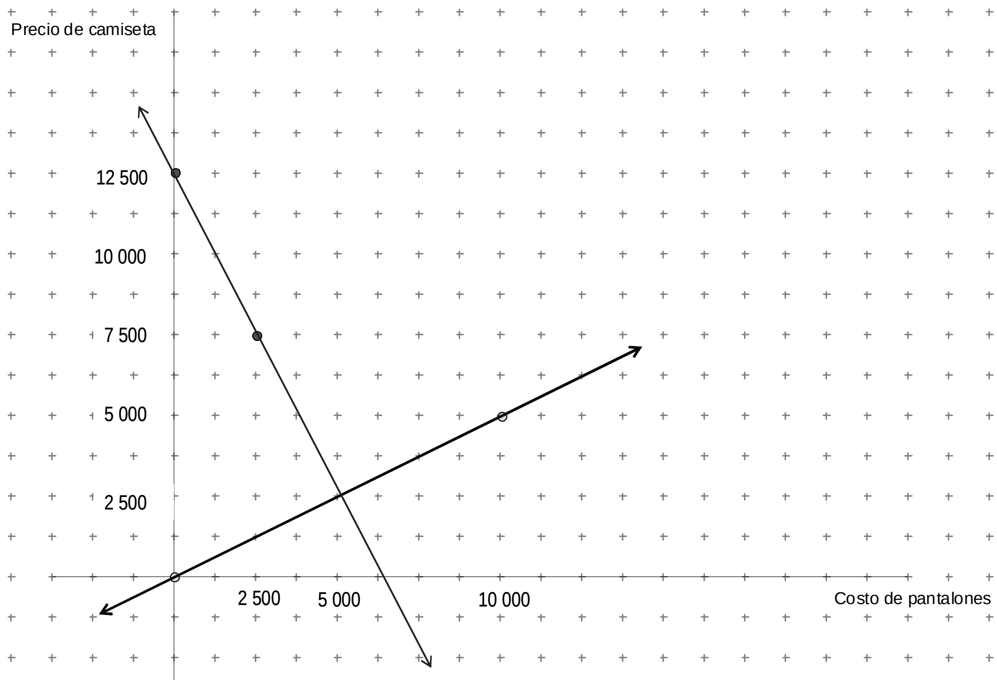
$$2x + y = 12\,500$$

dos pantalones y una camiseta

La relación de precios se expresa:

$$y = \frac{x}{2}$$

la camiseta costó la mitad de un pantalón



Las ecuaciones representadas tienen un punto en común. ¿Cuál es el par ordenado coincidente?

Observe que en el eje x se tomó el costo de los pantalones y en el eje y, el de la camiseta.

(precio de un pantalón; precio de la camiseta) = (___________; __________)

La situación resuelta gráficamente corresponde a la solución del sistema:

$$\begin{cases} 2x + y = 12\ 500 \\ y = \dfrac{x}{2} \end{cases}$$

Y la solución es un conjunto con un par ordenado, a saber $(5000;\ 2500)$ Esto significa que el precio de un pantalón era, en colones, cinco mil y la camiseta, dos mil quinientos.

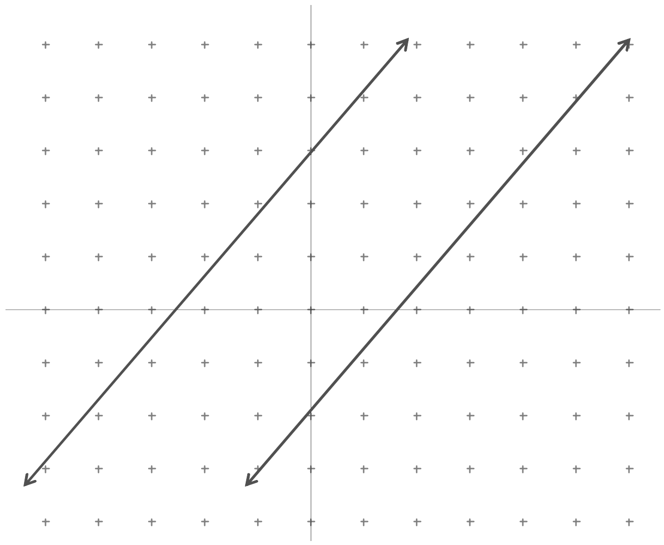
Ejercicios

Resuelva gráficamente los siguientes sistemas de ecuaciones.

1) $\begin{cases} y = 2x \\ y = x \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y = x - 1 \\ y = -x \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 2y = 8 + 2x \\ 3x + y = 1 \end{cases}$

El método gráfico es una forma sencilla de solución y además permite "visualizar" la respuesta.

Analice las siguientes situaciones.



Se representaron las dos ecuaciones lineales y resultan como en la gráfica izquierda

¿Cuál es la condición de estas líneas rectas?

¿Qué puede decir en relación con el sistema de ecuaciones representado?

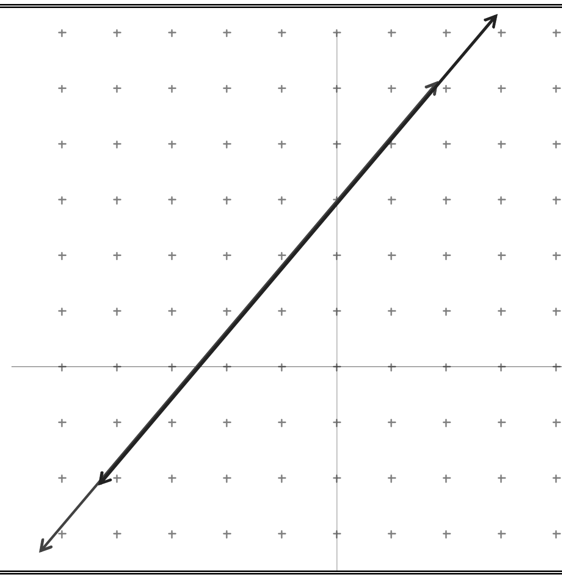
¿Cuál considera que es la solución de este caso?

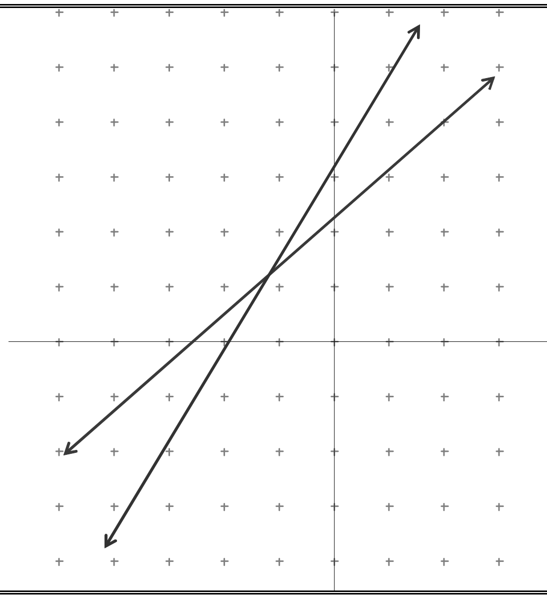
Al representar el sistema, una recta “cayó” sobre la otra.

¿Qué puede decir de las ecuaciones en cuestión?

¿Tiene solución el sistema representado?

¿Cómo es el conjunto de solución de este sistema?





En este caso las ecuaciones del sistema satisfacen la representación gráfica de la izquierda.

¿Tiene solución el sistema de ecuaciones involucrado?

¿Cuántas soluciones tiene el sistema?

¿Cómo es el conjunto de solución?

Resolver un sistema de ecuaciones, consiste en determinar los valores de sus variables que satisfacen simultáneamente cada una de ellas. En el caso particular que estudiamos, se trata de hallar los valores de dos variables de primer grado que cumplen con dos ecuaciones al mismo tiempo.

De acuerdo con lo analizado, los sistemas de dos ecuaciones de primer grado tienen tres posibilidades:

Cantidad de soluciones	Nombre del sistema	Qué pasa con las rectas
• Cero.	Incompatible.	Son paralelas. Tienen pendientes iguales. Nunca se intersecan.
• Infinita.	Compatible indeterminado	Coinciden. Se trata de dos ecuaciones diferentes que representan la misma recta. Se intersecan en todos los puntos
• Una única solución.	Compatible.	Se intersecan en un solo punto.

De manera que algunos problemas no tendrán solución, su conjunto de solución es el conjunto vacío, otros tendrán un conjunto infinito de soluciones y otros tendrán un conjunto de solución unitaria, es decir con un único elemento.

En ocasiones, el método gráfico no es lo suficientemente eficaz. Por ello, existen métodos alternativos para resolver sistemas.

Algebraicamente, es posible atenderlos con diversos métodos. Se estudiarán los siguientes.

Método de Sustitución

Se despeja una incógnita en una de las ecuaciones y se sustituye en la otra.

A continuación, los pasos de la resolución por sustitución. Si desea pase directamente al ejemplo y **no lea** estos pasos.

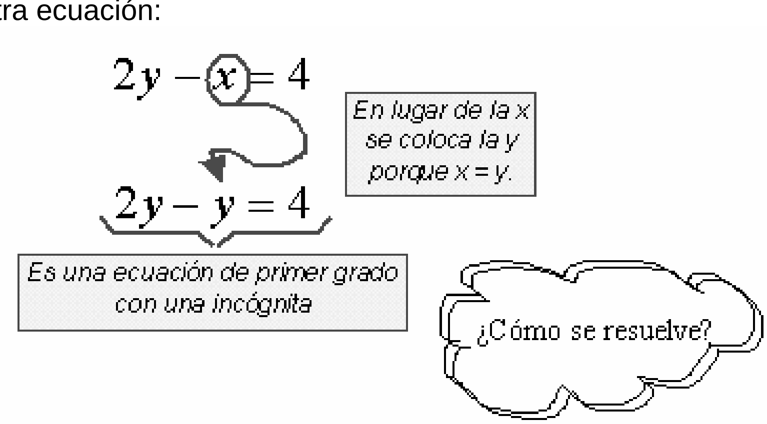
Pasos del método de sustitución

1. Despejar una incógnita en una ecuación.
   En este paso se obtiene una expresión con dos incógnitas, en un lado del "=" aparece una incógnita sola y del otro lado, la otra incógnita inmersa en una serie de operaciones.
2. Cambiar o sustituir en la otra ecuación, la incógnita despejada en el paso (1).
   En este paso, se obtiene una ecuación con sólo una incógnita.
3. Realizar las operaciones y determinar el valor de una incógnita.
   Aquí se resuelve la ecuación del paso (2).
4. El valor hallado, se usa en la expresión del paso (1) y se despeja la otra incógnita.
5. Se comprueban los valores y se enuncia la solución.

Ejemplos del método de sustitución

1.) En $\begin{cases} x = y \\ 2y - x = 4 \end{cases}$, ya está despejada una incógnita en término de la otra: "$x = y$".

Se sustituye en la otra ecuación:



Se obtuvo y = 4. Entonces, se sustituye en la expresión de despeje:

$$x = y \qquad\qquad x = 4$$

Los valores hallados son $x = 4$ y $y = 4$.

La comprobación consiste en sustituir los valores en las dos ecuaciones del sistema y comprobar que se cumplen.

Comprobación:

	Primer ecuación $x = y$	**Segunda ecuación** $2y - x = 4$
Sustitución de los valores	$4 = 4$	$2 \bullet 4 - 4 = 4$
Operaciones	$4 = 4$	$8 - 4 = 4$ $4 = 4$
¿Es válida la igualdad obtenida?	Sí	Sí

Por lo tanto, el conjunto de solución del sistema $\begin{cases} x = y \\ 2y - x = 4 \end{cases}$ es:

$$\{\ (4;\ 4\ )\ \}$$

2.) $\begin{cases} y = 2x + 5 \\ 5y - 2x = 2 \end{cases}$

En este sistema la *y* está expresada como "$y = 2x + 5$", entonces en la segunda ecuación se cambia la *y* por esta expresión:

$$5y - 2x = 2$$

Se cambia la *y* por la expresión correspondiente.

$$5 \bullet (2x + 5) - 2x = 2$$

Se multiplica cada término dentro del paréntesis por 5.

$$10x + 25 - 2x = 2$$

Se operan los términos

$$8x + 25 = 2$$

$$8x = 2 - 25$$

$$8x = {}^{-}23$$

$$x = \frac{{}^{-}23}{8}$$

Se resuelve la ecuación obtenida.

El valor resultante se sustituye en el despeje de la incógnita ***y*** y se calcula su valor:

$$y = 2x + 5$$

$$y = 2 \bullet \frac{^{-}23}{8} + 5$$

$$y = \frac{^{-}3}{4}$$

Realice las operaciones para obtener el valor de *y*:

____

____

Se obtuvieron los valores $\frac{^{-}23}{8}$ y $\frac{^{-}3}{4}$ para las incógnitas ***x*** y ***y***.

<u>Comprobación:</u>

	Primera ecuación $y = 2x + 5$	**Segunda ecuación** $5y - 2x = 2$
Sustitución de los valores	$\frac{^{-}3}{4} = 2 \bullet \frac{^{-}23}{8} + 5$	$5 \bullet \frac{^{-}3}{4} - 2 \bullet \frac{^{-}23}{8} = 2$
Operaciones	$\frac{^{-}3}{4} = \cancel{2} \bullet \frac{^{-}23}{\cancel{8}} + 5$ $\frac{^{-}3}{4} = 1 \bullet \frac{^{-}23}{4} + 5$ $\frac{^{-}3}{4} = \frac{^{-}23 + 20}{4}$	$\frac{^{-}15}{4} - \cancel{2} \bullet \frac{^{-}23}{\cancel{8}} = 2$ $\frac{^{-}15}{4} - 1 \bullet \frac{^{-}23}{4} = 2$ $\frac{^{-}15}{4} - \frac{^{-}23}{4} = 2$ $\frac{^{-}15 + 23}{4} = 2$ $\frac{8}{4} = 2$
¿Es válida la igualdad obtenida?	Sí	Sí

El conjunto de solución es $\left\{ \left(\frac{^{-}23}{8}; \frac{^{-}3}{4} \right) \right\}$.

3.) $\begin{cases} 3x + 6y = 9 \\ ^{-}x - y = 5 \end{cases}$

Se despeja una de las incógnitas. Por ejemplo, la x, en la primera ecuación se puede despejar así:

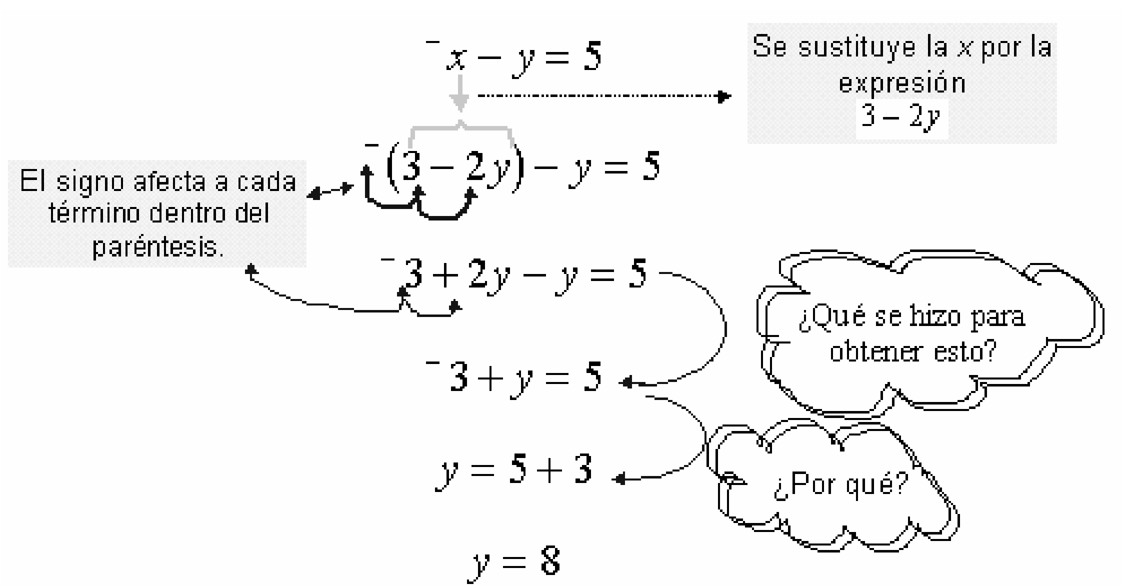
$$3x = 9 - 6y$$

$$x = \frac{9 - 6y}{3}$$

$$x = \frac{9}{3} - \frac{6y}{3}$$

$$x = 3 - 2y$$

En la segunda ecuación, se sustituye la *x*, por $3 - 2y$:



Entonces el valor hallado para y se sustituye en: $x = 3 - 2y$ …

$$x = 3 - 2 \bullet 8$$

$$x = 3 - 16$$

$$x = {}^{-}13$$

Los valores $x = {}^{-}13$ y $y = 8$ se deben probar. Complete la siguiente comprobación.

Comprobación:

	Primer ecuación $3x+6y=9$	Segunda ecuación ${}^{-}x-y=5$
Sustitución de los valores	$3\cdot{}^{-}13+6\cdot\_\_\_\_=9$	${}^{-}\left({}^{-}13\right)-8=5$
Operaciones	$\_\_\_+48=9$	$13-8=5$
¿Es válida la igualdad obtenida?	Sí	Sí

El conjunto de solución del sistema $\begin{cases} 3x+6y=9 \\ {}^{-}x-y=5 \end{cases}$ es $\left\{\left({}^{-}13;\ 8\right)\right\}$.

4.) $\begin{cases} 14-x+y=0 \\ {}^{-}4x+16+y=0 \end{cases}$

¿Cuál incógnita se despeja?
Aunque puede despejarse cualquiera de las dos incógnitas, al observar el enunciado puede, a veces, hallarse mayor facilidad en despejar una incógnita.

¿En cuál ecuación se debe despejar la incógnita? En cualquiera de las dos ecuaciones, pero a veces, es más sencillo despejar en una ecuación que en la otra.

En este ejercicio, se puede escoger la incógnita y en la segunda ecuación:

$${}^{-}4x+16+y=0$$

$$y=0+4x-16$$

$$y=4x-16$$

En la primera ecuación se sustituye, la y por esta expresión y se realizan las operaciones:

$$14-x+y=0$$

$$14-x+\left(4x-16\right)=0$$

$$14-x+4x-16=0$$

$$14+3x-16=0$$

$$3x-2=0$$

De esta última ecuación, se despeja y se obtiene el valor de "*x*", $x = \frac{2}{3}$.

En la expresión $y = 4x - 16$, se sustituye el valor de la incógnita "*x*", y se obtiene el valor de *y*:

$$y = 4x - 16$$

$$y = 4 \bullet \frac{2}{3} - 16$$

$$y = \frac{8}{3} - 16$$

$$y = \frac{8 - 48}{3}$$

$$y = \frac{^{-}40}{3}$$

La comprobación queda al lector.

Ejercicios:

A) Resuelva los siguientes sistemas.

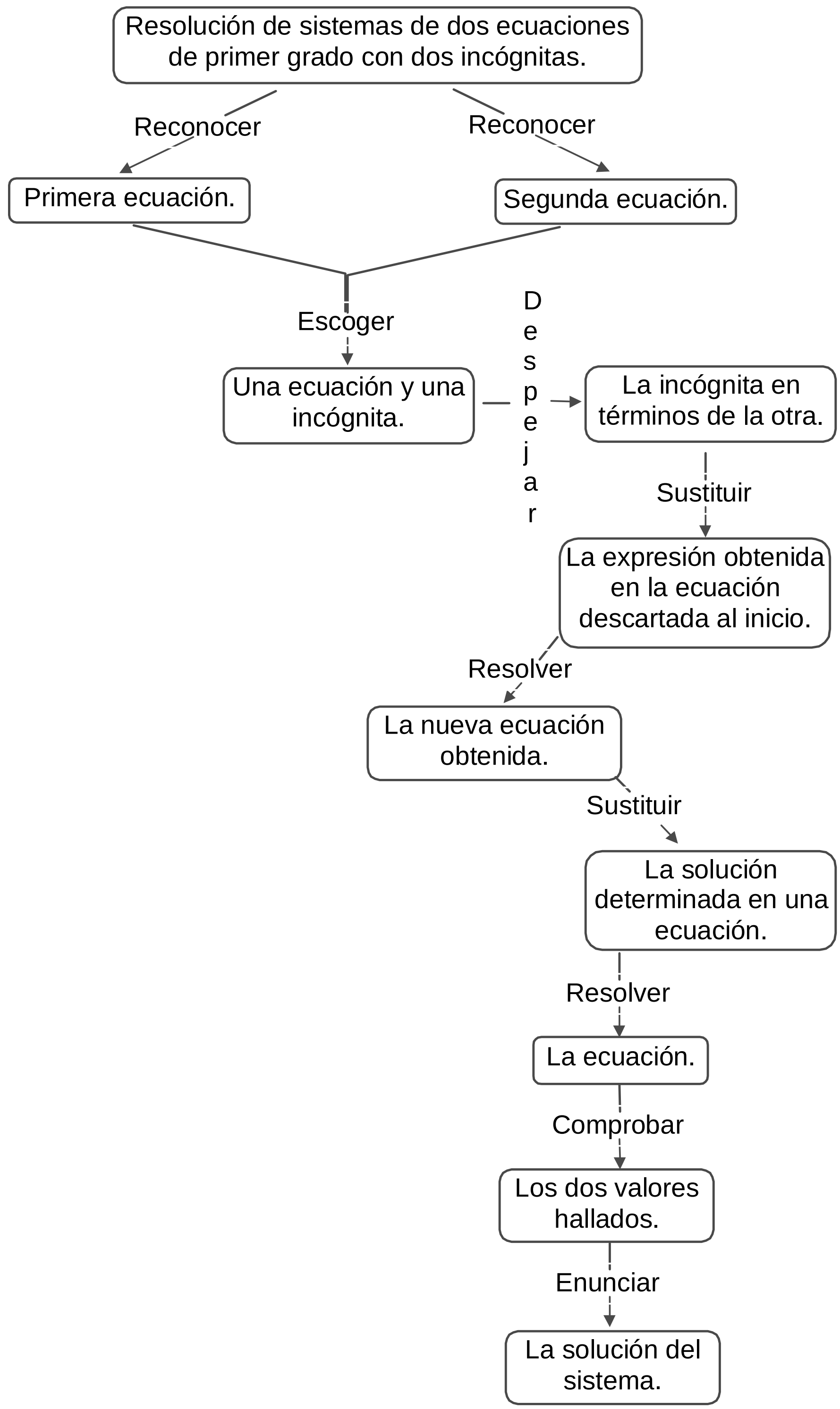
1) $\begin{cases} x - y = 1 \\ 2y - x = 4 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y = x - 5 \\ 3y - 6x = 12 \end{cases}$

3) $\begin{cases} \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}y = -1 \\ ^{-}x + y = 0 \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 14 - 7x + 21y = 0 \\ ^{-}x + 2 + 3y = 0 \end{cases}$

CLAVE

1) $\{(6; 5)\}$ 2) $\{(-9; -14)\}$ 3) $\{(-1; -1)\}$ 4) IR

B) Analice y reestructure el siguiente esquema



Método de Igualación

Se despeja la misma variable en las ecuaciones y se iguala lo obtenido.

Ejemplo

$$\begin{cases} 3x+6y=-2 \\ 2x-5y=7 \end{cases} \qquad \begin{cases} x=\dfrac{-2}{3}-\dfrac{6}{3}y \\ x=\dfrac{7}{2}+\dfrac{5}{2}y \end{cases}$$

Se iguala

$$\frac{-2}{3}-\frac{6}{3}y=\frac{7}{2}+\frac{5}{2}y$$

Se despeja

$$\frac{-2}{3}-\frac{-7}{2}=\frac{5}{2}y+\frac{6}{3}y$$

$$\frac{-4--21}{6}=\frac{15+12}{6}y$$

$$\frac{17}{6}=\frac{27}{6}y$$

$$\frac{17}{27}=y$$

Ejercicios

A) Resuelva por igualación los siguientes sistemas.

1) $\begin{cases} 2x+2y=-2 \\ -x+y=0 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x+y-2=0 \\ x-y+3=0 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x+\dfrac{3}{2}=y \\ \dfrac{1}{4}x-1=y \end{cases}$

B) Haga un esquema del método de igualación para sistemas de dos ecuaciones de primer grado con dos incógnitas.

CLAVE

A) 1) $\{(-1;-1)\}$ 2) $\{\ \}=\emptyset$ 3) $\left\{\left(\dfrac{-10}{3};\dfrac{-11}{6}\right)\right\}$

Método de reducción o de suma y resta

Se preparan las dos ecuaciones (multiplicando convenientemente) para que una de las incógnitas tenga el coeficiente opuesto. Al sumarlas desaparece esa incógnita.

1.) $\begin{cases} x + y = 0 \\ y - x = 4 \end{cases}$

Se organizan sus elementos, de forma que las dos ecuaciones tengan, el mismo orden de aparición de las incógnitas:

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ {}^{-}x + y = 4 \end{cases}$$

¿Cuál de las incógnitas, eliminaría? ( ) La x ( ) La y .

¿Imagina, usted, alguna forma de eliminarla? ¿Cuál? ______________

Si sumamos las ecuaciones, se obtiene:

$$\begin{array}{r} +\begin{cases} x + y = 0 \\ {}^{-}x + y = 4 \end{cases} \\ \hline 2y = 4 \end{array}$$

De dos ecuaciones se ha generado sólo una, ¿cuál es la solución de la ecuación $2y = 4$?
_____________________.

Este primer valor[1], se usa para resolver el sistema.

Se sustituye en una de las ecuaciones, luego se despeja la otra incógnita.

$$y = 2 \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{c} x + y = 0 \\ x + 2 = 0 \\ x = {}^{-}2 \end{array}$$

Los valores hallados son $x = {}^{-}2$ y $y = 2$. Para comprobarlos, se sustituyen en las dos ecuaciones.

En la ecuación $x + y = 0,$ queda ${}^{-}2 + 2 = 0$, lo cual es correcto.

En la otra ecuación, se obtiene: $2 - {}^{-}2 = 4$, expresión también correcta.

[1] De $2y = 4$, se obtiene $y = 2$.

Por lo tanto, la solución del sistema $\begin{cases} x + y = 0 \\ y - x = 4 \end{cases}$ es $\left({}^{-}2;\ \ 2 \right)$.

2.) $\begin{cases} 3x + 6y = 2 \\ {}^{-}x + 6y = 5 \end{cases}$

En el primer ejemplo, la incógnita x, tienen coeficientes opuestos, o sea, al sumarlos dan 0.
¿Ocurre esto en el 2º ejemplo? ( )Sí ( ) No.

Si sumamos en el segundo ejemplo, $\begin{cases} 3x + 6y = 2 \\ {}^{-}x + 6y = 5 \end{cases}$, ¿qué se obtiene? ________________

¿Cuál incógnita eliminaría usted, en este sistema ? ( ) La x ( ) La y.

Cualquiera de las incógnitas se puede eliminar.

En el resto de la solución debe leer de acuerdo con su escogencia:

( ) Eliminar la incógnita *y*. ( ) Eliminar la incógnita *x* .

✸ <u>Eliminar la incógnita y</u>

En las ecuaciones, la incógnita y tiene el mismo coeficiente. Por eso al sumar se obtiene:

$$\begin{array}{r} + \begin{cases} 3x + 6y = 2 \\ {}^{-}x + 6y = 5 \end{cases} \\ \hline 2x + 12y = 7 \end{array}$$

No se elimina alguna incógnita.

Para eliminar la y, nos conviene restar.

Realice la operación:

$$\begin{array}{r} - \begin{cases} 3x + 6y = 2 \\ {}^{-}x + 6y = 5 \end{cases} \\ \hline \end{array}$$

Espacio para completar

Se obtiene: $4x = {}^{-}3$, o sea $x = \dfrac{{}^{-}3}{4}$.

En el sistema , $\begin{cases} 3x + 6y = 2 \\ {}^{-}x + 6y = 5 \end{cases}$, se elige una ecuación para sustituir el valor hallado:

Sustituyendo x por $\frac{{}^{-}3}{4}$ en la ecuación ${}^{-}x + 6y = 5$, se obtiene:

$${}^{-}\frac{{}^{-}3}{4} + 6y = 5$$ Se resuelve como una ecuación de primer grado con una incógnita:

$$\frac{3}{4} + 6y = 5 \iff 6y = 5 - \frac{3}{4} \iff 6y = \frac{20-3}{4} \iff 6y = \frac{17}{4} \iff y = \frac{17}{24}$$

Al eliminar la y, se obtuvo $x = \frac{{}^{-}3}{4}$.

Con sustituir este valor en una de las ecuaciones, se determina $y = \frac{17}{24}$.

Si usted eligió eliminar la y, pase a leer en el subtítulo **Comprobación**.

✸ <u>Eliminar la incógnita x</u>

En el sistema $\begin{cases} 3x + 6y = 2 \\ {}^{-}x + 6y = 5 \end{cases}$, los coeficientes de la incógnita x tienen signo contrario, pero no son opuestos.

Si modificamos la segunda ecuación, multiplicándola por tres, se obtiene:

$$3 \bullet \left| \, {}^{-}x + 6y = 5 \iff \right.$$

$${}^{-}3x + 18y = 15$$

El sistema se convierte en $\begin{cases} 3x + 6y = 2 \\ {}^{-}3x + 18y = 15 \end{cases}$.

Se suma y se despeja:

$$\begin{array}{r} + \begin{cases} 3x + 6y = 2 \\ {}^{-}3x + 18y = 15 \end{cases} \\ \hline 24y = 17 \end{array} \qquad \Rightarrow \qquad y = \frac{17}{24}$$

Se sustituye la y en cualquiera de las ecuaciones, para despejar la x.

En $3x + 6y = 2$, al sustituir la y por su valor, queda:

$$3x + 6 \bullet \frac{17}{24} = 2$$

$$3x + \frac{17}{4} = 2$$

$$3x = 2 - \frac{17}{4}$$

$$3x = \frac{8 - 17}{4}$$

$$3x = \frac{^{-}9}{4}$$

$$x = \frac{^{-}9}{12}$$

$$x = \frac{^{-}3}{4}$$

Antes de anunciar la solución, se debe comprobar.

Comprobación:

Para hacer la prueba, se sustituyen los valores y si los resultados a un lado y otro de la igualdad coinciden, se interpreta como correcta la solución.

El sistema en cuestión es $\begin{cases} 3x + 6y = 2 \\ ^{-}x + 6y = 5 \end{cases}$ y los valores hallados son $x = \frac{^{-}3}{4}$ y $y = \frac{17}{24}$.

En la primera ecuación, al sustituir, se obtiene: $3 \bullet \frac{^{-}3}{4} + 6 \bullet \frac{17}{24} = 2$,

lo cual equivale a $$\frac{^{-}9}{4} + \cancel{6}\,\frac{17}{\cancel{24}} = 2$$

y esto es $$\frac{^{-}9}{4} + \frac{17}{4} = 2.$$

¿Es válida esta expresión? ¿Es cierto que la suma $\frac{^{-}9}{4} + \frac{17}{4}$ es igual a dos? _____

Si esa igualdad es cierta, entonces sólo falta comprobar en la otra ecuación.

Sustituyendo en la otra ecuación, se tiene:

$$^{-}x + 6y = 5$$

$$^{-}\frac{^{-}3}{4} + 6 \bullet \frac{17}{24} = 5$$

$$\frac{3}{4} + \frac{17}{4} = 5$$

$$\frac{20}{4} = 5$$

Se ha llegado a una igualdad correcta.

Como <u>las dos ecuaciones</u> se cumplen para los valores hallados, entonces la solución del sistema de ecuaciones es el par ordenado $\left(\frac{^{-}3}{4};\ \frac{17}{24} \right)$.

3.) En $\begin{cases} y = 2x + 5 \\ 5y = 2x - 2 \end{cases}$ se puede hacer una resta para “eliminar” la x.

$$\begin{array}{r} -\begin{cases} y = 2x + 5 \\ 5y = 2x - 2 \end{cases} \\ \hline ^{-}4y = \quad 7 \end{array}$$

Al resolver para y, se obtiene $y = \frac{^{-}7}{4}$.

Sustituya el valor de $y = \frac{^{-}7}{4}$, en cualquiera de las ecuaciones y resuelva para x.

Una vez determinados los valores, realice la comprobación.

Verifique que la solución es $\left(\frac{^{-}27}{8};\ \ \frac{^{-}7}{4} \right)$.

4) Al organizar el sistema $\begin{cases} 4 - x + y = 0 \\ ^{-}4x + 6 + y = 0 \end{cases}$, se obtiene:

$$\begin{cases} -x + y + 4 = 0 \\ ^{-}4x + y + 6 = 0 \end{cases}$$

Lea a continuación. Si desea resolver las preguntas y verificar sus respuestas, cubra la columna derecha antes de responder, luego verifique su respuesta. Trabaje una pregunta y corrobore su respuesta, luego continúe con la siguiente.

(1) Si se desea eliminar la incógnita y, ¿cuál operación se debe efectuar?

(1)***Resta***

(2) Al realizar una resta, ¿cuál expresión se obtiene?

(2) $3x - 2 = 0$

(3) En la nueva expresión se puede determinar el valor de la incógnita x. ¿Cuál es este valor? __________

(3) $x = \dfrac{2}{3}$

(4) ¿Cuál es el siguiente paso?

(4) Sustituir el valor de x en una de las ecuaciones del sistema.

(5) Sustituya el valor hallado para x, en la ecuación $^{-}x + y + 4 = 0$, despeje y. ¿Cuál es el valor de y?

(5) $y = \dfrac{^{-}10}{3}$

(6) Realice la comprobación de la solución $\left(\dfrac{2}{3};\ \dfrac{^{-}10}{3}\right)$.

(6) En la primera ecuación al sustituir los valores se tiene:

$$-\frac{2}{3} + \frac{^{-}10}{3} + 4 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{^{-}2 + {}^{-}10 + 12}{3} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{^{-}12 + 12}{3} = 0$$

lo cual es correcto.

Al sustituir ambos valores en la segunda ecuación, se obtiene:

$$^{-}4 \bullet \frac{2}{3} + \frac{^{-}10}{3} + 6 = 0$$

$$\frac{^{-}8}{3} + \frac{^{-}10}{3} + 6 = 0$$

$$\frac{^{-}8 + {}^{-}10 + 18}{3} = 0$$

$$\frac{0}{3} = 0$$

Lo cual es también correcto.

Por lo tanto, la solución del sistema es $\left(\dfrac{2}{3};\ \dfrac{^{-}10}{3}\right)$

5) $\begin{cases} 8x + 3y - 2 = 0 \\ 2y + 6x + 7 = 0 \end{cases}$

Se puede escribir como: $\begin{cases} 8x + 3y = 2 \\ 6x + 2y = -7 \end{cases}$.

Analice el ejemplo, ¿cómo se puede modificar para lograr eliminar una incógnita?.

¿Cómo se podrá conseguir coeficientes opuestos para la x ?

Una forma es multiplicando las dos ecuaciones, una por un número y la otra por otro número.

Un coeficiente es 8 y el otro es 6, ¿cómo se pueden “convertir” en opuestos?

Piense un número que esté relacionado tanto con el 8 como con el 6.

Busque múltiplos comunes a tales números. Por ejemplo, 48 es un múltiplo común a tales números.

¿Cuál es el múltiplo común a 8 y 6, más pequeño? _________

El mínimo múltiplo común a 8 y 6 es 24.

$6 \bullet 4 = 24$ y $8 \bullet 3 = 24$.

En el sistema de ecuaciones $\begin{cases} 8x + 3y = 2 \\ 6x + 2y = -7 \end{cases}$, se puede multiplicar la primera ecuación por 3 y la segunda por 4.

Primera ecuación.

$$3 \bullet \left| 8x + 3y = 2 \right. \Leftrightarrow$$
$$24x + 9y = 6$$

¿Cómo se obtuvo este 6?

Segunda ecuación.

$$4 \bullet \left| 6x + 2y = {}^{-}7 \right. \Leftrightarrow$$
$$24x + 8y = {}^{-}28$$

El sistema queda transformado en $\begin{cases} 24x + 9y = 6 \\ 24x + 8y = -28 \end{cases}$, al restar se obtiene $y = 34$.

Si se sustituye este valor en una ecuación y se despeja la variable x , se tiene $x = \dfrac{{}^{-}75}{6}$.

Verifique la solución $\left(\frac{^{-}25}{2};\ \ 34 \right)$.

Actividad complementaria

Reúna a un grupo de compañeras y compañeros para estudiar el tema. Inventen un juego de mesa para repasar lo aprendido o una actividad tipo competencia. Por ejemplo:

Cada estudiante anota posibles dudas sobre el tema, cada duda en una tarjeta. En una tarjeta identificable, la respuesta a la duda, si la sabe.

Se reúnen todas las tarjetas de las dudas y se revuelven.

Un participante elige una tarjeta y trata de darle respuesta. Se compara con la respuesta escrita en la tarjeta correspondiente.

El grupo analiza las dos respuestas y se escuchan otras propuestas. Se redacta una mejor respuesta a la de la tarjeta y se reemplaza.

Esta dinámica permite determinar las dudas pendientes para consultar a un especialista, cuando no se ha podido responder a ella.

Al realizarla con otras personas o en nuevas oportunidades, se acrecienta el número de dudas, se revisan las respuestas y se mejoran.

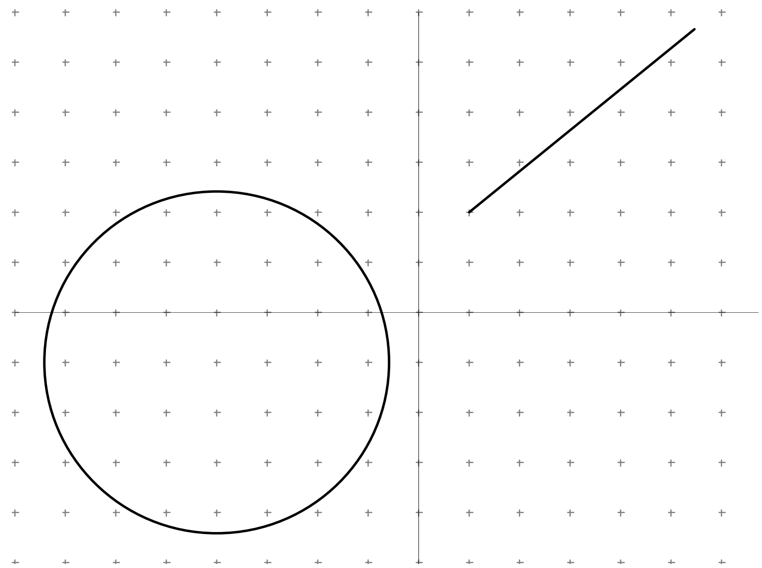
Además ejercita en la redacción, exige aclarar ideas y se basa en dudas y errores lo cual es muy positivo.

Algunos ejemplos de tarjetas:

¿Cómo se determina si se debe sumar o restar en un sistema de ecuaciones de primer grado con dos incógnitas?	**Si los coeficientes de una de las incógnitas son opuestos se debe sumar. Si los coeficientes de una de las incógnitas son iguales entonces se debe restar.**
¿Cómo se sabe por cuál número multiplicar una ecuación en un sistema de ecuaciones de primer grado con dos incógnitas?	**Si una incógnita tiene coeficiente 1 en una ecuación y en otra tiene coeficiente distinto de 1, se multiplica por este coeficiente, pero con signo distinto. Cuando los coeficientes son distintos, se obtiene el mínimo múltiplo común de ellos y se multiplican ambas ecuaciones por este valor.**

PARA PENSAR

¿Qué ocurre con un sistema cuya representación gráfica es como la siguiente?



Fuentes de Información

Baldor, Aurelio. (1983) **Álgebra.** Madrid, España: Ediciones Códice.

Martínez Rodríguez, Roxana. (1996) **Los mapas conceptuales o árboles del conocimiento: Un juego intelectual para desarrollar el pensamiento y adquirir un aprendizaje significativo.** III ciclo - IV ciclos. Matemática. San José, Costa Rica: Publicación del MEP.

Meneses Rodríguez, Roxana. (1994) **Matemática 9º. Enseñanza - Aprendizaje**. 4ª edición, San José, Costa Rica: Ediciones FARBEN.

Rojas Artavia, Lilliam. (1998) Materiales del Centro de Información Electrónica

Sistemas de ecuaciones 〈 http://www.micromegas.com.mx/apuntes/documents/mate3/mate3-4.doc 〉 *"sistemas de ecuaciones"* (13 de mayo de 2004)

Sistemas de ecuaciones con dos incógnitas 〈 http://www.ingreso.ing.unlpam.edu.ar/U5Sistemas_de_ecuaciones_e_inecuaciones.pdf〉 *"sistemas de ecuaciones" gráfico OR gráfica* (13 de mayo de 2004)

PROBLEMAS QUE REQUIEREN SISTEMAS DE 2 ECUACIONES DE PRIMER GRADO CON DOS INCÓGNITAS(11)

TOMADOS DEL ÁLGEBRA DE AURELIO BALDOR
Ejercicio 193 Pág. 357

	Respuestas
La diferencia de dos números es 40 y $\frac{1}{8}$ de su suma es 11. Hallar los números.	64 y 24
La suma de dos números es 190 y $\frac{1}{9}$ de su diferencia es 2. Hallar los números.	104 y 86
La suma de dos números es 1529 y su diferencia 101. Hallar los números.	815 y 714
Un cuarto de la suma de dos números es 45 y un tercio de su diferencia es 4. Hallar los números.	96 y 84
Los $\frac{2}{3}$ de la suma de dos números son 74 y los $\frac{3}{5}$ de su diferencia 9. Hallar los números.	63 y 48
Los $\frac{3}{10}$ de la suma de dos números exceden en 6 a 39 y los $\frac{5}{6}$ de su diferencia son 1 menos que 26. Hallar los números.	90 y 60
Un tercio de la diferencia de dos números es 11 y los $\frac{4}{9}$ del mayor equivalen a los $\frac{3}{4}$ del menor. Hallar los números.	81 y 48
Dividir 80 en dos partes tales que los $\frac{3}{8}$ de la parte mayor equivalgan a los $\frac{3}{2}$ de la menor.	64 y 16
Hallar dos números tales que 5 veces el mayor exceda a $\frac{1}{5}$ del menor es 222 y 5 veces el menor exceda a $\frac{1}{5}$ del mayor en 66.	45 y 15

Adaptación de dos problemas del ejercicio 194, pág. 358.

Dos bolígrafos y tres lápices cuestan 533 colones, y tres bolígrafos y cinco lápices cuestan ¢846. Determine el precio de cada artículo.	¢125 bolígrafo ¢93 lápiz

En un cine, cuatro entradas de adulto y dos de infantes cuestan ¢ 7 900, en cambio la entrada de dos adultos más la de cinco niños son en total ¢7750. Determine el costo de cada entrada.	¢1500 y ¢950

Copia textual, problema de ejercicio 194.

Si a 5 veces el mayor de dos números se añade 7 veces el menor, la suma es 316, y si a 9 veces el menor se resta el cuádruplo del mayor, la diferencia es 83. Hallar los números.	31 y 23
El doble de la edad de A excede en 50 años a la edad de B, y $\frac{1}{4}$ de la edad de B es 35 años menos que la edad de A. Hallar ambas edades.	A 45 y B 40
La edad de A excede en 13 años a la de B, y el duplo de la edad de B excede en 29 años a la edad de A. Hallar ambas edades.	A 55 y B 42
Si $\frac{1}{5}$ de la edad de A se aumenta en los $\frac{2}{3}$ de la de B, el resultado sería 37 años, y $\frac{5}{12}$ de la edad de B equivalen a $\frac{8}{13}$ de la edad de A. Hallar ambas edades.	A 65 y B 36

Ejercicio 195, página 359.

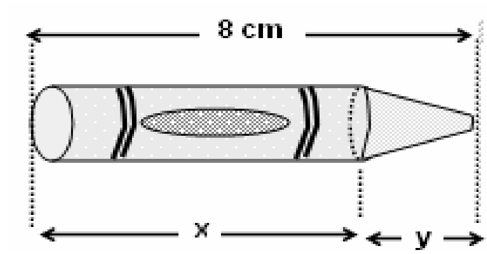
Si a los dos términos de una fracción se añade 1, el valor de la fracción es $\frac{2}{3}$, y si a los dos términos se resta 1, el valor de la fracción es $\frac{1}{2}$. Hallar la fracción.	$\frac{3}{5}$
Si al numerador de una fracción se añade 5, el valor de la fracción es 2, y si al numerador se resta 2, el valor de la fracción es 1. Hallar la fracción.	$\frac{9}{7}$

Del ejercicio 196, página 360

1) Dos números están en la relación de 5 a 6. Si el menor se aumenta en 2 y el mayor se disminuye en 6, la relación es de 9 a 8. Hallar los números.	25; 30
3) Dos números son entre sí como 9 es a 10. Si el mayor es aumenta en 20 y el menor se disminuye en 15, el menor será al mayor como 3 es a 7. Hallar los números.	45; 50

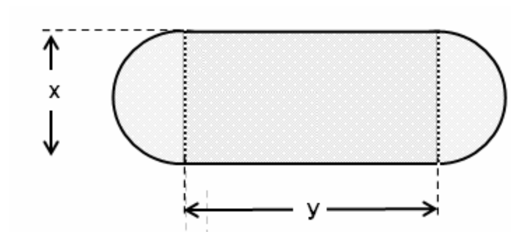
TOMADOS de Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica de Earl W. Swokowski segunda edición.

Una crayola debe tener 8 cm de largo, 1 cm de diámetro y necesita hacerse con 5 cm^3 de cera de color. La forma de la crayola debe ser la de un cilindro con una pequeña punta cónica (véase la figura). Encuentra la longitud del cilindro y la altura del cono.



Respuesta $x = \frac{20}{\pi} - 4 \approx 5{,}55$ $y = 12 - \left(\frac{30}{\pi}\right) \approx 2{,}45$

Una mesa grande para una sala de conferencias debe tener la forma de un rectángulo con dos semicírculos en los extremos (véase figura). Encuentre la longitud y el ancho de la parte rectangular, suponiendo que el perímetro de la mesa es de 400 pie y que el área de la parte rectangular debe ser el doble de la suma de las áreas de los extremos.



Respuesta $x = \frac{20}{\pi}$ pie $y = 10$ pie

TOMADOS DE http://www.sectormatematica.cl/media/probsiec.htm

1. Abrir un debate en relación con la situación siguiente: Una función de teatro organizada por el liceo, dejó $\$1200\,000$ por la venta de entradas; éstas eran de dos tipos; galería, que costaban \$2 000 y platea, \$3 000.

   Como antecedente para planificar eventos futuros, al liceo le interesa saber cuántas plateas y cuántas galerías se vendieron; esa información no la tienen. Los encargados de la venta anotaban G o P en las mismas entradas o bien, ponían 2 000 ó 3 000 según el tipo de entrada; esta era la única diferencia.

   Al revisar la entradas recogidas en el ingreso a la función, que eran un total de 450, se dieron cuenta que algunas estaban en blanco y otras no eran claramente legibles. Además, la capacidad del teatro era de 400 plateas y 200 galerías.

   ¿Se puede saber cuántas galerías y plateas se vendieron?

2. En dos esquinas de una misma bocacalle se han instalado sendas oficinas que arriendan videos. En una, el sistema de arriendo considera una cuota anual de \$1 500 y \$1 200 por arriendo de cada vídeo. La otra no incluye cuota anual y el arriendo de cada vídeo es \$1 350.

   Oscar arrienda generalmente, como 20 a 25 videos al año; ¿cuál de las dos ofertas le conviene más?

   ¿Cuál sistema le conviene más a una persona que arriende 10 películas anuales?

3. Cecilia reemplazó a su mamá atendiendo la caja en la librería por un par de horas. Para hacer los recuentos semanales de existencia de artículos en la bodega, utilizan las boletas de compraventa, por lo que es necesario anotar la cantidad y el tipo de artículos vendido.

   Al hacer el recuento de boletas, se constató que en una de ellas Cecilia anotó un total de 30 cuadernos y un valor de \$21 000. Si sólo hay dos tipos de cuadernos a la venta, unos de \$500 y los otros de \$800, ¿se puede calcular cuántos cuadernos de cada clase vendió?

4. En una bolsa hay un total de \$8 500 distribuidos en 37 monedas de las que 25 son de \$100 y el resto son de \$500. De acuerdo a estos datos, Arturo y Bernardita escribieron dos sistemas de ecuaciones diferentes.

   Arturo escribió las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} x + y &= 37 \\ 100x + 500y &= 8500 \end{aligned}$$

   Bernardita planteó el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} x + y &= 8500 \\ \frac{x}{500} + \frac{y}{100} &= 37 \end{aligned}$$

   ¿Qué representan x e y en cada caso, en el contexto de la situación inicial?

CLAVE

1. 150 galerías y 300 plateas
2. A quien arrienda entre 20 y 25 películas le conviene más la opción que sí cobra anualidad. Para una persona que alquile 10, es mejor la opción que no cobra inscripción.
3. Sí, si es posible. Se vendieron 10 cuadernos de 500 y 20 del otro precio.
4. Para Arturo **x** es el número de monedas de cien y y ,el número de monedas de 500

   Para Bernardita **x** es la cantidad total en monedas de 500 y y es la cantidad total en monedas de cien

Ejercicio 22 de Prueba de Bachillerato a Colegios Técnicos 2004.

Si dos líneas rectas ℓ_1 y ℓ_2 son perpendiculares, la ecuación de ℓ_1 es $3y = 3 - 2x$ y ℓ_2 pasa por el origen. ¿Cuál es el punto de intersección de ambas rectas?

Solución:

Ecuación de ℓ_1: $y = \frac{3}{3} - \frac{2x}{3} \quad \Leftrightarrow \quad y = \frac{-2}{3}x + 1$

La pendiente de ℓ_1: $m_1 = \frac{-2}{3} \quad \Rightarrow$ pendiente de ℓ_2 $m_2 = \frac{3}{2}$

Ecuación de ℓ_2: $y = \frac{3}{2}x$ (*recuerde que pasa por el origen*)

<u>Determinación del punto de intersección</u>

$$\begin{cases} y = \frac{-2}{3}x + 1 \\ y = \frac{3}{2}x \end{cases}$$

Por el método de sustitución:

$$\frac{3}{2}x = \frac{-2}{3}x + 1$$

$$\frac{3}{2}x + \frac{2}{3}x = 1$$

$$\frac{13}{6}x = 1$$

$$x = \frac{6}{13}$$

Entonces *y* es $y = \frac{3}{2} \cdot \frac{6}{13} = \frac{9}{13}$

Respuesta: El punto de intersección de las líneas rectas es $\left(\frac{6}{13}; \frac{9}{13}\right)$

FUNCIÓN "EL CUADRADO DE"(4)
F(X) = X ^{2}

Seleccione algunos valores para la variable independiente, tanto positivos como negativos, complete una tabla de valores y construya la gráfica.

x							
x^2							

Indique el dominio máximo de la función $f(x) = x^2$

____

Escriba el ámbito o rango de la función anterior

____

¿Cuál es el corte con el eje x?

____

¿Cuál es el corte con el eje y?

____

¿Cuál es el punto más bajo de la gráfica?

____

Para aquellos valores menores que cero, es decir, para todos los números reales en el intervalo $\left]-\infty;\ 0\right[$ se cumple que a mayor valor de la variable independiente, menor valor de las imágenes, por ejemplo:

-4 es mayor que -8	f(-4)= 16	f(-8)=64	16 es menor que 64
-2 es mayor que -4	f(-2)= 4	f(-)=16	4 es menor que 16

Esto significa que la función f(x) = x^2 **decrece** en $\left]-\infty;\ 0\right[$.

Para los valores de "x" en $\left]0;\ +\infty\right[$ la función crece, pues a cada valor de "x" mayor se obtiene una imagen mayor. Se dice que la función es creciente para los números reales mayores que cero.

Simbólicamente:

$$\text{Si } f(x) = x^2, \quad x \in \left]0;+\infty\right[\quad \text{y} \quad x_1 \langle x_2 \quad \text{entonces} \qquad f(x_1) \ \langle \ f(x_2)$$

Interpretación

Si la función es x^2,

x es un número positivo y

dos preimágenes se comportan de forma que una es mayor que la otra

entonces

sus respectivas imágenes se comportan de la misma forma

FUNCIÓN CUADRÁTICA

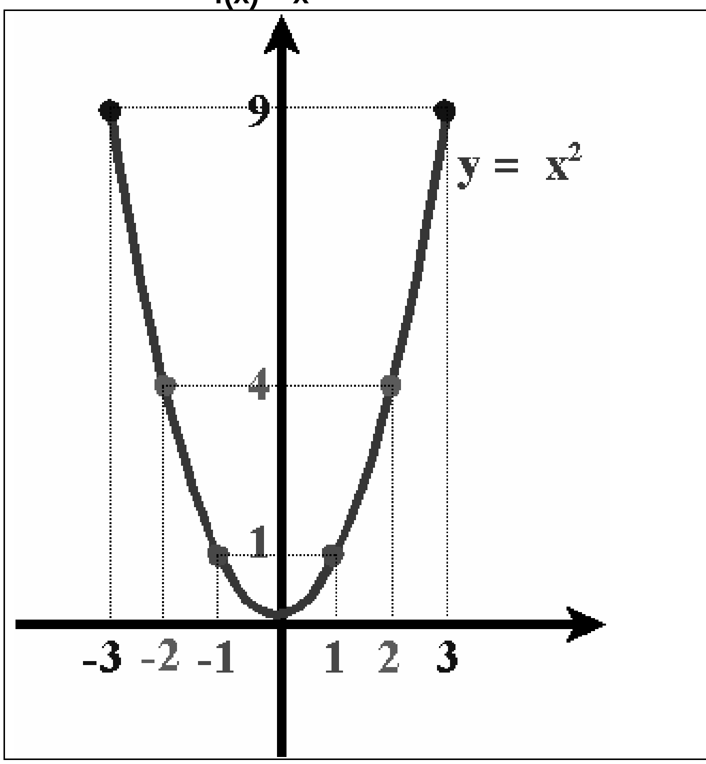
Definición

Una función cuadrática es aquella que puede escribirse de la forma: **f(x) = ax² + bx + c** donde **a**, **b** y **c** son números reales cualesquiera y **a** distinto de cero.

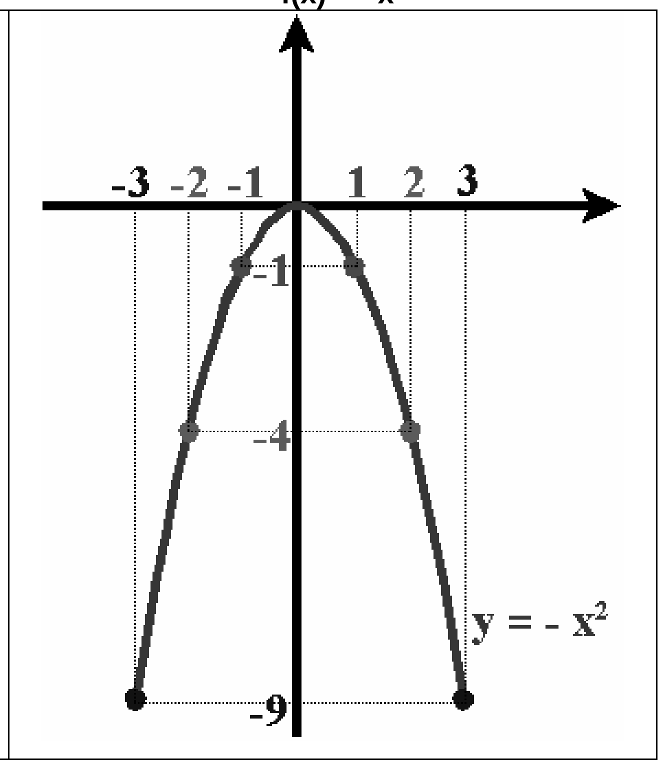
Si representamos "todos" los puntos (x, f(x)) de una función cuadrática, obtenemos siempre una curva llamada ***parábola***.

Como ejemplo, la representación gráfica de dos funciones cuadráticas:

f(x) = x²



f(x) = - x²



Cálculo de puntos de la parábola

Podemos hallar los puntos de la parábola que necesitemos sin más que sustituir, en la ecuación de la función cuadrática, la variable **x** por aquellos valores que deseemos.

$$g(x) = -2x^2 + 3x + 5$$

Tabla de valores

x	-2	-1	0	2
$g(x)$	-9	0	5	3

- Realice la representación en un plano cartesiano.

- ¿La gráfica, corresponde a una parábola?

$$h(x) = 3{,}5x^2 + -2x + -2$$

Tabla de valores

x	-2	-1	0	$0{,}5$
$h(x)$	16	$3{,}5$	-2	$-2{,}12$

- Realice la representación en un plano cartesiano.

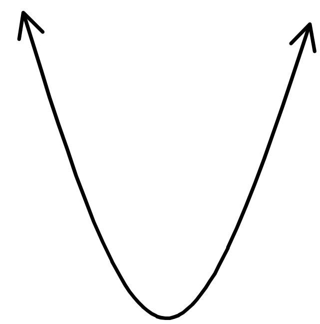
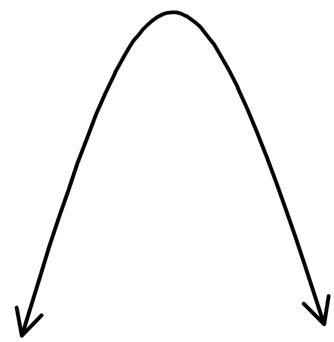
- ¿La gráfica, corresponde a una parábola?

PARA LOGRAR UNA GRÁFICA QUE DELINEE LA PARÁBOLA

Considérese la función cuadrática $f(x) = \mathrm{a}x^2 + \mathrm{b}x + \mathrm{c}$. De su respectiva parábola interesa observar algunos aspectos:

A) La gráfica será del tipo $\cup$, es decir cóncava, cada vez que el coeficiente principal "a" sea mayor que cero y la gráfica tendrá la forma $\cap$, es decir convexa, siempre que el término con x^2 tenga coeficiente menor que cero.

Esquemáticamente:

CONSIDÉRESE $f(x) = ax^2 + bx + c$		
Si $a \rangle 0$ **Es decir** a **es positiva**	**Entonces** la gráfica es como	
Si $a \langle 0$ **Es decir** a **es negativa**	**Entonces** la gráfica es como	

B) Corta al eje "y" en (0; c)

En cada función determine la concavidad y la intersección con el eje y.

ECUACIÓN DE LA FUNCIÓN	INTERSECCIÓN EJE "Y"	SEÑALE EL TIPO DE CONCAVIDAD	
		$\cup$	$\cap$
$-x^2 + 3x - 2$	$(0; -2)$		X
$3x^2 - x + 7$			
$x^2 - 8$			
$\frac{3}{5}x^2 - x$			
$-0{,}5x + 2x^2 - 3$			

C) Si corta al eje "x" se dice que la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ tiene solución, o bien que el polinomio $ax^2 + bx + c$ tiene raíces en el conjunto de números reales.

Estas raíces o ceros del polinomio cuadrático se pueden determinar con la fórmula:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{4a} \quad \text{y} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{4a}$$

- En cada función del punto B determine los cortes con el eje x, si los hay.

D) El punto más alto (mínimo de la función) o el punto más bajo (máximo de la función) se obtiene como el par ordenado

$\left(\frac{-b}{2a}; \frac{-\Delta}{4a} \right)$ donde a es el coeficiente principal,

b el coeficiente de x y

$\Delta = b^2 - 4ac$ (llamado discriminante)

Este par ordenado se denomina VÉRTICE de la parábola

- En cada función del punto B determine el vértice de la parábola.

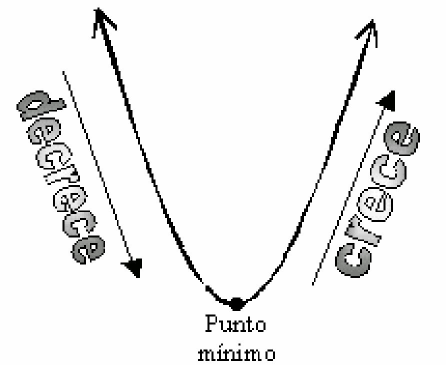
E) En toda gráfica de una función cuadrática ocurre que si dobla el papel, por la línea vertical que pasa por el vértice, la gráfica queda dividida en dos partes exactamente iguales. tiene un eje de simetría. Esta línea tiene ecuación $x = \frac{-b}{2a}$

Esta línea es un eje de simetría.

- Construya las gráficas de cada función del punto B y trace su eje de simetría de forma que se diferencie del resto de la gráfica.

Monotonía de la función cuadrática

Ver presentación power point “Monotonía”



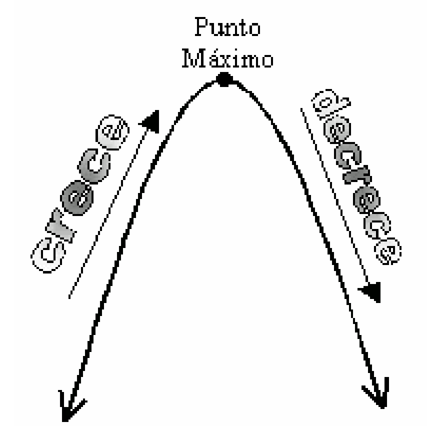
Si el coeficiente principal del polinomio es mayor que cero, la función es creciente desde $-\infty$ hasta $\frac{-b}{2a}$.

Y en el resto del dominio, $\left]\frac{-b}{2a};\infty\right[$ decrece.

Si el coeficiente principal del criterio de la función es menor que cero, el comportamiento de la función es el siguiente:

En $\left]\frac{-b}{2a};\infty\right[$ la función crece y

en $\left]-\infty;\frac{-b}{2a}\right[$ la función crece.



Ejercicios

<u>Primera parte</u>

En grupos resuelvan lo siguiente, tomado de http://usuarios.lycos.es/juanbeltran/id412.htm
Halle el dominio, contradominio, y grafique las siguientes funciones cuadráticas:

1) $f(x)=x^2-2x-1$ 2) $f(x)=-2x^2+3x+6$ 3) $f(x)=-2x^2+3x$

4) $f(x)=-2x^2+6$ 5) $f(x)=-2x^2$ 6) $f(x)=4x^2$

7) $f(x)=\frac{1}{4}x^2$

<u>Segunda parte</u>

Dibuje cada parábola siguiente.

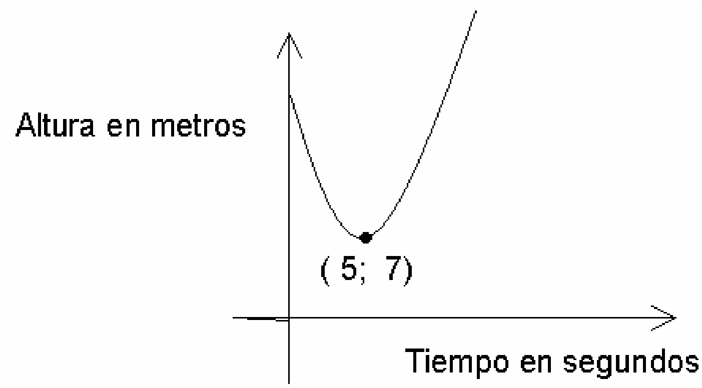
1) $g(x)=(x-3)(x+3)$ 2) $h(x)=x^2+1$ 3) $f(x)=2-x^2$

Indique en cada caso: Concavidad, vértice, monotonía, cortes con los ejes y eje de simetría.

<u>Tercera parte</u>

Resuelva las siguientes situaciones.

A) Si el gráfico anexo modela parte la trayectoria de un ave, ¿en qué segundo alcanzó la menor altura?, ¿cuál fue la menor altura?



B) Un insecto alcanza una longitud de 5 cm al saltar y una altura máxima de 3 cm.

Dibuje en un eje de coordenadas la situación de manera que el insecto parta del origen.

Determine el criterio de la función que modela la trayectoria del insecto.

C) Un juguete se dispara directamente hacia arriba con una velocidad inicial v_o (en cm por segundo) y su altura sobre el piso en cm, después de t segundos está dada por $h(t) = -8t^2 + v_0 t$

Si el juguete llega al suelo en 7 segundos, ¿cuál es la velocidad inicial?

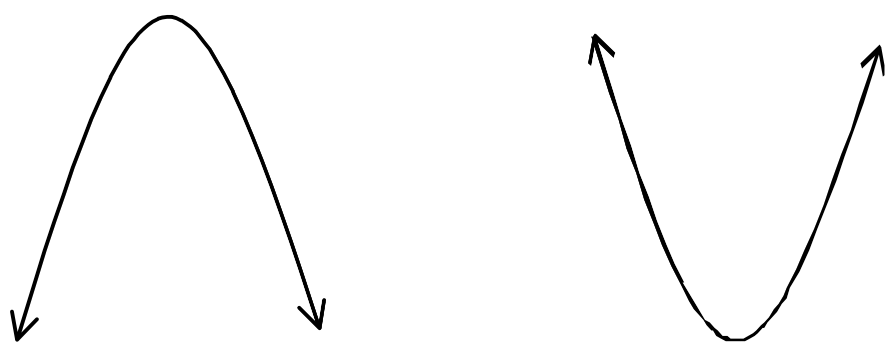
¿Cuál es la altura máxima que alcanza el cohete?

Fuentes de Información

Funciones y gráficas <http://usuarios.lycos.es/juanbeltran/id412.htm> *funciones graficar OR gráficas* (18 de Junio de 2004)

EL RECORRIDO DE LA VIDA

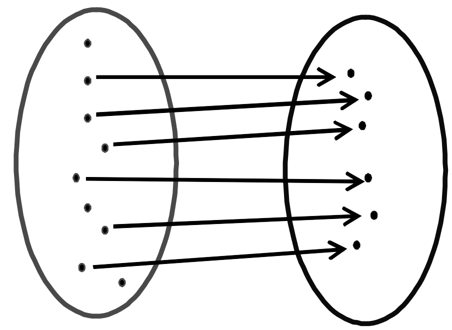
En los caminos de la vida, no te envanezcas cuando estés en la cúspide del éxito,
ni te desesperes cuando visites los abismos del dolor y el fracaso.



DEVOLVIÉNDOSE EN EL CAMINO(4)

Si bien no siempre podemos dar marcha atrás, a veces es saludable devolverse, deshacer, retornar o ir al contrario. Cuando hacemos un nudo con mecates o hilo y necesitamos deshacerlo, hacemos los “pasos contrarios”. En el caso de las funciones NO todas tienen la posibilidad de “invertirse”.

Como ya se ha estudiado: NO toda relación es una función. Por ejemplo, a la derecha se ilustra una relación, entre dos conjuntos, que <u>no</u> es función.



¿Por qué la relación no es función?

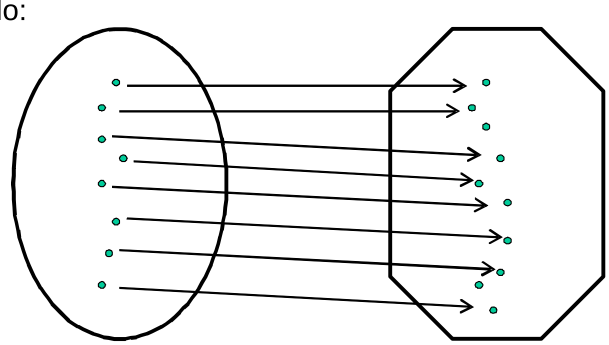
____

En este caso, sin embargo, si se cambian de orden los conjuntos, de manera que el de salida sea el de llegada y se mantiene la “conexión” de los elementos, la situación varía: se obtiene una función.

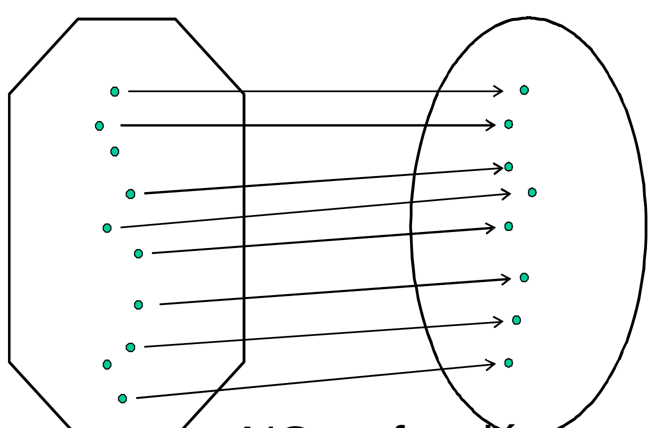
Ilustre lo anterior en un diagrama sagital.

En cambio, hay relaciones que son funciones y que al plantear “la relación contraria” NO se obtiene una función.

Por ejemplo:



Es función



NO es función

Analice el ejemplo anterior e indique, ¿cómo debía ser la función para que “al devolvernos” se obtuviera una función?

____

____

____

Antes de continuar con la lectura, reúnase con una o dos personas y comenten esta situación.

Recuerde que en una relación que es función, NO sobran elementos en el conjunto de salida.
¿Qué debe ocurrir con los elementos del conjunto de llegada de una función (es decir, con el codominio) para que al “devolvernos” obtengamos una función?

____

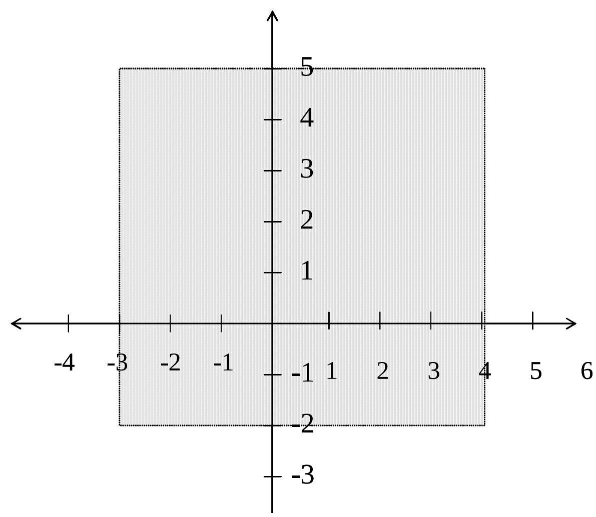
____

Una forma sencilla de indicar esta característica puede ser:

> “<u>Una condición</u> para que una función *al devolverse* también sea función es que **no sobren elementos en el conjunto de llegada**”.

En la gráfica se debe evidenciar que todos los elementos del conjunto de llegada (codominio) *se relacionan* con los del dominio.

Por ejemplo, una función que va de $\left[-3;\ 4\ \right]$ a $\left[\ -2;\ \ 5\right]$ debe contar con gráfica en el sector del plano que se ilustra a la derecha, de manera que todo número entre menos dos y cinco tenga su respectiva <u>preimagen</u>.



Cuando una función satisface esta condición se dice que la función es **sobreyectiva**.

Una forma simbólica de expresar, matemáticamente, la sobreyectividad es la siguiente:

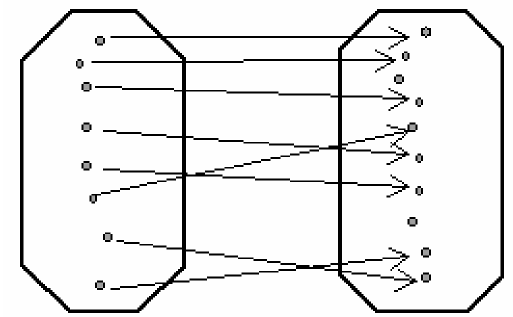
Sea $f : \mathrm{A} \to \mathrm{B}$ si $\forall y;\quad y \in \mathrm{B}\quad \exists a \in \mathrm{A}$ t. q. $f(a) = y \quad \Rightarrow \quad f(x)$ es sobreyectiva.

La interpretación de esta simbología se expone a continuación

Sea $f : \mathrm{A} \to \mathrm{B}$	Sea f una función de A en B
si $\forall y;\quad y \in \mathrm{B}$	si para todo elemento que pertenece a B
$\exists a \in \mathrm{A}$	existe, al menos un elemento *a* en A
t. q.	tal que
$f(a) = y$	sea preimagen suya
$\Rightarrow\quad f(x)$ es sobreyectiva	entonces la función es sobreyectiva

Analice cada función siguiente e indique si es o no sobreyectiva.

1)



¿Cumple la sobreyectividad? ( ) Sí ( ) No

Explique

____

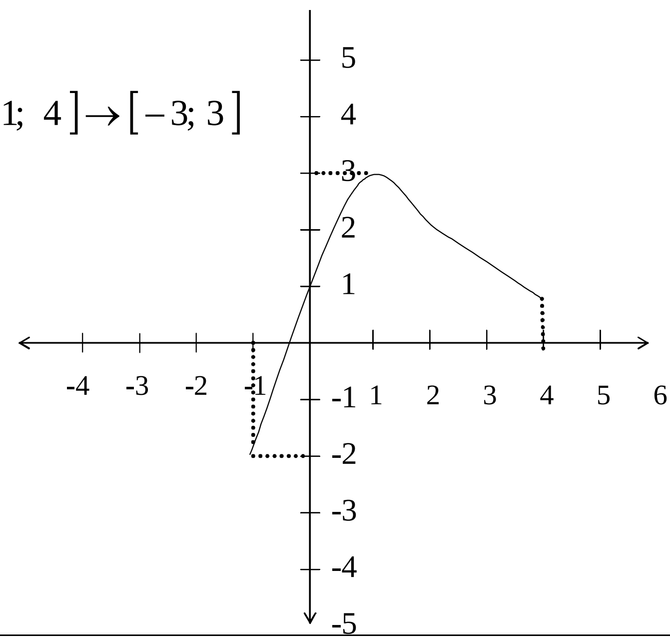
____

____

____

2)

$g:[-1;\ 4]\rightarrow[-3;\ 3]$



¿Es sobreyectiva la función?
( ) Sí ( ) No

Explique

____

____

____

____

____

3) Considere $h(x)$ cuyo dominio es $\{-2;\ -1;\ 0;\ 2;\ 1;\ \}$ y codominio $[-4;\ 4]$ y con tabla de valores:

x	-2	-1	0	1	2
$g(x)$	-1	$-0{,}5$	0	$0{,}5$	1

¿Es sobreyectiva la función? ( ) Sí ( ) No

Explique

____

____

____

Reúnase en grupos de tres o más y revisen sus respuestas a los ejercicios anteriores.

La condición de **sobreyectividad** es **UN** requisito para que al plantear una relación "al devolverse" esta constituya también una función.

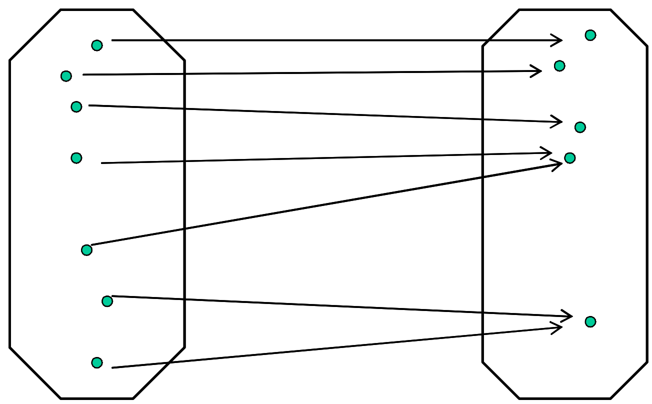
A continuación se ilustran funciones sobreyectivas que al intentar establecer su *relación inversa* NO se obtienen funciones.

La relación representada en el diagrama sagital de la derecha es una función.

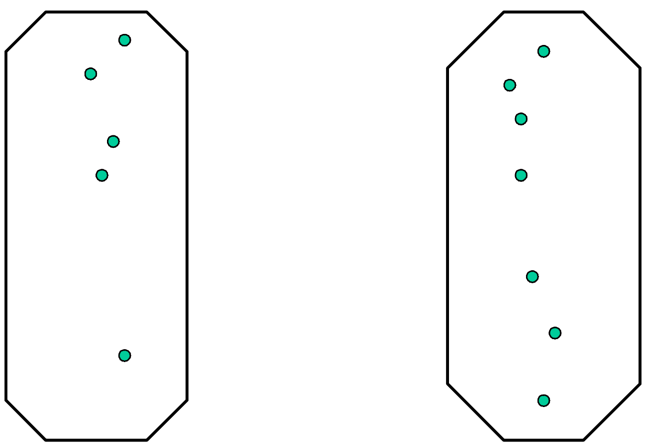
Esta función satisface que en el codominio "no sobran elementos".

Dicho de otra forma: el codominio y el ámbito son el mismo conjunto.

Es sobreyectiva.



Represente en el diagrama siguiente las líneas de relación *devolviéndose*, **observe** que ya se intercambiaron los conjuntos:



Verifique con un(a) compañero(a) si realizó los trazos respectivos a la función anterior, en el intento de establecer una *inversa*.

En pareja respondan:

¿La nueva relación, es función? ( ) Sí ( ) No

Explique:

____
____
____

Considere bien definida la función cuya tabla de valores es la de la derecha.

Suponga que cuando se definió la función se estableció previamente un codominio que la hace sobreyectiva.

x	-2	-1	$-0{,}5$	2	3
$h(x)$	4	1	$0{,}25$	4	9

Si se "invierte" la tabla de valores, ¿qué ocurre con el 4?

Si lo desea, represente la situación *inversa* con un diagrama sagital.

Analice cuidadosamente los ejemplos anteriores y en grupos de tres o cinco respondan a la siguiente interrogante.

¿Cuál es la otra condición para que una función tenga función inversa?

____

____

Cuando una función satisface que cada preimagen *únicamente* posee **una** imagen se clasifica como **inyectiva**.

La inyectividad se puede expresar indicando que

“cada elemento del ámbito tiene una única preimagen”

“cada elemento del conjunto de llegada se corresponde con uno y sólo uno de los elementos del conjunto de salida”

“no se repiten las imágenes”

La siguiente simbología expresa la inyectividad:

Sea $f : \mathrm{A} \to \mathrm{B}$ si $\forall y;\ y \in f(\mathrm{A})\ \exists!\ x;\ x \in \mathrm{A}$ t. q. $f(x) = y \Rightarrow f(x)$ es inyectiva.

Sea $f : \mathrm{A} \to \mathrm{B}$	Sea f una función de A en B
si $\forall y;\ y \in f(\mathrm{A})$	si para todo elemento del conjunto de imágenes (rango)
$\exists!\ x;\ x \in \mathrm{A}$	existe un único elemento x en A
t. q.	tal que
$f(x) = y$	la función evaluada en él corresponda a la imagen
$\Rightarrow f(x)$ es inyectiva	entonces la función es inyectiva

Analice cada función siguiente e indique si es o no inyectiva.

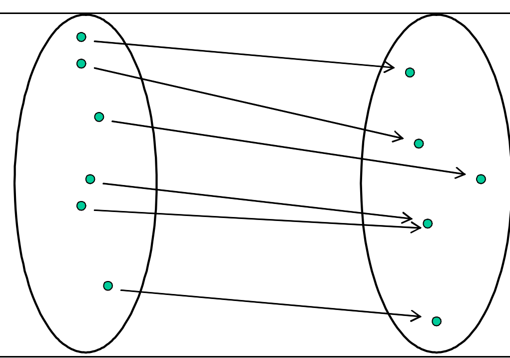
¿Es inyectiva? ( ) Sí ( ) No

Explique:

____

____

____



x	2,75	1,25	2,66	1,02	1,98
$g(x)$	3	1	3	1	2

¿Cumple $g(x)$ con la inyectividad? ( ) Sí ( ) No

Explique:

____

____

Se establece la función que hace corresponder a cada estudiante del Colegio de Telesecundaria con su edad en años cumplidos.

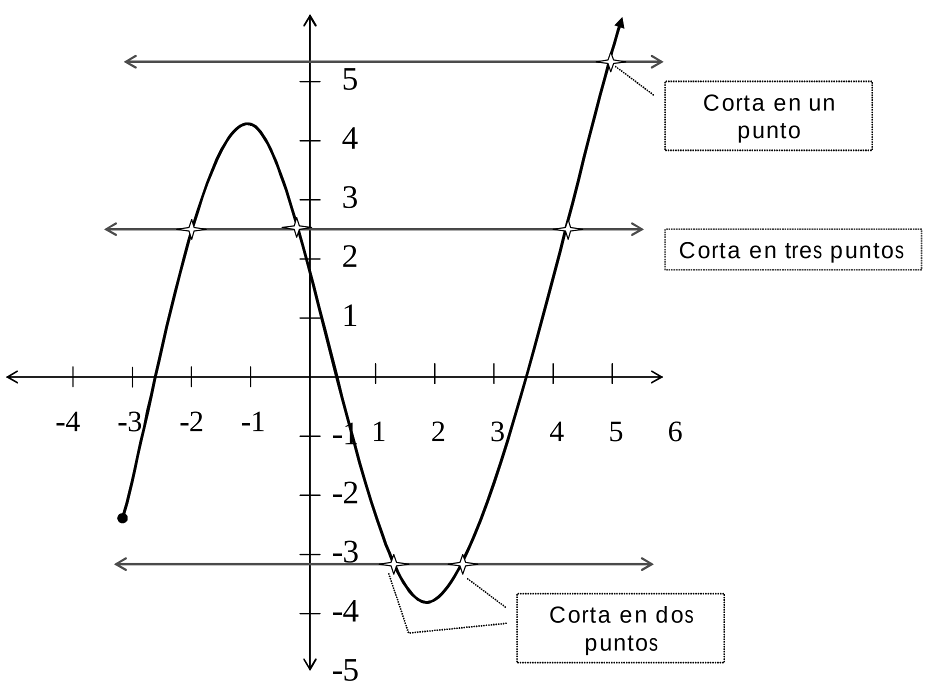
¿Es inyectiva? ( ) Sí ( ) No

Explique:

____

____

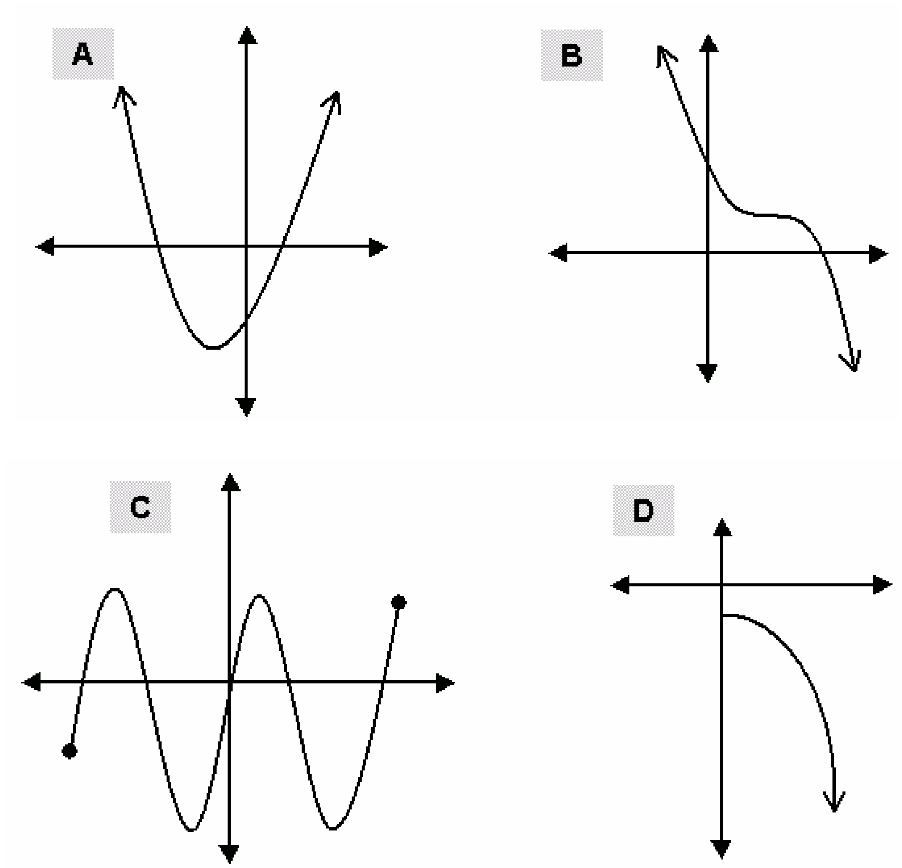
En la gráfica una forma sencilla de determinar la inyectividad consiste en trazar líneas rectas horizontales… Siempre que estas corten en un solo punto a la gráfica, la función es inyectiva.



Después de analizar la gráfica y de releer las páginas 204 y 205 en relación con la clasificación de una función como inyectiva, explique por qué la función de la gráfica de la izquierda NO es inyectiva.

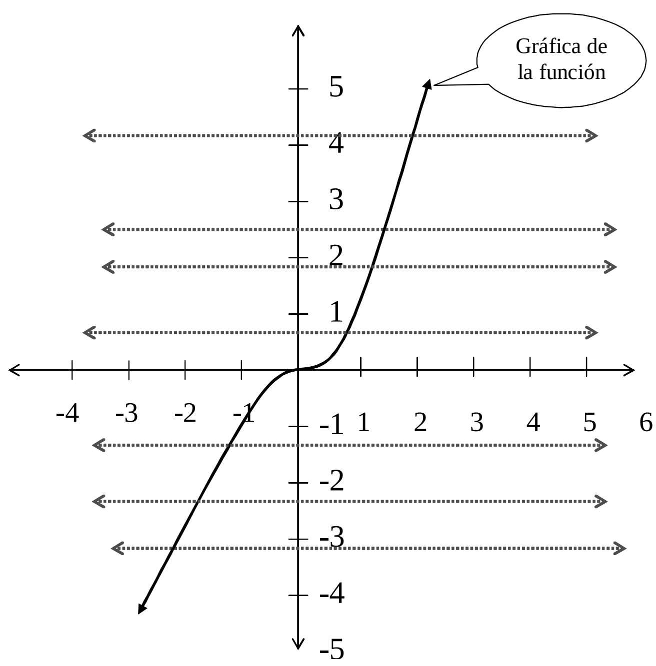
Utilice en su explicación la palabra imagen o imágenes.

Ejercicio Determine, para cada función representada, si es o no inyectiva.



CLAVE: Son inyectivas B y D.

Analice la gráfica siguiente, se trata de una función inyectiva.



Exprese lo que ocurre al analizar la gráfica trazando líneas horizontales.

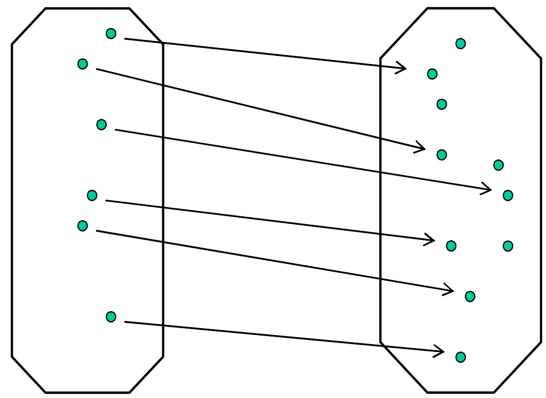
Analice la función y verifique que para cada imagen distinta, la preimagen es distinta.

También se puede expresar que en este caso: si $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

El diagrama sagital de la derecha corresponde a una función inyectiva.

Sin embargo, al intentar "devolvernos" NO obtenemos una función.

¿Qué puede concluir en relación con las características de una función para "devolvernos" de un conjunto a otro, mediante una función?



Cuando una función satisface la inyectividad y la sobreyectividad se clasifica como función **biyectiva**, también se le llama **uno a uno**, en cuyo caso posee inversa.

Una función es biyectiva si y sólo si para cada preimagen existe una única imagen y el ámbito o rango es el codominio.

Simbólicamente:

Sea $f : \mathrm{A} \to \mathrm{B}$ si $\forall y;\ \ y \in \mathbf{B} \quad \exists! x;\ x \in \mathrm{A}$ t. q. $f(x) = y \ \Rightarrow f(x)$ es biyectiva.

Complete el cuadro de la explicación de la simbología.

Sea $f : \mathrm{A} \to \mathrm{B}$	--
si $\forall y;\ \ y \in \mathrm{B}$	--
$\exists!\ x;\ \ x \in \mathrm{A}$	--
t. q.	--
$f(x) = y$	--
$\Rightarrow\ f(x)$ es biyectiva	

Otra forma de expresar la biyectividad es:

Si el codominio y el ámbito son el mismo conjunto y cada imagen tiene una única preimagen entonces la función es biyectiva.

Cuando en una función dos preimágenes distintas poseen imágenes distintas y el codominio es el rango, entonces la función es biyectiva.

> Esta clasificación de las funciones como biyectivas se está estudiando como el requisito necesario para que una función posea "función inversa"
>
> Pero, …¿qué es una función inversa?

Ejemplos de funciones inversas

1) Considere la función $f(x) = 2x - 1$. Para ella, complete la siguiente tabla de valores

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	-5	____	-1	_____	3

Represente en un plano cartesiano la función lineal.

Cuando se "invierte" la tabla de valores se obtiene:

preimágenes de la inversa	-5	-3	-1	1	3
imágenes de la inversa	-2	-1	0	1	2

Represente en el mismo plano cartesiano y utilice otro color para el trazo de la inversa.

2) Suponga que la función siguiente se define de IR al conjunto de los reales positivos, es decir $g(x):\ IR \to \left]0;\ +\infty\right[$ y que una tabla de valores es:

x	-2	-1	0	$0{,}5$	1	3
$g(x)$	$0{,}25$	$0{,}5$	1	$1{,}4$	2	8

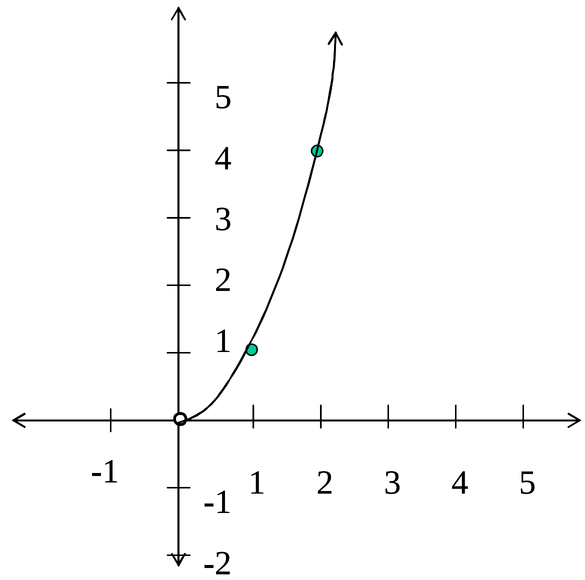
Represente la función en el plano, use un color diferente.

"Déle la vuelta" a la tabla y grafique la inversa.

preimágenes de la inversa						
imágenes de la inversa						

3) Se define la función $h(x) = x^2$ de manera que $h : \left]0;\ +\infty\right[\to \left]0;\ +\infty\right[$

La gráfica de la función es la siguiente:



¿Puede realizar la gráfica de la inversa?

4) Para la función $g(x)=3x+2$ se puede utilizar una tabla de valores con sólo dos puntos o pares ordenados:

x	-3	2
$g(x)$	-7	8

Represente en un plano cartesiano.

Utilice la tabla de valores de la inversa para representar en el mismo plano:

x	-7	8
$g(x)$	-3	2

Con estos pares ordenados, determine la ecuación de la línea recta.

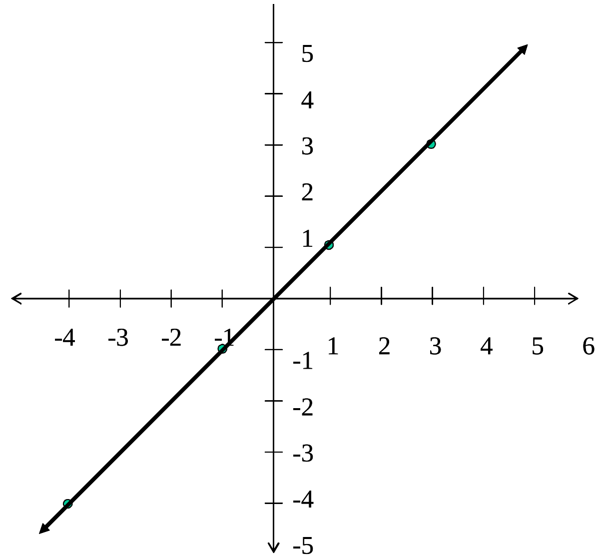
El valor de b = ___________ El valor de m = ___________

La ecuación de la función inversa de $g(x)$ es la siguiente: ________________________

Las gráficas de funciones inversas entre sí

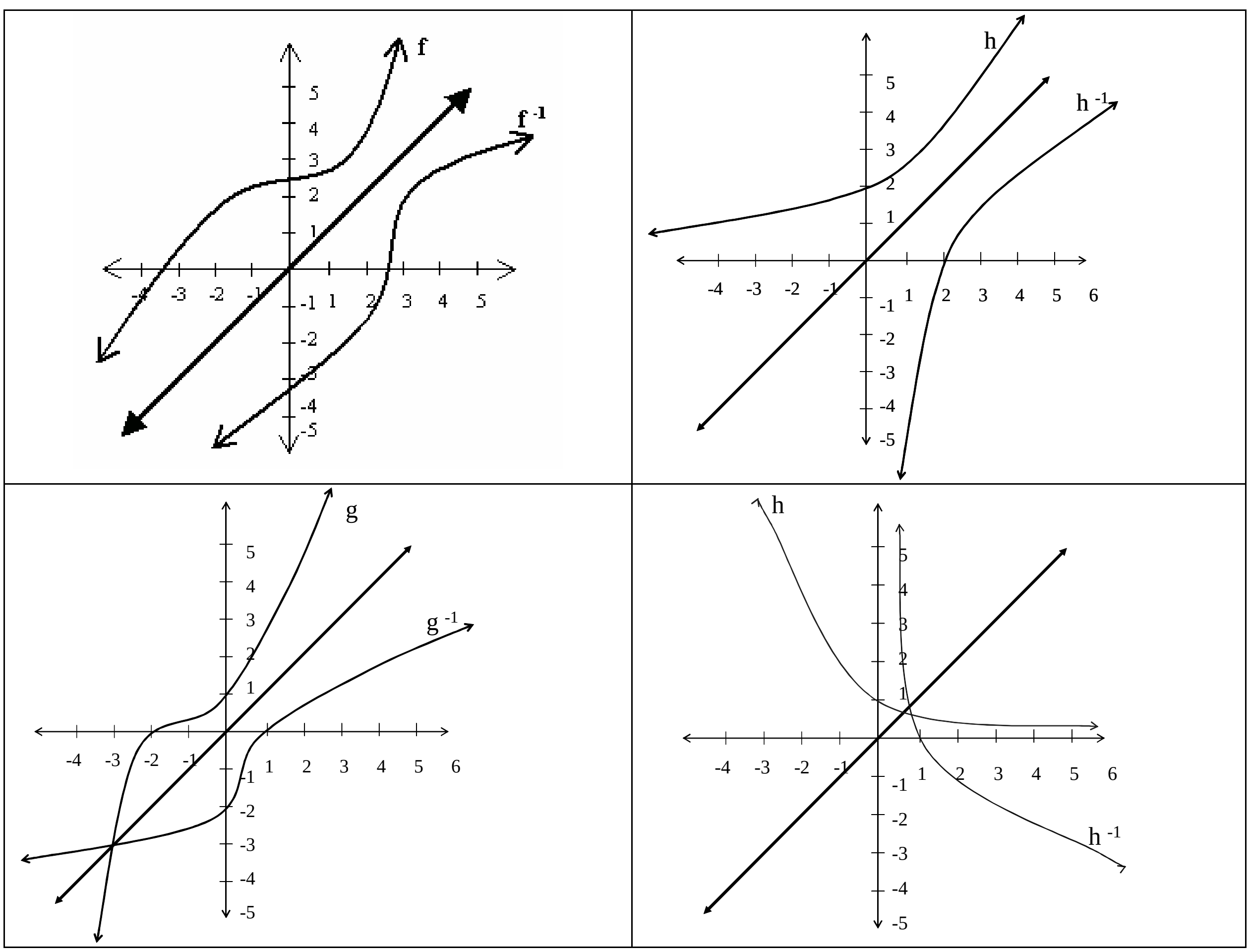
Utilice las representaciones conjuntas de inversas que realizó al seguir las páginas anteriores, observe la representación en cada caso. ¿Nota alguna relación entre los diversos ejemplos?

En las gráficas de las funciones inversas, juega un papel muy importante la línea recta que pasa por los puntos $(-8;\ -8)$, $(\ -5;\ -5\ )$… etc. Su gráfica es la de la derecha.

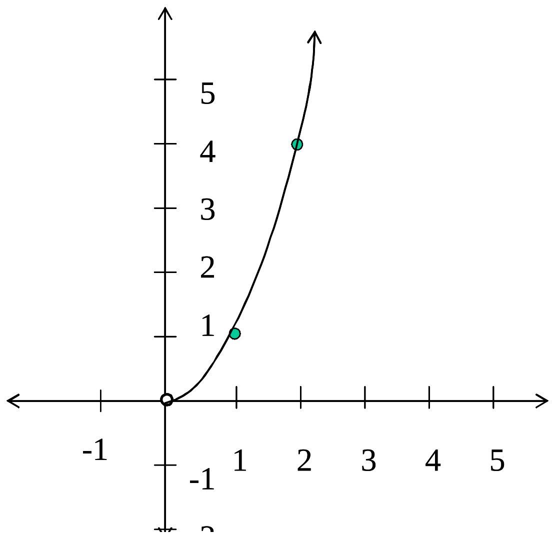


Cuando se tienen dos funciones inversas sus gráficos se reflejan uno en el otro, de acuerdo con esa línea.

A continuación algunos ejemplos de gráficas de funciones inversas entre sí…



A continuación la gráfica de una función biyectiva, dibuje en el mismo plano su respectiva inversa. Trace primero la recta y=x.



Puede ayudarse con los pares ordenados "*invertidos*", como por ejemplo: (4; 2) y (1; 1).

En relación con el tema de función inversa, lea, analice y comente cada una de las expresiones siguientes:

- Toda función posee inversa.

____
____
____
____

- Cuando se grafican funciones inversas en un mismo plano, estas no pueden intersecarse.

____
____
____
____

- Cuando en una gráfica de función, ninguna línea horizontal la "toca" más de una vez y el ámbito y el codominio son iguales, entonces la función tiene inversa.

____
____
____
____

- Una forma para graficar la inversa de una función consiste en basarse en la tabla de valores de la función y construir "al revés" los pares ordenados.

____
____
____
____

- Para que una función tenga inversa basta con que sea inyectiva.

- Si una función es sobreyectiva, entonces es seguro que posee función inversa

Cálculo de la fórmula de la inversa de una función

El cálculo de las funciones inversas consiste en "despejar x en términos de y".

Inversa de función lineal

$$y = mx + b$$
$$y - b = mx$$
$$\frac{y-b}{m} = x$$

$$f^{-1}(x) = \frac{1}{m}x - \frac{b}{m}$$

Ejemplo:

g(x)=3x+2

$$y = 3x + 2$$
$$y - 2 = 3x$$
$$\frac{y-2}{3} = x$$

$$g^{-1}(x) = \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}$$

Represente ambas funciones en un mismo plano cartesiano.

Ejercicios Determine las funciones inversas de las siguientes funciones lineales.

1) $y = \frac{2}{5} - x$ 2) $2x - 3y = 1$ 3) $f(x) = \frac{4x-3}{2}$

Inversa de función cuadrática h(x) =ax^2 + c a$\neq 0$

Este tipo de función es inyectiva si se define en el dominio $\left]0;\ \infty\right[$ o bien en el dominio $\left]-\infty;\ 0\right[$.

Por otra parte, si se toma como conjunto de llegada al rango, entonces h(x) es sobreyectiva.

Con todas estas condiciones, se puede afirmar con certeza que existe una inversa y su cálculo utiliza los siguientes pasos:

$$y = ax^2 + c$$
$$y - c = ax^2$$
$$\frac{y-c}{a} = x^2$$
$$\pm\sqrt{\frac{y-c}{a}} = x$$

Obsérvese que existen dos opciones o positiva o negativa.

Ejemplos

1) $g(x) = 2x^2 + 3$ $\qquad g(x) : \left]0; +\infty\right[\to \left]3;\ +\infty\right[$

Es biyectiva, por tanto, posee inversa.

Cálculo de la inversa:

$$y = 2x^2 + 3$$

$$y - 3 = 2x^2$$

$$\frac{y-3}{2} = x^2$$

$$\pm\sqrt{\frac{y-3}{2}} = x$$

Como la función está definida como $g(x) : \left]0; +\infty\right[\to \left]3;\ +\infty\right[$

la inversa queda definida así $g^{-1}(x) : \left]3;\ +\infty\right[\to \left]0; +\infty\right[$ y $g^{-1}(x) = \sqrt{\frac{x-3}{2}}$

Utilice las siguientes tablas de valores y grafique las funciones en un mismo plano.

x	0	1	2	3	4
$g(x)$	3	5	11	21	35

$\downarrow$

Este par ordenado NO es parte de la grafica

x	3	5	11	21	35
$g^{-1}(x)$	0	1	2	3	4

$\downarrow$

Este par ordenado NO es parte de la grafica

2) $g(x) = 2x^2 + 3$ $\qquad g(x): \left]-\infty;\ 0\right[\to \left]3;\ +\infty\right[$

Es biyectiva, por tanto, posee inversa.

Cálculo de la inversa:	En este caso, la inversa se define
$y = 2x^2 + 3$	$g^{-1}(x): \left]3;\ +\infty\right[\to \left]-\infty;\ 0\right[$
$y - 3 = 2x^2$	lo cual significa que la ecuación de $g^{-1}(x)$ es
$\dfrac{y-3}{2} = x^2$	$g^{-1}(x) = -\sqrt{\dfrac{x-3}{2}}$
$\pm\sqrt{\dfrac{y-3}{2}} = x$	

Utilice las siguientes tablas de valores y grafique las funciones en un mismo plano.

x	-4	-3	-2	-1	0
$g(x)$	35	21	11	5	3

$\downarrow$

Este par ordenado NO es parte de la grafica

x	3	5	11	21	35
$g^{-1}(x)$	0	-1	-2	-3	-4

$\downarrow$

Este par ordenado NO es parte de la grafica

Inversa de función radical $\sqrt{x+c}$

g(x) = $\sqrt{x+c}$ con c $\in \Re$ $g(x):[-c\,;\ +\infty[\ \rightarrow [0;\ +\infty[$

El dominio se obtuvo de resolver la inecuación $x+c \geq 0$

Es una función biyectiva, por tanto tiene inversa.

$$y = \sqrt{x+c}$$
$$y^2 = x+c \qquad\qquad g^{-1}(x) = x^2 - c$$
$$y^2 - c = x$$

Ejemplo:

Determinar la función inversa de $f(x) = \sqrt{x+5}$ $f(x):[-5;\ +\infty[\ \rightarrow [0;\ +\infty[$

$$y = \sqrt{x+5}$$
$$y^2 = x+5 \qquad\qquad g^{-1}(x) = x^2 - 5$$
$$y^2 - 5 = x$$

Construya tablas de valores para las funciones y trace sus gráficas en un mismo plano.

Ejercicios Para cada una de las funciones determine el dominio y el codominio que permitan la biyectividad de la función. Posteriormente, determine la inversa de cada función.

1) $g(x) = 3x^2 - 2$ 2) $h(x) = \sqrt{-x+3}$ 3) $f(x) = 5 + x^2$

4) $h(x) = \frac{2}{5} - x^2$ 5) $f(x) = \sqrt{\frac{x}{5} - \frac{3}{2}}$ 6) $g(x) = \sqrt{2x+4}$

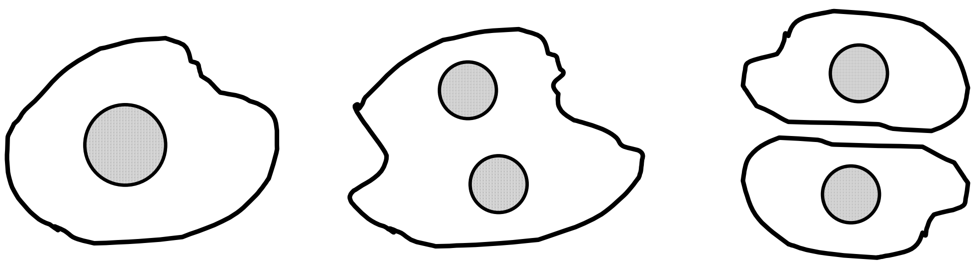
7) $f(x) = \frac{-x^2}{5}$ 8) $h(x) = 3\sqrt{x}$ 9) $g(x) = \sqrt{5-x}$

LA MITOSIS Y LA MATEMÁTICA(4)

¿Sabes lo que es la mitosis?

Se trata de un proceso celular, el cual tiene por resultado la obtención de dos células “hijas” con el mismo número de cromosomas que la célula original.

MITOSIS



Si este proceso se da cada cierto tiempo, por ejemplo, cada 15 minutos, significa que cada cuarto de hora se duplica la cantidad de células.

Iniciando con una célula…

Tiempo	Cantidad de células
0	**1**
Primeros 15´	2
Después de dos intervalos de 15´	4
Pasados TRES intervalos de 15´, o sea 45´	8
60´	16
75´	32
90´	64
• • •	• • •
Intervalo número “x” de quince minutos	$\underbrace{2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot \ldots \cdot 2}_{\text{expresa una potencia de base dos}}$

En la tabla anterior, la última casilla “ $2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot \ldots \cdot 2\cdot 2$ ” es una multiplicación en la cual todos los factores son iguales a dos y se repiten **x** veces.

¿Cuál fórmula describe esta situación? ____________________
(Use la forma de potencia, ¿cuál es la base y cuál el exponente?)

RECUERDE: Para “resumir” una multiplicación en la cual todos los factores son iguales se utilizan potencias.

La mitosis descrita se puede formular como $h(x) = 2^x$ (*¿Fue esa su respuesta a la pregunta anterior?*)

En el caso de la mitosis, la variable independiente, representada con " x ", NO toma valores negativos. Esto sucede por tratarse de cantidad de intervalos de 15 minutos.

Complete la siguiente tabla de valores:

x	0	1	2	3	4	5
$(mitosis)\ 2^x$	____	____	____	____	____	____

Represente en un plano cartesiano los datos obtenidos.

La gráfica representa la mitosis, partiendo de una célula y suponiendo que se da cada intervalo de 15´, por lo cual no se "usan x negativos".

Sin embargo, a la matemática le interesa la misma relación pero en la cual se puedan considerar valores negativos para " x ".

Es decir, $f(x) = 2^x$ considerando la posibilidad de que x sea cualquier número real.

En este formato, a la x (en el extremo superior derecho) se le llama **exponente** y al factor que se repite (en este caso 2) se le denomina **base**.

En este capítulo, se estudia el comportamiento de una potencia con <u>base positiva</u>, de acuerdo con los diferentes exponentes que se le pueden *aplicar*.

En este sentido, se tiene una variable independiente, <u>el exponente</u>, y una variable dependiente, lo obtenido: la <u>potencia</u>.

Para la función $h(x) = 2^x$, definida en IR, se puede generar la siguiente tabla de valores

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
2^x	0,125	0,25	0,5	1	2	4	8

Las preimágenes pueden tomarse de IR. Es decir, el dominio es IR.

Observe los valores que se obtienen e indique el ámbito: ________________________________

Represente la función en un sistema de ejes coordenados.

Interesantes funciones

Lectura individual

Definitivamente, el concepto de función es medular en la comprensión de fenómenos científicos, económicos, estadísticos y otros.

Unas de las funciones más interesantes son, precisamente, las funciones con ecuación $f(x) = a^x$ en la cuales la base a es un número positivo distinto de uno.

☞ Anote tres ejemplos de este tipo de función.

1) ____________________ **2)** ____________________

3) ____________________

Verifique con su profesora o profesor que sus ejemplos cumplan con las condiciones solicitadas.

Para analizar el comportamiento de este tipo de función, examine los siguientes casos particulares.

Ejemplo 1: $g(x) = 4^x$

Se construyen algunos pares ordenados.

Valor de x	Cálculo de la potencia	Valor de g(x)	Par ordenado determinado
- 3	$4^{-3} = \frac{1}{4^3} = \frac{1}{4 \cdot 4 \cdot 4} = \frac{1}{64}$	$\frac{1}{64} = 0{,}015625$	$\left(-3; \frac{1}{64}\right)$
-1	$4^{-1} = \frac{1}{4}$	$\frac{1}{4} = 0{,}25$	$\left(-1; \frac{1}{4}\right)$
0	$4^0 = 1$	1	$(0; 1)$
2	$4^2 = 16$	16	$(2; 16)$
3	$4^3 = 64$	64	$(3; 64)$

En la función se puede utilizar cualquier número real, por lo tanto su dominio es: ____________

Observe los valores obtenidos para g(x) y conteste ¿cómo son los números que obtiene la función? ____

La función consiste en Elevar 4 a diferentes valores. ¿Dará cero, la función en algún valor?
( ) Sí ( ) No

Grafique los pares ordenados obtenidos. Si puede utilice una hoja de papel cuadriculado.

Grupal Responda a las siguientes preguntas:

¿Cuál es el dominio de la función? ____

¿Qué sucede con la gráfica, conforme se toman valores de X cada vez más negativos?

____

Si se toman valores de X, cada vez mayores, ¿cómo son los valores que se obtienen en la función? ____

¿Dónde se ubica el par ordenado $(0;1)$? ____

¿Es posible obtener valores negativos para algún X?
( ) Sí. Anote ejemplos: ____________________________
( ) No. Anote por qué. ____________________________

¿Cuál es el ámbito de la función? ______________________

¿Existe solución para la expresión $4^x = 0$? En otras palabras, ¿existe algún exponente que al elevar 4 se obtenga cero? __________________

Entonces, ¿cuál es el rango o contradominio (ámbito) de la función? ______________________

Trabajo individual
<u>Ejemplo 2</u>: $h(x) = 3^x$

Realice los cálculos para algunos valores de X en IR.

h(x)= 3^x	**Par ordenado**
Si x= ____ entonces h(x)= ___________	(____; _____)
Si x= ____ entonces h(x)= ___________	(____; _____)
Si x= ____ entonces h(x)= ___________	(____; _____)
Si x= ____ entonces h(x)= ___________	(____; _____)

Grafique la función.

Determine cada uno de los siguientes elementos: **h(x) = 3^x**
a) Dominio de la función: ____________________
b) Ámbito de la función: ____________________
c) Corte con el eje Y: ____________________
d) Corte al eje X: ____________________

Grupal Resuelva los siguientes ejercicios.

1) Grafique las siguientes funciones y posteriormente responda a las inquietudes que les precede.

   (a) $h(x) = 5^x$

   (b) $f(x) = (2{,}5)^x$

   (c) $g(x) = \left(\dfrac{5}{4}\right)^x$

   (d) $k(x) = \left(\dfrac{1}{3}\right)^{-x}$

En relación con la forma gráfica, exprese en palabras lo que tienen en común las gráficas anteriores: ____

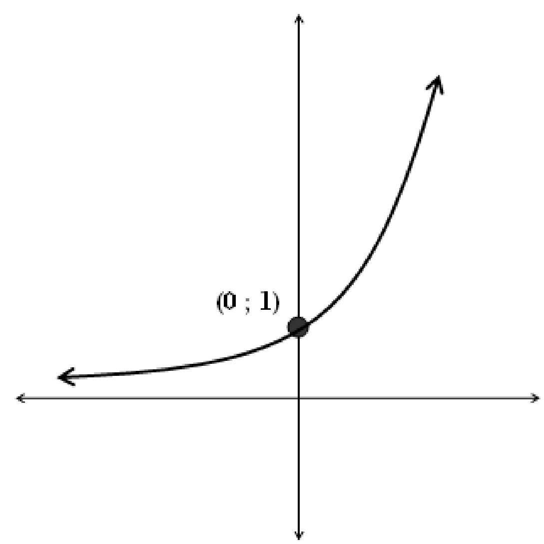
Además de la forma básica, ¿existe alguna otra particularidad que se repita en todas las representaciones? ¿cuál? ____

Además de que todas las gráficas pasan por el punto $(0; 1)$, ¿cuál otra característica comparten las representaciones anteriores? ____

En relación con la ecuación de las funciones, a^x, además de que la base es positiva y diferente de uno, ¿qué más tienen en común las anteriores funciones? ______________________________

En los ejemplos anteriores, todas las funciones a^x:

- tienen base mayor que uno.
- tienen una gráfica que pasa por $(0; 1)$.
- todas las representaciones se "acercan muchísimo" al eje x sin "tocarlo".
- Además la forma, en general, es como la de la derecha.
- Conforme se toman valores de x cada vez mayores, mayores son las imágenes. Es decir, son funciones **crecientes.**



Estas funciones, con dominio IR , tienen como ámbito o contradominio al conjunto $]0; +\infty[$

Observe que estas funciones con base mayor que uno, tienen diversas formas de ser escritas:

Pueden tener como base una fracción o un irracional $h(x)=\left(\dfrac{5}{3}\right)^{x}$ $l(x)=\left(\sqrt{3}\right)^{x}$

Pueden tener decimales como base $g(x)=(3{,}4)^{x}$

Puede “aparentar” tener base menor que 1 $f(x)=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-x}$

¿Qué pasa cuándo la base está entre 0 y 1?

Construya una tabla de valores, puede usar calculadora, para cada una de las siguientes funciones y grafíquelas

a) $f(x)=0{,}5^{x}$

x				
y				

b) $h(x)=3^{-x}$

x				
y				

c) $g(x)=\left(\dfrac{2}{3}\right)^{x}$

x				
y				

En relación con la base de la potencia, ¿cuál característica comparten las anteriores funciones?
____

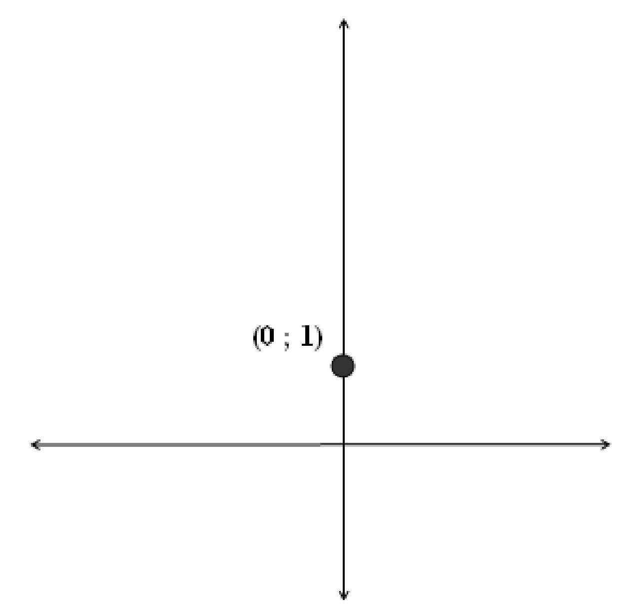
¿Qué valores toma la función cuando se “usa un x” negativo? ______________________________

¿Conforme se toman valores cada vez más a la izquierda de cero, cómo son los valores obtenidos en la función? ____

¿Son funciones crecientes o decrecientes? ____

Dibuje la forma general de las funciones exponenciales con base entre 0 y 1.

Funciones a^x con a un número entre cero y uno.



Estas funciones son decrecientes, sus gráficas nunca “tocan” al eje x, su dominio es IR, su ámbito es IR^+.

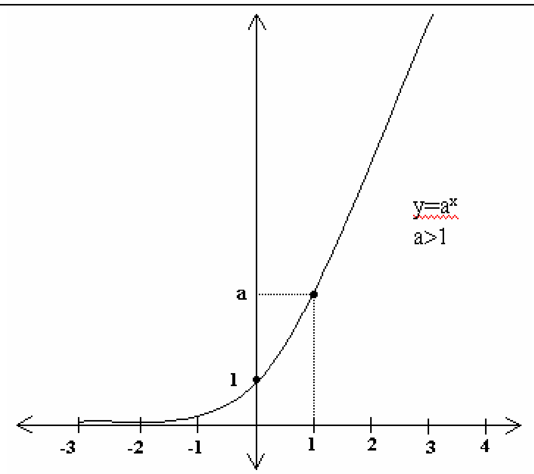
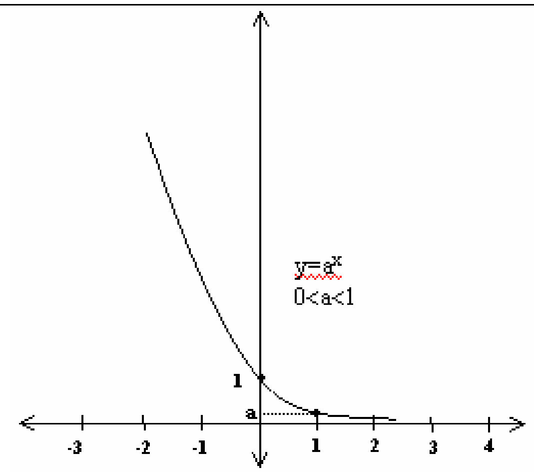
FUNCIÓN EXPONENCIAL
RESUMEN

Toda función de la forma $h(x) = a^x$

con a un número mayor que cero y distinto de uno es una función exponencial

Dominio IR
Rango o ámbito IR $^+$

Su gráfico tiene una de dos formas:

Si $a \rangle 1$	**Si** $0 \langle a \langle 1$
	
Conforme se toman valores más grandes, se obtienen imágenes también más grandes. Es creciente.	Conforme se toman valores más grandes, se obtienen imágenes cada vez más pequeñas. Es decreciente.

La función exponencial cumple que para hacer su gráfica NO es necesario "despegar" el lápiz del papel. Su trazo se puede realizar continuo. Es decir es una función **continua**.

La gráfica se "acerca muchísimo" al eje x pero no lo corta. Esto se expresa diciendo que el eje x es una **asíntota** de la gráfica.

$a^0 = 1 \Rightarrow (0;\ 1)$ pertenece a la gráfica

$a^1 = a \Rightarrow (1;\ a)$ pertenece a la gráfica

No hay intersección con el eje x.

Interseca al eje y en (0; 1)

La siguiente lectura es optativa.

LEYENDA DEL AJEDREZ

Tomado de http://www.sectormatematica.cl/ajedrez/leyenda.htm

La invención del ajedrez se ha atribuido a los hindúes, árabes, persas, egipcios, babilonios, chinos, griegos, romanos, judíos, araucanos, castellanos, irlandeses, italianos y galos, entre otros. Las lagunas históricas acerca de su origen contribuyeron al florecimiento de diversas leyendas, y entre ellas, podemos destacar la del joven Lahur Sissa.

Este personaje era un pobre y modesto brahmán (miembro de una casta sacerdotal hindú que reconoce a Brahma como su Dios) que vivió hace muchos siglos en la provincia de Taligana, al norte de la India, en el continente asiático.

En aquellas lejanas tierras gobernaba un magnánimo Rey llamada Iadava. Cierto día las huestes del aventurero Varangul invadieron el reino, desatándose una cruenta guerra. Iadava, que era un excelente estratega, derrotó a sus enemigos en los campos de Dacsina, ya que en el fragor de la lucha perdió a su hijo, el príncipe Adjamir.

Este incidente lo abatió profundamente y se pasó los días subsiguientes encerrado en Palacio reproduciendo, en una gran caja de arena, las alternativas del combate donde perdió al único heredero de la dinastía.

Los sacerdotes elevaban sus plegarias y de todas partes llegaban obsequios y diversiones para tratar de sacar al rey de su aflicción; mas todo parecía en vano.

Algún tiempo después, un inesperado visitante llegó al Palacio solicitando una audiencia con el Rey. Al interrogársele sobre el motivo de su petición, el joven se identificó como Lahur Sissa y había viajado durante treinta días desde la aldea de Namir, para entregarle a Su Majestad un modesto presente que lo sacaría de su tristeza, le brindaría distracción y abriría en su corazón grandes alegrías.

Iadava al enterarse de las intenciones del desconocido ordenó que lo hicieran pasar de inmediato. Sissa presentó al Monarca un gran tablero dividido en 64 cuadritos y sobre este colocó dos colecciones de diferentes piezas. Le enseñó pacientemente al rey, los ministros y los cortesanos de la Corte la índole del juego y las reglas fundamentales:

> *- Cada uno de los jugadores dispone de ocho piezas pequeñitas, llamadas Peones. Representan la infantería que avanza sobre el enemigo para dispersarlo. Secundando la acción de los peones vienen los Elefantes de guerra (las torres), representados por piezas mayores y más poderosas; la Caballería, indispensable en el combate, aparece igualmente en el juego, simbolizada por dos piezas que pueden saltar como dos corceles sobre las otras, y para intensificar el ataque se incluyen -representando a los guerreros nobles y de prestigio-los dos Visires (alfiles) del Rey. Otra pieza dotada de amplios movimientos, más eficiente y poderosa que las demás, representará el espíritu patriótico del pueblo y será llamada la Reina* ***[la dama]****. Completa la colección una pieza que aislada poco vale, pero que amparada por las otras se torna muy fuerte: es el Rey.*

En pocas horas el Soberano comenzó a jugar fascinado por el nuevo pasatiempo, consiguiendo derrotar a varios miembros de su Corte en partidas que se desenvolvían impecablemente sobre el tablero.

En determinado momento el Rey hizo notar, con gran sorpresa, que la posición de las piezas, por las combinaciones resultantes de diversos lances, parecía reproducir exactamente la batalla de Dacsina. Intervino entonces Sissa para decirle:

- Piensa que para el triunfo es imprescindible que sacrifiques a este Visir (alfil)*, pero te has empeñado inútilmente, Señor, en defenderlo y conservarlo.*

Con esta aguda observación el Monarca comprendió que en ciertas circunstancia, la muerte de un Príncipe es una fatalidad que puede conducir a la libertad y la paz de un pueblo.

- Quiero recompensarte por este magnífico obsequio -dijo el Rey-.

- Mi mayor premio es haber recobrado la felicidad de Vuestra Majestad -respondió Sissa-

- Me asombra tu humildad y el desprecio por las cosas materiales, pero exijo que selecciones, sin demora, una retribución digna de tan valioso regalo. ¿Quieres una bolsa llena de oro?, ¿Deseas un arca llena de joyas?, ¿Pensaste en poseer un Palacio?, ¿Aspiras a la administración de una provincia?. Aguardo tu respuesta, ya que mi palabra está ligada a una promesa.

- Aprecio vuestra generosidad, Majestad, y como obediente súbdito me veo en la obligación de escoger; pero no deseo joyas, ni tierras, ni palacios. Deseo que me recompenses con granos de trigo, los cuales deberán ser colocados en el tablero, de la siguiente forma: un grano por la primera casilla, dos para la segunda, cuatro para la tercera, ocho para la cuarta y así duplicando sucesivamente hasta la última casilla.

Iadava, al oír el extraño e ínfimo pedido del joven, lanzó una sonora carcajada y, tras burlarse de su modestia, ordenó que se le diera lo que había solicitado. Al cabo de algunas horas los algebristas más hábiles del reino le informaron al Soberano que se necesitarían:

18 446 744 073 709 551 615 granos de trigo!!

Concluyeron los algebristas y geómetras más sabios, que la cantidad de trigo que debe entregarse a Lahur Sissa equivalía a una montaña que teniendo como base la ciudad de Taligana, fuese 100 veces más alta que el Himalaya. La India entera, sembrados todos sus campos y destruidas todas sus ciudades, no bastaría para producir durante un siglo la cantidad de granos calculada.

El Rey y su Corte quedaron estupefactos ante los cálculos estimados. Por primera vez el Soberano de Taligana se veía en la imposibilidad de cumplir una promesa. Acto seguido, Sissa renunció públicamente a su pedido y llamó la atención del Monarca con estas palabras:

- Los hombres más precavidos eluden, no sólo la apariencia engañosa de los números, sino también la falsa modestia de los ambiciosos (...). Infeliz de aquel que toma sobre sus hombros los compromisos de honor por una deuda cuya magnitud no puede valorar por sus propios medios. Más previsor es el que mucho pondera y poco promete.

Estas inesperadas y sabias palabras quedaron profundamente grabadas en el espíritu del Rey. Olvidando la montaña de trigo que, sin querer, prometiera al joven brahmán, lo nombró su Primer Ministro. Cuenta la leyenda que Sissa orientó a su Rey con sabios y prudentes consejos y, distrayéndolo con ingeniosas partidas de ajedrez, prestó los más grandes servicios a su pueblo.

Este sitio menciona como su fuente **Juego&Ciencia N°22 Caracas-Venezuela 12-11-1999**

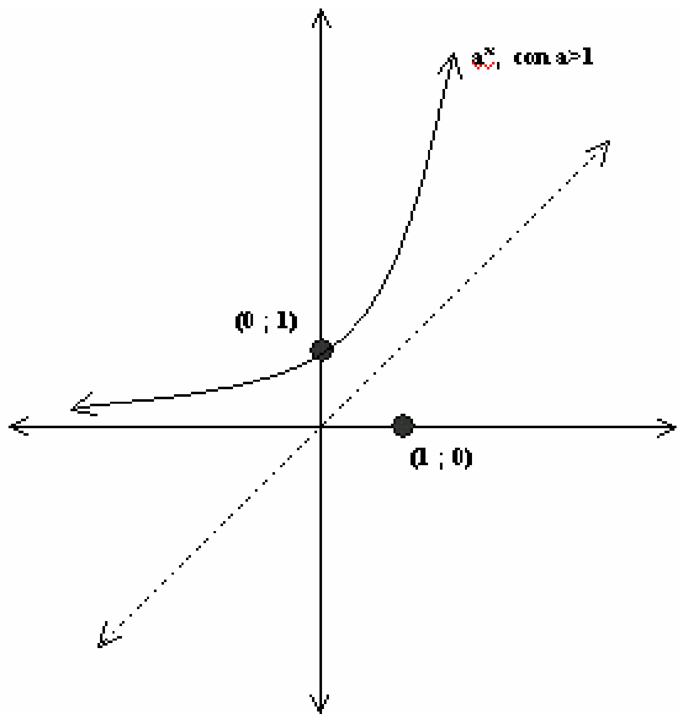
Fuentes de información

Leyenda <http://www.sectormatematica.cl/ajedrez/leyenda.htm> *leyenda ajedrez* (9 de setiembre de 2004)

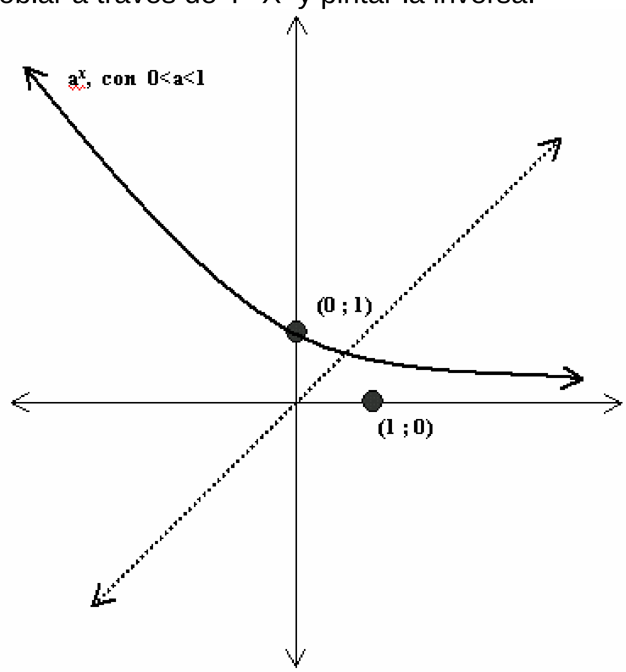
Mitosis <http://www.arrakis.es/~lluengo/mitosis.html> *mitosis* (28 de junio de 2004)

LA FUNCIÓN INVERSA DE LA FUNCIÓN EXPONENCIAL

Como ya es sabido, la gráfica de la función inversa se puede obtener como una reflexión con la recta Y=X. Copie, en su cuaderno, el siguiente esquema e intente hacer la gráfica de la función inversa.



En el caso de funciones de este tipo, pero con la base entre 0 y 1, puede copiar el esquema siguiente en una hoja y doblar a través de Y=X y pintar la inversa.



Grupal De acuerdo con las gráficas obtenidas complete las cuestiones que haga falta.

La función inversa de la función exponencial cumple con:

- Su dominio es: ______________________________
- Su rango, ámbito o recorrido es: ______________________________
- Si $0 \langle\ a \langle\ 1$ entonces es **decreciente**
- Si $a \rangle\ 1$ entonces es ______________________________
- Su gráfica se acerca al eje "y" es decir el eje y es ____________________ de la gráfica.

A continuación se le brindan dos funciones exponenciales con tablas de valores. En cada caso, utilice la tabla de valores de la función exponencial para obtener la tabla de valores de su inversa y grafique cada inversa.

1) $f(x) = 3^x$

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	1	3	9

entonces:

x	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	1	3	9
$f^{-1}(x)$	-2				

2) $g(x) = \left(\frac{2}{5}\right)^x$

x	-2	-1	0	1	2
$g(x)$	$\frac{25}{4}$	$\frac{5}{2} = 2{,}5$	1	$\frac{2}{5}$	$\frac{4}{25}$

entonces:

x	$\frac{25}{4}$	$\frac{5}{2}$	1	$\frac{2}{5}$	$\frac{4}{25}$
$g^{-1}(x)$		-1	0		

FUNCIÓN LOGARÍTMICA$_{(12)}$

Reseña Histórica

"Una de las preocupaciones del hombre ha sido el cálculo numérico. Siempre ha tratado de inventar procedimientos cada vez más rápidos y eficaces para calcular. Las máquinas calculadoras, desde el ábaco hasta las computadoras electrónicas de nuestros días, son la mejor prueba de que está afirmación es cierta.

John Napier publicó en 1614 unas tablas por medio de las cuales se pueden calcular productos, cocientes, potencias y raíces con relativa facilidad y en 1624 su discípulo Briggs publicó otras tablas con el mismo propósito. El manejo de éstas resulta ser más simple que en las de Napier"[1].

"Los logaritmos son útiles para quienes deben manejar constantemente números muy elevados o bien muy pequeños y efectuar los cálculos complicados que se requieren en matemáticas, ciencias, en la industria e investigaciones. Los logaritmos se desarrollaron en el siglo XVII, para satisfacer la necesidad de un método más rápido y menos tedioso de efectuar cálculos complicados con multiplicaciones, divisiones, potencias y raíces. Por supuesto, en nuestros días contamos con máquinas calculadoras y computadoras que efectúan muchas operaciones complejas; pero no todos tienen acceso a ellas y, por tanto, usan logaritmos.

Los logaritmos se aplican en campos tan diversos como son la banca, química, administración pública, electrónica, seguros, física, estadística y la ingeniería. Los logaritmos constituyen la manera más conveniente de resolver cálculos complicados, cuando es insuficiente la exactitud de la regla de cálculo o cuando no se dispone de una calculadora de escritorio."[2]

Características

Hay una forma diferente de números exponenciales a la que se ha dado el nombre de "logaritmos". Si se ve la expresión "log 4", debe leerse "logaritmo de cuatro". De la misma manera, "log 6" se lee "logaritmo de seis", etc.

Actividad

"1) Considere la función exponencial $\begin{array}{l} f:\Re \to \Re \\ y = 2^x \end{array}$

Justifique por qué f es una función biyectiva:

____

2) ¿Cumple f las condiciones para poder definir su función inversa? ( ) Sí ( ) No
¿Por qué? ____

[1] Cárdenas Trigos, Humberto. **Matemática. Tercer Curso.** Primera Edición. Compañía Editorial Continental, S.A. México. 1972.
[2] Federal Electric Corporation **Logaritmos.** Ed. Limusa, S.A. México. 1973.

3) De acuerdo con la respuesta anterior, ¿Cuál es el dominio de la función f^{-1}?
___________________________ ¿Y el codominio? __________________________

4) Si la imagen de -5 mediante la función f=2^X es $\frac{1}{32}$, entonces…

¿Cuál es la imagen de $\frac{1}{32}$ mediante la función f^{-1}? _________________

¿ Por qué ? ____

Observe que:

$$f(-4) = 2^{-4} = \frac{1}{16} \quad \text{y} \quad f^{-1}\left(\frac{1}{16}\right) = -4$$

$$f(-1) = 2^{-1} = \frac{1}{2} \quad \text{y} \quad f^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = -1$$

$$f(3) = 2^{3} = 8 \quad \text{y} \quad f^{-1}(8) = 3$$

Con base en los ejemplos aportados, complete la siguiente tabla para las funciones f y f^{-1} considerada en esta actividad.

x	-5	-4		-2	-1		1		3	4
f(x)=2^x			$\frac{1}{8}$			1		4		

x	$\frac{1}{32}$			$\frac{1}{4}$		1		4		16
$f^{-1}(x)$		-4			-1				3	

5) Analice la primera tabla: Tal y como está definida la función f, sabemos que su criterio es $f(x) = y = 2^x$, lo que equivale a que un aumento de “x” implica un aumento de “y”, es decir “x” es la variable independiente y “y” la dependiente.

Trate ahora de obtener el criterio de la función inversa de f. Para ello, observe que si:

$x = \frac{1}{32}$ entonces $y = -5$

$x = \frac{1}{4}$ entonces $y = -2$

$x = 8$ entonces $y = 3$

$x = 16$ entonces $y = 4$

Exprese como potencias de 2 cada uno de los siguientes números reales

$\frac{1}{32} = 2$ $\qquad\qquad$ $\frac{1}{4} = 2$—

$8 =$ ___ $\qquad\qquad$ $16 =$ ___

6) Con base en el paso anterior justifique por qué se puede garantizar que la función inversa de $y = 2^x$ corresponde a la función $x = 2^y$ ____

7) Con el análisis anterior y la respuesta del paso 6), podemos concluir que:

$\mathbf{f}: \Re \to \Re^+$ $\qquad\qquad$ $\mathbf{f}^{-1}: \Re^x \to \Re$

$\mathbf{x} \to \mathbf{2^x}$ $\qquad\qquad$ $\mathbf{2^x} \to x$

La función "f" corresponde a la función exponencial de base 2 y su criterio es $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = y = \mathbf{2}^x$; su función inversa corresponde a la *función logarítmica* de base 2 y su criterio es el siguiente: $\mathbf{f}^{-1}(x) = y = \log_2 x$.

Por ser "f" y "$\mathbf{f}^{-1}$" funciones inversas se verifica que:

$$\mathbf{y} = \log_2 x \iff \mathbf{x} = \mathbf{2^y}$$

Con base en las tablas que completó en el paso 4), construya, en un papel transparente y en un mismo sistema de ejes cartesianos, los gráficos de ambas funciones.

De igual manera que se define la función logarítmica de *base* 2, puede definirse la función logarítmica de base "a", en la que, dicha base debe conservar las condiciones que cumple en la función exponencial, es decir $a \in \Re^+$, $\mathbf{a} \neq \mathbf{1}$, además, el dominio es $\Re^+$ y el codominio $\Re$."[3]

$$\mathbf{L}: \Re^+ \to \Re,\ \mathbf{y} = \log_a x;\ \ \mathbf{a} \in \Re^+,\ \mathbf{a} \neq \mathbf{1}$$

$$\mathbf{y} = \log_a x \Leftrightarrow x = a^y$$

Ejemplos:

$\log_2 4 = 2$ $\qquad$ por lo tanto $2^2 = 4$

$\log_{10} 100 = 2$ $\qquad$ por lo tanto $10^2 = 100$

$\log_7 7 = 1$ $\qquad$ por lo tanto $7^1 = 7$

$\log_2 \frac{1}{4} = -2$ $\qquad$ por lo tanto $2^{-2} = \frac{1}{4}$

$\log_2 \sqrt[3]{2} = \frac{1}{3}$ $\qquad$ pues $2^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2}$

$\log_2 \frac{1}{4} = -2$ $\qquad$ pues $2^{-2} = \frac{1}{4}$

$\log_5 1 = 0$ $\qquad$ pues $5^0 = 1$

[3] Bolaños, Guiselle: **Matemática Activa. 10º.** Primera Edición., Textos Modernos Cattleya. San José, 1993.

Ejercicio Halle la función inversa de $f(x) = \log_3 x$ y grafique ambas funciones en un mismo plano.

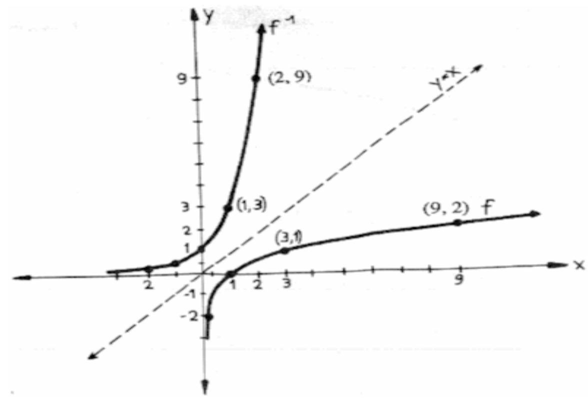
Respuesta

Si $f(x) = \log_3 x$ $\quad f : IR^+ \to IR$

$f^{-1}(x) = 3^x$ $\quad f^{-1} : IR \to IR^+$

x	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	1	3	9
$\log_3 x$	-2	-1	0	1	2

x	-2	-1	0	1	2
3^x	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	1	3	9



Literatura consultada

Bolaños, Guiselle. (1993) **Matemática Activa. 10º.** San José, Costa Rica: Editorial Textos Modernos Cattleya.

Cárdenas Trigos, Humberto. (1972) **Matemáticas. Tercer Curso.** Editorial Continental, S.A.

Clifford, Martin. (1974) **Matemáticas para técnicos electricistas.** México: Publicaciones Cultural, S.A. Enseñanza Técnica.

Federal Electric Corporación, (1972) **Logaritmos.** Centro Regional de Ayuda Técnica México.

Horwes, Vernon. (1973) **Algebra Intermedia.** Buenos Aires, Argentina: Editorial Centro Regio de Ayuda Técnica.

FUNCIÓN LOGARÍTMICA(21)
(CONTINUACIÓN)

Características útiles

Si a > 1

Los números menores que 1 tienen logaritmo negativo

Los números mayores que 1 tienen logaritmo positivo

Si 0 < a < 1
Los números menores que 1 tienen logaritmo positivo
Los números mayores que 1 tienen logaritmo negativo

Logaritmos Decimales

Se llaman logaritmos decimales o vulgares a los logaritmos que tienen por base el número 10. Al ser muy habituales es frecuente no escribir la base.

$$\log_{10} x = \log x$$

Al logaritmo base diez también se le denomina logaritmo común.

Logaritmos Neperianos

Se llaman logaritmos neperianos, naturales o hiperbólicos a los logaritmos que tienen por base el número *e*.

$$\log_e x = \ln x = Lx$$

> “John NAPIER (escrito también NEPER) nació en 1550. Procedente de la baja nobleza escocesa, mostró toda su vida un espíritu curioso y dinámico, a pesar de una vida alejada de los centros culturales de la época. La introducción de los logaritmos no es su único título de gloria, puesto que escribió también un texto sobre las ecuaciones e imaginó además un sistema de cálculo por medio de regletas graduadas”
>
> Tomado de http://nti.educa.rcanaria.es/penelope/es_conflefort.htm

Cambio de Base

En las calculadoras, se cuenta con los logaritmos base 10 y el de base e. Por lo tanto, es necesario contar con algún mecanismo para calcular los otros logaritmos.

Una forma de lograrlo consiste en:

a) Calcular el logaritmo (común o neperiano) del valor.
b) Calcular el logaritmo (común o neperiano) de la base en cuestión.
c) Realizar la división entre esos dos valores.

Considerando *a* como la base diferente, **N** como el valor al cual se aplica el logaritmo y b como la base decimal (10) o la base natural (e), Simbólicamente, se puede expresar como:

$$\log_a N = \frac{\log_b N}{\log_b a} \qquad ; \qquad \log_a b = \frac{1}{\log_b a}$$

Ejemplo: Calcular **$\log_5$ (110)**

Para calcular $\log_5$ (110) se puede recurrir a la calculadora y utilizar uno de los dos logaritmos que se mencionaron.

Cambio a base diez
a) log (110) ≈ 2,0414
b) log (5) ≈ 0,6990
c) log (110) / log (5)
Por lo tanto: $\log_5$ (110)= 2,9205

Cambio a base e
a) ln (110) ≈ 4,7005
b) ln (5) ≈ 1,6094
c) ln (110) / ln (5)
Por lo tanto: $\log_5$ (110)= 2,9205

PROPIEDADES DE LOS LOGARITMOS(22)

1. Logaritmo de un producto

El logaritmo de un producto de dos números es igual a la suma de los logaritmos de cada uno de ellos.

$$\log_a(X \cdot Y) = \log_a X + \log_a Y$$

Demostración:

Sea $\log_a X = x$; esto significa que $a^x = X$.
Sea $\log_a Y = y$; esto significa que $a^y = Y$.
$\log_a(X \cdot Y) = \log_a (a^x \cdot a^y) = \log_a a^{x+y} = x + y = \log_a X + \log_a Y$

Este resultado se puede generalizar para más de dos factores.
Si $X_1, X_2, X_3, ..., X_n$ son n números reales, positivos y no nulos,

$$\log_a(X_1 \cdot X_2 ... X_n) = \log_a X_1 + \log_a X_2 + ... + \log_a X_n$$

2. Logaritmo de un cociente

El logaritmo de un cociente de dos números es igual al logaritmo del numerador menos el logaritmo del denominador.

$$\log_a \frac{X}{Y} = \log_a X - \log_a Y$$

Demostración:

Sea $\log_a X = x$; esto significa que $a^x = X$
Sea $\log_a Y = y$; esto significa que $a^y = Y$

$$\log_a \frac{X}{Y} = \log_a \frac{a^x}{a^y} = \log_a a^{x-y} = x - y = \log_a X - \log_a Y$$

3. Logaritmo de una potencia

El logaritmo de una potencia es igual al exponente multiplicado por el logaritmo de la base de la potencia.

$$\log_a X^n = n \log_a X$$

Demostración:

Sea $\log_a X = x$; esto significa que $a^x = X$.

$$\log_a X^n = \log_a (a^x)^n = \log_a a^{nx} = nx = n \log_a X$$

4. Logaritmo de una raíz

El logaritmo de una raíz es igual al logaritmo del radicando dividido entre el índice de la raíz.

$$log_a \sqrt[n]{X} = \frac{1}{n} log_a X$$

Demostración:

Este es un caso particular del apartado anterior, logaritmo de una potencia.

$$log_a \sqrt[n]{X} = log_a X^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n} \cdot log_a X$$

Obsérvese que las propiedades anteriores se refieren al logaritmo de un producto, un cociente, una potencia y una raíz, pero nada se ha dicho sobre el logaritmo de una suma o una resta. El logaritmo de una suma o de una resta no admite desarrollo.

OTRA PROPIEDAD

5. Logaritmo de un cociente

El logaritmo de un cociente de dos números es igual a la diferencia de los logaritmos de cada uno de ellos.

$$log_a(X : Y) = log_a X - log_a Y$$

Ejemplo: $$\log\left(\frac{x+1}{2-x}\right) = \log(x+1) - \log(2-x)$$

SIMPLIFICACIÓN DE LOGARITMOS$_{(12)}$

Simplificación de logaritmos

Las propiedades de los logaritmos se utilizan en la solución de diversos tipos de ejercicios. Se destacan algunas de las más útiles a través de la siguiente actividad.

Actividad

A continuación se presenta un cuadro, estructurado de la siguiente manera: en la columna de la izquierda se presenta el procedimiento con un espacio que usted debe completar para que la proposición planteada sea verdadera. En la columna de la derecha se presenta el procedimiento completo, para que pueda evaluar la respuesta dada.

Antes de iniciar la actividad, es necesario recordar las propiedades de los logaritmos.

Resumen de las propiedades de la función logarítmica:

1) f(1)=0 es decir, el gráfico siempre contiene el punto (1,0)

2) $\log_a x$ es positivo cuando x>1 y a>1 o cuando $x \in]0,1[$ y $a \in]0,1[$
$\log_a x$ es negativo cuando $x \in]0,1[$ y a>1 ó cuando x>1 y $a \in]0,1[$

3) $\log_a x$ no está definida para valores de x, $x \in]-\infty,0[$

4) $a^{\log_a b} = b$ pues si $\log_a b = x \Rightarrow a^x = b \Rightarrow a^{\log_a b} = b$

5) $\log_a a^r = r$ pues si $\log_a a^r = x \Rightarrow a^x = a^r \Rightarrow x = r$

6) Si M y N son números reales positivos, y a>0, $a \neq 1$ entonces

$$\log_a (M \cdot N) = \log_a M + \log_a N$$

$$\log_a \left(\frac{M}{N}\right) = \log_a M - \log_a N$$

$$\log_a \left(\frac{1}{N}\right) = -\log_a N$$

$$\log_a \left(M^N\right) = N \log_a M$$

$$\log_a \sqrt[N]{M} = \frac{1}{N} \log_a M$$

En los cuadros siguientes se usarán las propiedades de los logaritmos y el hecho de que $\log_4 3 = 0{,}7925$ Hallar $\mathbf{\log_4 6}$**:** $\log_4 6 = \log_4(2 \cdot \quad) =$ $= \log_4 \quad + \log_4$ $= 0{,}5 + \quad =$	
Hallar $\mathbf{\log_4 \sqrt{3}}$**:** $\log_4 \sqrt{3} = \log_4 3^{\square} = \quad \log_4 \quad \square$ $= \square \quad (0{,}7925) = \quad \square$	$\log_4 6 = \log_4(2 \cdot 3)$ $= \log_4 2 + \log_4 3$ $= 0{,}5 + 0{,}7925 = 1{,}2925$
Hallar $\mathbf{\log_4 \frac{3}{4}}$**:** $\mathbf{\log_4 \frac{3}{4} = \log_4 \quad - \quad \log_4}$ **= - =**	$\log_4 \sqrt{3} = \log_4 3^{\frac{1}{2}}$ $= \frac{1}{2}\log_4 3$ $= \frac{1}{2}(0{,}7925) = 0{,}3962$
Hallar $\mathbf{\log_4 \frac{1}{24}}$**:** $\mathbf{\log_4 \frac{1}{24} = \quad \log_4 24 \quad = \quad \log_4 24}$ $\mathbf{= \quad \log_4(2^3 \cdot \quad)}$ $\mathbf{= \quad (\log_4 2^3 + \log_4 \quad)}$ $\mathbf{= \quad (3\log_4 \quad + \quad \log_4 \quad)}$ $\mathbf{= \quad (3(\quad) + \quad)}$ $\mathbf{= \quad (1.5 + \quad)}$ **=**	$\log_4 \frac{3}{4} = \log_4 3 - \log_4 4$ $= 0{,}7925 - 1$ $= -0{,}2075$

También pueden usarse las propiedades de los logaritmos para escribir $\mathbf{\log_4 8 - \log_4 16 + \log_4 12}$ como el logaritmo de un sólo número. $\mathbf{\log_4 8 - \log_4 16 + \log_4 12}$ $\mathbf{= (\log_4 8 + \log_4 12) - \log_4 16}$ $\mathbf{= \log_4 (8 \cdot \boxed{}) - \log_4 16}$ $\mathbf{= \log_4 \boxed{}}$ $\mathbf{= \log_4 \boxed{}}$	$\log_4 \frac{1}{24} = \log_4 24^{-1}$ $= -1 \log_4 24$ $= -\log_4 (2^3 \cdot 3)$ $= -(\log_4 2^3 + \log_4 3)$ $= -(3\log_4 2 + \log_4 3)$ $= -\left(3\left(\frac{1}{2}\right) + 0{,}7925\right)$ $= -(1{,}5 + 0{,}7925)$ $= -2{,}2925$
Simplificar: $\mathbf{3\log_a 3\sqrt[3]{2} - \frac{1}{2}\log_a 36}$ $\mathbf{= \log_a (3\sqrt[3]{2}) - \log_a (\quad)}$ $\mathbf{\log_a 3^3 (\sqrt[3]{2})}$ $\mathbf{- \log_a}$ $\mathbf{= \log_a 27 \cdot}$ $\mathbf{- \log_a}$ $\mathbf{= \log_a}$ $\mathbf{= \log_a}$	$\mathbf{\log_4 8 - \log_4 16 + \log_4 12}$ $\mathbf{= (\log_4 8 + \log_4 12) - \log_4 16}$ $\mathbf{= \log_4 (8 \cdot 12) - \log_4 16}$ $\mathbf{= \log_4 \frac{8 \cdot 12}{16} = \log_4 6}$
Simplificar: $\mathbf{\log_a (x^2 - y^2) - \log_a (x + y)}$ $\mathbf{= \log_a}$ $\mathbf{= \log_a \frac{(\quad)(\quad)}{}}$ $\mathbf{= \log_a}$	$\mathbf{3\log_a 3\sqrt[3]{2} - \frac{1}{2}\log_a 36}$ $\mathbf{= \log_a (3\sqrt[3]{2})^3 - \log_a (36)^{\frac{1}{2}}}$ $\mathbf{= \log_a 3^3 (\sqrt[3]{2})^3 - \log_a 6}$ $\mathbf{= \log_a 27 \cdot 2 - \log_a 6}$ $\mathbf{= \log_a \frac{27 \cdot 2}{6} = \log_a 9}$
Recuerde: Simplificar no es más, que llevar a la forma más reducida, una expresión algebraica. Por ello, las propiedades de los logaritmos nos permiten reducir una expresión logarítmica muy compleja en una más sencilla.	$\mathbf{\log_a (x^2 - y^2) - \log_a (x + y)}$ $\mathbf{= \log_a \frac{x^2 - y^2}{x + y}}$ $\mathbf{= \log_a \frac{(x + y)(x - y)}{x + y}}$ $\mathbf{= \log_a (x - y)}$

Literatura consultada

Ubicación: San Pedro de Montes de Oca. Biblioteca de la Universidad de Costa Rica.
Bolaños, Guiselle. (1993) **Matemática Activa. 10º.** San José, Costa Rica: Editorial Textos Modernos Cattleya.

Ubicación: CENADI, Biblioteca Tobías Retana.
Cárdenas Trigos, Humberto. (1972) **Matemáticas. Tercer Curso.** Editorial Compañía Editorial Continental, S.A..

Clifford, Martin. (1974) **Matemáticas para técnicos electricistas.** México: Publicaciones Cultural, S.A. Enseñanza Técnica.

Federal Electric Corporación. (1972) **Logaritmos.** México: Centro Regional de Ayuda Técnica.

Horwes, Vernon. (1973) **Algebra Intermedia.** Buenos Aires, Argentina: Editorial Centro Regio de Ayuda Técnica.

CÁLCULO DE LOGARITMOS EN CALCULADORA

Las siguientes orientaciones no excluyen la lectura y análisis del manual de usuario de la respectiva calculadora.

Tipos de calculadoras

<u>DAL</u> (Direct Algebraic Logic)

Por ejemplo: Sharp y el modelo con las siglas VPAM de la Casio.

Como cuando construimos *a mano* las expresiones matemáticas, tenemos que poner las funciones de dos argumentos entre ellos dos, algunas funciones de un argumento antes del mismo y las otras, después del argumento.

Estas calculadoras cuentan con una tecla **ANS** la cual es similar a la **MR**, de manera que permite utilizar el resultado anterior. Es útil cuando éste ha de ser el argumento de una función que lo requiere detrás, como en el caso de $\mathbf{10^x}$. Sin esta tecla, habría que usar una memoria.

<u>NM</u> (Notación mixta)

Las hay en Casio, TI y CITIZEN.

En estas calculadoras, tenemos que seguir poniendo las funciones de dos argumentos en medio de ellos, pero todas las funciones de un argumento van después de él. Puede parecer más sencillo, pero como escribimos con la notación anterior y operamos con la siguiente, ésta hay que aprenderla a parte.

<u>RPN</u> (Reverse Polish Notation)

Notación Polaca Inversa, típica de las calculadoras HP. Se llama así en honor al matemático polaco Jan Lukasiewicz, su inventor. En estas calculadoras todas las funciones se ponen después de sus argumentos. Necesitan una tecla, habitualmente $\boxed{\text{ENTER}}$, para separar o introducir los argumentos; pero no necesitan paréntesis. Se introducen y se efectúan los cálculos en el orden en el que los realizaríamos a mano. Dicen que así se necesitan menos pulsaciones, yo añadiría que también se necesitan más conocimientos matemáticos.

Logaritmos

Segunda operación inversa de la potenciación, la logaritmación (aunque nunca la he visto llamada así) nos permite encontrar el exponente de una potencia conociendo el resultado y la base. Igual que la potenciación y la radicación, tampoco es conmutativa y los números que intervienen reciben nombres diferentes: la base corresponde a la misma base de la potencia y el argumento al resultado de la potencia. Así, el logaritmo en base *a* de *b* es, por definición, el exponente al cual hay que elevar *a* para que dé *b*.

Históricamente más importante por sus propiedades (que ayudaban a transformar farragosos productos y cocientes en sumas y diferencias) que por la propia definición, hasta no hace demasiado los logaritmos se calculaban con ayuda de tablas que previamente habían sido elaboradas con mucha paciencia.

Las calculadoras científicas sólo suelen incluir teclas para los logaritmos en base 10 y *e*, 

y 

, respectivamente. Para el resto de bases tendremos que utilizar la propiedad del cambio de base, según la cual cualquier logaritmo es igual al cociente del logaritmo del argumento entre el logaritmo de la base, ambos logaritmos en cualquiera otra base, pero la misma, puede ser 10 o *e*, si queremos aprovechar las teclas mencionadas:

$$\log_a m = \frac{\log m}{\log a} = \frac{\ln m}{\ln a}$$

Dependiendo del tipo de calculadora, calcularíamos $\log 10$ (es 1):

en calculadoras DAL

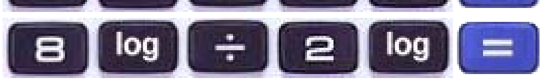
en calculadoras NM o RPN

Para el calculo de algunos valores es necesario aplicar el cambio de base, por ejemplo:

Calcular $\log_2 8$ (es tres)

De acuerdo con el cambio de base, puede obtenerse con $\frac{\log 8}{\log 2}$ y en la calculadora se realiza:

en calculadoras DAL



en calculadoras NM

en calculadoras RPN

Si quisiéramos usar logaritmos neperianos (en base *e*) en lugar de decimales (en base 10), tan sólo había que cambiar **log** por **ln**

Aquí no hay problemas con los negativos, puesto que no están definidos los logaritmos de base ni argumento negativo.

Hagamos algunos cálculos con logaritmos menos inmediatos:

$9^{\ln 5}$ $\qquad\qquad$ $\log 4{,}6 \cdot 10^{-28}$

$\sqrt{\log_3 4}$ $\qquad\qquad$ $\log_{0,8}\left(\frac{7}{4}\right)$

En la calculadora, ciertos resultados no se pueden mostrar, por ejemplo el cálculo de 304^{65} da error y el de 304^{-65} da cero. Sin embargo, sabemos que estas respuestas NO son válidas ni ciertas. Para estos casos se puede utilizar el logaritmo y propiedades de las potencias. En la historia humana, antes de la invención de las máquinas calculadoras, los logaritmos desempeñaron un importante papel de cálculo.

$\log 304^{65} = 65 \cdot \log 304$ $\qquad\qquad$ $\log 304^{-65} = -65 \cdot \log 304$

Con aproximaciones de cuatro cifras decimales, se resuelven los casos de la página anterior.

$9^{\ln 5}$	DAL	**9 ^ ln 5 EXE**	34,3300
	NM	**9 x^y 5 ln =**	
	RPN	**9 Enter 5 ln x^y**	

$\log 4{,}6 \cdot 10^{-28}$	DAL	**log 4 · 6 EXP (--) 2 8 EXE**	-27,337
	NM	**4 · 6 EXP 2 8 +/- log**	
	RPN	**4 · 6 EXP 2 8 +/- log**	

$\sqrt{\log_3 4}$	DAL	**√ (ln 4 ÷ ln 3) EXE**	1,123
	NM	**(4 ln ÷ 3 ln) √**	
	RPN	**4 ln 3 ln ÷ √**	

$\log_{0,8}\left(\frac{7}{4}\right)$	DAL	**log (7 ÷ 4) ÷ log 0 . 8 EXE**	-2,508
	NM	**(7 ÷ 4) log ÷ 0 . 8 log =**	
	RPN	**7 Enter 4 ÷ log 0 . 8 log ÷**	

$$\log 304^{65} = 65 \cdot \log 304 = 161{,}39$$

por tanto, $304^{65} = 10^{161{,}39} = 10^{161+0{,}39} = 10^{161} \cdot 10^{0{,}39} = 2{,}437 \cdot 10^{161}$

Ejercicio

Realice los cálculos para 304^{-65}

Fuente de Información

Logaritmos-Calculaweb <http://www.ctv.es/USERS/vaello/manual/c-logaritmes.htm>
propiedades logaritmos (setiembre 2004)

ECUACIÓN EXPONENCIAL(23)

Descripción

Se llaman ecuaciones exponenciales a las ecuaciones en las que en algún miembro aparece una expresión exponencial (potencia de base constante (número) y exponente variable (x, y, etc). Por ejemplo:

(a) $2^{x} = 4$

(b) $3^{2-x2} = 3$

(c) $4^{2x+1} = (0,5)^{3x+5}$

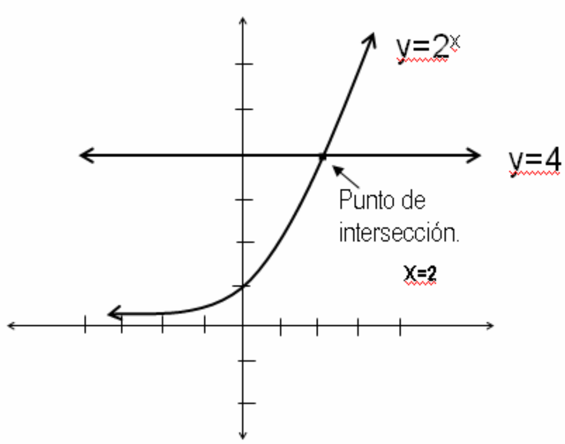
(d) $2^{x-1} + 2^{x} + 2^{x+1} = 7$

Se trata de encontrar algún valor de x que cumpla la igualdad.

En casos sencillos, eso se puede lograr por simple observación, como en el primer ejemplo anotado:

Si representamos la función exponencial $y = 2^{x}$ y la recta $y = 4$, el valor de "x" del punto de corte de ambas gráficas será la solución de la ecuación $2^{x} = 4$.

Se puede apreciar en la siguiente ilustración



Pero no siempre se obtiene una solución tan evidente, por lo cual, en otros casos se utilizan propiedades algebraicas.

Para resolverlas numéricamente, se pueden clasificar, en general, en dos tipos:

Tipo 1

Corresponden a este tipo los tres primeros ejemplos:

$2^{X}= 4$

$3^{2-x2} = 3$

$4^{2x+1} = (0,5)^{3x+5}$

En estos casos, a diferencia del último, se observa que los dos miembros de la ecuación contienen un sólo término ("no hay sumas").

La solución se determina logrando expresiones con bases iguales, luego se igualan los exponentes.

a) $2^{X}= 4$ *no hay sumas, se busca escribir en iguales bases*

$2^{x} = 2^{2}$ *las bases son iguales*

$x=2$ *se igualan exponentes y se obtiene la solución*

b) $3^{2-x^2} = 3$ *las bases son iguales*

$2 - x^2 = 1$ *se igualan los exponentes*

$2 - 1 = x^2$

$$1 = x^2 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{matrix} x = -1 \\ y \\ x = 1 \end{matrix}$$

c) $4^{2x+1} = (0,5)^{3x+5}$ *es necesario que las bases sean iguales*

$2^{2(2x+1)} = \left(\frac{1}{2}\right)^{3x+5}$ *4=2*^{2} y *0,5=*$\frac{1}{2}$

$2^{4x+2} = \left(2^{-1}\right)^{3x+5}$

$2^{4x+2} = 2^{-3x-5}$ *las bases están iguales*

$4x + 2 = -3x - 5$ *se igualan los exponentes*

$$4x + 3x = -5 - 2$$
$$7x = -7$$
$$x = \frac{-7}{7}$$
$$x = -1$$

Tipo 2

Corresponde a este tipo

d) $2^{x-1} + 2^{x} + 2^{x+1} = 7$

Como se observa, a diferencia de los primeros ejemplos, implica sumas de términos.

En este caso se expresa la ecuación en función de 2^{x} y luego se obtiene un factor común.

$$2^{x} \cdot 2^{-1} + 2^{x} + 2^{x} \cdot 2^{1} = 7 \qquad \textit{se utilizan leyes de potencias}$$
$$2^{x}\left(2^{-1} + 1 + 2^{1}\right) = 7 \qquad \textit{se factorizó por factor común}$$
$$2^{x}\left(\frac{1}{2} + 1 + 2\right) = 7 \qquad \textit{se usan leyes de potencias}$$
$$2^{x} \cdot 3{,}5 = 7$$
$$2^{x} = 7 \div 3{,}5$$
$$2^{x} = 2$$
$$x = 1$$

Ejercicios

a) $3^{x} = \frac{1}{3}$

b) $4^{x+2} = 16$

c) $81 \cdot 3^{x} = 27$

d) $125 = \frac{1}{5^{-x}}$

e) $3^{x} + 3^{x} = 27$

f) $2^{3x} = \left(\frac{1}{2}\right)^{2x-3}$

Respuestas

a) –1 b) 0 c) –1 d) 3 e) 2,37 f) $\frac{3}{5}$

PRÁCTICA DE ECUACIÓN EXPONENCIAL(12)

Reseña histórica

"El filósofo y matemático francés René Descartes en el siglo XVII inventó la notación exponencial. Así, por ejemplo, al producto $x \cdot x \cdot x \cdot x$ lo nombró x^4. Esta forma de denotar a un producto de factores iguales se usa en la actualidad universalmente".[1]

Ejemplos de resolución de ecuaciones exponenciales:

a) $\mathbf{4 \cdot 2^{x+1} = 8}$

$\mathbf{4 \cdot 2^{x+1} = 8}$

$\mathbf{2^2 \cdot 2^{x+1} = 2^3}$ **se expresan todas las expresiones como potencias de una sola base**

$\mathbf{2^{2+x+1} = 2^3}$ **se suman los exponentes de potencias de igual base**

$\mathbf{2^{x+3} = 2^3}$ **como la funcion es inyectiva obtenemos**

$\mathbf{x + 3 = 3}$

$\mathbf{x = 0}$ **solucion**

b) $\mathbf{27 \cdot 3^{-2x+1} = 9 \cdot 3^{3x}}$

$3^3 \cdot 3^{-2x+1} = 3^2 \cdot 3^{3x}$ se expresan todas las expresiones como potencias de una sola base

$3^{3+-2x+1} = 3^{2+3x}$ se suman exponentes de potencias de igual base si se multiplican

$3^{-2x+4} = 3^{3x+2}$ como la función es inyectiva obtenemos

$-2x + 4 = 3x + 2$

$-5x = -2 \rightarrow x = \frac{2}{5}$

Práctica

"LABERINTO MATEMÁTICO

Indicaciones

El conjunto solución de las ecuaciones exponenciales que se anotan en los pasos del 0 al 10, se encuentra en alguno de los círculos de la figura. Trace el camino que permite al disquete llegar a al computadora. El punto de partida es aquel en que se encuentra el disquete y a partir de éste, los demás puntos corresponden a aquellos en que está el conjunto solución de cada

[1] Cárdenas Trigos, Humberto. Matemáticas. Tercer Curso. Compañía Editorial Continental, S.A. México 1972.

ecuación, en el orden en que aparecen y sin omitir alguna. La trayectoria del laberinto no puede pasar dos veces por una misma casilla.

0) 🖫

1) $5^{x+1} = 25$

2) $27^{(-x+3)} = \dfrac{1}{3}$

3) $2^{x^2} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{10x+25}$

4) $4 \cdot 16^{x} = 64^{x-1}$

5) $\left(\dfrac{2}{5}\right)^{x^2-3} = \left(\dfrac{5}{2}\right)^{x^2+5x}$

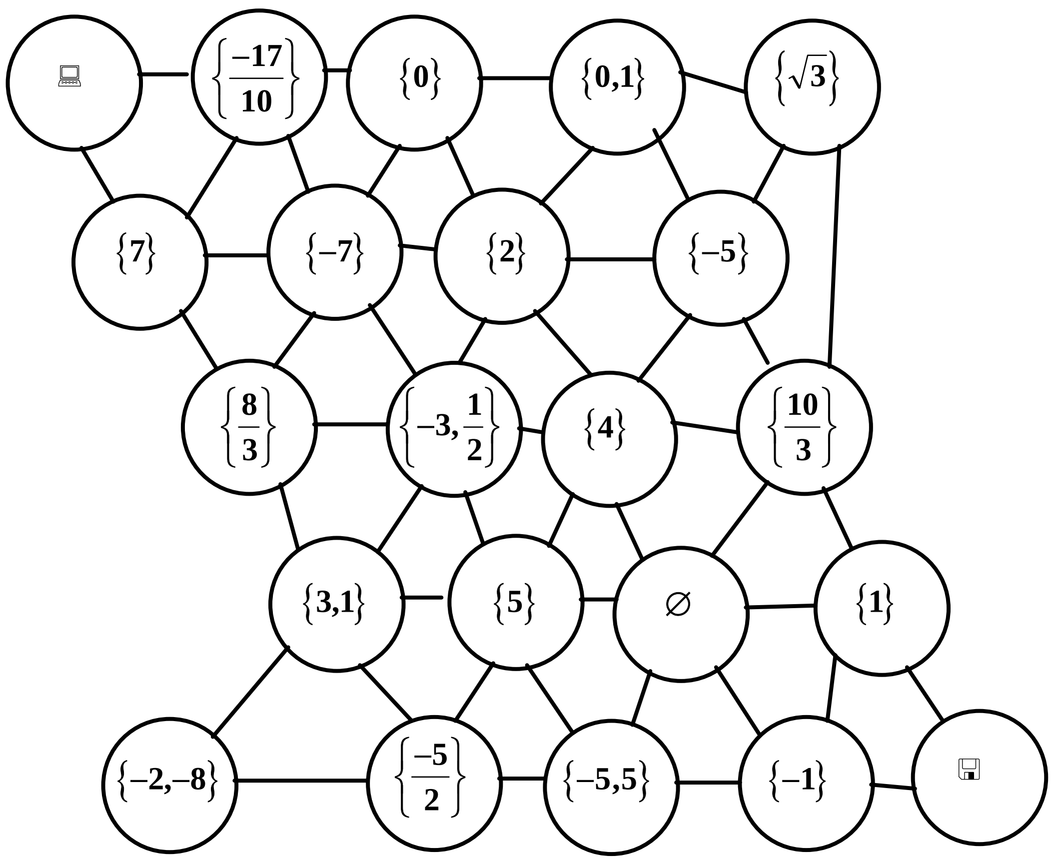
6) $\left(2^{x}\right)^{2} - 10 \cdot 2^{x} + 16 = 0,$ $\left(\textbf{Sugerencia: Designe } 2^{x} \textbf{ con "a" es decir } a = 2^{x}\right)$*

7) $\dfrac{3^{x}\sqrt{3}}{27} = \dfrac{\sqrt{27}}{\sqrt{3^{x}}}$

8) $9 = \left[3 \cdot \left(\dfrac{1}{3}\right)^{(x+7)}\right]^{2}$

9) $64^{x} = 1$

10) $e^{x+2} \cdot \sqrt{e} = \sqrt[5]{e^{4}}$



2„

---

* Ejercicio como éste no está en el programa, pero es conveniente que usted lo resuelva, solicite ayuda docente si la requiere.

[2] Bolaños, Guiselle: Matemática Activa. 10º. Primera Edición. San José, Costa Rica, 1993. Textos Modernos Cattleya.

Respuestas

1) $\{1\}$, 2) $\left\{\frac{10}{3}\right\}$, 3) $\{-5\}$, 4) $\{4\}$, 5)

Literatura consultada

Ubicación: San Pedro de Montes de Oca. Biblioteca de la Universidad de Costa Rica.

Bolaños, Guiselle. (1993) Matemática Activa. 10º. San José, Costa Rica: Editorial Textos Modernos Cattleya.

Perelmann, Y. (1968) El divertido juego de las matemáticas. Bogotá, Colombia: Círculo de Lectores, Ltda.

Ubicación: CENADI, Biblioteca Tobías Retana.

Cárdenas Trigos, Humberto. (1972) Matemáticas. Tercer Curso. México: Compañía Editorial Continental.

MÁS DE ECUACIONES EXPONENCIALES (4)

Como la función exponencial posee inversa, esta se puede utilizar en la solución de ecuaciones.

Ejemplos:

A) $\mathbf{2^{2x-1} = 6}$

$2^{2x-1} = 6$ *la función inversa es* $\mathbf{\log_2 x}$

$\log_2(2^{2x-1}) = \log_2(6)$

$(2x-1)\log_2(2) = \log_2(6)$ *por una propiedad de logaritmos*

$2x-1 = \dfrac{\log_2 6}{\log_2 2}$ *pero recuérdese que* $\log_a a = 1$

$2x-1 = \dfrac{\log_2 6}{1}$

$2x-1 = \log_2 6$

$2x = (\log_2 6) + 1$

$x = \dfrac{1+\log_2 6}{2}$ *Use la información de páginas 234 y 241 para una aproximación.*

B) $\mathbf{e^{3x-1} = 25{,}6}$

$e^{3x-1} = 25{,}6$ *la función inversa de* e^x *es el logaritmo neperiano* $\ln x$

$\ln e^{3x-1} = \ln 25{,}6$

$(3x-1)\ln e = \ln 25{,}6$ *se utilizó una propiedad de logaritmos*

$3x-1 = \ln 25{,}6$ *pues* $\ln e = 1$

$3x = (\ln 25{,}6) + 1$

$x = \dfrac{1+\ln 25{,}6}{3}$ *Utilice la calculadora para obtener una aproximación.*

SITUACIONES POR RESOLVER

En cualquier situación de conflicto debe imperar el amor,

y la justicia debe ser un tamiz en la solución.

ECUACIÓN LOGARITMICA

Descripción

Se llaman ecuaciones logarítmicas aquellas en las que en la incógnita es argumento de una expresión logarítmica Por ejemplo:

(a) $\log_3(x-1)=\log_3(2x-4)$

(b) $\log_5(x^2-x+1)=2$

(c) $\log_2(2-x)+\log_2(1-x)=3$

(d) $\log(3x+2)=1+\log(x-1)$

(e) $(\ln x)^2=\ln(x^2)$ **Cuidado: NO es lo mismo $(\log_b x)^n$ que $\log_b x^n$**

(f) $\log(\log x)=2$

Se trata de encontrar todos los valores de x que cumplan la igualdad. Y siempre deberá comprobarse los datos determinados.

En casos sencillos, cuando es una igualdad de dos logaritmos en la misma base, se igualan los argumentos, como en el primer ejemplo anotado:

(a) $\log_3(x-1)=\log_3(2x-4)$ ***es una igualdad de logaritmos en la misma base, no hay sumas***

$x-1=2x-4$ ***se igualan los argumentos***

$$-1+4=2x-x$$
$$3=x$$
se resuelve

Comprobación: Se sustituye en cada miembro de la igualdad.

En el lado izquierdo: $\log_3(3-1)=\log_3 2$

En el lado derecho: $\log_3(2\cdot 3-4)=\log_3(6-4)=\log_3 2$

Como se obtiene la misma cantidad y además está bien definida, entonces se puede afirmar con certeza que la solución es X = 3.

En la solución de algunas ecuaciones logarítmicas es básico recordar la definición del logaritmo:

Si c es el logaritmo en base b de w entonces b elevado a c es w

$$\log_b w = c \quad si\ y\ \ solo\ \ si \quad b^c = w$$

En el ejemplo **b** se aplica la definición:

(b) $\log_5(x^2 - x + 1) = 2$ ***es una igualdad de un logaritmo y un valor concreto***

$5^2 = x^2 - x + 1$ ***se aplica la definición***

$25 = x^2 - x + 1$ ***se obtiene una ecuación cuadrática***

$x^2 - x + 1 - 25 = 0$

$x^2 - x - 24 = 0$

$x = \dfrac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 1 \cdot -24}}{2}$ ***se usa la fórmula general***

$x = \dfrac{1 \pm \sqrt{97}}{2}$

$x \approx 5{,}4244$ y $x \approx -4{,}4244$

Comprobación

$\log_5(x^2 - x + 1) = 2$

Para 5,4244

$$\log_5(5{,}4244^2 - 5{,}4244 + 1) = \log_5 24{,}99971536 = \frac{\log 24{,}99971536}{\log 5} \approx 1{,}999992926$$

Lo cual significa que es **2**, por lo tanto, **se acepta la solución 5,4244**.

Para –4,4244

$$\log_5\left((-4{,}4244)^2 - (-4{,}4244) + 1\right) = \log_5(24{,}99971536) = \frac{\ln 24{,}99971536}{\ln 5} \approx 1{,}999992926$$

Lo cual significa que es **2**, por lo tanto, **se acepta la solución -4,4244**.

En el ejemplo f se utiliza la definición reiteramente...

(f) $\log(\log x) = 2$

$10^2 = \log x$ *por definición*

$100 = \log x$

$\log x = 100$ *aquí se usa la definición, de nuevo.*

$10^{100} = x$

Comprobación

$$\log\left(\log 10^{100}\right) = \underset{\substack{\downarrow \\ \text{por propiedad 3 pág30}}}{\log(100\log 10)} = \log(100\cdot 1) = \log 100 = 2$$

$\uparrow$ pues $\log 10$ es 1

Por lo tanto, se acepta la solución.

En algunos casos se deben aplicar las propiedades de los logaritmos.

(c) $\log_2(2-x) + \log_2(1-x) = 3$

$\log_2(2-x)(1-x) = 3$ utilizando la propiedad "logaritmo de un producto" (p. 30)

$\log_2\left(2 - 3x + x^2\right) = 3$

$2^3 = 2 - 3x + x^2$ utilizando la definición

$8 = 2 - 3x + x^2$

$0 = -6 - 3x + x^2$

$x_1 = \dfrac{3+\sqrt{33}}{2}$

$x_2 = \dfrac{3-\sqrt{33}}{2}$

utilizando la fórmula general

Comprobación

Se puede usar una aproximación para cada valor.

Para $x_1 = \dfrac{3+\sqrt{33}}{2} \approx 4{,}372281323 \approx 4{,}3723$

$\log_2(2-4{,}3723)+\log_2(1-4{,}3723)=$
$\log_2(-2{,}3723)+\log_2(-3{,}3723)$

Se obtienen argumentos negativos.

Es decir, la función NO está definida en este valor.

Por lo tanto, SE RECHAZA el valor $x_1 = \dfrac{3+\sqrt{33}}{2}$ como solución.

Para $x_2 = \dfrac{3-\sqrt{33}}{2} \approx -1{,}3723$

$\log_2(2--1{,}3723)+\log_2(1--1{,}3723)=\log_2 3{,}3723+\log_2 2{,}3723=\log_2 8=3$

Por lo tanto, $x_2 = \dfrac{3-\sqrt{33}}{2}$ SE ACEPTA como solución.

(d) $\log(3x+2)=1+\log(x-1)$

Se despeja $\log(3x+2)-\log(x-1)=1$

Se utiliza la propiedad 6 apartado 2 pag32 $\log\left(\dfrac{3x+2}{x-1}\right)=1$

Se usa la definición de logaritmo $10^1 = \dfrac{3x+2}{x-1}$ *x no puede ser 1*

Se resuelve la ecuación:

$$10 = \frac{3x+2}{x-1}$$
$$10(x-1)=3x+2$$
$$10x-10=3x+2$$
$$7x=12$$
$$x=\frac{12}{7}$$

Comprobación

Se calcula cada lado de la igualdad con el valor hallado $x=\dfrac{12}{7}$

$$\log(3x+2)=\log\left(3\cdot\frac{12}{7}+2\right)=\log\left(\frac{50}{7}\right)\approx 0{,}853871964$$

$$1+\log(x-1)=1+\log\left(\frac{12}{7}-1\right)=1+\log\frac{5}{7}\approx 0{,}853871964$$

Se obtuvo lo mismo en cada expresión, $\Rightarrow$ se acepta al valor $\frac{12}{7}$ como solución.

(e) $(\ln x)^2=\ln(x^2)$

$(\ln x)^2=2\ln x$	por propiedad “logaritmo de una potencia” p30
$(\ln x)^2-2\ln x=0$	despejando
$(\ln x)(\ln x)-2\ln x=0$	pues una expresión a la 2 es multiplicación
$\ln x(\ln x-2)=0$	factorizando por factor común
$\ln x=0$ o $\ln x-2=0$	pues un producto es cero si uno de sus factores es cero

$\ln x=0$

$e^0=x$ *por definición*

$1=x$ *por leyes de potencias*

$\ln x-2=0$

$\ln x=2$

$e^2=x$ *por definición*

Comprobación

$(\ln x)^2=\ln(x^2)$

para $x=1$

$$(\ln 1)^2 = (0)^2 = 0$$
$$\ln\left(1^2\right) = \ln(1) = 0$$

dio lo mismo, por lo tanto, se acepta x=1

para $x=e^2$

$$\left(\ln e^2\right)^2 = (2\ln e)^2 = (2\cdot 1)^2 = (2)^2 = 4$$
$$\ln\left(\left(e^2\right)^2\right) = \ln\left(e^4\right) = 4\ln e = 4\cdot 1 = 4$$

se acepta x=e^2

RETO:

Resuelva gráficamente la ecuación $\log_2 x = 3$

COLECCIÓN DE EJERCICIOS (25)

Resuelva las ecuaciones logarítmicas que se presentan a continuación. *Recuerde verificar las soluciones obtenidas.*

- $\log_3(x+1)+\log_3(x+3)=1$
- $\log_4 8+\log_4(a+5)=3$
- $(3-\log x)(2+\log x)=0$
- $\log(m+1)-\log(m-1)=1$
- $\log(x+1)-\log x=\log 3$
- $\log\left(\sqrt{\dfrac{a+6}{a-1}}\right)=\log 2$
- $-\log\left(\dfrac{m}{2m-3}\right)=\log\left(\dfrac{5}{2m+3}\right)$
- $-\log(p-1)=2$
- $\log 5+\log k=2$
- $\log h+\log(h-3)=1$
- $\log_2 x^2+\log_2 2^3=\log_2 x^3-\log_2 \dfrac{1}{32}$
- $3\log_8 x=\log_8 36+\log_8 12-\log_8 2$
- $\log_{10} x=1+\log_{10}\sqrt{x}$
- $\log_2(x-3)-\log_2(2x+1)=-\log_2 4$
- $\log_8 x+\log_8 x^2=1$

Respuestas

•	x = 0
•	a = 3
•	x = 1000 y x = 0,01
•	$m = \frac{11}{9}$
•	x = 0,5
•	$a = \frac{10}{3}$
•	$m = \frac{9}{4}$
•	p = 1,01
•	k = 20
•	h = 5
•	$x = \frac{1}{4} \qquad x = 2^{-2}$
•	x = 6
•	x = 100
•	$x = \frac{13}{2}$
•	x = 2

APLICACIONES
FUNCIÓN EXPONENCIAL Y FUNCIÓN LOGARÍTMICA(4)

La importancia de los modelos matemáticos para el análisis de fenómenos de diversos campos es incuestionable y además es una característica que contribuye a la motivación hacia el estudio de la matemática.

En el caso de las funciones exponencial y logarítmica, los aportes son tan valiosos que el ejercicio de resolución de situaciones problema, no sólo contribuye al ejercicio de destrezas en el ámbito matemático sino que ayuda a la toma de conciencia de la relevancia de la matemática en la ciencia, economía, ciencia social, médica y otras áreas.

Función Exponencial

El crecimiento de bacterias y el crecimiento demográfico son sólo dos ejemplos de aplicaciones de la función exponencial. A continuación se presentan ejemplos de estas y otras aplicaciones.

Crecimiento de poblaciones

El crecimiento de poblaciones de personas, bacterias, animales o insectos se aproxima al crecimiento exponencial. Es decir, se pueden "emular" con una función exponencial.

Este fenómeno se estudia desde el tiempo de duplicación, es decir un modelo para el tiempo que tarda una población en tener el doble de individuos o miembros. Y la "fórmula" es la siguiente:

$$P = P_0 \, 2^{\frac{t}{d}}$$

P representa la población en el tiempo t

Población inicial → P_0 es la población en el tiempo $t = 0$

d es el tiempo de duplicación

Ejemplo

En Telecumbria la población alcanza el medio millón, y se estima que en 12 años será de un millón. Si el crecimiento sigue la misma tasa, ¿cuál será la población en 20 años?

Solución

De acuerdo con la información la población inicial es de 500 000 personas y el tiempo de duplicación es de 12 años (pues se estima que en ese tiempo será el doble, o sea un millón)

La pregunta es cuánta será la población dentro de 20 años. Por lo tanto, sustituyendo los valores:

$$P = 500\,000 \cdot 2^{\frac{20}{12}}$$

$$P = 500\,000 \cdot 2^{\frac{5}{3}}$$
$$P \approx 1587\,401$$

Respuesta: Si la tasa continúa manteniéndose, en 20 años la población será aproximadamente de un millón quinientos ochenta y siete mil cuatrocientos una persona.

Ejercicio Para el ejemplo anterior, calcule la población para dentro de 18 años.

Desintegración radiactiva

También denominada "crecimiento negativo" o "decaimiento radiactivo". Los materiales radiactivos son muy útiles en la ciencia médica, para terapias y diagnósticos. Por otra parte, son fuentes de potencia en satélites.

Se inicia con una cantidad A_0 de un determinado isótopo radiactivo, la cual decrece exponencialmente con una tasa que es particular de cada isótopo. Una medida de la tasa de desintegración es la *vida media* del isótopo, es decir el tiempo que tarda en llegar a la mitad de la cantidad inicial.

Un modelo de decaimiento es

$$A = A_0 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{h}}$$
$$= A_0\, 2^{-\frac{t}{h}}$$

en el cual A es la cantidad del material en el tiempo t
A_0 es la cantidad inicial, es decir en t = 0
h es la vida media (tiempo en llegar a la mitad)

Ejemplo

El oro radiactivo $198\left({}^{198}Au\right)$ material para las radiografías del hígado, tiene 2,67 días como vida media. Si se inicia con 45 miligramos de la sustancia, ¿cuánta cantidad quedará después de 1 día?

Solución

De acuerdo con el modelo de desintegración, $A = A_0\ 2^{\frac{-t}{h}}$ y sustituyendo los valores $h = 2{,}67$, $A_0 = 45$, $t = 1$

Se tiene que $A = 45 \bullet 2^{\frac{-1}{2{,}67}}$

De donde y con ayuda de la calculadora $A = 34{,}71$

Esto indica que después de transcurrir un día la cantidad del material es de 35 miligramos aproximadamente.

Ejercicio Resuelva el siguiente problema

En el diagnóstico de tumores malignos se utiliza el isótopo radiactivo del galio $67\left({}^{67}Ga\right)$, cuya vida media es de 46,5 horas. Si se inicia con 95 miligramos, ¿cuántos miligramos quedarán después de medio día?

Función logarítmica

Intensidad de sonido

El oído humano percibe el sonido en un rango increíble de intensidades. Un oído sano puede escuchar sin daño un sonido de un billón $1\ 000\ 000\ 000\,000$ de veces la del sonido más leve que es capaz de oír. El trabajo con números de tal rango es complejo, por ello se estudia el fenómeno con logaritmos, de manera que se construyen escalas más comprimidas.

Un ejemplo de escala de sonido es el decibel:

$$\mathrm{D} = 10 \log \frac{\mathrm{I}}{\mathrm{I}_0}$$

D es el nivel de decibeles del sonido.

I es la intensidad del sonido medida en watts por metro cuadrado $\left(\frac{W}{m^2}\right)$.

$\mathrm{I}_0 = \frac{1}{10^{12}}$ lo cual se puede expresar como $\mathrm{I}_0 = 10^{-12}$ wats por metro cuadrado.

Ejemplo

Determinar el número de decibeles de una conversación normal con una intensidad de sonido de $3{,}2 \times 10^{-6}$.

Solución

Se conoce la intensidad de sonido I la cual es $3{,}2 \times 10^{-6}$.
I_0 siempre es 10^{-12}.
Se desea determinar D, es decir el nivel de decibeles.

$$\mathrm{D} = 10\log\frac{3{,}2\times10^{-6}}{10^{-12}}$$
$$D = 10\log\frac{3{,}2\times10^{12}}{10^{6}}$$
$$D = 10\log\left(3{,}2\times10^{6}\right)$$
$$D = 65{,}0515$$

Una conversación normal tiene *aproximadamente* 65 decibeles.

Ejercicio Determine los decibeles de un taladro con intensidad de sonido de $3{,}2\times10^{-3}$.

Intensidad de sismo

La energía que se libera en un terremoto, en joules, es cercana a cien mil millones de veces la energía de un sismo de intensidad baja. Para medir la magnitud de los terremotos se han construido diversas escalas. Una de ella es la escala de Richter. La cual está dada por:

$$M = \frac{2}{3}\log\frac{E}{E_0}$$

E representa la energía liberada por el sismo, medida en joules,

E_0 es la energía liberada por un sismo de leve intensidad que se ha convenido que es $E_0 = 10^{4,40}\ \ joules$

Ejemplo

Si un sismo libera alrededor de $4{,}68\times10^{13}\ \ joules$, ¿cuál es su magnitud, en la escala de Richter?

Solución

$$M = \frac{2}{3}\log\frac{E}{E_0}$$
$$\mathrm{M} = \frac{2}{3}\log\frac{4{,}68\times10^{13}}{10^{4,40}}$$
$$\mathrm{M} = \frac{2}{3}\log 4{,}68\times10^{8,6}$$

$$M = \frac{2}{3} \cdot \left(\log 4{,}68 + \log 10^{8{,}6} \right)$$

$$M = \frac{2}{3}\left(0{,}670245853 + 8{,}6\right)$$

$$M = 6{,}180163902$$

La magnitud del sismo es de, aproximadamente 6,18 joules.

Fuente de Información

Barnett, Raymond A.; Ziegler, Michael R y Byleen, Kart E. (2000) **Precálculo. Funciones y Gráficas.** Traducción al español por Ing. Javier León Cárdenas. México: Mc Graw-Hill.

MÁS APLICACIONES DE LA EXPONENCIAL(26)

El testamento de Benjamín Franklin

Entre otras cosas afirmaba en su testamento:

Nací en Boston, y debo mi inicial instrucción literaria a las escuelas públicas de primera enseñanza establecidas allí, por tanto, en mi testamento he tenido en cuenta a esas escuelas, ... Considero que, entre los artesanos, son los buenos aprendices los más idóneos para hacerse buenos ciudadanos ... Quiero ser útil incluso después de mi muerte, si ello es posible, para la formación y el progreso de otros jóvenes que puedan ser útiles a su país, tanto en Boston como en Filadelfia. A tal fin dedico dos mil libras esterlinas, de las cuales doy mil a los habitantes de la ciudad de Boston en Massachusets, y las otras mil a los habitantes de la ciudad de Filadelfia, en fidecomiso y para los usos, intereses y propósitos aquí mencionados y declarados.

Franklin tenía la idea de prestar dinero a jóvenes aprendices a un interés del 5% con la indicación de que cada beneficiario debería pagar cada año.

...junto con el interés anual, una décima parte de la principal, la suma de la principal y los intereses se prestará a nuevos beneficiarios. Si este plan se ejecuta y realiza como se ha proyectado durante cien años sin interrupción, la suma será entonces de ciento treinta y una mil libras, de las cuales nombro administradores de la donación a los habitantes de la ciudad de Boston, que pueden gastar a su discreción cien mil libras en obras públicas, ... Las treinta y una mil libras restantes se pondrán a interés de la manera indicada anteriormente durante otros cien años... Al final de este segundo periodo, si ningún accidente desafortunado ha estorbado la operación, la suma será de cuatro millones sesenta y una mil libras.

Los prestatarios no fueron siempre tan numerosos como hubiese deseado Franklin. Al cabo de un siglo, en enero de 1894, el fondo había crecido hasta unas noventa mil libras, en lugar de las ciento treinta y una mil previstas.

Supongamos que colocamos en un banco 30000 euros a un interés anual del 5%.

Al final del año nos ingresarán los intereses y tendremos $30000 \cdot \left(1+\frac{5}{100}\right)$ = 30000 · 1,05 = $31\,500$ euros.

Si le solicitamos al director que distribuya el 5% anual en dos pagos semestrales al 2,5%, lo que se llama interés compuesto semestral, ¿dará lo mismo?:

Al final del primer trimestre se nos ingresarán $30\ 000 \cdot \left(1+\frac{5}{2 \cdot 100}\right)$ = 30 000 · 1,025. Si no sacamos el dinero, al final del segundo semestre, tendremos la cantidad que teníamos al comienzo de este periodo multiplicada de nuevo por 1,025, es decir: = 30000 · 1,025 ^{2} = 31518,75. Hemos ganado 18,75 euros más.

Puestos a pedir, le solicitamos que el 5% anual de interés se reparta en doce pagos mensuales a un interés del $\frac{5}{12}$%. En cuyo caso, al final del año tendríamos un capital de $30\ 000 \cdot \left(1+\frac{5}{12 \cdot 100}\right)^{12}$ = 31 534,85694 euros.

Como el capital está a disposición del banco todos los días del año, al menos teóricamente, se podría exigir que actualizara los intereses de día en día. El 5 % del interés anual habría que cambiarlo al $\frac{5}{365}$% diario. De esta forma, al final, tendríamos $30\ 000 \cdot \left(1+\frac{5}{365 \cdot 100}\right)^{365}$ = 315 380,2489 euros.

El no va más de las exigencias sería que, no sólo ya cada hora, sino que cada instante se actualizara el interés. Dicho de otro modo, que la actualización fuese continua. El problema es que el número de instantes que tiene el año es infinito y sólo se nos ocurre aproximarnos a esa idea exigiendo la actualización segundo a segundo. Como el número de segundos que contiene el año es de 31 536 000, el resultado final sería de un capital de $30\ 000 \cdot \left(1+\frac{5}{31\,536\ 000}\right)^{31\,536\ 000}$ = 315 381,3289003 euros, aproximadamente.

En la calculadora, con la tecla e^x, determine 300000 · e ^{0,05}

¿Cuál valor obtuvo? ____________________________

Observe que es un valor muy próximo al determinado en el párrafo anterior.

La fórmula para el interés continuo es $C(t) = C_0 \cdot e^{r\,t}$, donde C_0 es el capital inicial, r es el interés dividido por 100 y t es el número de años que tenemos el capital invertido.

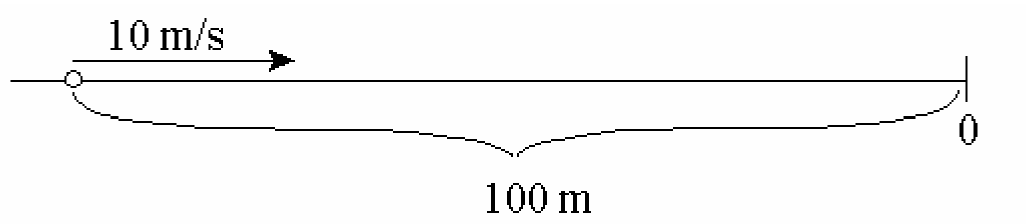
Ejercicio Responda a la siguiente interrogante.

¿Qué tasa de interés compuesto, de manera continua durante cien años, habría dado lugar a las noventa mil libras del testamento de Franklin?

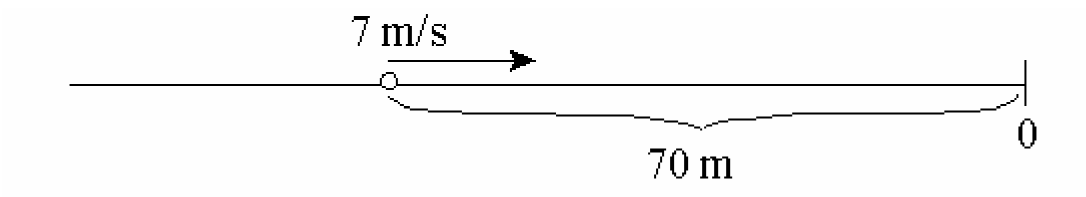
Velocidad proporcional al espacio recorrido

Hemos puesto el ejemplo anterior para que veáis un caso en el que aparece este número misterioso. Existen ámbitos muy diferentes al anterior en el que también se nos presenta:

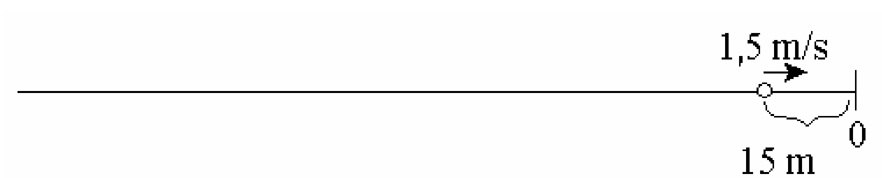
En Física se estudian situaciones en las que la velocidad de un móvil es proporcional al espacio que lleva recorrido (así ocurre con las fuerzas de rozamiento). Consideremos un móvil que está moviéndose sobre la recta a una velocidad igual a la décima parte de su distancia al origen. Supondremos que parte desde una distancia de 100 m respecto al 0, lo hará entonces con una velocidad inicial de 10 m/s



Cuando se halle a 70 m del origen llevará una velocidad de 7 m/s:



Cuando se halle a 15 m de distancia su velocidad habrá disminuido hasta 1,5 m/s



Como cuesta trabajo imaginar que la velocidad cambie en cada instante, vamos a suponer que los cambios se producen de segundo en segundo. Al comienzo de cada segundo que pasa, la velocidad será la décima parte de la distancia que ocupe el móvil respecto al origen:

	velocidad (m/s)	espacio recorrido en ese tiempo (m)	posición final (m hasta el origen)
de 0 a 1 s	10	10	100 - 10 = **90** (= 100 • 0,9)
de 1 a 2	9	9	90 - 9 = **81** = 90 • 0,9 (= 100 • $0,9^2$)
de 2 a 3	8,1	8,1	81 – 8,1 = **72,9** = 81 • 0,9 (= 100 • $0,9^3$)

Se observa que la posición, cuando han pasado t segundos, es de 100• $0{,}9^{t}$ = $100\cdot\left(1-\frac{1}{10}\right)^{t}$

De esta manera, es fácil comprobar que, justo cuando ha pasado un minuto, el móvil se encuentra a $100\bullet 0{,}9^{60}=0{,}17970103\,\mathrm{m}$ del origen (unos 18 cm) y que se dirige hacia éste a una velocidad aproximada de 1,8 cm por segundo.

- Supongamos que el ojo humano no es capaz de apreciar una velocidad de una décima de milímetro por segundo (10^{-5} m/s). ¿Cuándo llevará el móvil esta velocidad?, ¿a qué distancia se encontrará del origen?

Si pensamos ahora que los cambios de velocidad se producen de medio segundo en medio segundo, tendremos la siguiente tabla:

	velocidad (m/s)	espacio recorrido en ese tiempo (m)	posición final (m hasta el origen)
de 0 a $\frac{1}{2}$ s	10	$\frac{10}{2}$	100 - $\frac{10}{2}$= **95** (= 100 • 0,95)
de $\frac{1}{2}$ a 1	9,5	$\frac{9{,}5}{2}$	95 - $\frac{9{,}5}{2}$ = **90,25** = 95 • 0,95 (= 100 • $0{,}95^{2}$)
de 1 a $\frac{3}{2}$	9,025	$\frac{9{,}025}{2}$	90,25 – $\frac{9{,}025}{2}$ = **85,7375** = 90,25 • 0,95 (= 100 • $0{,}95^{3}$)

Al cabo de k intervalos de medio segundo, la posición será de 100• $0{,}95^{k}$ metros hasta el origen.

En consecuencia, al cabo de t segundos su posición es de 100•$0{,}95^{2t}$ = $100\cdot\left(1-\frac{1}{2\cdot 10}\right)^{2t}$ metros.

Por un procedimiento similar, podríamos establecer que si los cambios de velocidad se produjesen cada milésima de segundo, la posición, tras t segundos, sería la de $100\cdot\left(1-\frac{1}{1000\cdot 10}\right)^{1000t}$. Es fácil comprobar que cuanto más pequeño sea el intervalo en el que cambiamos de velocidad, más nos acercamos a la mágica expresión que es la auténtica fórmula del movimiento.

<u>Ley de enfriamiento</u>

Hemos hablado de un caso en que la velocidad era proporcional al espacio recorrido. Parecida es la situación que describe la Ley del Newton del enfriamiento de los cuerpos. Esta ley establece que el enfriamiento de un cuerpo es proporcional, en cada instante, a la diferencia con la temperatura ambiente. Precisando, la ley dice que si T_0 es la temperatura inicial con que introducimos un cuerpo en un ambiente a una temperatura de T_a grados, al cabo de un tiempo t la temperatura del cuerpo es: $T(t) = T_a + (T_0 - T_a)\, e^{-k\,t}$, donde k es una constante, llamada constante de enfriamiento, particular de cada cuerpo.

William Dunhan, en su libro *El universo de las matemáticas*, nos cuenta cómo Clara, la novia de *Edu el comadreja*, se libró de la acusación por el asesinato de éste:

Clara pasó la tarde en el bar de Luisa, bebiendo mucho y amenazando con matar a Edu; a las once y cuarto salió del local maldiciendo, completamente fuera de sí.

A las 12 de la noche la policía entraba en el apartamento de Edu, tras recibir una llamada anónima, encontrando su cadáver. Un oficial tomó nota de que la temperatura ambiente era de 68 ºF y la del cadáver de 85 ºF. Al finalizar el trabajo, dos horas más tarde, se volvió a tomar la temperatura de *el comadreja*, que había descendido hasta los 74 ºF.

- Averigua, con los datos anteriores, la constante de enfriamiento del finado Edu, y halla la hora de su fallecimiento, para comprobar que la despechada Clara tenía una coartada perfecta.

- Se introduce un cuerpo caliente en un medio determinado y se realizan las siguientes mediciones: transcurrida una hora, el cuerpo presenta una temperatura de 52º, pasadas dos horas su temperatura baja a 33º y, a la tercera hora, la temperatura era ya de 20,5º. Determinar la temperatura ambiente y la temperatura inicial del cuerpo.

<u>Desintegración radioactiva</u>

Algunos átomos son inestables y se desintegran espontáneamente emitiendo radiaciones. Se ha observado que el tiempo en que determinada substancia se reduce a la mitad, llamado *vida media*, es una constante característica de ella e independiente de la cantidad que haya. La ley de Rutherford sobre la desintegración radiactiva dice que el número de átomos de un elemento radiactivo transformados en un tiempo determinado es proporcional al número de átomos de ese elemento que estén presentes en la substancia, en particular, la fórmula que describe la desintegración es de la forma: $N(t) = N_0 \cdot e^{k\,t}$.

La vida media de los elementos radiactivos puede utilizarse a veces para determinar la fecha de sucesos del pasado de la Tierra. Las edades de las rocas de más de 2000 millones de años pueden establecerse mediante la desintegración radiactiva del uranio (de 4500 millones de años de vida media).

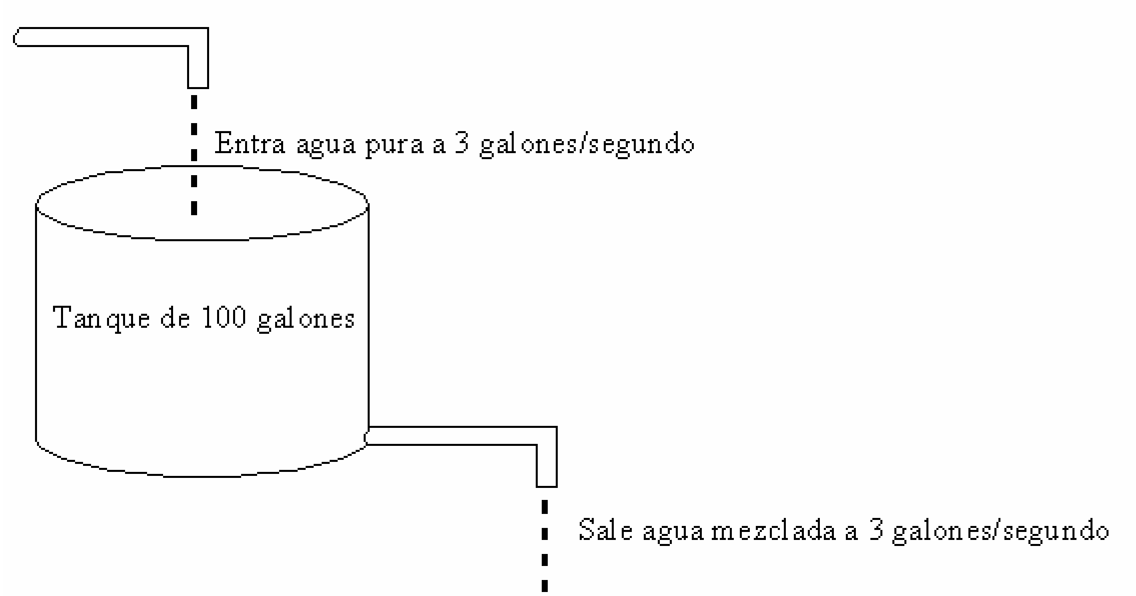
En un organismo vivo, cada gramo de carbono contiene 10^{-6} gramos de C^{14}. Tras su muerte, el organismo deja de absorber carbono y la proporción de C^{14} decrece a medida que se va desintegrando. Su vida media es de unos 5730 años, de modo que es posible estimar la edad de restos orgánicos: los arqueólogos han fechado así conchas, semillas, objetos de madera, o la fecha en que se realizaron pinturas rupestres.

- Hállese k en la fórmula de desintegración del C^{14}.
- El carbón de un árbol muerto en la erupción volcánica que dio origen al Lago Cráter, en Oregon, contenía el 44'5% del C^{14} que se halla en la materia viva. ¿Qué antigüedad aproximada tiene el lago?

- En el año 2000 se encuentra, en el centro de Illinois, un hueso fosilizado con el 17% de su contenido original de C^{14}. ¿En qué año murió el animal? Contéstese en el caso de que las proporciones fuesen 16% y 18% respectivamente (para ver las consecuencias de un pequeño error en la medida del carbono)

Mezcla de líquidos

Tenemos un tanque con una solución al 25% de ácido y resto de agua. Para limpiar el tanque, introducimos por arriba un caudal de agua a 3 galones por segundo. El tanque evacua similar cantidad por el grifo de abajo.



Mediante técnicas matemáticas, se puede determinar que dicho porcentaje viene expresado por la ecuación $P(t)=\dfrac{25}{e^{0,03\,t}}$

- ¿Qué porcentaje de ácido quedará en la solución a los cinco minutos de iniciarse la limpieza? ¿Cuándo será el porcentaje ácido de un 5 %?

La exponencial en la sicología

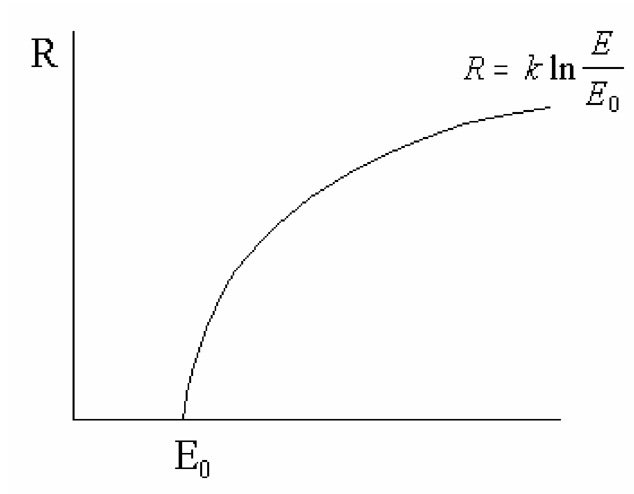
La experimentación demuestra que un modelo para describir el aprendizaje de una serie de símbolos por una persona viene dado por la ecuación $S = N\left(1-e^{-k\,t}\right)$ donde , para cada persona, N y K se determinan empíricamente, y S es el número de símbolos que una persona puede aprender en t horas.

- ¿Qué representa N?
- Supongamos que una persona ha aprendido 20 símbolos después de 4 horas, y 25 después de 6. Halla N y k, y determina cuál es el número máximo de símbolos que podrá aprender antes de "embotarse".

MÁS APLICACIONES DE LOS LOGARITMOS

Logaritmos y sicología

En sicología se utiliza la ley de Weber-Fechner, de estímulo-respuesta, que dice que la respuesta (R) se relaciona con el estímulo (E) mediante la ecuación $R = k \ln \frac{E}{E_0}$, donde E_0 es el valor mínimo del estímulo que puede detectar el sujeto, y k es una constante que depende del experimento.



Esta ley también se utiliza para describir la percepción de la luz. E_0 denota la intensidad de luz que apenas es visible para una persona. La diferencia aparente en el brillo viene dada por R, que se conoce como *magnitud aparente* de la fuente luminosa.

Una modificación simple de este modelo es la que utilizan los astrónomos para asignar las magnitudes de brillantez de las estrellas.

A un levantador de pesas se le aplica un estímulo de electricidad (en voltios) para alentarlo a levantar más peso (este método ha sido utilizado por algunos levantadores).

- Supongamos que el estímulo mínimo que siente el atleta es de 50 voltios, y que una descarga de 500 le induce a levantar 10 libras más del valor normal. ¿Qué voltaje deberá aplicársele para que alce 20 libras por encima del valor normal?

Química y logaritmos

El pH de una solución se define como - log $[H^+]$, siendo $[H^+]$ la concentración de iones de hidrógeno en moles/litro. Cuando el pH es menor que 7 la solución es ácida, si es igual a 7 es neutra y, cuando es mayor, es alcalina.

- El contenido de iones de hidrógeno de la sangre es 4×10^{-8} moles/litro. ¿Es la sangre alcalina, neutra o ácida?

MÚSICA y logaritmos

Los grados de tonalidad de la escala cromática no son equidistantes por el número de vibraciones ni por la longitud de onda de sus sonidos, sino que representan los logaritmos en base 2 de estas magnitudes.

Supongamos que la nota *do* de la octava más baja, que representaremos por cero, está determinada por n vibraciones por segundo. El *do* de la primera octava producirá 2n vibraciones, el *do* de m-ésima octava producirá $n \cdot 2^m$ vibraciones cada segundo. Si hemos llamado cero a *do*, y seguimos numerando las notas, tendremos que *sol* será la 7ª, *la* la 9ª, la 12ª será de nuevo *do*, en una octava más alta, etc. Como en la escala cada nota tiene $\sqrt[12]{2}$ más vibraciones que la anterior, entonces el número de éstas en cualquier tono se puede expresar con la fórmula $N_{pm} = n \bullet 2^m \left(\sqrt[12]{2}\right)^p$. Tomando logaritmos: $\log N_{pm} = \log n + \left(m + \frac{p}{12}\right)\log 2$

Al tomar el número de vibraciones del *do* más bajo como unidad y pasando los logaritmos a base 2, se tiene que $\log N_{pm} = m + \frac{p}{12}$

En el tono *sol* de la tercera octava, $3 + \frac{7}{12} \approx 3{,}583$, 3 es la característica del logaritmo del número de vibraciones y $\frac{7}{12}$ la mantisa del mismo logaritmo en base 2. Se tiene que el número de vibraciones es $2^{3{,}583}$, que es 11,98 veces mayor que las del tono *do* de la 1ª octava.

PROBLEMAS DE APLICACIÓN DE FUNCIONES EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS(27)

1. Suponga que en la actualidad la población mundial es de aproximadamente 6,5 mil millones de personas y que esta crece en una forma continua a una tasa anual de 1,6%. ¿Cuál será la población en 10 años?

2. En un vehículo espacial Ruso la fuente de energía nuclear tenía una potencia de salida de P Watts después de x días de uso, y está dada por $P(x) = 75\ e^{-0,0035x}$, si la nave requiere de una potencia mínima de 50 Watts, ¿cuántos días durará la misión más larga?

3. En el año 2000 la OMS estimó que en todo el mundo se han presentado 18 millones de casos de SIDA desde el comienzo de la epidemia. Suponga que la enfermedad se expande en forma continua a una tasa anual del 1,4%, ¿cuál es el total de casos de SIDA que se presentarán para el año 2005 y 2010?

4. La magnitud de un sismo se mide en escala de Richter usando la siguiente función $M(x) = \frac{2}{3} \log \frac{E}{{}_0}$ donde $E_0 = 10^{4,4}\ J$ es decir $E_0 = 25\,118{,}8643151 J$ que es la energía liberada por un sismo de baja intensidad. En 1985 un terremoto en Chile liberó aproximadamente $1{,}26 \mathrm{X} 10^{16}$ joules de energía. ¿Cuál fue la magnitud en la escala de Richter?

5. Usando la función de la escala de Richter determine la energía liberada por un sismo que tiene 9,2 en la escala de Richter.

6. La cantidad de carbono 14 que los seres vivos tienen es un valor constante pero al morir esta cantidad empieza a disminuir de acuerdo con $C(x) = C_0\ e^{-0,000124x}$ en donde C_0 es la cantidad de carbono cuando $x = 0$ y x es el tiempo transcurrido en años. Suponga que para cierta planta el valor de $C_0 = 129$, y tras su descubrimiento se estima que solo contiene el 15% de la cantidad original de carbono 14, ¿cuál es la edad de la planta descubierta?

7. Una célula de cáncer es inyectada en un ratón saludable. Si al transcurrir 12 horas esta célula se divide en dos y a su vez estas dos se dividen en cuatro al paso de otras 12 horas, encuentre una función que nos diga el número total de células cancerígenas tras transcurrir x días y encuentre el número de células de cáncer que tendrá el ratón después de 1 año.

8. El nivel de decibeles del sonido se determina con la función $D(x) = \log \frac{I}{I_0}$. Si la intensidad de un sonido es 100 000 veces la de otro, ¿cuánto más grande es el nivel de decibeles del sonido más fuerte comparado con el del más suave?

9. Si después de t años hay A miligramos de radio, entonces $A = k\,e^{-0.0004t}$ donde k es una constante. Si ahora hay 60mg de radio, ¿cuánto radio habrá dentro de 100 años?

10. Estadísticamente se determinó que la población de una cierta ciudad a t años contados a partir de ahora será P , donde $P(t) = 40\ 000\ e^{kt}$ y *k* es una constante. Si la población aumenta de 40 000 a 60 000 en 40 años, ¿en cuánto tiempo será la población de 80 000?

11. Si después de t segundos hay A gramos de una sustancia radiactiva, entonces $A(t) = 100\,e^{-0,3t}$ ¿En cuánto tiempo habrá sólo 50g de la sustancia?

12. En un cierto cultivo de bacterias, si A es la cantidad de bacterias presentes a los t minutos, entonces $A(t) = k\,e^{0,006t}$ donde k es una constante. Si inicialmente hay 1000 bacterias, ¿cuántas bacterias habrá después de 1 hora?

13. Para el cultivo de bacterias del ejercicio anterior determine ¿cuánto tiempo transcurre hasta que aparecen 1350 bacterias en el cultivo?

14. Si se depositan \$100 en una cuenta de ahorros que paga el 6% de interés compuesto semestralmente y no se efectúan retiros o depósitos adicionales, ¿en cuánto tiempo habrá \$150 en al cuenta? $C = P\left(1 + \frac{i}{m}\right)^n$ donde *C* es la cantidad al final de n periodos de interés de una inversión de *P* pesos a una tasa *i* de interés del 100% compuesto m veces por año.

15. ¿Cuánto tiempo debe transcurrir para que \$450 se tripliquen si generan un interés del 6% compuesto semestralmente?

16. La vida media del radio es de 1690 años; esto es, la mitad de una cierta cantidad de radio decaerá en 1690 años. Suponga que a los t años, a partir de ahora, habrá A miligramos de radio y que $A = A_0\,e^{kt}$ donde A_0 miligramos es la cantidad de radio presente actualmente y k es una constante. Encuentre k.

17. En una cierta inversión especulativa se adquirió hace tres años una parte de un bien raíz en \$2000 y se vendió hay en \$10 000. ¿Cuál es la razón del interés, compuesto mensualmente que se ha obtenido?

18. En su cumpleaños número veinticinco un hombre hereda \$500 000 si invirtió esta cantidad al 8% de interés compuesto anual, ¿qué cantidad recibirá si lo retira a los 65 años de edad?

19. La cantidad que queda de 50 gramos de plutonio después de t años está dada por $A(t) = 50\,e^{-0,0000287t}$. Después de 1000 años, ¿qué porcentaje de plutonio habrá desaparecido?

20. El número de bacterias presentes en un cultivo después de t minutos se da por $N(t) = 200\left(4^{\frac{t}{2}}\right)$ Encuentre la cantidad inicial de bacterias.

21. Usando el resultado del ejercicio anterior, encuentre la cantidad existente de bacterias después de 2min, 4min y 10min. ¿Cuántas bacterias habrá después de 1 hora?

22. El número de bacterias existentes en un cultivo después de t horas se da por $C(t)=C_0\,e^{kt}$ Encuentre k si se sabe que después de una hora, la colonia se ha extendido a 1,5 veces su población inicial.

23. Suponga que se depositan $150 000 en una cuenta que paga un interés compuesto anual de 8%. ¿qué interés habrá ganado en 4 años?

24. La vida media del Polonio 210 es de 140 días. Si $A(t)=A_0\,e^{kt}$ es la cantidad después de t días, si inicialmente se tenía 200g de Po210 ¿cuál es la cantidad restante después de 80 días? ¿y después de 300 días?

Solución

1) 7,63 mil millones
2) 115,85 días
3) 2005 $\rightarrow$ 19,31 millones   2010 $\rightarrow$ 20,70 millones
4) magnitud aproximada de 7,8
5) 1,58 X 10^{18} joules
6) 15,3 años aproximadamente
7) $P(t)=2^{2t}\quad t\ en\ días$ En un año 5,72 X 10^{219}
8) El fuerte tiene 50 decibeles más que el débil.
9) 57,65
10) 68 años aproximadamente
11) 2,31 segundos
12) 1433
13) 50 minutos
14) $n=13{,}72$
15) $n\approx 37{,}17$
16) $k=-0{,}00041$
17) $i\approx 22{,}14$
18) $10 862 260,75
19) 2,83 %
20) 200
21) 800; 3200; 204 800
22) $k=0{,}41$
23) Gana en intereses $ 54 073,34
24) $A(80)=134{,}60$ $A(200)=45{,}30$

Las aplicaciones matemáticas revelan no sólo la importancia de estas sino también cómo otras áreas dan insumo a las matemáticas.

Descubre la belleza de las matemáticas desde la perspectiva de su naturaleza más intrínseca y no desprecies su utilidad y servicio a otros campos.

REFERENCIAS

(1) Material de Secretaría de Educación Pública, República de México. Corresponde a la sesión de GA 3.25 ¡UBICALOS!

(2) Material de Secretaría de Educación Pública, República de México. Corresponde a la sesión de GA 3.26 UNO DEPENDE DE OTRO

(3) Desarrollado por Licda. Laura Sáenz Fernández.

(4) Elaborado por Licda. Lilliam Rojas Artavia

(5) Material de Secretaría de Educación Pública (SEP), República de México. Corresponde a la sesión de GA 3.27 LA FUNCION DEBE CONTINUAR

(6) Basado en material del Centro de Información Electrónica (Kiosco de Información).

(7) Material de SEP, República de México. Sesión de GA 3.28 CON DOS SE PUEDE

(8) Material de SEP, República de México. Sesión de GA 3.29 ALGO CAMBIA

(9) Material de SEP, República de México. Corresponde a la sesión de GA 3.30 ¡VAYA FAMILIAS!

(10) Material de SEP, República de México. Corresponde a la sesión de GA 3.31 UNA FUNCION EN CUATRO ACTOS

(11) Recopilación realizada por Licda. Lilliam Rojas Artavia.

(12) Elaborado por Licda. María Alicia León Solís para el Centro de Información Electrónica.

(13) Elaborado por Licda. Lilliam Rojas Artavia para el Centro de Información Electrónica.

(14) Barnett, Raymond; Ziegler, Michael R. y Byleen, Kart E. **Precálculo Funciones y Gráficas** 4ª edición. México: McGraw – Hill

(15) **Factorización** 〈http://www20.brinkster.com/fmartinez/algebra4.htm#terminos〉 *matemática factorización* (2 de setiembre de 2004)

(16)Factorización de Expresiones Algebraicas 〈http://www.uprh.edu/~eudez/web%20mecu/docsPDFdeMECU/leccion4.PDF〉 *polinomios factorizar OR factorización* (15 de julio de 2004)

(17) **Factorización de Polinomios** 〈http://ciencias.bc.inter.edu/ntoro/factorw.htm〉 *factorización polinomios ejercicios OR solución OR práctica* (3 de enero de 2005)

(18) **Sitios Educativos, factorización** 〈http://dc.inictel.gob.pe/proyectoteleed/curso-mat/fact-comun/ejerciciofc.htm〉 *factorización polinomios ejercicios OR solución OR práctica* (3 de enero de 2005)

(19)Okmath Problemas y ejercicios de matemática 〈http://www.okmath.com/enuncia.asp?clave=13521〉 *factorización polinomios ejercicios OR solución OR práctica* (3 de enero de 2005)

(20) Material que integra información hallada en las siguientes direcciones electrónicas:

EXPRESIONES RACIONALES <http://ciencias.bc.inter.edu/ntoro/gemaexpracio.htm> *"expresiones racionales" operaciones -plan -curriculum -créditos -planeamiento* (15 de julio de 2004)

Tareas escolares gratis armandotareas.com ayuda gratis con tus <http://usuarios.lycos.es/armandotareas/apuntesmatematicas/expresionesfraccionales.doc> *"expresiones racionales" operaciones -plan -curriculum -créditos –planeamiento* (15 de julio de 2004)

(21)xavierlefort/historia de los logaritmos <http://nti.educa.rcanaria.es/penelope/es_conflefort.htm> *historia logaritmo neperiano* (setiembre de 2004)

(22) Logpro <http://www.sectormatematica.cl/contenidos/logprop.htm> *propiedades logaritmos* (setiembre 2004)

(23)Ecuación Exponencial <http://www.cnice.mecd.es/Descartes/Bach_HCS_1/Ecuaciones_exponenciales_y_logaritmicas/Ecu_exp.htm> *"ecuaciones exponenciales" solución OR resolución* (setiembre de 2004)

(24) Logaritmos-Calculaweb <http://www.ctv.es/USERS/vaello/manual/c-logaritmes.htm> *propiedades logaritmos* (setiembre 2004)

(25) Recopilación del docente Randall Loaiza S. Liceo Mario Vindas Salazar

(26) Fernández J. Mª, Barragán, J. M. Y Molina, A. **Algunas Aplicaciones de la Exponencial** <http://www.juntadeandalucia.es/averroes/iesarroyo/matematicas/materiales/1bach/naturaleza/aplicacionesdelaexponencial/aplicaciones.htm> *“aplicaciones de la exponencial”* (8 de octubre de 2004)

(27) Vara Trujillo, Francisco José. **Mapas conceptuales. Función inversa.** <http://www.mate.com.mx/ejercicios.htm> *función inversa* (12 de julio de 2004)

(28)Expresiones algebraicas <http://www.ing.unlp.edu.ar/decanato/ingreso/ing02/Material/12_EA_Introduccion.pdf> *"expresiones algebraicas" definición* (13 de enero de2005)

(29) Santos Cuervo, Leoncio. **Ecuación de segundo grado** <http://www.cnice.mecd.es/Descartes/4a_eso/Ecuacion_de_segundo_grado/Ecua_seg.htm#probl> *aplicaciones matemáticas ecuación cuadrática OR "segundo OR grado"* (19 de mayo de 2003)

(30) Earl W. Swokowski (1986) **Algebra y Trigonometría y Geometría Analítica** México: Grupo editorial Iberoamérica