Matemáticas 4 ESO

opción A

Biblioteca del profesorado

SOLUCIONARIO

El Solucionario de **Matemáticas** para 4.º de ESO
es una obra colectiva concebida, diseñada
y creada en el departamento de Ediciones
Educativas de Santillana, dirigido
por **Enric Juan Redal**.

En su realización han intervenido:

Ana María Gaztelu
Augusto González

EDICIÓN
Angélica Escoredo
Mercedes de Lucas
Carlos Pérez
Rafael Nevado

DIRECCIÓN DEL PROYECTO
Domingo Sánchez Figueroa

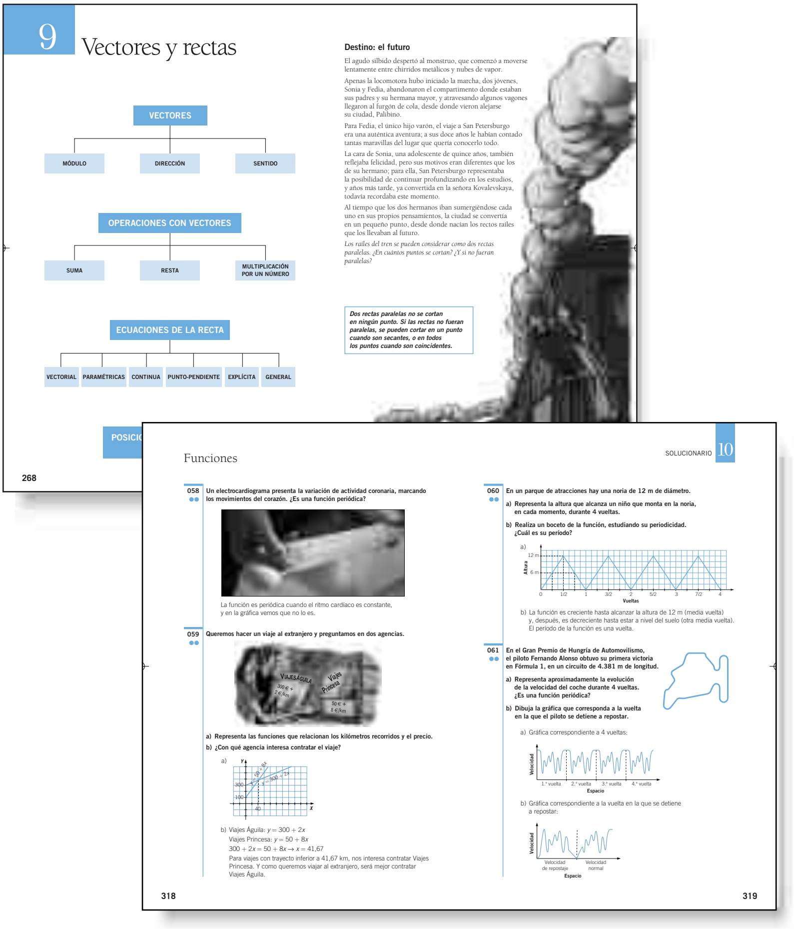
Proyecto **La Casa del Saber**

Santillana

Presentación

El nombre de la serie, **La Casa del Saber**, responde al planteamiento de presentar un proyecto de Matemáticas centrado en la adquisición de los contenidos necesarios para que los alumnos puedan desenvolverse en la vida real. El saber matemático, dentro de la etapa obligatoria de la enseñanza, debe garantizar no solo la interpretación y la descripción de la realidad, sino también la actuación sobre ella.

En este sentido, y considerando las Matemáticas a estos niveles como una materia esencialmente procedimental, recogemos en este material la **resolución de todos los ejercicios y problemas** formulados en el libro del alumno. Pretendemos que esta resolución no sea solo un instrumento, sino que pueda entenderse como una propuesta didáctica para enfocar la adquisición de los distintos conceptos y procedimientos que se presentan en el libro del alumno.



Índice

Unidad 0	Repaso	1-11
Unidad 1	Números enteros	10-33
Unidad 2	Números racionales	34-67
Unidad 3	Números reales	68-103
Unidad 4	Problemas aritméticos	104-141
Unidad 5	Polinomios	142-167
Unidad 6	Ecuaciones, inecuaciones y sistemas	168-209
Unidad 7	Semejanza	210-233
Unidad 8	Trigonometría	234-267
Unidad 9	Vectores y rectas	268-297
Unidad 10	Funciones	298-323
Unidad 11	Funciones polinómicas, racionales y exponenciales	324-369
Unidad 12	Estadística	370-397
Unidad 13	Combinatoria	398-421
Unidad 14	Probabilidad	422-447

0 Repaso

NÚMEROS

001 **Expresa en forma decimal estas fracciones. ¿Qué tipo de decimal obtienes?**

a) $\frac{7}{8}$ **b)** $\frac{11}{6}$ **c)** $\frac{17}{90}$ **d)** $\frac{4}{330}$

a) $\frac{7}{8} = 0{,}875 \longrightarrow$ Decimal exacto

b) $\frac{11}{6} = 1{,}83333\ldots \longrightarrow$ Decimal periódico mixto

c) $\frac{17}{90} = 0{,}18888\ldots \longrightarrow$ Decimal periódico mixto

d) $\frac{4}{330} = 0{,}0121212\ldots \rightarrow$ Decimal periódico mixto

002 **Calcula.**

a) $\frac{2}{5} \cdot \left(\frac{3}{2} - \frac{7}{10}\right) - \frac{1}{4}$ **b)** $\frac{6}{7} - \frac{3}{4} : \frac{7}{10} + \frac{2}{5}$ **c)** $\frac{6}{7} - \left(\frac{2}{3}\right)^3 : \frac{1}{9}$

a) $$\frac{2}{5} \cdot \left(\frac{3}{2} - \frac{7}{10}\right) - \frac{1}{4} = \frac{2}{5} \cdot \frac{8}{10} - \frac{1}{4} = \frac{16}{50} - \frac{1}{4} = \frac{8}{25} - \frac{1}{4} =$$
$$= \frac{32 - 25}{100} = \frac{7}{100}$$

b) $$\frac{6}{7} - \frac{3}{4} : \frac{7}{10} + \frac{2}{5} = \frac{6}{7} - \frac{30}{28} + \frac{2}{5} = \frac{120 - 150 + 56}{140} = \frac{26}{140} = \frac{13}{70}$$

c) $$\frac{6}{7} - \left(\frac{2}{3}\right)^3 : \frac{1}{9} = \frac{6}{7} - \frac{8}{27} : \frac{1}{9} = \frac{6}{7} - \frac{72}{27} = \frac{162 - 504}{189} =$$
$$= -\frac{342}{189} = -\frac{38}{21}$$

003 **Opera y simplifica, teniendo en cuenta la jerarquía de las operaciones.**

a) $\left(\frac{3}{6} - \frac{4}{5}\right) \cdot \left(\frac{4}{12} - \frac{3}{6}\right)$

b) $\frac{-2}{3} + \frac{1}{3} \cdot \left[-\frac{7}{3} - (-2) \cdot \left(\frac{1}{4} - 3\right)\right]$

c) $2 - \frac{4}{3} \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{5}\right) - \left(\frac{4}{3} + 2\right) \cdot \frac{1}{5}$

a) $$\left(\frac{3}{6} - \frac{4}{5}\right) \cdot \left(\frac{4}{12} - \frac{3}{6}\right) = \frac{15 - 24}{30} \cdot \frac{4 - 6}{12} = \frac{-9}{30} \cdot \frac{-2}{12} = \frac{18}{360} = \frac{1}{20}$$

b) $\dfrac{-2}{3}+\dfrac{1}{3}\cdot\left[-\dfrac{7}{3}-(-2)\cdot\left(\dfrac{1}{4}-3\right)\right]=$

$$=\frac{-2}{3}+\frac{1}{3}\cdot\left[-\frac{7}{3}-(-2)\cdot\left(\frac{-11}{4}\right)\right]=\frac{-2}{3}+\frac{1}{3}\cdot\left[-\frac{7}{3}-\frac{11}{2}\right]=$$

$$=\frac{-2}{3}+\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{-47}{6}\right)=\frac{-2}{3}+\left(\frac{-47}{18}\right)=\frac{-12}{18}-\frac{47}{18}=-\frac{59}{18}$$

c) $2-\dfrac{4}{3}\cdot\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{5}\right)-\left(\dfrac{4}{3}+2\right)\cdot\dfrac{1}{5}=2-\dfrac{4}{3}\cdot\dfrac{5+4}{10}-\dfrac{4+6}{3}\cdot\dfrac{1}{5}=$

$$=2-\frac{4}{3}\cdot\frac{9}{10}-\frac{10}{3}\cdot\frac{1}{5}=2-\frac{36}{30}-\frac{10}{15}=\frac{4}{30}=\frac{2}{15}$$

ECUACIONES

004 **Escribe cuatro expresiones algebraicas.**

$2x+4$ $\quad -2+5y-3z$ $\quad 3x-y+1$ $\quad -3z-10$

005 **Expresa los enunciados en lenguaje algebraico.**

a) El doble de un número.
b) Un número al cuadrado.
c) La mitad de un número menos 3.
d) Un número menos el doble de otro.
e) El cubo de un número menos el triple de su cuarta parte.
f) El cuádruple de un número.
g) La suma de dos números.
h) El cuadrado de la diferencia de dos números.
i) La quinta parte de un número más su triple.

a) $2x$
b) x^2
c) $\dfrac{x}{2}-3$
d) $x-2y$
e) $x^3-\dfrac{3y}{4}$
f) $4x$
g) $x+y$
h) $(x-y)^2$
i) $\dfrac{x}{5}+3x$

006 **Determina si las siguientes igualdades son identidades o ecuaciones.**

a) $5(2x-4)=4(2x-1)+2x-16$
b) $2x+3=5(x-1)-3x+8$
c) $2x-8=3x+6-x+2$
d) $4(x-3)=3(x+4)$
e) $4x+6-x-3x=5+8x-3-2x$
f) $(x+2)^2-x^2-4x=4$

a) Identidad
b) Identidad
c) Ecuación
d) Ecuación
e) Ecuación
f) Identidad

007 **Indica los miembros y términos de estas ecuaciones, señalando su coeficiente y su incógnita.**

a) $2x + 3 = 5$

b) $-x + 11x - 7 = 5x + x - 9x$

c) $4x + 6 - x - 3x = 5 + 2x - 3 - 2x$

a)

Miembros	Términos	Coeficientes	Incógnita
$2x + 3$	$2x$	2	x
	3	3	
5	5	5	

b)

Miembros	Términos	Coeficientes	Incógnita
$-x + 11x - 7$	$-x$	-1	x
	$11x$	11	
	-7	-7	
$5x + x - 9x$	$5x$	5	
	x	1	
	$-9x$	-9	

c)

Miembros	Términos	Coeficientes	Incógnita
$4x + 6 - x - 3x$	$4x$	4	x
	6	6	
	$-x$	-1	
	$-3x$	-3	
$5 + 2x - 3 - 2x$	5	5	
	$2x$	2	
	-3	-3	
	$-2x$	-2	

008 **Resuelve estas ecuaciones.**

a) $3(8x - 2) = 4(4x + 2)$

b) $2(7x + 1) = 3\left(2 - \dfrac{x}{5}\right)$

c) $\dfrac{x-5}{6} - \dfrac{3(1-x)}{8} = x + 1$

a) $3(8x - 2) = 4(4x + 2) \rightarrow 24x - 6 = 16x + 8 \rightarrow 8x = 14$

$$\rightarrow x = \frac{14}{8} = \frac{7}{4}$$

b) $2(7x + 1) = 3\left(2 - \dfrac{x}{5}\right) \rightarrow 14x + 2 = 6 - \dfrac{3x}{5} \rightarrow 70x + 10 = 30 - 3x$

$$\rightarrow 73x = 20 \rightarrow x = \frac{20}{73}$$

c) $\dfrac{x-5}{6} - \dfrac{3(1-x)}{8} = x + 1 \rightarrow 24\left(\dfrac{x-5}{6} - \dfrac{3-3x}{8}\right) = 24(x+1)$

$$\rightarrow 4x - 20 - 9 + 9x = 24x + 24 \rightarrow -11x = 53 \rightarrow x = -\frac{53}{11}$$

009 **Dentro de 5 años la edad de Paloma será el triple de la que tenía hace 9 años. ¿Qué edad tiene Paloma?**

$x \longrightarrow$ Edad actual de Paloma

$x + 5 \rightarrow$ Edad de Paloma dentro de 5 años

$x - 9 \rightarrow$ Edad de Paloma hace 9 años

$x + 5 = 3(x - 9) \rightarrow x + 5 = 3x - 27 \rightarrow -2x = -32 \rightarrow x = 16$

Paloma tiene 16 años.

010 **Cristina iba a pagar 7.800 € por los 150 menús de los invitados a su boda.**

a) Si al final asistieron 40 invitados más, ¿cuánto pagó en total?

b) Si el coste del banquete hubiera sido de 8.736 €, ¿cuántos invitados más asistieron respecto de los 150 iniciales?

a) <u>**Menús**</u> <u>**Coste (€)**</u>

$$\left.\begin{array}{l}150 \longrightarrow 7.800\\ 190 \longrightarrow x\end{array}\right\} \rightarrow \frac{150}{190} = \frac{7.800}{x} \rightarrow 150 \cdot x = 7.800 \cdot 190$$

$$\rightarrow x = \frac{1.482.000}{150} = 9.880$$

Si asistieron 40 invitados más, pagó 9.880 €.

b) <u>**Menús**</u> <u>**Coste (€)**</u>

$$\left.\begin{array}{l}150 \longrightarrow 7.800\\ x \longrightarrow 8.736\end{array}\right\} \rightarrow \frac{150}{x} = \frac{7.800}{8.736} \rightarrow 150 \cdot 8.736 = 7.800 \cdot x$$

$$\rightarrow x = \frac{1.310.400}{7.800} = 168$$

Al banquete asistieron 18 invitados más.

011 **En una peña quinielística de 120 socios, cada uno aporta 3 € a la semana.**

a) En el caso de que fueran 60 socios más, ¿cuánto aportaría cada socio?

b) Si quisieran jugar 540 € a la semana, ¿cuánto tendría que aportar cada uno?

a) <u>**Socios**</u> <u>**Aportación (€)**</u>

$$\left.\begin{array}{l}120 \longrightarrow 3\\ 180 \longrightarrow x\end{array}\right\} \rightarrow \frac{120}{180} = \frac{x}{3} \rightarrow 120 \cdot 3 = 180 \cdot x \rightarrow x = \frac{360}{180} = 2$$

Si fueran 60 socios más, cada socio aportaría 2 €.

b) <u>**Apuesta (€)**</u> <u>**Aportación (€)**</u>

$$\left.\begin{array}{l}360 \longrightarrow 3\\ 540 \longrightarrow x\end{array}\right\} \rightarrow \frac{360}{540} = \frac{3}{x} \rightarrow 360 \cdot x = 540 \cdot 3$$

$$\rightarrow x = \frac{1.620}{360} = 4,5$$

Si quisieran jugar 540 € a la semana, cada uno de los socios tendría que aportar 4,50 €.

012 **Pedro compró 2 m de tubería de cobre por 5,20 €. Si tiene que comprar 5 m de la misma tubería, ¿cuánto le costará?**

$$\begin{array}{ccc} \underline{\text{Tubería (m)}} & & \underline{\text{Coste (€)}} \\ 2 & \longrightarrow & 5{,}20 \\ 5 & \longrightarrow & x \end{array} \left.\vphantom{\begin{array}{c}a\\b\end{array}}\right\} \rightarrow \frac{2}{5} = \frac{5{,}20}{x} \rightarrow x = \frac{5{,}20 \cdot 5}{2} = 13$$

Los 5 metros de tubería le costarán 13 €.

013 **Un tren que circula a 80 km/h tarda 3 horas en llegar a una ciudad. ¿Cuánto tardará circulando a 60 km/h?**

$$\begin{array}{ccc} \underline{\text{Velocidad (km/h)}} & & \underline{\text{Tiempo (h)}} \\ 80 & \longrightarrow & 3 \\ 60 & \longrightarrow & x \end{array} \left.\vphantom{\begin{array}{c}a\\b\end{array}}\right\} \rightarrow \frac{60}{80} = \frac{3}{x} \rightarrow x = \frac{80 \cdot 3}{60} = 4$$

Circulando a 60 km/h, el tren tardará 4 horas.

014 **En una escalada llevan agua para 5 excursionistas durante 8 horas. Si pasadas 2 horas se marchan 2 excursionistas, ¿para cuántas horas tendrán agua?**

Pasadas 2 horas, a los 5 excursionistas les quedaría agua para 6 horas.

$$\begin{array}{ccc} \underline{\text{Personas}} & & \underline{\text{Tiempo (h)}} \\ 5 & \longrightarrow & 6 \\ 3 & \longrightarrow & x \end{array} \left.\vphantom{\begin{array}{c}a\\b\end{array}}\right\} \rightarrow \frac{3}{5} = \frac{6}{x} \rightarrow x = \frac{30}{3} = 10$$

Tendrán agua para 10 horas después de marcharse 2 excursionistas.

FUNCIONES

015 **Razona si las siguientes relaciones son funciones.**

a) El peso de una persona y su edad.
b) El diámetro de una esfera y su volumen.
c) El número de DNI de una persona y la letra de su NIF.
d) El número de teléfono de una persona y su número de DNI.

a) No, por ejemplo, una persona puede pesar lo mismo en dos años distintos.
b) Sí, el volumen de una esfera depende de su radio.
c) No, pues solo se consideran funciones las relaciones entre variables numéricas.
d) Sí, a cada número de teléfono le corresponde un único número de DNI.

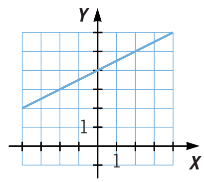
016 **Expresa algebraicamente, mediante una tabla y una gráfica, la función que:**

a) Asocia a un número su mitad más 4 unidades.

b) Relaciona la cantidad de peras compradas en kilogramos y su precio (1 kg cuesta 2,25 €).

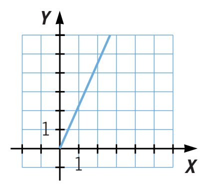
a)

x	$y = \frac{x}{2} + 4$
0	4
1	9/2
2	5
4	6



b)

x	$y = 2{,}25x$
0	0
1	2,25
2	4,5
4	9



017 **Describe, mediante un enunciado, las siguientes funciones.**

a) $y = x^3 - 1$ **c)** $y = \frac{x}{5} + 2$ **e)** $y = 9x - 2$

b) $y = (x - 1)^3$ **d)** $y = x(x + 1)$ **f)** $y = x^2 + x$

a) El cubo de un número menos 1.

b) El número anterior a un número al cubo.

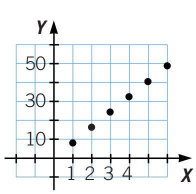
c) La quinta parte de un número más 2.

d) El producto de un número por su siguiente.

e) Un número multiplicado por 9 menos 2.

f) Un número más su cuadrado.

018 **Expresa, mediante una fórmula, la función que relaciona el *número de CD* y su *precio*. Después, construye una tabla de valores y representa los puntos que obtienes. ¿Puedes unirlos?**



CD	€
1	8,20
2	16,40
3	24,60
4	32,80

Cada CD cuesta: 32,80 : 4 = 8,20 €

La función es: $y = 8{,}2x$

Los puntos no se pueden unir, porque no podemos comprar fracciones de CD.

1 Números enteros

NÚMEROS ENTEROS

- ORDEN

OPERACIONES CON NÚMEROS ENTEROS

- SUMA Y RESTA
- PRODUCTO Y POTENCIA
- DIVISIÓN

CRITERIOS DE DIVISIBILIDAD

MÁXIMO COMÚN DIVISOR
MÍNIMO COMÚN MÚLTIPLO

El secreto de los nudos

Hacia el Este se veían los picachos nevados que, como cada mañana, incapaces de contener los rayos de luz, parecían aliarse a ellos revistiéndolos de matices y tonalidades únicas.

Kinu hizo una reverencia al Sol recién nacido y se apresuró a dar las gracias por poder contemplar cada mañana el nacimiento del dios.

Mientras tanto Laymi, su esposa, ya había encendido el fuego donde comenzaban a humear unas tortillas de maíz y tras preparar el refrigerio, reclamó la atención de su marido.

–¡Kinu, date prisa! Todavía no has preparado nada y te esperan en el palacio a primera hora.

–Cálmate, como cada año, todo está preparado.

–Este año es especial. –El gesto tenso de la mujer, delataba su estado de preocupación–. Este año además del Emperador están también los extranjeros, los enviados del Sol.

Tras el refrigerio, Kinu recogió cuidadosamente las cuerdas de diferentes colores, que contenían nudos colocados de manera caprichosa, las guardó entre sus ropas y emprendió el camino hacia el palacio.

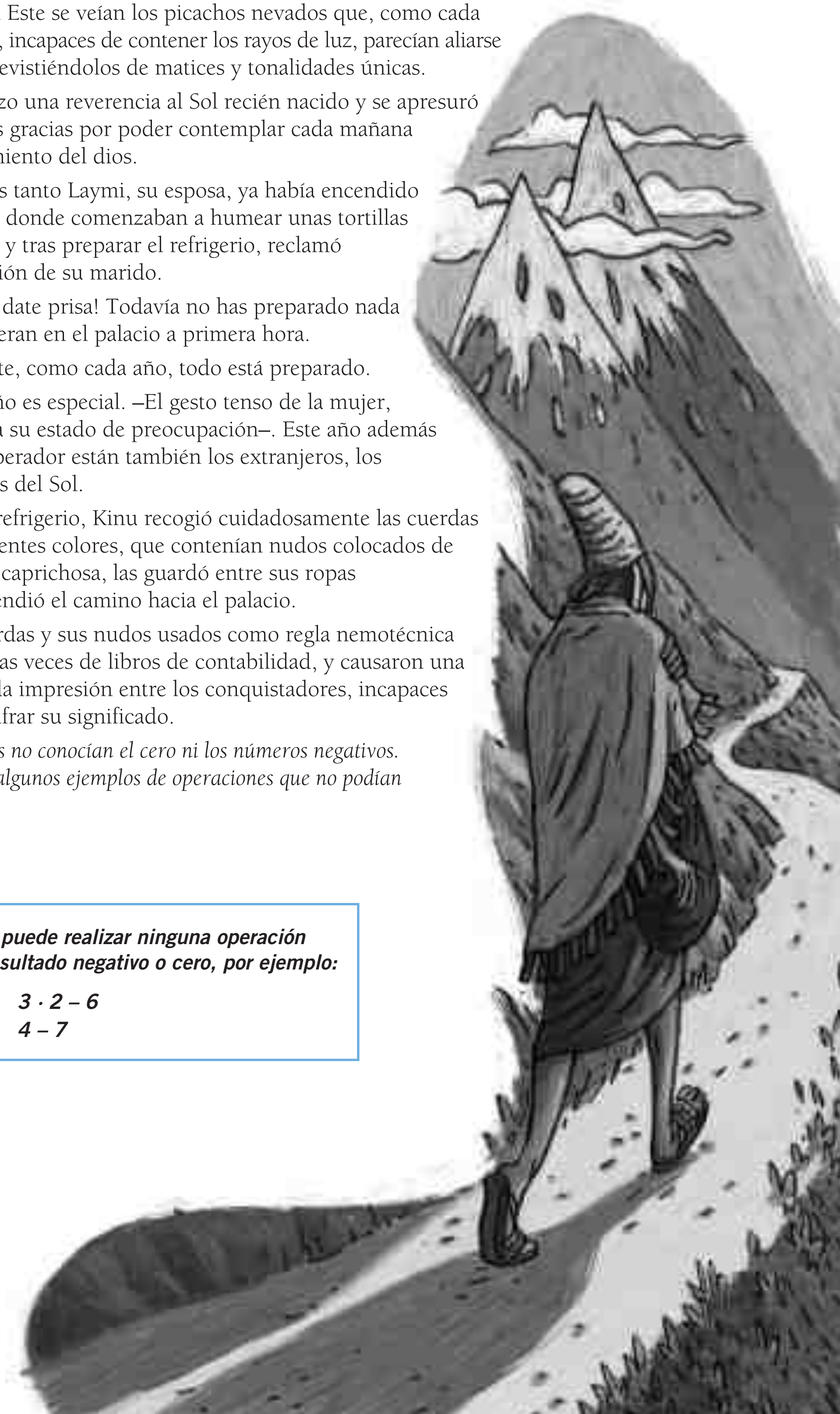
Las cuerdas y sus nudos usados como regla nemotécnica hacían las veces de libros de contabilidad, y causaron una profunda impresión entre los conquistadores, incapaces de descifrar su significado.

Los incas no conocían el cero ni los números negativos. Propón algunos ejemplos de operaciones que no podían realizar.

No se puede realizar ninguna operación con resultado negativo o cero, por ejemplo:

$3 \cdot 2 - 6$

$4 - 7$



Números enteros

EJERCICIOS

001 **Escribe, utilizando números enteros, las siguientes situaciones.**

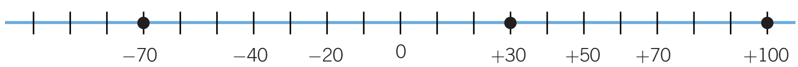
a) La torre mide 30 metros.

b) La temperatura en el Polo alcanzó setenta grados centígrados bajo cero.

c) El agua hierve a cien grados centígrados.

a) $+30$ m b) -70 °C c) $+100$ °C

002 **Representa en la recta numérica los números del ejercicio anterior.**



003 **Describe dos situaciones en las que aparezcan números enteros positivos y negativos.**

Respuesta abierta.

En la clasificación de fútbol o de baloncesto, la diferencia entre goles a favor y en contra, o puntos anotados y encajados, son situaciones que requieren el uso de números enteros positivos y negativos.

En una estación, las horas de llegada de los transportes están fijadas, y los retrasos se señalarían con números positivos y los adelantos con negativos.

004 **Ordena los siguientes números enteros, de mayor a menor.**

$$\mathbf{-2 \quad 2 \quad 3 \quad 5 \quad -4 \quad -1 \quad 0 \quad 4}$$

$5 > 4 > 3 > 2 > 0 > -1 > -2 > -4$

005 **Escribe, de menor a mayor, estos números enteros.**

$$\mathbf{|-3| \quad \text{op}\,(-3) \quad -3 \quad |2| \quad \text{op}\,(2) \quad 2 \quad |0| \quad \text{op}\,(0) \quad 0}$$

$-3 < \text{op}\,(2) < 0 = |0| = \text{op}\,(0) < 2 = |2| < |-3| = \text{op}\,(-3)$

006 **Un garaje tiene 4 plantas subterráneas y 7 plantas por encima del suelo. Si yo aparco mi coche en la planta 2 y mi compañero lo aparca en el piso opuesto al mío, ¿en qué piso lo aparca?**

Mi compañero aparca el coche en el segundo sótano, porque $\text{op}\,(2) = -2$.

007 **Si dos números enteros verifican que $a < b$, ¿podríamos decir lo mismo de sus opuestos? ¿Y lo contrario? Pon varios ejemplos y razona tu respuesta.**

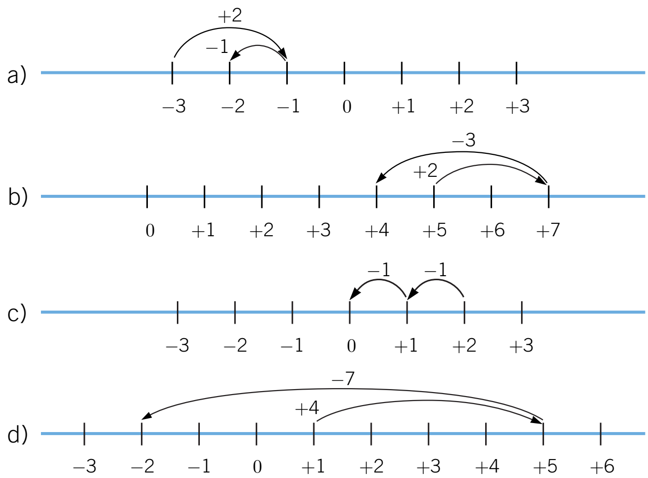
Sus opuestos cumplen lo contrario: si $a < b \rightarrow -b < -a$

Por ejemplo: si $2 < 3$, entonces para sus opuestos es $-3 < -2$.

008 **Realiza gráficamente.**

a) $-3 + 2 - 1$ **c)** $2 - 1 - 1$

b) $5 + 2 - 3$ **d)** $1 + 4 - 7$



009 **Calcula el resultado.**

a) $-3 + 2 - (9 - 8 + 3)$

b) $2 - \text{op}\ (3) + |-3|$

a) $-3 + 2 - (9 - 8 + 3) = -3 + 2 - 4 = -7 + 2 = -5$

b) $2 - \text{op}\ (3) + |-3| = 2 - (-3) + 3 = 2 + 3 + 3 = 8$

010 **Juan sale de casa y camina 2 km hasta llegar a casa de un amigo, retrocede 1 km porque deciden ir a comprar unos refrescos y, después, van al centro comercial, recorriendo 2 km más. Expresa mediante operaciones y calcula.**

a) La distancia total recorrida por Juan.

b) La distancia a la que se encuentra su casa del centro comercial.

a) $2 + 1 + 2 = 5 \rightarrow$ Juan recorre 5 km.

b) $2 - 1 + 2 = 4 - 1 = 3 \rightarrow$ Su casa se encuentra a 3 km del centro comercial.

011 **Realiza las siguientes operaciones combinadas.**

a) $22 - 3 \cdot (2 + 2^2 - 5) + (-3)^2$

b) $15 \cdot (1 + 2 - 3 - 1)^{56}$

c) $-2 + 3^{(2-3+1)} + 3 \cdot (4 - 8)$

d) $(-2)^2 \cdot (-3) + [4 - 6 + (-2)] - 1$

e) $[(-3)^3 \cdot (-3)^2]^2 + 4 - (-6) - 1$

f) $[(-5)^2]^3 \cdot (-5) \cdot 5 \cdot (-1)$

a) $22 - 3 \cdot (2 + 2^2 - 5) + (-3)^2 = 22 - 3 \cdot (2 + 4 - 5) + 9 =$
$= 22 - 3 + 9 = 28$

b) $15 \cdot (1 + 2 - 3 - 1)^{56} = 15 \cdot (-1)^{56} = 15$

c) $-2 + 3^{(2-3+1)} + 3 \cdot (4 - 8) = -2 + 3^0 + 3 \cdot (-4) = -2 + 1 - 12 = -13$

d) $(-2)^2 \cdot (-3) + [4 - 6 + (-2)] - 1 = (-2)^2 \cdot (-3) + [4 - 6 - 2] - 1 =$
$= (-2)^2 \cdot (-3) - 4 - 1 = 12 - 4 - 1 = 7$

e) $[(-3)^3 \cdot (-3)^2]^2 + 4 - (-6) - 1 = [-27 \cdot 9]^2 + 4 - (-6) - 1 =$
$= [-243]^2 + 4 + 6 - 1 =$
$= 59.049 + 4 + 6 - 1 = 59.058$

f) $[(-5)^2]^3 \cdot (-5) \cdot 5 \cdot (-1) = [25]^3 \cdot (-5) \cdot 5 \cdot (-1) =$
$= 15.625 \cdot (-5) \cdot 5 \cdot (-1) = 390.625$

012 **Rebeca tiene en su cuenta bancaria 1.237 €. Gasta cada día 2 € en transporte y 8 € en comida, el alquiler de su vivienda le cuesta 300 € al mes y necesita 200 € mensuales para otros gastos. Si su sueldo es de 900 €, halla cuánto dinero tendrá el mes que viene.**

La cantidad de dinero que Rebeca tendrá en su cuenta el mes que viene es:

Saldo del mes que viene = Saldo actual − Gastos del mes + Sueldo del mes

$1.237 - (2 \cdot 30 + 8 \cdot 30 + 300 + 200) + 900 = 1.237 - 800 + 900 = 1.337$ €

Rebeca tendrá el mes que viene en su cuenta 1.337 €.

013 **Calcula: $[(a^n)^m \cdot (a^m)^n] : (a^n)^2$**

$$[(a^n)^m \cdot (a^m)^n] : (a^n)^2 = [a^{n+m} \cdot a^{m+n}] : (a^n)^2 = a^{2n+2m} : a^{2n} = a^{2m}$$

014 **Realiza las siguientes divisiones y comprueba que: $D = d \cdot c + r$.**

a) $35 : -2$	**f) $-333 : 65$**
b) $444 : 33$	**g) $-34 : 7$**
c) $2^3 : -5$	**h) $-253 : -7$**
d) $(-3)^4 : 7$	**i) $30 : 5$**
e) $-35 : 2$	**j) $-40 : 15$**

a) $\left.\begin{array}{l} c = -17 \\ r = 1 \end{array}\right\} \rightarrow 35 = (-2) \cdot (-17) + 1$

b) $\left.\begin{array}{l} c = 13 \\ r = 15 \end{array}\right\} \rightarrow 444 = 33 \cdot 13 + 15$

c) $\left.\begin{array}{l} c = -1 \\ r = 3 \end{array}\right\} \rightarrow 2^3 = 8 = (-5) \cdot (-1) + 3$

d) $\left.\begin{array}{l} c = 11 \\ r = 4 \end{array}\right\} \rightarrow (-3)^4 = 81 = 7 \cdot 11 + 4$

e) $\left.\begin{array}{l} c = -17 \\ r = -1 \end{array}\right\} \rightarrow -35 = 2 \cdot (-17) - 1$

f) $\left.\begin{array}{l} c = -5 \\ r = -8 \end{array}\right\} \rightarrow -333 = 65 \cdot (-5) - 8$

g) $\left.\begin{array}{l} c = -4 \\ r = -6 \end{array}\right\} \rightarrow -34 = 7 \cdot (-4) - 6$

h) $\left.\begin{array}{l} c = 36 \\ r = -1 \end{array}\right\} \rightarrow -253 = (-7) \cdot 36 - 1$

i) $\left.\begin{array}{l} c = 6 \\ r = 0 \end{array}\right\} \rightarrow 30 = 5 \cdot 6$

j) $\left.\begin{array}{l} c = -2 \\ r = -10 \end{array}\right\} \rightarrow -40 = 15 \cdot (-2) - 10$

015 **Me han prestado 15.000 €. Si devuelvo 2.000 € y el resto en pagos mensuales de 200 €, ¿cuánto tardo en devolver el dinero? ¿Cuál es el importe del último pago?**

15.000 − 2.000 = 13.000 € quedan por pagar.

$$13.000 : 200 \rightarrow \left.\begin{array}{l} c = 65 \\ r = 0 \end{array}\right\} \rightarrow 13.000 = 200 \cdot 65$$

Luego tardo 65 meses en devolver el dinero.

El importe del último pago es de 200 €, puesto que el resto es cero.

016 **El dividendo de una división es −2.437, el cociente es −29 y el resto es −59. ¿Cuál es su divisor?**

$$D = d \cdot c + r$$

$$-2.437 = d \cdot (-29) + (-59) \rightarrow d = \frac{-2.437 + 59}{-29} = 82$$

El divisor es 82.

017 **Escribe, como producto de factores primos, los siguientes números enteros.**

a) 9.240
b) −65.520
c) 351.000
d) 15.100
e) −324.000
f) 522
g) 34.500
h) −50.820

a) $9.240 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$
b) $-65.520 = (-1) \cdot 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13$
c) $351.000 = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5^3 \cdot 13$
d) $15.100 = 2^2 \cdot 5^2 \cdot 151$
e) $-324.000 = (-1) \cdot 2^5 \cdot 3^4 \cdot 5^3$
f) $522 = 2 \cdot 3^2 \cdot 29$
g) $34.500 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^3 \cdot 23$
h) $-50.820 = (-1) \cdot 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11^2$

018 **Queremos dividir un libro en capítulos, de manera que tengan el mismo número de páginas y que cada capítulo no contenga más de 20 páginas. Si son 228 páginas, ¿cuántos capítulos puede tener el libro?**

El número de capítulos y el número de páginas tienen que ser divisores de 228, y, además, el número de páginas de cada capítulo es menor que 20.

Sabiendo que $228 = 2^2 \cdot 3 \cdot 19$, el libro puede tener:

- 12 capítulos de 19 páginas cada uno.
- 19 capítulos de 12 páginas cada uno.
- 38 capítulos de 6 páginas cada uno.
- 57 capítulos de 4 páginas cada uno.
- 76 capítulos de 3 páginas cada uno.
- 114 capítulos de 2 páginas cada uno.
- 228 capítulos de 1 página cada uno.

019 **Busca un criterio de divisibilidad para 6.**

Un número entero es divisible por 6 si lo es por 2 y por 3.
Un número es divisible por 6 si la suma de sus cifras es múltiplo de 3 y su última cifra es cero o un número par.

020 **Obtén el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo de cada pareja de números.**

a) $-$**24 y 36**
b) **76 y 85**
c) **102 y** $-$**104**
d) **160 y 180**
e) $-$**296 y 432**
f) **102 y 1.002**
g) **66 y** $-$**36**
h) $-$**345 y 435**
i) **231 y 222**
j) **281 y 324**

a) $\left.\begin{array}{r}-24 = (-1) \cdot 2^3 \cdot 3 \\ 36 = 2^2 \cdot 3^2\end{array}\right\} \rightarrow \begin{array}{l}\text{m.c.d.}\ (-24, 36) = 2^2 \cdot 3 = 12 \\ \text{m.c.m.}\ (-24, 36) = 2^3 \cdot 3^2 = 72\end{array}$

b) $\left.\begin{array}{r}76 = 2^2 \cdot 19 \\ 85 = 5 \cdot 17\end{array}\right\} \rightarrow \begin{array}{l}\text{m.c.d.}\ (76, 85) = 1 \\ \text{m.c.m.}\ (76, 85) = 2^2 \cdot 5 \cdot 17 \cdot 19 = 6.460\end{array}$

c) $\left.\begin{array}{r}102 = 2 \cdot 3 \cdot 17 \\ -104 = (-1) \cdot 2^3 \cdot 13\end{array}\right\} \rightarrow \begin{array}{l}\text{m.c.d.}\ (102, -104) = 2 \\ \text{m.c.m.}\ (102, -104) = 2^3 \cdot 3 \cdot 13 \cdot 17 = 5.304\end{array}$

d) $\left.\begin{array}{r}160 = 2^5 \cdot 5 \\ 180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5\end{array}\right\} \rightarrow \begin{array}{l}\text{m.c.d.}\ (160, 180) = 2^2 \cdot 5 = 20 \\ \text{m.c.m.}\ (160, 180) = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 5 = 1.440\end{array}$

e) $\left.\begin{array}{r}-296 = (-1) \cdot 2^3 \cdot 37 \\ 432 = 2^4 \cdot 3^3\end{array}\right\} \rightarrow \begin{array}{l}\text{m.c.d.}\ (-296, 432) = 2^3 = 8 \\ \text{m.c.m.}\ (-296, 432) = 2^4 \cdot 3^3 \cdot 37 = 15.984\end{array}$

f) $\left.\begin{array}{r}102 = 2 \cdot 3 \cdot 17 \\ 1.002 = 2 \cdot 3 \cdot 167\end{array}\right\} \rightarrow \begin{array}{l}\text{m.c.d.}\ (102, 1.002) = 2 \cdot 3 = 6 \\ \text{m.c.m.}\ (102, 1.002) = 2 \cdot 3 \cdot 17 \cdot 167 = 17.034\end{array}$

g) $\left.\begin{array}{r}66 = 2 \cdot 3 \cdot 11 \\ -36 = (-1) \cdot 2^2 \cdot 3^2\end{array}\right\} \rightarrow \begin{array}{l}\text{m.c.d.}\ (66, -36) = 2 \cdot 3 = 6 \\ \text{m.c.m.}\ (66, -36) = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 11 = 396\end{array}$

h) $\left.\begin{array}{r}-345 = (-1) \cdot 3 \cdot 5 \cdot 23 \\ 435 = 3 \cdot 5 \cdot 29\end{array}\right\} \rightarrow \begin{array}{l}\text{m.c.d.}\ (-345, 435) = 3 \cdot 5 = 15 \\ \text{m.c.m.}\ (-345, 435) = 3 \cdot 5 \cdot 23 \cdot 29 = 10.005\end{array}$

i) $\left.\begin{array}{r}231 = 3 \cdot 7 \cdot 11 \\ 222 = 2 \cdot 3 \cdot 37\end{array}\right\} \rightarrow \begin{array}{l}\text{m.c.d.}\ (231, 222) = 3 \\ \text{m.c.m.}\ (231, 222) = 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 37 = 17.094\end{array}$

j) $\left.\begin{array}{r}281 = 281 \\ 324 = 2^2 \cdot 3^4\end{array}\right\} \rightarrow \begin{array}{l}\text{m.c.d.}\ (281, 324) = 1 \\ \text{m.c.m.}\ (281, 324) = 2^2 \cdot 3^4 \cdot 281 = 91.044\end{array}$

021 **Calcula el m.c.d. y el m.c.m.**

a) 33, 101 y 1.100 **b) 1.492, 2.004 y –372** **c) 256, –356 y 456**

a) $\left.\begin{array}{r} 33 = 3 \cdot 11 \\ 101 = 101 \\ 1.100 = 2^2 \cdot 5^2 \cdot 11 \end{array}\right\} \rightarrow$ m.c.d. (33, 101, 1.100) = 1; m.c.m. (33, 101, 1.100) = $= 2^2 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 11 \cdot 101 = 333.300$

b) $\left.\begin{array}{r} 1.492 = 2^2 \cdot 373 \\ 2.004 = 2^2 \cdot 3 \cdot 167 \\ -372 = (-1) \cdot 2^2 \cdot 3 \cdot 31 \end{array}\right\} \rightarrow$ m.c.d. (1.492, 2.004, –372) = $2^2 = 4$; m.c.m. (1.492, 2.004, –372) = $= 2^2 \cdot 3 \cdot 31 \cdot 167 \cdot 373 = 23.172.252$

c) $\left.\begin{array}{r} 256 = 2^8 \\ -356 = (-1) \cdot 2^2 \cdot 89 \\ 456 = 2^3 \cdot 3 \cdot 19 \end{array}\right\} \rightarrow$ m.c.d. (256, –356, 456) = $2^2 = 4$; m.c.m. (256, –356, 456) = $= 2^8 \cdot 3 \cdot 19 \cdot 89 = 1.298.688$

022 **Si el producto de dos números es –24 y su m.c.m. es 12, ¿cuál es su m.c.d.? ¿Qué números son?**

$$m.c.m.\,(a, b) \cdot m.c.d.\,(a, b) = |a \cdot b|$$
$$12 \cdot m.c.d.\,(a, b) = 24 \rightarrow m.c.d.\,(a, b) = 2$$

Los números son –4 y 6 o 4 y –6.

023 **Luis tiene 40 sellos de Europa y 56 sellos de Asia. Quiere hacer el menor número posible de lotes que tengan igual número de sellos. Si no mezcla sellos de Europa y Asia, y no le sobra ninguno, ¿cuántos sellos tendrá cada lote?**

El número de sellos de cada lote deberá ser divisor de 40 y de 56 para que no sobre ninguno; además, para que la cantidad de lotes sea la menor posible, estos deberán tener el máximo número posible de sellos.

El problema consiste en calcular el m.c.d. (40, 56) = 8.
Hay 8 sellos en cada lote y son 12 lotes.

024 **Pedro va a comprar a la carnicería cada 6 días y a la pescadería cada 4 días. Si estuvo en ambos establecimientos el 30 de abril, ¿cuántas veces coincidieron sus compras durante el mes de mayo? ¿Qué días fueron?**

Pedro va a la carnicería los días 6, 12, 18, 24, …, es decir, un múltiplo de 6.

Y va a la pescadería los días 4, 8, 12, 16, …, es decir, un múltiplo de 4.

El menor período de tiempo que tiene que transcurrir para que coincidan sus compras es el m.c.m. (6, 4) = 12 días. Luego cada 12 días coincidirán sus compras. El primer día fue el 12 de mayo, y el segundo, el 24 de mayo.

025 **¿Cuándo coinciden el m.c.m. y el m.c.d. de dos números?**

El m.c.m. y el m.c.d. coinciden cuando los dos números son iguales.

ACTIVIDADES

026 Realiza estas operaciones.

a) $6 + (-4 + 2) - (-3 - 1)$
b) $10 - (8 - 7) + (-9 - 3)$
c) $[(15 - 16 + 2) \cdot (-1) + 9] \cdot 7$
d) $[2 - 2 - (2 - 2 - 2)]$
e) $2 \cdot [-2 - (2 - 2 - 2)]$

a) $6 + (-4 + 2) - (-3 - 1) = 6 + (-2) - (-4) = 6 - 2 + 4 = 10 - 2 = 8$

b) $10 - (8 - 7) + (-9 - 3) = 10 - 1 + (-12) = 10 - 1 - 12 = -3$

d) $[(15 - 16 + 2) \cdot (-1) + 9] \cdot 7 = [(17 - 16) \cdot (-1) + 9] \cdot 7 =$
$= [1 \cdot (-1) + 9] \cdot 7 = (-1 + 9) \cdot 7 = 8 \cdot 7 = 56$

e) $[2 - 2 - (2 - 2 - 2)] = [2 - 2 - (-2)] = 2 - 2 + 2 = 4 - 2 = 2$

f) $2 \cdot [-2 - (2 - 2 - 2)] = 2 \cdot [-2 - (-2)] = 2 \cdot [-2 + 2] = 2 \cdot 0 = 0$

027 Calcula el resultado de estas potencias.

a) $(-5)^4$ **b)** -5^4 **c)** $(-6)^6$ **d)** -6^6

a) $(-5)^4 = 625$
c) $(-6)^6 = 46.656$
b) $-5^4 = -625$
d) $-6^6 = -46.656$

028 Realiza las siguientes divisiones de números enteros, escribe su cociente y su resto y comprueba que se cumple: $D = d \cdot c + r$.

a) $75 : -2$
b) $472 : 33$
c) $203 : -5$
d) $(-4)^4 : 7$
e) $-35 : 2$
f) $-223 : 35$
g) $-34 : 7$
h) $-25^3 : -7$

a) $\left.\begin{matrix} c = -37 \\ r = 1 \end{matrix}\right\} \rightarrow 75 = (-2) \cdot (-37) + 1$

b) $\left.\begin{matrix} c = 14 \\ r = 10 \end{matrix}\right\} \rightarrow 472 = 33 \cdot 14 + 10$

c) $\left.\begin{matrix} c = -40 \\ r = 3 \end{matrix}\right\} \rightarrow 203 = (-5) \cdot (-40) + 3$

d) $\left.\begin{matrix} c = 36 \\ r = 4 \end{matrix}\right\} \rightarrow (-4)^4 = 256 = 7 \cdot 36 + 4$

e) $\left.\begin{matrix} c = -17 \\ r = -1 \end{matrix}\right\} \rightarrow -35 = 2 \cdot (-17) - 1$

f) $\left.\begin{matrix} c = -6 \\ r = -13 \end{matrix}\right\} \rightarrow -223 = 35 \cdot (-6) - 13$

g) $\left.\begin{matrix} c = -4 \\ r = -6 \end{matrix}\right\} \rightarrow -34 = 7 \cdot (-4) - 6$

h) $\left.\begin{matrix} c = 2.232 \\ r = -1 \end{matrix}\right\} \rightarrow -25^3 = -15.625 = (-7) \cdot 2.232 - 1$

029 **HAZLO ASÍ**

¿CÓMO SE CALCULA UN TÉRMINO DE LA DIVISIÓN, CONOCIENDO LOS DEMÁS?

En una división, su dividendo es −3.467, su cociente es 33 y su resto es −2. Halla su divisor.

PRIMERO. En la fórmula de la prueba de la división se despeja el término desconocido. En este caso, el término desconocido es el divisor, d.

$$D = d \cdot c + r \rightarrow D - r = d \cdot c \rightarrow d = \frac{D - r}{c}$$

SEGUNDO. Se sustituyen los valores y se calcula el término desconocido.

$$d = \frac{D - r}{c} \qquad d = \frac{-3.467 - (-2)}{33} = -105$$

030 **El dividendo en una división es −1.745. Halla el divisor si:**

a) $c = -96$, $r = -17$ **b)** $c = 75$, $r = -20$

a) $D = d \cdot c + r$

$$-1.745 = d \cdot (-96) + (-17) \rightarrow d = \frac{-1.745 + 17}{-96} = 18$$

b) $D = d \cdot c + r$

$$-1.745 = d \cdot 75 + (-20) \rightarrow d = \frac{-1.745 + 20}{75} = -23$$

031 **Siendo *a* un número entero, razona el resultado de estas operaciones.**

a) $a + |a|$ **b)** $a - |a|$

a) Si a es positivo: $a + |a| = a + a = 2a$
Si a es negativo: $-a + |a| = 0$

b) Si a es positivo: $a - |a| = 0$
Si a es negativo: $-a - |a| = -2a$

032 **Euclides, geómetra griego, murió en el año 265 a.C. y vivió 60 años. ¿En qué año nació?**

Euclides nació en el año: −265 − (+60) = −325, es decir, en el año 325 a.C.

033 **Joaquín quiere comprarse un equipo de música que cuesta 369 €. Si cada semana ahorra 15 €, ¿cuántas semanas tendrán que pasar hasta comprar el equipo?**

Dividiendo 369 : 15 se obtiene: $\left.\begin{array}{l} c = 24 \\ r = 9 \end{array}\right\} \rightarrow 369 = 15 \cdot 24 + 9$

Luego tendrán que pasar 25 semanas hasta comprar el equipo. Ahorrará 15 € durante 24 semanas y la última semana, que es la vigesimoquinta, tendrá que ahorrar 9 €.

034 **El matemático griego Tales de Mileto nació en el año 624 a.C. y vivió 78 años. ¿En qué año murió?**

Murió en el año: −624 + 78 = −546, es decir, en el año 546 a.C.

035 **En el año 1920 se celebró el 2.000 aniversario de la construcción del Coliseo romano.**

a) ¿En qué año se construyó?

b) ¿Cuántos años han transcurrido?

a) Se construyó en el año: 1.920 − 2.000 = −80, es decir, en el año 80 a.C.

b) Por ejemplo, si estamos en el año 2006 habrán trascurrido:
2.006 − (−80) = 2.006 + 80 = 2.086 años

036 **Estas son las últimas anotaciones de una libreta de ahorros.**

Concepto	Saldo	Movimiento
Recibo luz	**200**	**−120**
Nómina Pedro	1.700	**1.500**
Recibo gas	**1.400**	−300
Hipoteca	−70	**−1.470**
Nómina Luisa	**730**	800

a) ¿Cuál es el saldo antes de pagar la luz?

b) ¿Y tras el ingreso de la nómina de Pedro?

c) ¿Cuál ha sido el importe del recibo del gas?

d) ¿Cuál es el saldo tras pagar la hipoteca?

a) Antes de pagar la luz, el saldo es: 200 − (−120) = 320 €

b) Tras el ingreso de la nómina de Pedro es: 200 + 1.500 = 1.700 €

c) El importe del recibo del gas ha sido: 1.700 − 1.400 = 300 €

d) El saldo tras pagar la hipoteca es: 1.400 − 1.470 = −70 €

037 ●● **El termómetro del coche nos indica que la temperatura interior es 16 °C, y la exterior, –3 °C. ¿Cuál es la diferencia de temperatura?**

La diferencia de temperatura es: $16 - (-3) = 16 + 3 = 19$ °C

038 ●● **En el interior de una cámara frigorífica desciende la temperatura 4 °C por hora.**

a) ¿Cuántas horas tardará en bajar la temperatura 20 °C? ¿Y en bajar 15 °C?

b) Si la temperatura inicial de la cámara es 1 °C, ¿qué temperatura habrá dentro de 3 horas? ¿Y dentro de 7 horas?

c) Si la temperatura inicial es de 10 °C, ¿cuántas horas tardará en alcanzar 0 °C?

a) $20 : 4 = 5$. Tardará 5 horas en bajar 20 °C. Y como $15 = 4 \cdot 3 + 3$, será necesario que pasen más de 3 horas, y menos de 4 horas para que la temperatura baje 15 °C. (Si resolviéramos el problema usando decimales serían 3,75 horas, es decir, 3 horas y 45 minutos.)

b) Dentro de 3 horas, la temperatura es: $1 + (-4) \cdot 3 = 1 - 12 = -11$ °C

Dentro de 7 horas, la temperatura es: $1 + (-4) \cdot 7 = 1 - 28 = -27$ °C

c) Si la temperatura inicial es de 10 °C, tardará entre 2 y 3 horas en alcanzar 0 °C, exactamente 2,5 horas, es decir, 2 horas y 30 minutos.

039 ●● **La temperatura mínima, un día de enero, fue 4 °C bajo cero, y la máxima, 10 °C m mayor que el doble de la mínima.**

a) ¿Cuál fue la temperatura máxima?

b) ¿Qué diferencia hubo entre las temperaturas máxima y mínima?

a) La temperatura máxima es: $2 \cdot (-4) + 10 = -8 + 10 = 2$ °C

b) La diferencia entre la temperatura máxima y la mínima es: $2 - (-4) = 2 + 4 = 6$ °C

040 ●● **Para transportar un rebaño de 1.022 ovejas se utiliza un camión en el que sólo caben 211. ¿Cuántos viajes debe realizar el camión para transportarlas a todas? ¿Cuántas ovejas irán en el último viaje?**

Realizamos la división: $1.022 : 211 \rightarrow \begin{cases} c = 4 \\ r = 178 \end{cases}$

Luego el camión deberá realizar 5 viajes para transportarlas a todas: 4 viajes con 211 ovejas cada uno y en el último viaje irán 178 ovejas.

041 **Tenemos 200 g de agua a cierta temperatura. Aumentamos la temperatura 22 °C y después la disminuimos 37 °C, convirtiéndose en hielo a 4 °C bajo cero. ¿Cuál era la temperatura inicial del agua?**

Temperatura inicial: $+22 - 37 = -4 \rightarrow$ Temperatura inicial =
$= -4 + 37 - 22 = 37 - 26 = 11$ °C

042 **Completa la tabla donde se reflejan las temperaturas en varias localidades y contesta.**

	Máxima	Mínima	Amplitud térmica
Perales	**4 °C**	**−12 °C**	**16 °C**
Villaluz	**7 °C**	4 °C	**3 °C**
Reblecal	2 °C	**−4 °C**	**6 °C**
Arroyofrío	**−2 °C**	**−5 °C**	3 °C

a) ¿Qué localidad tiene mayor amplitud térmica?
b) ¿Cuál tiene la mayor temperatura mínima?
c) ¿Y la menor máxima?
d) ¿Dónde se alcanza la menor temperatura mínima?

a) Perales b) Villaluz c) Arroyofrío d) Perales

043 **Si la distancia que separa a un submarino de un avión que sobrevuela el mar es de 8.850 m y el avión vuela a 8.500 m de altura, ¿a qué profundidad se encuentra el submarino? Expresa el resultado con un número entero.**

El submarino se encuentra a $8.500 - 8.850 = -350$ m, es decir, a 350 m de profundidad.

044 **En un laboratorio están estudiando la resistencia de un microorganismo a los cambios de temperatura. Tienen una muestra a 3 °C bajo cero, suben su temperatura 40 °C, después la bajan 50 °C y la vuelven a subir 12 °C. ¿Cuál es la temperatura final a la que se encuentra la muestra?**

La temperatura final: $-3 + 40 - 50 + 12 = 52 - 53 = -1$ °C, es decir, 1 °C bajo cero.

045 **En un cuadrado mágico, al sumar los elementos de cada fila, columna y diagonal, obtenemos siempre el mismo resultado. Completa el siguiente cuadrado mágico.**

	−4	**3**	**−2**	= −3
	1	−1	−3	= −3
	0	−5	**2**	= −3
= −3	= −3	= −3	= −3	= −3

046 ●●● **Coloca en el tablero los números enteros del –6 al 2 (ambos inclusive) para que formen un cuadrado mágico.**

–3	2	–5
–4	–2	0
1	–6	–1

047 ●●● **La estructura de una mina subterránea de carbón está formada por galerías horizontales. La distancia vertical entre las galerías es de 10 m, estando la galería 2 situada a 20 m de profundidad.**

a) Si estamos a 50 m de profundidad, ¿en qué galería nos encontramos?

b) Carlos se halla en la galería 3, asciende 20 m, y después, baja 80 m. ¿En qué galería está?

c) Tras subir 30 m, Marta está en la galería 7. ¿En qué galería estaba antes?

a) Nos encontramos en la galería 5.

b) Carlos comienza a ascender a 30 m de profundidad. Si sube 20 m y luego baja 80 m, estará a: $-30 + 20 - 80 = -90$ m. Luego ahora se encuentra en la galería 9.

c) Si Marta está en la galería 7, se halla a 70 m de profundidad. Y si tras subir 30 m se encuentra a -70 m es porque antes se encontraba a -100 m; es decir, estaba en la galería 10.

048 ●●● **Pon un ejemplo de dos números enteros tales que el valor absoluto de su suma sea igual que la suma de sus valores absolutos. ¿Ocurre eso siempre para cualquier par de números enteros?**

$$\left.\begin{array}{l} |-4 + (-3)| = |-4 - 3| = |-7| = 7 \\ |-4| + |-3| = 4 + 3 = 7 \end{array}\right\} \rightarrow |-4 + (-3)| = |-4| + |-3|$$

Esto no ocurre siempre para cualquier pareja de números enteros, sino solamente cuando los dos números son del mismo signo. En caso contrario no se cumple. Veamos un ejemplo:

$$\left.\begin{array}{l} |-4 + 3| = |-1| = 1 \\ |-4| + |3| = 4 + 3 = 7 \end{array}\right\} \rightarrow 1 \neq 7 \rightarrow |4 + 3| \neq |-4| + |3|$$

049 ● **Averigua cuáles de los siguientes números son primos y cuáles son compuestos.**

79, 93, 117, 239, 313, 585, 1.001, 6.723

Expresa, como producto de factores primos, los números que sean compuestos.

79 $\longrightarrow$ Primo

93 $\longrightarrow$ Compuesto: $93 = 3 \cdot 31$

117 $\longrightarrow$ Compuesto: $117 = 3^2 \cdot 13$

239 $\longrightarrow$ Primo

313 $\longrightarrow$ Primo

585 $\longrightarrow$ Compuesto: $585 = 3^2 \cdot 5 \cdot 13$

1.001 $\rightarrow$ Compuesto: $1.001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$

6.723 $\rightarrow$ Compuesto: $6.723 = 3^4 \cdot 83$

050 **Busca todos los números primos comprendidos entre 100 y 140.**

101, 103, 107, 109, 113, 127, 131, 137 y 139

051 **De los números 330, 776, 620, 3.090 y 210, di cuáles son múltiplos:**

a) De 2 **c) De 4** **e) De 6**
b) De 3 **d) De 5** **f) De 10**

a) 330, 776, 620, 3.090 y 210
b) 330, 3.090 y 210
c) 776 y 620
d) 330, 620, 3.090 y 210
e) 330, 3.090 y 210
f) 330, 620, 3.090 y 210

052 **Expresa, como producto de sus factores primos, los siguientes números enteros.**

a) 7.560 **c) 1.188**
b) 172.125 **d) 8.448**

a) $7.560 = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7$
b) $172.125 = 3^4 \cdot 5^3 \cdot 17$
c) $1.188 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 11$
d) $8.448 = 2^8 \cdot 3 \cdot 11$

053 **HAZLO ASÍ**

¿CÓMO SE CALCULA UNA CIFRA DE UN NÚMERO PARA QUE SEA DIVISIBLE POR OTRO NÚMERO?

¿Cuánto tiene que valer *a* para que el número 3 *a* 2 sea múltiplo de 3?

PRIMERO. Se impone la condición de divisibilidad.

Para que un número sea divisible por 3, la suma de las cifras que lo componen tiene que ser divisible por 3.

$3 + a + 2 = a + 5$ tiene que ser divisible por 3

SEGUNDO. Se tantean las posibles soluciones.

Si $a + 5$ tiene que ser divisible por 3, entonces puede ocurrir:

$a + 5 = 3 \longrightarrow$ Imposible
$a + 5 = 6 \longrightarrow a = 1$
$a + 5 = 9 \longrightarrow a = 4$
$a + 5 = 12 \longrightarrow a = 7$
$a + 5 = 15 \longrightarrow$ Imposible

El número puede ser: 312, 342 o 372.

054 **Por qué cifra hay que sustituir *m* para que el número 3*m*8*m* sea divisible por 3, si *m* es par?**

Para que el número 3*m*8*m* sea divisible por 3, la suma de sus cifras: $3 + m + 8 + m = 2m + 11$ tiene que ser múltiplo de 3, luego *m* puede valer 2, 5 u 8. Como *m* es par, solamente son válidos los números 2 y 8.

055 Calcula cuánto ha de valer *n* para que:

a) $n05$ **sea divisible por 3 y por 5.**
b) $5n8$ **sea divisible por 2 y por 3.**
c) $n30$ **sea divisible por 2, 3 y 5.**

a) Sea cual sea el valor de n, el número $n05$ es divisible por 5.
Para que el número $n05$ sea divisible por 3, la suma de sus cifras:
$n + 0 + 5 = n + 5$ tiene que ser múltiplo de 3 $\rightarrow$ n puede valer 1, 4 o 7.

b) Sea cual sea el valor de n, el número $5n8$ es múltiplo de 2.
Para que el número $5n8$ sea divisible por 3, la suma de sus cifras:
$5 + n + 8 = n + 13$ tiene que ser múltiplo de 3 $\rightarrow$ n puede valer 2, 5 u 8.

c) Sea cual sea el valor de n, el número $n30$ es divisible por 2 y por 5.
Para que el número $n30$ sea divisible por 3, la suma de sus cifras:
$n + 3 + 0 = n + 3$ tiene que ser múltiplo de 3 $\rightarrow$ n puede valer 3, 6 o 9.

056 **Halla un número comprendido entre 100 y 200, que sea múltiplo de 5 y cuya suma de sus cifras sea 6.**

Si el número está entre 100 y 200 y es múltiplo de 5, es de la forma $1n0$ o $1m5$.

Para que la suma de sus cifras sea 6, es necesario que $n = 5$ o $m = 0$.

Luego los números que cumplen las condiciones son 150 o 105.

057 **Los divisores propios de un número son aquellos divisores distintos de la unidad y de él mismo. Escribe un número:**

a) Que no tenga divisores propios.
b) Que tenga un divisor propio.
c) Que tenga dos divisores propios.
d) Que tenga tres divisores propios.

a) Cualquier número primo, por ejemplo, el número 7.

b) Cualquier número que sea el cuadrado de un número primo, por ejemplo:
$2^2 = 4$ tiene un único divisor propio, el número 2.

c) Es necesario que sea producto de dos números primos distintos, por ejemplo: $15 = 3 \cdot 5$ tiene dos divisores propios, el número 3 y el número 5.

d) Si los exponentes de los factores primos de la descomposición de un número son: $n, m, \dots, r$, entonces el número de divisores es:

$$(n + 1) \cdot (m + 1) \cdot \dots \cdot (r + 1)$$

Por tanto, sus divisores propios serán estos números menos 2.

Un número con cinco divisores tiene tres divisores propios.

$$(n + 1) \cdot (m + 1) \cdot \dots \cdot (r + 1) = 5 \rightarrow (n + 1) = 5 \rightarrow n = 4$$

Cualquier número primo elevado a 4 tiene tres divisores propios.

058 ●● **¿De cuántas maneras se pueden colocar 17 manzanos en filas, de modo que cada fila tenga el mismo número de árboles? ¿Y si fueran 24 manzanos?**

Como 17 es un número primo, tiene como únicos divisores 1 y 17, luego los manzanos se pueden colocar:

- 17 filas de 1 manzano cada una.
- 1 fila de 17 manzanos.

El número 24 no es primo y se descompone en: $24 = 2^3 \cdot 3$
Tiene $(3 + 1) \cdot (1 + 1) = 8$ divisores. Esto significa que se pueden formar:

- 1 fila de 24 manzanos.
- 2 filas de 12 manzanos cada una.
- 3 filas de 8 manzanos cada una.
- 4 filas de 6 manzanos cada una.
- 6 filas de 4 manzanos cada una.
- 8 filas de 3 manzanos cada una.
- 12 filas de 2 manzanos cada una.
- 24 filas de 1 manzano cada una.

059 ●● **Bernardo tiene menos de 100 y más de 90 discos compactos. Si los agrupa de 3 en 3 sobra 1, y si lo hace de 5 en 5, también sobra 1. ¿Cuántos discos tiene Bernardo?**

Bernardo tiene 91 discos, porque: $91 = 3 \cdot 30 + 1$ y $91 = 5 \cdot 18 + 1$

060 ● **Obtén el m.c.d. y el m.c.m. de los siguientes números enteros.**

a) 61 y 49 **c) 150 y 415**
b) 280 y 416 **d) 296 y 432**

a) $\left.\begin{array}{l} 61 = 61 \\ 49 = 7^2 \end{array}\right\} \rightarrow \begin{array}{l} \text{m.c.d.}\ (61, 49) = 1 \\ \text{m.c.m.}\ (61, 49) = 61 \cdot 7^2 = 2.989 \end{array}$

b) $\left.\begin{array}{l} 280 = 2^3 \cdot 5 \cdot 7 \\ 416 = 2^5 \cdot 13 \end{array}\right\} \rightarrow \begin{array}{l} \text{m.c.d.}\ (280, 416) = 2^3 = 8 \\ \text{m.c.m.}\ (280, 416) = 2^5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13 = 14.560 \end{array}$

c) $\left.\begin{array}{l} 150 = 2 \cdot 3 \cdot 5^2 \\ 415 = 5 \cdot 83 \end{array}\right\} \rightarrow \begin{array}{l} \text{m.c.d.}\ (150, 415) = 5 \\ \text{m.c.m.}\ (150, 415) = 2 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 83 = 12.450 \end{array}$

d) $\left.\begin{array}{l} 296 = 2^3 \cdot 37 \\ 432 = 2^4 \cdot 3^3 \end{array}\right\} \rightarrow \begin{array}{l} \text{m.c.d.}\ (296, 432) = 2^3 = 8 \\ \text{m.c.m.}\ (296, 432) = 37 \cdot 2^4 \cdot 3^3 = 15.984 \end{array}$

061 **Calcula el m.c.d. y el m.c.m.**

a) 111, 222 y 1.011 **b) 25, 100 y 735**

a) $\left.\begin{array}{r} 111 = 3 \cdot 37 \\ 222 = 2 \cdot 3 \cdot 37 \\ 1.011 = 3 \cdot 337 \end{array}\right\} \rightarrow \begin{array}{l} \text{m.c.d. } (111, 222, 1.011) = 3 \\ \text{m.c.m. } (111, 222, 1.011) = 74.814 \end{array}$

b) $\left.\begin{array}{r} 25 = 5^2 \\ 100 = 2^2 \cdot 5^2 \\ 735 = 3 \cdot 5 \cdot 7^2 \end{array}\right\} \rightarrow \begin{array}{l} \text{m.c.d. } (25, 100, 735) = 5 \\ \text{m.c.m. } (25, 100, 735) = 14.700 \end{array}$

062 **Se dispone de dos rollos de cuerda que tienen 144 y 120 m de longitud, respectivamente. ¿Cuál es el número de trozos iguales, de tamaño máximo, que se puede hacer?**

Para que los trozos sean de tamaño máximo e iguales tendremos que calcular el m.c.d. (144, 120).

$$\left.\begin{array}{r} 144 = 2^4 \cdot 3^2 \\ 120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5 \end{array}\right\} \rightarrow \text{m.c.d. } (144, 120) = 2^3 \cdot 3 = 24$$

Cada trozo medirá 24 m, por lo que el número de trozos que se pueden hacer con el rollo grande es: 144 : 24 = 6, y con el rollo pequeño es: 120 : 24 = 5.

En total se obtendrán: 6 + 5 = 11 trozos iguales, de 24 m cada uno.

063 **Se quiere enlosar una habitación rectangular, de 520 cm de largo y 240 cm de ancho, con baldosas cuadradas de la mayor dimensión posible, y sin cortar ninguna. ¿Cuál será la dimensión de cada baldosa?**

Para que las baldosas sean cuadradas y de la mayor dimensión posible tendremos que calcular el m.c.d. (520, 240).

$$\left.\begin{array}{r} 520 = 2^3 \cdot 5 \cdot 13 \\ 240 = 2^4 \cdot 3 \cdot 5 \end{array}\right\} \rightarrow \text{m.c.d. } (520, 240) = 2^3 \cdot 5 = 40$$

La dimensión de cada baldosa será de 40 × 40 cm.

064 **Félix va a clases de Inglés cada 5 días y a clases de Piano cada 2 días. ¿Cada cuántos días coinciden ambas actividades?**

Se puede afirmar que Félix va a clases de Inglés los días que son múltiplos de 5 y a clases de Piano los días que son múltiplos de 2. Por tanto, para saber cada cuántos días coinciden las dos actividades habrá que calcular m.c.m. (5, 2).

Como ambos números son primos, el m.c.m. (5, 2) = 10, luego las dos actividades coincidirán cada 10 días.

065 ●●

Merche tiene 8 bolitas amarillas, 16 blancas, 16 rojas y 10 azules. Con todas lasbolitas quiere fabricar el mayor número de collares iguales, sin que sobre ninguna bolita.

a) ¿Cuántos collares iguales puede hacer?

b) ¿Cuántas bolitas, de cada color, tendrán los collares?

a) Para poder fabricar el mayor número de collares iguales, sin que sobre ninguna bolita, tendremos que calcular el m.c.d. (8, 16, 10).

$$\left.\begin{array}{r} 8 = 2^3 \\ 16 = 2^4 \\ 10 = 2 \cdot 5 \end{array}\right\} \rightarrow \text{m.c.d. } (8, 16, 10) = 2$$

Luego puede hacer 2 collares iguales.

b) Cada collar tendrá: 8 : 2 = 4 bolitas amarillas, 16 : 2 = 8 bolitas blancas, 16 : 2 = 8 bolitas rojas y 10 : 2 = 5 bolitas azules.

066 ●●

Juan y María cogen el autobús en la misma parada. Juan toma el autobús circular, que pasa por dicha parada cada 18 minutos, y María, la línea 9, que pasa cada 24 minutos. Si acaban de coincidir, ¿cuánto tardarán en volver a hacerlo?

El primer momento en el que vuelven a coincidir es múltiplo de 18 y de 24, el m.c.m. (18, 24).

$$\left.\begin{array}{r} 18 = 2 \cdot 3^2 \\ 24 = 2^3 \cdot 3 \end{array}\right\} \rightarrow \text{m.c.m. } (18, 24) = 2^3 \cdot 3^2 = 72$$

Por tanto, volverán a coincidir al cabo de 72 minutos, es decir, al cabo de 1 hora y 12 minutos.

067 ●●●

Teresa tiene un reloj que da una señal cada 30 minutos, otro reloj que la da cada 90 minutos, y un tercero, cada 150 minutos. A las 8 de la mañana, los tres relojes han coincidido en dar la señal.

a) ¿Cuánto tiempo ha de pasar para que vuelvan a coincidir el primer y el segundo relojes?

b) ¿Y el segundo y el tercero? ¿Y los tres?

a) Como m.c.m. (30, 90) = 90, el primer y el segundo reloj coincidirán al cabo de 90 minutos, es decir, al cabo de 1 hora y media.

b) $$\left.\begin{array}{r} 90 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5 \\ 150 = 2 \cdot 3 \cdot 5^2 \end{array}\right\} \rightarrow \text{m.c.m. } (90, 150) = 2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 = 450$$

El segundo y el tercer reloj volverán a coincidir al cabo de 7 horas y media.

c) $$\left.\begin{array}{r} 30 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \\ 90 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5 \\ 150 = 2 \cdot 3 \cdot 5^2 \end{array}\right\} \rightarrow \text{m.c.m. } (30, 90, 150) = 2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 = 450$$

Los tres relojes volverán a dar la señal juntos al cabo de 7 horas y media.

068 **En un almacén hay dos estanterías con cajas de botes de tomate. En la primera, las cajas contienen 54 botes cada una, y en la segunda hay 42 botes por caja. Si el número de botes de tomate de ambas estanterías es el mismo, ¿cuál es el mínimo número de cajas que hay en cada estantería?**

El número de botes que hay en cada estantería es múltiplo de 54 y de 42.

Para que el número de cajas sea mínimo, el número de botes tendrá que ser también mínimo, luego habrá que calcular el m.c.m. (54, 42).

$$\left.\begin{array}{l} 54 = 2 \cdot 3^3 \\ 42 = 2 \cdot 3 \cdot 7 \end{array}\right\} \rightarrow \text{m.c.m. } (54, 42) = 2 \cdot 3^3 \cdot 7 = 378$$

En cada estantería habrá 378 botes, siendo 378 : 54 = 7 cajas en la primera estantería y 378 : 42 = 9 cajas en la segunda.

069 **Un pastelero hace bizcochos cada 3 días, pastas cada 4 días, hojaldre cada 5 días y magdalenas cada 7 días.**

a) ¿Cada cuánto tiempo hace bizcochos y pastas a la vez?
b) ¿Y hojaldre y magdalenas?
c) ¿Y bizcochos, pastas y hojaldre?
d) ¿Y los cuatro dulces a la vez?

a) Hace bizcochos y pastas a la vez cada 12 días, ya que m.c.m. $(3, 4) = 3 \cdot 4 = 12$.

b) Hace hojaldre y magdalenas a la vez cada 35 días, porque m.c.m. $(5, 7) = 5 \cdot 7 = 35$.

c) Hace bizcochos, pastas y hojaldre cada 60 días, ya que m.c.m. $(3, 4, 5) = 3 \cdot 4 \cdot 5 = 60$.

d) Hace los cuatro dulces a la vez cada 420 días, porque m.c.m. $(3, 4, 5, 7) = 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 7 = 420$.

070 **¿Es posible que el producto y el cociente de dos números enteros tengan distinto signo? ¿Por qué?**

No es posible, ya que ambos tienen signo positivo si los dos números tienen el mismo signo, y negativo si tienen distinto signo.

071 **¿Cuándo es la suma de dos números enteros positiva? ¿Y cuándo es negativa? Pon ejemplos.**

La suma de dos números enteros es positiva cuando ambos, son positivos, o cuando uno es positivo y otro es negativo, siendo el valor absoluto del número positivo mayor que el del negativo.

Es negativa en caso contrario, es decir, cuando los dos números son negativos, o uno es positivo y el otro es negativo, siendo el valor absoluto del número negativo mayor que el del positivo.

072 ●●● **Estudia qué ocurre si en:**

$$\textbf{Dividendo} = \textbf{Divisor} \cdot \textbf{Cociente} + \textbf{Resto}$$

a) Cambias el dividendo por su opuesto.
b) Cambias el divisor por su opuesto.
c) El dividendo es el opuesto del divisor.
d) El divisor es el valor absoluto del dividendo.

a) El cociente y el resto cambian de signo.
b) El cociente cambia de signo.
c) El cociente es -1 y el resto es 0.
d) El cociente es 1 si el dividendo y el divisor tienen el mismo signo y -1 si tienen distinto signo, y el resto es 0.

073 ●●● **Completa esta tabla con números enteros.**

a	*a*	*a* + *b*	*a* − *b*	*a* · *b*
2	**3**	5	−1	6
−4	**5**	1	−9	−20
−9	**6**	**−3**	−15	−54
4	−5	−1	**9**	−20
−5	−6	**−11**	1	**30**

074 ●●● **El número de gatos que hay en Gatolandia es un número de 6 cifras que es cuadrado perfecto y cubo perfecto. Si se marchan 6 de los gatos, el número de gatos que queda es primo. ¿Cuántos gatos hay en Gatolandia?**

Por ser cubo perfecto y cuadrado perfecto, el número que buscamos debe ser potencia sexta de un número entero. Los únicos números cuya potencia sexta tiene seis cifras son 7, 8 y 9.
Por tanto, pueden ser:

$7^6 = 117.649$

$8^6 = 262.144$

$9^6 = 531.441$

Si le restamos 6 unidades y comprovemos si son números primos, vemos que solo es primo 117.643.

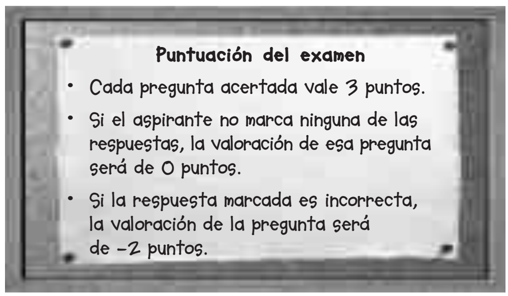
El número de gatos de Gatolandia es 117.649.

EN LA VIDA COTIDIANA

075 ●●●

Félix acaba de recibir la noticia de que las notas del examen de oposición al que se presentó están publicadas en la página web del ministerio.

El examen estaba compuesto por un test de 25 preguntas, con 4 opciones en cada pregunta. Las especificaciones sobre la puntuación del examen figuraban en un documento que colocaron en el tablón de anuncios.



Félix dejó 4 preguntas sin contestar, y según la lista de notas publicada, ha obtenido 38 puntos. Sin embargo, María Jesús, que no ha mirado aún las notas, piensa que ha sacado mejor nota que él.

¿A cuántas preguntas contestó Félix correctamente? ¿Es posible que María Jesús haya obtenido un 59?

$$\text{Félix: } \begin{cases} x \rightarrow \text{ Preguntas bien contestadas} \\ 21 - x \rightarrow \text{ Preguntas mal contestadas} \end{cases}$$

Félix ha contestado a 16 preguntas correctamente.

$$38 = 3x + (-2) \cdot (21 - x) \rightarrow 38 = 5x - 42 \rightarrow x = 16$$

$$\text{María Jesús: } \begin{cases} x \rightarrow \text{ Preguntas bien contestadas} \\ 19 - x \rightarrow \text{ Preguntas mal contestadas} \end{cases}$$

$$59 = 3x + (-2) \cdot (19 - x) \rightarrow 59 = 5x - 38 \rightarrow x = \frac{97}{5}$$

$\rightarrow$ No es un número entero

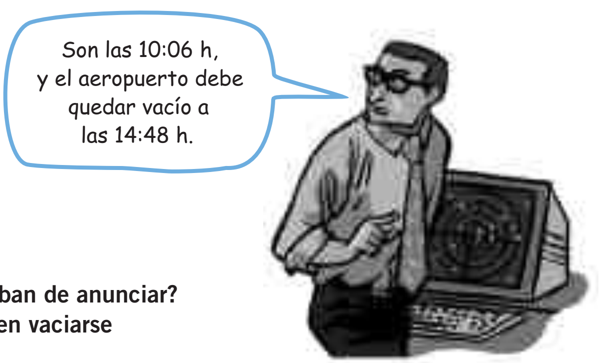
No es posible que María Jesús haya obtenido 59 puntos, ya que no se corresponde con un número entero de preguntas correctamente contestadas.

076 ●●●

Debido a un corrimiento de tierras se han inutilizado todas las pistas del aeropuerto, excepto dos.

Las autoridades han decidido cerrarlo, pero es necesario que aterricen todos los aviones que en ese momento se dirigen hacia él, y que despeguen los aviones que ya están en el aeropuerto y, también, los que aterricen.

Según el radar, en este instante hay 16 aviones que se dirigen hacia el aeropuerto, a los que hay que añadir los 12 aviones que ya están preparados para despegar.



¿Es posible lo que acaban de anunciar? ¿Cuánto tiempo tarda en vaciarse el aeropuerto?

El tiempo que tarda en vaciarse el aeropuerto es el máximo de los tiempos que tardan en aterrizar y en despegar los aviones, ya que utilizan pistas de aterrizaje diferentes.

Tiempo que tardan en aterrizar: $16 \cdot 4 = 64$ minutos

Tiempo que tardan en despegar: $12 \cdot 3 = 36$ minutos

Por tanto, el aeropuerto estará vacío en 64 minutos, a las 11:10 horas.

2 Números racionales

FRACCIONES

EXPRESIÓN DECIMAL

FRACCIÓN GENERATRIZ

FRACCIONES EQUIVALENTES

FRACCIÓN IRREDUCIBLE

NÚMEROS RACIONALES

OPERACIONES

POTENCIAS DE EXPONENTE ENTERO

NOTACIÓN CIENTÍFICA

La maldición del 36

Por dos veces la vara se alzó hacia el techo y, sin pausa, descendió a toda velocidad hasta estrellarse contra el enlosado de mármol. Su sonido provocó que el pequeño caos, en forma de murmullo, generalizado cesara de repente, y todas las cabezas se giraran en esa dirección.

Con voz grave, el chambelán anunció la entrada de la homenajeada.

–¡Lady Scherezada!

Sonó un cortés aplauso a la vez que, entre la multitud, se iba haciendo un pasillo hasta vaciar por completo el centro del enorme salón. Allí, bajo la araña de cristal que lanzaba mil rayos de colores, la esperaba su padre orgulloso.

–¡Mi pequeña ya es una mujer!

La música comenzó a sonar y la pareja, padre e hija, inauguraron el baile dibujando las figuras de un vals.

Una lágrima asomó en los ojos de la joven y una sombra de tristeza inundó su cara.

–La abuela me contó lo de la maldición de los Byron por no sé qué pecados. ¿Crees que es cierto?

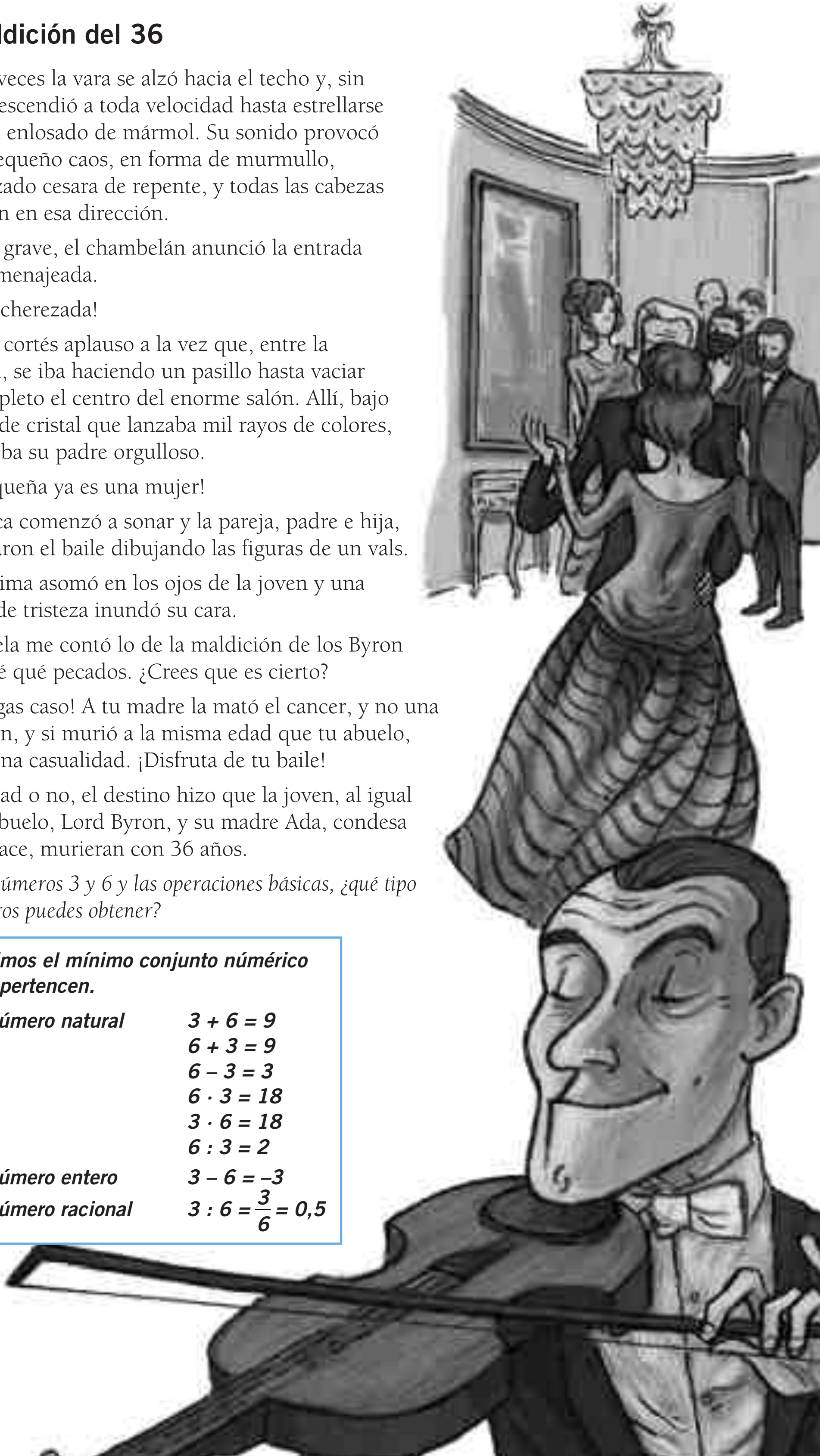
–¡No hagas caso! A tu madre la mató el cancer, y no una maldición, y si murió a la misma edad que tu abuelo, es solo una casualidad. ¡Disfruta de tu baile!

Casualidad o no, el destino hizo que la joven, al igual que su abuelo, Lord Byron, y su madre Ada, condesa de Lovelace, murieran con 36 años.

Con los números 3 y 6 y las operaciones básicas, ¿qué tipo de números puedes obtener?

Escribimos el mínimo conjunto numérico al que pertencen.

Número natural	$3 + 6 = 9$
	$6 + 3 = 9$
	$6 - 3 = 3$
	$6 \cdot 3 = 18$
	$3 \cdot 6 = 18$
	$6 : 3 = 2$
Número entero	$3 - 6 = -3$
Número racional	$3 : 6 = \frac{3}{6} = 0{,}5$



Números racionales

EJERCICIOS

001 **Indica, sin realizar las operaciones, qué tipo de expresión decimal tienen estos números.**

a) $\frac{3}{5}$ **c)** $\frac{14}{30}$ **e)** $\frac{21}{60}$

b) $\frac{11}{3}$ **d)** $\frac{20}{36}$ **f)** $\frac{11}{6}$

a) Decimal exacto
b) Periódico puro
c) Periódico mixto
d) Periódico puro
e) Decimal exacto
f) Periódico mixto

002 **Escribe dos fracciones que expresen:**

a) Un número decimal exacto.

b) Un número decimal periódico mixto.

a) $\frac{1}{2}$ y $\frac{3}{5}$

b) $\frac{5}{6}$ y $\frac{2}{15}$

003 **¿Son racionales todos los números decimales periódicos?**

Sí, porque se pueden poner en forma de fracción.

004 **Escribe en forma de fracción.**

a) 2,3333...

b) $\mathbf{2,\overset{\frown}{37}}$

c) $\mathbf{24,2\overset{\frown}{4}}$

a) $$\left.\begin{array}{r} N = 2{,}3333\ldots \\ 10N = 23{,}3333\ldots \end{array}\right\} \rightarrow 10N - N = 23{,}3333\ldots - 2{,}3333\ldots$$
$$\rightarrow 9N = 21 \rightarrow N = \frac{12}{9} = \frac{7}{3}$$

b) $$\left.\begin{array}{r} N = 2{,}3737\ldots \\ 100N = 237{,}3737\ldots \end{array}\right\} \rightarrow 100N - N = 237{,}3737\ldots - 2{,}3737\ldots$$
$$\rightarrow 99N = 235 \rightarrow N = \frac{235}{90}$$

c) $$\left.\begin{array}{r} N = 24{,}2444\ldots \\ 10N = 242{,}4444\ldots \\ 100N = 2.424{,}4444\ldots \end{array}\right\} \rightarrow 100N - 10N = 2.424{,}4444\ldots - 242{,}4444\ldots$$
$$\rightarrow 90N = 2.182 \rightarrow N = \frac{2.182}{90} = \frac{1.091}{45}$$

005 **Escribe $0,\overset{\frown}{9}$ y $0,\overset{\frown}{99}$ en forma de fracción. ¿Qué ocurre?**

$$0,\overset{\frown}{9} = \frac{9}{9} = 1 \qquad 0,\overset{\frown}{99} = \frac{99}{99} = 1$$

Son iguales a la unidad.

006 **Realiza las siguientes operaciones, calculando primero su forma fraccionaria.**

a) $\mathbf{0,\overset{\frown}{4} + 2,\overset{\frown}{6}}$ **b)** $\mathbf{1,\overset{\frown}{2} + 2,\overset{\frown}{7}}$ **c)** $\mathbf{3,0\overset{\frown}{2} - 2,\overset{\frown}{01} + 1,\overset{\frown}{15}}$

a) $$\left.\begin{aligned} N &= 0,4444\ldots \\ 10N &= 4,4444\ldots \end{aligned}\right\} \rightarrow 10N - N = 4,4444\ldots - 0,4444\ldots$$
$$\rightarrow 9N = 4 \rightarrow N = \frac{4}{9}$$

$$\left.\begin{aligned} N &= 2,6666\ldots \\ 10N &= 26,6666\ldots \end{aligned}\right\} \rightarrow 10N - N = 26,6666\ldots - 2,6666\ldots$$
$$\rightarrow 9N = 24 \rightarrow N = \frac{24}{9} = \frac{8}{3}$$

$$0,4444\ldots + 2,6666\ldots = \frac{4}{9} + \frac{8}{3} = \frac{28}{9} = 3,1111\ldots$$

b) $$\left.\begin{aligned} N &= 1,2222\ldots \\ 10N &= 12,2222\ldots \end{aligned}\right\} \rightarrow 10N - N = 12,2222\ldots - 1,2222\ldots$$
$$\rightarrow 9N = 11 \rightarrow N = \frac{11}{9}$$

$$\left.\begin{aligned} N &= 2,7777\ldots \\ 10N &= 27,7777\ldots \end{aligned}\right\} \rightarrow 10N - N = 27,7777\ldots - 2,7777\ldots$$
$$\rightarrow 9N = 25 \rightarrow N = \frac{25}{9}$$

$$1,2222\ldots + 2,7777\ldots = \frac{11}{9} + \frac{25}{9} = \frac{36}{9} = 4$$

c) $$3,0\overset{\frown}{2} = \frac{272}{90} = \frac{136}{45}$$

$$2,\overset{\frown}{01} = \frac{199}{99}$$

$$1,\overset{\frown}{15} = \frac{114}{99}$$

$$3,0\overset{\frown}{2} - 2,\overset{\frown}{01} + 1,\overset{\frown}{15} = \frac{136}{45} - \frac{199}{99} + \frac{114}{99} = \frac{136}{45} - \frac{85}{99} =$$
$$= \frac{1.496}{495} - \frac{425}{495} = \frac{1.071}{495} = \frac{119}{55} = 2,1\overset{\frown}{63}$$

007 **Encuentra la fracción irreducible.**

a) $\mathbf{\dfrac{-16}{24}}$ **b)** $\mathbf{\dfrac{18}{39}}$ **c)** $\mathbf{\dfrac{25}{-125}}$ **d)** $\mathbf{-\dfrac{110}{520}}$

a) $\left.\begin{array}{r}-16=-2^4\\ 24=2^3\cdot 3\end{array}\right\} \rightarrow \dfrac{-16}{24}=\dfrac{-2^4}{2^3\cdot 3}=\dfrac{-2}{3}=-\dfrac{2}{3}$

b) $\left.\begin{array}{r}18=2\cdot 3^2\\ 39=3\cdot 13\end{array}\right\} \rightarrow \dfrac{18}{39}=\dfrac{2\cdot 3^2}{3\cdot 13}=\dfrac{6}{13}$

c) $\left.\begin{array}{r}25=5^2\\ -125=-5^3\end{array}\right\} \rightarrow \dfrac{25}{-125}=\dfrac{5^2}{-5^3}=\dfrac{1}{-5}=-\dfrac{1}{5}$

d) $\left.\begin{array}{r}100=2^2\cdot 5^2\\ 520=2^3\cdot 5\cdot 13\end{array}\right\} \rightarrow -\dfrac{100}{520}=-\dfrac{2^2\cdot 5^2}{2^3\cdot 5\cdot 13}=-\dfrac{5}{26}$

008 Calcula a para que las fracciones $\dfrac{a}{6}$ y $\dfrac{3}{2a}$ sean equivalentes.

Son equivalentes si: $a\cdot 2a=6\cdot 3$

$a^2=9\rightarrow a=\pm 3$

Por tanto, el valor a es ± 3.

009 Razona si son ciertas o no las siguientes afirmaciones.

a) El denominador de una fracción irreducible es un número primo.

b) Si el denominador es un número primo, la fracción es irreducible.

c) Una fracción irreducible no puede tener un denominador que no sea un número primo.

a) No es cierto. Por ejemplo: $\dfrac{3}{4}$ es irreducible y el denominador no es primo.

b) No es cierto. Por ejemplo: $\dfrac{6}{3}$ no es irreducible y el denominador es primo.

c) Falso, es suficiente que el numerador y el denominador sean primos entre sí.

010 Escribe el representante canónico de estos números.

a) 2,33 b) $1,\widehat{6}$ c) $\dfrac{-3}{2}$ d) $2,4\widehat{2}$ e) -3 f) $-\dfrac{1}{7}$

a) $2,33=\dfrac{233}{100}$ es irreducible $\rightarrow$ Representante canónico

b) $1,\widehat{6}=\dfrac{15}{9}=\dfrac{5}{3}$

c) $\dfrac{-3}{2}$ es irreducible $\rightarrow$ Representante canónico

d) $\left.\begin{array}{r}N=2,4222\ldots\\ 10N=24,2222\ldots\\ 100N=242,2222\ldots\end{array}\right\} \rightarrow 100N-10N=242,2222\ldots-24,2222\ldots$

$\rightarrow 90N=218\rightarrow N=\dfrac{218}{90}$

$$\left.\begin{array}{l}218 = 2 \cdot 109\\ 90 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5\end{array}\right\} \rightarrow \frac{218}{90} = \frac{2 \cdot 109}{2 \cdot 3^2 \cdot 5} = \frac{109}{45} \text{ es irreducible}$$

$\rightarrow$ Representante canónico

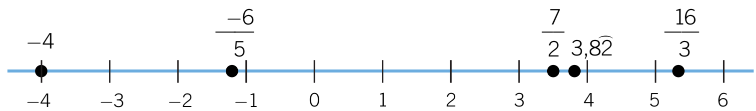
e) $-3 = \dfrac{-3}{1}$

f) $\dfrac{-1}{7}$ es irreducible $\rightarrow$ Representante canónico

011 **Ordena los siguientes números.**

$$-4;\ \frac{16}{3};\ \frac{-6}{5};\ \frac{7}{2};\ 3,8\overset{\frown}{2}$$

$$-4 < \frac{-6}{5} < \frac{7}{2} < 3,8\overset{\frown}{2} < \frac{16}{3}$$



012 **¿Son racionales todos los números decimales periódicos?**

Todos los números periódicos son racionales, por decimales que se pueden poner como cociente de dos números enteros.

013 **Realiza las siguientes operaciones.**

a) $\left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{2}{3} + \dfrac{3}{4}\right) \cdot \left(\dfrac{4}{3} : \dfrac{2}{5}\right)$

b) $\left(\dfrac{7}{2} - 3\right) \cdot \left(\dfrac{3}{2} - 7\right) + \dfrac{12}{5} - \dfrac{3}{8}$

c) $\left(\dfrac{1}{2} - 5\right) \cdot \left(\dfrac{1}{2} - 5\right) - 2$

a) $$\left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{3}{4}\right) \cdot \left(\frac{4}{3} \cdot \frac{2}{5}\right) = \left(\frac{6}{12} - \frac{8}{12} + \frac{9}{12}\right) \cdot \left(\frac{4}{3} \cdot \frac{5}{2}\right)$$
$$\frac{7}{12} \cdot \frac{20}{6} = \frac{140}{72} = \frac{35}{18}$$

b) $$\left(\frac{7}{2} - 3\right) \cdot \left(\frac{3}{2} - 7\right) + \frac{12}{5} - \frac{3}{8} =$$
$$= \left(\frac{7}{2} - \frac{6}{2}\right) \cdot \left(\frac{3}{2} - \frac{14}{2}\right) + \frac{12}{5} - \frac{3}{8} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{-11}{2}\right) + \frac{12}{5} - \cdot$$

c) $$\left(\frac{1}{2} - 5\right) \cdot \left(\frac{1}{2} - 5\right) - 2 = \left(\frac{-9}{2}\right) \cdot \left(\frac{-9}{2}\right) - 2 = \frac{81}{4} - 2 = \frac{73}{4}$$

014 **Pedro, María y Ana compran una pizza para cenar. María come la quinta parte, Ana la cuarta parte y Pedro la mitad de lo que toman ambas. ¿Cuánto ha comido Pedro? ¿Cuánto comen entre los tres? ¿Les ha sobrado pizza?**

$$\text{María} \rightarrow \frac{1}{5} \qquad \text{Ana} \rightarrow \frac{1}{4} \qquad \text{Pedro} \rightarrow \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{4}{20}+\frac{5}{20}\right.$$

$$\text{Entre los tres comen: } \frac{1}{5}+\frac{1}{4}+\frac{9}{40}=\frac{8}{40}+\frac{10}{40}+\frac{9}{40}=\frac{27}{40} \text{ de pizza}$$

$$\text{Les ha sobrado: } 1-\frac{27}{40}=\frac{40}{40}-\frac{27}{40}=\frac{13}{40} \text{ de pizza}$$

015 **Calcula: $(2,\widehat{6}+4):3,\widehat{3}$**

$$\left(2,\widehat{6}+4\right):3,\widehat{3}=\left(\frac{8}{3}+4\right):\frac{10}{3}=\frac{20}{3}:\frac{10}{3}=2$$

016 **Realiza esta operación: $\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{3}\right)^3:\left(\frac{4}{3}\right)^2$**

$$\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{3}\right)^3:\left(\frac{4}{3}\right)^2=\left(\frac{3}{6}-\frac{4}{6}\right)^3:\frac{16}{9}=\left(\frac{-1}{6}\right)^3\cdot\frac{16}{9}=\frac{(-1)^3}{6^3}\cdot\frac{9}{16}$$

$$=\frac{-1}{216}\cdot\frac{9}{16}=\frac{-9}{3.456}=-\frac{1}{384}$$

017 **Resuelve $\left(\frac{2}{3}\right)^3\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^3-\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{5}\right)^2$.**

$$\left(\frac{2}{3}\right)^3\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^3-\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{5}\right)^2=\frac{2^3}{3^3}\cdot\frac{3^3}{2^3}-\frac{9^2}{10^2}=1-\frac{81}{100}=\frac{19}{100}$$

018 **Sabemos que el inverso de 2 es $\frac{1}{2}$.**

Halla el inverso de 2^2, 2^3 y 2^4. ¿Cuál será el inverso de 2^n?
Comprueba el resultado realizando la multiplicación correspondiente.

$$(2^2)^{-1}=\frac{1}{2^2}=\frac{1}{4}\rightarrow 2^2\cdot\frac{1}{2^2}=4\cdot\frac{1}{4}=1$$

$$(2^3)^{-1}=\frac{1}{2^3}=\frac{1}{8}\rightarrow 2^3\cdot\frac{1}{2^3}=8\cdot\frac{1}{8}=1$$

$$(2^4)^{-1}=\frac{1}{2^4}=\frac{1}{16}\rightarrow 2^4\cdot\frac{1}{2^4}=16\cdot\frac{1}{16}=1$$

…

$$(2^n)^{-1}=\frac{1}{2^n}\rightarrow 2^n\cdot\frac{1}{2^n}=\frac{2^n}{2^n}=1$$

019 **Simplifica y calcula.**

a) $\underbrace{z \cdot z \cdot \ldots \cdot z}_{\text{60 veces}}$ **b)** $\underbrace{x \cdot x \cdot \ldots \cdot x}_{\text{150 veces}}$ **c)** $(-3)^{-2}$ **d)** -3^{-2}

a) z^{60} b) x^{150} c) $\frac{1}{3^2}$ d) $-\frac{1}{3^2}$

020 **Escribe el inverso de los siguientes números como potencia de exponente entero.**

a) 2 **b)** -3 **c)** 2^2 **d)** -2^{-2}

a) $\frac{1}{2}$ b) $-\frac{1}{3}$ c) $\frac{1}{2^2}$ d) -2^2

021 **Expresa estas fracciones como potencias de exponentes enteros.**

a) $\frac{225}{64}$ **b)** $\frac{22}{121}$ **c)** $-\frac{56}{125}$

a) $\frac{3^2 \cdot 5^2}{2^6} = 3^2 \cdot 5^2 \cdot 2^{-6}$

b) $\frac{2 \cdot 11}{11^2} = \frac{2}{11} = 2 \cdot 11^{-1}$

c) $\frac{2^3 \cdot 7}{5^3} = 2^3 \cdot 7 \cdot 5^{-3}$

022 **Indica cuánto vale $(-1)^n$ para los valores positivos y negativos de n. Para ello, comienza dando valores pequeños y obtén una regla general.**

Independientemente de si n es positivo o negativo, $(-1)^n = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ es par} \\ -1 & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$

023 **Aplica las propiedades de las potencias, y expresa el resultado como potencia de exponente positivo.**

a) $8^{-3} \cdot 8^{-6}$ **c)** $(8 \cdot 4)^{-4}$ **e)** $\left(-\frac{5}{2}\right)^{-1}$

b) $\left(\frac{5^{-8}}{5^{-2}}\right)^{-2}$ **d)** $\left(\frac{15}{72}\right)^{-3}$ **f)** $(24^{-21})^2$

Indica qué propiedad has utilizado en cada caso.

a) $8^{-9} = \frac{1}{8^9}$

b) $(5^{-8-(-2)})^{-2} = (5^{-6})^{-2} = 5^{12}$

c) $(2^3 \cdot 2^2)^{-4} = (2^5)^{-4} = 2^{-20} = \frac{1}{2^{20}}$

d) $\left(\frac{72}{15}\right)^3 = \left(\frac{24}{5}\right)^3$

e) $-\frac{2}{5}$

f) $24^{-42} = \frac{1}{24^{42}}$

024 **Calcula.**

a) $(x^5 y^{-2}) : (x^6 y^{-1})$

b) $(6x^4 y^2) : (3x^2 y^{-2})$

a) $x^{5-6}y^{-2-(-1)} = x^{-1}y^{-1} = \frac{1}{xy}$

b) $2x^{4-2}y^{2-(-2)} = 2x^2y^4$

025 **Simplifica y expresa el resultado como potencia.**

a) $\frac{5^7 \cdot 3^3 \cdot 6^{-4}}{6^{-2} \cdot 3^{-3} \cdot 5^{-14}}$

b) $2 \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{2^{-3}}{3^2} \cdot \left(\frac{3}{8}\right)^2$

c) $9^2 \cdot 3^{-2} \cdot 27$

d) $\left(\left(\frac{1}{5}\right)^3\right)^{-2} \cdot 25$

a) $5^{7-(-14)} \cdot 3^{3-(-3)} \cdot (2 \cdot 3)^{-4-(-2)} = 5^{21} \cdot 3^6 \cdot 2^{-2} \cdot 3^{-2} = 5^{21} \cdot 3^4 \cdot 2^{-2} =$
$= \frac{5^{21} \cdot 3^4}{2^2}$

b) $2 \cdot \frac{3}{2^2} \cdot \frac{1}{2^3 \cdot 3^2} \cdot \frac{3^3}{2^6} = \frac{3^2}{2^{10}}$

c) $3^4 \cdot 3^{-2} \cdot 3^3 = 3^5$

d) $\frac{1}{5^{-6}} \cdot 5^2 = 5^8$

026 **Expresa en notación científica.**

a) 9.340.000
b) 0,000125
c) 789.200
d) 1 billón
e) Media decena
f) 4
g) 0,0089
h) 137
i) 1 diezmilésima
j) 5 centésimas
k) 9 milésimas
l) 6 trillones

a) $9,34 \cdot 10^6$
b) $1,25 \cdot 10^{-4}$
c) $7,892 \cdot 10^5$
d) $1 \cdot 10^6$
e) $5 \cdot 10^0$
f) 4
g) $8,9 \cdot 10^{-3}$
h) $1,37 \cdot 10^2$
i) $1 \cdot 10^{-4}$
j) $5 \cdot 10^{-2}$
k) $9 \cdot 10^{-3}$
l) $6 \cdot 10^{18}$

027 **Estos números no están correctamente escritos en notación científica. Corrígelos.**

a) $0,7 \cdot 10^6$

b) $11,2 \cdot 10^{-3}$

a) $7 \cdot 10^5$

b) $1,12 \cdot 10^{-2}$

028 **Calcula.**

a) $2,3 \cdot 10^4 + 5 \cdot 10^3$

b) $(5 \cdot 10^{-2}) \cdot (3,1 \cdot 10^{-4})$

a) $2,8 \cdot 10^4 = 28.000$

b) $1,55 \cdot 10^{-5} = 0,0000155$

029 Realiza las siguientes operaciones, y expresa el resultado en notación científica.

a) $9{,}34 \cdot 10^4 + 7{,}6 \cdot 10^2$
b) $7{,}8 \cdot 10^{-3} + 8 \cdot 10^{-5}$
c) $3 \cdot 10^{-7} - 7 \cdot 10^{-4}$
d) $(9 \cdot 10^4) \cdot (8{,}5 \cdot 10^2)$
e) $(5{,}2 \cdot 10^{-4}) \cdot (8 \cdot 10^{-5})$
f) $(4 \cdot 10^{-6}) : (2 \cdot 10^{-8})$
g) $(7 \cdot 10^4) : (1{,}4 \cdot 10^5)$
h) $(4 \cdot 10^5) \cdot (2 \cdot 10^3) : (8 \cdot 10^{-2})$

a) $9{,}416 \cdot 10^4$
b) $7{,}88 \cdot 10^{-3}$
c) $6{,}997 \cdot 10^{-4}$
d) $7{,}65 \cdot 10^7$
e) $4{,}16 \cdot 10^{-8}$
f) $2 \cdot 10^2$
g) $5 \cdot 10^{-1}$
h) $1 \cdot 10^{10}$

030 Un microorganismo mide 3,5 micras. Sabiendo que 1 micra es la millonésima parte de 1 metro, expresa, en metros y en notación científica, la longitud de 4 millones de microorganismos dispuestos en fila.

$(4 \cdot 10^6) \cdot (3{,}5 \cdot 10^{-6}) = 1{,}4 \cdot 10^1 = 14$ metros

031 Realiza, utilizando la calculadora y también sin ella, esta suma: $9{,}23 \cdot 10^{99} + 1{,}78 \cdot 10^{99}$. ¿Qué diferencias observas entre las dos formas de realizar la suma?

En el caso de que la calculadora solo admita dos cifras en el exponente, no será capaz de hacerlo e indicará un error.

Si se realiza manualmente, el resultado es $1{,}101 \cdot 10^{100}$.

ACTIVIDADES

032 Utiliza la expresión numérica adecuada a cada situación.

a) Reparto 15 golosinas entre 8 niños.
b) He gastado 2 € y 37 céntimos.
c) En esta tienda hacen un 25 por ciento de descuento.
d) Llevo un cuarto de hora esperando el autobús.
e) He pagado 2 de las 5 cuotas del coche.
f) El 10 por ciento de los estudiantes asegura que no come verduras.
g) El viaje ha durado 3 horas y media.

a) $\frac{15}{8}$ b) 2,37 € c) $\frac{25}{100}$ d) $\frac{1}{4}$ hora e) $\frac{2}{5}$ f) $\frac{10}{100}$ g) 3,5 horas

033 ¿Cuántos números racionales hay en esta serie? ¿Hay algún número entero? ¿Y natural?

$$\frac{1}{4}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{5}, \frac{12}{8}, -\frac{24}{4}, \frac{4}{24}, \frac{6}{8}, \frac{100}{25}, \frac{150}{200}, -\frac{2}{10}$$

Racionales: todos. Enteros: $-\frac{24}{4} = -6$ y $\frac{100}{25} = 4$. Natural: $\frac{100}{25} = 4$.

034 **Transforma las siguientes fracciones en números decimales, e indica qué tipo de decimales.**

a) $\frac{1}{5}$ d) $\frac{2}{45}$ g) $\frac{2}{9}$
b) $\frac{111}{90}$ e) $\frac{5}{6}$ h) $\frac{1}{1.000}$
c) $\frac{3}{4}$ f) $\frac{12}{7}$ i) $\frac{17}{24}$

a) $0,2 \longrightarrow$ Decimal exacto
b) $1,2\overset{\frown}{3} \rightarrow$ Periódico mixto
c) $0,75 \rightarrow$ Decimal exacto
d) $0,0\overset{\frown}{4} \rightarrow$ Periódico mixto
e) $0,8\overset{\frown}{3} \rightarrow$ Periódico mixto
f) $1,\overset{\frown}{714285} \rightarrow$ Periódico puro
g) $0,\overset{\frown}{2} \longrightarrow$ Periódico puro
h) $0,002 \longrightarrow$ Decimal exacto
i) $0,708\overset{\frown}{3} \longrightarrow$ Periódico mixto

035 **Escribe dos fracciones cuya expresión decimal sea un número:**
a) Decimal exacto. **b) Decimal periódico puro.** **c) Decimal periódico mixto.**

a) $\frac{3}{5}$ y $\frac{7}{2}$ b) $\frac{4}{3}$ y $\frac{7}{11}$ c) $\frac{5}{6}$ y $\frac{3}{35}$

036 **Escribe un número decimal que cumpla las siguientes características.**
a) Periódico puro, de período 5.
b) Exacto, con tres cifras decimales.
c) Periódico mixto, de anteperíodo 28.
d) Periódico puro, con período de 4 cifras.
e) Periódico mixto, con período 37.
f) Exacto, con parte entera 2.

a) $1,\overset{\frown}{5}$ c) $2,28\overset{\frown}{34}$ e) $6,8\overset{\frown}{37}$
b) $1,234$ d) $5,\overset{\frown}{2468}$ f) $2,65$

037 **Halla la fracción generatriz.**
a) 0,2 **c) 95,7** **e) 0,01** **g) 342,12**
b) 5,25 **d) 8,0002** **f) 37,875** **h) 0,0000003**

a) $\frac{1}{5}$ c) $\frac{957}{10}$ e) $\frac{1}{100}$ g) $\frac{8.553}{25}$
b) $\frac{21}{4}$ d) $\frac{40.001}{5.000}$ f) $\frac{303}{8}$ h) $\frac{3}{10.000.000}$

038 **Calcula la fracción generatriz de los siguientes números decimales periódicos.**
a) $3,\overset{\frown}{5}$ **d)** $2,3\overset{\frown}{7}$ **g)** $42,\overset{\frown}{78}$ **j)** $10,5\overset{\frown}{23}$
b) $5,\overset{\frown}{902}$ **e)** $0,0\overset{\frown}{157}$ **h)** $0,\overset{\frown}{8}$ **k)** $0,000\overset{\frown}{97}$
c) $12,\overset{\frown}{99}$ **f)** $42,00\overset{\frown}{4}$ **i)** $1,\overset{\frown}{256}$ **l)** $3,2\overset{\frown}{572}$

a) $\frac{32}{9}$

b) $\frac{5.897}{999}$

c) $\frac{117}{9}$

d) $\frac{235}{90} = \frac{47}{18}$

e) $\frac{156}{9.900} = \frac{43}{4.950}$

f) $\frac{41.962}{900} = \frac{20.981}{450}$

g) $\frac{4.236}{99} = \frac{1.412}{33}$

h) $\frac{8}{9}$

i) $\frac{1.255}{999}$

j) $\frac{10.418}{990} = \frac{5.209}{495}$

k) $\frac{97}{99.000}$

l) $\frac{32.540}{9.990} = \frac{3.254}{999}$

039 ●

Indica el tipo de decimal y calcula, si es posible, su fracción generatriz.

a) 15,3222... **c) 15,233444...** **e) 15,333**

b) 15,323232... **d) 15,32** **f) 15**

a) Periódico mixto $\rightarrow \frac{1.379}{90}$

b) Periódico puro $\longrightarrow \frac{1.515}{99} = \frac{505}{33}$

c) Irracional

d) Decimal exacto $\rightarrow \frac{383}{25}$

e) Periódico puro $\longrightarrow \frac{138}{9} = \frac{46}{3}$

f) Decimal exacto $\rightarrow \frac{15}{1}$

040 ●

Escribe la fracción generatriz de estos números decimales.

a) $\mathbf{2,25}$ **c)** $\mathbf{22,\overset{\frown}{5}}$ **e) 0,334334334...**

b) $\mathbf{2,\overset{\frown}{25}}$ **d)** $\mathbf{2,2\overset{\frown}{5}}$ **f) 8,57111...**

a) $\frac{9}{4}$

b) $\frac{223}{99}$

c) $\frac{203}{9}$

d) $\frac{203}{90}$

e) $\frac{334}{999}$

f) $\frac{7.714}{900} = \frac{3.857}{450}$

041 ●●

Los siguientes números decimales tienen de período 9. Averigua a qué números equivalen, expresándolos en forma de fracción.

a) $\mathbf{1,\overset{\frown}{9}}$ **b)** $\mathbf{4,5\overset{\frown}{9}}$ **c)** $\mathbf{0,1\overset{\frown}{9}}$

a) $\frac{18}{9} = 2$

b) $\frac{414}{90} = 4,6$

c) $\frac{18}{90} = 0,2$

042 ●

Ordena los números decimales, de menor a mayor.

2,999 2,95 2,955 2,59 2,599 2,559

$2,559 < 2,59 < 2,599 < 2,95 < 2,955 < 2,999$

043 ●

Ordena los siguientes números decimales, de menor a mayor.

$\mathbf{2,9\overset{\frown}{95}}$ $\mathbf{2,\overset{\frown}{9}}$ $\mathbf{2,\overset{\frown}{95}}$ $\mathbf{2,9\overset{\frown}{59}}$ $\mathbf{2,9\overset{\frown}{5}}$

$2,9\overset{\frown}{5} < 2,\overset{\frown}{95} = 2,9\overset{\frown}{59} < 2,9\overset{\frown}{95} < 2,\overset{\frown}{9}$

044 Ordena estos números decimales, de mayor a menor.

$$\mathbf{4{,}75 \qquad 4{,}\overset{\frown}{75} \qquad 4{,}7\overset{\frown}{5} \qquad 4{,}775 \qquad 4{,}757 \qquad 4{,}7\overset{\frown}{57}}$$

$4{,}775 > 4{,}7\overset{\frown}{57} = 4{,}\overset{\frown}{75} > 4{,}757 > 4{,}7\overset{\frown}{5} > 4{,}75$

045 Ordena, de menor a mayor, los siguientes números decimales.

a) $7{,}512 < 7{,}5\overset{\frown}{12} < 7{,}51\overset{\frown}{2} < 7{,}\overset{\frown}{512} < 7{,}\overset{\frown}{51}$

b) $3{,}6\overset{\frown}{1} < 3{,}6\overset{\frown}{15} < 3{,}\overset{\frown}{61} < 3{,}\overset{\frown}{6}$

c) $8{,}\overset{\frown}{24} < 8{,}24\overset{\frown}{3} < 8{,}2\overset{\frown}{43} < 8{,}2\overset{\frown}{4}$

d) $7{,}1\overset{\frown}{412} < 7{,}1\overset{\frown}{41} < 7{,}1\overset{\frown}{4}$

046 Escribe un número racional comprendido entre:

a) $\mathbf{3{,}4}$ **y** $\mathbf{3{,}400\overset{\frown}{23}}$ **b)** $\mathbf{5{,}6}$ **y** $\mathbf{5{,}\overset{\frown}{68}}$ **c)** $\mathbf{2{,}5\overset{\frown}{2}}$ **y** $\mathbf{2{,}\overset{\frown}{52}}$

a) 3,4001 b) 5,62 c) 2,523

047 **HAZLO ASÍ**

¿CÓMO SE OPERA CON NÚMEROS DECIMALES PERIÓDICOS?

Haz esta operación: $\mathbf{12{,}7 + 7{,}\overset{\frown}{2}}$

PRIMERO. Se calculan las fracciones generatrices de cada uno de los números decimales.

$$12{,}7 = \frac{127}{10} \qquad 7{,}\overset{\frown}{2} = \frac{72-7}{9} = \frac{65}{9}$$

SEGUNDO. Se realizan las operaciones indicadas, sustituyendo los números decimales por sus fracciones generatrices.

$$12{,}7 + 7{,}\overset{\frown}{2} = \frac{127}{10} + \frac{65}{9} = \frac{127 \cdot 9 + 65 \cdot 10}{90} =$$

$$= \frac{1.143 + 650}{90} = \frac{1.793}{90} = 19{,}9\overset{\frown}{2}$$

048 Opera, utilizando las fracciones generatrices.

a) $1,\widehat{3} + 3,4$ **c)** $1,\widehat{36} + 8,\widehat{25}$ **e)** $3,\widehat{46} + 4,2\widehat{95}$

b) $10,2\widehat{5} - 5,\widehat{7}$ **d)** $4,\widehat{5} + 6,\widehat{7}$ **f)** $3,\widehat{21} + 4,3\widehat{12}$

a) $1,\widehat{3} + 3,4 = \dfrac{4}{3} + \dfrac{17}{5} = \dfrac{71}{15}$

b) $10,2\widehat{5} - 5,\widehat{7} = \dfrac{923}{90} - \dfrac{52}{9} = \dfrac{403}{90}$

c) $1,\widehat{36} + 8,\widehat{25} = \dfrac{135}{99} + \dfrac{817}{99} = \dfrac{952}{99}$

d) $4,\widehat{5} + 6,\widehat{7} = \dfrac{41}{9} + \dfrac{61}{9} = \dfrac{102}{9} = \dfrac{34}{3}$

e) $3,\widehat{46} + 4,2\widehat{95} = \dfrac{343}{99} + \dfrac{4.253}{990} = \dfrac{7.686}{990} = \dfrac{2.561}{330}$

f) $3,\widehat{21} + 4,3\widehat{12} = \dfrac{318}{99} + \dfrac{4.269}{990} = \dfrac{7.449}{990} = \dfrac{2.483}{330}$

049 Realiza las operaciones.

a) $1,25 \cdot 2,\widehat{5}$ **b)** $0,0\widehat{3} : 2,9\widehat{2}$ **c)** $3,7\widehat{6} \cdot 4,\widehat{8}$ **d)** $1,25 : 2,2\widehat{5}$

a) $1,25 \cdot 2,\widehat{5} = \dfrac{5}{4} \cdot \dfrac{23}{9} = \dfrac{115}{36}$

b) $0,0\widehat{3} : 2,9\widehat{2} = \dfrac{3}{90} : \dfrac{263}{90} = \dfrac{3}{263}$

c) $3,7\widehat{6} \cdot 4,\widehat{8} = \dfrac{339}{90} \cdot \dfrac{44}{9} = \dfrac{2.486}{135}$

d) $1,25 : 2,2\widehat{5} = \dfrac{5}{4} : \dfrac{203}{90} = \dfrac{225}{406}$

050 Utilizando las fracciones generatrices, comprueba si son verdaderas o falsas las siguientes igualdades.

a) $1,\widehat{9} = 2$ **c)** $1,8\widehat{9} + 0,1\widehat{1} = 2$ **e)** $0,\widehat{3} + 0,\widehat{6} = 1$

b) $1,\widehat{3} : 3 = 0,\widehat{4}$ **d)** $0,1\widehat{1} - 0,\widehat{1} = 0$

a) $1,\widehat{9} = \dfrac{18}{9} = 2 \longrightarrow$ Verdadera

b) $1,\widehat{3} : 3 = \dfrac{12}{9} : 3 = \dfrac{4}{9} = 0,\widehat{4} \longrightarrow$ Verdadera

c) $1,8\widehat{9} + 0,1\widehat{1} = \dfrac{171}{90} + \dfrac{10}{90} = \dfrac{181}{90} \neq 2 \rightarrow$ Falsa

d) $0,1\widehat{1} - 0,\widehat{1} = \dfrac{1}{9} - \dfrac{1}{9} = 0 \longrightarrow$ Verdadera

e) $0,\widehat{3} + 0,\widehat{6} = \dfrac{3}{9} + \dfrac{6}{9} = 1 \longrightarrow$ Verdadera

051 ●●● **Escribe 6,8 como suma de dos números decimales periódicos.**

$$6{,}8 = \frac{34}{5} = \frac{7}{3} + \frac{67}{15} = 2{,}\overset{\frown}{3} + 4{,}4\overset{\frown}{6}$$

052 ●●● **¿Cuál es la vigésimo sexta cifra decimal que obtenemos al expresar $\frac{128}{9.999}$ en forma decimal? Razona tu respuesta.**

$\frac{128}{9.999} = 0{,}\overset{\frown}{0128}$. Como el período tiene cuatro cifras, la vigésimo sexta cifra decimal es la segunda cifra del período, 1.

053 ●● **¿Qué tipo de decimal se obtiene de la fracción $\frac{a}{2^2 \cdot 5^3}$, si *a* es un número entero?**

Se obtiene un número entero o decimal exacto, ya que el cociente es producto de potencias de 2 y de 5.

054 ● **Simplifica, hasta llegar a la fracción irreducible, estas fracciones.**

a) $\frac{45}{-33}$ **c)** $\frac{123.123}{456.456}$ **e)** $\frac{-1.254}{1.054}$

b) $\frac{1.960}{2.004}$ **d)** $\frac{-333}{148}$ **f)** $\frac{1.024}{10.000}$

a) $\frac{45}{-33} = \frac{3^2 \cdot 5}{-3 \cdot 11} = \frac{3 \cdot 5}{-11} = -\frac{15}{11}$

b) $\frac{1.960}{2.004} = \frac{2^3 \cdot 5 \cdot 7^2}{2^2 \cdot 3 \cdot 167} = \frac{2 \cdot 5 \cdot 7^2}{3 \cdot 167} = \frac{490}{501}$

c) $\frac{123.123}{456.456} = \frac{3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 41}{2^2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 19} = \frac{41}{2^2 \cdot 19} = \frac{41}{152}$

d) $\frac{-333}{148} = \frac{-3^2 \cdot 37}{2^2 \cdot 37} = -\frac{9}{4}$

e) $\frac{-1.254}{1.054} = \frac{-2 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 19}{2 \cdot 17 \cdot 31} = \frac{-3 \cdot 11 \cdot 19}{17 \cdot 31} = \frac{627}{527}$

f) $\frac{1.024}{10.000} = \frac{2^{10}}{2^4 \cdot 5^4} = \frac{2^6}{5^4} = \frac{64}{625}$

055 ● **Para mi cumpleaños me han regalado una caja de bombones. Si me he comido 12 bombones y la caja tenía 64, ¿qué fracción de bombones he comido y cuál me queda?**

Me he comido: $\frac{12}{64} = \frac{3}{16}$ de bombones

Me quedan: $1 - \frac{3}{16} = \frac{13}{16}$ de bombones

056 **De los 30 alumnos de una clase, 10 son morenos, 7 rubios, 8 castaños y 5 pelirrojos. Calcula la fracción que representa cada grupo de alumnos con un mismo color de pelo respecto del total de los alumnos.**

Morenos $\longrightarrow \frac{10}{30} = \frac{1}{3}$ Castaños $\rightarrow \frac{8}{30} = \frac{4}{15}$

Rubios $\longrightarrow \frac{7}{30}$ Pelirrojos $\rightarrow \frac{5}{30} = \frac{1}{6}$

057 **En un rebaño hay 25 cabras, 52 ovejas blancas y 12 ovejas negras. Expresa, mediante fracciones irreducibles.**

a) El número de cabras del rebaño.

b) El número de ovejas del rebaño.

c) El número de ovejas que son de cada color.

a) Total $= 25 + 52 + 12 = 89$ animales

Cabras $\rightarrow \frac{25}{89}$

b) Ovejas $\longrightarrow \frac{52+12}{89} = \frac{64}{89}$

c) Ovejas blancas $\rightarrow \frac{52}{89}$

Ovejas negras $\longrightarrow \frac{12}{89}$

058 **Una fábrica que produce teléfonos tuvo una producción, durante el mes pasado, de 14.745 teléfonos, de los cuales 870 eran defectuosos. Este mes se ha producido 11.796 y han sido defectuosos 696. En relación con los teléfonos fabricados, ¿cuándo ha habido menos defectuosos?**

Ha habido el mismo porcentaje de teléfonos defectuosos, ya que: $\frac{870}{14.745} = \frac{696}{11.796}$

059 **Opera.**

a) $\frac{2}{3} - \frac{1}{4} \cdot \frac{5}{2} + 2$

b) $4 - \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{5}\right) \cdot \frac{3}{10}$

c) $\frac{3}{4} - \frac{2}{5} \cdot \frac{5}{3} + \left(\frac{2}{5}\right)^2$

d) $1 - \left(\frac{3}{5} - \frac{3}{6}\right) \cdot \frac{15}{2}$

e) $(-2) - \left(4 + \frac{13}{7}\right) : \left(2 - \frac{8}{3}\right)$

a) $\dfrac{2}{3} - \dfrac{1}{4} \cdot \dfrac{5}{2} + 2 = \dfrac{2}{3} - \dfrac{5}{8} + 2 = \dfrac{16}{24} - \dfrac{15}{24} + \dfrac{48}{24} = \dfrac{49}{24}$

b) $4 - \left(\dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{5}\right) \cdot \dfrac{3}{10} = 4 - \left(\dfrac{5}{30} + \dfrac{6}{30}\right) \cdot \dfrac{3}{10} = 4 - \dfrac{11}{30} \cdot \dfrac{3}{10}$

$= 4 - \dfrac{33}{300} = 4 - \dfrac{11}{100} = \dfrac{389}{100}$

c) $\dfrac{3}{4} - \dfrac{2}{5} \cdot \dfrac{5}{3} + \left(\dfrac{2}{5}\right)^2 = \dfrac{3}{4} - \dfrac{2}{3} + \dfrac{4}{25} = \dfrac{225}{300} - \dfrac{200}{300} + \dfrac{48}{300} = \dfrac{73}{300}$

d) $1 - \left(\dfrac{3}{5} - \dfrac{3}{6}\right) \cdot \dfrac{15}{2} = 1 - \left(\dfrac{18}{30} - \dfrac{15}{30}\right) \cdot \dfrac{15}{2} = 1 - \dfrac{3}{30} \cdot \dfrac{15}{2} =$

$= 1 - \dfrac{3}{4} = \dfrac{1}{4}$

e) $(-2) - \left(4 + \dfrac{13}{7}\right) \cdot \left(2 - \dfrac{8}{3}\right) = -2 - \left(\dfrac{41}{7}\right) \cdot \left(\dfrac{-2}{3}\right) =$

$= -2 - \left(\dfrac{41}{7}\right) \cdot \left(-\dfrac{3}{2}\right) = \left(\dfrac{41}{7}\right) \cdot \left(\dfrac{3}{2}\right) = -2 + \dfrac{123}{14} = \dfrac{95}{14}$

060 **Simplifica estas operaciones con potencias.**

a) $\left[\left(\dfrac{7}{4}\right)^3 \cdot \left(\dfrac{7}{4}\right)^5\right] \cdot \left[\left(\dfrac{8}{3}\right)^7 \cdot \left(\dfrac{8}{3}\right)^4\right]$

b) $\left[\left(\dfrac{13}{5}\right)^6 \cdot \left(\dfrac{6}{11}\right)^2 \cdot \left(\dfrac{6}{11}\right)^4 \cdot \left(\left(\dfrac{13}{5}\right)^3\right)^5\right]^2$

c) $\left[\left(\dfrac{13}{5}\right)^6 : \left(\dfrac{3}{10}\right)^2 : \left(\dfrac{5}{11}\right)^3 \cdot \left(\left(\dfrac{11}{5}\right)^4\right)^5\right]^2$

d) $\left[16 : \left(-\dfrac{7}{4}\right)^4\right]^2 \cdot \left[14 \cdot \left(\dfrac{4}{7}\right)^2\right]^4$

$\left[\left(\dfrac{7}{4}\right)^3 \cdot \left(\dfrac{7}{4}\right)^5\right] \cdot \left[\left(\dfrac{8}{3}\right)^7 \cdot \left(\dfrac{8}{3}\right)^4\right] = \left[\left(\dfrac{7}{4}\right)^{3+5}\right] \cdot \left[\left(\dfrac{8}{3}\right)^{7-4}\right] = \left(\dfrac{7}{4}\right)^8 \cdot \left(\dfrac{8}{3}\right)^2 =$

$= \dfrac{7^8 \cdot (2^3)^3}{(2^2)^8 \cdot 3^3} = \dfrac{7^8 \cdot 2^9}{2^{16} \cdot 3^3} = \dfrac{7^8}{2^7 \cdot 3^3}$

b) $\left[\left(\dfrac{13}{5}\right)^6 \cdot \left(\dfrac{6}{11}\right)^2 \cdot \left(\left(\dfrac{13}{5}\right)^3\right)^5\right]^2 = \left[\left(\dfrac{13}{5}\right)^6 \cdot \left(\dfrac{6}{11}\right)^{2+4} \cdot \left(\dfrac{13}{5}\right)^{15}\right]^2 =$

$= \left[\left(\dfrac{13}{5}\right)^{6+15} \cdot \left(\dfrac{6}{11}\right)^{2-4}\right] = \left[\left(\dfrac{13}{5}\right)^{21} \cdot \left(\dfrac{6}{11}\right)^{6}\right]^2 =$

$= \left(\dfrac{13}{5}\right)^{42} \cdot \left(\dfrac{6}{11}\right)^{12} = \dfrac{13^{42} \cdot 6^{12}}{5^{43} \cdot 11^{12}} = \dfrac{13^{42} \cdot 2^{12} \cdot 3^{12}}{5^{42} \cdot 11^{12}}$

c) $\left[\left(\frac{13}{5}\right)^6 : \left(\frac{3}{10}\right)^2 : \left(\frac{5}{11}\right)^3 : \left(\left(\frac{11}{5}\right)^4\right)^5\right]^2 = \left[\frac{13^6}{5^6} \cdot \frac{3^2}{10^2} \cdot \frac{5^3}{11^3} \cdot \frac{11^{20}}{5^{20}}\right]^2 =$

$= \left[\frac{13^6}{5^6} : \frac{3^2}{5^2 \cdot 2^2} : \frac{5^3}{11^3} : \frac{11^{20}}{5^{20}}\right]^2 = \left[\frac{2^2 \cdot 5^{13} \cdot 13^6}{11^{17} \cdot 3^2}\right]^2 = \frac{2^4 \cdot 5^{26} \cdot 13^{12}}{11^{34} \cdot 3^4}$

d) $\left[\left(-\frac{7}{14}\right)^4\right]^2 \cdot \left[14 \cdot \left(\frac{4}{7}\right)^2\right]^4 = \left[2^4 \cdot \frac{(2^2)^4}{7^4}\right]^2 \cdot \left[2 \cdot 7 \cdot \frac{2^4}{7^2}\right]^4 =$

$= \left[\frac{2^{12}}{7^4}\right]^2 \cdot \left[\frac{2^6}{7}\right]^4 = \frac{2^{24} \cdot 2^{20}}{7^8 \cdot 7^4} = \frac{2^{44}}{7^{12}}$

061 **Opera y calcula el valor de las siguientes fracciones.**

a) $\dfrac{1}{2+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{2+\dfrac{1}{3}}}}$ **b)** $\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{3}}}}$ **c)** $\dfrac{1}{2+\dfrac{1}{2+\dfrac{1}{2+\left(\dfrac{2}{3}\right)^3}}}$

a) $\dfrac{1}{2+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{2+\dfrac{1}{3}}}} = \dfrac{1}{2+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{\dfrac{7}{3}}}} = \dfrac{1}{2+\dfrac{1}{1+\dfrac{3}{7}}} =$

$= \dfrac{1}{2+\dfrac{1}{\dfrac{10}{7}}} = \dfrac{1}{2+\dfrac{7}{10}} = \dfrac{1}{\dfrac{27}{10}} = \dfrac{10}{27}$

b) $\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{3}}}} = \dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{\dfrac{2}{3}}}} = \dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1-\dfrac{3}{2}}} =$

$= \dfrac{1}{1-\dfrac{1}{\dfrac{-1}{2}}} = \dfrac{1}{1+\dfrac{2}{1}} = \dfrac{1}{3}$

c) $$\frac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\left(\cfrac{2}{3}\right)^3}}}=\frac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{8}{27}}}}=$$

$$=\frac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{\cfrac{62}{27}}}}=\frac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{27}{62}}}=\frac{1}{2+\cfrac{1}{\cfrac{151}{62}}}=$$

$$=\frac{1}{2+\cfrac{62}{151}}=\frac{1}{\cfrac{364}{151}}=\frac{151}{364}$$

062 **Escribe una fracción comprendida entre:**

a) $\frac{4}{5}$ **y** $\frac{7}{8}$

b) $\frac{9}{7}$ **y** $\frac{11}{9}$

c) $\frac{7}{6}$ **y** $\frac{8}{6}$

d) $\frac{-3}{7}$ **y** $\frac{-2}{5}$

e) $\frac{-1}{6}$ **y** $\frac{1}{5}$

f) $\frac{-5}{9}$ **y** $\frac{-6}{9}$

a) $$\left.\begin{array}{l}\frac{4}{5}=\frac{32}{40}\\[4pt]\frac{7}{8}=\frac{35}{40}\end{array}\right\}\rightarrow\frac{32}{40}<\frac{33}{40}<\frac{35}{40}$$

b) $$\left.\begin{array}{l}\frac{9}{7}=\frac{81}{63}\\[4pt]\frac{11}{9}=\frac{77}{63}\end{array}\right\}\rightarrow\frac{77}{63}<\frac{78}{63}<\frac{81}{63}$$

c) $$\left.\begin{array}{l}\frac{11}{9}=\frac{22}{18}\\[4pt]\frac{8}{6}=\frac{24}{18}\end{array}\right\}\rightarrow\frac{14}{12}<\frac{15}{16}<\frac{16}{12}$$

d) $$\left.\begin{array}{l}\frac{-3}{7}=-\frac{15}{35}=-\frac{30}{70}\\[4pt]\frac{-2}{5}=-\frac{14}{35}=-\frac{28}{70}\end{array}\right\}\rightarrow-\frac{30}{70}<\frac{29}{70}<\frac{28}{70}$$

e) $\left.\begin{array}{l}\dfrac{-1}{6} = -\dfrac{5}{30}\\[2ex] \dfrac{1}{5} = \dfrac{6}{30}\end{array}\right\} \rightarrow -\dfrac{5}{30} < \dfrac{1}{30} < \dfrac{6}{30}$

f) $\left.\begin{array}{l}\dfrac{-5}{9} = -\dfrac{10}{18}\\[2ex] \dfrac{-6}{9} = -\dfrac{12}{18}\end{array}\right\} \rightarrow -\dfrac{12}{18} < -\dfrac{11}{18} < \dfrac{10}{18}$

063 **Calcula las siguientes potencias.**

a) 2^{-3} **c)** 10^5 **e)** $(-3)^{-4}$ **g)** $(-12)^{-2}$ **i)** $(-1)^{-3}$

b) 7^{-4} **d)** 8^{-2} **f)** $(-2)^{-5}$ **h)** $(-6)^3$

a) $\dfrac{1}{2^3} = \dfrac{1}{8}$

b) $\dfrac{1}{7^4} = \dfrac{1}{2.401}$

c) 100.000

d) $\dfrac{1}{8^2} = \dfrac{1}{64}$

e) $\dfrac{1}{(-3)^4} = \dfrac{1}{81}$

f) $\dfrac{1}{(-2)^5} = -\dfrac{1}{32}$

g) $\dfrac{1}{(-12)^2} = \dfrac{1}{144}$

h) $-6^3 = -216$

i) -1

064 **Halla el inverso de estos números.**

a) 3 **c)** -3 **e)** $\dfrac{1}{3}$

b) $-\dfrac{1}{3}$ **d)** 3^3 **f)** -3^{-3}

a) $\dfrac{1}{3}$

b) -3

c) $-\dfrac{1}{3}$

d) $\dfrac{1}{3^3} = \dfrac{1}{27}$

e) 3

f) -3^3

065 **Expresa estas fracciones como potencias de números enteros, empleando exponentes negativos, si es preciso.**

a) $\dfrac{12}{5}$ **c)** $\dfrac{-3}{4}$ **e)** $\dfrac{2}{-5}$

b) $\dfrac{11}{65}$ **d)** $-\dfrac{5}{9}$ **f)** $\dfrac{-33}{-55}$

a) $2^2 \cdot 3 \cdot 5^{-1}$

b) $11 \cdot 13^{-1} \cdot 5^{-1}$

c) $-3 \cdot 4^{-1}$

d) $-5 \cdot 3^{-2}$

e) $-2 \cdot 5^{-1}$

f) $3 \cdot 5^{-1}$

066 Simplifica, expresando como única potencia.

a) $2^{-5} \cdot 2^{3} \cdot 2^{-4}$
b) $(-3)^{-6} : (-3)^{5} \cdot (-3)^{-7}$
c) $(-4)^{-4} : (-4)^{5} : (-4)^{-6}$
d) $7^{-2} \cdot 7^{-3} : 7^{-5}$

a) $2^{-5+3-4} = 2^{-6}$
b) $(-3)^{-6-5-7} = (-3)^{-18}$
c) $(-4)^{-4-5-(-6)} = (-4)^{-3}$
d) $7^{-2-3-(-5)} = 7^{0} = 1$

067 Opera y expresa el resultado en forma de una sola potencia.

a) $\left(\frac{3}{2}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{4} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{-5}$
b) $\left(\frac{3}{10}\right)^{-3} \cdot \left(\frac{3}{10}\right)^{-5} : \left(\frac{3}{10}\right)^{0}$
c) $\left(\frac{5}{4}\right)^{-1} : \left(\frac{5}{4}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{5}{4}\right)^{8}$
d) $\left(\frac{-1}{5}\right)^{-5} : \left(\frac{-1}{5}\right)^{-4} \cdot \left(\frac{-1}{5}\right)^{7}$

a) $\left(\frac{3}{2}\right)^{-3}$
b) $\left(\frac{3}{10}\right)^{-8}$
c) $\left(\frac{5}{4}\right)^{9}$
d) $\left(\frac{-1}{5}\right)^{6}$

068 Efectúa las operaciones.

a) $4^{6} : 2^{4}$
b) $(-3)^{4} \cdot (-3^{4})$
c) $(-2^{6}) : (-2^{-6})$
d) $(-2^{3})^{4} \cdot (-2^{4})^{-7}$
e) $2^{-3} : (-2^{-3})$
f) $[(-5)^{3}]^{2} \cdot 5^{-4}$
g) $[(2^{4} \cdot 2^{-8})^{-1}]^{-4}$
h) $-(-2^{3}) : (-2^{4})$

a) $2^{12} : 2^{4} = 2^{8}$
b) $(-3)^{8}$
c) $-2^{6} : (-2^{-6}) = 2^{6-(-6)} = 2^{12}$
d) $(-1)^{4} \cdot 2^{12} \cdot (-1)^{-7} \cdot 2^{-28} = -2^{40}$
e) $2^{-3} : [(-1) \cdot 2^{-3}] = -1$
f) $(-5)^{6} \cdot 5^{-4} = 5^{6} \cdot 5^{-4} = 5^{2}$
g) $[(2^{-4})^{-1}]^{-4} = 2^{-16}$
h) $-(-2^{3}) : [(-1) \cdot 2^{4}] = -2^{-1}$

069 **HAZLO ASÍ**

¿CÓMO SE RESUELVEN OPERACIONES CON POTENCIAS FACTORIZANDO LAS BASES?

Resuelve esta operación con potencias, simplificando todo lo que puedas.

$$44^{-3} \cdot 22^{5}$$

PRIMERO. Se descomponen las bases de las potencias en factores primos.

$$44 = 2^{2} \cdot 11 \qquad 22 = 2 \cdot 11$$

SEGUNDO. Se aplica esa descomposición a la operación.

$$44^{-3} \cdot 22^{5} = (2^{2} \cdot 11)^{-3} \cdot (2 \cdot 11)^{5} = (2^{-6} \cdot 11^{-3}) \cdot (2^{5} \cdot 11^{5})$$

TERCERO. Se resuelve la operación.

$$(2^{-6} \cdot 11^{-3}) \cdot (2^{5} \cdot 11^{5}) = 2^{-6+5} \cdot 11^{-3+5} = 2^{-1} \cdot 11^{2} = \frac{121}{2}$$

070 Opera y simplifica el resultado.

a) $(30^{-5} : 10^{-5})^3$
b) $(6^{-2} \cdot 3^{-2})^{-1}$
c) $(9^0 : 9^{-3})^2$
d) $(10^{-10} \cdot 10^{-6})^{-2}$
e) $(12^3 : 2^3)^{-4}$
f) $(20^{-5} : 10^{-5})^{-3}$

a) $(3^{-5})^3 = 3^{-15}$
b) $(2^{-2})^{-1} = 2^2$
c) $(9^3)^2 = 9^6$
d) $(10^{-16})^{-2} = 10^{32}$
e) $(3^3 \cdot 2^6 : 2^3)^{-4} = (3^3 \cdot 2^3)^{-4} = 6^{-12}$
f) $(2^{-5})^{-3} = 2^{15}$

071 Calcula y simplifica el resultado.

a) $\left(\frac{-2}{5}\right)^2 : \left(\frac{-4}{8}\right)^3$
b) $\left(\frac{9}{4}\right)^{-4} \cdot \left(\frac{6}{10}\right)^{-3}$
c) $\left(\frac{-3}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{5}{4}\right)^{-2}$
d) $\left(\frac{-7}{2}\right)^3 : \left(\frac{5}{-2}\right)^{-2}$

a) $\left(\frac{-2}{5}\right)^2 : \left(\frac{-1}{2}\right)^3 = [(-2)^2 \cdot 5^{-2}] : [(-2)^{-3}] = (-2)^5 \cdot 5^{-2}$
b) $(3^{-8} \cdot 2^8) \cdot (2^{-3} \cdot 3^{-3} \cdot 2^3 \cdot 5^3) = 2^8 \cdot 3^{-11} \cdot 5^3$
c) $[(-3)^3 : 2^3] \cdot (5^{-2} : 2^{-4}) = (-3)^3 \cdot 2^1 \cdot 5^{-2}$
d) $[(-7)^3 : 2^3] : [5^{-2} : (-2)^{-2}] = (-7)^3 \cdot 2^{-5} \cdot 5^2$

072 Efectúa y simplifica.

a) $\left(\frac{16}{25}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{125}{32}\right)^3 : \left(\frac{10}{8}\right)^4$
b) $\left(\frac{64}{27}\right)^{-3} : \left(\frac{9}{16}\right)^2 : \left(\frac{6}{18}\right)^{-2}$
c) $\left(\frac{7}{4}\right)^{-2} \cdot (-3)^2 : \left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$

a) $\left(\frac{2^4}{5^2}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{5^3}{2^6}\right)^3 : \left(\frac{5}{2^2}\right)^4 = \frac{5^9}{2^{18}}$
b) $\left(\frac{2^6}{3^3}\right)^{-3} : \left(\frac{3^2}{2^4}\right)^2 : \left(\frac{1}{3}\right)^{-2} = 2^{-12} \cdot 3^3$
c) $\left(\frac{7}{4}\right)^{-2} \cdot (-3)^2 : \left(\frac{1}{3}\right)^{-2} = \left(\frac{4}{7}\right)^2$

073 Simplifica.

a) $\dfrac{3^6 \cdot 2^8 \cdot 5^3}{9^3 \cdot 25^2 \cdot 4^4}$

b) $\dfrac{3^{-4} \cdot 16 \cdot 9^{-1}}{8^2 \cdot 3^{-5} \cdot 2^{-3}}$

c) $\dfrac{(-5)^3 \cdot (-8)^4 \cdot 9^{-2}}{(-3)^{-4} \cdot 2^7 \cdot 25^5}$

d) $\dfrac{32^{-1} \cdot 36^{-2} \cdot 18^{-2}}{8^{-5} \cdot 6^{-3} \cdot 9^4}$

a) $3^{6-6} \cdot 2^{8-8} \cdot 5^{3-4} = 5^{-1}$

b) $3^{-4+5-2} \cdot 2^{4-6+3} = 3^{-1} \cdot 2^1$

c) $-5^{3-10} \cdot 2^{12-7} \cdot 3^{-4-(-4)} = -5^{-7} \cdot 2^5$

d) $\dfrac{2^{-5} \cdot 2^{-4} \cdot 3^{-4} \cdot 2^{-2} \cdot 3^{-4}}{2^{-15} \cdot 2^{-3} \cdot 3^{-3} \cdot 3^{-8}} = 2^7 \cdot 3^3$

074 Realiza estas operaciones con potencias, efectuando primero las operaciones dentro del corchete. Comprueba que si lo haces al revés, el resultado no varía.

a) $[2^4 \cdot (-5)]^{-2}$

b) $[(-3) \cdot 8]^{-3}$

c) $[4 : (-2)^3]^{-4}$

d) $[(-10)^2 : (-5)]^{-5}$

e) $[10^3 : (-2)]^{-3}$

f) $[9^2 : (-3)^5]^{-1}$

g) $[25^{-1} \cdot 10^3]^{-2}$

h) $[36^{-2} \cdot 2^5]^{-4}$

a) $[-80]^{-2} = \dfrac{1}{80^2}$

b) $[-24]^{-3} = -\dfrac{1}{24^3}$

c) $[-2^{-1}]^{-4} = 2^4$

d) $[-20]^{-5} = -\dfrac{1}{20^5}$

e) $[-500]^{-3} = -\dfrac{1}{500^3}$

f) $[-3^{-1}]^{-1} = -3$

g) $[40]^{-2} = \dfrac{1}{40^2}$

h) $[9^{-2} \cdot 2]^{-4} = \dfrac{9^8}{2^4}$

075 HAZLO ASÍ

¿CÓMO SE EFECTÚAN OPERACIONES COMBINADAS CON POTENCIAS?

Efectúa esta operación.

$$\left(\frac{5}{2}-\frac{3}{4}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{-3}{5}\right)^{-1} - \left(\frac{17}{8}-2\right)^{-2}$$

PRIMERO. Se realizan las operaciones que están dentro de los paréntesis.

$$\left(\frac{5}{2}-\frac{3}{4}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{-3}{5}\right)^{-1} - \left(\frac{17}{8}-2\right)^{-2} = \left(\frac{7}{4}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{-3}{5}\right)^{-1} - \left(\frac{1}{8}\right)^{-2}$$

SEGUNDO. Se calculan las potencias.

$$\left(\frac{7}{4}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{-3}{5}\right)^{-1} - \left(\frac{1}{8}\right)^{-2} = \left(\frac{4}{7}\right)^{2} \cdot \left(\frac{-5}{3}\right)^{1} - 8^2 = \frac{16}{49} \cdot \left(\frac{-5}{3}\right) - 64$$

TERCERO. Se efectúan las operaciones, respetando la jerarquía.

$$\frac{16}{49} \cdot \left(\frac{-5}{3}\right) - 64 = \frac{-80}{147} - 64 = \frac{9.488}{147}$$

076 Realiza las siguientes operaciones.

a) $\left(\frac{3}{5}+\frac{1}{3}\right)^{-2}\cdot\left(\frac{-7}{2}\right)^{-1}+2:\left(\frac{5}{2}-\frac{1}{6}\right)^{-2}$

b) $\left(\frac{3}{2}-\frac{5}{4}\right)^{-2}-\left(\frac{1}{3}-1\right)^{-1}$

c) $\left(\frac{1}{5}-\frac{3}{10}\right)^{-1}:\left(1-\frac{2}{5}\right)-\left(\frac{-3}{2}\right)^{-2}$

a) $\left(\frac{14}{15}\right)^{-2}\cdot\left(\frac{-7}{2}\right)^{-1}+2:\left(\frac{7}{3}\right)^{-2}=\left(-\frac{3^2\cdot 5^2\cdot 2}{2^2\cdot 7^2\cdot 7}\right)+\left(\frac{2\cdot 7^2}{3^2}\right)=$

$=-\frac{3^2\cdot 5^2}{2\cdot 7^3}+\frac{2\cdot 7^2}{3^2}=\frac{-3^4\cdot 5^2+2^2\cdot 7^5}{2\cdot 7^3\cdot 3^2}=\frac{31.589}{6.174}$

b) $\left(\frac{1}{4}\right)^{-2}-\left(-\frac{2}{3}\right)^{-1}=8+\frac{3}{2}=\frac{19}{2}$

c) $\left(-\frac{1}{10}\right)^{-1}:\left(\frac{3}{5}\right)-\left(\frac{2^2}{3^2}\right)=-\frac{50}{3}-\frac{4}{9}=\frac{-154}{9}$

077 Indica qué igualdades son verdaderas, y escribe el resultado correcto en las falsas.

a) $\frac{a^3\cdot b^{-4}\cdot c^4}{a^{-3}\cdot b^4\cdot c^{-4}}=1$

b) $\frac{3^{-3}\cdot 2^{-4}\cdot 5^{-2}}{3^{-4}\cdot 2^{-5}\cdot 5^{-3}}=\frac{1}{3\cdot 2\cdot 5}$

a) Falsa $\rightarrow a^6\cdot b^{-8}\cdot c^8\neq 1$

b) Falsa $\rightarrow 3\cdot 2\cdot 5\neq\frac{1}{3\cdot 2\cdot 5}$

078 Expresa en notación científica las siguientes cantidades.

a) La velocidad de la luz en metros por segundo.
b) La duración de un año en segundos.
c) El radio de la Tierra en metros (6.370 km).
d) Tu altura en milímetros.
e) Tu peso en miligramos.
f) El tiempo transcurrido desde la desaparición de los dinosaurios (65 millones de años).
g) La longitud de un virus: 90 milimicras (1 milimicra es la milésima parte de 1 micra).

a) 300.000 km/s $=3\cdot 10^8$ m/s
b) $365\cdot 24\cdot 60\cdot 60=31.536.000$ s $=3{,}1536\cdot 10^7$ s
c) 6.370 km = 6.370.000 m $=6{,}37\cdot 10^6$ m

d) Respuesta abierta.
e) Respuesta abierta.
f) 65 millones de años = $6,5 \cdot 10^7$ años
g) 90 milimicras = 90 : 1.000 micras = $9 \cdot 10^{-2}$ micras = $9 \cdot 10^{-8}$ m

079 **Escribe en notación científica los siguientes números, e indica su orden de magnitud.**

a) 15.000.000.000
b) 0,00000051
c) 31.940.000
d) 0,0000000009
e) 4.598.000.000
f) 0,0967254
g) 329.000.000
h) 111.000

a) $1,5 \cdot 10^{10} \longrightarrow$ Orden de magnitud: 10
b) $5,1 \cdot 10^{-7} \longrightarrow$ Orden de magnitud: −7
c) $3,194 \cdot 10^{7} \longrightarrow$ Orden de magnitud: 7
d) $9 \cdot 10^{-10} \longrightarrow$ Orden de magnitud: −10
e) $4,598 \cdot 10^{9} \longrightarrow$ Orden de magnitud: 9
f) $9,67254 \cdot 10^{-2} \rightarrow$ Orden de magnitud: −2
g) $3,29 \cdot 10^{8} \longrightarrow$ Orden de magnitud: 8
h) $1,11 \cdot 10^{5} \longrightarrow$ Orden de magnitud: 5

080 **Desarrolla estos números escritos en notación científica.**

a) $4,8 \cdot 10^8$
b) $8,32 \cdot 10^{-11}$
c) $5,659 \cdot 10^{-6}$
d) $7,925 \cdot 10^9$
e) $6,23 \cdot 10^{-18}$
f) $3,5 \cdot 10^{-12}$
g) $2,478 \cdot 10^{15}$
h) $1,9385 \cdot 10^{-7}$

a) 480.000.000
b) 0,0000000000832
c) 0,000005659
d) 7.925.000.000
e) 0,00000000000000000623
f) 0,0000000000035
g) 2.478.000.000.000.000
h) 0,00000019385

081 **Indica cuáles de los siguientes números están escritos en notación científica.**

a) $54 \cdot 10^{12}$
b) $0,75 \cdot 10^{-11}$
c) 243.000.000
d) 0,00001
e) $7,2 \cdot 10^{-2}$
f) $0,5 \cdot 10^{14}$
g) $0,01 \cdot 10^{-30}$
h) $18,32 \cdot 10^4$

Solo está escrito en notación científica el número del apartado e) $7,2 \cdot 10^{-2}$.

082 Efectúa las operaciones.

a) $1,32 \cdot 10^4 + 2,57 \cdot 10^4$
b) $8,75 \cdot 10^2 + 9,46 \cdot 10^3$
c) $3,62 \cdot 10^4 + 5,85 \cdot 10^{-3}$
d) $2,3 \cdot 10^2 + 3,5 \cdot 10^{-1} + 4,75 \cdot 10^{-2}$
e) $3,46 \cdot 10^{-2} + 5,9 \cdot 10^4 + 3,83 \cdot 10^2$

a) $3,89 \cdot 10^4$
b) $1,0335 \cdot 10^4$
c) $3,620000585 \cdot 10^4$
d) $2,303975 \cdot 10^2$
e) $5,93830346 \cdot 10^4$

083 Opera y expresa en notación científica, y comprueba los resultados con la calculadora.

a) $1,2 \cdot 10^4 + 3,15 \cdot 10^3$
b) $2 \cdot 10^{-3} + 6 \cdot 10^{-5}$
c) $3,5 \cdot 10^{-4} - 7 \cdot 10^{-2}$
d) $9 \cdot 10^7 + 8,6 \cdot 10^4$
e) $(8 \cdot 10^6) \cdot (9 \cdot 10^5)$
f) $(4,6 \cdot 10^{-5}) \cdot (5 \cdot 10^{-7})$
g) $(9 \cdot 10^{-6}) : (3 \cdot 10^{-7})$
h) $(1,8 \cdot 10^9) : (6 \cdot 10^3)$
i) $(0,9 \cdot 10^8)^2$
j) $(2,4 \cdot 10^6)^2 : (1,2 \cdot 10^6)$

a) $1,2 \cdot 10^4 + 3,15 \cdot 10^3 = 1,2 \cdot 10^4 + 0,315 \cdot 10^4 = (1,2 + 0,315) \cdot 10^4 = 1,515 \cdot 10^4$
b) $2 \cdot 10^{-3} + 6 \cdot 10^{-5} = 2 \cdot 10^{-3} + 0,06 \cdot 10^{-3} = (2 + 0,06) \cdot 10^{-3} = 2,06 \cdot 10^{-3}$
c) $3,5 \cdot 10^{-4} - 7 \cdot 10^{-2} = 0,035 \cdot 10^{-2} - 7 \cdot 10^{-2} = (0,035 - 7) \cdot 10^{-2} = -6,965 \cdot 10^{-2}$
d) $9 \cdot 10^7 + 8,6 \cdot 10^4 = 9 \cdot 10^7 + 0,0086 \cdot 10^7 = (9 + 0,0086) \cdot 10^7 = 9,0086 \cdot 10^7$
e) $(8 \cdot 10^6) \cdot (9 \cdot 10^5) = (8 \cdot 9) \cdot (10^6 \cdot 10^5) = 72 \cdot 10^{11} = 7,2 \cdot 10^{12}$
f) $(4,6 \cdot 10^{-5}) \cdot (5 \cdot 10^{-7}) = (4,6 \cdot 5) \cdot (10^{-5} \cdot 10^{-7}) = 23 \cdot 10^{-12} = 2,3 \cdot 10^{-11}$
g) $(9 \cdot 10^{-6}) : (3 \cdot 10^{-7}) = (9 : 3) \cdot (10^{-6} : 10^{-7}) = 3 \cdot 10^1 = 3 \cdot 10$
h) $(1,8 \cdot 10^9) : (6 \cdot 10^3) = (1,8 : 6) \cdot (10^9 : 10^3) = 0,3 \cdot 10^6 = 3 \cdot 10^5$
i) $(0,9 \cdot 10^8)^2 = 0,9^2 \cdot 10^{16} = 0,81 \cdot 10^{16} = 8,1 \cdot 10^{15}$
j) $(2,4 \cdot 10^6)^2 : (1,2 \cdot 10^6) = ((2,4)^2 : 1,2) \cdot (10^{12} : 10^6) = 5,76 \cdot 10^6$

084 Completa los huecos para que sea cierta la igualdad.

a) $4 \cdot 10^{\square} + 2 \cdot 10^5 = 6 \cdot 10^5$
b) $9 \cdot 10^4 - 6 \cdot 10^2 = \square \cdot 10^4$
c) $(5 \cdot 10^3) \cdot (\square \cdot 10^5) = 2 \cdot 10^9$
d) $(8 \cdot 10^9) : (2 \cdot 10^{\square}) = 4 \cdot 10^6$

a) $4 \cdot 10^5 + 2 \cdot 10^5 = 6 \cdot 10^5$
b) $9 \cdot 10^4 - 6 \cdot 10^2 = 8,94 \cdot 10^4$
c) $(5 \cdot 10^3) \cdot (4 \cdot 10^5) = 2 \cdot 10^9$
d) $(8 \cdot 10^9) : (2 \cdot 10^3) = 4 \cdot 10^6$

085 Calcula.

a) $9{,}5 \cdot 10^4 - 3{,}72 \cdot 10^4$
b) $8{,}6 \cdot 10^3 - 5{,}45 \cdot 10^2$
c) $7{,}9 \cdot 10^{-4} - 1{,}3 \cdot 10^{-6}$
d) $4{,}6 \cdot 10^6 + 5{,}3 \cdot 10^4 - 3{,}9 \cdot 10^2$
e) $5 \cdot 10^2 - 3 \cdot 10^{-1} + 7 \cdot 10^{-2}$

a) $5{,}78 \cdot 10^4$
b) $8{,}055 \cdot 10^3$
c) $7{,}887 \cdot 10^{-4}$
d) $4{,}65261 \cdot 10^6$
e) $4{,}9977 \cdot 10^2$

086 Haz las operaciones.

a) $7{,}3 \cdot 10^4 \cdot 5{,}25 \cdot 10^{-3}$
b) $8{,}91 \cdot 10^{-5} \cdot 5{,}7 \cdot 10^{14}$
c) $8{,}3 \cdot 10^6 : 5{,}37 \cdot 10^2$
d) $9{,}5 \cdot 10^{-6} : 3{,}2 \cdot 10^3$

a) $3{,}8325 \cdot 10^2$
b) $5{,}0787 \cdot 10^{10}$
c) $1{,}5456 \cdot 10^4$
d) $2{,}9688 \cdot 10^{-9}$

087 Simplifica.

a) $\dfrac{6{,}147 \cdot 10^{-2} \cdot 4{,}6 \cdot 10^3}{7{,}9 \cdot 10^8 \cdot 6{,}57 \cdot 10^{-5}}$

b) $\dfrac{3{,}92 \cdot 10^4 \cdot 5{,}86 \cdot 10^{-6}}{7 \cdot 10^{-8} \cdot 9{,}2 \cdot 10^{13}}$

a) $5{,}448 \cdot 10^{-3}$
b) $5{,}567 \cdot 10^{-8}$

088 **La masa de Plutón es $6{,}6 \cdot 10^{-9}$ veces la masa del Sol, y esta, a su vez, es $3{,}3 \cdot 10^6$ veces la masa de la Tierra. Si la masa de la Tierra es $6 \cdot 10^{24}$ kg, halla la masa de Plutón y del Sol.**

Masa del Sol $= (3{,}3 \cdot 10^6) \cdot (6 \cdot 10^{24}) = (3{,}3 \cdot 6) \cdot (10^6 \cdot 10^{24}) =$
$= 19{,}8 \cdot 10^{30}$ kg $= 1{,}98 \cdot 10^{31}$ kg

Masa de Plutón $= (6{,}6 \cdot 10^{-9}) \cdot (1{,}98 \cdot 10^{31}) = 13{,}068 \cdot 10^{22}$ kg $=$
$= 1{,}3068 \cdot 10^{23}$ kg

089 **Un año luz es $9{,}46 \cdot 10^{12}$ km, aproximadamente. Expresa en kilómetros el radio del universo si se estima que su valor es de 15.000 millones de años luz.**

$(15.000 \cdot 10^6) \cdot (9{,}46 \cdot 10^{12}) = (1{,}5 \cdot 9{,}46) \cdot (10^{10} \cdot 10^{12}) = 14{,}19 \cdot 10^{22} =$
$= 1{,}419 \cdot 10^{23}$ km

090 ●●

Un embalse que abastece a una población tiene 12 hm³ de agua. Si, por término medio, una persona gasta 400 litros de agua diarios, ¿a qué población podrá abastecer durante un año?

$12 \text{ hm}^3 = 12 \cdot 10^6 \text{ m}^3 = 12 \cdot 10^9 \, \ell = 1{,}2 \cdot 10^{10} \, \ell$

Cada persona necesita: $400 \cdot 365 = 146.000 \, \ell = 1{,}46 \cdot 10^5 \, \ell$

$(1{,}2 \cdot 10^{10}) : (1{,}46 \cdot 10^5) = (1{,}2 : 1{,}46) \cdot (10^{10} : 10^5) = 0{,}82 \cdot 10^5 =$
$= 8{,}2 \cdot 10^4$

Luego podrá abastecer a unas 82.000 personas, aproximadamente.

091 ●●

La distancia media de la Tierra al Sol es de 150.000.000 km. Una nave que parta de la Tierra a una velocidad constante de 10.000 km/h, ¿cuánto tardará en llegar al Sol? Elige una unidad de medida apropiada para responder.

$$e = v \cdot t \rightarrow t = \frac{e}{v} \rightarrow t = \frac{1{,}5 \cdot 10^8}{10^8} = 1{,}5 \cdot 10^4 = 15.000 \text{ h} =$$
$$= 625 \text{ días} = 1 \text{ año, 8 meses y 20 días}$$

092 ●●

En un laboratorio se ha observado que la población de ciertas bacterias se duplica cada hora. Si el número inicial era de $8 \cdot 10^{12}$ bacterias:

a) ¿Cuántas bacterias habrá a las tres horas?

b) ¿Y a las seis horas?

c) ¿Cuántas horas tendrán que pasar para que sean $1{,}024 \cdot 10^{15}$ bacterias?

a) En tres horas $\rightarrow 2 \cdot (2 \cdot (2 \cdot (8 \cdot 10^{12}))) = 2^3 \cdot 8 \cdot 10^{12} = 6{,}4 \cdot 10^{13}$ bacterias

b) En seis horas $\rightarrow 2^6 \cdot (8 \cdot 10^{12}) = 512 \cdot 10^{12} = 5{,}12 \cdot 10^{14}$ bacterias

c) En x horas $\rightarrow 2^x \cdot (8 \cdot 10^{12})$

$2^x \cdot (8 \cdot 10^{12}) = 1{,}024 \cdot 10^{15} \rightarrow (1{,}024 \cdot 10^{15}) : (8 \cdot 10^{12}) = 2^x$

$(1{,}024 \cdot 10^{15}) : (8 \cdot 10^{12}) = (1{,}024 : 8) \cdot (10^{15} : 10^{12}) = 0{,}128 \cdot 10^3 = 128$

$2^7 = 128 \rightarrow$ Tendrán que pasar siete horas.

093 **Una unidad utilizada para medir cantidades muy pequeñas es el picogramo, que equivale a la billonésima parte de 1 gramo. Los valores normales de vitamina B_{12} en la sangre están entre 100 y 650 picogramos por mililitro en la mujer, y entre 200 y 800 en el varón. Si la cantidad de sangre de una persona es de 5 litros, y su concentración de vitamina B_{12} es la normal, ¿entre qué valores oscila la cantidad de vitamina B_{12} en su sangre?**

$5\,\ell = 5 \cdot 10^3$ ml

En las mujeres:

$100 \cdot 5 \cdot 10^3 = 5 \cdot 10^5$ picogramos $= 5 \cdot 10^5 \cdot 10^{-12}$ g $= 5 \cdot 10^{-7}$ g

$650 \cdot 5 \cdot 10^3 = 3.250 \cdot 10^3 = 3{,}25 \cdot 10^6$ picogramos $=$
$= 3{,}25 \cdot 10^6 \cdot 10^{-12}$ g $= 3{,}25 \cdot 10^{-6}$ g

El nivel de vitamina B_{12} en las mujeres oscila entre $5 \cdot 10^{-7}$ g y $3{,}25 \cdot 10^{-6}$ g.

En los varones:

$200 \cdot 5 \cdot 10^3 = 10^6$ picogramos $= 10^6 \cdot 10^{-12}$ g $= 10^{-6}$ g
$800 \cdot 5 \cdot 10^3 = 4 \cdot 10^6$ picogramos $= 4 \cdot 10^6 \cdot 10^{-12}$ g $= 4 \cdot 10^{-6}$ g

El nivel de vitamina B_{12} en los varones oscila entre 10^{-6} g y $4 \cdot 10^{-6}$ g.

094 **Un glóbulo rojo tiene forma de cilindro, con un radio de unas 3,5 millonésimas de metro y una altura de 2 millonésimas de metro.**

a) ¿Cuál es su volumen ($V_{\text{cilindro}} = \pi r^2 h$)?

b) Si la cantidad de glóbulos rojos en la sangre es aproximadamente de 5 millones por milímetro cúbico, ¿qué fracción del volumen total de sangre suponen los glóbulos rojos?

c) Se apilan todos los glóbulos rojos de un litro de sangre. ¿Qué altura se alcanza?

a) Radio $=$ 3,5 millonésimas de metro $= 3{,}5 \cdot 10^{-6}$ m

Altura $=$ 2 millonésimas de metro $= 2 \cdot 10^{-6}$ m

$V = \pi\, r^2\, h = \pi \cdot (3{,}5 \cdot 10^{-6})^2 \cdot (2 \cdot 10^{-6}) =$
$= \pi \cdot (3{,}5^2 \cdot 2) \cdot (10^{-12} \cdot 10^{-6}) = 76{,}97 \cdot 10^{-18}\ \text{m}^3 = 7{,}697 \cdot 10^{-17}\ \text{m}^3 =$
$= 7{,}697 \cdot 10^{-17} \cdot 10^9\ \text{mm}^3 = 7{,}697 \cdot 10^{-8}\ \text{mm}^3$

b) El volumen total de los glóbulos rojos en la sangre es:

$(5 \cdot 10^6) \cdot (7{,}697 \cdot 10^{-8}) = 38{,}485 \cdot 10^{-2} = 0{,}38485\ \text{mm}^3$

Los glóbulos rojos suponen el 38,5 % del volumen de la sangre.

c) El número de glóbulos rojos en un litro de sangre es:

$5 \cdot 10^6 \cdot 10^6 = 5 \cdot 10^{12}$

Como cada glóbulo rojo tiene una altura de $2 \cdot 10^{-6}$ m, la altura total es:

$(2 \cdot 10^{-6}) \cdot (5 \cdot 10^{12}) = 10 \cdot 10^6 = 10^7$ m

Se alcanza una altura de 10.000.000 m $=$ 10.000 km.

095 ●●● **Anota cuántas pulsaciones tienes por minuto. Después, responde a las siguientes cuestiones, utilizando números en notación científica.**

a) ¿Cuántas veces late tu corazón en un día?

b) ¿Y en un año?

c) Si suponemos que la esperanza de vida está en 85 años, ¿cuántas veces latirá tu corazón en ese tiempo?

Supongamos que son 82 pulsaciones/minuto $= 8{,}2 \cdot 10$ pulsaciones/minuto

a) En un día $\rightarrow (8{,}2 \cdot 10) \cdot 24 \cdot 60 = 1{,}1808 \cdot 10^5$ latidos

b) En un año $\rightarrow 365 \cdot (1{,}1808 \cdot 10^5) = 430{,}992 \cdot 10^5 = 4{,}30992 \cdot 10^7$ latidos

c) En 85 años $\rightarrow 85 \cdot (4{,}30992 \cdot 10^7) = 366{,}3432 \cdot 10^7 = 3{,}663432 \cdot 10^9$ latidos

096 ●● **Un escritor escribe una novela en cuatro meses. El primer mes escribe $\frac{2}{5}$ del total, el segundo $\frac{1}{6}$ y el tercero $\frac{2}{15}$, quedándole 54 páginas para el cuarto mes. ¿Cuántas páginas tiene la novela?**

La fracción de novela que ha escrito es:

$$\frac{2}{5} + \frac{1}{6} + \frac{2}{15} = \frac{12}{30} + \frac{5}{30} + \frac{4}{30} = \frac{21}{30} = \frac{7}{30}$$

La fracción de novela que le queda por escribir es: $1 - \frac{7}{10} = \frac{3}{10}$

Si $\frac{3}{10}$ del total $= 54$ páginas:

$$\frac{3}{10} \cdot T = 54 \rightarrow T = \frac{54 \cdot 10}{3} = 180 \text{ páginas}$$

La novela tiene 180 páginas en total.

097 ●●● **Una comunidad de vecinos obtiene $\frac{2}{7}$ de su consumo energético de placas solares. El resto lo pagan a partes iguales. Si son 20 vecinos y cada uno paga al mes 20,50 €:**

a) Halla el valor, en euros, del consumo energético de la comunidad.

b) ¿Qué fracción del ahorro le corresponde a cada vecino?

c) ¿Cuántos euros se ahorra cada vecino al mes?

a) $\frac{2}{7}$ en placas solares $\rightarrow 1 - \frac{2}{7} = \frac{5}{7}$ del consumo se paga a partes iguales.

Si $20 \cdot 20{,}5 = 410$ € $\rightarrow \frac{5}{7}$ del consumo $= 410$ €

$$\frac{5}{7} \cdot C = 410 \rightarrow C = \frac{410 \cdot 7}{5} = 574 \text{ €}$$

El consumo energético de la comunidad es 574 € cada mes.

b) Se ahorran $\frac{2}{7}$ del consumo y son 20 vecinos.

$$\frac{2}{7} : 20 = \frac{2}{140} = \frac{1}{70}$$

c) $\frac{1}{70} \cdot 574 = 8{,}20$ €

Cada vecino se ahorra 8,20 € al mes.

098 **Si $\frac{a}{b}$ es irreducible, razona si $\frac{a+b}{a \cdot b}$ y $\frac{a-b}{a \cdot b}$ también lo son.**
Compruébalo con números y, después, intenta extraer una regla general.

Supongamos que $\frac{a+b}{a \cdot b}$ es reducible:

$$\frac{a+b}{a \cdot b} = \frac{y}{x}, \text{ con } x < a \cdot b$$

$$(a+b) \cdot x = a \cdot b \cdot y \xrightarrow{:a} x + \frac{b}{a} \cdot x = b \cdot y$$

Como a, b, x e y son números enteros y $\frac{a}{b}$ es irreducible:

$$x = a \cdot z \rightarrow \frac{a+b}{a \cdot b} = \frac{y}{a \cdot z}, \text{ con } z < b$$

$$x + \frac{b}{a} \cdot x = b \cdot y \xrightarrow{x = a \cdot z} a \cdot z + b \cdot z = b \cdot y$$

$$\rightarrow a \cdot z = b \cdot (y - z) \rightarrow \frac{a}{b} = \frac{y-z}{z}, \text{ con } z < b$$

Esto no es posible por ser $\frac{a}{b}$ irreducible.

Por tanto, $\frac{a+b}{a \cdot b}$ es irreducible.

De manera similar se prueba que $\frac{a-b}{a \cdot b}$ es también irreducible.

099 Comprueba las siguientes igualdades.

a) $2{,}\widehat{3} = 2{,}3\widehat{3}$ **b)** $0{,}\widehat{325} = 0{,}32\widehat{532}$

¿Por qué opinas que se produce este resultado? ¿Crees que es correcto?

$$\left.\begin{array}{l} \text{a) } 2{,}\widehat{3} = \dfrac{21}{9} = \dfrac{7}{3} \\[2ex] \quad 2{,}3\widehat{3} = \dfrac{210}{90} = \dfrac{7}{3} \end{array}\right\} \rightarrow \text{Son iguales.}$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{b) } 0{,}\widehat{325} = \dfrac{325}{999} \\[2ex] \quad 0{,}32\widehat{532} = \dfrac{32.500}{99.900} = \dfrac{325}{999} \end{array}\right\} \rightarrow \text{Son iguales.}$$

Son iguales porque el anteperíodo puede integrarse en el período.

100 Expresa en notación científica.

a) 2^{-30} **b)** 5^{-10} **c)** 3^{-20} **d)** 7^{-15}

a) $2^{-30} = 0{,}000000000931322574615478515625 =$
$= 9{,}31322574615478515625 \cdot 10^{-10}$

b) $5^{-10} = 0{,}0000001024 = 1{,}024 \cdot 10^{-7}$

c) $3^{-20} = 2{,}86797199079244131332225723124\,08 \cdot 10^{-10}$

d) $7^{-15} = 2{,}10634448422766441115598665965\,17 \cdot 10^{-13}$

EN LA VIDA COTIDIANA

101 Para motivar a los alumnos de un centro escolar sobre el excesivo consumo que se hace del agua, los profesores han organizado una visita al embalse de su región.

Los alumnos miran sorprendidos el panel con los datos del embalse.

a) Justifica si el guía ha hecho bien los cálculos.
b) Al final de la visita, el profesor decide entregarles este folleto.

¿Cuántos metros medirá el lado de un cubo con esta capacidad?

a) Si el cubo tiene 210 m de arista, su capacidad es de 210^3 m^3 = 9.261.000 m^3 = 9,261 hm^3.
Por tanto, el guía no ha realizado bien el cálculo de la arista.

b) 1.452.000 litros = 1.452.000 dm^3 = 1.452 m^3

La arista del cubo mide $\sqrt[3]{1.452} = 11{,}324$ m.

102 ●●● **Los alumnos de 4.º ESO han visitado un observatorio astronómico.**

Johannes Kepler publicó en 1619 su libro *La armonía del Universo*, en el que exponía su descubrimiento, que hoy denominamos la tercera ley de Kepler.

El guía les da una tabla con datos sobre los seis planetas conocidos en la época de Kepler.

Planeta	a (millones de km)	T (días)	$\frac{T^2}{a^3}$
Mercurio	57,9	87,969	0,04
Venus	108,21	224,701	0,04
Tierra	149,6	365,256	0,04
Marte	227,9	686,980	0,04
Júpiter	778,34	4.332,59	0,04
Saturno	1.427	10.759,2	0,04

Les cuenta que en 1781 se descubrió Urano, con un período de 84,01 años; y en 1846, Neptuno, con 164,79 años de período.

Completa la tabla. Escribe el período (en días) y calcula la distancia de Urano y Neptuno al Sol.

Teniendo en cuenta que la ley de Kepler indica que $\frac{T^2}{a^3} = 0{,}04$:

URANO

Período: 30.664 días

Distancia al Sol:

$$a = \sqrt[3]{\frac{T^2}{0{,}04}} = \sqrt[3]{\frac{30.664^2}{0{,}04}} = 2.864{,}61 \text{ millones de kilómetros}$$

NEPTUNO

Período: 60.148 días

Distancia al Sol:

$$a = \sqrt[3]{\frac{T^2}{0{,}04}} = \sqrt[3]{\frac{60.148^2}{0{,}04}} = 4.488{,}77 \text{ millones de kilómetros}$$

3 Números reales

- **NÚMEROS REALES**
  - NÚMEROS RACIONALES
  - RELACIÓN DE ORDEN
  - NÚMEROS IRRACIONALES

- **RADICALES**

- **APROXIMACIONES**
  - TRUNCAMIENTO
  - REDONDEO
  - POR EXCESO

- **ERRORES EN LA APROXIMACIÓN**

Mi desconocido amigo

La misiva parecía urgente y el general Pernety, al que le unía una profunda amistad con Sophie Germain, dejó a un lado sus despachos y ordenó a su ayudante que hiciera pasar a su amiga. Tras tomar ambos asiento, el general comenzó a hablar:

–Ahora, Sophie, cuéntame qué es eso tan importante.

La agitación volvió a la mujer que, con voz nerviosa, comenzó a hablar de manera atropellada:

–¡No permitas que le pase lo mismo que a Arquímedes! La guerra no respeta nadie y él no ha hecho ningún mal; su pérdida sería irreparable.

–¿De qué hablas? –la interrumpió el general–. No entiendo nada.

–¡La guerra con Prusia! El ejército imperial invadirá la ciudad de Brunswick y allí vive un sabio que nada sabe de guerras, se llama Gauss. ¡Protégelo cuando tus tropas entren en la ciudad!

–Tranquila, me encargaré de que ningún mal le suceda a tu amigo.

Tiempo después, tras la campaña, de vuelta en París el general Pernety volvió a reunirse con Sophie:

–Estarás contenta, cumplí tu encargo; sin embargo, hubo algo muy extraño, pues cuando le dije quién era su benefactora, él aseguró no conocerte. ¡Los matemáticos son muy raros!

Sophie sonrió, le dio las gracias y le explicó que solo conocía a Gauss por correspondencia y que ella firmaba sus cartas con otro nombre: Le Blanc.

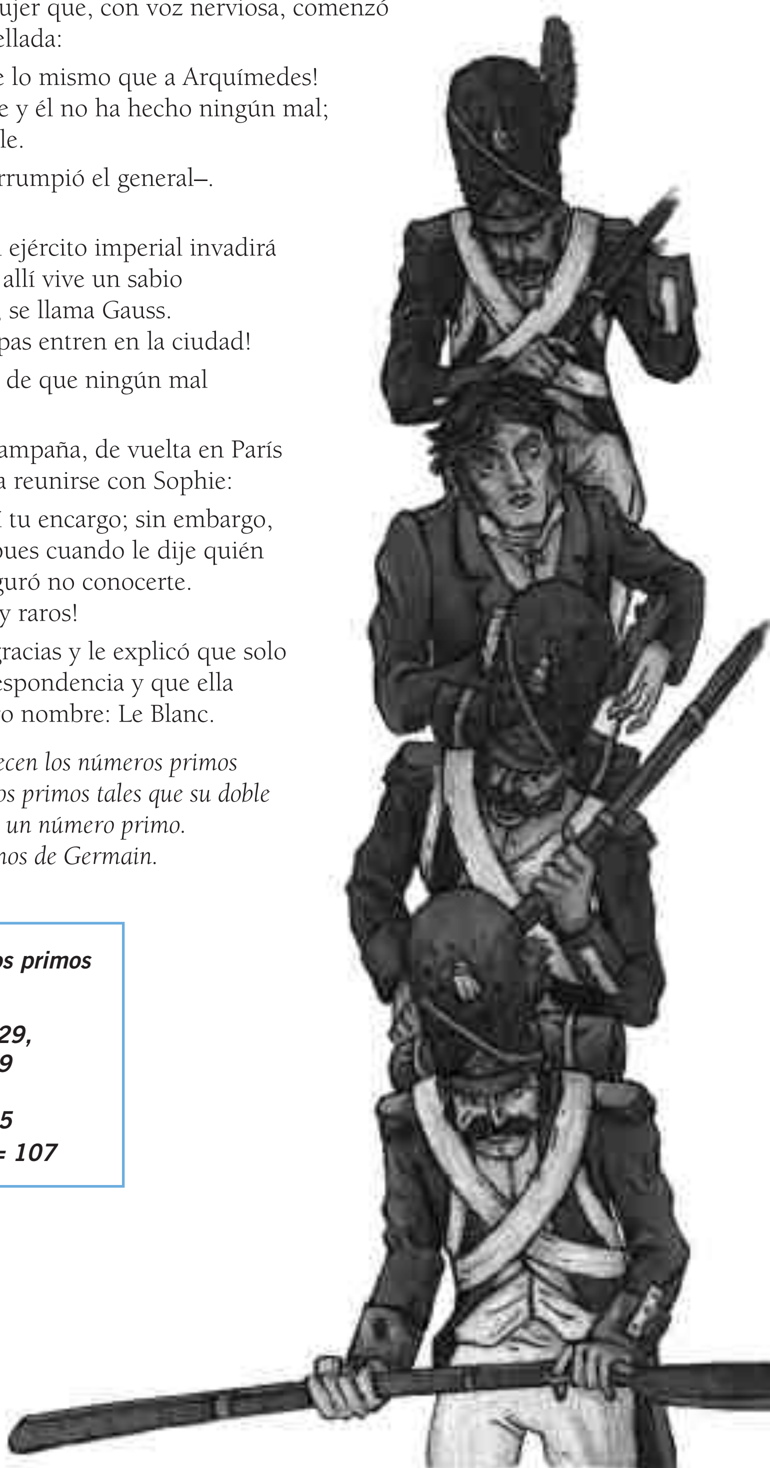
En una de esas cartas aparecen los números primos de Germain, son los números primos tales que su doble más una unidad también es un número primo. Encuentra 10 números primos de Germain.

Los primeros 10 números primos de Germain son:

2, 3, 5, 11, 23, 29, 41, 53, 83 y 89

$2 \longrightarrow 2 \cdot 2 + 1 = 5$

$53 \rightarrow 53 \cdot 2 + 1 = 107$



Números reales

EJERCICIOS

001 Considera las raíces cuadradas de los números naturales desde 1 hasta 20, indica cuáles de ellas son números racionales y cuáles son números irracionales.

Son racionales: $\sqrt{1}=1$, $\sqrt{4}=2$, $\sqrt{9}=3$ y $\sqrt{16}=4$.
El resto son números irracionales, porque no son cuadrados perfectos.

002 Escribe cuatro números irracionales, explicando por qué lo son.

$\sqrt{3}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{5}$ y $\sqrt{17}$ son irracionales, porque no son cuadrados perfectos.

003 Indica de qué tipo son los números.

a) 1,232323... b) –0,246810 c) $\sqrt{13}$

a) Racional, periódico puro.
b) Racional, decimal exacto.
c) Irracional.

004 Razona si estas afirmaciones son ciertas.

a) La suma de dos números irracionales es siempre un número irracional.
b) La raíz cuadrada de una fracción es un número irracional.

a) Es falso, por ejemplo:

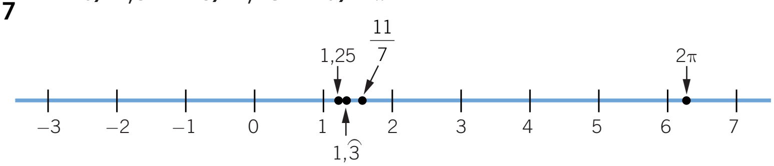
$$3+\sqrt{2} \text{ y } 5-\sqrt{2}$$
$$3+\sqrt{2}+5-\sqrt{2}=8$$

b) Es falso, cuando el numerador y el denominador son cuadrados perfectos.

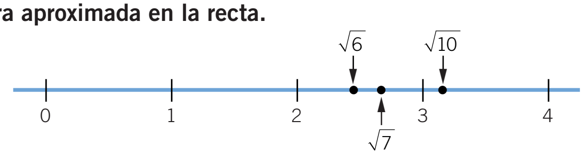
$$\sqrt{\frac{4}{9}}=\frac{2}{3}$$

005 Representa los siguientes números reales.

a) $\frac{11}{7}$ b) $1,\widehat{3}$ c) 1,25 d) 2π



006 Halla con la calculadora los números $\sqrt{6}$, $\sqrt{7}$ y $\sqrt{10}$, y represéntalos de manera aproximada en la recta.



007 **Observa esta recta real y escribe.**

a) Dos números enteros entre *A* y *C*.
b) Tres números racionales no enteros entre *B* y *C*.
c) Tres números irracionales entre *C* y *D*.

a) 0 y −1 b) $-0{,}3;\ \frac{3}{4}$ y $0{,}\widehat{1}$ c) $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ y $\sqrt{5}$

008 **Saca factor común, opera y simplifica la expresión resultante.**

a) $\frac{17}{2}\cdot\left(-\frac{2}{11}\right)+\frac{4}{7}\cdot\left(-\frac{2}{11}\right)$

b) $\frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)+\frac{1}{3}\cdot\frac{7}{5}-\frac{4}{7}\cdot\frac{1}{3}$

c) $\frac{3}{4}\cdot 205+\frac{1}{4}\cdot 325+\frac{5}{4}\cdot 190$

a) $\frac{17}{2}\cdot\left(-\frac{2}{11}\right)+\frac{4}{7}\cdot\left(-\frac{2}{11}\right)=\left(\frac{17}{2}+\frac{4}{7}\right)\cdot\left(-\frac{2}{11}\right)=\frac{127}{14}\cdot\left(-\frac{2}{11}\right)=\frac{-127}{77}$

b) $\frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)+\frac{1}{3}\cdot\frac{7}{5}-\frac{4}{7}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{3}{4}+\frac{7}{5}-\frac{4}{7}\right)=\frac{1}{3}\cdot\frac{11}{140}=\frac{11}{420}$

c) $\frac{3}{4}\cdot 205+\frac{1}{4}\cdot 325+\frac{5}{4}\cdot 190=\frac{1}{4}\cdot(615+325+950)=\frac{1.890}{4}=\frac{945}{2}$

009 **Calcula el opuesto y el inverso de los siguientes números reales.**

a) 1 **c)** 0,3 **e)** $\sqrt{5}$

b) $\frac{3}{5}$ **d)** $\frac{13}{8}$ **f)** $\frac{\pi}{2}$

a) Opuesto: −1 Inverso: 1

b) Opuesto: $-\frac{3}{5}$ Inverso: $\frac{5}{3}$

c) Opuesto: −0,3 Inverso: $\frac{10}{3}=3{,}\widehat{3}$

d) Opuesto: $-\frac{13}{8}$ Inverso: $\frac{8}{13}$

e) Opuesto: $-\sqrt{5}$ Inverso: $\frac{\sqrt{5}}{5}$

f) Opuesto: $-\frac{\pi}{2}$ Inverso: $\frac{2}{\pi}$

010 **Calcula el inverso de $0{,}4\widehat{07}$.**

$0{,}4\widehat{07}=\frac{403}{990}\rightarrow\frac{1}{0{,}4\widehat{07}}=\frac{990}{403}$

011 **Expresa mediante intervalos el conjunto de números reales que verifican que:**

a) Son menores que $\frac{3}{4}$.

b) Son menores o iguales que $-\frac{2}{5}$.

c) Son mayores que 0.

d) Son mayores o iguales que $-\frac{2}{5}$.

a) $\left(-\infty, \frac{3}{4}\right)$ b) $\left(-\infty, -\frac{2}{5}\right]$ c) $(0, +\infty)$ d) $\left[-\frac{2}{5}, +\infty\right)$

012 **Representa sobre la recta real y usando la notación matemática.**

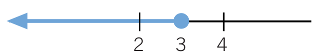
a) $\{x \in \mathbb{R},\ x \leq 3\}$

b) $\{x \in \mathbb{R},\ x > 1\}$

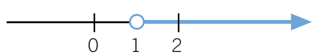
c) $\{x \in \mathbb{R},\ 4 \leq x < 7\}$

d) $\{x \in \mathbb{R},\ 6 < x < 9\}$

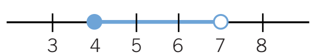
a) $(-\infty, 3]$



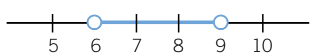
b) $(1, +\infty)$



c) $[4, 7)$



d) $(6, 9)$



013 **Expresa como intervalo estos conjuntos numéricos.**

a) $|x| < 3$ **b) $|x| < -3$** **c) $|x| \geq -3$**

a) $(-3, 3)$ b) No tiene solución. c) $(-\infty, +\infty)$

014 **Halla las aproximaciones de 5,24619 a las centésimas y las milésimas, por defecto y por exceso. Decide cuál de ellas es el redondeo.**

	Centésimas	Milésimas
Defecto	5,24	5,246 (redondeo)
Exceso	5,25 (redondeo)	5,247

015 **Aproxima a las centésimas por truncamiento y por redondeo.**

a) 24,1587 **b) 24,1507** **c) 24,9215** **d) 24,1582** **e) 24,1617** **f) 24,1627**

		Redondeo	Truncamiento
a)	24,1587	24,16	24,15
b)	24,1507	24,15	24,15
c)	24,9215	24,92	24,92
d)	24,1582	24,16	24,15
e)	24,1617	24,16	24,16
f)	24,1627	24,16	24,16

016 **Una profesora decide redondear las notas de 10 alumnos. ¿Qué notas les pondrá?**

3,8 6,4 9,7 4,3 5,8 8,4 9,7 2,3 3,8 6,4

Les pondrá estas notas: 4, 6, 10, 4, 6, 8, 10, 2, 4 y 6.

017 **Calcula la diagonal de un rectángulo cuyos lados miden 8 cm y 10 cm. ¿Qué clase de número se obtiene? Redondea el resultado a las milésimas.**

Es un número irracional: $d = \sqrt{8^2 + 10^2} = \sqrt{164} \simeq 12{,}806$

018 **Obtén el error absoluto y relativo cometido:**

a) Al redondear 3,125 a las milésimas.

b) Al truncar $1{,}\widehat{65}$ a las diezmilésimas.

c) Al redondear $\sqrt{13}$ a las centésimas.

d) Al truncar $\frac{2}{3}$ a las décimas.

e) Al aproximar por defecto 1,3476 a las milésimas.

a) $E_a = |3{,}125 - 3{,}125| = 0$

$$E_r = \left|\frac{3{,}125 - 3{,}125}{3{,}125}\right| = 0 \rightarrow 0\,\%$$

b) $E_a = |1{,}\widehat{65} - 1{,}6565| = 0{,}0000\widehat{65}$

$$E_r = \left|\frac{1{,}\widehat{65} - 1{,}6565}{1{,}\widehat{65}}\right| = 0{,}000039633 \rightarrow 0{,}0039\,\%$$

c) $E_a = |\sqrt{13} - 3{,}61| = 0{,}0044487$

$$E_r = \left|\frac{\sqrt{13} - 3{,}61}{\sqrt{13}}\right| = 0{,}00123385\ldots \rightarrow 0{,}12\,\%$$

d) $E_a = \left|\frac{2}{3} - 0{,}66\right| = 0{,}00\widehat{6}$

$$E_r = \left|\frac{\frac{2}{3} - 0{,}66}{\frac{2}{3}}\right| = 0{,}00\widehat{9} \rightarrow 0{,}99\,\%$$

e) $E_a = |1{,}3476 - 1{,}347| = 0{,}0006$

$$E_r = \left|\frac{1{,}3476 - 1{,}347}{1{,}3476}\right| = 0{,}000445235975 \rightarrow 0{,}044\,\%$$

019 **La cantidad de antibiótico en una cápsula es de 1,5 g $\pm$ 0,2 %.**

a) ¿Qué significa esta afirmación?

b) ¿Entre qué valores oscila la cantidad de antibiótico en cada cápsula?

a) Significa que una cápsula contiene 1,5 gramos, con un error relativo del 0,2 %.

b) 0,2 % de 1,5 $= \frac{0,2 \cdot 1,5}{100} = \frac{0,3}{100} = 0,003$

La cantidad oscila entre: $(1,5 - 0,003; 1,5 + 0,003) = (1,497; 1,503)$

020 **Escribe dos aproximaciones de 1,45 que tengan el mismo error relativo.**

Por ejemplo, las aproximaciones 1,5 y 1,4.

021 **Transforma las potencias en raíces.**

a) $16^3 = 4.096$

b) $4^3 = 64$

c) $(-2)^5 = -32$

d) $(-2)^8 = 256$

a) $16 = \sqrt[3]{4.096}$

b) $4 = \sqrt[3]{64}$

c) $-2 = \sqrt[5]{-32}$

d) $-2 = \sqrt[8]{256}$

022 **Calcula el valor numérico, si existe, de los siguientes radicales.**

a) $\sqrt[4]{16}$

b) $\sqrt[3]{-8}$

c) $\sqrt[4]{-100}$

d) $\sqrt[5]{243}$

a) 2 y -2

b) -2

c) No existe.

d) 3

023 **Halla, con la calculadora, el valor numérico de estas expresiones.**

a) $1 + \sqrt{6}$

b) $\sqrt[5]{15} - 7$

c) $(-2) \cdot \sqrt[4]{-16}$

a) $1 + 2,4494897 = 3,4494897$

b) $1,7187719 - 7 = -5,2812281$

c) No existe.

024 **Pon dos ejemplos de radicales cuyas raíces sean 3 y -3. ¿Existe un radical con raíces 3 y -5?**

Ejemplos: $\sqrt{9}$ y $\sqrt[4]{81}$

No es posible que un radical tenga como raíces 3 y -5, ya que en el caso de tener dos raíces, estas deben ser opuestas.

025 **Expresa las siguientes potencias como radicales y halla su valor numérico.**

a) $5^{\frac{3}{2}}$ **c)** $3^{\frac{4}{7}}$ **e)** $4^{\frac{3}{4}}$

b) $(-2)^{\frac{1}{3}}$ **d)** $(-7)^{\frac{1}{6}}$ **f)** $(-6)^{\frac{4}{5}}$

a) $\sqrt{5^3} = 11{,}18033989$

b) $\sqrt[3]{-2} = -1{,}2599210$

c) $\sqrt[7]{3^4} = 1{,}8734440$

d) $\sqrt[6]{-7}$ no existe.

e) $\sqrt[4]{4^3} = 2{,}8284271$

f) $\sqrt[5]{(-6)^4} = 4{,}1929627$

026 **Da dos radicales equivalentes a cada uno.**

a) $\sqrt[4]{3^2}$ **b)** $\sqrt[5]{6^3}$ **c)** $\sqrt[7]{5^{10}}$

a) $\sqrt{3}$ y $\sqrt[8]{3^4}$ b) $\sqrt[10]{6^6}$ y $\sqrt[15]{6^9}$ c) $\sqrt[14]{5^{20}}$ y $\sqrt[21]{5^{30}}$

027 **Razona si son equivalentes estos radicales.**

a) $\sqrt[4]{3^6}$ **y** $\sqrt{3^3}$ **c)** $\sqrt[4]{5^{10}}$ **y** $\sqrt{5^4}$

b) $\sqrt[5]{2^{10}}$ **y** $\sqrt{2}$ **d)** $\sqrt[4]{4}$ **y** $\sqrt{2}$

a) $3^{\frac{6}{4}} = 3^{\frac{3}{2}} \rightarrow$ Equivalentes

b) $2^{\frac{10}{5}} \neq 2^{\frac{1}{2}} \rightarrow$ No equivalentes

c) $5^{\frac{10}{4}} \neq 5^{\frac{4}{2}} \rightarrow$ No equivalentes

d) $4^{\frac{1}{4}} = 2^{\frac{2}{4}} = 2^{\frac{1}{2}} \rightarrow$ Equivalentes

028 **Expresa en forma de potencia.**

a) $\sqrt[3]{x}$ **b)** $\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$ **c)** $\sqrt[3]{6xy}$ **d)** $4\sqrt[3]{x^2}$

a) $x^{\frac{1}{3}}$ b) $x^{-\frac{1}{3}}$ c) $(6xy)^{\frac{1}{3}}$ d) $4x^{\frac{2}{3}} = (8x)^{\frac{2}{3}}$

029 **Compara los siguientes radicales.**

$$\sqrt{2},\ \sqrt[3]{3} \text{ y } \sqrt[5]{5}$$

$$\left.\begin{array}{l} \sqrt{2} = \sqrt[30]{2^{15}} \\ \sqrt[3]{3} = \sqrt[30]{3^{10}} \\ \sqrt[5]{5} = \sqrt[30]{5^6} \end{array}\right\} \rightarrow \sqrt[5]{5} < \sqrt{2} < \sqrt[3]{3}$$

030 **Simplifica estos radicales.**

a) $\sqrt[5]{5^{12}}$ **b)** $\sqrt[4]{3^{11}}$ **c)** $\sqrt[7]{a^{47}}$ **d)** $\sqrt[6]{b^{35}}$

a) $5^2\sqrt[5]{5^2}$

b) $3^2\sqrt[4]{3^3}$

c) $a^6\sqrt[7]{a^5}$

d) $b^5\sqrt[6]{b^5}$

031 **Introduce factores dentro del radical.**

a) $6\sqrt{2}$ **b)** $2\sqrt[3]{6}$ **c)** $4\sqrt[4]{7}$ **d)** $2\sqrt[5]{5}$

a) $\sqrt{6^2 \cdot 2} = \sqrt{72}$

b) $\sqrt[3]{2^3 \cdot 6} = \sqrt[3]{48}$

c) $\sqrt[4]{4^4 \cdot 7} = \sqrt[4]{1.792}$

d) $\sqrt[5]{2^5 \cdot 5} = \sqrt[5]{160}$

032 **Simplifica, si es posible.**

a) $\sqrt[4]{7.776}$ **b)** $\sqrt[6]{1.024}$

a) $\sqrt[4]{6^5} = 6\sqrt[4]{6}$

b) $\sqrt[6]{2^{10}} = \sqrt[3]{2^5} = 2\sqrt[3]{2^2}$

033 **Opera y simplifica.**

a) $4\sqrt[6]{3} + 3\sqrt[6]{3} - \frac{1}{2}\sqrt[6]{3}$ **c)** $\sqrt[4]{3} \cdot \sqrt[3]{4}$

b) $\frac{3}{2}\sqrt[4]{7} - \frac{5}{3}\sqrt[4]{7} + \sqrt[4]{7}$ **d)** $\frac{\sqrt[5]{1.568}}{\sqrt[4]{36}}$

a) $\left(4 + 3 - \frac{1}{2}\right) \cdot \sqrt[6]{3} = \frac{13}{2}\sqrt[6]{3}$

b) $\left(\frac{3}{2} - \frac{5}{3} + 1\right) \cdot \sqrt[4]{7} = \frac{5}{6}\sqrt[4]{7}$

c) $\sqrt[12]{3^3} \cdot \sqrt[12]{4^4} = \sqrt[12]{3^3 \cdot 4^4}$

d) $\frac{\sqrt[5]{2^5 \cdot 7^2}}{\sqrt[4]{3^2 \cdot 2^2}} = \frac{2\sqrt[5]{7^2}}{\sqrt{3 \cdot 2}} = 2 \cdot \sqrt[10]{\frac{7^4}{2^5 \cdot 3^5}}$

034 **Calcula.**

a) $3^{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt[5]{9}$ **b)** $\left(2\sqrt[4]{7}\right)^5$ **c)** $\sqrt[5]{22} \cdot \sqrt[3]{11}$ **d)** $\sqrt[5]{3\sqrt[7]{4}}$

a) $3^{\frac{2}{3}} \cdot 3^{\frac{2}{5}} = 3^{\frac{16}{15}} = \sqrt[15]{3^{16}}$

b) $2^5 \cdot \sqrt[4]{7^5} = 32 \cdot 7 \cdot \sqrt[4]{7} = 224\sqrt[4]{7}$

c) $(2 \cdot 11)^{\frac{1}{5}} \cdot 11^{\frac{1}{3}} = (2 \cdot 11)^{\frac{3}{15}} \cdot 11^{\frac{5}{15}} = \sqrt[15]{2^3 \cdot 11^8}$

d) $\sqrt[5]{\sqrt[7]{4 \cdot 3^7}} = \sqrt[35]{4 \cdot 3^7} = \sqrt[35]{8.748}$

035 **Haz esta operación.**

$$2\sqrt[5]{9} - \left(7\sqrt[5]{3}\right)^2 + \sqrt[5]{9}$$

$2\sqrt[5]{9} - \left(7\sqrt[5]{3}\right)^2 + \sqrt[5]{9} = 2 \cdot 3^{\frac{2}{5}} - 7 \cdot 3^{\frac{2}{5}} + 3^{\frac{2}{5}} = -4 \cdot 3^{\frac{2}{5}} = -4\sqrt[5]{3^2} = -4\sqrt[5]{9}$

ACTIVIDADES

036 **Razona cuáles de los siguientes números decimales son racionales y cuáles son irracionales.**

a) 2,555...
b) 2,55
c) 2,525522555222...
d) 2,525225222...
e) 2,5255555...
f) 2,525252...
g) 2,5522222222...
h) 2,525

a) Racional, periódico puro.
b) Racional, decimal exacto.
c) Irracional.
d) Irracional.
e) Racional, periódico mixto.
f) Racional, periódico puro.
g) Racional, periódico mixto.
h) Racional, decimal exacto.

037 **Indica cuáles de los números son racionales y cuáles son irracionales.**

a) $\sqrt{2}$
b) $\sqrt{9}$
c) $\sqrt{3}$
d) $\sqrt{10}$
e) $\sqrt{5}$
f) $\sqrt{15}$
g) $\sqrt{6}$
h) $\sqrt{16}$
i) $\sqrt{7}$

Son racionales los números de los apartados b) y h), y el resto son irracionales.

038 **Averigua cuáles de los siguientes números son racionales y cuáles son irracionales.**

a) $1+\sqrt{2}$
b) $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$
c) $5-\sqrt{9}$
d) $8+\sqrt{10}$
e) $3\cdot\sqrt{16}$
f) $\dfrac{\sqrt{16}}{5}$

Son racionales los números de los apartados c), e) y f).

Son irracionales los números de los apartados a), b) y d).

039 **Escribe tres números racionales y otros tres irracionales. Explica cómo lo realizas.**

Los números racionales son el resultado de fracciones de números enteros; por ejemplo: 2,1; 3,45 y 7,09.

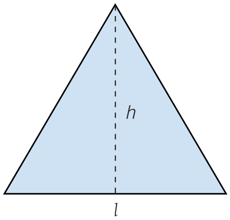
Los números irracionales son números cuya parte decimal no tiene período; por ejemplo: 1,12345…; 1,2121121112…; 1,1223334444…

040 **Escribe un número irracional comprendido entre:**

a) 1 y 2
b) 0,2 y 0,25
c) $0,\overset{\frown}{47}$ **y 0,475**
d) 2,3 y $2,\overset{\frown}{35}$

a) 1,2121121112…
b) 0,22333444455555…
c) 0,4732101243…
d) 2,301001000100001…

041 **Calcula y determina qué tipo de número es, en un triángulo equilátero:**



a) La altura, si el lado mide 10 cm.
b) El área, si el lado mide 3 cm.
c) La altura y el área si el lado mide $\sqrt{3}$ cm.

a) $h = \sqrt{10^2 - 5^2} = \sqrt{75}$ cm $\rightarrow$ Es irracional.

b) $h = \sqrt{3^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{27}}{2}$ cm $\rightarrow A = \frac{3 \cdot \frac{\sqrt{27}}{2}}{2} = \frac{3\sqrt{27}}{4}$ cm^2
$\rightarrow$ Es irracional.

c) $h = \sqrt{3 - \frac{3}{4}} = \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2}$ cm $\rightarrow A = \frac{\frac{3}{2} \cdot \sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{4}$ cm^2
$\rightarrow$ Son irracionales.

042 **Ordena, de menor a mayor, ayudándote de la calculadora.**

$\sqrt{5}$ $\qquad 1 + \sqrt{2}$ $\qquad \sqrt{7}$ $\qquad 2 + \sqrt{2}$

$1 + \sqrt{5}$ $\qquad \sqrt{8}$ $\qquad \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\qquad \frac{\sqrt{5}}{3}$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} < \frac{\sqrt{5}}{3} < \sqrt{5} < 1 + \sqrt{2} < \sqrt{7} < \sqrt{8} < 1 + \sqrt{5} < 2 + \sqrt{2}$$

043 **Clasifica los siguientes números reales en naturales, enteros, racionales o irracionales. Di de qué tipo es su expresión decimal.**

a) $25{,}37$ **c)** $\frac{2}{5}$ **e)** π **g)** $\sqrt{64}$

b) $\frac{-6}{17}$ **d)** $-\sqrt{12}$ **f)** $\frac{7}{90}$ **h)** -5

a) Racional, decimal exacto.
b) Racional, periódico puro.
c) Racional, decimal exacto.
d) Irracional.
e) Irracional.
f) Racional, periódico mixto.
g) Entero.
h) Entero.

044 Compara estos pares de números.

a) $2{,}\widehat{1}$ y $2{,}111$ **b)** 9 y $(-3)^2$ **c)** $3{,}\widehat{4}$ y $\dfrac{32}{9}$ **d)** $\sqrt{3}$ y $\sqrt[3]{4}$

a) $2{,}\widehat{1} > 2{,}111$ b) $9 = (-3)^2$ c) $3{,}\widehat{4} < \dfrac{32}{9}$ d) $\sqrt{3} > \sqrt[3]{4}$

045 Ordena, de menor a mayor, los siguientes conjuntos de números reales.

a) $7{,}5\widehat{12}$ $7{,}51234\ldots$ $7{,}51\widehat{2}$ $7{,}5112233\ldots$

b) $3{,}\widehat{6}$ $3{,}667788\ldots$ $3{,}666777\ldots$ $3{,}\widehat{67}$

c) $8{,}\widehat{24}$ $8{,}244666\ldots$ $8{,}24\widehat{3}$ $8{,}2\widehat{4}$

a) $7{,}5112233\ldots < 7{,}5\widehat{12} < 7{,}51\widehat{2} < 7{,}51234\ldots$

b) $3{,}\widehat{6} < 3{,}667788\ldots < 3{,}666777\ldots < 3{,}\widehat{67}$

c) $8{,}\widehat{24} < 8{,}24\widehat{3} < 8{,}2\widehat{4} < 8{,}244666\ldots$

046 Calcula el inverso y el opuesto de:

a) 3 **d)** $-\dfrac{11}{4}$ **g)** $\sqrt{3}$

b) -2 **e)** π **h)** $1{,}\widehat{4}$

c) $\dfrac{4}{3}$ **f)** $1{,}4$ **i)** $0{,}1\widehat{2}$

a) Inverso: $\dfrac{1}{3} = 0{,}\widehat{3}$ Opuesto: -3

b) Inverso: $\dfrac{-1}{2} = -0{,}5$ Opuesto: 2

c) Inverso: $\dfrac{3}{4} = 0{,}75$ Opuesto: $-\dfrac{4}{3} = -1{,}\widehat{3}$

d) Inverso: $\dfrac{-4}{11} = -0{,}\widehat{36}$ Opuesto: $\dfrac{11}{4} = 2{,}75$

e) Inverso: $\dfrac{1}{\pi} = 0{,}318309886$ Opuesto: $-\pi = -3{,}141592654$

f) Inverso: $\dfrac{5}{7} = 0{,}\widehat{714285}$ Opuesto: $-1{,}4$

g) Inverso: $\dfrac{\sqrt{3}}{3} = 0{,}577350269$ Opuesto: $-\sqrt{3} = -1{,}732050808$

h) Inverso: $\dfrac{9}{13} = 0{,}\widehat{692307}$ Opuesto: $-1{,}\widehat{4}$

i) Inverso: $\dfrac{90}{11} = 8{,}\widehat{18}$ Opuesto: $-0{,}1\widehat{2}$

047 ●●

Razona si las afirmaciones son verdaderas o falsas.

a) Hay números enteros que no son racionales.

b) Existen números irracionales que no son números reales.

c) Un número real es racional o irracional.

d) Cualquier número decimal es un número real.

a) Falsa, ya que cualquier número entero se puede expresar en forma de fracción de números enteros: el mismo número dividido entre la unidad.

b) Falsa, pues los números irracionales están incluidos en el conjunto de los números reales.

c) Verdadera.

d) Verdadera, porque los números decimales son racionales o irracionales, y todos son números reales.

048 ●●

Indica si son verdaderas o falsas las afirmaciones. Razona tu respuesta.

a) Todos los números decimales se pueden escribir en forma de fracción.

b) Todos los números reales son racionales.

c) Un número irracional es real.

d) Existen números enteros que son irracionales.

e) Hay números reales que son racionales.

f) Cualquier número decimal es racional.

g) Un número racional es entero.

h) Los números irracionales tienen infinitas cifras decimales.

i) Todos los números racionales tienen infinitas cifras decimales que se repiten.

a) Falsa, pues solo se pueden escribir como fracción los números racionales.

b) Falsa, ya que los números irracionales no son racionales.

c) Verdadera.

d) Falsa.

e) Verdadera.

f) Falsa, porque los números irracionales no son racionales.

g) Falsa, ya que es el cociente de dos números enteros.

h) Verdadera.

i) Falsa, pues los números decimales exactos tienen un número finito de cifras.

049 Realiza las operaciones, sacando factor común.

a) $11 + 22 + 33 + 44 + 55 + 66 + 77 + 88$

b) $111 + 222 + 333 + 444 + 555$

c) $\frac{1}{3} \cdot 5 - 5 \cdot 4 + 5 \cdot \frac{2}{7}$

d) $\frac{2}{5} \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot 3 + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{9} - \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2}$

a) $11 \cdot (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8) = 11 \cdot 36 = 396$

b) $111 \cdot (1 + 2 + 3 + 4 + 5) = 111 \cdot 15 = 1.665$

c) $5 \cdot \left(\frac{1}{3} - 4 + \frac{2}{7}\right) = 5 \cdot \frac{-35}{21} = \frac{-25}{3}$

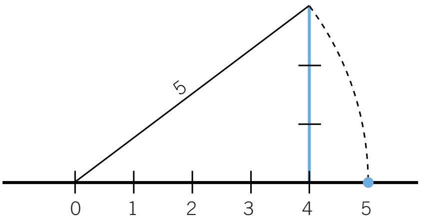
d) $\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2}{5} - 3 + \frac{2}{9} - \frac{3}{5}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{-134}{45} = \frac{-67}{45}$

050 Si a y b son dos números reales y $a < b$, ¿qué sucede con sus opuestos? ¿Y con sus inversos? Contesta razonadamente.

Inversos: $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$

Opuestos: $-a > -b$

051 ¿A qué número corresponde esta representación?

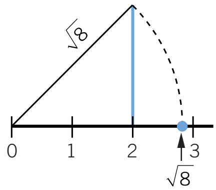


$\sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5$

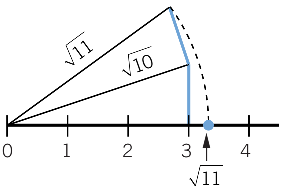
052 Utiliza el teorema de Pitágoras para representar en la recta real estos números.

a) $\sqrt{8}$ b) $\sqrt{11}$ c) $\sqrt{15}$ d) $\sqrt{29}$

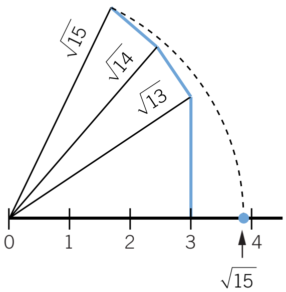
a)



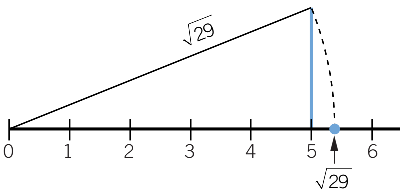
b)



c)



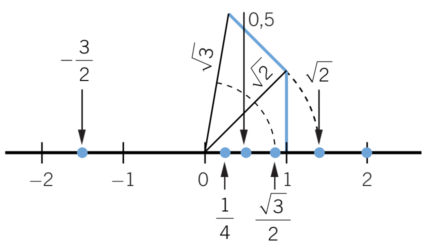
d)



053 Ordena, de menor a mayor, y representa estos números.

$$-\frac{3}{2} \qquad 0,5 \qquad \sqrt{2} \qquad \frac{1}{4} \qquad \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad 2$$

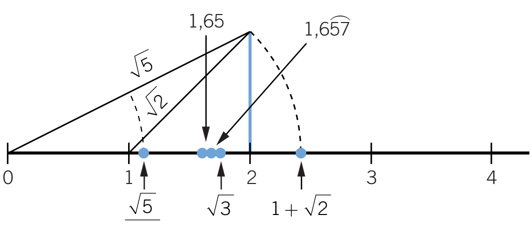
$$-\frac{3}{2} < \frac{1}{4} < 0,5 < \frac{\sqrt{3}}{2} < \sqrt{2} < 2$$



054 Ordena, de menor a mayor, y representa, de forma exacta o aproximada.

$$1,65 \qquad \sqrt{3} \qquad \frac{\sqrt{5}}{2} \qquad 1+\sqrt{2} \qquad 1,6\overset{\frown}{57}$$

$$\frac{\sqrt{5}}{2} < 1,65 < 1,6\overset{\frown}{57} < \sqrt{3} < 1+\sqrt{2}$$

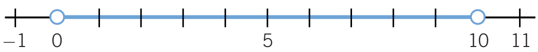


055 Describe y representa los siguientes intervalos en la recta real.

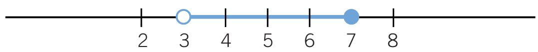
a) $(0, 10)$ **c)** $(-\infty, -2)$ **e)** $[5, 10)$

b) $(3, 7]$ **d)** $[2, 5]$ **f)** $[-4, +\infty)$

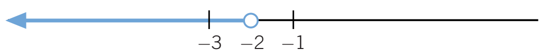
a) $0 < x < 10$



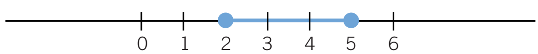
b) $3 < x \leq 7$



c) $x < -2$

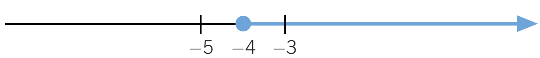


d) $2 \leq x \leq 5$



e) $5 \leq x < 10$

f) $x \geq -4$



056 Escribe el intervalo que corresponde a los valores de *x*.

a) $1 < x < 3$ **c)** $x \leq -2$ **e)** $x > -3$ **g)** $5 \leq x < 9$

b) $6 < x \leq 7$ **d)** $x < 5$ **f)** $x \geq 7$ **h)** $10 \leq x \leq 12$

a) $(1, 3)$ c) $(-\infty, -2]$ e) $(-3, +\infty)$ g) $[5, 9)$

b) $(6, 7]$ d) $(-\infty, 5)$ f) $[7, +\infty)$ h) $[10, 12]$

057 Expresa mediante intervalos estas situaciones.

a) La altura de las casas es menor que 8 m.

b) El descuento se aplica a niños con edades comprendidas entre 2 y 12 años, ambos incluidos.

c) La tarjeta sirve para menores de 26 años.

d) La entrada es gratuita para menores de 5 años o mayores de 65 años.

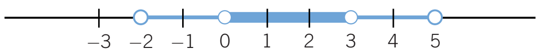
e) La temperatura osciló entre 7 °C y 23 °C.

a) $(0, 8)$ d) $(0, 5) \cup (65, +\infty)$

b) $[2, 12]$ e) $[7, 23]$

c) $(0, 26)$

058 ●● **Representa los intervalos (0, 5) y (−2, 3) en la misma recta, y señala el intervalo intersección.**



El intervalo intersección es (0, 3).

059 ●● **Representa los intervalos $(-\infty, 8)$ y $[2, +\infty)$ en la misma recta, y señala mediante un intervalo los puntos que pertenecen a ambos.**

El intervalo intersección es [2, 8).

060 ●● **Escribe dos intervalos cuya intersección sea [−1, 1].**

Por ejemplo: $[-1, 5) \cap (-8, 1] = [-1, 1]$

061 ●● **Escribe dos números racionales y otros dos irracionales contenidos en el intervalo [0, 4].**

Racionales: 2,3 y 3,45

Irracionales: $\sqrt{3}$ y $\sqrt{2}$

062 **HAZLO ASÍ**

¿CÓMO SE CALCULA EL INTERVALO QUE CONTIENE EL RESULTADO DE UNA OPERACIÓN?

Si *x* pertenece al intervalo (1, 2) e *y* pertenece a (2, 4), indica a qué intervalo pertenece el resultado de estas operaciones.

a) $x + y$ **b)** $x - y$

PRIMERO. Se toman los extremos de los intervalos y se opera como se indica en cada caso.

	Extremos inferiores	Extremos superiores
a)	$x + y \rightarrow 1 + 2 = 3$	$x + y \rightarrow 2 + 4 = 6$
b)	$x - y \rightarrow 1 - 4 = -3$	$x - y \rightarrow 2 - 2 = 0$

SEGUNDO. Se toman los resultados como los extremos de los nuevos intervalos.

a) $x + y$ pertenecerá al intervalo (3, 6).

b) $x - y$ pertenecerá al intervalo (−3, 0).

063 ●●● **Si dos números reales, *x* e *y*, pertenecen a los intervalos (−1, 3) y [0, 2], respectivamente, ¿a qué intervalo pertenece el resultado de las operaciones?**

a) $x + y$ **b)** $x - y$ **c)** $y - x$ **d)** $x \cdot y$

a) (−1, 5) b) (−3, 3) c) (−3, 3) d) (−2, 6)

064 Con ayuda de la calculadora, escribe $\sqrt{3}$ en forma decimal y sus aproximaciones por exceso y por defecto a las diezmilésimas.

$\sqrt{3} = 1,7320508075688772935274463415059\ldots$

Aproximación por exceso: 1,7321

Aproximación por defecto: 1,7320

065 Redondea a las milésimas el número $\sqrt{7}$. Calcula sus aproximaciones por exceso y por defecto. ¿Qué observas?

Aproximación por exceso: 2,646

Aproximación por defecto: 2,645

066 Aproxima por exceso y por defecto con dos cifras decimales.

a) $\frac{5}{7}$ b) $\frac{34}{11}$ c) $\sqrt{5}$ d) $23,\overset{\frown}{65}$

a) Aproximación por exceso: 0,72
Aproximación por defecto: 0,71

b) Aproximación por exceso: 3,10
Aproximación por defecto: 3,09

c) Aproximación por exceso: 2,24
Aproximación por defecto: 2,23

d) Aproximación por exceso: 23,66
Aproximación por defecto: 23,65

067 ¿Qué aparecerá en la pantalla de la calculadora científica, al introducir cada uno de estos números, si previamente pulsamos la secuencia de teclas necesaria para fijar 4 decimales? ¿Y si fijamos 5?

a) 11,87967575
b) 0,666663
c) 8,987656
d) 25,6543678
e) 18,010109
f) 15,908009

		4 decimales	5 decimales
a)	11,87967575	11,8797	11,87968
b)	0,666663	0,6666	0,66666
c)	8,987656	8,9877	8,98766
d)	25,6543678	25,6544	25,65437
e)	18,010109	18,0101	18,01011
f)	15,908009	15,9080	15,90801

068 Escribe un número:

a) Decimal periódico puro, cuyo redondeo a las milésimas es 5,677.
b) Decimal periódico mixto, con truncamiento a las centésimas 0,97.
c) Irracional, cuyo redondeo a las diezmilésimas sea 0,0023.

a) $5,\overset{\frown}{67}$

b) $0,9\overset{\frown}{7}$

c) 0,002345678…

069 **¿Existe algún caso en el que las aproximaciones por exceso y por defecto coincidan? Y si consideramos el redondeo, ¿puede coincidir con la aproximación por exceso y por defecto?**

Las aproximaciones por exceso y por defecto coinciden cuando aproximamos a un orden y todas las cifras, distintas de cero, del número son de órdenes superiores.

El redondeo siempre coincide con uno de los casos anteriores; luego puede coincidir con uno o con los dos casos.

070 **Obtén el error absoluto y relativo cometido al redondear y truncar:**

a) $\frac{17}{9}$ **a las centésimas.**

b) 7,3568 a las milésimas.

c) 20,5556 a las décimas.

a)

	Redondear	Truncar
Error absoluto	$0{,}00\widehat{1}$	$0{,}00\widehat{8}$
Error relativo	0,00058823…	0,0047058823…

b)

	Redondear	Truncar
Error absoluto	0,0002	0,0008
Error relativo	0,000027185…	0,000108742…

c)

	Redondear	Truncar
Error absoluto	0,0444	0,0556
Error relativo 0	0,002159995…	0,00270485…

071 **Si aproximamos 10,469 por 10,5, ¿qué error se comete? ¿Y si lo aproximamos por 10,4? ¿Cuál es la mejor aproximación? ¿Por qué?**

Al aproximar por 10,5; el error absoluto es de 0,031.

Al aproximar por 10,4; el error absoluto es de 0,069.

Es mejor aproximación 10,5; ya que se comete un error menor.

072 **Una aproximación por defecto de 8,56792 es 8,56. Halla el error absoluto y el error relativo.**

Error absoluto: 0,00792

Error relativo: 0,0009243783…

073 **Escribe el número $\frac{1}{7}$ en forma decimal con la mínima cantidad de cifras para que el error sea menor que 1 centésima.**

$$\frac{1}{7} \simeq 0{,}14 \rightarrow \frac{1}{7} - 0{,}14 < 0{,}003$$

074 **Aproxima el número 12,3456, de forma que el error absoluto sea menor que 0,001.**

Es válida cualquiera de estas aproximaciones: 12,345 o 12,346

075 **Considera el número de oro o número áureo:**

$$\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1{,}61803\ldots$$

Aproxímalo por redondeo hasta las centésimas, y halla el error absoluto y relativo.

$\Phi \simeq 1{,}62$

Error absoluto: $\left|\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} - 1{,}62\right| = 0{,}0019660112501\ldots$

Error relativo: $\left|\dfrac{\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} - 1{,}62}{\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}}\right| = 0{,}001215061774829\ldots$

076 **Realiza estas operaciones y redondea los resultados a las décimas. Después, redondea cada número a las décimas y resuelve la operación. ¿Por qué procedimiento se comete menor error?**

a) $3{,}253 + 8{,}45$
b) $53{,}32 - 18{,}93$
c) $13{,}5 \cdot 2{,}7$
d) $40{,}92 : 5{,}3$

a) $3{,}253 + 8{,}45 = 11{,}703 \simeq 11{,}7$
$3{,}3 + 8{,}5 = 11{,}8$
Se comete mayor error redondeando cada sumando.

b) $53{,}32 - 18{,}93 = 34{,}39 \simeq 34{,}4$
$53{,}3 - 18{,}9 = 34{,}4$
Se comete el mismo error.

c) $13{,}5 \cdot 2{,}7 = 36{,}45 \simeq 36{,}5$
$13{,}5 \cdot 2{,}7 = 36{,}45$
Se comete mayor error redondeando el resultado.

d) $40{,}92 : 5{,}3 = 7{,}72075\ldots \simeq 7{,}7$
$40{,}9 : 5{,}3 = 7{,}71698\ldots$
Se comete mayor error redondeando el resultado.

077 **Siguiendo los pasos de la actividad anterior, halla una aproximación por defecto.**

a) 4,72 + 153,879 b) 7,8 · 12,9 c) 62,3 − 24,95 d) 100,45 : 8,3

a) $4{,}72 + 153{,}879 = 158{,}599 \simeq 158{,}5$ $\quad 4{,}7 + 153{,}8 = 158{,}5$

Se comete el mismo error.

b) $7{,}8 \cdot 12{,}9 = 100{,}62 \simeq 100{,}6$ $\quad 7{,}8 \cdot 12{,}9 = 100{,}62$

Se comete mayor error aproximando el resultado.

c) $62{,}3 - 24{,}95 = 37{,}35 \simeq 37{,}3$ $\quad 62{,}3 - 24{,}9 = 37{,}4$

Se comete el mismo error.

d) $100{,}45 : 8{,}3 = 12{,}1024\ldots \simeq 12{,}1$ $\quad 100{,}4 : 8{,}3 = 12{,}0963\ldots$

Se comete mayor error aproximando los factores.

078 **Obtén la aproximación por redondeo hasta las diezmilésimas.**

a) $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ **b)** $\frac{6}{7} + \sqrt{7}$ **c)** $\sqrt{5} - \sqrt{3}$ **d)** $\frac{4}{15} + \sqrt{8}$

a) $\sqrt{2} + \sqrt{3} = 3{,}14626436\ldots \simeq 3{,}1463$

b) $\frac{6}{7} + \sqrt{7} = 3{,}5028941\ldots \simeq 3{,}5029$

c) $\sqrt{5} - \sqrt{3} = 0{,}5040171\ldots \simeq 0{,}5040$

d) $\frac{4}{15} + \sqrt{8} = 3{,}0950937\ldots \simeq 3{,}0951$

079 **¿Qué error se comete al aproximar el resultado de 45,96 + 203,7 + 0,823 por el número 250,49?**

$45{,}96 + 203{,}7 + 0{,}823 = 250{,}483$ $\quad E_a = |250{,}483 - 250{,}49| = 0{,}007$

080 **¿Para qué número sería 5.432,723 una aproximación a las milésimas por defecto? ¿Es única la respuesta? ¿Cuántas hay?**

La aproximación es del número 5.432,7232.

La solución no es única; hay infinitas soluciones, tantas como números decimales que empiezan por 5.432,723…

081 **¿Se puede escribir $\pi = \frac{355}{113}$? Justifica la respuesta y calcula el orden del error cometido.**

$\pi = 3{,}141592654\ldots$ $\quad \frac{355}{113} = 3{,}14159292\ldots$

Es posible escribirlo, ya que el error que se comete es menor que 1 millonésima.

$$E_a = \left|\pi - \frac{355}{113}\right| = |3{,}141592654\ldots - 3{,}14159292\ldots| = 0{,}0000002667\ldots$$

082 Razona si es verdadero o falso.

a) Si el lado de un cuadrado es un número racional, la diagonal es irracional.
b) Si el lado de un cuadrado es un número irracional, el área es racional.
c) Si la diagonal de un cuadrado es racional, el área es racional.

a) Verdadero, por ejemplo: Lado $= a \rightarrow$ Diagonal $= a\sqrt{2}$
b) Falso, por ejemplo: Lado $= \pi \rightarrow$ Área $= \pi^2$
c) Verdadero, por ejemplo: Diagonal $= a \rightarrow$ Lado $= \dfrac{a}{\sqrt{2}} \rightarrow$ Área $= \dfrac{a^2}{2}$

083 Calcula, si es posible, el valor numérico de los siguientes radicales.

a) $\sqrt[4]{81}$ **d)** $\sqrt[4]{625}$ **g)** $\sqrt[4]{-256}$ **j)** $\sqrt{1}$
b) $\sqrt[5]{32}$ **e)** $\sqrt[4]{1.296}$ **h)** $\sqrt[3]{-216}$
c) $\sqrt[3]{-27}$ **f)** $\sqrt[5]{-100.000}$ **i)** $\sqrt[7]{-128}$

a) ± 3 d) ± 5 g) No es posible. j) ± 1
b) 2 e) ± 6 h) -6
c) -3 f) -10 i) -2

084 Indica en estos radicales cuáles son el índice y el radicando. Después, exprésalos como potencia de exponente fraccionario.

a) $\sqrt[6]{3}$ **c)** $\sqrt{33}$ **e)** $\sqrt[5]{-2}$
b) $\sqrt[7]{-3}$ **d)** $\sqrt[9]{5}$ **f)** $\sqrt[4]{25}$

a) Índice: 6, radicando: 3 $\longrightarrow 3^{\frac{1}{6}}$
b) Índice: 7, radicando: $-3 \rightarrow (-3)^{\frac{1}{7}}$
c) Índice: 2, radicando: 33 $\longrightarrow 33^{\frac{1}{2}}$
d) Índice: 9, radicando: 5 $\longrightarrow 5^{\frac{1}{9}}$
e) Índice: 5, radicando: $-2 \rightarrow (-2)^{\frac{1}{5}}$
f) Índice: 4, radicando: 25 $\longrightarrow 25^{\frac{1}{4}}$

085 Transforma los radicales en potencias y las potencias en radicales.

a) $3^{\frac{1}{4}}$ **d)** $\sqrt[3]{2^5}$ **g)** $10^{\frac{2}{7}}$ **j)** $2^{\frac{3}{4}}$
b) $5^{\frac{2}{3}}$ **e)** $\sqrt[5]{3^2}$ **h)** $\sqrt[4]{5^7}$
c) $2^{\frac{1}{6}}$ **f)** $7^{\frac{3}{5}}$ **i)** $\sqrt[6]{7^5}$

a) $\sqrt[4]{3}$ d) $2^{\frac{5}{3}}$ f) $\sqrt[5]{7^3}$ j) $\sqrt[4]{2^3}$
b) $\sqrt[3]{5^2}$ e) $3^{\frac{2}{5}}$ g) $\sqrt[7]{10^2}$
c) $\sqrt[6]{2}$ h) $5^{\frac{7}{4}}$ i) $7^{\frac{5}{6}}$

086 De estos radicales, ¿cuáles son equivalentes?

a) $\sqrt[4]{2^3}$ b) $\sqrt[5]{3^2}$ c) $\sqrt[3]{7^2}$ d) $\sqrt[8]{2^6}$ e) $\sqrt[12]{7^4}$ f) $\sqrt[10]{3^4}$ g) $\sqrt[12]{2^9}$ h) $\sqrt[20]{2^{15}}$ i) $\sqrt[10]{3^2}$

Son equivalentes:

$$\sqrt[4]{2^3} = \sqrt[8]{2^6} = \sqrt[12]{2^9} = \sqrt[20]{2^{15}} \qquad \sqrt[5]{3^2} = \sqrt[10]{3^4}$$

087 Extrae factores en cada uno de los siguientes radicales.

a) $\sqrt[3]{2^3a^5}$ b) $\sqrt[3]{a^3b^5c^6}$ c) $\sqrt[4]{2^4a^7}$ d) $\sqrt[5]{a^6b^{10}}$ e) $\sqrt{2^6a^4b^8}$ f) $\sqrt{2^2a^2b^4}$ g) $\sqrt{4a^4b^2}$ h) $\sqrt{-4a^4b}$ i) $\sqrt[3]{27a^2}$ j) $\sqrt[3]{-27a^3b^7}$ k) $\sqrt[4]{16a^2b^5}$ l) $\sqrt[4]{-a^4b^6}$

a) $2a\sqrt[3]{a^2}$ b) $abc^2\sqrt[3]{b^2}$ c) $2a\sqrt[4]{a^3}$ d) $ab^2\sqrt[5]{a}$ e) $2^3a^2b^4$ f) $2ab^2$ g) $2a^2b$ h) $2a^2\sqrt{-b}$ i) $3\sqrt[3]{a^2}$ j) $-3ab^2\sqrt[3]{b}$ k) $2b\sqrt[4]{a^2b}$ l) $ab\sqrt[4]{-b^2}$

No tiene solución, por ser raíz par de un número negativo.

088 **HAZLO ASÍ**

¿CÓMO SE EXTRAEN FACTORES DE UN RADICAL DESCOMPONIENDO EL RADICANDO EN FACTORES PRIMOS?

Simplifica el radical $\sqrt[3]{10.800}$.

PRIMERO. Se factoriza el radicando.

$$10.800 = 2^4 \cdot 3^3 \cdot 5^2$$

SEGUNDO. Se expresa el radical como potencia de exponente fraccionario.

$$\sqrt[3]{10.800} = (2^4 \cdot 3^3 \cdot 5^2)^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{4}{3}} \cdot 3^{\frac{3}{3}} \cdot 5^{\frac{2}{3}}$$

TERCERO. Si alguna de las fracciones de los exponentes es impropia, se pone como la suma de un número entero y una fracción.

$$2^{\frac{4}{3}} \cdot 3^{\frac{3}{3}} \cdot 5^{\frac{2}{3}} = 2^{\left(1+\frac{1}{3}\right)} \cdot 3^1 \cdot 5^{\frac{2}{3}}$$

CUARTO. Se expresa como producto de potencias y se vuelve a transformar en radical.

$$2^{\left(1+\frac{1}{3}\right)} \cdot 3 \cdot 5^{\frac{2}{3}} = 2 \cdot 2^{\frac{1}{3}} \cdot 3 \cdot 5^{\frac{2}{3}} = 2 \cdot \sqrt[3]{2} \cdot 3 \cdot \sqrt[3]{5^2} =$$
$$= 6 \cdot \sqrt[3]{2 \cdot 5^2} = 6\sqrt[3]{50}$$

089 Extrae factores de las raíces.

a) $\sqrt{8}$ d) $\sqrt{98}$ g) $\sqrt[3]{1.000}$
b) $\sqrt{18}$ e) $\sqrt{12}$ h) $\sqrt[3]{40}$
c) $\sqrt{50}$ f) $\sqrt{75}$ i) $\sqrt[3]{320}$

a) $2\sqrt{2}$ c) $5\sqrt{2}$ d) $7\sqrt{2}$ e) $2\sqrt{3}$
f) $5\sqrt{3}$ g) 10 h) $2\sqrt[3]{5}$ i) $4\sqrt[3]{5}$

090 Simplifica estos radicales.

a) $\sqrt[3]{16}$ d) $\sqrt{27}$ g) $\sqrt[6]{27}$
b) $\sqrt[3]{54}$ e) $\sqrt[5]{128}$ h) $\sqrt[8]{625}$
c) $\sqrt[4]{128}$ f) $\sqrt[3]{32}$ i) $\sqrt[12]{4}$

a) $2\sqrt[3]{2}$
b) $3\sqrt[3]{2}$
c) $2\sqrt[4]{2^2}$
d) $3\sqrt{3}$
e) $2\sqrt[5]{2}$
f) $2\sqrt[3]{2^2}$
g) $\sqrt{3}$
h) $\sqrt{5}$
i) $\sqrt[6]{2}$

091 Introduce factores en el radical.

a) $2\sqrt[3]{5}$ d) $\dfrac{3}{5}\sqrt{2}$ g) $2\sqrt[3]{7}$
b) $4\sqrt[4]{20}$ e) $\dfrac{1}{2}\sqrt[4]{6}$ h) $5\sqrt[3]{\dfrac{1}{5}}$
c) $3\sqrt[5]{15}$ f) $\dfrac{1}{2}\sqrt[4]{\dfrac{1}{2}}$ i) $\dfrac{3}{5}\sqrt[3]{\dfrac{2}{3}}$

a) $\sqrt[3]{40}$ d) $\sqrt{\dfrac{18}{25}}$ g) $\sqrt[3]{56}$
b) $\sqrt[4]{1.280}$ e) $\sqrt[4]{\dfrac{3}{8}}$ h) $\sqrt[3]{5^2}$
c) $\sqrt[5]{3.645}$ f) $\sqrt[4]{\dfrac{1}{32}}$ i) $\sqrt[3]{\dfrac{18}{125}}$

092 Introduce factores en el radical, si es posible.

a) $a\sqrt{\dfrac{4a-1}{2a}}$ c) $\dfrac{2}{a}\sqrt{\dfrac{3a}{8}}$ e) $\dfrac{4ab}{c}\sqrt[4]{\dfrac{c^2b}{8a}}$

b) $5+\sqrt{2}$ d) $-a^2\sqrt[3]{a}$ f) $-2ab^2\sqrt[3]{ab}$

a) $\sqrt{\dfrac{4a^2-a}{2}}$ c) $\sqrt{\dfrac{3}{2a}}$ e) $\sqrt[4]{\dfrac{32a^3b^5}{c^2}}$

b) No es posible. d) $-\sqrt[3]{a^7}$ f) $-\sqrt[3]{8a^4b^7}$

093 Efectúa las siguientes operaciones.

a) $-4\sqrt{5}+5\sqrt{5}$ c) $3\sqrt{5}-\sqrt{20}$

b) $17\sqrt{2}-9\sqrt{8}$ d) $4\sqrt{2}+3\sqrt{18}$

a) $\sqrt{5}$ b) $-\sqrt{2}$ c) $\sqrt{5}$ d) $13\sqrt{2}$

094 Realiza estas operaciones.

a) $5\sqrt{12}+7\sqrt{27}-\sqrt{243}-\dfrac{1}{2}\sqrt{75}$

b) $4\sqrt{8}-7\sqrt{50}+\dfrac{8}{3}\sqrt{18}+4\sqrt{98}$

c) $12\sqrt[3]{16}-\dfrac{3}{5}\sqrt[3]{128}+7\sqrt[3]{54}$

a) $10\sqrt{3}+21\sqrt{3}-9\sqrt{3}-\dfrac{5}{2}\sqrt{3}=\dfrac{39}{2}\sqrt{3}$

b) $8\sqrt{2}-35\sqrt{2}+8\sqrt{2}+28\sqrt{2}=9\sqrt{2}$

c) $24\sqrt[3]{2}-\dfrac{14}{5}\sqrt[3]{2}+21\sqrt[3]{2}=\dfrac{211}{5}\sqrt[3]{2}$

095 Opera y simplifica.

a) $\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}$ c) $\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[4]{3}$ e) $\sqrt[3]{3}:\sqrt{3}$ g) $\sqrt[6]{5}:\sqrt{5}$

b) $\sqrt{3}\cdot\sqrt{8}$ d) $\sqrt[4]{3}\cdot\sqrt{5}$ f) $\sqrt[5]{4}:\sqrt[4]{7}$ h) $\sqrt[4]{2}:\sqrt[3]{2}$

a) $\sqrt{6}$ c) $\sqrt[12]{2^4\cdot 3^3}$ e) $\sqrt[6]{\dfrac{1}{3}}$ g) $\sqrt[6]{\dfrac{1}{5^2}}$

b) $2\sqrt{6}$ d) $\sqrt[4]{75}$ f) $\sqrt[20]{\dfrac{2^8}{7^5}}$ h) $\sqrt[12]{\dfrac{1}{2}}$

096 Calcula.

a) $2 \cdot \left(\sqrt{2} + \sqrt{3}\right)$

b) $3 \cdot \left(\sqrt{5} - \sqrt{7}\right)$

c) $-5 \cdot \left(\sqrt{3} - \sqrt{2}\right)$

d) $\left(5\sqrt{3} - 8\sqrt{2}\right) \cdot (-7)$

e) $\left(-3\sqrt{5} - 9\sqrt{7}\right) \cdot 4$

f) $\left(8\sqrt{5} - 7\sqrt{2}\right) \cdot 2\sqrt{3}$

a) $2\sqrt{2} + 2\sqrt{3}$

b) $3\sqrt{5} - 3\sqrt{7}$

c) $-5\sqrt{3} + 5\sqrt{2}$

d) $-35\sqrt{3} + 56\sqrt{2}$

e) $-12\sqrt{5} - 36\sqrt{7}$

f) $16\sqrt{15} - 14\sqrt{6}$

097 Opera y simplifica.

a) $\left(\sqrt{3} + \sqrt{2}\right) \cdot \left(\sqrt{3} - \sqrt{2}\right)$

b) $\left(5\sqrt{2} - 3\right) \cdot \left(5\sqrt{2} + 3\right)$

c) $\left(6\sqrt{7} + \sqrt{5}\right) \cdot \left(6\sqrt{7} - \sqrt{5}\right)$

d) $\left(2\sqrt{5} - \sqrt{10}\right) \cdot \left(2\sqrt{5} + \sqrt{10}\right)$

a) $3 - 2 = 1$

b) $50 - 9 = 41$

c) $36 \cdot 7 - 5 = 247$

d) $4 \cdot 5 - 10 = 10$

098 Calcula y simplifica.

a) $\left(2\sqrt{5} - 3\sqrt{2}\right)^2 + \left(2\sqrt{5} + 3\sqrt{2}\right)^2$

b) $\left(3\sqrt{2} + 1\right)^2 - \left(3\sqrt{2} - 1\right)^2$

c) $\left(4\sqrt{6} - \sqrt{2}\right)^2 - \left(4\sqrt{6} + \sqrt{2}\right)^2$

a) $\left(4 \cdot 5 + 9 \cdot 2 - 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \sqrt{5 \cdot 2}\right) + \left(4 \cdot 5 + 9 \cdot 2 + 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \sqrt{5 \cdot 2}\right) = 146$

b) $\left(9 \cdot 2 + 1 + 2 \cdot 3 \cdot \sqrt{2}\right) - \left(9 \cdot 2 + 1 - 2 \cdot 3 \cdot \sqrt{2}\right) = 12\sqrt{2}$

c) $\left(16 \cdot 6 + 4 - 2 \cdot 4 \cdot \sqrt{6 \cdot 2}\right) - \left(16 \cdot 6 + 4 + 2 \cdot 4 \cdot \sqrt{6 \cdot 2}\right) = -32\sqrt{3}$

099 Haz las operaciones y simplifica.

a) $\left(3\sqrt{2}-5\right)\cdot\left(4\sqrt{2}-3\right)$

b) $\left(2\sqrt{7}+3\sqrt{2}\right)\cdot\left(5-2\sqrt{2}\right)$

c) $\left(7\sqrt{5}+4\right)\cdot\left(5\sqrt{5}-3\sqrt{6}\right)$

d) $\left(7\sqrt{2}-3\right)\cdot\left(5\sqrt{3}+2\right)$

a) $3\cdot4\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}-3\cdot3\cdot\sqrt{2}-5\cdot4\cdot\sqrt{2}+3\cdot5=39-29\sqrt{2}$

b) $2\cdot5\cdot\sqrt{7}-2\cdot2\cdot\sqrt{7}\cdot\sqrt{2}+3\cdot5\cdot\sqrt{2}-3\cdot2\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}=$
$=10\sqrt{7}-4\sqrt{14}+15\sqrt{2}-12$

c) $7\cdot5\cdot\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}-7\cdot3\cdot\sqrt{5}\cdot\sqrt{6}+4\cdot5\cdot\sqrt{5}-4\cdot3\cdot\sqrt{6}=$
$=175-21\sqrt{30}+20\sqrt{5}-12\sqrt{6}$

d) $7\cdot5\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}+7\cdot2\cdot\sqrt{2}-3\cdot5\cdot\sqrt{3}-3\cdot2=$
$=35\sqrt{6}+14\sqrt{2}-15\sqrt{3}-6$

100 Calcula.

a) $\sqrt[4]{a^3}\cdot\sqrt[3]{a^5}\cdot\sqrt[6]{a^4}$

b) $\sqrt[3]{3a^2b}\cdot\sqrt{2ab^3}$

c) $\sqrt[5]{2a^3b^4}:\sqrt[3]{4ab^2}$

d) $\sqrt[3]{\sqrt{ab}}\cdot\sqrt{a\sqrt[3]{b}}$

a) $a^{\frac{3}{4}+\frac{5}{3}+\frac{4}{6}}=a^{\frac{37}{12}}=\sqrt[12]{a^{37}}$

b) $\sqrt[6]{3^2a^4b^2}\cdot\sqrt[6]{2^3a^3b^9}=\sqrt[6]{72a^7b^{11}}=ab\sqrt[6]{72ab^5}$

c) $\sqrt[15]{2^3a^9b^{12}}:\sqrt[15]{2^{10}a^{-5}b^{10}}=\sqrt[15]{2^{-7}a^4b^2}$

d) $\sqrt[6]{ab}\cdot\sqrt[6]{a^3b}=\sqrt[6]{a^4b^2}=\sqrt[3]{a^2b}$

101 Efectúa y simplifica.

a) $\left(5\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)\cdot\sqrt{2}\cdot\left(3\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)$

b) $\left(2+\sqrt{3}\right)^2-\left(2+\sqrt{3}\right)\cdot\left(2-\sqrt{3}\right)$

c) $\left(3+\sqrt{5}\right)\cdot\left(3-\sqrt{5}\right)+\left(2-4\sqrt{5}\right)\cdot\left(2+4\sqrt{5}\right)$

d) $\left(\sqrt{3}+\sqrt{5}-4\sqrt{7}\right)\cdot\left(\sqrt{3}-\sqrt{5}+4\sqrt{7}\right)$

a) $\left(10+\sqrt{6}\right)\cdot\left(3\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)=30\sqrt{2}-10\sqrt{3}+3\sqrt{12}-\sqrt{18}=$
$=27\sqrt{2}-4\sqrt{3}$

b) $\left(4+4\sqrt{3}+3\right)-(4-3)=4\sqrt{3}-6$

c) $(9-5)+(4-80)=-72$

d) $3-5+16\cdot7-\sqrt{3}\sqrt{5}+\sqrt{3}\sqrt{5}+4\sqrt{21}-4\sqrt{21}-4\sqrt{35}-4\sqrt{35}=$
$=110-8\sqrt{35}$

102 Efectúa y expresa el resultado como potencia.

a) $\left(\sqrt[3]{5}\cdot\sqrt{5}\right)^6$

b) $\sqrt[5]{3}\cdot\sqrt[5]{3^2\sqrt{3}}$

c) $\sqrt{\sqrt[3]{2^2}}\cdot\sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}}$

d) $\sqrt[3]{8\sqrt[5]{81}}$

a) $\left(\sqrt[6]{5^2}\cdot\sqrt[6]{5^3}\right)^6=5^5$

b) $\sqrt[10]{3^2}\cdot\sqrt[10]{3^5}=3^{\frac{7}{10}}$

c) $\sqrt[6]{2^2}\cdot\sqrt[8]{2}=\sqrt[24]{2^{8+3}}=2^{\frac{11}{24}}$

d) $2\sqrt[15]{3^4}=2\cdot 3^{\frac{4}{15}}$

103 Escribe los siguientes radicales como potencias de exponente fraccionario.

a) $a^{\frac{3}{4}}$

b) $\sqrt[3]{a\sqrt[4]{a^3}}=\sqrt[12]{a^7}=a^{\frac{7}{12}}$

c) $\sqrt[4]{\dfrac{a^2}{a}}=a^{\frac{1}{4}}$

d) $a^{\frac{-1}{3}}$

e) $a^{\frac{-1}{2}}$

f) $a^{\frac{3}{2}}$

g) $a^{\frac{-1}{4}}$

h) $a^{\frac{5}{4}}$

i) $a^{\frac{3}{4}}$

104 Expresa mediante un solo radical.

a) $\sqrt[5]{3\sqrt{5}}$

b) $\sqrt{\sqrt{\sqrt{3}}}$

c) $\sqrt{\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt[3]{2}}}$

d) $\sqrt{\dfrac{1}{\sqrt{2}}}$

e) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{2}}$

f) $\dfrac{1}{\sqrt{\sqrt{5}}}$

a) $\sqrt[10]{3^2\cdot 5}=\sqrt[10]{45}$

b) $\sqrt[8]{3}$

c) $\sqrt{\sqrt[6]{\dfrac{2^3}{2^2}}}=\sqrt[12]{2}$

d) $\sqrt[4]{\dfrac{1}{2}}$

e) $\sqrt[12]{2}$

f) $\sqrt[4]{\dfrac{1}{5}}$

105 ●●● **Razona si son verdaderas o falsas estas igualdades.**

a) $\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[m]{b}=\sqrt[n\cdot m]{ab}$

b) $\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[m]{b}=\sqrt[n+m]{a\cdot b}$

c) $\sqrt[n]{a+b}=\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}$

d) $a\sqrt[n]{b^m}=\sqrt[n]{(a\cdot b)^m}$

e) $\sqrt{a^2+b^2}=a+b$

f) $\sqrt{a}\cdot\sqrt{a}\cdot\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=a\sqrt{a\cdot b}$

g) $\sqrt[4]{a^8b^2}=a\sqrt{b}$

h) $a\sqrt{b+c}=\sqrt{ab+ac}$

a) $\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[m]{b}=\sqrt[n\cdot m]{a^m}\cdot\sqrt[m\cdot n]{b^n}=\sqrt[n\cdot m]{a^m\cdot b^n}\neq\sqrt[n\cdot m]{ab}\longrightarrow$ Falsa.

b) $\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[m]{b}=\sqrt[n\cdot m]{a^m}\cdot\sqrt[m\cdot n]{b^n}=\sqrt[n\cdot m]{a^m\cdot b^n}\neq\sqrt[n+m]{ab}\rightarrow$ Falsa.

c) Falsa, excepto cuando $n=1$. Y se comprueba probando con cualquier valor de a, b y n.

d) $a\sqrt[n]{b^m}=\sqrt[n]{a^nb^m}\neq\sqrt[n]{a^mb^m}\rightarrow$ Falsa, excepto si $n=m$.

e) Falsa, ya que si elevamos al cuadrado los términos:
$\left(\sqrt{a^2+b^2}\right)^2=a^2+b^2\neq a^2+b^2+2ab=(a+b)^2$

f) $\sqrt{a}\cdot\sqrt{a}\cdot\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{a^2}\cdot\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=a\sqrt{a\cdot b}\rightarrow$ Verdadera.

g) $\sqrt[4]{a^8b^2}=\sqrt{a^4b}=a^2\sqrt{b}\neq a\sqrt{b}\rightarrow$ Falsa.

h) $a\sqrt{b+c}=\sqrt{a^2b+a^2c}\neq\sqrt{ab+ac}\rightarrow$ Falsa, excepto para $a=1$.

106 ●● **Calcula el lado de un cuadrado inscrito en una circunferencia de radio 5 cm. El número obtenido, ¿es racional o irracional?**

La diagonal del cuadrado coincide con el diámetro.

Lado $=x\rightarrow$ Diagonal $=x\sqrt{2}$

$x\cdot\sqrt{2}=10\rightarrow x=5\cdot\sqrt{2}$

El lado mide $5\sqrt{2}$ cm, que es un número irracional.

107 ●● **Halla la diagonal de un cuadrado de lado 8 cm. Si construimos un cuadrado cuyo lado es esa diagonal, ¿cuál es el área del segundo cuadrado?**

Diagonal $=8\sqrt{2}$ cm

Área $=\left(8\sqrt{2}\right)^2=128$ cm^2

108 La base de un rectángulo mide $b = 8$ cm y su altura es $a = \dfrac{3}{4}b$.

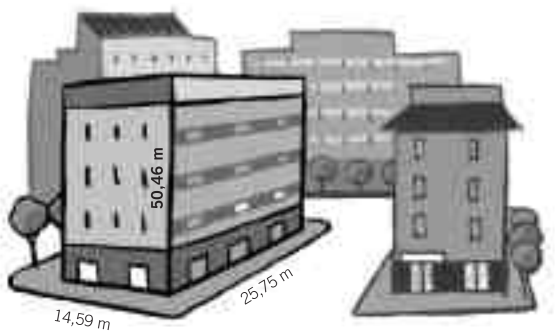
Calcula la longitud de la circunferencia circunscrita a este rectángulo y expresa el resultado con tres decimales.

El diámetro de la circunferencia es la diagonal del rectángulo.

Diagonal $= \sqrt{8^2 + 6^2} = 10$ cm, radio $= 5$ cm

La longitud de la circunferencia es 31,415 cm.

109 **Calcula el volumen del edificio y redondea el resultado a las milésimas.**



a) Redondea sus dimensiones a las décimas, y calcula el volumen de nuevo. ¿Qué relación tiene con el resultado anterior?

b) Halla el error absoluto y relativo cometido en cada caso.

El valor exacto del volumen es:

Volumen $= 14{,}59 \cdot 25{,}75 \cdot 50{,}46 = 18.957{,}44355$ m^3

Si redondeamos el resultado a las milésimas:

Volumen $= 18.957{,}444$ m^3

a) Volumen $= 14{,}6 \cdot 25{,}8 \cdot 50{,}4 = 18.984{,}672$ m^3

El resultado es mayor que el resultado anterior.

b) Volumen $= 14{,}59 \cdot 25{,}75 \cdot 50{,}46 = 18.957{,}444$ m^3

$E_a = |18.957{,}44355 - 18.957{,}444| = 0{,}00045$

$$E_r = \left|\frac{18.957{,}44355 - 18.957{,}444}{18.957{,}44355}\right| = 0{,}00000002373\ldots$$

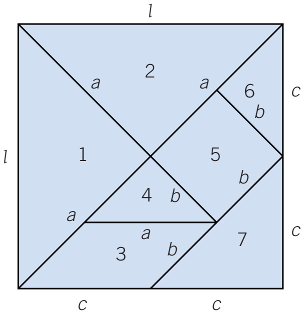
Volumen $= 14{,}6 \cdot 25{,}8 \cdot 50{,}4 = 18.984{,}672$ m^3

$E_a = |18.957{,}44355 - 18.984{,}672| = 27{,}22845$

$$E_r = \left|\frac{18.957{,}44355 - 18.984{,}672}{18.957{,}44355}\right| = 0{,}0014362\ldots$$

110 ●● **Halla la longitud de los lados y el área de cada una de las piezas del *tangram*.**

Suponemos que el lado del cuadrado es l.



a es la mitad de la diagonal del cuadrado:

$$a = \frac{\sqrt{l^2 + l^2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}l$$

b es la mitad de a: $b = \frac{a}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}l$

c es la mitad de l: $c = \frac{l}{2}$

Vamos a calcular ahora el perímetro y el área de cada figura.

Figura 1: $\begin{cases} P = 2a + l = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}l + l = \left(\sqrt{2} + 1\right)l \\ A = \frac{a \cdot a}{2} = \frac{2l^2}{4} = \frac{l^2}{2} \end{cases}$

Figura 2: $\begin{cases} P = 2a + l = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}l + l = \left(\sqrt{2} + 1\right)l \\ A = \frac{a \cdot a}{2} = \frac{2l^2}{4} = \frac{l^2}{2} \end{cases}$

Figura 3: $\begin{cases} P = 2b + 2c = \frac{\sqrt{2}}{2}l + l = \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)l \\ A = c \cdot \frac{l}{4} = \frac{l^2}{8} \end{cases}$

Figura 4: $\begin{cases} P = 2b + c = \frac{\sqrt{2}}{2}l + \frac{l}{2} = \left(\frac{1 + \sqrt{2}}{2}\right)l \\ A = \frac{b \cdot b}{2} = \frac{l^2}{16} \end{cases}$

Figura 5: $\begin{cases} P = 4b = \sqrt{2}l \\ A = b^2 = \frac{l^2}{8} \end{cases}$

$$\text{Figura 6:}\begin{cases} P = 2b + c = \dfrac{\sqrt{2}}{2}l + \dfrac{l}{2} = \left(\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}\right)l \\ A = \dfrac{b \cdot b}{2} = \dfrac{l^2}{16} \end{cases}$$

$$\text{Figura 7:}\begin{cases} P = 2b + 2c = \dfrac{\sqrt{2}}{2}l + l = \left(1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)l \\ A = \dfrac{c \cdot c}{2} = \dfrac{l^2}{8} \end{cases}$$

111 ●●

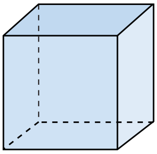
¿Cuánto mide el área de la cara de un cubo cuyo volumen es 9 cm³? Expresa el resultado como radical y como potencia.

$\text{Arista}^3 = 9 \text{ m}^3 \rightarrow \text{Arista} = \sqrt[3]{9} \text{ m}$

$\text{Área de la cara} = \sqrt[3]{9} \cdot \sqrt[3]{9} = \sqrt[3]{9^2} = \sqrt[3]{81} \text{ m}^2 = 3^{\frac{4}{3}} \text{ m}^2$

112 ●●

¿Cuánto mide la arista de un cubo cuyo volumen es 6 m³? Expresa el resultado en forma de radicales.



$\text{Arista}^3 = 6 \text{ m}^3 \rightarrow \text{Arista} = \sqrt[3]{6} \text{ m}$

113 ●●

Si el volumen de un cubo es 20 cm³, halla el valor de la suma de sus aristas.

$\text{Arista}^3 = 20 \text{ cm}^3 \rightarrow \text{Arista} = \sqrt[3]{20} \text{ cm}$

$\text{Suma de aristas} = 12 \cdot \sqrt[3]{20} \text{ cm}$

114 ●●

Con los datos de la actividad anterior, calcula la superficie lateral del cubo.

$\text{Arista}^3 = 20 \text{ cm}^3 \rightarrow \text{Arista} = \sqrt[3]{20} \text{ cm}$

$\text{Área de la cara} = \sqrt[3]{20^2} \text{ cm}^2$

$\text{Área lateral} = 6\sqrt[3]{20^2} = 12\sqrt[3]{50} \text{ cm}^2$

115 ●●●

Generaliza los resultados de las actividades anteriores, dando el valor de la arista y la superficie lateral de un cubo en función de su volumen.

$\text{Arista}^3 = \text{Volumen} \rightarrow \text{Arista} = \sqrt[3]{\text{Volumen}}$

$\text{Área de la cara} = \sqrt[3]{\text{Volumen}^2}$

$\text{Área lateral} = 6\sqrt[3]{\text{Volumen}^2}$

116 ●●●

Considera que *A*, *B*, *C* y *D* son cuatro localidades. La distancia entre *A* y *B* es 48 km, con un error de 200 m, y la distancia entre *C* y *D* es 300 m, con un error de 2,5 m. ¿Qué medida es más adecuada? ¿Por qué?

Comparamos los errores relativos: $\dfrac{200}{48.000} = 0{,}0041\overset{\frown}{6} < \dfrac{2{,}5}{300} = 0{,}008\overset{\frown}{3}$

Es más adecuada la medida de la distancia entre *C* y *D* por tener menor error relativo.

117 **Escribe aproximaciones decimales del número 6,325612, con las siguientes cotas del error absoluto.**

a) 0,001 **c) 0,01**
b) 0,0005 **d) 0,5**

a) 6,347 c) 6,316
b) 6,3252 d) 6,83

118 **Justifica de qué orden tendríamos que tomar el redondeo de un número irracional para que la cota del error absoluto fuera menor que una millonésima.**

El orden del redondeo sería a las diezmillonésimas.

119 **Reflexiona y responde.**

a) ¿En qué casos ocurre que $\sqrt{a} < a$?
b) ¿Y en qué casos ocurre que $\sqrt{a} > a$?

a) $\sqrt{a} < a$, cuando $0 < a < 1$.
b) $\sqrt{a} > a$, cuando $a > 1$.

120 **Racionaliza.**

a) $\dfrac{1}{1+\sqrt[3]{a}}$ **b)** $\dfrac{1}{1-\sqrt[3]{a}}$

a) $\dfrac{1}{1+\sqrt[3]{a}} = \dfrac{1-\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{a^2}}{\left(1+\sqrt[3]{a}\right)\cdot\left(1-\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{a^2}\right)} = \dfrac{1-\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{a^2}}{1+a}$

b) $\dfrac{1}{1-\sqrt[3]{a}} = \dfrac{1+\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{a^2}}{\left(1-\sqrt[3]{a}\right)\cdot\left(1+\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{a^2}\right)} = \dfrac{1+\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{a^2}}{1-a}$

121 **Explica cómo se racionalizan las fracciones del tipo** $\dfrac{1}{\sqrt[2^n]{a}-\sqrt[2^n]{b}}$.

$$\frac{1}{\sqrt[2^n]{a}-\sqrt[2^n]{b}} = \frac{\left(\sqrt[2^n]{a}+\sqrt[2^n]{b}\right)}{\left(\sqrt[2^n]{a}-\sqrt[2^n]{b}\right)\cdot\left(\sqrt[2^n]{a}+\sqrt[2^n]{b}\right)} = \frac{\left(\sqrt[2^n]{a}+\sqrt[2^n]{b}\right)}{\sqrt[2^n-2]{a}-\sqrt[2^n-2]{b}}$$

Volvemos a racionalizar hasta que eliminamos totalmente las raíces del denominador.

$$\frac{1}{\sqrt[2^n]{a}-\sqrt[2^n]{b}} = \frac{\left(\sqrt[2^n]{a}+\sqrt[2^n]{b}\right)}{\sqrt[2^n-2]{a}-\sqrt[2^n-2]{b}} = \frac{\left(\sqrt[2^n]{a}+\sqrt[2^n]{b}\right)\cdot\left(\sqrt[2^n-2]{a}+\sqrt[2^n-2]{b}\right)}{\sqrt[2^n-4]{a}-\sqrt[2^n-4]{b}} = \dots$$

$$\dots = \frac{\left(\sqrt[2^n]{a}+\sqrt[2^n]{b}\right)\cdot\left(\sqrt[2^n-2]{a}+\sqrt[2^n-2]{b}\right)\cdot\ldots\cdot\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)}{a-b}$$

EN LA VIDA COTIDIANA

122 ●●● **Un equipo de ingenieros aeronáuticos va a presentar un proyecto para la construcción de un nuevo avión. Por ello quieren construir una maqueta. Sin embargo, se han encontrado con un problema.**

Para no cometer errores en la construcción, se plantean cómo trazar un segmento que mida exactamente $\sqrt{5}$ cm.

Así, el equipo ha resuelto el problema para poder realizar la maqueta.

Otra de las piezas va a ser un rectángulo que mida $\dfrac{7+\sqrt{7}}{2}$ cm de largo y $4\sqrt{2}$ cm de ancho. ¿Cómo conseguirán dibujarlo con precisión?

Una vez conocido el segmento de $\sqrt{5}$ cm, trazamos el segmento de $\sqrt{6}$ cm mediante un triángulo rectángulo, de catetos 1 cm y $\sqrt{5}$ cm, y se hace lo mismo con el segmento de $\sqrt{7}$ cm con un triángulo de catetos 1 cm y $\sqrt{6}$ cm.

Teniendo el segmento de $\sqrt{7}$ cm, le añadimos 7 cm prolongando la recta, con lo que resulta un segmento de $7+\sqrt{7}$ cm.

Trazamos la mediatriz del segmento y conseguimos un segmento de $\frac{7+\sqrt{7}}{2}$ cm.

Para el otro lado del rectángulo, trazamos primero un segmento de $\sqrt{2}$ cm, mediante un triángulo rectángulo de catetos 1 cm, y proyectamos cuatro veces el segmento utilizando un compás, por lo que conseguimos un segmento de $4\sqrt{2}$ cm.

123 ●●● **En un campamento, los monitores han pedido a los chicos que se agrupen, pinten un mural y, después, lo enmarquen.**

El grupo de Juan ha hecho un mural cuya área mide 2 m^2 y quiere enmarcarlo. Necesitan calcular la longitud del lado, pero no disponen de reglas para medir ni calculadoras.

El monitor les pide que den la longitud con precisión de milímetros, por lo que deben determinar los tres primeros decimales de $\sqrt{2}$.

Los chicos piensan en rectángulos cuya área coincida con el área del mural y en dimensiones cada vez más parecidas entre sí.

A continuación, toman un rectángulo cuya base es la media entre la base y la altura del anterior: $\frac{2+1}{2}=\frac{3}{2}$; así, la altura debe ser $2:\frac{3}{2}=\frac{4}{3}$, y tenemos que: $\frac{4}{3}<\sqrt{2}<\frac{3}{2}$.

Continuando este proceso, como la diferencia entre la base y la altura de estos rectángulos es cada vez menor y $\sqrt{2}$ siempre está comprendido entre ellas, Juan procede así hasta que las tres primeras cifras de la base y la altura del rectángulo sean iguales.

¿Cuántos pasos debe dar Juan para lograrlo?

PRIMER PASO:

$$\frac{4}{3} < \sqrt{2} < \frac{3}{2} \rightarrow \text{Cota de error: } \frac{1}{6}$$

SEGUNDO PASO:

$$\frac{\frac{4}{3} + \frac{3}{2}}{2} = \frac{17}{12} \rightarrow 2 : \frac{17}{12} = \frac{24}{17}$$

$$\frac{24}{17} < \sqrt{2} < \frac{17}{12} \rightarrow \text{Cota de error: } \frac{1}{204}$$

TERCER PASO:

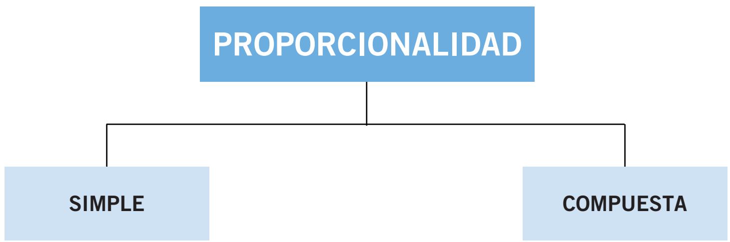
$$\frac{\frac{17}{12} + \frac{24}{17}}{2} = \frac{577}{408} \rightarrow 2 : \frac{577}{408} = \frac{816}{577}$$

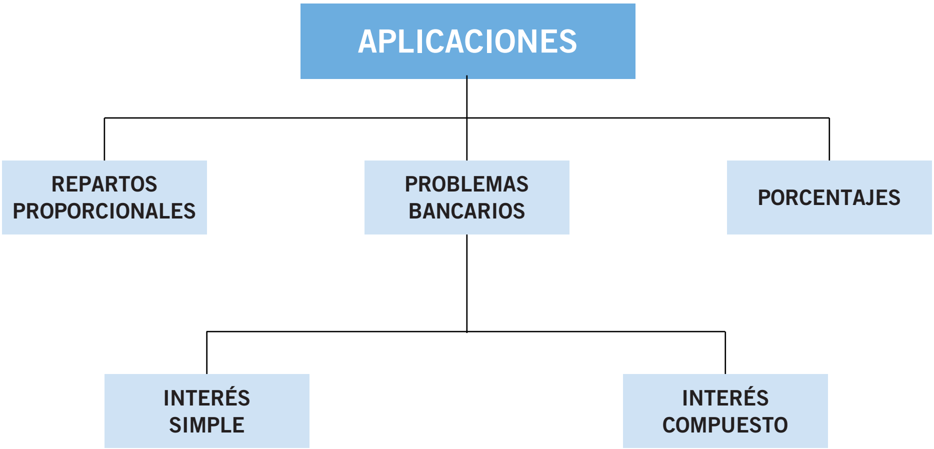
$$\frac{816}{577} < \sqrt{2} < \frac{577}{408} \rightarrow \text{Cota de error: } \frac{1}{235.416}$$

La cota es ya menor que 1 milímetro.

$$\sqrt{2} \simeq \frac{577}{408} = 1{,}41421$$

4 Problemas aritméticos





El espíritu del Samurái

La gota de agua recorrió lentamente el filo de la espada hasta que, al llegar a la punta, se precipitó hacia el suelo y, rompiéndose en mil pedazos, desapareció entre el polvo.

El tiempo se detuvo y, en su mente, Takakazu Seki vio reflejada su propia existencia: la vida del guerrero siempre pende de un hilo; además, hacía ochenta años de las últimas batallas y los samuráis habían perdido su gloria. Pensó en que, cuando le llegase la muerte, su recuerdo también desaparecería entre el polvo.

El sonido de la voz de su hijo, recitando partes del código de conducta, lo sacó de su meditación.

–Un samurái no se rinde. La derrota es deshonrosa…

Takakazu, con gesto brusco, dio por terminado el entrenamiento, enfundó su espada y se volvió hacia su hijo.

–Un samurái no se rinde…, aunque la lucha sea consigo mismo.

El muchacho se encogió de hombros mientras su padre pasaba al interior de la casa, donde comenzó a escribir en una tablilla mientras murmuraba:

–¡Yo no desapareceré en el polvo! No se contarán mis hazañas en batalla, pero mi legado no se olvidará.

Takakazu Seki Kowa fue un samurái que pasó a la historia por sus contribuciones matemáticas. Fundó una escuela de matemáticas donde, entre otras cuestiones, se podía aprender a resolver problemas aritméticos.

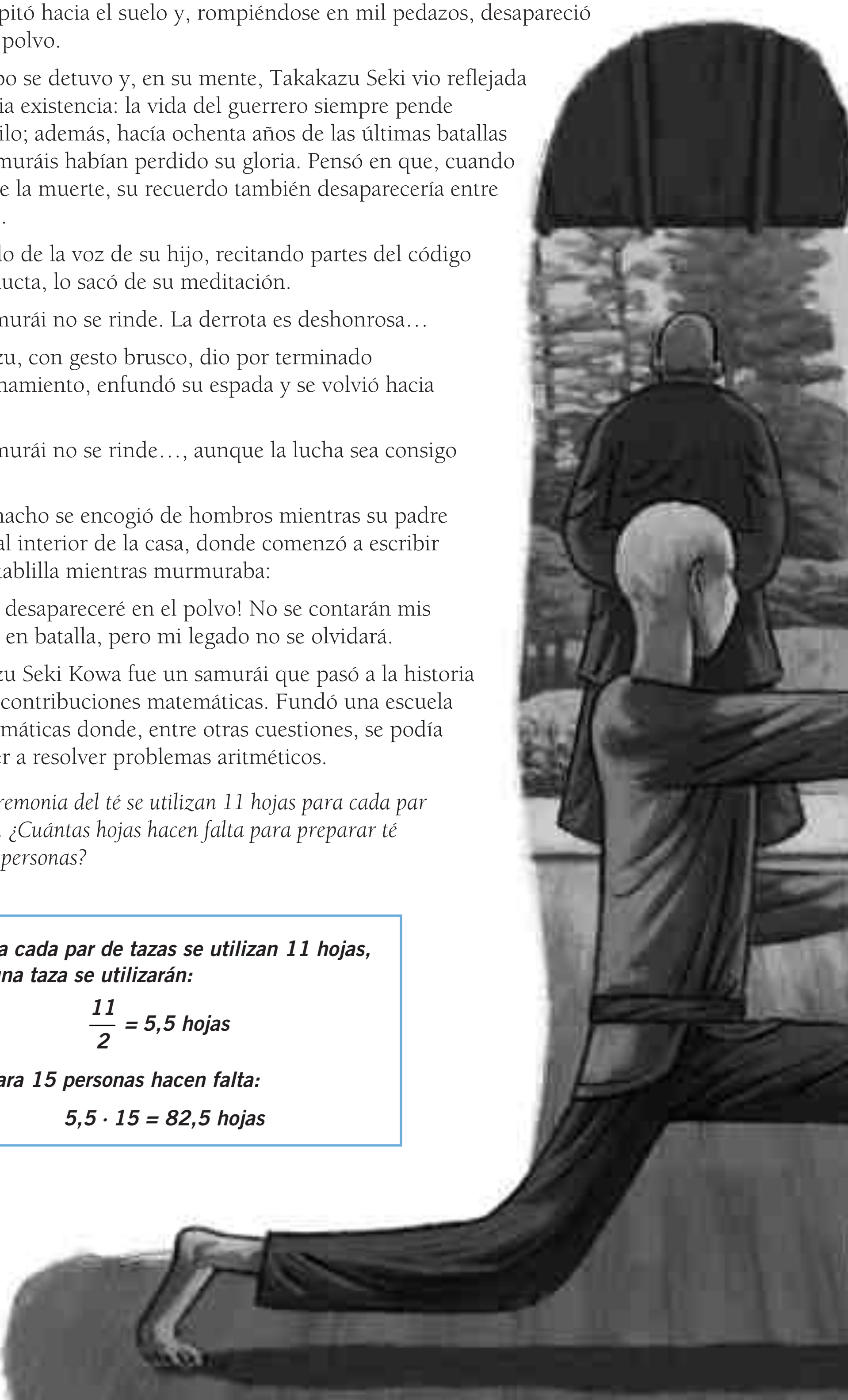
En la ceremonia del té se utilizan 11 hojas para cada par de tazas. ¿Cuántas hojas hacen falta para preparar té para 15 personas?

Si para cada par de tazas se utilizan 11 hojas, para una taza se utilizarán:

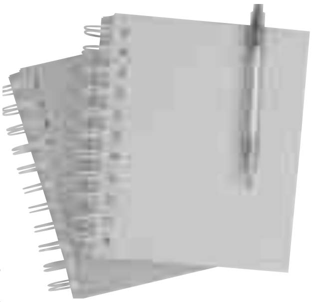
$$\frac{11}{2} = 5{,}5 \text{ hojas}$$

Así, para 15 personas hacen falta:

$$5{,}5 \cdot 15 = 82{,}5 \text{ hojas}$$



Problemas aritméticos



EJERCICIOS

001 **Pedro y María tardan 20 minutos en redactar las 4 primeras páginas de un trabajo. Si el trabajo tiene 22 páginas, ¿cuánto tiempo emplearán en redactarlo?**

Las magnitudes tiempo y número de páginas redactadas son directamente proporcionales.

$$\begin{array}{lcl} \underline{\textbf{Páginas}} & & \underline{\textbf{Tiempo (min)}} \\ 4 & \longrightarrow & 20 \\ 22 & \longrightarrow & x \end{array} \Bigg\} \rightarrow \frac{4}{22} = \frac{20}{x} \rightarrow x = \frac{20 \cdot 22}{4} = 110$$

Emplearán 110 minutos en redactar el trabajo.

002 **Félix tiene una conexión a Internet con una velocidad de 512 kbps. Cada uno de sus dos ordenadores tienen una velocidad de 256 kbps. ¿Qué velocidad tendría cada ordenador si estuvieran conectados seis ordenadores?**

Las magnitudes velocidad y número de ordenadores son inversamente proporcionales.

$$\begin{array}{lcl} \underline{\textbf{Ordenadores}} & & \underline{\textbf{Velocidad (kbps)}} \\ 2 & \longrightarrow & 256 \\ 6 & \longrightarrow & x \end{array} \Bigg\} \rightarrow \frac{2}{6} = \frac{x}{256} \rightarrow x = \frac{2 \cdot 256}{6} = 85{,}333\ldots$$

Si estuvieran conectados seis ordenadores, la velocidad de cada uno sería de 85,3 kbps.

003 **Pon dos ejemplos de magnitudes directamente proporcionales y otros dos de magnitudes inversamente proporcionales.**

Directamente proporcionales:

Peso de una cantidad de plátanos y precio que cuestan.

Tiempo que andamos y distancia recorrida.

Inversamente proporcionales:

Longitud de una tapia y tiempo que se tarda en construir.

Número de obreros y tiempo que tardan en descargar un camión.

004 **Reparte 1.000 en partes directa e inversamente porporcionales a 5, 8 y 12.**

Directamente proporcionales:

$$\frac{1.000}{5 + 8 + 12} = 40 \rightarrow \begin{cases} 5 \cdot 40 = 200 \\ 8 \cdot 40 = 320 \\ 12 \cdot 40 = 480 \end{cases}$$

Inversamente proporcionales:

$$\frac{1.000}{\frac{1}{5}+\frac{1}{8}+\frac{1}{2}} = 2.448,98 \rightarrow \begin{cases} \frac{1}{5}\cdot 2,448,98 = 489,80 \\ \frac{1}{8}\cdot 2,448,98 = 306,12 \\ \frac{1}{2}\cdot 2448,98 = 204,08 \end{cases}$$

005 **Reparte 1 en partes directamente prooporcionales a $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{3}$ y $\frac{1}{2}$.**

$$\frac{1}{\frac{1}{5}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}} = 0,97 \rightarrow \begin{cases} \frac{1}{5}\cdot 0,97 = 0,19 \\ \frac{1}{3}\cdot 0,97 = 0,32 \\ \frac{1}{2}\cdot 0,97 = 0,48 \end{cases}$$

006 **Si reparto 1.200 € proporcionalmente a 5 y 6, y le doy 500 € a 6 y 700 € a 5, ¿ha sido un reparto inversamente proporcional?**

Si el reparto es inversamente proporcional:

$$\frac{1.200}{\frac{1}{5}+\frac{1}{6}} = 3.272,72 \rightarrow \begin{cases} \frac{1}{5}\cdot 3.272 = 654,55 \neq 700 \\ \frac{1}{6}\cdot 3.272,72 = 545,45 \neq 500 \end{cases}$$

Por lo que no están repartidos de forma inversamente proporcional.

007 **Si 5 albañiles tardan 2 días en hacer 100 m de pared, ¿cuántos metros de pared construirán 7 albañiles en 3 días?**

Tenemos tres magnitudes relacionadas de forma proporcional:

Albañiles – Días trabajados – Metros de pared construida

Prop. inversa

Prop. directa

Albañiles		**Días**		**Metros**
5	$\longrightarrow$	2	$\longrightarrow$	100
7	$\longrightarrow$	3	$\longrightarrow$	x

$$\frac{5}{7} \cdot \frac{2}{3} = \frac{100}{x} \rightarrow x = \frac{100 \cdot 7 \cdot 3}{5 \cdot 2} = 210$$

Luego 7 albañiles trabajando 3 días construirán 210 m de pared.

008 **Un equipo de 4 personas planta 1.152 pinos en 3 días. ¿Cuántos pinos plantarán 6 personas en 2 días?**

Tenemos tres magnitudes relacionadas de forma proporcional:
Obreros – Pinos – Días trabajados

Prop. inversa

Prop. directa

Obreros		**Días**		**Pinos**
4	$\longrightarrow$	3	$\longrightarrow$	1.152
6	$\longrightarrow$	2	$\longrightarrow$	x

$$\frac{4}{6} \cdot \frac{3}{2} = \frac{1.152}{x} \rightarrow x = \frac{1.152 \cdot 6 \cdot 2}{4 \cdot 3} = 1.152$$

Es decir, 6 obreros trabajando 2 días plantarán 1.152 pinos.

009 **Un pintor cobra 1.600 € por pintar 210 m de valla en 4 días. Si al final tarda 5 días, ¿cuánto dinero ha perdido?**

El pintor seguirá ganando el mismo dinero, 1.600 € y los metros pintados también seguirán siendo los mismos, 210 m. Si lo hiciera en 4 días ganaría 1.600 : 4 = 300 € diarios, por lo si tardara 5 días perdería el salario de un día, 400 €.

010 **Para construir una vivienda 4 obreros han trabajado 7 horas diarias durante 90 días. Si aumentamos la jornada laboral a 8 horas al día y contratamos 2 obreros más, ¿cuánto se tardará en acabar la vivienda?**

Prop. inversa

Prop. inversa

Obreros		**Horas**		**Días**
4	$\longrightarrow$	7	$\longrightarrow$	90
6	$\longrightarrow$	8	$\longrightarrow$	x

$$\frac{6}{4} \cdot \frac{8}{7} = \frac{90}{x} \rightarrow x = \frac{4 \cdot 7 \cdot 90}{6 \cdot 8} = 52{,}5$$

Se tardará en acabar la vivienda 52 días y medio.

011 **Con 2 motosierras se hacen 6.000 kg de leña en 3 días.**

a) ¿Cuántos días son necesarios para hacer 9 toneladas de leña con 5 motosierras?

b) ¿Cuántos kilos de leña hace una motosierra en un día?

Las tres magnitudes están relacionadas de forma proporcional.

a)

Prop. inversa

Prop. directa

Motosierras		**Leña**		**Días**
2	$\longrightarrow$	6.000	$\longrightarrow$	3
5	$\longrightarrow$	9.000	$\longrightarrow$	x

$$\frac{5}{2}\cdot\frac{6.000}{9.000}=\frac{3}{x}\rightarrow x=\frac{2\cdot 9.000\cdot 3}{5\cdot 6.000}=1{,}8$$

1,8 días = 1 día, 19 horas y 12 minutos. Es necesario 1 día, 19 horas y 12 minutos para hacer 9 t de leña con 5 motosierras.

b) 2 motosierras hacen 6.000 kg de leña en 3 días.

2 motosierras harán $\frac{6.000}{3}=2.000$ kg de leña en 1 día.

1 motosierra hará $\frac{2.000}{2}=1.000$ kg de leña en 1 día.

012 **Un grupo de 25 personas escribe 20 tomos de una enciclopedia en 8 meses. Si se añaden 4 tomos a la obra y se incrementa el número de personas a 32:**

a) ¿Cuánto tiempo tardarán en escribir la enciclopedia?

b) ¿Cuánto tiempo tardarían si se realizan 24 tomos y son 10 personas trabajando?

a) Tenemos tres magnitudes relacionadas de forma proporcional:

Personas – Tomos – Tiempo empleado

Prop. inversa

Prop. directa

Personas		**Tomos**		**Tiempo (meses)**
25	$\longrightarrow$	20	$\longrightarrow$	8
32	$\longrightarrow$	24	$\longrightarrow$	x

$$\frac{32}{25}\cdot\frac{20}{24}=\frac{8}{x}\rightarrow x=\frac{25\cdot 24\cdot 8}{32\cdot 20}=7{,}5$$

Tardarán 7 meses y medio en escribir la enciclopedia.

Prop. inversa

Prop. directa

Personas		Tomos		Tiempo (meses)
25	$\longrightarrow$	20	$\longrightarrow$	8
10	$\longrightarrow$	24	$\longrightarrow$	x

$$\frac{10}{25} \cdot \frac{20}{24} = \frac{8}{x} \rightarrow x = \frac{25 \cdot 24 \cdot 8}{10 \cdot 20} = 24$$

Por tanto, tardarán 24 meses en escribir 24 tomos.

013 Si un embalse con capacidad máxima de 200 hm³ está al 45 %, ¿qué cantidad de agua contiene?

$$45\% \text{ de } 200 = \frac{45}{100} \cdot 200 = 90 \text{ hm}^3$$

El embalse contiene 90 hm^3 de agua.

014 Un jugador de baloncesto anota 10 de los 25 tiros libres que ha realizado. ¿Cuál ha sido su porcentaje de acierto?

Conocemos la parte y el total, y queremos calcular el porcentaje.

$$10 = \frac{k}{100} \cdot 25 \rightarrow k = \frac{10 \cdot 100}{25} = 40$$

Luego su porcentaje de acierto es del 40 %.

015 Si he escrito 5 páginas de un total de 16, ¿cuál es el porcentaje de páginas escritas? ¿Cuántas páginas me quedan por escribir y qué porcentaje representan?

Conocemos la parte y el total, y queremos calcular el porcentaje.

$$5 = \frac{k}{100} \cdot 16 \rightarrow k = \frac{5 \cdot 100}{16} = 31{,}25$$

Luego el porcentaje de páginas escritas es del 31,25 %.

Me quedan por escribir 9 páginas, lo cual representa el $100 - 31{,}25 = 68{,}75$ %.

016 Se ha subido el precio del café de 1 € a 1,05 €, y los refrescos, de 1,10 € a 1,15 €. ¿Cuál es el tanto por ciento de subida en cada caso? ¿Ha sido proporcional?

Conocemos la parte y el total, y queremos calcular el porcentaje.

El precio del café ha subido: $1{,}05 - 1 = 0{,}05$ €

$$0{,}05 = \frac{k}{100} \cdot 1 \rightarrow k = 0{,}05 \cdot 100 = 5$$

El precio del café ha subido un 5 %.

El precio de los refrescos ha subido: 1,15 − 1,10 = 0,05 €

$$0{,}05 = \frac{k}{100} \cdot 1{,}10 \rightarrow k = \frac{0{,}05 \cdot 100}{1{,}10} = 45$$

El precio de los refrescos ha subido un 4,5 %.

La subida no ha sido proporcional al precio, pues en ambos casos ha aumentado la misma cantidad, 0,05 €.

017 **Ana tiene un sueldo bruto mensual de 1.600 €. Calcula cuánto cobra Ana si a su sueldo, se le aplican unas retenciones del 28 % de su salario bruto.**

El sueldo de Ana disminuye en un 28 %.

$$(100 - 28)\,\%\ \text{de}\ 1.600 = \left(1 - \frac{28}{100}\right) \cdot 1.600 = 1.152$$

Ana cobra 1.152 €.

018 **Un producto cuesta 22 € por unidad. Si se pagan unas tasas aduaneras del 20 % y se quiere obtener un beneficio del 3 %, ¿cuál debe ser su precio?**

Se trata de porcentajes encadenados:

$$22 \xrightarrow{\cdot\,1{,}20} 26{,}4 \xrightarrow{\cdot\,1{,}03} 27{,}192$$

El precio del producto debe ser de 27,19 €.

019 **El precio de un artículo con IVA es de 16,50 €. ¿Cuál es el precio sin IVA?**

El precio con IVA es 116 % del precio inicial.

El precio sin IVA es: $\frac{16{,}50}{1{,}16} = 14{,}22$ €

020 **Calcula el interés que obtendremos si invertimos un capital de 100 € a un rédito del 3,5 % durante un período de 2 años y medio.**

$$\left.\begin{array}{l} C = 100\ \text{€} \\ t = 2{,}5\ \text{años} \\ r\,\% = 3{,}5\,\% \end{array}\right\} \rightarrow i = \frac{C \cdot r \cdot t}{100} = \frac{100 \cdot 3{,}5 \cdot 2{,}5}{100} = 8{,}75\ \text{€}$$

Se obtiene un interés de 8,75 €.

021 **Si realizamos una inversión al 4,5 % durante 2 años, ¿cuál es el capital que he invertido si el capital que me devuelven asciende a 2.346 €?**

$$\left.\begin{array}{l} t = 2 \text{ años} \\ r\,\% = 4{,}5\,\% \\ i = 2.346\text{ €} - C \end{array}\right\} \rightarrow i = \frac{C \cdot r \cdot t}{100} = 2.346 - C = \frac{C \cdot 4{,}5 \cdot 2}{100}$$

$$\rightarrow 234.600 - 100C = 9C \rightarrow C = \frac{234.600}{109} = 2.152{,}30\text{ €}$$

El capital que he invertido es 2.152,30 €.

022 **Laura pide un préstamo de 4.000 € y devuelve 5.080 € en un pago único con intereses al cabo de 3 años. Sabiendo que es un interés simple, calcula el rédito del préstamo.**

$$\left.\begin{array}{l} C = 4.000\text{ €} \\ t = 3 \text{ años} \\ i = 5.080 - 4.000 = 1.080\text{ €} \end{array}\right\} \rightarrow i = \frac{C \cdot r \cdot t}{100} \rightarrow 1.080 = \frac{4.000 \cdot r \cdot 3}{100}$$

$$\rightarrow r = \frac{1.080 \cdot 100}{4.000 \cdot 3} = 9\,\%$$

El rédito del préstamo es del 9 %.

023 **¿Cuánto tiempo debo mantener 3.000 € en un depósito a interés simple con un rédito del 3 % para obtener unos intereses de 225 €?**

$$\left.\begin{array}{l} C = 3.000\text{ €} \\ r\,\% = 3\,\% \\ i = 225\text{ €} \end{array}\right\} \rightarrow i = \frac{C \cdot r \cdot t}{100} \rightarrow 225 = \frac{3.000 \cdot 3 \cdot t}{100}$$

$$\rightarrow t = \frac{225 \cdot 100}{3.000 \cdot 3} = 2{,}5 \text{ años}$$

Debo mantener el dinero en depósito 2 años y medio.

024 **Calcula el interés obtenido al invertir 2.000 €, a interés compuesto durante 10 años, con un rédito del 2,75 %.**

$$C_f = C_i \cdot \left(1 + \frac{r}{100}\right)^t = 2.000 \cdot \left(1 + \frac{2{,}75}{100}\right)^{10} = 2.623{,}30\text{ €}$$

$i = C_f - C_i = 2.623{,}30 - 2.000 = 623{,}30$ € $\rightarrow$ Los intereses son 623,30 €.

025 **Averigua el capital que hemos invertido a interés compuesto durante 2 años al 5 % para que produzca un capital final de 200 €.**

$$C_f = C_i \cdot \left(1 + \frac{r}{100}\right)^t \rightarrow 200 = C_i \cdot \left(1 + \frac{5}{100}\right)^2 \rightarrow C_i = \frac{200}{1{,}05^2} = 181{,}40\text{ €}$$

El capital que hemos invertido es 181,40 €.

026 **Una cantidad de dinero invertida, a interés compuesto durante 5 años al 4 %, produce unos intereses de 244 €. ¿Qué cantidad hemos invertido?**

$$C_f = C_i \cdot \left(1 + \frac{r}{100}\right)^t \to C_f - C_i = C_i \cdot \left(1 + \frac{r}{100}\right)^t - C_i$$

$$\to 244 = C_i \cdot (1{,}04^5 - 1) \to C_i = \frac{244}{1{,}04^5 - 1} = 1.126{,}23 \text{ €}$$

027 **¿Qué es más rentable, invertir 1.000 € durante 3 años al 4 % a interés simple o a interés compuesto?**

INTERÉS SIMPLE

$$\left.\begin{array}{l} C = 1.000 \text{ €} \\ t = 3 \text{ años} \\ r\,\% = 4\,\% \end{array}\right\} \to i = \frac{C \cdot r \cdot t}{100} = \frac{1.000 \cdot 4 \cdot 3}{100} = 120 \text{ €}$$

A interés simple, el capital produce 120 € de interés.

INTERÉS COMPUESTO

$$C_f = C_i \cdot \left(1 + \frac{r}{100}\right)^t = 1.000 \cdot \left(1 + \frac{4}{100}\right)^3 = 1.000 \cdot 1{,}04^3 = 1.124{,}86 \text{ €}$$

$$i = C_f - C_i = 1.124{,}86 - 1.000 = 124{,}86 \text{ €}$$

A interés compuesto, los intereses obtenidos son 124,86 €.

Luego es más rentable hacer la inversión a interés compuesto.

ACTIVIDADES

028 **Por el alquiler de un piso pago 1.080 € al trimestre.**
● **¿Cuánto pagaré por 7 meses de alquiler?**

Las magnitudes tiempo y precio son directamente proporcionales.

$$\begin{array}{ccc} \underline{\textbf{Tiempo (meses)}} & & \underline{\textbf{Precio (€)}} \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{rcl} 3 & \longrightarrow & 1.080 \\ 7 & \longrightarrow & x \end{array}\right\} \to \frac{3}{7} = \frac{1.080}{x} \to x = \frac{1.080 \cdot 7}{3} = 2.520$$

Por 7 meses pagaré 2.520 €.

029 **¿Cuántos trabajadores se precisan para terminar una obra en 20 días,**
● **si 28 trabajadores lo hacen en 10 días?**

Las magnitudes tiempo y número de trabajadores son inversamente proporcionales.

$$\begin{array}{ccc} \underline{\textbf{Tiempo (días)}} & & \underline{\textbf{Trabajadores}} \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{rcl} 10 & \longrightarrow & 28 \\ 20 & \longrightarrow & x \end{array}\right\} \to \frac{10}{20} = \frac{x}{28} \to x = \frac{28 \cdot 10}{20} = 14$$

Se precisan 14 trabajadores para terminar la obra.

Problemas aritméticos

030 **Para elaborar una receta para 6 personas se necesitan 240 g de salmón. Averigua qué cantidad de salmón necesito para 8 personas.**

Las magnitudes número de personas y cantidad de salmón son directamente proporcionales.

$$\begin{array}{ccc} \underline{\textbf{Personas}} & & \underline{\textbf{Cantidad (g)}} \\ 6 & \longrightarrow & 240 \\ 8 & \longrightarrow & x \end{array} \Bigg\} \rightarrow \frac{6}{8} = \frac{240}{x} \rightarrow x = \frac{240 \cdot 8}{6} = 320$$

Para 8 personas necesito 320 g de salmón.

031 **Carlos pintó su habitación con 6 botes, de 4 kg de pintura cada uno, pero ahora solo venden botes de 3 kg. ¿Cuántos botes necesita para volver a pintarla?**

Las magnitudes número de botes y peso de un bote son inversamente proporcionales.

$$\begin{array}{ccc} \underline{\textbf{Botes}} & & \underline{\textbf{Peso (kg)}} \\ 6 & \longrightarrow & 4 \\ x & \longrightarrow & 3 \end{array} \Bigg\} \rightarrow \frac{6}{x} = \frac{3}{4} \rightarrow x = \frac{6 \cdot 4}{3} = 8$$

Carlos necesita 8 botes.

032 **Con el dinero que tengo puedo gastar 15 € diarios durante 6 días. Si quiero que me dure 9 días, ¿cuánto puedo gastar al día?**

Las magnitudes gasto diario y número de días son inversamente proporcionales.

$$\begin{array}{ccc} \underline{\textbf{Tiempo (días)}} & & \underline{\textbf{Gasto diario (€)}} \\ 6 & \longrightarrow & 15 \\ 9 & \longrightarrow & x \end{array} \Bigg\} \rightarrow \frac{6}{9} = \frac{x}{15} \rightarrow x = \frac{6 \cdot 15}{9} = 10$$

Puedo gastar 10 € al día.

033 **Un cohete tarda 2 minutos en alcanzar una velocidad de 30.000 km/h. A ese ritmo, ¿qué velocidad puede alcanzar en 5 minutos?**

Las magnitudes tiempo y velocidad son directamente proporcionales.

$$\begin{array}{ccc} \underline{\textbf{Tiempo (min)}} & & \underline{\textbf{Velocidad (km/h)}} \\ 2 & \longrightarrow & 30.000 \\ 5 & \longrightarrow & x \end{array} \Bigg\} \rightarrow \frac{2}{5} = \frac{30.000}{x} \rightarrow x = \frac{30.000 \cdot 5}{2} = 75.000$$

En 5 minutos puede alcanzar una velocidad de 75.000 km/h.

034 **La densidad media del cuerpo humano es 1,15 kg/ℓ.**

a) ¿Cuál es el volumen de una persona que pesa 65 kg?

b) ¿Cuánto pesará una persona que tiene un volumen de 42 ℓ?

a) Las magnitudes peso y volumen son directamente proporcionales.

Peso (kg)	Volumen (ℓ)
1,15	1
65	x

$$\left.\begin{array}{l}1{,}15 \longrightarrow 1\\ 65 \longrightarrow x\end{array}\right\} \rightarrow \frac{1{,}15}{65} = \frac{1}{x} \rightarrow x = \frac{65 \cdot 1}{1{,}15} = 56{,}5$$

El volumen de una persona que pesa 65 kg es 56,5 ℓ.

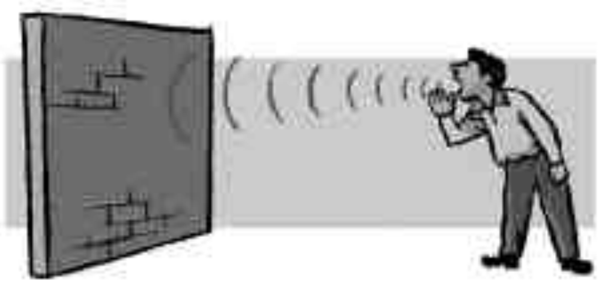
b)

Peso (kg)	Volumen (ℓ)
1,15	1
x	42

$$\left.\begin{array}{l}1{,}15 \longrightarrow 1\\ x \longrightarrow 42\end{array}\right\} \rightarrow \frac{1{,}15}{x} = \frac{1}{42} \rightarrow x = \frac{1{,}15 \cdot 42}{1} = 48{,}3$$

Una persona que tiene un volumen de 42 ℓ pesará 48,3 kg.

035 **Una persona está situada a 50 m de una pared y recibe el eco de su voz 3 décimas de segundo después de haber gritado.**



a) Si se coloca a 80 m de distancia, ¿cuánto tiempo tardará en escuchar su eco?

b) ¿A qué distancia se tendrá que colocar para oír su eco después de un segundo?

Las magnitudes distancia a la pared y tiempo en escuchar el eco son directamente proporcionales.

a)

Distancia (m)	Tiempo (s)
50	0,3
80	x

$$\left.\begin{array}{l}50 \longrightarrow 0{,}3\\ 80 \longrightarrow x\end{array}\right\} \rightarrow \frac{50}{80} = \frac{0{,}3}{x} \rightarrow x = \frac{80 \cdot 0{,}3}{50} = 0{,}48$$

Tardará 0,48 segundos en escuchar su eco.

b)

Distancia (m)	Tiempo (s)
50	0,3
x	1

$$\left.\begin{array}{l}50 \longrightarrow 0{,}3\\ x \longrightarrow 1\end{array}\right\} \rightarrow \frac{50}{x} = \frac{0{,}3}{1} \rightarrow x = \frac{50 \cdot 1}{0{,}3} = 166{,}67$$

Se tendrá que colocar a 166,67 m de la pared.

036 **Un camión puede transportar 9 cajas que pesan 200 kg cada una.**
Si se cargan cajas de 150 kg, ¿cuántas cajas puede llevar?

Las magnitudes son inversamente proporcionales.

Cajas	Peso (kg)
9	200
x	150

$$\left.\begin{array}{l} 9 \longrightarrow 200 \\ x \longrightarrow 150 \end{array}\right\} \rightarrow \frac{x}{9} = \frac{200}{150} \rightarrow x = \frac{200 \cdot 9}{150} = 12$$

El camión puede llevar 12 cajas de 150 kg.

037 **HAZLO ASÍ**

¿CÓMO SE RESUELVE LOS PROBLEMAS DE MEZCLAS?

Un comerciante mezcla dos tipos de café: uno de Brasil, de 9 €/kg, y otro de Colombia, de 12 €/kg. Si quiere obtener 60 kg de mezcla a 10 €/kg, ¿en qué proporción los debe mezclar?

PRIMERO. Se hace una tabla de doble entrada con los datos del problema. A la cantidad desconocida se le llama x.

	Cantidad kg	Precio (€)	Coste
Brasil	x	9	$9x$
Colombia	$60 - x$	12	$12 \cdot (60 - x)$
Mezcla	60	10	$60 \cdot 10$

SEGUNDO. Establecemos una ecuación con la relación entre los costes.

Del coste obtenemos la siguiente relación.

$$9x + 12 \cdot (60 - x) = 60 \cdot 10$$

$$3x = 120 \rightarrow x = \frac{120}{3} = 40 \text{ kg}$$

La mezcla tiene 40 kg de café de Brasil y $60 - 40 = 20$ kg de café de Colombia

TERCERO. Se calcula la proporción mediante una regla de tres.

Colombia	Brasil
20	40
1	x

$$\left.\begin{array}{l} 20 \longrightarrow 40 \\ 1 \longrightarrow x \end{array}\right\} \rightarrow x = \frac{40}{20} = 2 \text{ kg}$$

La proporción es de 2 kg de café de Brasil por 1 kg de café de Colombia

038 Halla la cantidad que hay que mezclar de café de 8,55 €/kg con café de 6,84 €/kg, para obtener 323 kg de mezcla cuyo precio sea 7,20 €/kg.

	Cantidad (kg)	Precio (€)	Coste
Café A	x	8,55	$8{,}55x$
Café B	$323-x$	6,84	$6{,}84(323-x)$
Mezcla	323	7,2	$323\cdot 7{,}2$

$$8{,}55x+6{,}84(323-x)=323\cdot 7{,}2=2.325{,}6$$

$$1{,}71x=116{,}28\ \rightarrow\ x=\frac{116{,}28}{1{,}71}=68\text{ kg}$$

La mezcla tiene 68 kg de café tipo A y $323-68=255$ kg de café tipo B.

039 Mezclamos licor de 5 €/ℓ con otro que cuesta a 3,80 €/ℓ. ¿En qué razón hay que mezclarlos para que el litro cueste a 4,20 €/ℓ?

Si A es la cantidad de litros que mezclamos del licor que cuesta 5 €/ℓ y B es la cantidad del licor de 3,80 €/ℓ:

$$5A+3{,}8B=4{,}2(A+B)\ \rightarrow\ 5A+3{,}8B=4{,}2A+4{,}2B$$

$$\rightarrow\ 5A-4{,}2A=4{,}2B-3{,}8B\ \rightarrow\ 0{,}8A=0{,}4B\ \rightarrow\ \frac{B}{A}=\frac{0{,}8}{0{,}4}=2=2$$

Es decir, cada 2 ℓ de B hay que mezclarlos con 1 ℓ de A.

040 Para cercar un terreno se proyecta plantar 30 abetos, con 60 cm de distancia entre sí. Al final se plantan con una separación de 50 cm. ¿Cuántos abetos harán falta?

Abetos — **Distancia (cm)**

$$\left.\begin{array}{l} 30 \longrightarrow 60 \\ x \longrightarrow 50 \end{array}\right\}\ \rightarrow\ \frac{x}{30}=\frac{60}{50}\ \rightarrow\ x=\frac{60\cdot 30}{50}=36$$

Harán falta 36 abetos.

041 Entre dos poblaciones hay 61 postes de teléfono, separados 15 m entre sí. Si estuvieran a 25 m de separación:

a) ¿Cuántos postes habría?

b) ¿Qué distancia hay entre las poblaciones?

a) Las magnitudes número de postes y distancia de separación son inversamente proporcionales.

Postes — **Distancia (m)**

$$\left.\begin{array}{l} 61 \longrightarrow 15 \\ x \longrightarrow 25 \end{array}\right\}\ \rightarrow\ \frac{x}{61}=\frac{15}{25}\ \rightarrow\ x=\frac{61\cdot 15}{25}=36{,}6$$

Luego serán necesarios 37 postes.

b) La distancia que hay entre las poblaciones es de $60\cdot 15=900$ metros.

Problemas aritméticos

042 La dueña de una pensión dispone de comida para alimentar a sus 18 huéspedes durante 12 días. Si el número de huéspedes aumenta en 6 personas, ¿para cuántos días tendrá comida?

Inversamente proporcional

Huéspedes		Días
18	$\longrightarrow$	12
24	$\longrightarrow$	x

$$x = \frac{18 \cdot 12}{24} = 9$$

Tendrá para 9 días.

043 Con una velocidad de 20 nudos, un barco hace una travesía en 8 horas. Halla la velocidad de otro barco que hace la misma travesía en 6 horas y media.

Inversamente proporcional

Nudos		Horas
20	$\longrightarrow$	8
x	$\longrightarrow$	6,5

$$x = \frac{20 \cdot 8}{6,5} = 24,6$$

El segundo barco irá a una velocidad de 24,6 nudos.

044 Para hacer una paella se necesitan 2 vasos de agua por cada vaso de arroz. Si se echan 4 vasos y medio de agua, ¿cuántos vasos de arroz harán falta?

Directamente proporcional

Agua		Arroz
2	$\longrightarrow$	1
4,5	$\longrightarrow$	x

$$x = \frac{4,5}{2} = 2,25$$

Se necesitarán 2,25 vasos de arroz.

045 **Un pastor tiene 640 ovejas, a las que puede alimentar durante 65 días. ¿Cuántas ovejas tiene que vender para alimentar a su rebaño 15 días más?**

Inversamente proporcional

Ovejas	Días
640 →	65
x →	80

$$x = \frac{640 \cdot 65}{80} = 520$$

Tendría que tener 520 ovejas, por lo que tiene que vender:

$640 - 520 = 120$ ovejas

046 **Tomás ha comprado por Internet 12 kg de café por 5,50 €. Por error, le han enviado 4,5 kg menos. ¿Cúanto debe pagar?**

Directamente proporcional

Café	Precio
12 →	5,50
7,5 →	x

$$x = \frac{5{,}5 \cdot 7{,}5}{12} = 3{,}44$$

Debe pagar 3,44 € por el café recibido.

047 **HAZLO ASÍ**

¿CÓMO SE RESUELVE LOS PROBLEMAS DE MÓVILES?

Juan corre a 5 km/h. Cuatro horas más tarde, sale del mismo punto Germán, que marcha a su alcance en una bicicleta a 20 km/h. ¿Cuánto tiempo tarda en alcanzarlo?

PRIMERO. Se llama x al tiempo transcurrido desde que sale el primer móvil hasta que alcanza al segundo. Para Germán, que partió 4 horas más tarde, el tiempo transcurrido será $x - 4$.

Velocidad (km/h)	Tiempo (h)
5	x
20	$x - 4$

SEGUNDO. Se establece la proporción existe entre las magnitudes y se calcula x. Como son inversamente proporcionales:

$$\frac{5}{20} = \frac{x-4}{x} \rightarrow x = \frac{80}{15} = \frac{16}{3}$$

$\frac{16}{3} = 5 + \frac{1}{3} \rightarrow$ Tarda en alcanzarlo 5 h 20 min.

048 **Un tren, a 60 km/h, sale de Madrid a las 9:00 con dirección a Bilbao. Dos horas después parte otro tren, a 100 km/h, por una vía paralela y en la misma dirección. ¿A qué distancia de Madrid alcanzará el segundo tren al primero y a qué hora?**

Llamamos x al tiempo transcurrido desde que sale el primer tren hasta que lo alcanza el segundo tren.

Para el segundo tren, que partió dos horas más tarde, el tiempo transcurrido será $x - 2$.

	Velocidad (km/h)	Tiempo (h)
Tren 1	60	x
Tren 2	100	$x - 2$

Las magnitudes velocidad y tiempo son inversamente proporcionales.

$$\frac{60}{100} = \frac{x-2}{x} \rightarrow 60x = 100x - 200 \rightarrow x = \frac{200}{40} = 5$$

Cuando el segundo tren alcanza al primero, este lleva en funcionamiento 5 h, luego son las 2 de la tarde y habrá recorrido $60 \cdot 5 = 300$ km.

049 **Una moto parte a una velocidad de 110 km/h. En el mismo instante, y en dirección contraria, un coche sale a 70 km/h. Si la distancia que los separa es de 360 km, ¿cuánto tiempo tardarán en encontrarse? ¿En qué punto del camino estarán?**

Llamamos x al espacio que recorre la moto hasta que la alcanza el coche. Para el coche, el espacio recorrido será $(360 - x)$ km.

	Velocidad (km/h)	Espacio (km)
Moto	110	x
Coche	70	$360 - x$

Las magnitudes velocidad y espacio son directamente proporcionales.

$$\frac{110}{70} = \frac{x}{360 - x} \rightarrow 39.600 - 110x = 70x \rightarrow x = \frac{39.600}{180} = 220$$

El coche y la moto se encontrarán a 220 km del punto de partida de la moto.

El momento del encuentro será:

$$\text{Tiempo} = \frac{\text{espacio}}{\text{velocidad}} = \frac{220}{110} = 2 \text{ horas}$$

Luego se encuentran aproximadamente al cabo de 2 horas.

050 **Reparte 8.100 en partes directamente proporcionales a 8, 9 y 11.**

$$\frac{8.100}{8+9+11} = 298{,}3$$

Parte correspondiente a 8 $\rightarrow$ $8 \cdot 289{,}3 = 2.314{,}4$
Parte correspondiente a 9 $\rightarrow$ $9 \cdot 289{,}3 = 2.603{,}7$
Parte correspondiente a 11 $\rightarrow$ $11 \cdot 289{,}3 = 3.182{,}3$

051 **Reparte 306 en partes inversamente proporcionales a 16, 12 y 5.**

$$\frac{306}{\frac{1}{16}+\frac{1}{12}+\frac{1}{5}} = 884{,}8$$

Parte correspondiente a 16 $\rightarrow$ $\frac{1}{16} \cdot 884{,}8 = 55{,}3$

Parte correspondiente a 12 $\rightarrow$ $\frac{1}{12} \cdot 884{,}8 = 73{,}73$

Parte correspondiente a 5 $\rightarrow$ $\frac{1}{5} \cdot 884{,}8 = 176{,}96$

052 **Reparte 665 en partes directamente e inversamente proporcionales a $\frac{2}{3}, \frac{1}{6}$ y $\frac{3}{4}$.**

Reparto en partes directamente proporcionales a $\frac{2}{3}, \frac{1}{6}$ y $\frac{3}{4}$:

$$\frac{665}{\frac{2}{3}+\frac{1}{6}+\frac{3}{4}} = 420$$

Parte correspondiente a $\frac{2}{3}$ $\rightarrow$ $\frac{2}{3} \cdot 420 = 280$

Parte correspondiente a $\frac{1}{6}$ $\rightarrow$ $\frac{1}{6} \cdot 420 = 70$

Parte correspondiente a $\frac{3}{4}$ $\rightarrow$ $\frac{3}{4} \cdot 420 = 315$

Reparto en partes inversamente proporcionales a $\frac{2}{3}, \frac{1}{6}$ y $\frac{3}{4}$

$$\frac{665}{\frac{3}{2}+6+\frac{4}{3}} = 75{,}28$$

Parte correspondiente a $\frac{2}{3}$ $\rightarrow$ $\frac{2}{3} \cdot 75{,}28 = 112{,}92$

Parte correspondiente a $\frac{1}{6}$ $\rightarrow$ $\frac{1}{6} \cdot 75{,}28 = 451{,}68$

Parte correspondiente a $\frac{3}{4}$ $\rightarrow$ $\frac{3}{4} \cdot 75{,}28 = 100{,}37$

053 ●●
Juan invierte en un negocio 300 y Ana 500 €. Si ganan 2.000 €, ¿cómo los repartirán?

Se trata de repartir las ganancias de forma directamente proporcional a la inversión.

$$\frac{2.000}{300 + 500} = 2{,}5$$

Socios	Inversión	Ganancias
Socio 1	300 €	300 · 2,5 = 750 €
Socio 2	500 €	500 · 2,5 = 1.250 €

054 ●
Un abuelo reparte 42 fotos entre sus tres nietos, de forma inversamente proporcional a sus edades, que son 2, 4 y 8 años. Averigua cuántas fotos recibe cada uno.

$$\frac{42}{\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}} = 48$$

Nietos	Edad	Fotos
Pequeño	2	1/2 · 48 = 24
Mediano	4	1/4 · 48 = 12
Mayor	8	1/8 · 48 = 6

055 ●
Dos comunidades de vecinos instalan una antena cuyo coste es de 1.560 €. Si viven 75 y 55 vecinos, respectivamente, y deciden pagar proporcionalmente, ¿cuánto debe pagar cada comunidad? ¿Y cada vecino?

$$\frac{1.560}{75 + 55} = 12$$ debe pagar cada vecino.

Comunidad	N.º de vecinos	Coste
Comunidad 1	75	75 · 12 = 900 €
Comunidad 2	55	55 · 12 = 660 €

056 ●
Cuatro camareros han de repartirse 800 € de propinas en partes proporcionales a las horas que han trabajado. ¿Cuánto recibirá cada uno, sabiendo que el primero trabajó 4 horas, el segundo 3, el tercero 6 y el cuarto 7?

Se trata de repartir las propinas en partes directamente proporcionales a las horas trabajadas.

$$\frac{800}{4 + 3 + 6 + 7} = 40$$

Camareros	Horas	Propinas
Camarero 1	4	4 · 40 = 160 €
Camarero 2	3	3 · 40 = 120 €
Camarero 3	6	6 · 40 = 240 €
Camarero 4	7	7 · 40 = 280 €

057 **Comprueba que es equivalente repartir una cantidad en partes directamente proporcionales a 3, 4 y 5, que a 6, 8 y 10. ¿Qué otros tres números podríamos emplear para que nos diera el mismo resultado? ¿Por qué?**

Reparto en partes proporcionales a 3, 4 y 5.

$$\frac{C}{3+4+5} = \frac{C}{12}$$

Parte correspondiente a 3 $\rightarrow 3 \cdot \frac{C}{12} = \frac{C}{4}$

Parte correspondiente a 4 $\rightarrow 4 \cdot \frac{C}{12} = \frac{C}{3}$

Parte correspondiente a 5 $\rightarrow 5 \cdot \frac{C}{12} = \frac{5}{12} \cdot C$

Reparto en partes proporcionales a 6, 8 y 10.

$$\frac{C}{6+8+10} = \frac{C}{24}$$

Parte correspondiente a 6 $\rightarrow 6 \cdot \frac{C}{24} = \frac{C}{4}$

Parte correspondiente a 8 $\rightarrow 8 \cdot \frac{C}{24} = \frac{C}{3}$

Parte correspondiente a 10 $\rightarrow 10 \cdot \frac{C}{24} = \frac{5}{12} \cdot C$

Podemos emplear otros tres números cualesquiera que sean proporcionales a 3, 4 y 5, respectivamente. Por ejemplo, 9, 12 y 15, pues: $\frac{3}{9} = \frac{4}{12} = \frac{5}{15}$

058 **Las ovejas de un rebaño se dividieron en dos grupos. El número de ovejas del primer grupo es proporcional a 5, y el del segundo lo es a 6. Si el rebaño menor tiene 240 ovejas, averigua las ovejas que hay en el rebaño mayor.**

Llamando x a las ovejas que hay en el rebaño menor, se obtiene la siguiente proporción:

$$\frac{5}{6} = \frac{240}{x} \rightarrow x = \frac{240 \cdot 6}{5} = 288$$

En el rebaño mayor hay 288 ovejas.

059 **Enrique aporta a un negocio 300 € durante 8 meses y Marta 500 € durante 6 meses. Si los beneficios son 216 €, ¿cómo los repartirán?**

Se trata de repartir los beneficios en partes directamente proporcionales a cada una de las aportaciones.

$$\frac{216}{300 \cdot 8 + 500 \cdot 6} = 0{,}04$$

Socios	Aportación	Beneficios
Enrique	$300 \cdot 8 = 2.400$ €	$2.400 \cdot 0{,}04 = 96$ €
Marta	$500 \cdot 6 = 3.000$ €	$3.000 \cdot 0{,}04 = 120$ €

060 **HAZLO ASÍ**

¿CÓMO SE CALCULA LA CANTIDAD REPARTIDA CONOCIENDO UNA PARTE DIRECTA O INVERSAMENTE PROPORCIONAL?

Se reparte una cantidad de forma proporcional a 8, 4 y 3. Calcula la cantidad si el reparto ha sido:

a) Directo a 8 le corresponde 800.

b) Inverso y a 8 le corresponden 30.

PRIMERO. Se calcula la constante de proporcionalidad.

a) $k = \dfrac{800}{8} = 100$

b) $30 = \dfrac{k}{8} \rightarrow k = 240$

SEGUNDO. Se halla el total.

a) $(8 + 4 + 3) \cdot 100 = 1.500$. Se han repartido 1.500.

b) $\dfrac{240}{8} + \dfrac{240}{6} + \dfrac{240}{3} = 150.$ Se han repartido 150.

061 ●● **Luis, Damián y Carlos compran un décimo de lotería. Carlos pone 10 €, Damián 6 € y Luis 4 €. El décimo es premiado y, en el reparto, a Carlos le tocan 5.000 €. ¿Cuánto le corresponde a los demás?**

Directamente proporcionales.

La constante de proporcionalidad es: $k = \dfrac{5.000}{10} = 500$

A Damián le corresponden: $6 \cdot 500 = 3.000$ €

A Luís le corresponden: $4 \cdot 500 = 2.000$ €

062 ●● **Si repartes una cantidad en partes inversamente proporcionales a 10, 7 y 3, la cantidad que le corresponde a 3 es 50. ¿Qué cantidad le corresponde a 10 y a 7?**

La constante de proporcionalidad es $k = 50 \cdot 3 = 150$.

A 10 le corresponden: $\dfrac{150}{10} = 15$

A 7 le corresponden: $\dfrac{150}{7} = 21,43$

063 **Entre dos socios ganan 10.000 €. El primero aportó 2.160 € y el segundo ganó 4.000 €. Halla el capital que aportó el segundo socio y la ganancia del primero.**

El primer socio ganó: 10.000 − 4.000 = 6.000 €

Llamando x al capital que aportó el segundo socio, se establece la siguiente proporción.

$$\frac{6.000}{4.000} = \frac{2.160}{x} \rightarrow x = \frac{4.000 \cdot 2.160}{6.000} = 1.440$$

El segundo socio aportó 1.440 €.

064 **Dos socios fundan una empresa, el primero aporta 15.000 € y el segundo 20.000 €. A los cuatro meses, el primero retira 4.000 € y el segundo 6.000 €. Al año, la ganancia ha sido de 17.000 €. Reparte esta cantidad en proporción al dinero y al tiempo invertido.**

Se trata de repartir los beneficios en partes directamente proporcionales al dinero aportado y al tiempo invertido.

Aportación Socio 1 $\rightarrow$ 15.000 · 4 + 11.000 · 8 = 148.000 €

Aportación Socio 2 $\rightarrow$ 20.000 · 4 + 14.000 · 8 = 192.000 €

$$\frac{17}{148.000 + 192.000} = 0,05$$

Socios	Aportación	Beneficios
Socio 1	148.000 €	148.000 · 0,05 = 7.400 €
Socio 2	192.000 €	192.000 · 0,05 = 9.600 €

065 **Un peregrino recorre 140 km del Camino de Santiago durante 7 días, caminando 7 horas diarias. Averigua la distancia que recorrerá en 21 días andando 3 horas al día.**

Tenemos tres magnitudes relacionadas de forma proporcional:

Kilómetros recorridos – Días – Horas diarias

Prop. inversa

Prop. inversa

km recorridos		**Días**		**Horas**
140	$\longrightarrow$	7	$\longrightarrow$	7
x	$\longrightarrow$	21	$\longrightarrow$	3

$$\frac{7}{21}\cdot\frac{7}{3}=\frac{140}{x}\rightarrow x=\frac{21\cdot 140\cdot 3}{7\cdot 7}=180$$

Recorrerá 180 km en 21 días andando 3 horas al día.

066 ●

En 6 días, Marcos tradujo un libro de 30 páginas trabajando 2 horas diarias. ¿Cuántas horas diarias tendrá que trabajar para terminar un libro de 40 páginas en 4 días, si continúa con el mismo ritmo de trabajo?

Las tres magnitudes que aparecen en el problema están relacionadas de forma proporcional.

Prop. directa

Prop. directa

Días		**Páginas**		**Horas diarias**
6	$\longrightarrow$	30	$\longrightarrow$	2
4	$\longrightarrow$	40	$\longrightarrow$	x

$$\frac{4}{6}\cdot\frac{30}{30}=\frac{2}{x}\rightarrow x=\frac{6\cdot 40\cdot 2}{4\cdot 30}=4$$

Para traducir un libro de 40 páginas en 4 días, Marcos tendrá que trabajar 4 horas diarias.

067 ●●

Para transportar 520 kg de mercancía a 80 km de distancia me han cobrado 249,60 €. ¿Qué peso podré enviar a 120 km de distancia si puedo gastar 255,60 €?

Las tres magnitudes que intervienen en el problema están relacionadas de forma proporcional.

Prop. inversa

Prop. inversa

Distancia (km)		**Coste (€)**		**Peso (kg)**
80	$\longrightarrow$	249,60	$\longrightarrow$	520
120	$\longrightarrow$	255,60	$\longrightarrow$	x

La relación de proporcionalidad distancia – peso es inversa y la relación coste – peso es directa:

$$\frac{120}{80} \cdot \frac{249{,}60}{255{,}60} = \frac{520}{x} \rightarrow x = \frac{80 \cdot 255{,}60 \cdot 520}{120 \cdot 249{,}60} = 355$$

Luego podré enviar 355 kg de peso.

068 ● **El presupuesto para fotocopias en una empresa de 320 empleados es de 64 € cada 10 días. ¿Durante cuántos días podrán hacer fotocopias con 68,40 €, si son 35 empleados menos?**

Las tres magnitudes que intervienen en el problema están relacionadas de forma proporcional.

Prop. inversa

Prop. inversa

Empleados		**Presupuesto (€)**		**Tiempo (días)**
320	$\longrightarrow$	64	$\longrightarrow$	10
285	$\longrightarrow$	68,40	$\longrightarrow$	x

$$\frac{285}{320} \cdot \frac{64}{68{,}40} = \frac{10}{x} \rightarrow x = \frac{320 \cdot 68{,}40 \cdot 10}{285 \cdot 64} = 12$$

Podrán hacer fotocopias durante 12 días.

069 ●● **Para realizar un foso de 1,50 m de ancho, 2 m de profundidad y 250 m de largo, un equipo de 120 obreros tarda 45 horas. ¿Cuántos obreros serán necesarios para hacer un foso de 2,50 m de ancho, 1,80 m de profundidad y 350 m de largo, en 30 horas, suponiendo que el terreno de la zanja es similar al anterior?**

Las tres magnitudes, volumen, número de obreros y tiempo, que intervienen en el problema están relacionadas de forma proporcional.

Prop. directa

Prop. inversa

Volumen (m^3)		**Tiempo (h)**		**Obreros**
$1{,}5 \cdot 2 \cdot 250 = 750$	$\longrightarrow$	45	$\longrightarrow$	120
$2{,}5 \cdot 1{,}8 \cdot 350 = 1.575$	$\longrightarrow$	30	$\longrightarrow$	x

$$\frac{750}{1.575} \cdot \frac{30}{45} = \frac{120}{x} \rightarrow x = \frac{1.575 \cdot 45 \cdot 120}{750 \cdot 30} = 378$$

Serán necesarios 378 obreros.

070 ●● **Una embotelladora trabaja 8 horas diarias y en 9 días ha embotellado 1.500 cajas de botellas de refresco. Pasa embotellar 10.000 cajas, trabajando 6 horas al día, ¿cuántos días deberá funcionar la máquina?**

Las magnitudes están relacionadas de forma proporcional.

Prop. inversa

Prop. directa

Horas		Cajas		Días
8	$\longrightarrow$	1.500	$\longrightarrow$	9
6	$\longrightarrow$	10.000	$\longrightarrow$	x

$$\frac{6}{8} \cdot \frac{1.500}{10.000} = \frac{9}{x} \rightarrow x = \frac{8 \cdot 10.000 \cdot 9}{6 \cdot 1.500} = 80$$

La máquina deberá funcionar 80 días.

071 ●●

Si 300 g de alcohol necesitan 2.502 calorías para aumentar la temperatura 12 °C, ¿qué temperatura alcanzarán 350 g de alcohol al que se le han suministrado 1.596 calorías?

Las tres magnitudes que intervienen en el problema están relacionadas de forma proporcional.

Prop. inversa

Prop. directa

Alcohol (g)		Calorías		Temperatura (°C)
300	$\longrightarrow$	2.502	$\longrightarrow$	12
350	$\longrightarrow$	1.596	$\longrightarrow$	x

$$\frac{350}{300} \cdot \frac{2.502}{1.596} = \frac{12}{x} \rightarrow x = \frac{300 \cdot 1.596 \cdot 12}{350 \cdot 2.502} = 6{,}6$$

Si a 350 g de alcohol se le suministran 1.596 calorías, la temperatura aumenta 6,6 °C.

072 ●●

Si leo 4 horas diarias, a razón de 15 páginas por hora, tardo 10 días en leer un libro. Si he leído 12 páginas por hora y he tardado 20 días, ¿cuántas horas he leído diariamente?

Las tres magnitudes que intervienen en el problema están relacionadas de forma proporcional.

Prop. inversa

Prop. inversa

Días		Velocidad (págs./h)		Horas diarias
10	$\longrightarrow$	15	$\longrightarrow$	4
20	$\longrightarrow$	12	$\longrightarrow$	x

$$\frac{20}{10} \cdot \frac{12}{15} = \frac{4}{x} \rightarrow x = \frac{10 \cdot 15 \cdot 4}{20 \cdot 12} = 2{,}5$$

He leído 2 horas y media diariamente.

073 ●●

Un grupo de 10 empleados tarda 6 horas en limpiar 13.000 m² de un bosque. ¿Qué superficie limpiarán 14 empleados en 18 horas?

Las tres magnitudes que intervienen en el problema están relacionadas de forma proporcional.

Prop. directa

Prop. directa

Empleados		Tiempo (h)		Superficie (m^2)
10	$\longrightarrow$	6	$\longrightarrow$	13.000
14	$\longrightarrow$	18	$\longrightarrow$	x

$$\frac{10}{14}\cdot\frac{6}{18}=\frac{13.000}{x}\rightarrow x=\frac{14\cdot 18\cdot 13.000}{10\cdot 6}=54.600$$

Luego 14 empleados en 18 horas limpiarán 54.600 m² de superficie.

074 ●●

Tres bombas de agua, funcionando 8 horas diarias, tardan 10 días en vaciar un depósito. ¿Cuánto hubiesen tardado 4 bombas funcionando 5 horas diarias cada una?

Las tres magnitudes que intervienen en el problema están relacionadas de forma proporcional.

Prop. inversa

Prop. inversa

Bombas		Horas		Días
3	$\longrightarrow$	8	$\longrightarrow$	10
4	$\longrightarrow$	5	$\longrightarrow$	x

$$\frac{4}{3}\cdot\frac{5}{8}=\frac{10}{x}\rightarrow x=\frac{3\cdot 8\cdot 10}{5\cdot 4}=12$$

Cuatro bombas, funcionando 5 horas diarias cada una, hubiesen tardado 12 días en vaciar el depósito.

075 ●●

Cien personas, trabajando 8 horas diarias, tardan 300 días en construir un barco.

a) Si aumentase la plantilla en 20 personas, ¿cuántos días se adelantaría la construcción?

b) Si se redujese la plantilla en 20 personas, ¿cuántos días se retrasaría la construcción?

c) ¿Y si la plantilla se redujese en 20 personas y se aumentasen los turnos a 9 horas diarias?

a) Inversamente proporcional

Trabajadores	Días
100 $\longrightarrow$	300
120 $\longrightarrow$	x

$$x = \frac{100 \cdot 300}{120} = 250 \text{ días}$$

b) Inversamente proporcional

Trabajadores	Días
100 $\longrightarrow$	300
80 $\longrightarrow$	x

$$x = \frac{100 \cdot 300}{80} = 375 \text{ días}$$

c) Proporcionalidad compuesta, ambas inversas.

Trabajadores	Horas	Días
100 $\longrightarrow$	8 $\longrightarrow$	300
80 $\longrightarrow$	9 $\longrightarrow$	x

$$x = \frac{100 \cdot 8 \cdot 300}{80 \cdot 9} = 333 \text{ días}$$

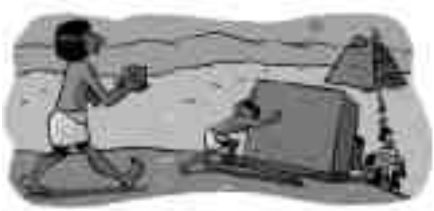
076 **En las fiestas del barrio se colocan 1.200 faroles que se conectan 8 horas al día, ocasionando un gasto de 1.440 €. ¿Cuál será el gasto si se colocan 600 faroles más y se conectan 2 horas menos?**

Proporcionalidad compuesta, ambas directas

Faroles	Horas	Gasto
1.200 $\longrightarrow$	8 $\longrightarrow$	1.440
1.800 $\longrightarrow$	6 $\longrightarrow$	x

$$x = \frac{1.800 \cdot 6 \cdot 1.440}{1.200 \cdot 8} = 1.620 \text{ €}$$

077 **Se cree que para construirlapirámide de Keops, trabajaron 20.000 personas durante10 horas diarias, y tardaron 20 años en acabarla.**



a) ¿Cuánto habrían tardado 10.000 personas?

b) ¿Y si hubiesen trabajado 8 horas diarias?

a) Proporcionalidad inversa

Trabajadores	Años
20.000 $\longrightarrow$	20
10.000 $\longrightarrow$	x

$$x = \frac{20.000 \cdot 20}{10.000} = 40 \text{ años}$$

b) Proporcionalidad compuesta, ambas inversas.

Trabajadores	Horas	Años
20.000 $\longrightarrow$	10 $\longrightarrow$	20
10.000 $\longrightarrow$	8 $\longrightarrow$	x

$$x = \frac{20.000 \cdot 10 \cdot 20}{10.000 \cdot 8} = 50 \text{ años}$$

078 Calcula los siguientes porcentajes de 250.

a) 7 % **c) 0,5 %**

b) 12 % **d) 83 %**

a) $7\ \%$ de $250 = \frac{7}{100} \cdot 250 = 17,5$

b) $12\ \%$ de $250 = \frac{12}{100} \cdot 250 = 30$

c) $0,5\ \%$ de $250 = \frac{0,5}{100} \cdot 250 = 1,25$

d) $83\ \%$ de $250 = \frac{83}{100} \cdot 250 = 207,5$

079 **En una época de sequía, un embalse con capacidad máxima de 200 hm^3 estaba al 45 % de su capacidad. ¿Qué cantidad de agua contenía en ese momento?**

Tenemos que calcular un porcentaje del total.

$45\ \%$ de $200 = \frac{45}{100} \cdot 200 = 90$

En ese momento el embalse contenía 90 hm^3.

080 **HAZLO ASÍ**

¿CÓMO SE CALCULA EL PRECIO INICIAL SABIENDO EL PRECIO REBAJADO?

He comprado una bufanda por 12,60 €, que estaba rebajada un 10%. ¿Cuál era su precio antes del descuento?

PRIMERO. Se ponen los datos en forma de regla de tres.

$$\text{Si de cada } 100\ € \xrightarrow{\text{pago}} 900\ €$$
$$\text{De } x\ € \xrightarrow{\text{pagaré}} 12,60\ €$$

SEGUNDO. Se halla la cantidad que falta en la proporción.

$$x = \frac{100 \cdot 12,60}{90} = 14$$

Su precio antes del descuento era 14 €.

081 **La disminución del número de alumnos en un instituto respecto al año anterior ha sido del 20 %.**
Si actualmente hay 1.500 alumnos:

a) ¿Cuántos alumnos se matricularon?

b) ¿En cuánto ha disminuido la matrícula?

a) Para calcular los alumnos matriculados, conocemos la parte y el porcentaje, y queremos calcular el total.

Actualmente hay un 100 − 20 = 80 % de los alumnos que había el año pasado.

Por tanto, calculamos el 80%:

$$80\ \%\ \text{de}\ C = \frac{1.500 \cdot 100}{80} = 1.875$$

La matrícula del año pasado fue de 1.875 alumnos.

b) La matrícula en este curso ha disminuido en:
1.875 − 1.500 = 375 alumnos.

082 **Un vendedor de coches recibe como comisión el 0,8 % de las ventas que realiza.**

a) Si en un mes recibe 300 € de comisión, ¿qué ventas realizó?

b) La empresa propone al vendedor cambiarle su porcentaje de comisión por un 7,5 por mil. ¿Le conviene aceptar?

a) Para hacer las ventas que realizó, conocemos la parte y el porcentaje, y queremos calcular el total.

$$0{,}8\ \%\ \text{de}\ C = \frac{0{,}8}{100} \cdot C = 300$$

$$C = \frac{300 \cdot 100}{0{,}8} = 37.500$$

El vendedor de coches realizó unas ventas de 37.500 €.

b) Para comparar las dos ofertas calculamos ambos porcentajes

$$7{,}5\ ‰ = \frac{7{,}5}{1.000} = 0{,}0075$$

$$8\ \% = \frac{0{,}8}{100} = 0{,}008$$

Al vendedor de coches no le conviene aceptar la oferta, porque 0,0075 < 0,008.

083 **El precio de una rosa el día de Sant Jordi es 2,40 €, que representa un aumento de precio del 60 % respecto del precio que tiene el resto de año. ¿Cuál es el precio de una rosa cualquier otro día del año?**

Conocemos la parte y el porcentaje, y queremos calcular el total.

El precio de una rosa el día de Sant Jordi será el 100 + 60 = 160 % del precio de una rosa cualquier otro día del año.

$$160\,\%\text{ de } C = \frac{150}{100} \cdot C = 2{,}40$$

$$C = \frac{2{,}40 \cdot 100}{160} = 1{,}5$$

El precio de una rosa cualquier otro día del año es de 1,50 €.

084 **Para elaborar un cóctel se mezclan, 3 partes de zumo de naranja con 2 partes de extracto de kiwi.**

Si queremos preparar una jarra de $\frac{3}{4}$ de litro de cóctel:

a) ¿Qué porcentaje de cada componente hay que mezclar?

b) Si 1 litro de zumo de naranja cuesta 1,20 € y 1 litro de extracto de kiwi vale 8 €, averigua el precio de 1 litro de cóctel.

a) Conocemos la parte y el total, y tenemos que calcular el porcentaje. En total, el zumo consta de 5 partes, 3 partes de zumo de naranja y 2 partes de extracto de kiwi.

La parte de zumo de naranja que hay en la jarra es de:

$$\frac{3}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{9}{20} \text{ de litro.}$$

$$\frac{9}{20} = \frac{k}{100} \cdot \frac{3}{4} \to k = \frac{9 \cdot 100 \cdot 4}{20 \cdot 3} = 60\%$$

Hay que mezclar el 60 % de zumo de naranja y el 40 % de kiwi.

b) Si un litro de zumo de naranja cuesta 1,20 €, los $\frac{3}{5}$ de litro necesarios para el cóctel valdrán: $\frac{3}{5} \cdot 1{,}20 = 0{,}72$ €

Si un litro de zumo de kiwi vale 8 €, los $\frac{2}{5}$ de litro necesarios para el cóctel valdrán: $\frac{2}{5} \cdot 8 = 3{,}20$ €

Luego un litro de cóctel costará: 0,72 + 3,20 = 3,92 €

085 ●● **Un minorista compra un lote de artículos a un precio unitario de 15 €. Si quiere obtener una ganancia del 20 %, ¿a cuánto debe vender cada uno?**

Tenemos que calcular un porcentaje del total.

$$20\% \text{ de } 15 = \frac{20}{100} \cdot 15 = 3 \text{ € de ganancia}$$

Por tanto, debe vender cada artículo a $15 + 3 = 18$ €.

086 ●● **Compro unos pantalones de 38 €. Me hacen un descuento del 25 %, pero al precio rebajado hay que añadirle un 16 % de IVA. ¿Cuál es el precio que tendré que pagar?**

1.º Rebaja: Disminuir un 25 % de 38.

$$(100 - 25)\% \text{ de } 38 = \left(1 - \frac{25}{100}\right) \cdot 38 = 28{,}50 \text{ €}$$

2.º IVA: Aumentar un 16 % de 28,5.

$$(100 + 16)\% \text{ de } 28{,}5 = \left(1 + \frac{16}{100}\right) \cdot 28{,}50 = 33{,}06 \text{ €}$$

087 ●● **Compramos un televisor cuyo precio es 240 € sin IVA. El dependiente nos propone un descuento de un 20 % de esa cantidad y, después, nos carga un 16 % de IVA. ¿Cuánto tenemos que pagar?**

1.º Rebaja: Disminuir un 20 % de 240.

$$(100 - 20)\% \text{ de } 240 = \left(1 - \frac{20}{100}\right) \cdot 240 = 192 \text{ €}$$

2.º IVA: Aumentar un 16 % de 192.

$$(100 + 16)\% \text{ de } 192 = \left(1 + \frac{16}{100}\right) \cdot 192 = 222{,}72 \text{ €}$$

Finalmente, el precio que tenemos que pagar es 222,72 €.

088 ●●

Un comerciante decide subir un 3 % el precio de una mercancía de 72 €. Si a la semana siguiente decide subir otro 3 %, ¿cuál es el precio final de la venta?

Primera subida: aumentar un 3 % de 72.

$$(100 + 3)\,\%\text{ de }72 = \left(1 + \frac{3}{100}\right) \cdot 72 = 74{,}16\text{ €}$$

Segunda subida: aumentar un 3 % de 74,16.

$$(100 + 3)\,\%\text{ de }74{,}16 = \left(1 - \frac{3}{100}\right) \cdot 74{,}16 = 76{,}38\text{ €}$$

El precio final de la venta será 76,38 €.

089 ●●●

¿Cuánto valía un producto que está etiquetado en 60 €, sabiendo que se le ha cargado el 16 % de IVA y que se obtiene una ganancia del 10 %?

Tenemos que calcular el total, conocidos la parte y el porcentaje.

$(100 + 10)\,\%$ de $(100 + 16)\,\%$ de $C = 60$

$$\frac{110}{100} \cdot \frac{116}{100} \cdot C = 60$$

$$C = \frac{60 \cdot 100 \cdot 100}{110 \cdot 116} = 47$$

El producto valía 47 €.

090 ●●●

Un fabricante elabora un producto que vende a un almacenista en 3.000 €. El almacenista le paga un 16 % de IVA y lo vende a una tienda por valor de 5.000 €. El dueño de esta tienda abona un 16 % de IVA y vende el producto al público en 6.000 €, más el 16 % de IVA.

a) ¿Cuánto paga de IVA cada intermediario?

b) ¿Cuál es el IVA que, finalmente, paga el consumidor?

a) Almacenista $\rightarrow$ $16\,\%\text{ de }3.000 = \frac{16}{100} \cdot 3.000 = 480$ €

Dueño de la tienda $\rightarrow$ $16\,\%\text{ de }5.000 = \frac{16}{100} \cdot 5.000 = 800$ €

b) Consumidor $\rightarrow$ $16\,\%\text{ de }6.000 = \frac{16}{100} \cdot 6.000 = 960$ €

091 Si realizamos una inversión al 2,5 % durante 3 años, ¿cuál es el capital que he invertido si el capital que me devuelven asciende a 2.000 €?

$$\left.\begin{array}{l} t = 3 \text{ años} \\ r\,\% = 2{,}5\,\% \\ i = 2.000\text{ €} - C \end{array}\right\} \rightarrow i = \frac{C \cdot r \cdot t}{100} \rightarrow 2.000 - C = \frac{C \cdot 2{,}5 \cdot 3}{100}$$

$$\rightarrow 200.000 - 100C = 7{,}5C$$

$$\rightarrow C = \frac{200.000}{107{,}5} = 1.860{,}50\text{ €}$$

El capital que he invertido es de 1.860,50 €.

092 Óscar pide 6.000 € de préstamo para cambiar las puertas de su casa, y devuelve 7.600 € con intereses, en un pago único al cabo de 3 años. Sabiendo que es un interés simple, calcula el rédito de dicho préstamo.

$$\left.\begin{array}{l} C = 6.000\text{ €} \\ t = 3 \text{ años} \\ i = 7.600 - 6.000 = 1.600\text{ €} \end{array}\right\}$$

$$\rightarrow i = \frac{C \cdot r \cdot t}{100} \rightarrow 1.600 = \frac{6.000 \cdot r \cdot 3}{100}$$

$$\rightarrow r = \frac{1.600 \cdot 100}{6.000 \cdot 3} = 8{,}9\,\%$$

El rédito del préstamo es del 8,9 %.

093 Halla el interés que se obtiene al invertir 3.050 €, a interés compuesto, durante 3 años con un rédito del 5 %.

$$C_f = C_i \cdot \left(1 + \frac{r}{100}\right)^t = 3.050 \cdot \left(1 + \frac{5}{100}\right)^3 = 3.530{,}70\text{ €}$$

$$i = C_f - C_i = 3.530{,}70 - 3.050 = 480{,}70\text{ €}$$

Los intereses obtenidos son 480,70 €.

094 Una cantidad de dinero, invertida a interés compuesto durante 2 años al 4 %, produce unos intereses de 111 €. ¿Qué cantidad hemos invertido?

$$C_f = C_i + i = C_i\left(1 + \frac{r}{100}\right)^t$$

$$C_i + 111 = C_i \cdot \left(1 + \frac{4}{100}\right)^2 \rightarrow C_i = \frac{111}{1{,}04^2 - 1} = 1.360{,}30\text{ €}$$

Hemos invertido 1.360,30 €.

095 ●● **Una entidad bancaria anuncia un tipo de depósito con un rédito del 6 % anual el primer mes y, a partir del segundo, el 4,5 %. Halla el capital acumulado después de un año al invertir 10.000 €.**

El capital acumulado al final del primer mes será:

$$C_f = C_i \cdot \left(1 + \frac{r}{100}\right)^t = 10.000 \cdot \left(1 + \frac{6}{100}\right)^{\frac{1}{12}} =$$

$$= 10.000 \cdot (1{,}06)^{\frac{1}{12}} = 10.048\ €$$

Este será el capital inicial al comenzar el segundo mes.

Luego el capital acumulado al cabo de un año será:

$$C_f = C_i \cdot \left(1 + \frac{r}{100}\right)^t = 10.048 \cdot \left(1 + \frac{4{,}5}{100}\right)^{\frac{11}{12}}$$

$$= 10.048 \cdot (1{,}045)^{\frac{11}{12}} = 10.461{,}70\ €$$

096 ● **Emilio ha decidido invertir 9.600 €, en un depósito financiero que ofrece un interés del 3,85% durante 4 años.**

a) ¿Cuánto cobrará de intereses durante los 6 primeros meses?

b) ¿Y por 3 meses y 20 días?

c) Si decidiera sacar el dinero antes de que concluya el período de inversión, 4 años, se le penalizaría con el pago del 5% del capital invertido. Después de 1 año y 2 meses y medio, ¿perderá o ganará dinero?

d) ¿Cuánto tiempo tiene que pasar para que, al cancelar el depósito, no pierda dinero?

a) $I = \dfrac{C \cdot r \cdot t}{1.200} = \dfrac{9.600 \cdot 3{,}85 \cdot 6}{1.200} = 184{,}80\ €$

b) $I = \dfrac{C \cdot r \cdot t}{1.200} = \dfrac{9.600 \cdot 3{,}85 \cdot 3{,}66}{1.200} = 112{,}93\ €$

c) $I = \dfrac{C \cdot r \cdot t}{1.200} = \dfrac{9.600 \cdot 3{,}85 \cdot 14{,}5}{1.200} = 446{,}60$

Penalización $= \dfrac{9.600 \cdot 5}{100} = 480 \rightarrow$ Perderá 33,40 €.

d) Penalización $= \dfrac{9.600 \cdot 5}{100} = 480 = \dfrac{C \cdot r \cdot t}{1.200} = \dfrac{9.600 \cdot 3{,}85 \cdot t}{1.200}$

$$\rightarrow t = \frac{480 \cdot 1.200}{9.600 \cdot 3{,}85} = 15{,}58 \text{ meses} = 15 \text{ meses y } 18 \text{ días}$$

097 **Al medir una serie de longitudes, los alumnos han obtenido varios resultados y han cometido un error que viene expresado en la siguiente tabla.¿Quién crees que ha cometido un mayor error?**

Alumno	Media	Error	Proporción
Enrique	18,5 m	90 cm	0,048
Félix	5 m	13 cm	0,026
Carlos	12 m	16 cm	0,013
Pilar	10,8 m	80 cm	0,074
Domingo	3 m	10 cm	0,033

El mayor error lo comete Pilar.

098 **Considera un cuadrado de lado *a*.**

a) Un cuadrado de lado 2*a*, ¿tendrá doble perímetro que el anterior? ¿Y doble área?
b) ¿Son el lado y el perímetro magnitudes directamente proporcionales? ¿Y el lado y el área?

Cuadrado de lado a. Perímetro: $4a$. Área: a^2

a) Cuadrado de lado $2a$. Perímetro: $8a$. Área: $4a^2$. Su perímetro es el doble, pero su área no.

b) El lado y el perímetro son magnitudes directamente proporcionales de constante $k = 4$. El lado y el área no son directamente proporcionales.

099 **Considera un cubo de arista *b*.**

a) Las magnitudes de *longitud de la arista* y *volumen*, ¿son directamente proporcionales?
b) Las magnitudes de *área de sus caras* y *volumen*, ¿son proporcionales?
c) ¿Y el perímetro de sus caras y el volumen?

a) Arista: a, Volumen: a^3, $\dfrac{\text{Volumen}}{\text{Arista}} = \dfrac{a^3}{a} = a^2$ no es constante, luego no son directamente proporcionales.

b) Área de sus caras: a^2, Volumen: a^3, $\dfrac{\text{Volumen}}{\text{Área de caras}} = \dfrac{a^3}{a^2} = a$ no es constante, luego no son directamente proporcionales.

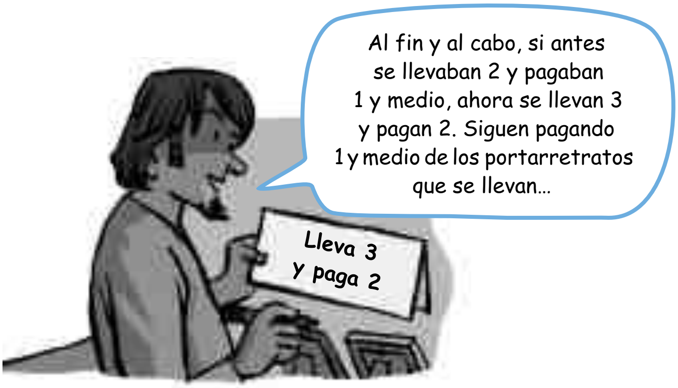
c) Perímetro de cara: $4a$, Volumen: a^3, $\dfrac{\text{Volumen}}{\text{Perímetro cara}} = \dfrac{a^3}{4a} = \dfrac{a^2}{4}$ no es constante, luego no son directamente proporcionales.

EN LA VIDA COTIDIANA

100 ●●● **Ángel fabrica portarretratos de madera que luego vende en los mercadillos.**

Como es época de rebajas, ha decidido hacer un descuento por la compra de portarretratos.

Ángel piensa que su amiga tiene razón, por lo que se le ha ocurrido una oferta similar.



E, incluso, se le ha ocurrido una idea mejor.

¿Son todas las ofertas iguales? ¿Cuál es más ventajosa para él?

En la primera oferta el descuento es: $\frac{0,5}{2} = 25\%$

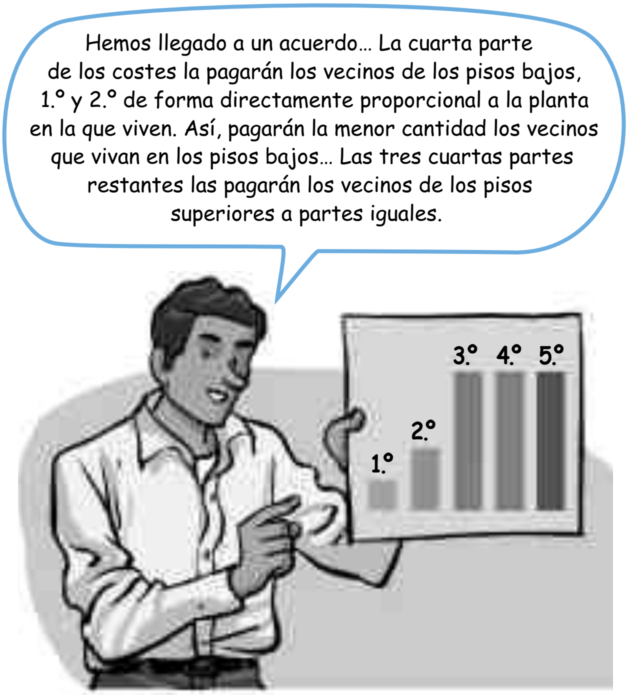
En la segunda oferta el descuento es: $\frac{1}{3} = 33\%$

En la tercera oferta el descuento es: 30%

La más ventajosa para el cliente es la segunda.

101 ●●● **En un edificio que tiene 5 plantas se quiere instalar un ascensor que cuesta 72.000 €. Se ha convocado una reunión de vecinos para decidir la aportación de los vecinos.**

Los vecinos de los pisos bajos no quieren participar en los gastos. Por su parte, los vecinos de los pisos superiores alegan que los propietarios de los pisos bajos también tienen que contribuir, porque su piso se revaloriza al tener ascensor, aunque aceptan que la cuantía sea inferior.



Si en cada planta hay 8 vecinos, ¿cuánto tienen que pagar los vecinos de cada planta?

Los vecinos de las dos primeras plantas pagarán: $\frac{72.000}{4} = 17.500$ €

Repartido de manera proporcional al piso donde viven:

Los vecinos del primero: $\frac{17.500}{3} = 5.833{,}33$ €.

Cada uno de ellos pagará: 729,17 €

Los vecinos del segundo: $\frac{217.500}{3} = 11.666{,}66$ €

Cada uno de ellos pagará: 1.458,33 €

Los vecinos de cada uno de los otros pisos pagarán: $\frac{72.000}{4} = 17.500$ €

Cada uno de ellos pagará: 2.187,50 €

5 Polinomios

- **POLINOMIOS**
  - SUMA, RESTA Y MULTIPLICACIÓN
  - POTENCIAS
  - DIVISIÓN

- **REGLA DE RUFFINI**
  - DIVISORES DE UN POLINOMIO
  - FACTORIZACIÓN DE UN POLINOMIO

- **VALOR NUMÉRICO DE UN POLINOMIO**
  - TEOREMA DEL RESTO
  - RAÍCES DE UN POLINOMIO

Un hombre de principios

Días negros y noches largas, estas últimas semanas habían sido especialmente difíciles para Paolo Ruffini.

Mientras caminaba en dirección a su casa, pensaba en lo duro que le había sido tomar la decisión de no jurar fidelidad a la bandera de los invasores franceses.

Un golpecito en el hombro y la voz amiga de Luigi lo devolvieron a la realidad:

–¡Paolo! ¿Qué has hecho? En la universidad no se comenta otra cosa. El responsable político ha asegurado que nunca volverás a sentarte en tu cátedra y que has marcado tu destino; se le veía terriblemente enfadado.

–Lo pensé durante mucho tiempo y cuando comuniqué mi decisión me he sentido aliviado –argumentó Ruffini, plenamente convencido.

–Pero ¿no has pensado en tu familia o en tu posición? –Luigi mostró la preocupación que parecía haber abandonado a Ruffini.

–Luigi, ¿cuánto darías por un puesto de funcionario? –Estaban llegando al mercado y Ruffini se paró en seco–. Yo no estoy dispuesto a pagar tanto por la cátedra; si hiciera el juramento, habría traicionado mis principios y mutilado mi alma, mantendría mi cátedra pero el Paolo Ruffini que conoces habría muerto.

Ruffini se dedicó por entero a su oficio de médico en los años en que estuvo alejado de la docencia.

En la división de polinomios P(x) : (x − a), *calcula el grado del cociente y del resto.*

El grado del cociente es un grado menor que el grado del polinomio* P(x)*, y el grado del resto es cero, pues es siempre un número (un número es un polinomio de grado cero).

EJERCICIOS

001 **Efectúa la siguiente operación.**

$$(-2x^3 + x^2 + x - 1) - (x^3 + x^2 - x - 1)$$

$(-2x^3 + x^2 + x - 1) - (x^3 + x^2 - x - 1) = -3x^3 + 2x$

002 **Multiplica estos polinomios.**

$$P(x) = x^3 - x^2 + 3x - 1 \qquad Q(x) = x - 1$$

$$\begin{aligned} P(x) \cdot Q(x) &= x^4 - x^3 - x^3 + x^2 + 3x^2 - 3x - x + 1 = \\ &= x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 4x + 1 \end{aligned}$$

003 **Si $P(x) = x^2 - x + 2$ y $Q(x) = x^3 - x^2 + 1$, calcula:**

a) $P(1) + P(-1)$ **b) $P(0) + Q(-1)$**

a) $P(1) + P(-1) = (1 - 1 + 2) + (1 + 1 + 2) = 2 + 4 = 6$

b) $P(0) + Q(-1) = 2 + (4 + 2 + 8) = 2 + 12 = 14$

004 **¿Cuánto tiene que valer a para que $P(a) = 0$ si $P(x) = 2x^2 - 3x + 1$?**

Son las soluciones de la ecuación $2x^2 - 3x + 1 = 0 \rightarrow x = 1$ y $x = \dfrac{1}{2}$

005 **Realiza las siguientes divisiones de polinomios. Comprueba, en cada una de ellas, el resultado que obtienes.**

a) $(2x^3 - 3x^2 - 5x - 5) : (x^2 - 2x - 1)$

b) $(2x^3 - 3x^2 + 4x - 3) : (x^2 - 1)$

c) $(x^4 + 1) : (x^2 + 1)$

d) $(x^5 + 2x^3 - 1) : (x^2 - 3)$

a) $(2x^3 - 3x^2 - 5x - 5) : (x^2 - 2x - 1) \rightarrow \begin{cases} \text{Cociente} = 2x + 1 \\ \text{Resto} = -x - 4 \end{cases}$

b) $(2x^3 - 3x^2 + 4x - 3) : (x^2 - 1) \longrightarrow \begin{cases} \text{Cociente} = 2x - 3 \\ \text{Resto} = 6x - 6 \end{cases}$

c) $(x^4 + 1) : (x^2 + 1) \longrightarrow \begin{cases} \text{Cociente} = x^2 - 1 \\ \text{Resto} = 2 \end{cases}$

d) $(x^5 + 2x^3 - 1) : (x^2 - 3) \longrightarrow \begin{cases} \text{Cociente} = x^3 + 5x \\ \text{Resto} = 15x - 1 \end{cases}$

006 **El divisor de una división de polinomios es $Q(x) = 2x^2 - 7$, el cociente es $C(x) = x^3 - 2x$ y el resto es $R(x) = x - 2$. Calcula el dividendo.**

$$\begin{aligned} P(x) &= Q(x) \cdot C(x) + R(x) = (2x^2 - 7) \cdot (x^3 - 2x) + (x - 2) = \\ &= (2x^5 - 11x^3 + 14x) + (x - 2) = 2x^5 - 11x^3 + 15x - 2 \end{aligned}$$

007 **El dividendo de una división de polinomios es $P(x) = x^5 - 2x^3 - x^2$, el cociente es $C(x) = x^2 - 2$ y el resto es $R(x) = -2$. ¿Cuál es el divisor?**

$$P(x) = Q(x) \cdot C(x) + R(x)$$

$$x^5 - 2x^3 - x^2 = Q(x) \cdot (x^2 - 2) - 2$$
$$\rightarrow x^5 - 2x^3 - x^2 + 2 = Q(x) \cdot (x^2 - 2)$$
$$\rightarrow Q(x) = (x^5 - 2x^3 - x^2 + 2) : (x^2 - 2) = x^3 - 1$$

008 **Determina el cociente y el resto, aplicando la regla de Ruffini.**

a) $(x^3 - x^2 + x - 3) : (x - 1)$
b) $(x^4 - x^3 - x + 9) : (x - 2)$
c) $(x^4 + x^2 - 10) : (x - 5)$
d) $(x^5 - 2x^3 + x - 7) : (x + 3)$
e) $(x^7 + x^4 - 7x^2) : (x + 4)$

a)
$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 1 & & 1 & 0 & 1 \\ \hline & 1 & 0 & 1 & \boxed{-2} \end{array} \rightarrow C(x) = x^2 + 1;\ R(x) = -2$$

b)
$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & -1 & 0 & -1 & 9 \\ 2 & & 2 & 2 & 4 & 6 \\ \hline & 1 & 1 & 2 & 3 & \boxed{15} \end{array} \rightarrow C(x) = x^3 + x^2 + 2x + 3;\ R(x) = 15$$

c)
$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & 0 & 1 & 0 & -10 \\ 5 & & 5 & 25 & 130 & 650 \\ \hline & 1 & 5 & 26 & 130 & \boxed{640} \end{array}$$

$C(x) = x^3 + 5x^2 + 26x + 130;\ R(x) = 640$

d)
$$\begin{array}{r|rrrrrr} & 1 & 0 & -2 & 0 & 1 & -7 \\ -3 & & -3 & 9 & -21 & 63 & -192 \\ \hline & 1 & -3 & 7 & -21 & 64 & \boxed{-199} \end{array}$$

$C(x) = x^4 - 3x^3 + 7x^2 - 21x + 64;\ R(x) = -199$

e)
$$\begin{array}{r|rrrrrrrr} & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -7 & 0 & 0 \\ -4 & & -4 & 16 & -64 & 252 & -1.008 & 4.060 & -16.240 \\ \hline & 1 & -4 & 16 & -63 & 252 & -1.015 & 4.060 & \boxed{-16.240} \end{array}$$

$C(x) = x^6 - 4x^5 + 16x^4 - 63x^3 + 252x^2 - 1.015x + 4.060;\ R(x) = -16.240$

009 **Si dividimos $4x^5 - 3x^4 + 2x^3 - x^2 - x + 1$ entre $x + 2$, ¿cuáles serán el resto y el cociente? ¿Podemos aplicar la regla de Ruffini?**

$$\begin{array}{r|rrrrrr} & 4 & -3 & 2 & -1 & -1 & 1 \\ -2 & & -8 & 22 & -48 & 98 & -194 \\ \hline & 4 & -11 & 24 & -49 & 97 & \boxed{-193} \end{array}$$

Cociente: $4x^4 - 11x^3 + 24x^2 - 49x + 97$; Resto: -193

010 **Calcula el valor de *m* para que la división sea exacta.**

$$(x^5 - 2x^3 - 8x^2 + mx + 3) : (x - 3)$$

$$\begin{array}{r|rrrrrr} & 1 & 0 & -2 & -8 & m & 3 \\ 3 & & 3 & 9 & 21 & 39 & 117 + 3m \\ \hline & 1 & 3 & 7 & 13 & 39 + m & \boxed{120 + 3m} \end{array}$$

$120 + 3m = 0 \rightarrow m = -40$

011 **Considerando el polinomio:**

$$P(x) = x^3 - 7x^2 + x - 7$$

calcula, mediante el teorema del resto, su valor numérico para:

a) $x = 1$ **c)** $x = -1$ **e)** $x = 3$

b) $x = 5$ **d)** $x = 7$ **f)** $x = -5$

a) $$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -7 & 1 & -7 \\ 1 & & 1 & -6 & -5 \\ \hline & 1 & -6 & -5 & \boxed{-12} \end{array} \longrightarrow$$ Como el resto es -12, entonces $P(1) = -12$.

b) $$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -7 & 1 & -7 \\ 5 & & 5 & -10 & -45 \\ \hline & 1 & -2 & -9 & \boxed{-52} \end{array} \longrightarrow$$ Como el resto es -52, entonces $P(5) = -52$.

c) $$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -7 & 1 & -7 \\ -1 & & -1 & 8 & -9 \\ \hline & 1 & -8 & 9 & \boxed{-16} \end{array} \longrightarrow$$ Como el resto es -16, entonces $P(-1) = -16$.

d) $$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -7 & 1 & -7 \\ 7 & & 7 & 0 & 7 \\ \hline & 1 & 0 & 1 & \boxed{0} \end{array} \longrightarrow$$ Como el resto es 0, entonces $P(7) = 0$.

e) $$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -7 & 1 & -7 \\ 3 & & 3 & -12 & -33 \\ \hline & 1 & -4 & -11 & \boxed{-40} \end{array} \longrightarrow$$ Como el resto es -40, entonces $P(3) = -40$.

f) $$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -7 & 1 & -7 \\ -5 & & -5 & 60 & -305 \\ \hline & 1 & -12 & 61 & \boxed{-312} \end{array} \rightarrow$$ Como el resto es -312, entonces $P(-5) = -312$.

012 **Comprueba que se verifica el teorema del resto para $P(x) = x^4 - 3x + 2$ si:**

a) $x = 2$ **b)** $x = -1$

a) $$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & 0 & 0 & -3 & 2 \\ 2 & & 2 & 4 & 8 & 10 \\ \hline & 1 & 2 & 4 & 5 & \boxed{12} \end{array}$$

$P(2) = 2^4 - 3 \cdot 2 + 2 = 12$

b) $$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & 0 & 0 & -3 & 2 \\ -1 & & -1 & 1 & -1 & 4 \\ \hline & 1 & -1 & 1 & -4 & \boxed{6} \end{array}$$

$P(-1) = (-1)^4 - 3 \cdot (-1) + 2 = 6$

013 **¿Cuánto vale a si el valor numérico de $P(x) = x^3 - 2x^2 - 3x + a$, para $x = 2$, es 0?**

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -2 & -3 & a \\ 2 & & 2 & 0 & -6 \\ \hline & 1 & 0 & -3 & \boxed{a-6} \end{array} \rightarrow a - 6 = 0 \rightarrow a = 6$$

014 **Calcula las raíces de estos polinomios.**

a) $P(x) = x^3 - 3x^2 + 2$

b) $Q(x) = x^2 - 2x + 1$

c) $R(x) = x^3 - 2x^2 - 5x - 6$

d) $S(x) = x^2 - 5x - 14$

a)
$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -3 & 0 & 2 \\ 1 & & 1 & -2 & -2 \\ \hline & 1 & -2 & -2 & \boxed{0} \end{array} \longrightarrow$$
1 es raíz, $1 + \sqrt{3}$ y $1 - \sqrt{3}$ son también raíces.

b)
$$\begin{array}{r|rrr} & 1 & -2 & 1 \\ 1 & & 1 & -1 \\ \hline & 1 & -1 & \boxed{0} \end{array} \longrightarrow$$
1 es raíz doble.

c) No tiene raíces racionales, al probar con los divisores del denominador nunca da cero.

d)
$$\begin{array}{r|rrr} & 1 & -5 & -14 \\ -2 & & -2 & 14 \\ \hline & 1 & -7 & \boxed{0} \end{array} \rightarrow -2 \text{ es raíz.}$$

$$\begin{array}{r|rrr} & 1 & -5 & -14 \\ 7 & & 7 & 14 \\ \hline & 1 & 2 & \boxed{0} \end{array} \longrightarrow 7 \text{ es raíz.}$$

$\rightarrow$ Son las dos raíces del polinomio.

015 **¿Cuánto vale a para que $x = 2$ sea una raíz del polinomio $x^3 - 2x^2 - 4x + a$?**

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -2 & -4 & a \\ 2 & & 2 & 0 & -8 \\ \hline & 1 & 0 & -4 & \boxed{a-8} \end{array} \rightarrow a - 8 = 0 \rightarrow a = 8$$

016 **Determina a y b para que el polinomio $P(x) = ax^2 + b$ tenga como raíces 2 y -2.**

$$\begin{array}{r|rrr} & a & 0 & b \\ 2 & & 2a & 4a \\ \hline & a & 2a & \boxed{b+4a} \end{array} \qquad \begin{array}{r|rrr} & a & 0 & b \\ -2 & & -2a & 4a \\ \hline & a & -2a & \boxed{b+4a} \end{array}$$

Como $b = -4a$, cualquier par de números que lo cumpla formará un polinomio con esas raíces; por ejemplo, $a = 1$ y $b = -4$.

017 **Obtén, utilizando el triángulo de Tartaglia, el desarrollo de estas potencias.**

a) $(x+y)^5$ **c)** $(2x-2)^3$ **e)** $(3x^2-y)^4$ **g)** $(x^2-y)^5$
b) $(x+1)^4$ **d)** $(x-24)^4$ **f)** $(x^2-y^2)^5$ **h)** $(-x+3y)^3$

a) Los coeficientes son 1, 5, 10, 10, 5 y 1.
$(x+y)^5 = x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + y^5$

b) Los coeficientes son 1, 4, 6, 4 y 1.
$(x+1)^4 = x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1$

c) Los coeficientes son 1, 3, 3 y 1.
$(2x-2)^3 = 8x^3 - 24x^2y + 24x - 8$

d) Los coeficientes son 1, 4, 6, 4 y 1.
$(x-24)^4 = x^4 - 96x^3 + 3.456x^2 - 55.296x + 331.776$

e) Los coeficientes son 1, 4, 6, 4 y 1.
$$(3x^2-y)^4 = (3x^2)^4 + 4\cdot(3x^2)^3\cdot(-y) + 6\cdot(3x^2)^2\cdot(-y)^2 + 4\cdot(3x^2)\cdot(-y)^3 + (-y)^4 = 81x^8 - 108x^6y + 54x^4y^2 - 12x^2y^3 + y^4$$

f) Los coeficientes son 1, 5, 10, 10, 5 y 1.
$$(x^2-y^2)^5 = (x^2)^5 + 5\cdot(x^2)^4\cdot(-y^2) + 10\cdot(x^2)^3\cdot(-y^2)^2 + 10\cdot(x^2)^2\cdot(-y^2)^3 + 5\cdot(x^2)\cdot(-y^2)^4 + (-y^2)^5 = x^{10} - 5x^8y^2 + 10x^6y^4 - 10x^4y^6 + 5x^2y^8 - y^{10}$$

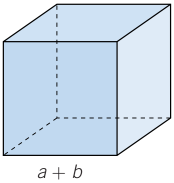
g) Los coeficientes son 1, 5, 10, 10, 5 y 1.
$$(x^2-y)^5 = (x^2)^5 + 5\cdot(x^2)^4\cdot(-y) + 10\cdot(x^2)^3\cdot(-y)^2 + 10\cdot(x^2)^2\cdot(-y)^3 + 5\cdot(x^2)\cdot(-y)^4 + (-y)^5 = x^{10} - 5x^8y + 10x^6y^2 - 10x^4y^3 + 5x^2y^4 - y^5$$

h) Los coeficientes son 1, 3, 3 y 1.
$$(-x+3y)^3 = (-x)^3 + 3\cdot(-x)^2\cdot 3y + 3\cdot(-x)\cdot(3y)^2 + (3y)^2 = -x^3 - 9x^2y - 27xy^2 + 9y^2$$

018 **Completa el triángulo de Tartaglia hasta la décima fila.**

1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
1 8 28 56 70 56 28 8 1
1 9 37 84 126 126 84 37 9 1
1 10 46 121 210 252 210 121 46 10 1

019 **¿Cuál es el volumen de este cubo?**


$a+b$

Volumen: $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

020 **Halla un divisor de estos polinomios.**

a) $P(x) = x^3 - 3x^2 + 2x - 6$

b) $Q(x) = x^4 - 4x^2 - x + 2$

c) $R(x) = x^6 - x^5 - 2x + 2$

a)
$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -3 & 2 & -6 \\ 3 & & 3 & 0 & 6 \\ \hline & 1 & 0 & 2 & \boxed{0} \end{array} \longrightarrow (x - 3) \text{ es divisor de } P(x).$$

b)
$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & 0 & -4 & -1 & 2 \\ -1 & & -1 & 1 & 3 & -2 \\ \hline & 1 & -1 & -3 & 2 & \boxed{0} \end{array} \longrightarrow (x + 1) \text{ es divisor de } Q(x).$$

c)
$$\begin{array}{r|rrrrrrr} & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -2 & 2 \\ 1 & & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ \hline & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & \boxed{0} \end{array} \rightarrow (x - 1) \text{ es divisor de } R(x).$$

021 **Calcula *a* para que $x - 1$ sea divisor de $2x^3 - x^2 + 3x + a$.**

$$\begin{array}{r|rrrr} & 2 & -1 & 3 & a \\ 1 & & 2 & 1 & 4 \\ \hline & 1 & 1 & 4 & \boxed{a + 4} \end{array} \rightarrow a + 4 = 0 \rightarrow a = -4$$

022 **¿Son correctos los cálculos?**

$$\begin{array}{r|rrrr} & \mathbf{2} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{3} \\ \mathbf{-1} & & \mathbf{-2} & \mathbf{0} & \mathbf{-3} \\ \hline & \mathbf{2} & \mathbf{0} & \mathbf{3} & \boxed{\mathbf{0}} \end{array}$$

Así, tenemos que:

$$\mathbf{2x^3 + 2x^2 + 3x + 3 = (x - 1) \cdot (2x + 3)}$$

Los cálculos no son correctos.

$$\begin{array}{r|rrrr} & 2 & 2 & 3 & 3 \\ -1 & & -2 & 0 & -3 \\ \hline & 2 & 0 & 3 & \boxed{0} \end{array} \rightarrow 2x^3 + 2x^2 + 3x + 3 = (x + 1) \cdot (2x^2 + 3)$$

023 **Descompón en factores estos polinomios.**

a) $P(x) = x^3 - 8$

b) $P(x) = x^3 + 4x^2 + 4x$

c) $P(x) = x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 4x + 4$

d) $P(x) = x^5 + 3x^4 - 9x^3 - 23x^2 - 12x$

e) $P(x) = x^3 - 3x^2 - 25x - 21$

f) $P(x) = x^5 - 9x^3$

a) $P(x) = x^3 - 8 = (x^2 + 2x + 4) \cdot (x - 2)$

b) $P(x) = x \cdot (x^2 + 4x + 4) = x \cdot (x + 2)^2$

c) $P(x) = (x + 1)^2 \cdot (x - 2)^2$

d) $P(x) = x \cdot (x^4 + 3x^3 - 9x^2 - 23x + 4) = x \cdot (x + 1)^2 \cdot (x - 3) \cdot (x + 4)$

e) $P(x) = (x + 1) \cdot (x + 3) \cdot (x - 7)$

f) $P(x) = x^3 \cdot (x^2 - 9) = x^3 \cdot (x + 3) \cdot (x - 3)$

024 **Factoriza los siguientes polinomios y explica cómo lo haces.**

a) $x^3 - 1$ **b)** $x^5 - 1$ **c)** $x^6 - 1$

a)
$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & & 1 & 1 & 1 \\ \hline & 1 & 1 & 1 & \boxed{0} \end{array} \longrightarrow x^3 - 1 = (x-1)\cdot(x^2+x+1)$$

b)
$$\begin{array}{r|rrrrrr} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \boxed{0} \end{array} \rightarrow x^5 - 1 = \\ = (x-1)\cdot(x^4+x^3+x^2+x+1)$$

c) $x^6 - 1 = (x^3 - 1)\cdot(x^3 + 1)$
$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & & 1 & 1 & 1 \\ \hline & 1 & 1 & 1 & \boxed{0} \end{array} \longrightarrow x^3 - 1 = (x-1)\cdot(x^2+x+1)$$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & & -1 & 1 & -1 \\ \hline & 1 & -1 & 1 & \boxed{0} \end{array} \longrightarrow x^3 + 1 = (x+1)\cdot(x^2-x+1)$$

$x^6 - 1 = (x-1)\cdot(x^2+x+1)\cdot(x+1)\cdot(x^2-x+1)$

025 **Razona si son ciertas estas igualdades.**

a) $x^3 + 9 = x\cdot(x+3)\cdot(x+3)$

b) $x^2\cdot(x^2+1) = [x\cdot(x+1)]^2$

a) Es falsa, porque $x\cdot(x+3)\cdot(x+3) = x^3 + 6x^2 + 9x$.

b) Es falsa, porque $[x\cdot(x+1)]^2 = x^2\cdot(x^2+2x+1)$.

ACTIVIDADES

026 **Halla el valor numérico del polinomio $P(x) = -x^4 + 5x^3 - 7x^2 + 8x - 4$ para:**

a) $x = 0$ **c)** $x = 2$ **e)** $x = -3$

b) $x = -\frac{1}{2}$ **d)** $x = -2$ **f)** $x = 2{,}5$

a) $P(0) = -4$

b) $P\left(-\frac{1}{2}\right) = -\left(-\frac{1}{2}\right)^4 + 5\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^3 - 7\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 8\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) - 4 = \frac{-167}{16}$

c) $P(2) = -(2)^4 + 5\cdot(2)^3 - 7\cdot(2)^2 + 8\cdot(2) - 4 = 8$

d) $P(-2) = -(-2)^4 + 5\cdot(-2)^3 - 7\cdot(-2)^2 + 8\cdot(-2) - 4 = -104$

e) $P(-3) = -(-3)^4 + 5\cdot(-3)^3 - 7\cdot(-3)^2 + 8\cdot(-3) - 4 = -307$

f) $P(2{,}5) = -(2{,}5)^4 + 5\cdot(2{,}5)^3 - 7\cdot(2{,}5)^2 + 8\cdot(2{,}5) - 4 = 11{,}3125$

027 Razona si las siguientes igualdades son verdaderas o falsas.

a) $2x = x \cdot x$

b) $-(x^2 + x) = -x^2 - x$

c) $\left(2\sqrt{x}\right)^4 = 4^2x^2$

d) $-\dfrac{2x^2 - 4x}{2} = -x^2 - 2x$

e) $x^2 + x^3 = x^5$

f) $2x^2 \cdot 3x^3 = 5x^5$

g) $-x^2 = x^2$

h) $(x^2)^3 = x^6$

a) Falsa, ya que $2x = x + x$.

b) Verdadera.

c) Verdadera, pues se verifica que $\left(2\sqrt{x}\right)^4 = 16x^2 = 4^2x^2$.

d) Falsa, porque $-\dfrac{2x^2 - 4x}{2} = -(x^2 - 2x) = -x^2 + 2x$.

e) Falsa, ya que en la suma de potencias no se suman los exponentes.

f) Falsa, pues $2x^2 \cdot 3x^3 = 6x^5$.

g) Falsa.

h) Verdadera.

028 Dados los polinomios:

$$P(x) = -7x^4 + 6x^2 + 6x + 5$$
$$Q(x) = 3x^5 - 2x^2 + 2$$
$$R(x) = -x^5 + x^3 + 3x^2$$

calcula.

a) $P(x) + Q(x) + R(x)$

b) $P(x) - Q(x)$

c) $P(x) \cdot Q(x)$

d) $[P(x) - Q(x)] \cdot R(x)$

e) $[P(x) - R(x)] \cdot Q(x)$

a) $P(x) + Q(x) + R(x) = 2x^5 - 7x^4 + x^3 + 7x^2 + 6x + 7$

b) $P(x) - Q(x) = -3x^5 - 7x^4 + 8x^2 + 6x + 3$

c) $P(x) \cdot Q(x) =$
$= -21x^9 + 18x^7 + 32x^6 + 15x^5 - 26x^4 - 12x^3 + 2x^2 + 12x + 10$

d) $[P(x) - Q(x)] \cdot R(x) = (-3x^5 - 7x^4 + 8x^2 + 6x + 3) \cdot (-x^5 + x^3 + 3x^2) =$
$= 3x^{10} + 7x^9 - 3x^8 - 24x^7 - 27x^6 + 5x^5 + 30x^4 + 21x^3 + 9x^2$

e) $[P(x) - R(x)] \cdot Q(x) = (x^5 - 7x^4 - x^3 + 3x^2 + 6x + 5) \cdot (3x^5 - 2x^2 + 2) =$
$= 3x^{10} - 21x^9 - 3x^8 + 7x^7 + 32x^6 + 19x^5 - 20x^4 - 14x^3 - 4x^2 + 12x + 10$

029 Opera y agrupa los términos de igual grado.

a) $\frac{3}{5}x^4 - 2x^3 + x^4 - \frac{1}{3}x^3 + 2$

b) $\frac{2}{3}x + \frac{1}{5}x^2 - \frac{4}{3}x^2 - \frac{1}{6}x$

c) $\sqrt{45}\,x^3 - \sqrt{80}\,x^3 + \sqrt{5}\,x$

d) $\sqrt{28}\,x - \frac{\sqrt{7}}{7}$

a) $\frac{3}{5}x^4 - 2x^3 + x^4 - \frac{1}{3}x^3 + 2 = \left(\frac{3}{5} + 1\right)x^4 + \left(-2 - \frac{1}{3}\right)x^3 + 2 =$
$= \frac{8}{5}x^4 - \frac{7}{3}x^3 + 2$

b) $\frac{2}{3}x + \frac{1}{5}x^2 - \frac{4}{3}x^2 - \frac{1}{6}x = \left(\frac{1}{5} - \frac{4}{3}\right)x^2 + \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{6}\right)x = -\frac{17}{15}x^2 + \frac{1}{2}x$

c) $\sqrt{45}\,x^3 - \sqrt{80}\,x^3 + \sqrt{5}\,x = \left(\sqrt{45} - \sqrt{80}\right)x^3 + \sqrt{5}\,x =$
$= \left(3\sqrt{5} - 4\sqrt{5}\right)x^3 + \sqrt{5}\,x = \sqrt{5} \cdot (-x^3 + x)$

d) $\sqrt{28}\,x - \frac{\sqrt{7}}{7} = 2\sqrt{7}\,x - \frac{\sqrt{7}}{7} = \sqrt{7} \cdot \left(2x - \frac{1}{7}\right)$

030 Realiza las operaciones que se indican con los siguientes polinomios.

$P(x) = 2x^3 + 6$
$Q(x) = x^2 - 2x + 3$
$R(x) = -2x^5 + x^2 - 1$

a) $P(x) + Q(x) - R(x)$
b) $P(x) - [Q(x) - R(x)]$
c) $-[P(x) - [Q(x) + R(x)]]$

a) $P(x) + Q(x) - R(x) = 2x^5 + 2x^3 - 2x + 10$

b) $P(x) - [Q(x) - R(x)] = (2x^3 + 6) - (2x^5 - 2x + 4) =$
$= 2 \cdot (-x^5 + x^3 + x + 1)$

c) $-[P(x) - [Q(x) + R(x)]] = -[(2x^3 + 6) - (-2x^5 + 2x^2 - 2x + 2)] =$
$= -2x^5 - 2x^3 + 2x^2 - 2x - 4$

031 Calcula.

a) $(4x^3 - 7x^3) - (6x^3 + 7x^3)$
b) $(4x + 5x) \cdot (2x - 7x)$
c) $(6x^5 - 4x^5) : (8x^5 + 3x^5 - 9x^5)$
d) $7x^3 \cdot (2x^2 \cdot 5x \cdot 3)$
e) $(5x^6 : x^2) - (3x \cdot 2 \cdot x^3) + x^4$
f) $(10x^{10} \cdot x^3) : (5x - 3x)$

a) $(4x^3 - 7x^3) - (6x^3 + 7x^3) = -3x^3 - 13x^3 = -16x^3$

b) $(4x + 5x) \cdot (2x - 7x) = 9x \cdot (-5x) = -45x^2$

c) $(6x^5 - 4x^5) : (8x^5 + 3x^5 - 9x^5) = 2x^5 : 2x^5 = 1$

d) $7x^3 \cdot (2x^2 \cdot 5x \cdot 3) = 7x^3 \cdot 30x^3 = 210x^6$

e) $(5x^6 : x^2) - (3x \cdot 2 \cdot x^3) + x^4 = 5x^4 - 6x^4 + x^4 = 0$

f) $(10x^{10} \cdot x^3) : (5x - 3x) = 10x^{13} : 2x = 5x^{12}$

032 Determina el valor de a, b, c y d para que los polinomios $P(x)$ y $Q(x)$ sean iguales.

$$P(x) = x^3 - (a + 2)\cdot x + 2 - (9 + c)\cdot x^2$$

$$Q(x) = b + 5x - 2x^2 + \left(d + \frac{1}{4}\right)\cdot x^3 + 10x^2 - 2x + \frac{1}{2}$$

$$\left.\begin{array}{l} P(x) = x^3 - (9 + c)x^2 - (a + 2)x + 2 \\ Q(x) = \left(d + \dfrac{1}{4}\right)x^3 + 8x^2 + 3x + b + \dfrac{1}{2} \end{array}\right\} \to \left\{\begin{array}{l} d + \dfrac{1}{4} = 1 \longrightarrow d = \dfrac{3}{4} \\ -(9 + c) = 8 \to c = -17 \\ -(a + 2) = 3 \to a = -5 \\ b + \dfrac{1}{2} = 2 \longrightarrow b = \dfrac{3}{2} \end{array}\right.$$

033 Efectúa estas operaciones.

a) $(x^2 - 3x + 5)\cdot x^2 - x$

b) $(x^2 - x + 3)\cdot x^2 - 2x + (x - 4)\cdot(x + 5)$

c) $[(1 - x - x^2)\cdot(-1) - 3x)]\cdot(8x + 7)$

d) $\left[\left(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} - 3\right)\cdot\left(\frac{x}{3} - \frac{2}{5}\right) - \frac{1}{4}\right]\cdot x - 1$

e) $[x^2 + 1 - 6x\cdot(x - 4)]\cdot x - x\cdot(5x - 10)$

a) $x^4 - 3x^3 + 5x^2 - x$

b) $x^4 - x^3 + 3x^2 - 2x + x^2 + x - 20 = x^4 - x^3 + 4x^2 - x - 20$

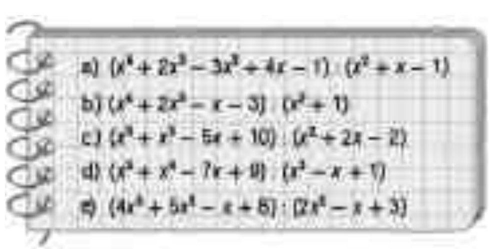
c) $(x^2 - 2x - 1)\cdot(8x - 7) = 8x^3 - 23x^2 + 6x + 7$

d) $\left(\frac{x^2 + 2x - 12}{4}\cdot\frac{5x - 6}{10} - \frac{1}{4}\right)\cdot x - 1 =$

$$= \left(\frac{5x^3 + 4x^2 - 72x + 62}{40}\right)\cdot x - 1 = \frac{5x^4 + 4x^3 - 72x^2 + 62x - 40}{40}$$

e) $(-5x^2 + 24x + 1)\cdot x - 5x^2 + 10x = -5x^3 + 24x^2 + x - 5x^2 + 10x =$
$= -5x^3 + 19x^2 + 11x$

034 Realiza las siguientes divisiones.



a) Cociente: $x^2 + x + 5$
Resto: $-2x - 6$

b) Cociente: $x^2 + 2x - 1$
Resto: $-3x - 2$

c) Cociente: $x^3 - 3x^2 + 9x - 35$
Resto: $83x - 60$

d) Cociente: $x^2 + x + 1$
Resto: $-7x + 8$

e) Cociente: $2x + \frac{7}{2}$
Resto: $-\frac{7}{2}x - \frac{5}{2}$

035 **Halla el polinomio $Q(x)$ por el que hay que dividir a $P(x) = x^4 - x^3 - 4x^2 + x - 2$, para que el cociente sea $C(x) = x^2 + x - 3$ y el resto sea $R(x) = -6x + 1$.**

$$Q(x) = [P(x) - R(x)] : C(x) = (x^4 - x^3 - 4x^2 + 7x - 3) : (x^2 + x - 3) =$$
$$= x^2 - 2x + 1$$

036 **Si en una división de polinomios el grado del dividendo es 6 y el del divisor es 3, ¿cuál es el grado del cociente y del resto? Razona la respuesta.**

El grado del cociente es la diferencia que hay entre el grado del dividendo y el grado del divisor, y el grado del resto es siempre menor que el grado del divisor.

Cociente: grado 3

Resto: grado menor que 3

037 **Realiza, aplicando la regla de Ruffini.**

a) $(x^5 - x^3 + x^2 - x^4 + 3x - 7) : (x - 2)$

b) $(x^4 + 2x^2 - x - 3) : (x + 1)$

c) $(2x^4 - x^3 - x^2 + x + 3) : (x - 3)$

d) $(x^3 - 8x + x^2 - 7) : (x + 2)$

e) $(x^3 - 4x^2 + 6x - 9) : (x + 4)$

a)
$$\begin{array}{r|rrrrrr} & 1 & -1 & -1 & 1 & 3 & -7 \\ 2 & & 2 & 2 & 2 & 6 & 18 \\ \hline & 1 & 1 & 1 & 3 & 9 & \boxed{11} \end{array} \longrightarrow$$
Cociente: $x^4 + x^3 + x^2 + 3x + 9$
Resto: 11

b)
$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & 0 & 2 & -1 & -3 \\ -1 & & -1 & 1 & -3 & 4 \\ \hline & 1 & -1 & 3 & -4 & \boxed{1} \end{array} \longrightarrow$$
Cociente: $x^3 - x^2 + 3x - 4$
Resto: 1

c)
$$\begin{array}{r|rrrrr} & 2 & -1 & -1 & 1 & 3 \\ 3 & & 6 & 15 & 42 & 129 \\ \hline & 2 & 5 & 14 & 43 & \boxed{132} \end{array} \longrightarrow$$
Cociente: $2x^3 + 5x^2 + 14x + 43$
Resto: 132

d)
$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 1 & -8 & -7 \\ -2 & & -2 & 2 & 12 \\ \hline & 1 & -1 & -6 & \boxed{5} \end{array} \longrightarrow$$
Cociente: $x^2 - x - 6$
Resto: 5

e)
$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -4 & 6 & -9 \\ -4 & & -4 & 32 & -152 \\ \hline & 1 & -8 & 38 & \boxed{-161} \end{array} \longrightarrow$$
Cociente: $x^2 - 8x + 38$
Resto: -161

038 Completa estas divisiones y escribe los polinomios dividendo, divisor, cociente y resto.

a)
$$\begin{array}{r|rrr|r} & \mathbf{3} & \mathbf{4} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{-1} & & -3 & -1 & 1 \\ \hline & 3 & 1 & -1 & \boxed{2} \end{array}$$

Dividendo: $3x^3 + 4x^2 + 1$
Divisor: $x + 1$
Cociente: $3x^2 + x - 1$
Resto: 2

b)
$$\begin{array}{r|rrr|r} & \mathbf{4} & \mathbf{3} & \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ -1 & & -4 & 1 & -3 \\ \hline & 4 & \mathbf{-1} & 3 & \boxed{-2} \end{array}$$

Dividendo: $4x^3 + 3x^2 + 2x + 1$
Divisor: $x + 1$
Cociente: $4x^2 - x + 3$
Resto: -2

c)
$$\begin{array}{r|rrr|r} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{-1} & \mathbf{2} \\ 2 & & 2 & 4 & 6 \\ \hline & 1 & \mathbf{2} & 3 & \boxed{8} \end{array}$$

Dividendo: $x^3 - x + 2$
Divisor: $x - 2$
Cociente: $x^2 + 2x + 3$
Resto: 8

d)
$$\begin{array}{r|rrr|r} & -2 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{-3} \\ \mathbf{-4} & & 8 & -32 & 128 \\ \hline & -2 & \mathbf{8} & -32 & \boxed{125} \end{array}$$

Dividendo: $-2x^3 - 3$
Divisor: $x + 4$
Cociente: $-2x^2 + 8x - 32$
Resto: 125

039 Halla el valor de *m* para que las divisiones sean exactas.

a) $(x^2 - 12x + m) : (x + 4)$
b) $(x^3 + 2x^2 + 8x + m) : (x - 2)$
c) $(x^3 - x^2 + 2mx - 12) : (x - 6)$
d) $(x^3 - 2 \cdot (m + 1) \cdot x^2 + m) : (x + 1)$
e) $(x^3 + mx^2 + 2x - 10) : (x - 5)$

a)
$$\begin{array}{r|rr|r} & 1 & -12 & m \\ -4 & & -4 & 64 \\ \hline & 1 & -16 & \boxed{m+64} \end{array} \longrightarrow m + 64 = 0 \rightarrow m = -64$$

b)
$$\begin{array}{r|rrr|r} & 1 & 2 & 8 & m \\ 2 & & 2 & 8 & 32 \\ \hline & 1 & 4 & 16 & \boxed{m+32} \end{array} \longrightarrow m + 32 = 0 \rightarrow m = -32$$

c)
$$\begin{array}{r|rrr|r} & 1 & -1 & 2m & -12 \\ 6 & & 6 & 30 & 12m+180 \\ \hline & 1 & 5 & 2m+30 & \boxed{12m+168} \end{array} \longrightarrow 12m + 168 = 0 \rightarrow m = -14$$

d)
$$\begin{array}{r|rrr|r} & 1 & -2(m+1) & 0 & m \\ -1 & & -1 & 2m+3 & -2m-3 \\ \hline & 1 & -2m-3 & 2m+3 & \boxed{-m-3} \end{array} \longrightarrow -m - 3 = 0 \rightarrow m = -3$$

e)
$$\begin{array}{r|rrr|r} & 1 & m & 2 & -10 \\ 5 & & 5 & 5m+25 & 25m+135 \\ \hline & 1 & m+5 & 5m+27 & \boxed{25m+125} \end{array} \rightarrow 25m + 125 = 0 \rightarrow m = -\frac{125}{25} = -5$$

040 Obtén el valor de m para que las divisiones tengan el resto indicado.

a) $(x^5 + 6x^3 + mx + 17) : (x + 1)$ Resto 2

b) $(2mx^3 - 3mx^2 + 8m) : (x - 2)$ Resto -4

a)
$$\begin{array}{r|rrrrrr} & 1 & 0 & 6 & 0 & m & 17 \\ -1 & & -1 & 1 & -7 & 7 & -m-7 \\ \hline & 1 & -1 & 7 & -7 & m+7 & \boxed{-m+10} \end{array} \rightarrow -m + 10 = 2 \rightarrow m = 8$$

b)
$$\begin{array}{r|rrrr} & 2m & -3m & 0 & 8m \\ 2 & & 4m & 2m & 4m \\ \hline & 2m & m & 2m & \boxed{12m} \end{array} \rightarrow 12m = -4 \rightarrow m = -\frac{1}{3}$$

041 HAZLO ASÍ

¿CÓMO SE APLICA LA REGLA DE RUFFINI CUANDO EL DIVISOR ES DEL TIPO $(ax - b)$?

Efectúa esta división por la regla de Ruffini.

$$(x^2 + 2x - 3) : (2x - 6)$$

PRIMERO. Se divide el polinomio divisor, $ax - b$, entre a.

$$(x^2 + 2x - 3) : (2x - 6) \xrightarrow{(2x-6):2} (x^2 + 2x - 3) : (x - 3)$$

SEGUNDO. Se aplica la regla de Ruffini con el nuevo divisor.

$$\begin{array}{r|rrr} & 1 & 2 & -3 \\ 3 & & 3 & 15 \\ \hline & 1 & 5 & \boxed{12} \end{array} \rightarrow C(x) = x + 5$$

TERCERO. El cociente de la división inicial será el cociente de esta división dividido entre el número por el que se ha dividido el divisor inicial.

$$\text{Cociente: } x - 5 \xrightarrow{:2} \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$$

El resto no varía. Resto: 12.

042 Calcula, utilizando la regla de Ruffini, las siguientes divisiones.

a) $(x^5 + 1) : (2x + 4)$

b) $(x^4 - 5x^2 + 2) : (5x - 10)$

a) $(x^5 + 1) : (2x + 4) \xrightarrow{(2x+4):2} (x^5 + 1) : (x + 2)$

$$\begin{array}{r|rrrrrr} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & & -2 & 4 & -8 & 16 & -32 \\ \hline & 1 & -2 & 4 & -8 & 16 & \boxed{-31} \end{array}$$

Cociente: $x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 8x + 16 \xrightarrow{:2} \frac{1}{2}x^4 - x^3 + 2x^2 - 4x + 8$

Resto: -31

b) $(x^4 - 5x^2 + 2) : (5x - 10) \xrightarrow{(5x-10):5} (x^4 - 5x^2 + 2) : (x - 2)$

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & 0 & -5 & 0 & 2 \\ 2 & & 2 & 4 & -2 & -4 \\ \hline & 1 & 2 & -1 & -2 & \boxed{-2} \end{array}$$

Cociente: $x^3 + 2x^2 - x - 2 \xrightarrow{:5} \frac{1}{5}x^3 + \frac{2}{5}x^2 - \frac{1}{5}x - \frac{2}{5}$

Resto: -2

043 Utiliza el teorema del resto para calcular estos valores numéricos.

a) $P(x) = x^2 + 2x - 7$, para $x = 1$

b) $P(x) = x^3 + 5x^2 - 6x + 7$, para $x = -2$

c) $P(x) = x^4 - 2$, para $x = -1$

d) $P(x) = x^4 - 4x + x^2 - 13$, para $x = 3$

a)
$$\begin{array}{r|rrr} & 1 & 2 & -7\\ 1 & & 1 & 3\\ \hline & 1 & 3 & \boxed{-4}\end{array} \longrightarrow P(1) = -4$$

b)
$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 5 & -6 & 7\\ -2 & & -2 & -6 & 24\\ \hline & 1 & 3 & -12 & \boxed{31}\end{array} \longrightarrow P(-2) = 31$$

c)
$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & 0 & 0 & 0 & -2\\ -1 & & -1 & 1 & -1 & 1\\ \hline & 1 & -1 & 1 & -1 & \boxed{-1}\end{array} \rightarrow P(-1) = -1$$

d)
$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & 0 & 1 & -4 & -13\\ 3 & & 3 & 9 & 30 & 78\\ \hline & 1 & 3 & 10 & 26 & \boxed{65}\end{array} \longrightarrow P(3) = 65$$

044 **HAZLO ASÍ**

¿CÓMO SE CALCULA EL RESTO DE LAS DIVISIONES CON DIVISOR $(x - a)$?

Calcula, sin realizar la división, el resto de:

$$(2x^4 - 3x^2 + x - 1) : (x - 2)$$

PRIMERO. Se calcula el valor numérico del dividendo cuando x toma el valor del término independiente del divisor, cambiado de signo.

$$P(2) = 2 \cdot 2^4 - 3 \cdot 2^2 + 2 - 1 = 32 - 12 + 2 - 1 = 21$$

SEGUNDO. Según el teorema del resto, este es el resto de la división.

El resto que obtenemos al efectuar la división es $R = 21$.

045 Calcula el resto sin hacer las divisiones.

a) $(x^6 - x^5 + x^4 - 3x^2 + x - 2) : (x - 2)$

b) $(x^4 - x^3 + 6x + 3) : (x + 1)$

c) $(2x^3 - x^2 + 7x - 9) : (x - 3)$

d) $(5x^4 + 7x^3 - 4x + 2) : (x + 2)$

a) $P(2) = 2^6 - 2^5 + 2^4 - 3 \cdot 2^2 + 2 - 2 = 36 \longrightarrow$ Resto: 36

b) $P(-1) = (-1)^4 - (-1)^3 + 6 \cdot (-1) + 3 = -1 \longrightarrow$ Resto: -1

c) $P(3) = 2 \cdot 3^3 - 3^2 + 7 \cdot 3 - 9 = 57 \longrightarrow$ Resto: 57

d) $P(-2) = 5 \cdot (-2)^4 + 7 \cdot (-2)^3 - 4 \cdot (-2) + 2 = 34 \rightarrow$ Resto: 34

046 Halla el resto de esta división.

$$(x^{200} + 1) : (x + 1)$$

$P(-1) = (-1)^{200} + 1 = 2 \rightarrow$ Resto: 2

047 Responde razonadamente si es verdadero o falso.

a) Si $P(-2) = 0$, entonces $P(2) = 0$.

b) Si el resto de $P(x) : (x + 2)$ es 3, resulta que $P(3) = 0$.

a) Falso, por ejemplo, en $P(x) = x + 2$, $P(-2) = 0$ y $P(2) = 4$.

b) Falso. Al ser el resto 3, sabemos que $P(-2) = 3$, pero no nos aporta más información.

048 Comprueba si $x = 3$ y $x = 2$ son raíces del polinomio $P(x) = x^4 + 2x^3 - 7x^2 - 8x + 12$.

Como $P(3) = 60$, $x = 3$ no es raíz.

Como $P(2) = 0$, $x = 2$ es raíz del polinomio.

049 Comprueba que una raíz de $P(x) = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1$ es $x = 1$.

Como $P(1) = 0$, $x = 1$ es raíz del polinomio.

050 Calcula las raíces de estos polinomios.

a) $x^3 - 9x^2 + 26x - 24$

b) $x^3 - 2x^2 - 3x$

c) $x^4 - x^2 - x + 1$

d) $x^3 + x^2 - 9x - 9$

e) $x^2 - x - 2$

f) $x^2 + x$

g) $4x^2 - 2x$

h) $x^2 - 4x + 4$

a) Raíces: $x = 2$, $x = 3$, $x = 4$

b) Raíces: $x = 0$, $x = -1$, $x = 3$

c) Raíz: $x = 1$

d) Raíces: $x = -1$, $x = -3$, $x = 3$

e) Raíces: $x = -1$, $x = 2$

f) Raíces: $x = -1$, $x = 0$

g) Raíces: $x = 0$, $x = \frac{1}{2}$

h) Raíz doble: $x = 2$

051 Observando el dividendo y el divisor, señala cuáles de estas divisiones no son exactas.

a) $(x^3 - 3x^2 + 7x - 8) : (x + 2)$

b) $(x^2 + 4x - 5) : (x - 7)$

c) $(x^4 - 9) : (x - 5)$

d) $(x^3 + 16x^2 + 19x + 21) : (x + 4)$

¿Puedes asegurar que las otras divisiones son exactas?

No son exactas las divisiones de los apartados b), c) y d).

Sin hacer más operaciones no es posible asegurar si la división del apartado a) es exacta o no.

052 **HAZLO ASÍ**

¿CÓMO SE CALCULA UN POLINOMIO, CONOCIDAS SUS RAÍCES Y EL COEFICIENTE DEL TÉRMINO DE MAYOR GRADO?

Escribe el polinomio cuyas raíces son 1, 1, 2 y −3, y el coeficiente del término de mayor grado es 5.

PRIMERO. Los divisores del polinomio buscado serán de la forma $(x - a)$, donde a es cada una de las raíces.

Los divisores del polinomio serán:

$$(x - 1), (x - 2) \text{ y } (x + 3)$$

SEGUNDO. Se efectúa el producto de los monomios, multiplicando cada uno tantas veces como aparece la raíz.

$$(x - 1) \cdot (x - 1) \cdot (x - 2) \cdot (x + 3)$$

TERCERO. Se multiplica por el coeficiente del término de mayor grado.

$$P(x) = 5 \cdot (x - 1) \cdot (x - 1) \cdot (x - 2) \cdot (x + 3)$$
$$P(x) = 5x^4 - 5x^3 - 35x^2 + 65x - 30$$

053 **¿Qué polinomios tienen estas raíces y coeficientes de mayor grado?**

a) $x = 1$, $x = -2$, $x = 3$ **y coeficiente** -4.
b) $x = 2$ **(raíz doble) y coeficiente 2.**
c) $x = -2$, $x = -3$ **y coeficiente** -1.

a) $P(x) = -4 \cdot (x - 1) \cdot (x + 2) \cdot (x - 3) = -4x^3 + 8x^2 + 20x - 24$
b) $P(x) = 2 \cdot (x - 2)^2 = 2x^2 - 8x + 8$
c) $P(x) = -1 \cdot (x + 2) \cdot (x + 3) = -x^2 - 5x - 6$

054 **Efectúa.**

a) $(3x + 4)^2$ **b)** $\left(4x - \frac{2}{3}\right)^2$ **c)** $(2x - 3)^3$ **d)** $(x^2 - 2x)^3$

a) $9x^2 + 24x + 16$
b) $16x^2 + \frac{16}{3}x + \frac{4}{9}$
c) $8x^3 - 36x^2 + 54x - 27$
d) $x^6 - 6x^5 + 12x^4 - 8x^3$

055 **Desarrolla las siguientes potencias.**

a) $(x^2 + x + 2)^2$ **b)** $(2x^2 - 3x - 1)^2$ **c)** $(3x^2 + x - 2)^3$ **d)** $\left(\frac{x^2}{3} - \frac{x}{5} + 1\right)^3$

a) $x^4 + 2x^3 + 5x^2 + 4x + 4$
b) $4x^4 - 12x^3 + 5x^2 + 6x + 1$
c) $27x^6 + 27x^5 - 45x^4 - 35x^3 + 30x^2 + 12x - 8$
d) $\frac{x^6}{27} - \frac{x^3}{125} + 1 - \frac{x^5}{15} + \frac{x^4}{3} + \frac{x^4}{25} + \frac{3x^2}{25} + x^2 - \frac{3x}{5} + \frac{2x^3}{5} =$

$$= \frac{x^6}{27} - \frac{x^5}{15} + \frac{28x^4}{75} + \frac{51x^3}{125} + \frac{28x^2}{25} - \frac{3x}{5} + 1$$

056 Efectúa y reduce términos semejantes.

a) $(x+2)^4+(x-2)^2$

b) $(2x-3)^3-(x^2+4)^2$

c) $(5x-6)^2+(x-1)^3$

d) $(3x+5)^3-(4x-2)^3$

a) $(x^4+8x^3+24x^2+32x+16)+(x^2-4x+4)=x^4+8x^3+25x^2+28x+20$

b) $(8x^3-36x^2+54x-27)-(x^4+8x^2+16)=-x^4+8x^3-44x^2+5x-43$

c) $25x^2-60x+36+x^3-3x^2+3x-1=x^3+22x^2-57x+35$

d) $(27x^3+135x^2+225x+27)-(64x^3-96x^2+48x-8)=$
$=-37x^3+231x^2+177x+35$

057 Indica si las igualdades son verdaderas o falsas. Razona la respuesta.

a) $(6x+5)^4-(6x+5)^2=(6x+5)^2\cdot(6x+5)^2-1$

b) $(3x+4)^4-(3x+4)^3=(3x+4)^3\cdot(3x+3)$

c) $(2x-3)^2-(4x+2)^2=(6x-1)\cdot(-2x-5)$

d) $(4x-2)^3=8\cdot(2x-1)^3$

e) $(8x^2+4x)^2=4x^2\cdot(2x+1)^2$

a) $(6x+5)^2[(6x+5)^2-1]\neq(6x+5)^2\cdot(6x+5)^2-1 \rightarrow$ Falsa

b) $(3x+4)^3[(3x+4)-1]=(3x+4)^3\cdot(3x+3) \rightarrow$ Verdadera

c) $4x^2-12x+9-16x^2-16x-4=-12x^2-30x+2x+5 \rightarrow$ Verdadera

d) $(4x-2)^3=2^3(2x-1)^3 \rightarrow$ Verdadera

e) $(4x)^2(2x+1)^2\neq4x^2(2x+1)^2 \rightarrow$ Falsa

058 Señala cuáles de los siguientes polinomios son el cuadrado de un binomio, e indícalo.

a) $25x^2-70x+49$

b) $x^4-6x^3+9x^2$

c) x^6+4x^3+4

d) x^6-4x^3+4

e) $4x^4-16x^2-16$

f) $9x^4+12x^3+4$

a) $(5x-7)^2$

b) $(x^2-3x)^2$

c) $(x^3+2)^2$

d) $(x^3-2)^2$

e) No es el cuadrado de un binomio.

f) No es el cuadrado de un binomio.

059 Añade los términos necesarios a cada polinomio para que sea el cuadrado de un binomio.

a) $25x^2+4$

b) $49x^2+36$

c) x^4+10x^3

d) x^6-4x^3

e) $9x^4-24x^3$

f) x^8+x^2

a) $25x^2\pm20x+4$

b) $49x^2\pm84x+36$

c) $x^4+10x^3+25x^2$

d) $x^6-4x^3+4x^2$

e) $9x^4-24x^3+16x^2$

f) $x^8+2x^5+x^2$

060 Descompón en factores los siguientes polinomios, sacando factor común.

a) $8x^3 - 4x$ **d)** $x^6 - 4x^3$
b) $18x^3 + 14x^2$ **e)** $x^3 + 7x^2$
c) $9x^2 + 12x$ **f)** $x^4 - x^3$

a) $4x \cdot (2x^2 - 1)$ d) $x^3 \cdot (x^3 - 4)$
b) $2x^2 \cdot (9x + 7)$ e) $x^2 \cdot (x + 7)$
c) $3x \cdot (3x + 4)$ f) $x^3 \cdot (x - 1)$

061 Factoriza estos polinomios, aplicando las igualdades notables.

a) $x^2 + 2x + 1$ **d)** $x^2 - 4$
b) $x^2 + 10x + 25$ **e)** $4x^2 - 16$
c) $4x^4 - 16x^2 + 16$ **f)** $x^3 - 9x^2 + 27x - 27$

a) $(x + 1)^2$ d) $(x + 2) \cdot (x - 2)$
b) $(x + 5)^2$ e) $(2x + 4) \cdot (2x - 4)$
c) $(2x^2 - 4)^2$ f) $(x - 3)^3$

062 Factoriza los siguientes polinomios.

a) $x^2 + 5x + 6$ **e)** $x^3 - 13x + 12$
b) $x^2 + x - 12$ **f)** $x^3 - 5x^2 - x + 5$
c) $x^2 + 11x + 24$ **g)** $x^3 + 4x^2 - 11x - 30$
d) $x^2 + 2x - 24$ **h)** $x^3 + 8x^2 - 32x - 60$

a) $(x + 3) \cdot (x + 2)$ e) $(x - 3) \cdot (x - 1) \cdot (x + 4)$
b) $(x - 3) \cdot (x + 4)$ f) $(x - 5) \cdot (x - 1) \cdot (x + 1)$
c) $(x + 3) \cdot (x + 8)$ g) $(x + 2) \cdot (x - 3) \cdot (x + 5)$
d) $(x + 6) \cdot (x - 4)$ h) No es posible.

063 Descompón factorialmente.

a) $x^3 + x^2 - 6$ **e)** $x^4 - 2x^3 - 11x^2 + 12x$
b) $x^4 - x^2$ **f)** $x^5 - x^4 - 19x^3 + 4x^2$
c) $2x^2 - 3x^3$ **g)** $18x^3 + 48x^2 + 32x$
d) $3x^2 + 12x + 12$ **h)** $48x^2 + 24x + 3$

a) No es posible.
b) $x^2 \cdot (x + 1) \cdot (x - 1)$
c) $x^2 \cdot (2 - 3x)$
d) $3 \cdot (x + 2)^2$
e) $x \cdot (x + 3) \cdot (x - 1) \cdot (x - 4)$
f) $x^2 \cdot (x + 4) \cdot (x^2 - 5x + 1)$
g) $2x \cdot (3x + 4)^2$
h) $3 \cdot (4x + 1)^2$

064 ●●

Escribe como producto de factores.

a) $7x^3 + 7x^2 + \frac{7}{4}x$

b) $x^4 - \frac{5}{2}x^3 + \frac{1}{25}x^2$

c) $(2x + 1)^2 - (4x - 3)^2$

d) $(x - 2)^2 - 16x^4$

a) $7x \cdot \left(x + \frac{1}{2}\right)^2$

b) $x^2 \cdot \left(x^2 - \frac{2}{5}x + \frac{1}{25}\right) = x^2 \cdot \left(x + \frac{1}{5}\right)^2$

c) $[(2x + 1) + (4x - 3)] \cdot [(2x + 1) - (4x - 3)] = (6x - 2) \cdot (-2x + 4) =$
$= 4 \cdot (3x - 1) \cdot (-x + 2)$

d) $[(x - 2) + 4] \cdot [(x - 2) - 4] = (x + 2) \cdot (x - 6)$

065 ●●●

La torre de una iglesia es un prisma de base cuadrada y de altura 15 m mayor que la arista de la base.

a) Expresa, en lenguaje algebraico, cuánto miden su superficie lateral y su volumen.

b) Calcula los valores numéricos de la superficie y del volumen para una arista de la base de 5, 6 y 7 m, respectivamente.

a) Arista: x
Altura: $x + 15$
$A_{lateral} = 4x \cdot (x + 15) = 4x^2 + 60x$
$V = x^2 \cdot (x + 15) = x^3 + 15x^2$

b)

	$x = 5$ m	$x = 6$ m	$x = 7$ m
$A_{lateral} = 4x^2 + 60x$	400 m^2	504 m^2	616 m^2
$V = x^3 + 15x^2$	500 m^3	756 m^3	1.078 m^3

066 ●●●

La página de un libro mide el doble de alto que de ancho, y los márgenes laterales miden 2 cm, y los márgenes superior e inferior, 3 cm.

a) Expresa la superficie total de la página en lenguaje algebraico.

b) Haz lo mismo con la superficie útil de papel (lo que queda dentro de los márgenes).

a) Ancho: x
Alto: $2x$
$A = x \cdot 2x = 2x^2$

b) Ancho: $x - 4$
Alto: $2x - 6$
$A = (x - 4) \cdot (2x - 6) = 2x^2 - 14x + 24$

067 Mandamos construir un depósito de agua con forma cilíndrica, siendo el área de la base la quinta parte del cubo de la altura.

a) Expresa el volumen del depósito.

b) ¿Cuántos metros cúbicos de agua caben si la altura mide 1 m?

a) Altura: x $\qquad A_{\text{base}} = \dfrac{x^3}{5} \qquad V = x \cdot \dfrac{x^3}{5} = \dfrac{x^4}{5}$

b) $V(1) = \dfrac{1}{5} = 0{,}2\ \text{m}^3$

068 El diámetro de la base de un silo cilíndrico mide $\dfrac{3}{4}$ de la longitud de la altura.

a) Expresa la capacidad del silo en función del diámetro de su base.

b) Queremos pintar el silo y empleamos 1 kg de pintura por cada metro cuadrado. Calcula cuántos kilogramos de pintura necesitamos si el diámetro de la base mide 2 m.

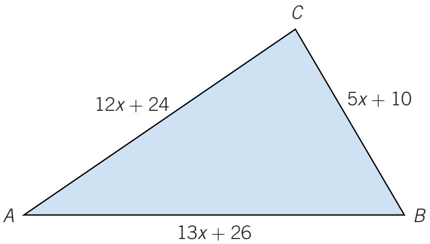
a) Diámetro: x $\qquad$ Altura: $\dfrac{4}{3}x \qquad V = \pi \cdot \left(\dfrac{x}{2}\right)^2 \cdot \dfrac{4}{3}x = \pi \cdot \dfrac{x^3}{3}$

b) Diámetro: x $\qquad$ Altura: $\dfrac{4}{3}x$

$$A_{\text{lateral}} = \pi \cdot x \cdot \frac{4}{3}x = \pi \cdot \frac{4x^2}{3} \xrightarrow{x=2} A_{\text{lateral}} = \pi \cdot \frac{4 \cdot 2^2}{3} = 16{,}75\ \text{m}^2$$

Necesitamos 16,75 kg de pintura.

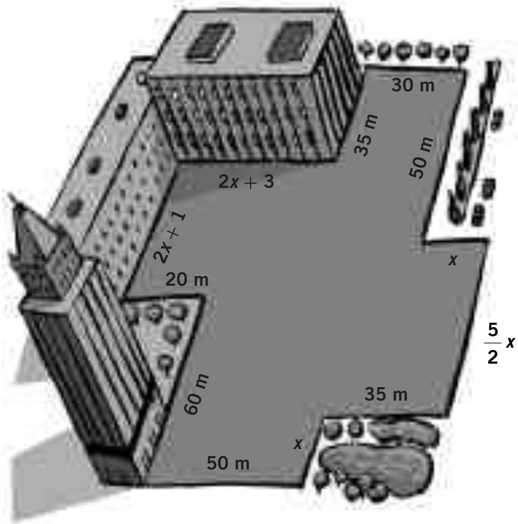
069 Demuestra que el triángulo $\widehat{ABC}$ es rectángulo para cualquier valor de x.



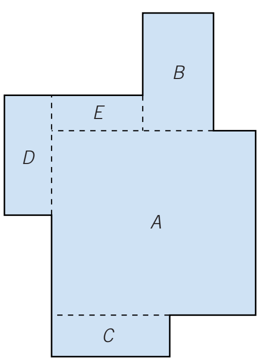
$$(12x + 24)^2 + (5x + 10)^2 = (12^2 + 5^2) \cdot (x + 2)^2 = 13^2 \cdot (x + 2)^2 = (13x + 26)^2$$

Se cumple el teorema de Pitágoras para cualquier valor de x, y el triángulo es equilátero.

070 Calcula el perímetro y el área de la figura, expresando los resultados mediante polinomios.



$$\text{Perímetro} = 50 + x + 35 + \frac{5}{2}x + x + 50 + 30 + 35 + 2x + 3 +$$
$$+ 2x + 1 + 20 + 60 = 284 + \frac{17}{2}x \text{ m}$$



$$A_A = \frac{5}{2}x \cdot (50 + 35) = \frac{425}{2}x \text{ m}^2$$

$$A_B = 30 \cdot 50 = 1.500 \text{ m}^2$$

$$A_C = 50 \cdot x = 50x \text{ m}^2$$

$$A_D = 20 \cdot (2x + 1) = (40x + 20) \text{ m}^2$$

$$A_E = (2x + 3 - 20) \cdot (50 - 35) =$$
$$= (30x - 255) \text{ m}^2$$

$$A = A_A + A_B + A_C + A_D + A_E =$$
$$= \frac{425}{2}x + 1.500 + 50x + 40x + 20 + 30x - 255 = \frac{665}{2}x + 1.265 \text{ m}^2$$

071 **Encuentra los valores de *A*, *B* y *C* para que se cumpla la igualdad.**

$$\boldsymbol{(Ax - 7) \cdot (5x + B) = Cx^2 - 6x - 14}$$

$$\left.\begin{array}{l}(Ax - 7) \cdot (5x + B) = 5Ax^2 + (AB - 35)x - 7B \\ (Ax - 7) \cdot (5x + B) = Cx^2 - 6x - 14\end{array}\right\}$$

$$\rightarrow \left\{\begin{array}{l} 7B = 14 \rightarrow B = 2 \\ AB - 35 = -6 \xrightarrow{B = 2} A = \dfrac{29}{2} \\ C = 5A \xrightarrow{A = \frac{29}{2}} C = \dfrac{145}{2}\end{array}\right.$$

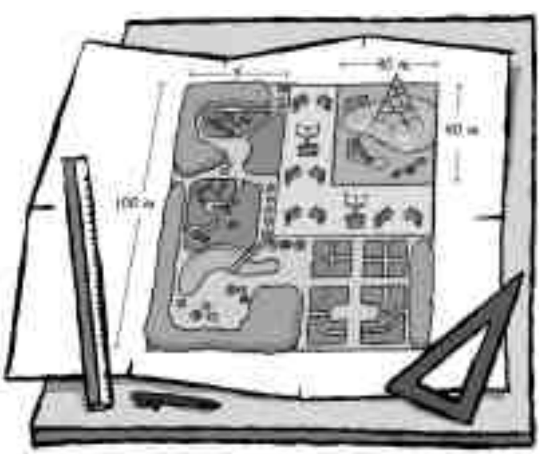
EN LA VIDA COTIDIANA

072 ●●●

Dentro de los proyectos de conservación de zonas verdes de un municipio, se ha decidido instalar un parque en el solar que ocupaba una antigua fábrica.

El parque tendrá tres áreas delimitadas: la zona de juego, la zona de lectura, que rodeará a la zona de juego, y el resto, que se dedicará a la zona de paseo.

Aún no han hecho mediciones, pero los técnicos han determinado que la zona dedicada a los juegos sea cuadrada y su lado medirá 40 metros.



a) ¿Qué expresión nos da el área de la zona para pasear? ¿Y el área de la zona de lectura?

b) Si deciden que la zona de paseo tenga un ancho de 40 metros, ¿cuáles serán las áreas de cada zona?

a) $A_{juego} = 40^2 = 1.600\ m^2$

$A_{lectura} = (100 - x)^2 - 40^2 = 8.400 - 200x + x^2$

$A_{paseo} = 100^2 - (100 - x)^2 = 200x - x^2$

b) $A_{juego} = 40^2 = 1.600\ m^2$

$A_{lectura} = (100 - 40)^2 - 40^2 = 2.000\ m^2$

$A_{paseo} = 100^2 - 60^2 = 6.400\ m^2$

073 ●●● **Al recoger el correo, Ana ha recibido la factura de su consumo de luz en los dos últimos meses.**

Ana le pide ayuda a su hermano y ambos se disponen a analizar la factura con detalle.

Con esta información, escriben un polinomio:

$$1{,}16 \cdot [1{,}09 \cdot (2px + cy) + 2z]$$

siendo x el importe de la potencia al mes, y el importe de la energía consumida y z el importe mensual del alquiler.

Ahora comprenden por qué la factura ha sido de 49,84 €.

a) Comprueba el importe.

b) Deciden bajar la potencia a 3,5 kW y el consumo aumenta a 315 kWh. ¿Cuánto tendrán que pagar en la factura de los dos próximos meses?

a) Para comprobar el importe de la factura, sustituimos los datos conocidos en el polinomio indicado en el enunciado.

$$\begin{aligned}\text{Importe} &= 1{,}16 \cdot [1{,}09 \cdot (2px + cy) + 2z] = \\ &= 1{,}16 \cdot [1{,}09 \cdot (2 \cdot 4{,}4 \cdot 158{,}19 + 8{,}99 \cdot 272) + 2 \cdot 57] = \\ &= 4.984{,}18 \text{ céntimos} = 49{,}84 \text{ €}\end{aligned}$$

b) El importe de la factura de los dos próximos meses es:

$$\begin{aligned}&1{,}16 \cdot [1{,}09 \cdot (2px + cy) + 2z] = \\ &\qquad = 1{,}16 \cdot [1{,}09 \cdot (2 \cdot 3{,}5 \cdot 158{,}19 + 8{,}99 \cdot 315) + 2 \cdot 57] = \\ &\qquad = 5.112{,}93 \text{ céntimos} = 51{,}13 \text{ €}\end{aligned}$$

6 Ecuaciones, inecuaciones y sistemas

ECUACIONES

- DE PRIMER GRADO
- DE SEGUNDO GRADO
- BICUADRADAS

INECUACIONES

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

- COMPATIBLE DETERMINADO
- COMPATIBLE INDETERMINADO
- INCOMPATIBLE

La última noche

Durante un corto intervalo de tiempo la actividad del joven cesó, y en la pequeña habitación de la pensión donde vivía solo se escuchaba su agitada respiración, pues parecía que ni durmiendo descansaba.

El ruido producido por un carruaje sobre el empedrado de la calle hizo que primero entornara los ojos y después, como si hubiera sido poseído, tomó pluma y papel y comenzó a escribir.

Évariste Galois, presintiendo lo inevitable, escribió sus cartas con un carácter inequívoco de última voluntad, como si se dictara a sí mismo.

> *[...] Vuestra tarea es sencilla: demostrad que he de combatir contra mi voluntad, tras haber agotado todos los medios de reconciliación. [...] Por favor recordadme, ya que el destino no me ha dado vida bastante para ser recordado por mi patria.*

Tras sellar esta primera carta, más tranquilo, comenzó a escribir la segunda:

> *[...] He hecho algunos descubrimientos nuevos en Matemáticas que puedes ver en tres memorias que dejo aquí... Haz llegar estos trabajos a la Academia de las Ciencias. [...] Confío en que después de leerlos alguien encuentre provecho en organizarlo todo. [...]*

El premonitorio estado de ánimo de Galois estaba plenamente justificado: al amanecer sería herido de muerte en un duelo y moriría al día siguiente, abandonado por todos, en un hospital de París.

Pese a fallecer con tan solo veinte años, sus trabajos sobre ecuaciones fueron absolutamente geniales.

Escribe tres ecuaciones: una que no tenga solución, otra que tenga una solución y una tercera con más de una solución.

Sin solución $\longrightarrow$ $x + 3 = x - 3$
Con una solución $\longrightarrow$ $x + 3 = 0$
Con dos soluciones $\rightarrow$ $x^2 + 4x - 5 = 0$

EJERCICIOS

001 **Indica los elementos de estas ecuaciones.**

a) $(x + 2) - (x - 5) + 2 = 7 - x^2$ **b)** $x + (x - 1) - 9 = x + 4$

a) Incógnita: x
Miembros: $(x + 2) - (x - 5) + 2$; $7 - x^2$
Grado: 2

b) Incógnita: x
Miembros: $x + (x - 1) - 9$; $x + 4$
Grado: 1

002 **¿Cuáles de los siguientes valores son solución de la ecuación** $\dfrac{x+4}{3} - \dfrac{1}{2} = \dfrac{5-x}{2}$**?**

a) $x = 1$ **b)** $x = 5$ **c)** $x = -2$ **d)** $x = 2$

La solución es la del apartado d) $x = 2$.

003 **Comprueba si estas ecuaciones tienen la misma solución, es decir, si son ecuaciones equivalentes.**

a) $3x - 2 = 7$ **y** $x - 3 = 0$ **b)** $x^2 - 9 = 0$ **y** $(x - 3)^2 = 0$

a) Tienen la misma solución, $x = 3$.

b) No son equivalentes, ya que tienen una solución común ($x = 3$), pero la otra no.

004 **Escribe una ecuación que tenga como solución:**

a) $x = 0$ **b)** $x = -1$ **c)** $x = \dfrac{1}{2}$

a) $x^2 - x = 0$ b) $3x - 5 = -8$ c) $2x - 1 = 0$

005 **Resuelve las siguientes ecuaciones.**

a) $4x - 8 = 6x$ **c)** $x^2 + 14x + 49 = 0$

b) $x^2 + 7x + 12 = 0$ **d)** $5x^2 + 10x + 7 = 0$

a) $4x - 6x = 8 \rightarrow x = -4$

b) $x = \dfrac{-7 \pm \sqrt{49 - 4 \cdot 12}}{2} = \dfrac{-7 \pm \sqrt{1}}{2} \rightarrow \begin{cases} x_1 = -3 \\ x_2 = -4 \end{cases}$

c) $x = \dfrac{-14 \pm \sqrt{196 - 4 \cdot 49}}{2} = \dfrac{-14 \pm \sqrt{0}}{2} \rightarrow x_1 = x_2 = -7$

d) $x = \dfrac{-10 \pm \sqrt{100 - 4 \cdot 35}}{10} = \dfrac{-10 \pm \sqrt{-40}}{10} \rightarrow$ No tiene solución.

006 **Opera y resuelve esta ecuación.**

$$\mathbf{(x - 1) \cdot (x + 1) + 1 = 100}$$

$$(x - 1) \cdot (x + 1) + 1 = 100 \rightarrow x^2 = 100 \rightarrow x = \pm\sqrt{100} = \pm 10$$

007 **Encuentra una ecuación de segundo grado cuyas soluciones sean 2 y −7.**

$(x - 2) \cdot (x + 7) = x^2 + 5x - 14 = 0$

008 **Resuelve las siguientes ecuaciones.**

a) $\mathbf{7x^2 - 12 = 0}$

b) $\mathbf{2x^2 - 32 = 0}$

c) $\mathbf{2x^2 = 0}$

a) $x_1 = \sqrt{\dfrac{12}{7}}$

$x_2 = -\sqrt{\dfrac{12}{7}}$

b) $x_1 = 4$

$x_2 = -4$

c) $x_1 = x_2 = 0$

009 **Determina el número de soluciones que tienen estas ecuaciones.**

a) $\mathbf{x^2 - 10x + 25 = 0}$

b) $\mathbf{x^2 - 5x + 8 = 0}$

a) $\Delta = 100 - 4 \cdot 25 = 0 \rightarrow$ Una solución

b) $\Delta = 25 - 32 < 0 \longrightarrow$ Ninguna solución

010 **Halla el valor de *a* en estas ecuaciones para que tengan dos soluciones.**

a) $\mathbf{ax^2 - 2x + 2 = 0}$

b) $\mathbf{-x^2 + ax - 1 = 0}$

a) $\Delta = 4 - 8a > 0 \rightarrow a < \dfrac{1}{2}$

b) $\Delta = a^2 - 4 > 0 \rightarrow |a| > 2 \rightarrow a > 2$ o $a < -2$

011 **Escribe dos ecuaciones de segundo grado cuya única solución sea −2.**

$x^2 + 4x + 4 = 0$

$2x^2 + 8x + 8 = 0$

012 **Calcula las soluciones de estas ecuaciones.**

a) $x^4 + 7x^2 - 3 = 0$ **c)** $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$

b) $36x^4 - 13x^2 + 1 = 0$ **d)** $2x^4 - 6x^2 + 4 = 0$

a) $x^4 + 7x^2 - 3 = 0 \xrightarrow{z=x^2} z^2 + 7z - 3 = 0$

$$z = \frac{-7 \pm \sqrt{49+12}}{2} \rightarrow \begin{cases} z_1 = \dfrac{-7+\sqrt{61}}{2} \xrightarrow{z=x^2} x = \pm\sqrt{\dfrac{-7+\sqrt{61}}{2}} \\ z_2 = \dfrac{-7-\sqrt{61}}{2} \xrightarrow{z=x^2} \text{No tiene solución.} \end{cases}$$

b) $36x^4 - 13x^2 + 1 = 0 \xrightarrow{z=x^2} 36z^2 - 13z + 1 = 0$

$$z = \frac{13 \pm \sqrt{169-144}}{72} \rightarrow \begin{cases} z_1 = \dfrac{18}{42} = \dfrac{1}{4} \xrightarrow{z=x^2} x^2 = \dfrac{1}{4} \rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{2} \\ x_2 = -\dfrac{1}{2} \end{cases} \\ z_2 = \dfrac{8}{72} = \dfrac{1}{9} \xrightarrow{z=x^2} x^2 = \dfrac{1}{9} \rightarrow \begin{cases} x_3 = \dfrac{1}{3} \\ x_4 = -\dfrac{1}{3} \end{cases} \end{cases}$$

c) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0 \xrightarrow{z=x^2} z^2 - 5z + 4 = 0$

$$z = \frac{5 \pm \sqrt{25-16}}{2} \rightarrow \begin{cases} z_1 = 4 \xrightarrow{z=x^2} x^2 = 4 \rightarrow x_1 = 2,\ x_2 = -2 \\ z_2 = 1 \xrightarrow{z=x^2} x^2 = 1 \rightarrow x_3 = 1,\ x_4 = -1 \end{cases}$$

d) $2x^4 - 6x^2 + 4 = 0 \xrightarrow{z=x^2} 2z^2 - 6z + 4 = 0$

$$z = \frac{6 \pm \sqrt{36-32}}{4} \rightarrow \begin{cases} z_1 = 2 \xrightarrow{z=x^2} x^2 = 2 \rightarrow x_1 = \sqrt{2},\ x_2 = -\sqrt{2} \\ z_2 = 1 \xrightarrow{z=x^2} x^2 = 1 \rightarrow x_3 = 1,\ x_4 = -1 \end{cases}$$

013 **Opera y resuelve.**

$$(x^3 + x) \cdot (x - 1) = 0$$

Igualamos a 0 cada factor y resolvemos las ecuaciones que resultan.

- $x^3 + x = 0$

$$x(x^2+1) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x^2 + 1 = 0 \end{cases}$$

$\rightarrow$ No tiene solución

- $x - 1 = 0 \rightarrow 1$

Las soluciones son $x_1 = 0$ y $x_2 = 1$.

014 **Escribe una ecuación bicuadrada que tenga como soluciones 0 y 1.**

$x^4 - x^2 = 0$

015 **Transforma cada inecuación, realizando la operación que se indica.**

a) Suma 2 a $4x < 3$.

b) Resta 5 a $x - 4 > 3x + 2$.

c) Multiplica $2x + 1 \leq x - 3$ por 4.

d) Divide $5x + 6 \geq x$ entre -3.

e) Divide $-40x + 16 < 2$ entre 4.

a) $4x + 2 < 5$

b) $x - 9 > 3x - 3$

c) $8x + 4 \leq 4x - 12$

d) $\dfrac{5x+6}{-3} \leq \dfrac{x}{-3}$

e) $-10x + 4 < \dfrac{1}{2}$

016 **Determina tres soluciones en cada caso.**

a) $x - 4 \leq 3$

b) $2x + 2 > 0$

c) $\dfrac{x}{2} + 1 < -2$

d) $x^2 + 1 \geq 1$

a) $x \leq 7 \quad \rightarrow x_1 = 2,\ x_2 = 0,\ x_3 = -6$

b) $x > -1 \rightarrow x_1 = 2,\ x_2 = 0,\ x_3 = 5$

c) $x < -6 \rightarrow x_1 = -12,\ x_2 = -20,\ x_3 = -61$

d) $x^2 \geq 0 \quad \rightarrow x_1 = 2,\ x_2 = 0,\ x_3 = -6$

017 **Escribe dos inecuaciones que tengan como solución $x = 0$.**

$7x < 5$

$3x - 8 > -34$

018 **Resuelve estas inecuaciones.**

a) $2x - 3x + 5 > 6x - 1$ **b) $7 - 2x < -4$**

a) $2x - 3x - 6x > -1 - 5 \rightarrow -7x > -6 \rightarrow x < \dfrac{6}{7}$

b) $-2x < -11 \rightarrow x > \dfrac{11}{2}$

019 **Calcula la solución de las siguientes inecuaciones.**

a) $x^2 \leq 3x$ **b)** $2x^2 > 4x$ **c)** $3x^2 < 3$ **d)** $-4x^2 \geq -36$

a) $x^2 \leq 3x \rightarrow x \cdot (x-3) \leq 0$
$x \cdot (x-3) = 0 \rightarrow x_1 = 0,\ x_2 = 3$
La solución es el intervalo [0, 3].

b) $2x^2 > 4x \rightarrow 2x \cdot (x-4) > 0$
$2x \cdot (x-4) = 0 \rightarrow x_1 = 0,\ x_2 = 4$
La solución es los intervalos $(-\infty, 0)$ y $(4, +\infty)$.

c) $3x^2 < 3 \rightarrow 3(x^2-1) < 0$
$3 \cdot (x^2-1) = 0 \rightarrow x_1 = 1,\ x_2 = -1$
La solución es el intervalo $(-1, 1)$.

d) $-4x^2 \geq -36 \rightarrow 4 \cdot (x^2-9) \leq 0$
$4 \cdot (x^2-9) = 0 \rightarrow x_1 = 3,\ x_2 = -3$
La solución es el intervalo $[-3, 3]$.

020 **Resuelve estas inecuaciones.**

a) $4x - 2 \cdot (x+1) \leq 0$ **c)** $x^2 - 3x \geq 4$
b) $x + 4 \cdot (3-x) < 15$ **d)** $3x - 2x^2 < x + x^2$

a) $4x - 2 \cdot (x+1) \leq 0 \rightarrow 2x - 2 \leq 0 \rightarrow x \leq 1$

b) $x + 4 \cdot (3-x) < 15 \rightarrow x + 12 - 4x < 15 \rightarrow -3x < 3 \rightarrow x > -1$

c) $x^2 - 3x \geq 4 \rightarrow x^2 - 3x - 4 \geq 0$
$x^2 - 3x - 4 = 0 \rightarrow x_1 = 4,\ x_2 = -1$
La solución es los intervalos $(-\infty, -1]$ y $[4, +\infty)$.

d) $3x - 2x^2 < x + x^2 \rightarrow 2x - 3x^2 < 0$
$2x - 3x^2 = 0 \rightarrow x_1 = 0,\ x_2 = \dfrac{2}{3}$
La solución es los intervalos $(-\infty, 0)$ y $\left(\dfrac{2}{3}, +\infty\right)$.

021 **Escribe una inecuación cuya solución sea el intervalo $[2, +\infty)$.**

$x - 5 \geq -3$

022 **Halla tres soluciones de las siguientes ecuaciones lineales, y represéntalas en el plano.**

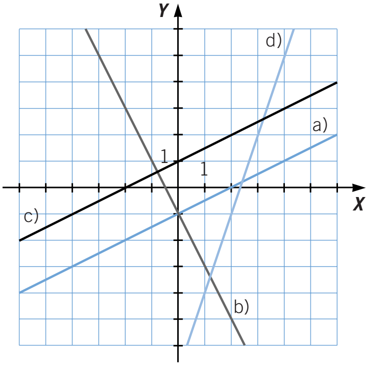
a) $x - 2y = 2$ **c)** $x = 2y - 2$
b) $2x + y = -1$ **d)** $3x - y = 7$

a) Soluciones: $x = 0,\ y = -1$
$x = 2,\ y = 0$
$x = 4,\ y = 1$

b) Soluciones: $x = 0,\ y = -1$
$x = -1,\ y = 1$
$x = 1,\ y = -3$

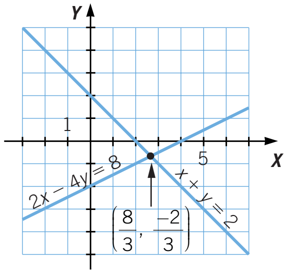
c) Soluciones: $x = -2,\ y = 0$
$x = 0,\ y = 1$
$x = 2,\ y = 2$

d) Soluciones: $x = 0,\ y = -7$
$x = 2,\ y = -1$
$x = 3,\ y = 2$



023 **Resuelve gráficamente este sistema.**

$$\left.\begin{aligned} 2x - 4y &= 8 \\ x + y &= 2 \end{aligned}\right\}$$



024 **Si una ecuación lineal se multiplica o divide por un número distinto de cero, ¿tendrá las mismas soluciones?**

Sí, tendrá las mismas soluciones, ya que se obtienen ecuaciones equivalentes.

025 **A partir del número de soluciones, clasifica estos sistemas de ecuaciones.**

a) $\left.\begin{aligned} x + y &= 0 \\ x - y &= 2 \end{aligned}\right\}$
c) $\left.\begin{aligned} x + y &= 20 \\ x - y &= 4 \end{aligned}\right\}$
e) $\left.\begin{aligned} x + 3y &= 2 \\ 2x - y &= 4 \end{aligned}\right\}$

b) $\left.\begin{aligned} 2x + 2y &= 4 \\ x + y &= 2 \end{aligned}\right\}$
d) $\left.\begin{aligned} 2x + 2y &= 3 \\ x - 2y &= -1 \end{aligned}\right\}$
f) $\left.\begin{aligned} x + y &= 3 \\ x - y &= 1 \end{aligned}\right\}$

a) Compatible determinado: $x = 1,\ y = -1$

b) Compatible indeterminado: $y = 2 - x$

c) Compatible determinado: $x = 12,\ y = 8$

d) Compatible determinado: $x = \dfrac{2}{3},\ y = \dfrac{5}{6}$

e) Compatible determinado: $x = 2,\ y = 0$

f) Compatible determinado: $x = 2,\ y = 1$

026 **Razona si son ciertas estas afirmaciones referidas a un sistema de ecuaciones lineales.**

a) Puede tener únicamente dos soluciones.

b) Si tiene dos soluciones, entonces tendrá infinitas soluciones.

a) No es cierto que pueda tener únicamente dos soluciones. Un sistema de ecuaciones puede tener ninguna, una o infinitas soluciones.

b) Es cierto.

027 **Pon un ejemplo de sistema compatible determinado, indeterminado e incompatible.**

Compatible determinado: $\left.\begin{array}{r} 2x + y = 3 \\ x - 2y = -1 \end{array}\right\}$

Compatible indeterminado: $\left.\begin{array}{r} 2x + y = 3 \\ 4x + 2y = 6 \end{array}\right\}$

Incompatible: $\left.\begin{array}{r} 2x + y = 3 \\ 4x + 2y = 5 \end{array}\right\}$

028 **Resuelve estos sistemas por sustitución e igualación.**

a) $\left.\begin{array}{r} \boldsymbol{x - y = 4} \\ \boldsymbol{x + 2y = 13} \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r} \boldsymbol{10x + y = 21} \\ \boldsymbol{4x - 3y = 5} \end{array}\right\}$

c) $\left.\begin{array}{r} \boldsymbol{x - y = 4} \\ \boldsymbol{x + y = 2} \end{array}\right\}$

d) $\left.\begin{array}{r} \boldsymbol{2x + 3y = -5} \\ \boldsymbol{3x + 2y = -5} \end{array}\right\}$

e) $\left.\begin{array}{r} \boldsymbol{-x + 2y = -1} \\ \boldsymbol{4x + 2y = 14} \end{array}\right\}$

f) $\left.\begin{array}{r} \boldsymbol{2x + 3y = 23} \\ \boldsymbol{6x - 2y = 14} \end{array}\right\}$

a) Sustitución:

$$\left.\begin{array}{r} x - y = 4 \\ x + 2y = 13 \end{array}\right\} \to x = y + 4$$

$$x + 2y = 13 \xrightarrow{x = y + 4} 3y + 4 = 13 \to y = 3$$

$$x = y + 4 \xrightarrow{y = 3} x = 7$$

Igualación:

$$\left.\begin{array}{r} x - y = 4 \\ x + 2y = 13 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \to x = y + 4 \\ \to x = 13 - 2y \end{array} \Bigg\}$$

$$y + 4 = 13 - 2y \to 3y = 9 \to y = 3$$

$$x = y + 4 \xrightarrow{y = 3} x = 7$$

b) Sustitución:

$$\left.\begin{array}{r} 10x + y = 21 \\ 4x - 3y = 5 \end{array}\right\} \rightarrow y = 21 - 10x$$

$$4x - 3y = 5 \xrightarrow{y = 21 - 10x} 4x - 63 + 30x = 5 \rightarrow x = 2$$

$$y = 21 - 10x \xrightarrow{x = 2} y = 1$$

Igualación:

$$\left.\begin{array}{r} 10x + y = 21 \\ 4x - 3y = 5 \end{array}\begin{array}{l} \rightarrow y = 21 - 10x \\ \rightarrow y = \dfrac{4x - 5}{3} \end{array}\right\}$$

$$21 - 10x = \frac{4x - 5}{3} \rightarrow 63 - 30x = 4x - 5 \rightarrow x = 2$$

$$y = 21 - 10x \xrightarrow{x = 2} y = 1$$

c) Sustitución:

$$\left.\begin{array}{r} x - y = 4 \\ x + y = 2 \end{array}\right\} \rightarrow x = y + 4$$

$$x + y = 2 \xrightarrow{x = y + 4} 2y + 4 = 2 \rightarrow y = -1$$

$$x = y + 4 \xrightarrow{y = -1} x = 3$$

Igualación:

$$\left.\begin{array}{r} x - y = 4 \\ x + y = 2 \end{array}\begin{array}{l} \rightarrow x = y + 4 \\ \rightarrow x = 2 - y \end{array}\right\}$$

$$y + 4 = 2 - y \rightarrow 2y = -2 \rightarrow y = -1$$

$$x = y + 4 \xrightarrow{y = -1} x = 3$$

d) Sustitución:

$$\left.\begin{array}{r} 2x + 3y = -5 \\ 3x + 2y = -5 \end{array}\right\} \rightarrow x = \frac{-3y - 5}{2}$$

$$3x + 2y = -5 \xrightarrow{x = \frac{-3y - 5}{2}} \frac{-9y - 15}{2} + 2y = -5 \rightarrow y = -1$$

$$x = \frac{-3y - 5}{2} \xrightarrow{y = -1} x = -1$$

Igualación:

$$\left.\begin{array}{r} 2x + 3y = -5 \\ 3x + 2y = -5 \end{array}\begin{array}{l} \rightarrow x = \dfrac{-3y - 5}{2} \\ \rightarrow x = \dfrac{-2y - 5}{3} \end{array}\right\}$$

$$\frac{-3y - 5}{2} = \frac{-2y - 5}{3} \rightarrow y = -1$$

$$x = \frac{-3y - 5}{2} \xrightarrow{y = -1} x = -1$$

e) Sustitución:

$$\left.\begin{aligned}-x+2y&=-1\\4x+2y&=14\end{aligned}\right\}\to x=2y+1$$

$$4x+2y=14\xrightarrow{x=2y+1}8y+4+2y=14\to y=1$$

$$x=2y+1\xrightarrow{y=1}x=3$$

Igualación:

$$\left.\begin{aligned}-x+2y&=-1\\4x+2y&=14\end{aligned}\right\}\begin{aligned}&\to x=2y+1\\&\to x=\frac{14-2y}{4}\end{aligned}$$

$$2y+1=\frac{14-2y}{4}\to y=1$$

$$x=2y+1\xrightarrow{y=1}x=3$$

f) Sustitución:

$$\left.\begin{aligned}2x+3y&=23\\6x-2y&=14\end{aligned}\right\}\to y=3x-7$$

$$2x+3y=23\xrightarrow{y=3x-7}2x+9x-21=23\to x=4$$

$$y=3x-7\xrightarrow{x=4}y=5$$

Igualación:

$$\left.\begin{aligned}2x+3y&=23\\6x-2y&=14\end{aligned}\right\}\begin{aligned}&\to y=\frac{23-2x}{2}\\&\to y=3x-7\end{aligned}$$

$$\frac{23-2x}{2}=3x-7\to x=4$$

$$y=3x-7\xrightarrow{x=4}y=5$$

029 **Resuelve por el método que creas más adecuado.**

a) $\left.\begin{aligned}x+2y&=5\\2x+y&=7\end{aligned}\right\}$

b) $\left.\begin{aligned}2x-3y&=-25\\4x-y&=25\end{aligned}\right\}$

a) Sustitución:

$$\left.\begin{aligned}x+2y&=5\\2x+y&=7\end{aligned}\right\}\to y=7-2x$$

$$x+2y=5\xrightarrow{y=7-2x}x+14-4x=5\to x=3$$

$$y=7-2x\xrightarrow{x=3}y=1$$

b) Sustitución:

$$\left.\begin{aligned}2x-3y&=-25\\4x-y&=25\end{aligned}\right\}\to y=4x-25$$

$$2x-3y=-25\xrightarrow{y=4x-25}2x-12x+75=-25\to x=10$$

$$y=4x-25\xrightarrow{x=10}y=15$$

030 **¿Qué resultado obtendrías al resolver un sistema compatible indeterminado por el método de igualación?**

Se obtendría una ecuación que, al desarrollarla, quedaría $0 = 0$.

031 **Resuelve por el método de reducción.**

a) $\left.\begin{array}{r} x + y = 5 \\ 2x - y = 1 \end{array}\right\}$ **b)** $\left.\begin{array}{r} -4x - y = -9 \\ 2x + 5y = 9 \end{array}\right\}$ **c)** $\left.\begin{array}{r} 3x - 5y = -31 \\ 12x + 3y = -9 \end{array}\right\}$

a) $\left.\begin{array}{r} x + y = 5 \\ 2x - y = 1 \end{array}\right\}$ $\begin{array}{rr} & x + y = 5 \\ + & 2x - y = 1 \\ \hline & 3x \quad = 6 \end{array}$

$3x = 6 \rightarrow x = 2$

$x + y = 5 \xrightarrow{x=2} 2 + y = 5 \rightarrow y = 3$

b) $\left.\begin{array}{r} -4x - y = -9 \\ 2x + 5y = 9 \end{array}\right\} \xrightarrow{\cdot 2}$ $\begin{array}{rr} & -4x - y = -9 \\ + & 4x + 10y = 18 \\ \hline & 9y = 9 \end{array}$

$9y = 9 \rightarrow y = 1$

$2x + 5y = 9 \xrightarrow{y=1} 2x + 5 = 9 \rightarrow x = 2$

c) $\left.\begin{array}{r} 3x - 5y = -31 \\ 12x + 3y = -9 \end{array}\right\} \xrightarrow{\cdot(-4)}$ $\begin{array}{rr} & -12x + 20y = 124 \\ + & 12x + 3y = -9 \\ \hline & 23y = 115 \end{array}$

$23y = 115 \rightarrow y = 5$

$3x - 5y = -31 \xrightarrow{y=5} 3x - 25 = -31 \rightarrow x = -2$

032 **En un barrio se reciclan diariamente 20 toneladas de papel y vidrio. Si se recoge el triple de papel que de vidrio, ¿cuántas toneladas de cada material se reciclan?**

x: papel, y: vidrio

$\left.\begin{array}{r} x + y = 20 \\ -x + 3y = 0 \end{array}\right\}$ $\begin{array}{rr} & x + y = 20 \\ + & -x + 3y = 0 \\ \hline & 4y = 20 \end{array}$

$4y = 20 \rightarrow y = 5$

$x + y = 20 \xrightarrow{y=5} x = 15$

Se reciclan 15 toneladas de papel y 5 toneladas de vidrio.

033 **¿Qué resultado obtendrías al resolver un sistema incompatible por el método de reducción?**

Al sumar las ecuaciones se obtendría una igualdad falsa.

ACTIVIDADES

034 Identifica los elementos de cada ecuación, y completa la tabla en tu cuaderno.

Ecuación	1.er miembro	2.º miembro	Incógnita	Grado
$x \cdot (x+1) = 2$	$x \cdot (x+1)$	2	x	2
$\frac{x}{3} - \frac{x+4}{9} = 0$	$\frac{x}{3} - \frac{x+4}{9}$	0	x	1
$(x-2)^2 = x^2$	$(x-2)^2$	x^2	x	2
$4x - (2x - 5) = 11$	$4x - (2x - 5)$	11	x	1
$3x + 2y = 1$	$3x + 2y$	1	x, y	1

035 Relaciona cada ecuación con sus soluciones.

a) $6x - 2 = x + 8$ — 1) $x = -3$
b) $(x+3)^2 = 0$ — 2) $x = -4$
c) $(x-2) \cdot (x+4) = 0$ — 3) $x = 2$
d) $x^2 + 8x = 0$ — 4) $x = 0$
e) $\frac{x+1}{5} - \frac{x}{2} = \frac{7}{5}$ — 5) $x = -8$

a) $\rightarrow$ 3) b) $\rightarrow$ 1) c) $\rightarrow$ 2) y 3) d) $\rightarrow$ 4) y 5) e) $\rightarrow$ 2)

036 Escribe una ecuación que cumpla estas condiciones.

a) De grado 1 y con solución $x = 5$.
b) De grado 1, con paréntesis y fracciones.
c) De grado 2 y producto de dos factores.
d) De grado 2 y una de las soluciones $x = 0$.

a) $2x - 10 = 0$
b) $3 \cdot (x-5) - \frac{x+1}{2} = 8 - x$
c) $(x-2) \cdot (x+3) - 2 = 0$
d) $x^2 - 3x = 0$

037 Resuelve las siguientes ecuaciones.

a) $2 + 3 \cdot (2x+1) - 8 - 3 \cdot (x+4) = 6$
b) $6x - 5 \cdot (4 - 2x) = (4 - x) \cdot 5 + 2$
c) $3x + 4 \cdot (-x - 6) = 5x - 6 \cdot (-x + 1)$
d) $3 \cdot (x+5) - x = (2x+3) \cdot 4 + x$
e) $\frac{x}{4} + 3 - \frac{x+3}{2} = 1$
f) $\frac{1}{8} \cdot (2x+4) - \frac{2}{3} \cdot (2x+6) + x = -4$
g) $\frac{x-2}{3} - \frac{x-3}{2} = \frac{4-2x}{5}$
h) $\frac{3x+7}{2} - \frac{1-4x}{4} = \frac{1-x}{6} - \frac{9+x}{3}$

a) $2 + 6x + 3 - 8 - 3x - 12 = 6$
$\rightarrow 3x = 21 \rightarrow x = 7$

b) $6x - 20 + 10x = 20 - 5x + 2$
$\rightarrow 21x = 42 \rightarrow x = 2$

c) $3x - 4x - 24 = 5x + 6x - 6$
$\rightarrow -12x = 18 \rightarrow x = -\dfrac{3}{2}$

d) $3x + 15 - x = 8x + 12 + x$
$\rightarrow -7x = -3 \rightarrow x = \dfrac{3}{7}$

e) $\dfrac{x + 12 - 2x - 6}{4} = \dfrac{4}{4}$
$\rightarrow -x = -2 \rightarrow x = 2$

f) $\dfrac{6x + 12 - 32x - 96 + 24x}{24} = \dfrac{-96}{4}$
$\rightarrow -2x = -12 \rightarrow x = 6$

g) $\dfrac{10x - 20 - 15x + 45}{30} = \dfrac{24 - 12x}{30}$
$\rightarrow 7x = -1 \rightarrow x = \dfrac{-1}{7}$

h) $\dfrac{18x + 42 - 3 + 12x}{12} = \dfrac{2 - 2x - 36 - 4x}{12}$
$\rightarrow 36x = -73 \rightarrow x = \dfrac{-73}{36}$

038 ●● **Escribe una ecuación de primer grado cuya solución sea:**

a) $x = -3$
b) $x = \dfrac{1}{5}$
c) $x = 4$
d) $x = \dfrac{2}{5}$
e) $x = -10$
f) $x = \dfrac{-3}{4}$
g) $x = 2{,}5$
h) Sin solución

a) $2x + 6 = 0$
b) $10x = 2$
c) $3x - 12 = 0$
d) $10x - 2 = 2$
e) $3x + 50 = 20$
f) $4x + 2 = -1$
g) $2x - 5 = 0$
h) $x + 1 = x - 2$

039 **Resuelve las siguientes ecuaciones de segundo grado.**

a) $x^2 - 5x + 6 = 0$
b) $x^2 = 4x - 3$
c) $x^2 - 2x = 3$
d) $x^2 + 3x - 2 = 0$
e) $x^2 + 15 = 8x$
f) $x^2 - x = 30$
g) $8x^2 = 15 - 2x$
h) $x^2 + 3x - 1 = 0$
i) $2x^2 + 7x = 3$
j) $x^2 = x - 3$

a) $x_1 = 3,\ x_2 = 2$

b) $x_1 = 3,\ x_2 = 1$

c) $x_1 = 3,\ x_2 = -1$

d) $x_1 = \dfrac{-3 + \sqrt{17}}{2},\ x_2 = \dfrac{-3 - \sqrt{17}}{2}$

e) $x_1 = 5,\ x_2 = 3$

f) $x_1 = 6,\ x_2 = -5$

g) $x_1 = \dfrac{5}{4},\ x_2 = \dfrac{-3}{2}$

h) $x_1 = \dfrac{-3 + \sqrt{13}}{2},\quad x_2 = \dfrac{-3 - \sqrt{13}}{2}$

i) $x_1 = \dfrac{-7 + \sqrt{73}}{4},\quad x_2 = \dfrac{-7 - \sqrt{73}}{4}$

j) No tiene solución.

040 **HAZLO ASÍ**

¿CÓMO SE RESUELVEN ECUACIONES CUYOS COEFICIENTES SON MÚLTIPLOS DE UN MISMO NÚMERO?

Fíjate en los coeficientes de esta ecuación y resuélvela.

$$12x^2 - 4x - 8 = 0$$

PRIMERO. Cuando todos los coeficientes son múltiplos del mismo número, se calcula el máximo común divisor y se extrae factor común en la ecuación.

$$\text{m.c.d. } (12, 4, 8) = 4 \rightarrow 4 \cdot (3x^2 - x - 2) = 0$$

SEGUNDO. Se dividen los dos miembros de la ecuación entre el máximo común divisor.

$$\frac{\cancel{4} \cdot (3x^2 - x - 2)}{\cancel{4}} = \frac{0}{4} \rightarrow 3x^2 - x - 2 = 0$$

TERCERO. Se resuelve la ecuación equivalente resultante.

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 3 \cdot (-2)}}{2 \cdot 3} = \frac{1 \pm \sqrt{25}}{6} \rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = \dfrac{-2}{3} \end{cases}$$

041 Resuelve, sacando factor común.

a) $5x^2 + 10x + 5 = 0$
b) $6x^2 + 24x + 18 = 0$
c) $32x^2 - 80x + 18 = 0$
d) $-100x^2 + 275x + 75 = 0$
e) $-120x^2 + 300x + 720 = 0$

a) $5x^2 + 10x + 5 = 0 \rightarrow 5(x^2 + 2x + 1) = 0$
$x_1 = x_2 = -1$

b) $6x^2 + 24x + 18 = 0 \rightarrow 6(x^2 + 4x + 3) = 0$
$x_1 = -1,\ x_2 = -3$

c) $32x^2 - 80x + 18 = 0 \rightarrow 2(16x^2 - 40x + 9) = 0$
$x_1 = \frac{1}{4},\ x_2 = \frac{9}{4}$

d) $-100x^2 + 275x + 75 = 0 \rightarrow -25(4x^2 - 11x - 3) = 0$
$x_1 = -\frac{1}{4},\ x_2 = 3$

e) $-120x^2 + 300x + 720 = 0 \rightarrow 2x^2 - 5x - 12 = 0$
$x_1 = 4,\ x_2 = -\frac{3}{2}$

042 Resuelve las siguientes ecuaciones.

a) $x^2 + 6x = 0$
b) $3x^2 = 12x$
c) $5x = 10x^2$
d) $-x^2 + 4x = 0$
e) $8x^2 - 6x = 0$
f) $7x = 23x^2$

a) $x_1 = 0,\ x_2 = -6$
b) $x_1 = 0,\ x_2 = 4$
c) $x_1 = 0,\ x_2 = \frac{1}{2}$
d) $x_1 = 0,\ x_2 = 4$
e) $x_1 = 0,\ x_2 = \frac{3}{4}$
f) $x_1 = 0,\ x_2 = \frac{7}{23}$

043 Resuelve estas ecuaciones de segundo grado.

a) $25x^2 - 4 = 0$
b) $-8x^2 = -18$
c) $2x^2 - 18 = 0$
d) $-3x^2 = -48$
e) $5x^2 = 100$
f) $4x^2 - 144 = 0$

a) $x_1 = \frac{2}{5},\ x_2 = -\frac{2}{5}$
b) $x_1 = \frac{3}{2},\ x_2 = -\frac{3}{2}$
c) $x_1 = 3,\ x_2 = -3$
d) $x_1 = 4,\ x_2 = -4$
e) $x_1 = \sqrt{20},\ x_2 = -\sqrt{20}$
f) $x_1 = 6,\ x_2 = -6$

044 **Indica el número de soluciones de las ecuaciones sin resolverlas.**

a) $x^2 - 2x + 1 = 0$

b) $x^2 + x - 2 = 0$

c) $x^2 + 5x + 7 = 0$

d) $4x^2 - 5x + 6 = 0$

e) $x^2 - 4x + 4 = 0$

f) $x^2 - 3x + 2 = 0$

g) $3x^2 + x - 1 = 0$

h) $-x^2 + 3x - 8 = 0$

a) $\Delta = 0 \rightarrow$ Una solución

b) $\Delta = 9 > 0 \rightarrow$ Dos soluciones

c) $\Delta = -3 < 0 \rightarrow$ Sin solución

d) $\Delta = -71 < 0 \rightarrow$ Sin solución

e) $\Delta = 0 \rightarrow$ Una solución

f) $\Delta = 1 > 0 \rightarrow$ Dos soluciones

g) $\Delta = 13 > 0 \rightarrow$ Dos soluciones

h) $\Delta = -23 < 0 \rightarrow$ Sin solución

045 **Resuelve las siguientes ecuaciones bicuadradas y comprueba la solución.**

a) $x^4 + 2x^2 - 48 = 0$

b) $x^4 - 9x^2 = 0$

c) $x^4 - 16 = 0$

d) $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$

e) $x^4 + 8x^2 + 15 = 0$

f) $x^4 + 3x^2 = 18$

g) $x^4 - x^2 = 20$

h) $x^4 + 12 = 7x^2$

a) $x^4 + 2x^2 - 48 = 0 \xrightarrow{z = x^2} z^2 + 2z - 48 = 0$

$$z = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 192}}{2} \rightarrow \begin{cases} z_1 = 6 \xrightarrow{z = x^2} x^2 = 6 \rightarrow x_1 = \sqrt{6} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad x_2 = -\sqrt{6} \\ z_2 = -8 \xrightarrow{z = x^2} x^2 = -8 \rightarrow \text{No tiene solución.} \end{cases}$$

b) $x^4 - 9x^2 = 0 \rightarrow x^2 \cdot (x^2 - 9) = 0$

$x_1 = x_2 = 0,\ x_3 = 3,\ x_4 = -3$

c) $x^4 - 16 = 0 \xrightarrow{z = x^2} z^2 - 16 = 0$

$z_1 = 4 \xrightarrow{z = x^2} x^2 = 4 \rightarrow x_1 = 2,\ x_2 = -2$

$z_2 = -4 \xrightarrow{z = x^2} x^2 = -4 \rightarrow$ No tiene solución.

d) $x^4 - 10x^2 + 9 = 0 \xrightarrow{z = x^2} z^2 - 10z + 9 = 0$

$$z_1 = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 36}}{2} \rightarrow \begin{cases} z_1 = 9 \xrightarrow{z = x^2} x^2 = 9 \rightarrow x_1 = 3,\ x_2 = -3 \\ z_2 = 1 \xrightarrow{z = x^2} x^2 = 1 \rightarrow x_3 = 1,\ x_4 = -1 \end{cases}$$

e) $x^4 + 8x^2 + 15 = 0 \xrightarrow{z = x^2} z^2 + 8z + 15 = 0$

$z_1 = -3 \xrightarrow{z = x^2} x^2 = -3 \rightarrow$ No tiene solución.

$z_2 = -5 \xrightarrow{z = x^2} x^2 = -5 \rightarrow$ No tiene solución.

f) $x^4 + 3x^2 - 18 = 0 \xrightarrow{z = x^2} z^2 + 3z - 18 = 0$

$z_1 = 3 \xrightarrow{z = x^2} x^2 = 3 \rightarrow x_1 = \sqrt{3},\ x_2 = -\sqrt{3}$

$z_2 = -6 \xrightarrow{z = x^2} x^2 = -6 \rightarrow$ No tiene solución.

g) $x^4 - x^2 - 20 = 0 \xrightarrow{z = x^2} z^2 - z - 20 = 0$

$z_1 = 5 \xrightarrow{z = x^2} x^2 = 5 \rightarrow x_1 = \sqrt{5},\ x_2 = -\sqrt{5}$

$z_2 = -4 \xrightarrow{z = x^2} x^2 = -4 \rightarrow$ No tiene solución.

h) $x^4 - 7x^2 + 12 = 0 \xrightarrow{z = x^2} z^2 - 7z + 12 = 0$

$z_1 = 4 \xrightarrow{z = x^2} x^2 = 4 \rightarrow x_1 = 2,\ x_2 = -2$

$z_2 = 3 \xrightarrow{z = x^2} x^2 = 3 \rightarrow x_3 = \sqrt{3},\ x_4 = -\sqrt{3}$

046 **Resuelve las ecuaciones.**

a) $(x - 8) \cdot (8x - 1) = 0$

b) $(3x - 5) \cdot \left(x - \frac{1}{5}\right) = 0$

c) $(-x + 7) \cdot (3 - 4x) = 0$

d) $(-4 + x) \cdot (5 - x) = 0$

a) $x - 8 = 0 \rightarrow x_1 = 8$

$8x - 1 = 0 \rightarrow x_2 = \frac{1}{8}$

b) $3x - 5 = 0 \rightarrow x_1 = \frac{5}{3}$

$x - \frac{1}{5} = 0 \rightarrow x_2 = \frac{1}{5}$

c) $-x + 7 = 0 \rightarrow x_1 = 7$

$3 - 4x = 0 \rightarrow x_2 = \frac{3}{4}$

d) $-4 + x = 0 \rightarrow x_1 = 4$

$5 - x = 0 \rightarrow x_2 = 5$

047 Calcula la solución de las siguientes ecuaciones.

a) $x^2 \cdot (x+1) \cdot (x+2)^2 = 0$

b) $(x-3)^2 \cdot (x+3)^2 = 0$

c) $x(x-4)^2 \cdot (x+3)^2 = 0$

d) $(x^2-1)^2 = 0$

e) $\left(x^2 - \dfrac{1}{4}\right) \cdot \left(\dfrac{x}{2} - 3\right)^2 = 0$

a) $x^2 = 0 \rightarrow x_1 = x_2 = 0$

$x + 1 = 0 \rightarrow x_3 = -1$

$(x+2)^2 = 0 \rightarrow x_4 = x_5 = -2$

b) $(x-3)^2 = 0 \rightarrow x_1 = x_2 = 3$

$(x+3)^2 = 0 \rightarrow x_3 = x_4 = -3$

c) $x = 0 \rightarrow x_1 = 0$

$(x-4)^2 = 0 \rightarrow x_2 = x_3 = 4$

$(x+3)^2 = 0 \rightarrow x_4 = x_5 = -3$

d) $(x^2-1)^2 = 0 \rightarrow (x+1)^2 \cdot (x-1)^2 = 0$

$(x+1)^2 = 0 \rightarrow x_1 = x_2 = -1$

$(x-1)^2 = 0 \rightarrow x_3 = x_4 = 1$

e) $x^2 - \dfrac{1}{4} = 0 \rightarrow x_1 = \dfrac{1}{2},\ x_2 = -\dfrac{1}{2}$

$\left(\dfrac{x}{2} - 3\right)^2 = 0 \rightarrow x_3 = x_4 = 6$

048 Resuelve las ecuaciones.

a) $(x^2-2) \cdot (x^2-3) = 2$

b) $(2x^2+1) \cdot (x^2+2) = x^2 \cdot (x^2-2)$

a) $x^4 - 5x^2 + 6 = 2$

$\rightarrow x^4 - 5x^2 + 4 = 0 \xrightarrow{z = x^2} z^2 - 5z + 4 = 0$

$z_1 = 1 \xrightarrow{z = x^2} x^2 = 1 \rightarrow x_1 = 1,\ x_2 = -1$

$z_2 = 4 \xrightarrow{z = x^2} x^2 = 4 \rightarrow x_3 = 2,\ x_4 = -2$

b) $2x^4 + 5x^2 + 2 = x^4 - 2x^2 \rightarrow$

$\rightarrow x^4 + 7x^2 + 2 = 0 \xrightarrow{z = x^2} z^2 + 7z + 2 = 0$

$z_1 = \dfrac{-7+\sqrt{41}}{2} \xrightarrow{z = x^2} x^2 = \dfrac{-7+\sqrt{41}}{2} \rightarrow$ No tiene solución.

$z_2 = \dfrac{-7-\sqrt{41}}{2} \xrightarrow{z = x^2} x^2 = \dfrac{-7-\sqrt{41}}{2} \rightarrow$ No tiene solución.

049 **HAZLO ASÍ**

¿CÓMO RESOLVEMOS ECUACIONES DE GRADO 3 CON ALGUNA RAÍZ ENTERA?

Resuelve esta ecuación: $x^3 - 4x^2 + 4x - 1 = 0$

PRIMERO. Se halla la raíz entera por la regla de Ruffini.

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -4 & 4 & -1 \\ 1 & & 1 & -3 & 1 \\ \hline & 1 & -3 & 1 & \boxed{0} \end{array}$$

$$x^3 - 4x^2 + 4x - 1 = (x - 1) \cdot (x^2 - 3x + 1)$$

SEGUNDO. Se resuelve la ecuación obtenida al factorizar.

$$(x - 1) \cdot (x^2 - 3x + 1) = 0$$

$$x - 1 = 0 \rightarrow x_1 = 1$$

$$x^2 - 3x + 1 = 0 \rightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4}}{2} \rightarrow \begin{cases} x_2 = \dfrac{3 + \sqrt{5}}{2} \\ x_3 = \dfrac{3 - \sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

050 ●● **Halla la solución de estas ecuaciones de grado superior a 2, tal como se ha explicado en la actividad anterior.**

a) $x^3 - 4x^2 - 4x + 16 = 0$

b) $x^4 + 2x^3 - 8x^2 = 0$

c) $x^4 - 2x^3 - 11x^2 + 12x = 0$

d) $x^3 - 7x^2 + 10x = 0$

e) $2x^3 - 11x^2 + 12x = 0$

f) $x^3 - 6x^2 + 8x = 0$

g) $2x^3 - 3x^2 - 2x + 3 = 0$

a)
$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -4 & -4 & 16 \\ 4 & & 4 & 0 & -16 \\ \hline & 1 & 0 & -4 & \boxed{0} \end{array} \rightarrow x_1 = 4$$

$$x^2 - 4 = 0 \rightarrow x_2 = 2,\ x_3 = -2$$

b) $x^2 \cdot (x^2 + 2x - 8) = 0$

$$x^2 = 0 \rightarrow x_1 = x_2 = 0$$

$$x^2 + 2x - 8 = 0 \rightarrow x_3 = 2,\ x_4 = -4$$

c) $x \cdot (x^3 - 2x^2 - 11x + 12) = 0$

$$x_1 = 0$$

$$x^3 - 2x^2 - 11x + 12 = 0$$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -2 & -11 & 12 \\ 1 & & 1 & -1 & -12 \\ \hline & 1 & -1 & -12 & \boxed{0} \end{array} \rightarrow x_2 = 1$$

$$x^2 - x - 12 = 0 \rightarrow x_3 = 4,\ x_4 = -3$$

d) $x \cdot (x^2 - 7x + 10) = 0$

$x_1 = 0$

$x^2 - 7x + 10 = 0 \rightarrow x_2 = 5,\ x_3 = 2$

e) $2x^3 - 11x^2 + 12x = 0 \rightarrow x \cdot (2x^2 - 11x + 12) = 0 \rightarrow x_1 = 0$

$2x^2 - 11x + 12 = 0 \rightarrow x_2 = 4,\ x_3 = \dfrac{3}{2}$

f) $x \cdot (x^2 - 6x + 8) = 0$

$x_1 = 0 \qquad x^2 - 6x + 8 = 0 \rightarrow x_2 = 2,\ x_3 = 4$

g) $2x^3 - 3x^2 - 2x + 3 = 0$

$$\begin{array}{r|rrr|r} & 2 & -3 & -2 & 3 \\ 1 & & 2 & -1 & -3 \\ \hline & 2 & -1 & -3 & \boxed{0} \end{array}$$

$2x^3 - 3x^2 - 2x + 3 = 0 \rightarrow 2x^3 - 3x^2 - 2x + 3 = (x - 1) \cdot (2x^2 - x - 3) = 0$
$\rightarrow x_1 = 1$

$2x^2 - x - 3 = 0 \rightarrow x_2 = -1,\ x_3 = \dfrac{3}{2}$

051 **Resuelve las ecuaciones, factorizando el polinomio de la ecuación.**

a) $x^3 - x^2 = 0$

b) $x^3 - x = 0$

c) $x^3 - 25x = 0$

d) $x^3 + 2x^2 = 0$

e) $x^3 - 4x = 0$

f) $x^3 - 5x^2 = 0$

g) $x^4 - x^3 = 0$

h) $x^5 - 16x^3 = 0$

a) $x^2 \cdot (x - 1) = 0$

$x^2 = 0 \rightarrow x_1 = x_2 = 0$

$x - 1 = 0 \rightarrow x_3 = 1$

b) $x \cdot (x - 1) \cdot (x + 1) = 0$

$x = 0 \rightarrow x_1 = 0$

$x + 1 = 0 \rightarrow x_2 = -1$

$x - 1 = 0 \rightarrow x_3 = 1$

c) $x \cdot (x - 5) \cdot (x + 5) = 0$

$x = 0 \rightarrow x_1 = 0$

$x + 5 = 0 \rightarrow x_2 = -5$

$x - 5 = 0 \rightarrow x_3 = 5$

d) $x^2 \cdot (x + 2) = 0$

$x^2 = 0 \rightarrow x_1 = x_2 = 0$

$x + 2 = 0 \rightarrow x_3 = -2$

e) $x \cdot (x - 2) \cdot (x + 2) = 0$

$x = 0 \rightarrow x_1 = 0$

$x + 2 = 0 \rightarrow x_2 = -2$

$x - 2 = 0 \rightarrow x_3 = 2$

f) $x^2 \cdot (x - 5) = 0$

$x^2 = 0 \rightarrow x_1 = x_2 = 0$

$x - 5 = 0 \rightarrow x_3 = 5$

g) $x^3 \cdot (x - 1) = 0$

$x^3 = 0 \rightarrow x_1 = x_2 = x_3 = 0$

$x - 1 = 0 \rightarrow x_4 = 1$

h) $x^3 \cdot (x - 4) \cdot (x + 4) = 0$

$x^3 = 0 \rightarrow x_1 = x_2 = x_3 = 0$

$x - 4 = 0 \rightarrow x_4 = 4$

$x + 4 = 0 \rightarrow x_5 = -4$

052 Escribe ecuaciones con estas soluciones.

a) $x_1 = 2$, $x_2 = -1$, $x_3 = 3$ y $x_4 = 4$

b) $x_1 = 1$ y $x_2 = -2$ (solución doble)

c) $x_1 = 4$ y $x_2 = -3$ (solución triple)

d) $x_1 = -5$, $x_2 = 1$ (solución doble) y $x_3 = -1$ (solución triple)

e) $x_1 = \frac{1}{3}$, $x_2 = \frac{1}{2}$ y $x_3 = \frac{1}{4}$

a) $(x - 2) \cdot (x + 1) \cdot (x - 3) \cdot (x - 4) = 0$

b) $(x - 1) \cdot (x + 2)^2 = 0$

c) $(x - 4) \cdot (x + 3)^3 = 0$

d) $(x + 5) \cdot (x - 1)^2 \cdot (x + 1)^3 = 0$

e) $\left(x - \frac{1}{3}\right) \cdot \left(x - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(x - \frac{1}{4}\right) = 0$

053 Asocia cada enunciado con su correspondiente desigualdad.

a) 1 es menor que 5.	1) $2 > -4$
b) 2 es mayor que -4.	2) $5 > 3$
c) -13 es menor que -2.	3) $1 < 5$
d) -4 es mayor que -7.	4) $-14 < 6$
e) 5 es mayor que 3.	5) $-4 > -7$
f) -14 es menor que 6.	6) $-13 < -2$

a) → 3)
b) → 1)
c) → 6)
d) → 5)
e) → 2)
f) → 4)

054 Expresa cada enunciado como inecuación, como intervalo y gráficamente.

a) Números menores que 9 y mayores o iguales que 4.

b) Números menores o iguales que 10.

c) Números mayores que -3 y menores que 3.

d) Números mayores o iguales que -6.

e) Números menores que -5 y mayores que -10.

f) Números mayores que -8 y menores o iguales que 0.

g) Los años que tiene una persona mayor de edad.

h) Los números de la matrícula de un coche.

a) $4 \leq x < 9 \rightarrow [4, 9)$

b) $x \leq 10 \rightarrow (-\infty, 10]$

c) $-3 < x < 3 \rightarrow (-3, 3)$

d) $x \geq -6 \rightarrow [-6, +\infty)$

e) $-10 < x < -5 \rightarrow (-10, -5)$

f) $-8 < x \leq 0 \rightarrow (-8, 0]$

g) $x \geq 18 \rightarrow [18, +\infty)$

h) $0 \leq x \leq 9.999 \rightarrow [0, 9.999]$

055 Completa, para $x = 2$, con el signo ($<$, $\leq$, $>$, $\geq$) que corresponda.

a) $2x \square 3$
b) $-2x \square 3$
c) $2x \square -3$
d) $-2x \square -3$
e) $-2x \square 3x$
f) $2 \square -3x$
g) $-2 \square -3x$
h) $4x \square 1$
i) $-4x \square -1$
j) $3x \square -x + 3$

a) $2x > 3$
b) $-2x < 3$
c) $2x > -3$
d) $-2x < -3$
e) $-2x < 3x$
f) $2 > -3x$
g) $-2 > -3x$
h) $4x > 1$
i) $-4x < -1$
j) $3x > -x + 3$

056 Razona si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones.

a) $x = \frac{1}{2}$ verifica que $1 + x \leq \frac{3}{2}$.

b) $x = 0$ verifica que $2x + 3 < 3$.

c) $x = -3$ verifica que $\frac{4x + 5}{2} \leq \frac{14}{4}$.

d) $x = -5$ verifica que $\frac{x + 3}{2} \geq -4$.

a) Verdadera
b) Falsa
c) Verdadera
d) Verdadera

057 Resuelve las inecuaciones.

a) $-2x < 2x - 4$
b) $2x > 4x + 2$
c) $5x \leq x + 5$
d) $x + 1 < 2x - 1$
e) $4x \geq 1 - x$
f) $-2x \geq 0$

a) $-2x < 2x - 4 \rightarrow -4x < -4 \rightarrow x > 1 \rightarrow (1, +\infty)$

b) $2x > 4x + 2 \rightarrow -2x > 2 \rightarrow x < -1 \rightarrow (-\infty, -1)$

c) $5x \leq x + 5 \rightarrow 4x \leq 5 \rightarrow x \leq \frac{5}{4} \rightarrow \left(-\infty, \frac{5}{4}\right]$

d) $x + 1 < 2x - 1 \rightarrow -x < -2 \rightarrow x > 2 \rightarrow (2, +\infty)$

e) $4x \geq 1 - x \rightarrow 5x \geq 1 \rightarrow x \geq \frac{1}{5} \rightarrow \left[\frac{1}{5}, +\infty\right)$

f) $-2x \geq 0 \rightarrow x \leq 0 \rightarrow (-\infty, 0]$

058 Resuelve estas inecuaciones.

a) $5 - 2x \leq 3 + 2(4 - 2x)$

b) $x + 6(x - 5) > 3x + 2$

c) $(7 + x) \cdot (-8) - 2 < 9x - 3$

d) $2x - 4(-3 - x) \geq 5x - 10$

a) $5 - 2x \leq 3 + 8 - 4x$
$\rightarrow 2x \leq 6 \rightarrow x \leq 3 \rightarrow (-\infty, 3]$

b) $x + 6x - 30 > 3x + 2$
$\rightarrow 4x > 32 \rightarrow x > 8 \rightarrow (8, +\infty)$

c) $-56 - 8x - 2 < 9x - 3$
$\rightarrow -17x < 55 \rightarrow x > \frac{-55}{17} \rightarrow \left(\frac{-55}{17}, +\infty\right)$

d) $2x + 12 + 4x \geq 5x - 10$
$\rightarrow x \geq -22 \rightarrow [-22, +\infty)$

059 Halla la solución de las inecuaciones.

a) $\frac{x+1}{2} + \frac{x+4}{3} \leq \frac{1}{6}$

b) $\frac{x+2}{3} - \frac{x-1}{4} \leq 12$

c) $\frac{x}{4} - \frac{x}{8} + 5 \geq x$

d) $\frac{2x-1}{6} - \frac{3x}{10} < \frac{4x-5}{2}$

e) $1 + \frac{x}{5} - \frac{x}{10} \leq \frac{x}{12}$

f) $\frac{3x+4}{7} - \frac{x}{3} > 4 - 6x$

a) $3x + 3 + 2x + 8 \leq 1 \rightarrow 5x \leq -10 \rightarrow x \leq -2 \rightarrow (-\infty, -2]$

b) $4x + 8 - 3x + 3 \leq 144 \rightarrow x \leq 133 \rightarrow (-\infty, 133]$

c) $2x - x + 40 \geq 8x \rightarrow -7x \geq -40 \rightarrow x \leq \frac{40}{7} \rightarrow \left(-\infty, \frac{40}{7}\right]$

d) $10x - 5 - 9x < 60x - 75 \rightarrow -59x < -70 \rightarrow x > \frac{70}{59} \rightarrow \left(\frac{70}{59}, +\infty\right)$

e) $60 + 12x - 6x \leq 5x \rightarrow x \leq 60 \rightarrow (-\infty, 60]$

f) $9x + 12 - 7x > 84 - 126x \rightarrow 128x > 72 \rightarrow x > \frac{16}{9} \rightarrow \left(\frac{16}{9}, +\infty\right)$

060 **Resuelve las inecuaciones de segundo grado.**

a) $x^2 - 1 \geq 0$
b) $(x - 2) \cdot (x + 3) > 0$
c) $x^2 - 4 < 0$
d) $x \cdot (x + 5) \leq 0$
e) $x^2 - 9x + 20 < 0$
f) $(x + 1) \cdot (x - 4) \geq 0$
g) $4x^2 - 16x < 0$
h) $x^2 \leq 2x$

a) $x^2 - 1 \geq 0$
$x^2 - 1 = 0 \rightarrow x_1 = 1, x_2 = -1$
La solución es los intervalos $(-\infty, -1]$ y $[1, +\infty)$.

b) $(x - 2) \cdot (x + 3) > 0$
$(x - 2) \cdot (x + 3) = 0 \rightarrow x_1 = 2, x_2 = -3$
La solución es los intervalos $(-\infty, -3)$ y $(2, +\infty)$.

c) $x^2 - 4 < 0$
$x^2 - 4 = 0 \rightarrow x_1 = 2, x_2 = -2$
La solución es el intervalo $(-2, 2)$.

d) $x \cdot (x + 5) \leq 0$
$x \cdot (x + 5) = 0 \rightarrow x_1 = 0, x_2 = -5$
La solución es el intervalo $[-5, 0]$.

e) $x^2 - 9x + 20 < 0$
$x^2 - 9x + 20 = 0 \rightarrow x_1 = 4, x_2 = 5$
La solución es el intervalo $(4, 5)$.

f) $(x + 1) \cdot (x - 4) \geq 0$
$(x + 1) \cdot (x - 4) = 0 \rightarrow x_1 = -1, x_2 = 4$
La solución es los intervalos $(-\infty, -1]$ y $[4, +\infty)$.

g) $4x^2 - 16x < 0$
$4x^2 - 16x = 0 \rightarrow x_1 = 0, x_2 = 4$
La solución es el intervalo $(0, 4)$.

h) $x^2 \leq 2x \rightarrow x^2 - 2x \leq 0$
$x^2 - 2x = 0 \rightarrow x_1 = 0, x_2 = 2$
La solución es el intervalo $[0, 2]$.

061 **Resuelve las inecuaciones de segundo grado.**

a) $x^2 - 2x + 1 < 0$
b) $x^2 + 6x + 9 \leq 0$
c) $x^2 \geq 1$
d) $x^2 - 8x + 16 \geq 0$
e) $x^2 + 3x + 9 < 0$
f) $x^2 + x + 1 \geq 0$

a) $x^2 - 2x + 1 < 0$
$x^2 - 2x + 1 = 0 \rightarrow x_1 = x_2 = 1$
No tiene solución.

b) $x^2 + 6x + 9 \leq 0$

$x^2 + 6x + 9 = 0 \rightarrow x_1 = x_2 = -3$

La solución es $x = -3$.

c) $x^2 \geq 1 \rightarrow x^2 - 1 \geq 0$

$x^2 - 1 = 0 \rightarrow x_1 = 1,\ x_2 = -1$

La solución es los intervalos $(-\infty, -1]$ y $[1, +\infty)$.

d) $x^2 - 8x + 16 \geq 0$

$x^2 - 8x + 16 = 0 \rightarrow x_1 = x_2 = 4$

La solución es toda la recta real.

e) $x^2 + 3x + 9 < 0$

$x^2 + 3x + 9 = 0 \rightarrow$ No tiene solución.

En todos los valores de x es positiva, por lo que no tiene solución.

f) $x^2 + x + 1 \geq 0$

$x^2 + x + 1 = 0 \rightarrow$ No tiene solución.

En todos los valores de x es positiva, por lo que la solución es toda la recta real.

062 **Comprueba que $x = \frac{-1}{2}$, $y = \frac{3}{4}$ es solución del sistema:** $\left.\begin{aligned} 2x + 3y &= \frac{5}{4} \\ 16x + 20y &= 7 \end{aligned}\right\}$

Escribe otro sistema con las mismas soluciones.

$$\left.\begin{aligned} 2 \cdot \frac{-1}{2} + 3 \cdot \frac{3}{4} &= -1 + \frac{9}{4} = \frac{5}{4} \\ 16 \cdot \frac{-1}{2} + 20 \cdot \frac{3}{4} &= -8 + 15 = 7 \end{aligned}\right\}$$

El sistema de ecuaciones tiene como solución $x = -\frac{1}{2}$, $y = \frac{3}{4}$.

Determinamos otro sistema con estas soluciones:

$x + y$

$$\frac{-1}{2} + \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$

$x - y$

$$\frac{-1}{2} - \frac{3}{4} = \frac{-5}{4}$$

$$\left.\begin{aligned} x + y &= \frac{1}{4} \\ x - y &= \frac{-5}{4} \end{aligned}\right\} \text{ es un sistema con estas soluciones.}$$

063 **Investiga cuántas soluciones tienen los sistemas de ecuaciones, e interpreta geométricamente el resultado.**

a) $\left.\begin{array}{r} 3x - 2y = 1 \\ -6x + 2y = -2 \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r} x - 5y = 11 \\ 2x + 3y = -4 \end{array}\right\}$

c) $\left.\begin{array}{r} 2x - 3y = 9 \\ 4x - 9 = 6y \end{array}\right\}$

d) $\left.\begin{array}{r} x + 2y = 5 \\ 2x + y = 7 \end{array}\right\}$

a) Es un sistema compatible indeterminado, tiene infinitas soluciones. Geométricamente son dos rectas coincidentes.

b) Es un sistema compatible determinado, con una única solución: $x = 1$, $y = -2$. Geométricamente son dos rectas que se cortan en el punto $(1, -2)$.

c) Es un sistema incompatible, no tiene solución. Geométricamente son dos rectas paralelas.

d) Es un sistema compatible determinado, con una única solución: $x = 3$, $y = 1$. Geométricamente son dos rectas que se cortan en el punto $(3, 1)$.

064 **HAZLO ASÍ**

¿CÓMO SE DETERMINA EL NÚMERO DE SOLUCIONES DE UN SISTEMA ESTUDIANDO SUS COEFICIENTES?

Clasifica estos sistemas atendiendo a su número de soluciones.

a) $\left.\begin{array}{r} 2x + 3y = 5 \\ 4x + 6y = 10 \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r} 2x + 3y = 5 \\ 4x + 6y = 8 \end{array}\right\}$

c) $\left.\begin{array}{r} 2x + 3y = 5 \\ 5x + y = 5 \end{array}\right\}$

PRIMERO. Se estudia si los coeficientes de las dos ecuaciones del sistema son proporcionales.

a) $\dfrac{2}{4} = \dfrac{3}{6} = \dfrac{5}{10} \rightarrow$ Son proporcionales.

b) $\dfrac{2}{4} = \dfrac{3}{6} \neq \dfrac{5}{8} \longrightarrow$ Son proporcionales los coeficientes de las incógnitas, pero no los términos independientes.

c) $\dfrac{2}{5} \neq \dfrac{3}{1} \longrightarrow$ No son proporcionales los coeficientes de las incógnitas.

SEGUNDO.

- Si todos los coeficientes son proporcionales, el sistema es compatible indeterminado.
- Si solo son proporcionales los coeficientes de las incógnitas, el sistema es incompatible.
- Si los coeficientes de las incógnitas no son proporcionales, el sistema es compatible determinado.

a) Compatible indeterminado.

b) Incompatible.

c) Compatible determinado.

065 Completa los sistemas para que sean incompatibles.

a) $\left.\begin{array}{r} x + y = 2 \\ 2x + 2y = 1 \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r} 3x - y = 0 \\ 6x - 2y = -1 \end{array}\right\}$

c) $\left.\begin{array}{r} 2 \cdot (x - y) + x = 10 \\ 3x - 2y = 5 \end{array}\right\}$

d) $\left.\begin{array}{r} \dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{4} = 5 \\ 2x + y = 10 \end{array}\right\}$

066 Completa los siguientes sistemas para que sean compatibles indeterminados.

a) $\left.\begin{array}{r} x + 2y = 3 \\ 3x + 6y = 9 \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r} 4x - 10y = 1 \\ 2x - 5y = \dfrac{1}{2} \end{array}\right\}$

c) $\left.\begin{array}{r} 5 \cdot (x + 2) - 3 \cdot (y - 1) = 6 \\ -10x + 6y = 14 \end{array}\right\}$

067 Clasifica los sistemas según su número de soluciones, sin resolverlos.

a) $\left.\begin{array}{r} x + y = 10 \\ 2x + y = 20 \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r} x + y = 10 \\ 2x - 2y = -20 \end{array}\right\}$

c) $\left.\begin{array}{r} x + y = 10 \\ 2x + 2y = 20 \end{array}\right\}$

d) $\left.\begin{array}{r} x + y = 10 \\ x - y = 2 \end{array}\right\}$

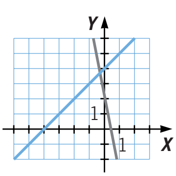
a) Compatible determinado

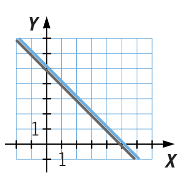
b) Compatible determinado

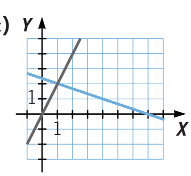
c) Compatible indeterminado

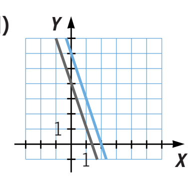
d) Compatible determinado

068 Observa las gráficas y escribe el sistema en su forma general, determina la solución y decide de qué tipo es.

a)


b)


c)


d)


a) $\left.\begin{array}{r} -x + y = 4 \\ 5x + y = 2 \end{array}\right\} \rightarrow x = \dfrac{-1}{3},\ y = \dfrac{11}{3} \rightarrow$ Compatible determinado

b) $\left.\begin{array}{r} x + y = 5 \\ 2x + 2y = 10 \end{array}\right\} \rightarrow y = -x + 5 \rightarrow$ Compatible indeterminado

c) $\left.\begin{array}{r} 2x - y = 0 \\ x + 3y = 7 \end{array}\right\} \rightarrow x = 1,\ y = 2 \rightarrow$ Compatible determinado

d) $\left.\begin{array}{r} 3x + y = 4 \\ 3x + y = 6 \end{array}\right\} \longrightarrow$ No tiene solución $\rightarrow$ Incompatible

069 **Escribe un sistema compatible determinado, uno compatible indeterminado y otro incompatible. Represéntalos en unos ejes de coordenadas y halla sus soluciones.**

Compatible determinado:

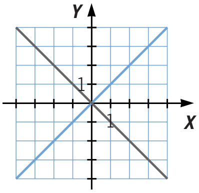
$$\left.\begin{aligned} -x + y &= 0 \\ x + y &= 0 \end{aligned}\right\} \to \begin{aligned} x &= 0 \\ y &= 0 \end{aligned}$$

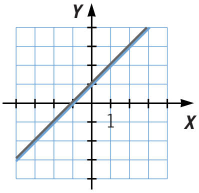
Compatible indeterminado:

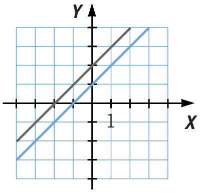
$$\left.\begin{aligned} -x + y &= 1 \\ -2x + 2y &= 2 \end{aligned}\right\} \to y = x + 1$$

Incompatible:

$$\left.\begin{aligned} -x + y &= 1 \\ -x + y &= 2 \end{aligned}\right\}$$







070 **Resuelve los sistemas por el método de sustitución.**

a) $\left.\begin{aligned} 10x + y &= 21 \\ 4x - 3y &= 5 \end{aligned}\right\}$

b) $\left.\begin{aligned} -x + 2y &= -1 \\ 4x + 2y &= 14 \end{aligned}\right\}$

c) $\left.\begin{aligned} 2x - 3y &= -25 \\ 4x - y &= 25 \end{aligned}\right\}$

d) $\left.\begin{aligned} x + y &= 4 \\ 3x + 2y &= 15 \end{aligned}\right\}$

a) $\left.\begin{aligned} 10x + y &= 21 \\ 4x - 3y &= 5 \end{aligned}\right\} \to y = 21 - 10x$

$$4x - 3y = 5 \xrightarrow{y = 21 - 10x} 4x - 63 + 30x = 5 \to x = 2$$

$$y = 21 - 10x \xrightarrow{x = 2} y = 1$$

b) $\left.\begin{aligned} -x + 2y &= -1 \\ 4x + 2y &= 14 \end{aligned}\right\} \to x = 2y + 1$

$$4x + 2y = 14 \xrightarrow{x = 2y + 1} 8y + 4 + 2y = 14 \to y = 1$$

$$x = 2y + 1 \xrightarrow{y = 1} x = 3$$

c) $\left.\begin{aligned} 2x - 3y &= -25 \\ 4x - y &= 25 \end{aligned}\right\} \to y = 4x - 25$

$$2x - 3y = -25 \xrightarrow{y = 4x - 25} 2x - 12x + 75 = -25 \to x = -10$$

$$y = 4x - 25 \xrightarrow{x = -10} y = 15$$

d) $\left.\begin{aligned} x + y &= 4 \\ 3x + 2y &= 15 \end{aligned}\right\} \to y = 4 - x$

$$3x + 2y = 15 \xrightarrow{y = 4 - x} 3x + 8 - 2x = 15 \to x = 7$$

$$y = 4 - x \xrightarrow{x = 7} y = -3$$

071 **Utiliza el método de igualación para resolver los sistemas.**

a) $\left.\begin{aligned} 2x + 3y &= 13 \\ 3x + 2y &= 12 \end{aligned}\right\}$

b) $\left.\begin{aligned} 3x - 2y &= 5 \\ x + y &= 5 \end{aligned}\right\}$

a) $\left.\begin{array}{r} 2x + 3y = 13 \\ 3x + 2y = 12 \end{array}\right. \begin{array}{l} \rightarrow x = \dfrac{-3y+13}{2} \\ \rightarrow x = \dfrac{-2y+12}{3} \end{array}$

$\dfrac{-3y+13}{2} = \dfrac{-2y+12}{3} \rightarrow -9y + 39 = -4y + 24 \rightarrow y = 3$

$x = \dfrac{-3y+13}{2} \xrightarrow{y=3} x = 2$

b) $\left.\begin{array}{r} 3x - 2y = 5 \\ x + y = 5 \end{array}\right. \begin{array}{l} \rightarrow y = \dfrac{3x-5}{2} \\ \rightarrow y = 5 - x \end{array} \rightarrow \dfrac{3x-5}{2} = 5 - x \rightarrow x = 3$

$y = 5 - x \xrightarrow{x=3} y = 2$

072 **Halla la solución de los sistemas por el método de reducción.**

a) $\left.\begin{array}{r} 2x + 3y = 4 \\ 2x - 3y = 4 \end{array}\right\}$ c) $\left.\begin{array}{r} 2x + y = 7 \\ x - 3y = 0 \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r} x + 4y = 9 \\ 3x - 6y = 9 \end{array}\right\}$ d) $\left.\begin{array}{r} 5x - 3y = 1 \\ 4x + y = 11 \end{array}\right\}$

a) $\left.\begin{array}{r} 2x + 3y = 4 \\ 2x - 3y = 4 \end{array}\right\}$ $\begin{array}{r} + \begin{array}{r} 2x + 3y = 4 \\ 2x - 3y = 4 \end{array} \\ \hline 4x \qquad = 8 \end{array}$

$4x = 8 \rightarrow x = 2$

$2x + 3y = 4 \xrightarrow{x=2} 4 + 3y = 4 \rightarrow y = 0$

b) $\left.\begin{array}{r} x + 4y = 9 \\ 3x - 6y = 9 \end{array}\right\} \xrightarrow{\cdot(-3)}$ $\begin{array}{r} + \begin{array}{r} -3x - 12y = -27 \\ 3x - 6y = 9 \end{array} \\ \hline -18y = -18 \end{array}$

$-18y = -18 \rightarrow y = 1$

$x + 4y = 9 \xrightarrow{y=1} x + 4 = 9 \rightarrow x = 5$

c) $\left.\begin{array}{r} 2x + y = 7 \\ x - 3y = 0 \end{array}\right\} \xrightarrow{\cdot 3}$ $\begin{array}{r} + \begin{array}{r} 6x + 3y = 21 \\ x - 3y = 0 \end{array} \\ \hline 7x \qquad = 21 \end{array}$

$7x = 21 \rightarrow x = 3$

$x - 3y = 0 \xrightarrow{x=3} 3 - 3y = 0 \rightarrow y = 1$

d) $\left.\begin{array}{r} 5x - 3y = 1 \\ 4x + y = 11 \end{array}\right\} \xrightarrow{\cdot 3}$ $\begin{array}{r} + \begin{array}{r} 5x - 3y = 1 \\ 12x + 3y = 33 \end{array} \\ \hline 17x \qquad = 34 \end{array}$

$17x = 34 \rightarrow x = 2$

$4x + y = 11 \xrightarrow{x=2} 8 + y = 11 \rightarrow y = 3$

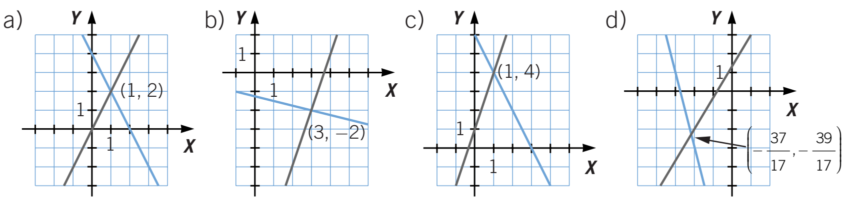
073 Resuelve gráficamente estos sistemas.

a) $\left.\begin{array}{r} 2x + y = 4 \\ 2x - y = 0 \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r} x + 4y = -5 \\ 3x - \ \ y = 11 \end{array}\right\}$

c) $\left.\begin{array}{r} 2x + y = 6 \\ 3x - y = -1 \end{array}\right\}$

d) $\left.\begin{array}{r} 5x - 3y = -4 \\ 4x + \ \ y = -11 \end{array}\right\}$



074 Resuelve los sistemas por el método más adecuado.

a) $\left.\begin{array}{r} 3x - 2 \cdot (y - 1) = y - x + 1 \\ 2x - y = x + y - 9 \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r} 3 - 2 \cdot (x - 4) = 5y + 6 \\ 5x - 3y = 12x - (4 - y) \end{array}\right\}$

a) $\left.\begin{array}{r} 3x - 2 \cdot (y - 1) = y - x + 1 \\ 2x - y = x + y - 9 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \rightarrow 4x - 3y = -1 \\ \rightarrow x - 2y = -9 \end{array}\Big\} \rightarrow x = 2y - 9$

$$4x - 3y = -1 \xrightarrow{x = 2y - 9} 8y - 36 - 3y = -1 \rightarrow y = 7$$

$$x = 2y - 9 \xrightarrow{y = 7} x = 5$$

b) $\left.\begin{array}{r} 3 - 2 \cdot (x - 4) = 5y + 6 \\ 5x - 3y = 12x - (4 - y) \end{array}\right\} \begin{array}{l} \rightarrow -2x - 5y = -5 \\ \rightarrow -7x - 4y = -4 \end{array}\Big\}$

$$\begin{array}{l} \xrightarrow{\cdot 4} \\ \xrightarrow{\cdot (-5)} \end{array} + \begin{array}{rcr} -8x - 20y & = & -20 \\ 35x + 20y & = & 20 \\ \hline 43x & = & 0 \end{array}$$

$$43x = 0 \rightarrow x = 0$$

$$-2x - 5y = -5 \xrightarrow{x = 0} y = 1$$

075 Halla la solución de los sistemas.

a) $\left.\begin{array}{r} \dfrac{x - 1}{4} - \dfrac{y + 2}{3} = 0 \\ \dfrac{x + 3}{5} - \dfrac{y - 2}{4} = 2 \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r} \dfrac{5 \cdot (x - 2)}{3} - \dfrac{3 \cdot (y + 1)}{4} = \dfrac{x - 7y}{12} \\ \dfrac{6 - (x + y)}{2} - \dfrac{(5 - x) \cdot 4}{5} = \dfrac{x + 2y}{10} \end{array}\right\}$

c) $\left.\begin{array}{l}\dfrac{7x+5y}{10}-\dfrac{3\cdot(x+y)}{5}=\dfrac{x-y}{10}\\[2mm] \dfrac{3x+y+2}{4}-\dfrac{y-2x}{6}=\dfrac{y-x}{4}\end{array}\right\}$

a) $\left.\begin{array}{l}\dfrac{x-1}{4}-\dfrac{y+2}{3}=0\\[2mm] \dfrac{x+3}{5}-\dfrac{y-2}{4}=2\end{array}\right\}\rightarrow\left.\begin{array}{l}3x-3-4y-8=0\\[2mm] 4x+12-5y+10=40\end{array}\right\}$

$$\rightarrow\left.\begin{array}{l}3x-4y=11\\4x-5y=18\end{array}\right\}\begin{array}{l}\xrightarrow{\cdot 4}\\ \xrightarrow{\cdot(-3)}\end{array}\begin{array}{r}12x-16y=44\\ +\quad -12x+15y=-54\\ \hline -y=-10\end{array}$$

$-y=-10 \rightarrow y=10$

$4x-5y=18 \xrightarrow{y=10} 4x-50=18 \rightarrow x=17$

b) $\left.\begin{array}{l}\dfrac{5\cdot(x-2)}{3}-\dfrac{3\cdot(y+1)}{4}=\dfrac{x-7y}{12}\\[2mm] \dfrac{6-(x+y)}{2}-\dfrac{(5-x)\cdot 4}{5}=\dfrac{x+2y}{10}\end{array}\right\}$

$$\rightarrow\left.\begin{array}{l}20x-40-9y-9=x-7y\\30-5x-5y-40+8x=x+2y\end{array}\right\}\rightarrow\left.\begin{array}{r}19x-2y=49\\2x-7y=10\end{array}\right\}$$

$$\begin{array}{l}\xrightarrow{\cdot 7}\\ \xrightarrow{\cdot(-2)}\end{array}\begin{array}{r}133x-14y=343\\ +\quad -4x+14y=-20\\ \hline 129x\qquad=323\end{array}$$

$129x=323 \rightarrow x=\dfrac{323}{129}$

$2x-7y=10 \xrightarrow{x=\frac{323}{129}} \dfrac{646}{129}-7y=10 \rightarrow y=\dfrac{92}{129}$

c) $\left.\begin{array}{l}\dfrac{7x+5y}{10}-\dfrac{3\cdot(x+y)}{5}=\dfrac{x-y}{10}\\[2mm] \dfrac{3x+y+2}{4}-\dfrac{y-2x}{6}=\dfrac{y-x}{4}\end{array}\right\}$

$$\rightarrow\left.\begin{array}{l}7x+5y-6x-6y=x-y\\9x+3y+6-2y+4x=3y-3x\end{array}\right\}\rightarrow\left.\begin{array}{l}0=0\\16x-2y=-6\end{array}\right\}\rightarrow y=8x+3$$

076 ●●●

Un matrimonio y sus tres hijos viajan en tren. Si el billete de adulto vale el doble que el de niño, y el coste total de los billetes es 8,75 €, ¿cuánto ha costado cada billete?

Billete de niño: x Billete de adulto: $2x$

$$3\cdot x+2\cdot 2\cdot x=8{,}75 \rightarrow x=1{,}25\text{ €}$$

Billete de niño: 1,25 € Billete de adulto: 2,50 €

077 **Jorge tiene 3 discos más que Marta, Marta tiene 3 discos más que Alberto y Alberto tiene 3 discos más que Sara. Entre los cuatro tienen 58 discos. ¿Cuántos discos tiene cada uno?**

Discos de Sara: x Discos de Marta: $x + 6$

Discos de Alberto: $x + 3$ Discos de Jorge: $x + 9$

$$x + x + 3 + x + 6 + x + 9 = 58 \rightarrow x = 10$$

Discos de Sara: 10 Discos de Marta: 16

Discos de Alberto: 13 Discos de Jorge: 19

078 **Claudia se ha gastado el 25 % de sus ahorros en un regalo y todavía le quedan 120 €. ¿Cuánto dinero tenía ahorrado?**

Dinero ahorrado: x

$x - 0{,}25x = 120 \rightarrow x = 160$ € tenía ahorrados.

079 **En una tienda, Pedro observa unos pantalones que están rebajados un 20 % y cuestan 18 €. ¿Cuánto valían los pantalones antes de efectuar el descuento?**

Precio de los pantalones: x

$x - 0{,}20x = 18$ € $\rightarrow x = 22{,}50$ €

Los pantalones valían 22,50 €.

080 **Halla tres números enteros consecutivos cuya suma sea 27.**

Números: $x - 1$, x, $x + 1$

$$x - 1 + x + x + 1 = 27 \rightarrow x = 9$$

Los números son 8, 9 y 10.

081 **El transporte en taxi cuesta 2,50 € de bajada de bandera y 1,50 € por cada kilómetro recorrido. Si en un trayecto hemos pagado 13 € ¿qué distancia hemos recorrido?**

Distancia recorrida (km): x

$2{,}50 + 1{,}50x = 13 \rightarrow x = 7$ km

Hemos recorrido 7 km.

082 **Halla dos números consecutivos, sabiendo que la suma de sus cuadrados es 1.301.**

Números: x, $x + 1$

$$x^2 + (x + 1)^2 = 1.301 \rightarrow 2x^2 + 2x - 1.300 = 0$$

$$x_1 = 25,\ x_2 = -26$$

Los números son 25 y 26, o -26 y -25.

083 ●●
Calcula dos números pares consecutivos, cuya diferencia de sus cuadrados sea 60.

Números: x, $x + 2$

$$(x + 2)^2 - x^2 = 60 \rightarrow 4x = 56 \rightarrow x = 14$$

Los números son 14 y 16.

084 ●●
El dividendo y el resto de una división de números enteros son 200 y 5, respectivamente. Halla el divisor y el cociente si se diferencian en dos unidades. Recuerda: $D = d \cdot c + R$.

Divisor: x

Cociente: $x - 2$

$$x \cdot (x - 2) + 5 = 200 \rightarrow x^2 - 2x - 195 = 0$$

$$x_1 = 15,\ x_2 = -13 \text{ (solución negativa no válida)}$$

Divisor: 15

Cociente: 13

085 ●●
Halla el divisor y el cociente obtenido al efectuar una división si el dividendo es 140 y el resto es 12, sabiendo que el cociente es la mitad del divisor.

Divisor: $2x$

Cociente: x

$$2x \cdot x + 12 = 140 \rightarrow 2x^2 = 128$$

$$x_1 = 8,\ x_2 = -8 \text{ (solución negativa no válida)}$$

Divisor: 16

Cociente: 8

086 ●●
Un jardín rectangular tiene 5.600 m² de superficie y mide 10 m más de largo que de ancho. ¿Qué dimensiones tiene el jardín?

Ancho: x

Largo: $x + 10$

$$x \cdot (x + 10) = 5.600 \rightarrow x^2 + 10x - 5.600 = 0$$

$$x_1 = 70,\ x_2 = -80 \text{ (solución negativa no válida)}$$

Ancho: 70 m

Largo: 80 m

087 ●●●
¿Cuántos hermanos hay en una familia si por Navidad cada uno hace un regalo a cada hermano y entre todos reúnen 30 regalos?

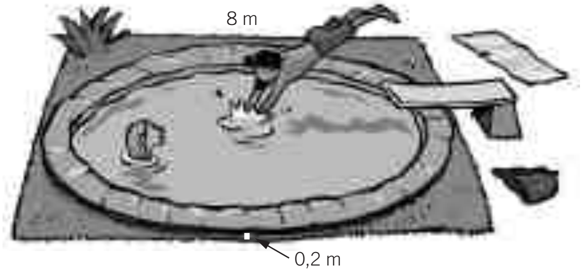
N.º de hermanos: x

$$x \cdot (x - 1) = 30 \rightarrow x^2 - x - 30 = 0$$

$$x_1 = 6,\ x_2 = -5 \text{ (solución negativa no válida)}$$

Hay 6 hermanos.

088 ●●● **¿Qué superficie ocupa el jardín que rodea la piscina?**



El radio de la piscina es: $r = \dfrac{8 - 2 \cdot 0{,}2}{2} = 3{,}8$ m

Área del jardín: $8^2 - \pi \cdot 3{,}8^2 = 18{,}6584$ m^2

089 ●● **En una chocolatería hay 900 bombones envasados en cajas de 6 y 12 unidades.**

¿Cuántas cajas hay de cada clase si en total tienen 125 cajas?

N.º de cajas de 6 bombones: x

N.º de cajas de 12 bombones: y

$$\left.\begin{array}{r} x + y = 125 \\ 6x + 12y = 900 \end{array}\right\} \to x = 125 - y$$

$$6x + 12y = 900 \xrightarrow{x = 125 - y} 750 - 6y + 12y = 900 \to 6y = 150 \to y = 25$$

$$x = 125 - y \xrightarrow{y = 25} x = 100$$

Hay 100 cajas de 6 bombones y 25 cajas de 12 bombones.

090 ●● **A un congreso acuden 60 personas. Si se van 3 hombres y vienen 3 mujeres, el número de mujeres sería $\dfrac{1}{3}$ del número de hombres. ¿Cuántos hombres y mujeres hay en el congreso?**

N.º de hombres: x

N.º de mujeres: y

$$\left.\begin{array}{l} x + y = 60 \\ x - 3 = 3 \cdot (y + 3) \end{array}\right\} \to x = 60 - y$$

$$x - 3 = 3 \cdot (y + 3) \xrightarrow{x = 60 - y} 57 - y = 3 \cdot (y + 3) \to 4y = 48 \to y = 12$$

$$x = 60 - y \xrightarrow{y = 12} x = 48$$

Hay 48 hombres y 12 mujeres en el congreso.

091 **Por el desierto va una caravana formada por camellos y dromedarios, con un total de 440 patas y 160 jorobas. ¿Cuántos camellos y dromedarios hay en la caravana? (Recuerda que los camellos tienen dos jorobas y los dromedarios tienen una.)**

N.º de camellos: x

N.º de dromedarios: y

$$\left.\begin{array}{r} 2x + y = 160 \\ 4x + 4y = 440 \end{array}\right\} \rightarrow x = 110 - y$$

$$2x + y = 160 \xrightarrow{x = 110 - y} 220 - 2y + y = 160 \rightarrow y = 60$$

$$x = 110 - y \xrightarrow{y = 60} x = 50$$

Hay 50 camellos y 60 dromedarios en la caravana.

092 **Pedro le dice a María: «Si cambias los billetes de 10 € que tienes por billetes de 5 € y los billetes de 5 € por billetes de 10 €, seguirás teniendo el mismo dinero». ¿Cuánto dinero tiene María, si en total son 20 billetes?**

N.º de billetes de 5 €: x

N.º de billetes de 10 €: y

$$\left.\begin{array}{r} x + y = 20 \\ 5x + 10y = 10x + 5y \end{array}\right\} \rightarrow x = y$$

$$x + y = 20 \xrightarrow{x = y} 2y = 20 \rightarrow y = 10$$

$$x = y \xrightarrow{y = 10} x = 10$$

María tiene 10 billetes de 5 € y 10 billetes de 10 €.

093 **Los billetes de 50 € y 20 € que lleva Ángel en el bolsillo suman 380 €. Si cambiamos los billetes de 50 € por billetes de 20 € y al revés, entonces suman 320 €. Calcula cuántos billetes tiene de cada tipo.**

N.º de billetes de 20 €: x

N.º de billetes de 50 €: y

$$\left.\begin{array}{r} 20x + 50y = 380 \\ 50x + 20y = 320 \end{array}\right\} \begin{array}{c} \xrightarrow{:2} \\ \xrightarrow{:(-5)} \end{array} \begin{array}{r} 10x + 25y = 190 \\ + \quad -10x - 4y = -64 \\ \hline 21y = 126 \end{array}$$

$$21y = 126 \rightarrow y = 6$$

$$20x + 50y = 380 \xrightarrow{y = 6} 20x + 300 = 380 \rightarrow x = 4$$

Ángel tiene 4 billetes de 20 € y 6 billetes de 50 €.

094 Laura acude al banco a cambiar monedas de 5 céntimos por monedas de 20 céntimos. Si sale del banco con 225 monedas menos que cuando entró, ¿cuánto dinero llevaba? ¿Cuántas monedas de 20 céntimos tiene ahora?

N.º de monedas de 5 céntimos: x
N.º de monedas de 20 céntimos: y

$$\left.\begin{array}{r} x = y + 225 \\ 5x = 20y \end{array}\right\} \to x = 4y$$

$$4y = y + 225 \to y = 75$$

$$x = 4y \xrightarrow{y=75} x = 300$$

Tenía 300 monedas de 5 céntimos. Ahora tiene 75 monedas de 20 céntimos.

095 Por un chándal y unas zapatillas de deporte que costaban 135 € he pagado 85,50 € en rebajas, ya que en la sección de textil tienen el 40 % de descuento, y en la de calzado, el 30 %. ¿Qué precio tenía cada artículo y cuánto me han costado?

Precio del chándal: x
Precio de las zapatillas: y

$$\left.\begin{array}{r} x + y = 135 \\ \dfrac{60}{100}x + \dfrac{70}{100}y = 85{,}5 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \to x = 135 - y \\ \to 6x + 7y = 855 \end{array}$$

$$6x + 7y = 855 \xrightarrow{x=135-y} 810 - 6y + 7y = 855 \to y = 45$$

$$x = 135 - y \xrightarrow{y=45} x = 90$$

El precio del chándal era de 90 € y el precio de las zapatillas era de 45 €. Me han costado 54 € y 31,50 €, respectivamente.

096 Por la mezcla de 400 kg de pienso de tipo A con 800 kg de pienso de tipo B se han pagado 2.200 €. Calcula el precio de cada tipo de pienso, sabiendo que, si se mezclase 1 kg de pienso de cada tipo, la mezcla costaría 3,90 €.

Precio del pienso A: x Precio del pienso B: y

$$\left.\begin{array}{r} x + y = 3{,}9 \\ 400x + 800y = 2.200 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \to x = 3{,}9 - y \\ \to 2x + 4y = 11 \end{array}$$

$$2x + 4y = 11 \xrightarrow{x=3{,}9-y} 7{,}8 - 2y + 4y = 11 \to y = 1{,}6$$

$$x = 3{,}9 - y \xrightarrow{1{,}6} x = 2{,}3$$

El pienso A cuesta 2,30 €/kg y el pienso B cuesta 1,60 €/kg.

097 ●●● **En un instituto, la relación del número de chicos con el número de chicas era de $\frac{8}{9}$, pero en junio esta relación era de $\frac{25}{21}$, pues abandonaron el centro 20 chicos y el 30 % de las chicas. ¿Cuántos alumnos acabaron el curso?**

Número de chicos que comenzaron el curso: x
Número de chicas que comenzaron el curso: y

$$\left.\frac{x}{y} = \frac{8}{9}\right\} \rightarrow y = \frac{9x}{8}$$

$$\left.\frac{x-20}{0{,}70 \cdot y} = \frac{25}{21}\right\} \rightarrow y = \frac{21x-420}{17{,}5} \rightarrow y = \frac{6x-120}{5}$$

$$\frac{9x}{8} = \frac{6x-120}{5} \rightarrow 45x = 48x - 960 \rightarrow x = 320$$

$$y = \frac{9x}{8} \xrightarrow{x=320} y = 360$$

Comenzaron el curso 320 chicos y 360 chicas. Y lo acabaron 300 chicos y 252 chicas.

098 ●●● **Halla todos los valores que puede tomar c para que una ecuación de segundo grado de la forma $x^2 - 2x + c = 0$ tenga:**

a) Dos soluciones. **b) Ninguna solución.**

a) $\Delta > 0 \rightarrow 4 - 4c > 0 \rightarrow c < 1 \rightarrow$ c debe de ser menor que 1.

b) $\Delta < 0 \rightarrow 4 - 4c < 0 \rightarrow c > 1 \rightarrow$ c debe de ser mayor que 1.

099 ●●● **Resuelve los sistemas.**

a) $\left.\begin{aligned} x + y &= 6 \\ 4x - y &= -1 \end{aligned}\right\}$ b) $\left.\begin{aligned} x + y &= 6 \\ 2x + 2y &= 12 \end{aligned}\right\}$ c) $\left.\begin{aligned} x + y &= 6 \\ x + y &= 8 \end{aligned}\right\}$

a) Sistema compatible determinado:

$$\left.\begin{aligned} x + y &= 6 \\ 4x - y &= -1 \end{aligned}\right\} \rightarrow x = 6 - y$$

$$4x - y = -1 \xrightarrow{x = 6-y} 24 - 4y - y = -1 \rightarrow y = 5$$

$$x = 6 - y \xrightarrow{y=5} x = 1$$

b) Sistema compatible indeterminado:

$$\left.\begin{aligned} x + y &= 6 \\ 2x + 2y &= 12 \end{aligned}\right\} \rightarrow x = 6 - y$$

$$2x + 2y = 12 \xrightarrow{x = 6-y} 12 - 2y + 2y = 12 \rightarrow 0 = 0$$

c) Sistema incompatible:

$$\left.\begin{array}{l} x + y = 6 \\ x + y = 8 \end{array}\right\} \rightarrow x = 6 - y$$

$$x + y = 8 \xrightarrow{x = 6 - y} 6 - y + y = 8 \rightarrow 6 \neq 8 \rightarrow \text{Sin solución}$$

100 ●●● **Generaliza la clasificación de sistemas de ecuaciones en función de los coeficientes y los términos independientes.**

$$\left.\begin{array}{r} \boldsymbol{ax + by = c} \\ \boldsymbol{a'x + b'y = c'} \end{array}\right\}$$

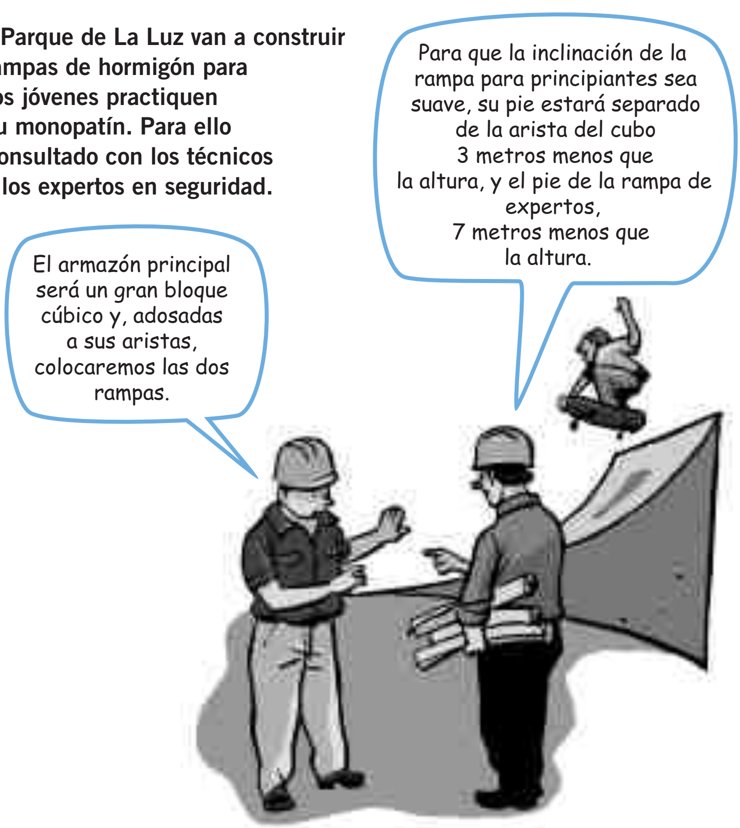
a) Sistema compatible determinado si: $\dfrac{a}{a'} \neq \dfrac{b}{b'}$

b) Sistema compatible indeterminado si: $\dfrac{a}{a'} = \dfrac{b}{b'} = \dfrac{c}{c'}$

c) Sistema incompatible si: $\dfrac{a}{a'} = \dfrac{b}{b'} \neq \dfrac{c}{c'}$

EN LA VIDA COTIDIANA

101 ●●● **En el Parque de La Luz van a construir dos rampas de hormigón para que los jóvenes practiquen con su monopatín. Para ello han consultado con los técnicos y con los expertos en seguridad.**



Para calcular qué dimensiones debe tener la estructura han presentado un proyecto con los datos y han incluido un esquema.

Calcula las dimensiones de la estructura.

$$15^5 = x^2 + (x+3)^2 \rightarrow 2x^2 + 6x - 216 = 0$$

$$x_1 = 9,\ x_2 = -12$$

La arista de la estructura cúbica mide 9 m.

Longitud de la base de la rampa de expertos $\longrightarrow x - 7 = 9 - 7 = 2$ m

Longitud de la base de la rampa de principiantes $\rightarrow x - 3 = 9 - 3 = 6$ m

102 **La empresa de perfumería Rich Perfum va a lanzar al mercado su nueva colonia que presentará en envases de dos tamaños, de 75 ml y de 100 ml.**
La colonia se llamará Rodin y los envases tendrán la forma del *Pensador*.

Al vender todas las existencias, la empresa quiere obtener lo suficiente para poder mantener el negocio, pagar a sus empleados y conseguir su propia ganancia.

¿A cuánto debe vender cada frasco?

N.º de envases pequeños: x
N.º de envases grandes: y

Teniendo en cuenta que han comprado el triple de envases pequeños que de grandes, y el precio de cada uno de ellos y el total, tenemos que:

$$\left.\begin{aligned} x &= 3y \\ 3{,}5x + 4{,}5y &= 113.400 \end{aligned}\right\}$$

$$3{,}5x + 4{,}5y = 113.400 \xrightarrow{x = 3y} 10{,}5y + 4{,}5y = 113.400$$
$$\rightarrow 15y = 113.400 \rightarrow y = 7.560$$

$$x = 3y \xrightarrow{y = 7.560} x = 22.680$$

Se han comprado 22.680 envases pequeños y 7.560 envases grandes.

La cantidad de colonia que pueden envasar es:

$$22.680 \cdot 75 + 7.560 \cdot 100 = 2.457.000 \text{ ml} = 2.457 \text{ litros}$$

El coste de la colonia es:

$$2.457 \cdot 6 = 14.742 \text{ €}$$

Producción = colonia + envases

El coste de producción es:

$$14.742 + 113.400 = 128.142\ €$$

Para conseguir 204.020 € de beneficios hay que ingresar por las ventas:

$$204.020 + 128.142 = 332.162\ €$$

Coste del envase pequeño: z

Coste del envase grande: t

$$\left.\begin{aligned} t &= z + 2 \\ 22.680z + 7.560t &= 332.162 \end{aligned}\right\}$$

$$22.680z + 7.560t = 332.162 \xrightarrow{t = z + 2} 30.240z = 317.042 \rightarrow z = 10,48$$

$$t = z + 2 \xrightarrow{z = 10,48} t = 12,48$$

Precio del envase pequeño: 10,48 €

Precio del envase grande: 12,48 €

7 Semejanza

SEMEJANZA

- FIGURAS SEMEJANTES
- RAZÓN DE SEMEJANZA
- CONSTRUCCIÓN DE FIGURAS SEMEJANTES

TEOREMA DE TALES

CRITERIOS DE SEMEJANZA DE TRIÁNGULOS

- PRIMER CRITERIO: $\hat{A} = \hat{A}'$; $\hat{B} = \hat{B}'$
- SEGUNDO CRITERIO: $\dfrac{a}{a'} = \dfrac{b}{b'} = \dfrac{c}{c'}$
- TERCER CRITERIO: $\hat{A} = \hat{A}'$; $\dfrac{b}{b'} = \dfrac{c}{c'}$

SEMEJANZA EN TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS

- TEOREMA DEL CATETO
- TEOREMA DE LA ALTURA
- CÁLCULO DE DISTANCIAS

SEMEJANZA EN ÁREAS Y VOLÚMENES

Enigmas

Fue un cortejo en toda regla: el primer encuentro sorprendió, la segunda vez el interés creció hasta límites insospechados, y a partir ahí esperábamos cada misiva con la impaciencia de un amante, pues realmente nos conquistó.

Así explicaba Roberval la relación de Pierre de Fermat con el grupo de Mersenne.

Mientras paseaban por el claustro del monasterio, Roberval y el padre Mersenne charlaban animadamente acerca de Pierre de Fermat.

–Al principio, cuando leímos los problemas que proponía en su carta, pensamos que era un pobre loco –recordaba riendo Roberval–. Sin embargo, al resolverlos nos dimos cuenta de que las respuestas a sus preguntas abrían nuevos caminos en el mundo de las Matemáticas.

–Las Parábolas de Nuestro Señor nos enseñan que unas historias corrientes pueden encerrar la esencia de la doctrina cristiana; con sus preguntas, Fermat nos ha dado una lección parecida: la pregunta adecuada abre caminos alternativos en la senda del conocimiento.

La campana, llamando a la oración, y un amistoso apretón de manos pusieron término a la visita.

El último enigma de Fermat tardó en resolverse tres siglos, y dice que la ecuación $x^n + y^n = z^n$ *no tiene soluciones enteras para ningún exponente mayor que 2. Escribe la ecuación y encuentra una solución para* $n = 2$.

Si **n** ***= 2, tenemos que:***

$$x^n + y^n = z^n \rightarrow x^2 + y^2 = z^2$$

Así, para cualquier terna pitagórica se cumplirá esta ecuación.

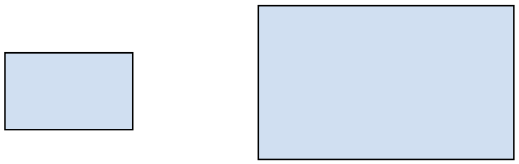
Por ejemplo:

$$\left.\begin{array}{l} x = 4 \\ y = 3 \\ z = 5 \end{array}\right\} \rightarrow 4^2 + 3^2 = 5^2$$

Semejanza

EJERCICIOS

001 **Razona si son semejantes los dos rectángulos de la figura.**



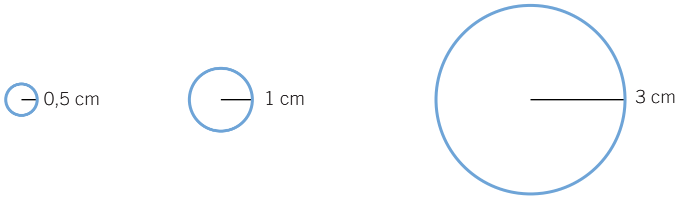
En caso afirmativo, averigua cuál es la razón de semejanza.

Son semejantes, ya que tienen los ángulos iguales y los lados son proporcionales. La razón de semejanza es 2.

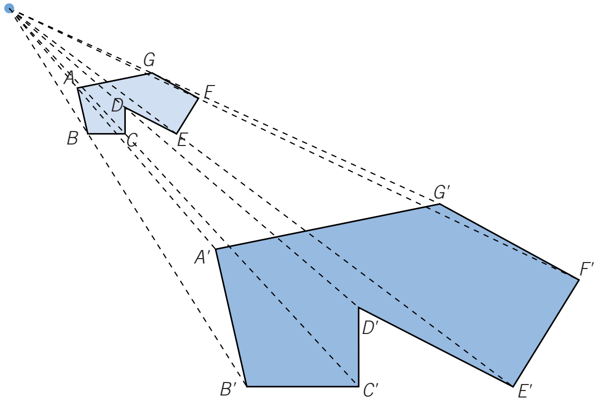
002 **Ana ha dibujado dos cuadrados cuyos lados miden 1 y 3 cm, respectivamente. ¿Son semejantes? Calcula su razón de semejanza.**

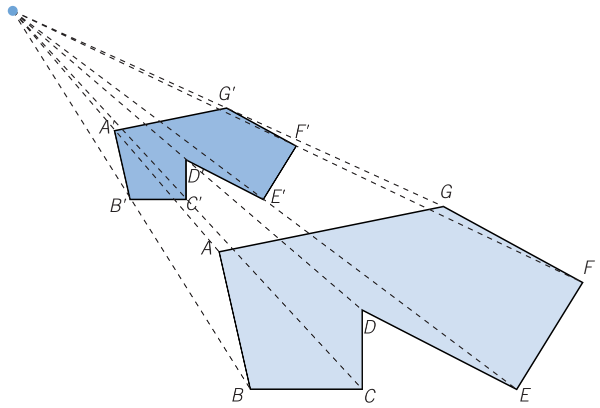
Todos los cuadrados son semejantes y, en este caso, la razón de semejanza es 3.

003 **Dibuja dos figuras semejantes a una circunferencia de 1 cm de radio, con razones de semejanza 3 y $\frac{1}{2}$.**

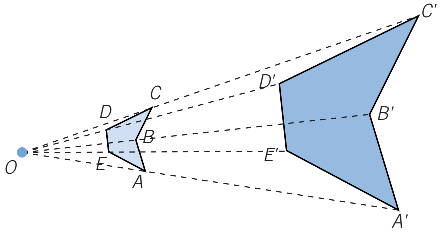


004 **Calca esta figura y construye dos figuras semejantes a ella con razones 3 y 0,5.**

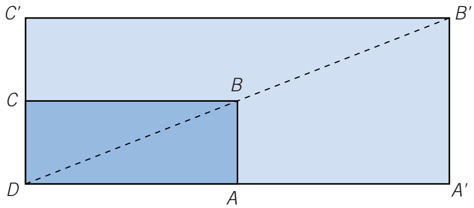




005 **Completa la figura semejante.**



006 **Dibuja un rectángulo semejante a otro, con razón 2, si el punto *O* es uno de sus vértices.**



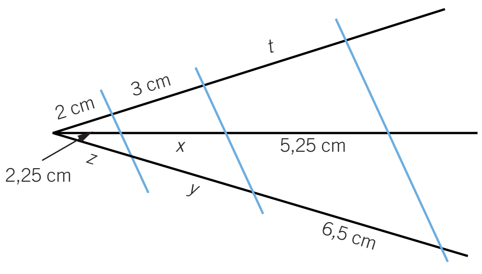
007 **Calcula las distancias desconocidas.**

$$\frac{2,25}{2} = \frac{x}{3} \rightarrow x = 3,375 \text{ cm}$$

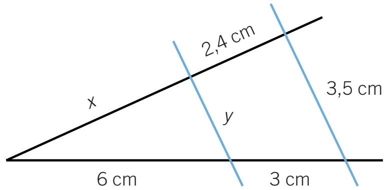
$$\frac{2,25}{2} = \frac{5,25}{t} \rightarrow t = 4,\widehat{6} \text{ cm}$$

$$\frac{6,5}{5,25} = \frac{z}{2,25} \rightarrow z = 2,79 \text{ cm}$$

$$\frac{6,5}{5,25} = \frac{y}{x} \rightarrow \frac{6,5}{5,25} = \frac{y}{3,375} \rightarrow y = 4,18 \text{ cm}$$



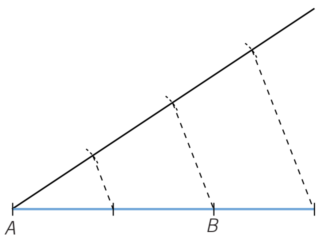
008 **Halla las distancias que faltan.**



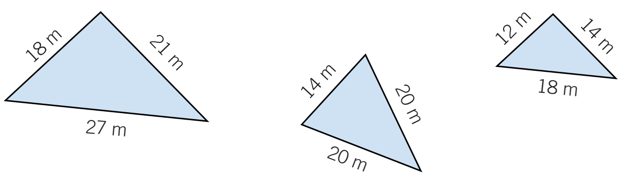
$$\frac{2,4}{3} = \frac{x}{6} \rightarrow x = 4,8 \text{ cm}$$

$$\frac{3,5}{9} = \frac{y}{6} \rightarrow y = 2,\widehat{3} \text{ cm}$$

009 **Utiliza el teorema de Tales para dividir un segmento de 4 cm en tres partes iguales.**



010 **Comprueba si los siguientes triángulos son semejantes o no.**



Utilizando el segundo criterio de semejanza, se comprueba que son semejantes los triángulos primero y tercero, y su razón de semejanza es: $r = \frac{18}{12} = \frac{21}{14} = \frac{27}{18} = 1,5$.

011 **Razona la semejanza de dos triángulos si:**

a) Sus lados miden 2, 4 y 6 cm, y 3, 6 y 9 cm, respectivamente.

b) Son triángulos rectángulos isósceles.

a) Por el segundo criterio, son semejantes, porque sus lados son proporcionales.

b) Por el primer criterio, son semejantes, pues tienen sus ángulos iguales.

012 **¿Cuáles son las condiciones necesarias para que dos triángulos isósceles sean semejantes? ¿Y si fueran equiláteros?**

Dos triángulos isósceles son semejantes si tienen el mismo ángulo formado por los lados iguales.

Los triángulos equiláteros son siempre semejantes, ya que tienen sus ángulos iguales.

013 **La hipotenusa de un triángulo rectángulo mide 10 cm y un cateto 4 cm, y la hipotenusa de otro mide 20 cm y un cateto 8 cm. ¿Son semejantes los triángulos?**

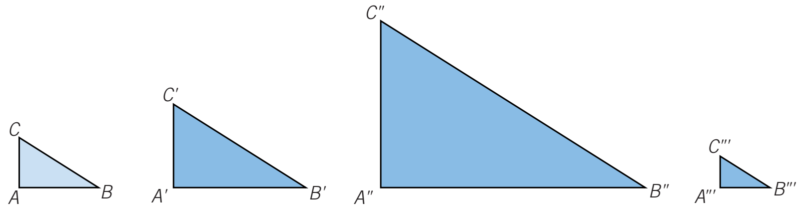
El otro cateto del primer triángulo mide: $c = \sqrt{100 - 16} = \sqrt{84}$ cm

El otro cateto del segundo triángulo mide:

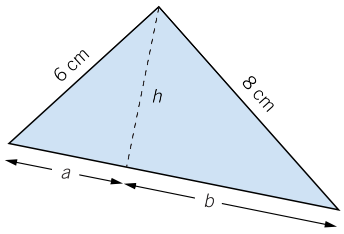
$c' = \sqrt{400 - 64} = \sqrt{336} = 2\sqrt{84}$ cm

Por tanto, sus lados son proporcionales, y aplicando el segundo criterio, los triángulos son semejantes.

014 **Dibuja en tu cuaderno un triángulo rectángulo, y construye tres triángulos semejantes a él.**



015 **Calcula las medidas *a*, *b* y *h*.**



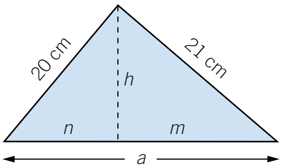
Hipotenusa $= \sqrt{64 + 36} = 10$ cm

$$\frac{8}{10} = \frac{b}{8} \rightarrow b = 6{,}4 \text{ cm}$$

$$\frac{6}{10} = \frac{a}{6} \rightarrow a = 3{,}6 \text{ cm}$$

$$\frac{6{,}4}{h} = \frac{h}{3{,}6} \rightarrow h^2 = 23{,}04 \rightarrow h = 4{,}8 \text{ cm}$$

016 **Halla la medida de la hipotenusa y la altura sobre la hipotenusa de este triángulo rectángulo.**



Hipotenusa $= \sqrt{400 + 441} = 29$ cm

$$\frac{20}{29} = \frac{n}{20} \rightarrow n = 13{,}79 \text{ cm}$$

$$\frac{21}{29} = \frac{m}{21} \rightarrow m = 15{,}21 \text{ cm}$$

$h^2 = 13{,}79 \cdot 15{,}21 \rightarrow h = 14{,}48$ cm

017 **Determina la hipotenusa y la altura sobre la hipotenusa en un triángulo rectángulo cuyos catetos miden 5 y 12 cm, respectivamente.**

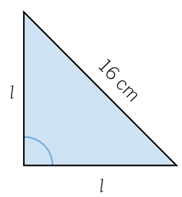
$$\text{Hipotenusa} = \sqrt{144 + 25} = 13 \text{ cm}$$

$$\frac{5}{13} = \frac{n}{5} \rightarrow n = 1{,}92 \text{ cm}$$

$$\frac{12}{13} = \frac{m}{12} \rightarrow m = 11{,}08 \text{ cm}$$

$$h^2 = 1{,}92 \cdot 11{,}08 \rightarrow h = 4{,}61 \text{ cm}$$

018 **Calcula la altura, el perímetro y el área de un triángulo rectángulo isósceles cuya hipotenusa mide 16 cm.**



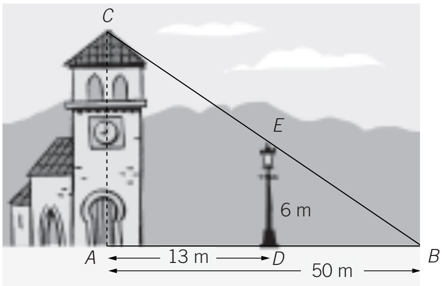
$$16^2 = l^2 + l^2 \rightarrow l^2 = \frac{256}{2} \rightarrow l = \sqrt{128} = 11{,}31 \text{ cm}$$

$$\text{Altura} = l = 11{,}31 \text{ cm}$$

$$\text{Perímetro} = 2 \cdot l + 16 = 38{,}62 \text{ cm}$$

$$\text{Área} = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{\sqrt{128} \cdot \sqrt{128}}{2} = 64 \text{ cm}^2$$

019 **Los triángulos $\widehat{ABC}$ y $\widehat{ADE}$ son semejantes.**



a) Escribe la relación de semejanza que cumplen los triángulos.

b) Halla la altura de la torre.

a) La razón de semejanza es:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{DB}} = \frac{50}{50 - 13} = 1{,}\widehat{351}$$

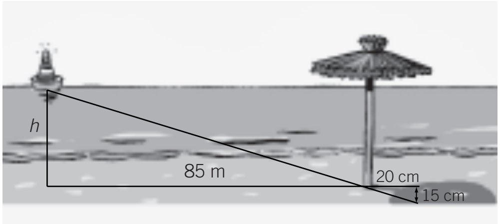
b) $\dfrac{h}{50} = \dfrac{6}{50 - 13} \rightarrow h = \dfrac{50 \cdot 6}{37} = 8{,}1 \text{ m}$

020 **Un niño situado a 3 m de un charco, ve reflejado en él un nido de cigüeña sobre una torre. ¿A qué altura se encuentra el nido, si el niño mide 1,50 m y la distancia del charco a la torre es 50 m?**

Llamando h a la altura de la torre, y aplicando las relaciones de semejanza de triángulos, se obtiene:

$$\frac{h}{1,5} = \frac{50}{3} \rightarrow h = \frac{50 \cdot 1,5}{3} = 25 \text{ m}$$

021 **¿Qué distancia hay de la boya a la playa?**



$$\frac{85}{h} = \frac{0,2}{0,15}$$

$$h = \frac{85 \cdot 0,15}{0,2} = 63,75 \text{ m}$$

022 **Las dimensiones de un campo de fútbol son 70 y 100 m, respectivamente. ¿Cuál es la superficie de un futbolín hecho a escala 1:75?**

La razón de semejanza es $r = \frac{1}{75}$.

$$A = r^2 \cdot A_{\text{real}} = \left(\frac{1}{75}\right)^2 \cdot 70 \cdot 100 = \frac{7.000}{75^2} = 1,244 \text{ m}^2$$

023 **Si el volumen de un silo es de 45.000 m³, ¿cuál será el volumen de su maqueta a escala 1:40?**

La razón de semejanza es: $r = \frac{1}{40} = 0,025$; ya que la escala es 1:40.

$$V = r^3 \cdot V_{\text{real}} = (0,025)^3 \cdot 45.000 = 0,000015625 \cdot 45.000 = 0,703125 \text{ m}^3$$

024 **A Carlos le han regalado una maqueta de un barco a escala 1:100.**

a) Si el barco real desplaza 3.671 toneladas de agua, ¿cuánto desplazaría la maqueta?

b) Si la superficie real mide 3.153 m², ¿cuánto mide la superficie de las velas de la maqueta?

La razón de semejanza es: $r = \frac{1}{100} = 0,01$.

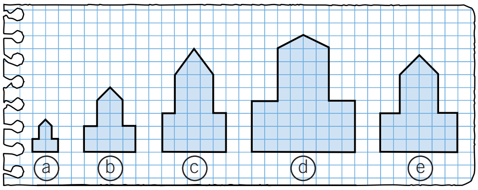
a) $V = r^3 \cdot V_{\text{real}} = (0,01)^3 \cdot 3.671 = 0,000001 \cdot 3.671 = 0,003671$ toneladas

El barco de la maqueta desplaza 3,671 kg de agua.

b) $A = r^2 \cdot A_{\text{real}} = (0,01)^2 \cdot 3.153 = 0,0001 \cdot 3.153 = 0,3153 \text{ m}^2$

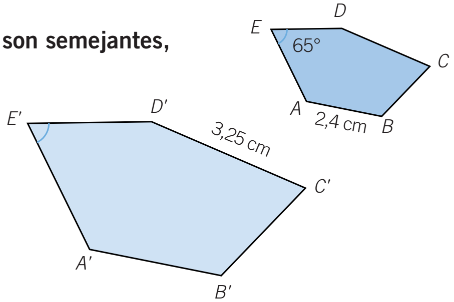
ACTIVIDADES

025 **Indica qué polígonos son semejantes entre sí, y calcula su razón de semejanza.**



Son semejantes los polígonos a), b) y e).
La razón de semejanza de a) y b) es 2 y la razón de semejanza de a) y e) es 3.

026 **Los pentágonos *ABCDE* y *A′B′C′D′E′* son semejantes, con razón de semejanza $r = \frac{5}{2}$.**



a) ¿Cuánto mide el segmento *A′B′*?
b) ¿Cuál es la amplitud de $\hat{E}'$?
c) Calcula la medida de *CD*.

a) $\overline{A'B'} = \frac{5}{2} \cdot \overline{AB} = 6$ cm

b) La amplitud de $\hat{E}'$ es la misma que la amplitud de $\hat{E}$: 65°.

c) $\overline{CD} = \frac{2}{5} \cdot \overline{C'D'} = 1{,}3$ cm

027 **Halla la longitud de los lados de un triángulo semejante a otro de lados 5, 6 y 8 cm, respectivamente, con razón de semejanza $r = 1{,}6$.**

Los lados medirán 6; 9,6 y 12,8 cm, respectivamente.

028 **HAZLO ASÍ**

¿CÓMO SE CALCULAN LOS LADOS DE UN POLÍGONO SEMEJANTE A OTRO, CONOCIDO SOLO SU PERÍMETRO?

Calcula los lados de un pentágono si su perímetro es 180 cm y es semejante a otro cuyos lados miden 4, 5, 7, 9 y 11 cm, respectivamente.

PRIMERO. Se halla la razón de semejanza dividiendo ambos perímetros.

$$P = 180 \text{ cm} \qquad P' = 4 + 5 + 7 + 9 + 11 = 36 \text{ cm}$$

$$P = r \cdot P' \rightarrow r = \frac{P}{P'} = \frac{180}{36} = 5$$

SEGUNDO. Para calcular la longitud de los lados, se multiplica cada lado conocido del otro pentágono por la razón de semejanza.

$a = 5 \cdot 4 = 20$ cm $d = 5 \cdot 9 = 45$ cm
$b = 5 \cdot 5 = 25$ cm $e = 5 \cdot 11 = 55$ cm
$c = 5 \cdot 7 = 35$ cm

029 **Los lados de un triángulo miden $a = 7$ cm, $b = 8$ cm y $c = 10$ cm. Calcula cuánto miden los lados de un triángulo semejante cuyo perímetro es 125 cm.**

Siendo m, n y s los lados del triángulo y r la razón de semejanza, se verifica:

$$m = 7r \qquad n = 8r \qquad s = 10r$$

Teniendo en cuenta que el perímetro del nuevo triángulo es 125 cm:

$$m + n + s = 125 \rightarrow 7r + 8r + 10r = 125 \rightarrow 25r = 125 \rightarrow r = 5$$

La longitud de los lados del nuevo triángulo es:

$$m = 35 \text{ cm} \qquad n = 40 \text{ cm} \qquad s = 50 \text{ cm}$$

030 **Dibuja dos polígonos que tengan los lados proporcionales y no sean polígonos semejantes.**

Hay que dibujar un cuadrado y un rombo cuyos ángulos no sean rectos; así los lados serían proporcionales, pues son iguales, pero los polígonos no son semejantes.

031 **Si dos cuadriláteros tienen sus ángulos iguales, ¿son semejantes? Pon un ejemplo.**

No necesariamente, puesto que dos rectángulos tienen sus ángulos iguales, pero sus lados no tienen por qué ser proporcionales.

032 **Razona si son ciertas estas afirmaciones.**

a) Todos los cuadrados son semejantes.

b) Todos los rombos son semejantes.

c) Todos los hexágonos regulares son semejantes.

a) Cierta. Todos los ángulos son rectos y los lados son proporcionales.

b) Falsa. Hay rombos que no tienen los ángulos iguales.

c) Cierta. Todos los hexágonos regulares son semejantes, porque tienen los ángulos iguales y los lados proporcionales.

033 **Tenemos tres cuadriláteros *A*, *B* y *C* semejantes. La razón de semejanza de *B* respecto de *A* es 2,6 y la de *C* respecto de *A* es 0,8. Calcula.**

a) La razón de semejanza de *A* respecto de *B*.

b) La razón de semejanza de *C* respecto de *B*.

a) $r = \dfrac{1}{2{,}6} = \dfrac{5}{13}$

b) $r = \dfrac{0{,}8}{2{,}6} = \dfrac{4}{13}$

034 ●● **Sabiendo que la razón de semejanza del polígono *A* respecto del polígono *B* es $r = 1{,}5$; indica si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.**

a) *B* es un polígono de mayor tamaño que *A*.

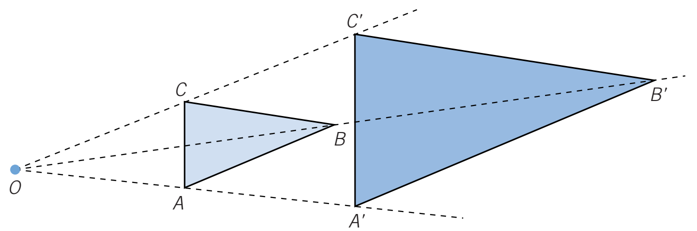
b) Cada lado del polígono *B* mide 1,5 cm más que cada lado del polígono *A*.

c) Los ángulos del polígono *B* son 1,5 veces mayores que los del polígono *A*.

d) Las longitudes de los lados de *B* multiplicadas por 1,5 miden igual que los lados de *A*.

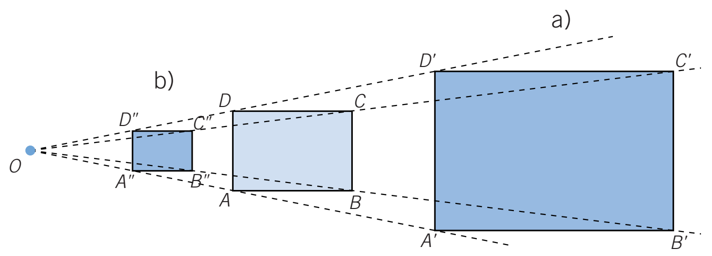
a) Falsa b) Falsa c) Falsa d) Verdadera

035 ● **Construye un triángulo semejante a $\widehat{ABC}$, utilizando el punto *O*, y cuya razón sea $r = 2$.**



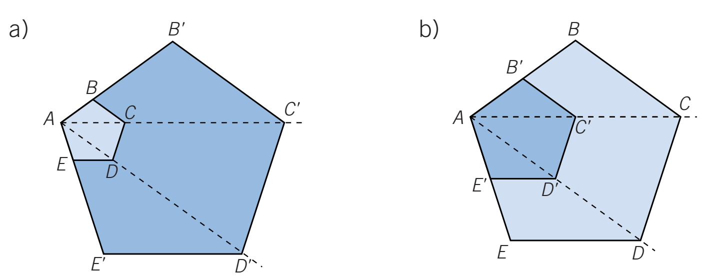
036 ●● **Dibuja un cuadrilátero en tu cuaderno y elige un punto exterior *O*. Dibuja las figuras semejantes con razón de semejanza:**

a) $r = 2$ **b) $r = 0{,}5$**



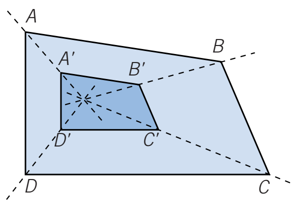
037 ●● **Dibuja un pentágono en tu cuaderno y elige uno de sus vértices para construir un pentágono semejante con razón de semejanza:**

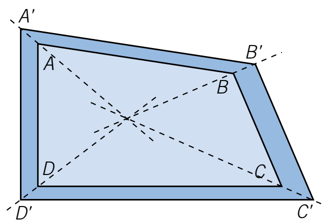
a) $r = 3{,}5$ **b) $r = 0{,}5$**



038 Dibuja un trapezoide. Toma un punto interior a él, y construye dos trapezoides semejantes con razón de semejanza:

a) $r = 0{,}4$ **b)** $r = 1{,}2$

a) 

b) 

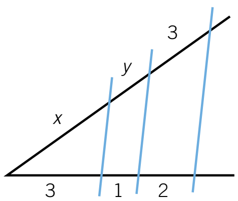
039 Pon un ejemplo de dos figuras semejantes, con razón de semejanza:

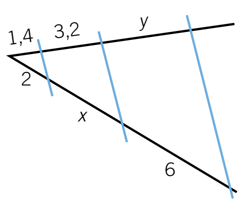
a) $0 < r < 1$ **b)** $r > 1$

a) Por ejemplo, un cuadrado, de 4 cm de lado, y otro cuadrado, de 2 cm de lado.

b) Por ejemplo, un triángulo equilátero, de 3 cm de lado, y otro triángulo equilátero, de 5 cm de lado.

040 Calcula las longitudes desconocidas.

a) 

b) 

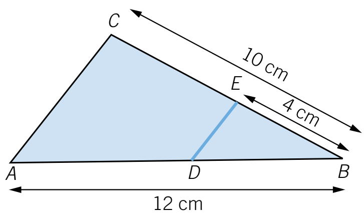
a) $\frac{3}{2} = \frac{x}{3} \rightarrow x = 4{,}5$ cm

$\frac{3}{2} = \frac{y}{1} \rightarrow y = 1{,}5$ cm

b) $\frac{2}{1{,}4} = \frac{x}{3{,}2} \rightarrow x = 4{,}57$ cm

$\frac{1{,}4}{2} = \frac{y}{6} \rightarrow y = 4{,}2$ cm

041 ¿Cuánto mide DB? ¿Se puede hallar DE?



$\frac{12}{10} = \frac{\overline{DB}}{4} \rightarrow \overline{DB} = 4{,}8$ cm

La medida de $\overline{DE}$ no se puede calcular, porque faltan datos como, por ejemplo, el valor de $\overline{AC}$.

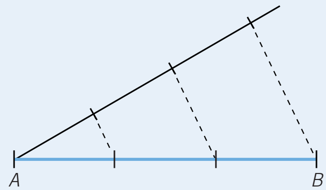
042 **HAZLO ASÍ**

¿CÓMO SE DIVIDE UN SEGMENTO EN PARTES IGUALES?

Divide un segmento cuya longitud es 4 cm en tres partes iguales.

PRIMERO. Se traza una recta secante al segmento en uno de sus extremos.

SEGUNDO. Se marcan en la recta tres segmentos consecutivos de igual longitud y se une, mediante una recta, la última marca con el extremo del segmento.

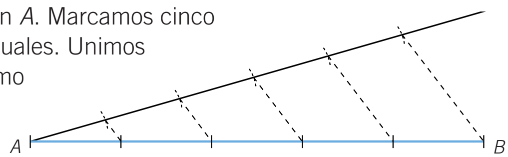


TERCERO. Se trazan paralelas a esta recta que pasen por las otras marcas.

El segmento *AB* queda dividido en tres partes iguales por el teorema de Tales.

043 ●● **Divide gráficamente un segmento en cinco partes iguales y explica cómo lo haces.**

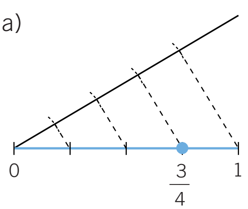
Se traza una recta secante en *A*. Marcamos cinco segmentos consecutivos e iguales. Unimos la última marca con el extremo del segmento y trazamos las paralelas.



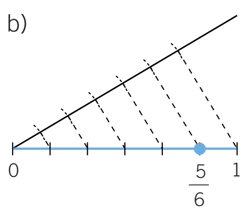
044 ●● **Representa, de forma exacta en la recta real, los siguientes números racionales.**

a) $\frac{3}{4}$ **b)** $\frac{5}{6}$ **c)** $\frac{7}{8}$

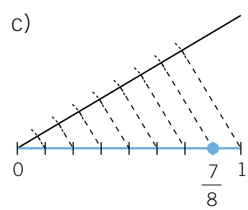
a)



b)



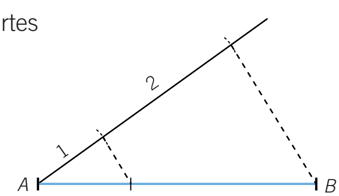
c)



045 ●● **Aplicando el teorema de Tales, divide un segmento en dos partes, una doble que la otra.**

Esto equivale a dividir el segmento en dos partes proporcionales a 2 y 1.

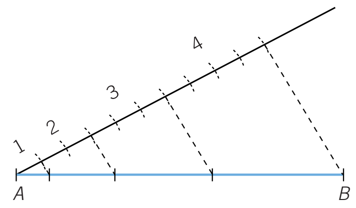
Trazamos una recta secante que pase por uno de los extremos, y marcamos en ella una medida correspondiente a 1 y otra medida que sea doble que la anterior, correspondiente a 2.



Se une la última marca con el otro extremo del segmento y, después, se traza una paralela que pase por la otra marca.

Las rectas que hemos trazado dividen el segmento en dos partes, siendo ≠una doble que la otra.

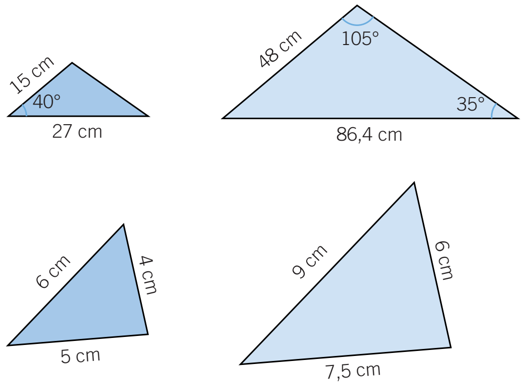
046 **Utilizando el teorema de Tales, divide un segmento en partes proporcionales a 3, 4, 2 y 1.**



047 **Indica si son semejantes estos triángulos.**

a)

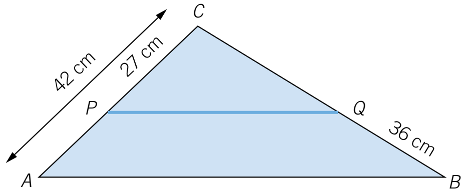
b)



a) Son semejantes, ya que tienen un ángulo igual de 40°, y los dos lados contiguos son proporcionales: $\frac{48}{15} = \frac{86,4}{27}$

b) Son semejantes, porque tienen los lados proporcionales: $\frac{9}{6} = \frac{6}{4} = \frac{7,5}{5}$

048 **En el triángulo $\widehat{ABC}$ se traza un segmento *PQ* paralelo a *AB*. Calcula *BC*. ¿Se puede hallar *AB*?**



Aplicando el teorema de Tales se obtiene:

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AP}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{BQ}} \rightarrow \frac{42}{15} = \frac{\overline{BC}}{36} \rightarrow \overline{BC} = \frac{42 \cdot 36}{15} = 100,8 \text{ cm}$$

No se puede calcular el segmento *AB* porque faltan datos.

049 Indica si un triángulo, cuyos lados miden a, b y c, es semejante a los triángulos cuyos lados miden:

a) $3a$, $3b$ y $3c$ **b)** $a+3$, $b+3$ y $c+3$ **c)** $\frac{a}{3}$, $\frac{b}{3}$ y $\frac{c}{3}$

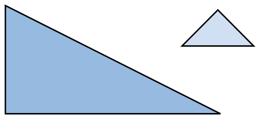
a) $\frac{3a}{a} = \frac{3b}{b} = \frac{3c}{c} \rightarrow$ Son semejantes.

b) $\frac{a+3}{a} \neq \frac{b+3}{b} \neq \frac{c+3}{c} \rightarrow$ No son semejantes.

c) $\frac{\frac{a}{3}}{a} = \frac{\frac{b}{3}}{b} = \frac{\frac{c}{3}}{c} \rightarrow$ Son semejantes.

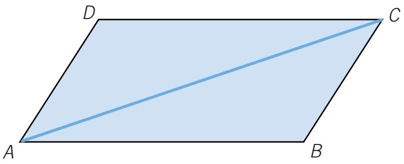
050 La base de un triángulo y su altura miden el triple que las de otro. Explica por qué los dos triángulos podrían no ser semejantes y dibuja un ejemplo.

Dadas una base y una altura, existen infinitos triángulos distintos con esos datos, y que tienen ángulos diferentes.



051 Una diagonal divide un paralelogramo en dos triángulos. ¿Son semejantes?

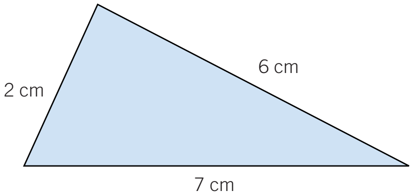
Aplicando el segundo criterio de semejanza, se puede comprobar que son semejantes.



052 Si dos triángulos rectángulos tienen uno de los catetos iguales, ¿son semejantes?

No lo son. En el caso de que tengan un cateto igual no se conserva la proporcionalidad de los lados, ya que la razón entre los catetos iguales es 1 y la razón entre los catetos que no son iguales puede ser distinta de 1.

053 Determina todos los triángulos de perímetro 12 cm que sean semejantes a otro cuyos lados miden 2, 7 y 6 cm, respectivamente.



Sean x, y, z los lados de un triángulo de perímetro 12 cm y sea r la razón de semejanza. Utilizando el segundo criterio de semejanza, resulta:

$$\frac{x}{2} = \frac{y}{7} = \frac{z}{6} = r \rightarrow \left.\begin{array}{l} x = 2r \\ y = 7r \\ z = 6r \end{array}\right\} \rightarrow 2r + 7r + 6r = 12 \rightarrow 15r = 12$$

$$\rightarrow r = \frac{12}{15} \rightarrow r = 0{,}8 \text{ cm}$$

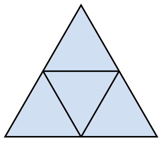
Por tanto, las medidas son: $x = 1{,}6$ cm; $y = 5{,}6$ cm y $z = 4{,}8$ cm.

054 Dibuja un triángulo equilátero, marca los puntos medios de cada uno de sus lados y únelos mediante rectas. La figura que resulta tiene cuatro triángulos.

a) ¿Son semejantes estos cuatro triángulos al triángulo original?

b) ¿Y son semejantes estos cuatro triángulos entre sí?

c) Halla, en cada caso, la razón de semejanza de los triángulos.



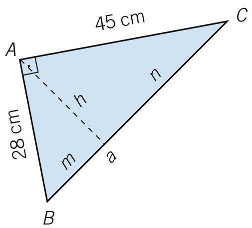
a) Son semejantes, ya que los cuatro triángulos son equiláteros.

b) Son semejantes, ya que los cuatro triángulos son equiláteros.

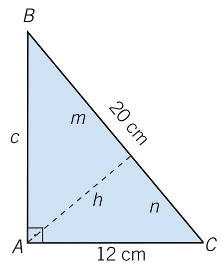
c) La razón entre el triángulo original y los nuevos triángulos es 0,5; y la razón entre los nuevos triángulos es 1.

055 Calcula los valores que faltan en los siguientes triángulos rectángulos.

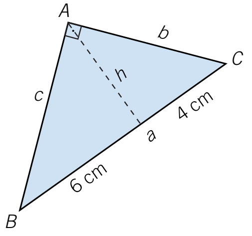
a)



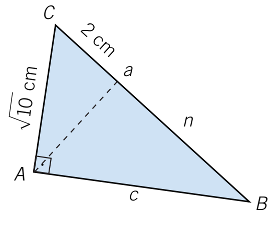
c)



b)



d)



a) $a = \sqrt{28^2 + 45^2} = 53$ cm

$m = \dfrac{28^2}{53} = 14,79$ cm

$n = \dfrac{45^2}{53} = 38,21$ cm

$h = \sqrt{14,79 \cdot 38,21} = 23,77$ cm

b) $h = \sqrt{6 \cdot 4} = 4,9$ cm

$c = \sqrt{6^2 + 4,9^2} = 7,75$ cm

$b = \sqrt{4^2 + 4,9^2} = 6,32$ cm

$a = 6 + 4 = 10$ cm

c) $c = \sqrt{20^2 - 12^2} = 16$ cm

$m = \dfrac{16^2}{20} = 12,8$ cm

$n = \dfrac{12^2}{20} = 7,2$ cm

$h = \sqrt{12,8 \cdot 7,2} = 9,6$ cm

d) $h = \sqrt{\left(\sqrt{10}\right)^2 - 2^2} = 2,45$ cm

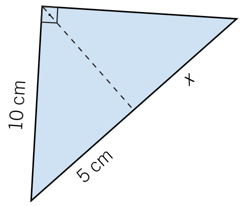
$n = \dfrac{2,45^2}{2} = 3$ cm

$a = 3 + 2 = 5$ cm

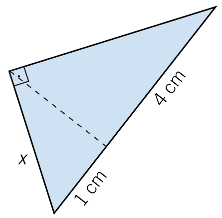
$c = \sqrt{5^2 - \left(\sqrt{10}\right)^2} = 3,87$ cm

056 Calcula x en cada caso.

a)



b)



a) $h = \sqrt{10^2 - 5^2} = 8{,}66$ cm

$x = \dfrac{8{,}66^2}{5} = 15$ cm

b) $h = \sqrt{1 \cdot 4} = 2$ cm

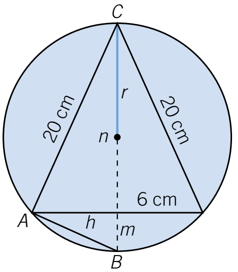
$x = \sqrt{2^2 + 1^1} = 2{,}24$ cm

057 En un triángulo rectángulo isósceles, la altura trazada sobre la hipotenusa es la mitad de la hipotenusa. ¿Por qué?

Siendo la hipotenusa a, las dos proyecciones miden $\dfrac{a}{2}$.

$$h = \sqrt{\frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2}} = \sqrt{\frac{a^2}{4}} = \frac{a}{2}$$

058 ¿Cuánto mide el radio de esta circunferencia?



$n = \sqrt{20^2 - 6^6} = 17{,}08$ cm

$m = \dfrac{6^2}{17{,}08} = 2{,}11$ cm

$2r = m + n = 17{,}08 + 2{,}11 = 19{,}19$ cm

$r = \dfrac{19{,}19}{2} = 9{,}6$ cm

059 ¿Cuánto mide la sombra proyectada por un árbol de 15 m de altura, sabiendo que en ese mismo momento otro árbol de 8 m de altura proyecta una sombra de 10 m?

$\dfrac{15}{8} = \dfrac{x}{10} \rightarrow x = 18{,}75$ m

La sombra del árbol mide 18,75 m.

060 Una antena está sujeta con dos cables que forman entre sí un ángulo de 90° y miden 8 y 5 m, respectivamente. ¿A qué altura se enganchan a la antena?

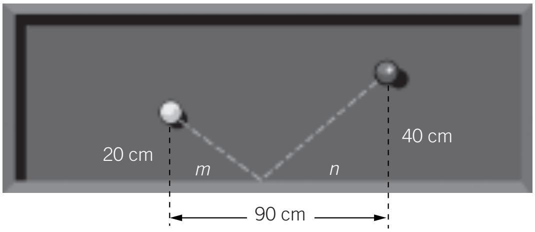
$a = \sqrt{8^2 + 5^2} = 9{,}43$ m

$m = \dfrac{8^2}{9{,}43} = 6{,}78$ m

$h = \sqrt{8^2 - 6{,}78^2} = 4{,}25$ m

La altura a la que se enganchan los cables es de 4,25 m.

061 ¿En qué punto debe golpear la bola blanca a la banda para que el rebote dé a la bola roja?



Tenemos que $m + n = 90$. Al golpear sin efecto, $\hat{A} = \hat{B}$ y, por tanto, los triángulos son semejantes.

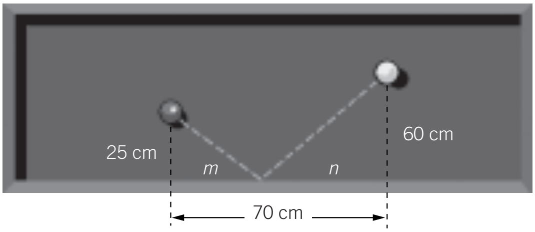
$$\frac{40}{n} = \frac{20}{m} \rightarrow 40m = 20n \rightarrow n = 2m$$

Sustituyendo el valor en la primera ecuación, resulta:

$$m + n = 90 \rightarrow m + 2m = 90 \rightarrow 3m = 90 \rightarrow m = 30$$

Es decir, tenemos que $m = 30$ cm y $n = 60$ cm.

062 Calcula dónde debe golpear la bola roja a la banda para que el rebote alcance a la bola blanca.



Si jugáramos con la bola blanca para alcanzar a la roja, ¿en qué punto de la banda tendríamos que golpear?

$$\frac{60}{n} = \frac{25}{m} \rightarrow 60m = 25n \rightarrow m = \frac{5}{12}n$$

Como $m + n = 70$, resulta:

$$\begin{cases} m + n = 70 \\ m = \dfrac{5}{12}n \end{cases}$$

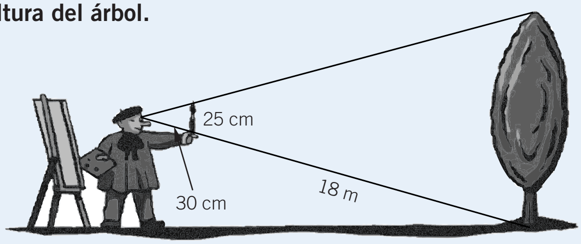
$$m + n = 70 \rightarrow \frac{5}{12}n + n = 70 \rightarrow \frac{17}{12}n = 70 \rightarrow n = \frac{70 \cdot 12}{17} = 49{,}4 \text{ cm}$$

Es decir, tenemos que $m = 20{,}6$ cm y $n = 49{,}4$ cm.

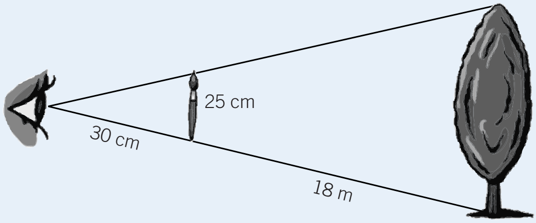
063 **HAZLO ASÍ**

¿CÓMO SE CALCULAN DISTANCIAS POR EL *MÉTODO DEL PINTOR*?

Calcula la altura del árbol.



PRIMERO. Se forman dos triángulos en posición de Tales y se escribe la proporción.

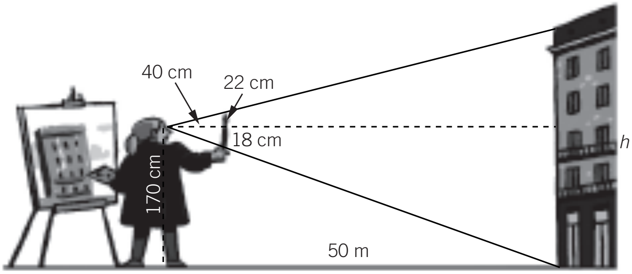


$$\frac{0,25}{h} = \frac{0,3}{18}$$

SEGUNDO. Se resuelve la ecuación que resulta.

$$\frac{0,25}{h} = \frac{0,3}{18} \rightarrow h = \frac{0,25 \cdot 18}{0,3} = 15 \text{ m}$$

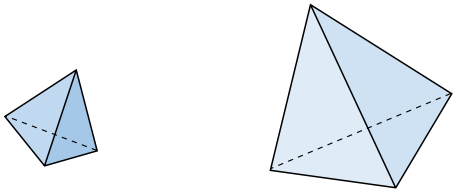
064 ●● **Calcula la altura del edificio si el pincel mide 22 cm y está a 40 cm del ojo.**



$$\frac{0,4}{50} = \frac{0,22}{h}$$

$$h = \frac{0,22 \cdot 50}{0,4} = 27,5 \text{ m}$$

065 Dados los dos poliedros de la figura, responde.



a) ¿Son semejantes? ¿Cuál es la razón de las aristas?
b) ¿Y la razón de las áreas de sus caras?
c) ¿Cuál es la razón de los volúmenes?

a) Las dos figuras son semejantes, porque tienen los ángulos iguales y los lados proporcionales.

b) La razón de las aristas es $r = 2$.

c) La razón de semejanza de las áreas de las caras es $2^2 = 4$.

d) La razón de los volúmenes es $2^3 = 8$.

066 **Una estatua mide 10 m de altura y pesa 200 kg. ¿Cuánto pesará una reproducción del mismo material que mida 22 cm de altura?**

La razón entre las longitudes es: $r = \frac{0{,}22}{10} = 0{,}022$.

Al igual que el volumen, el peso tendrá de razón: $r' = (0{,}022)^3$, de manera que el peso de la reproducción es: $200 \cdot (0{,}022)^3 = 0{,}002$ kg $= 2$ g.

067 **Una esfera de vidrio tiene un radio de 4 cm, y una canica de vidrio tiene un diámetro de 1 cm. Encuentra la razón entre sus volúmenes.**

El volumen de la esfera de radio 4 cm es:

$$V_1 = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\cdot\pi\cdot 4^3 = \frac{256}{3}\pi \text{ cm}^3$$

El volumen de la canica de diámetro 1 cm ($r = 0{,}5$ cm) es:

$$V_2 = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\cdot\pi\cdot 0{,}5^3 = \frac{1}{6}\pi \text{ cm}^3$$

Como la razón de los volúmenes de dos cuerpos geométricos semejantes es igual al cubo de la razón de semejanza:

$$V_1 = r^3 \cdot V_2 \rightarrow r^3 = \frac{V_1}{V_2} = \frac{\frac{256}{3}\pi}{\frac{1}{6}\pi} = 512$$

La razón es: $r = \sqrt[3]{512} = 8$.

Se puede comprobar que la razón es 8 calculando el cociente entre los radios de las dos circunferencias:

$$\frac{4}{0{,}5} = 8$$

068 **Una pelota de balonmano tiene doble diámetro que una pelota de tenis. ¿Cuál es la relación entre sus volúmenes?**

Si r es el radio de la pelota de tenis, $2r$ es el radio de la pelota de balonmano.

$$V_1 = \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$V_2 = \frac{4}{3}\pi \cdot (2r)^3 = \frac{32}{3}\pi r^3$$

Como la razón de los volúmenes de dos cuerpos geométricos semejantes es igual al cubo de la razón de semejanza, r':

$$V_1 = r'^3 \cdot V_2 \rightarrow r' = \frac{V_1}{V_2} = \frac{\frac{4}{3}\pi r^3}{\frac{32}{3}\pi r^3} = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}$$

Es decir, la razón entre sus volúmenes es $r' = 0{,}125$.

069 **La superficie acristalada de un invernadero mide 270 m². ¿Qué cantidad de cristal se necesita para construir una maqueta del invernadero a escala 1 : 20?**

La razón de semejanza es: $r = \frac{1}{20} = 0{,}05$.

Por tanto, la superficie acristalada de la maqueta es:

$$A = r^2 \cdot A_{\text{real}} = (0{,}05)^2 \cdot 270 = 0{,}675 \text{ m}^2$$

070 **Queremos hacer un armario en miniatura, semejante a otro cuyas medidas son 180 × 110 × 45 cm. Siendo la altura de 13,5 cm, calcula.**

a) Ancho y profundidad del armario en miniatura.

b) Razón de semejanza entre los volúmenes.

c) Razón de semejanza entre las áreas laterales.

a) La razón de semejanza de las aristas es:

$$r = \frac{13{,}5}{180} = 0{,}075$$

Ancho $= 110 \cdot 0{,}075 = 8{,}25$ cm
Profundidad $= 48 \cdot 0{,}075 = 3{,}6$ cm

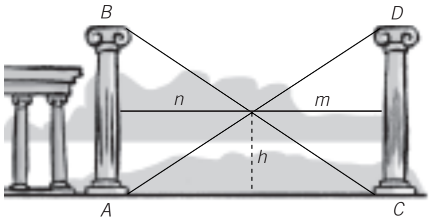
b) La razón de semejanza de los volúmenes es:

$$r' = r^3 = (0{,}075)^3 = 0{,}000421875$$

c) La razón de semejanza de las áreas laterales es:

$$r'' = r^2 = (0{,}075)^2 = 0{,}005625$$

071 Demuestra que no influye la distancia de separación de las columnas ***AB*** **y** ***CD*** **para calcular la altura** ***h*****. ¿Cuánto mide la altura?**



$$\frac{\overline{AB}}{\overline{CB}} = \frac{n}{m}$$

$$\frac{\overline{AB}}{h} = \frac{m+n}{m} \rightarrow \frac{\overline{AB}}{h} = \frac{m}{m} + \frac{n}{m}$$

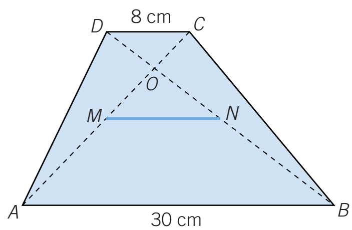
$$\rightarrow \frac{\overline{AB}}{h} = 1 + \frac{\overline{AB}}{\overline{CB}}$$

$$\rightarrow \frac{\overline{AB}}{h} = \frac{\overline{CB} + \overline{AB}}{\overline{CB}}$$

$$\rightarrow h = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{CD}}{\overline{AB} + \overline{CD}}$$

El valor de h solo depende de la longitud de $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$.

072 **Calcula la longitud del segmento** ***MN*****, siendo** ***M*** **y** ***N*** **los puntos medios de las diagonales.**



$$\frac{\overline{OC}}{\overline{OA}} = \frac{8}{30} \xrightarrow{+1} \frac{\overline{OC}}{\overline{OA}} + 1 = \frac{8}{30} + 1 \rightarrow \frac{\overline{OC}}{\overline{OA}} + \frac{\overline{OA}}{\overline{OA}} = \frac{38}{30} \rightarrow \frac{\overline{AC}}{\overline{OA}} = \frac{38}{30} \rightarrow \frac{\overline{OA}}{\overline{AC}} = \frac{30}{38}$$

$$\frac{\overline{OA}}{\overline{OC}} = \frac{30}{8} \xrightarrow{+1} \frac{\overline{OA}}{\overline{OC}} + 1 = \frac{30}{8} + 1 \rightarrow \frac{\overline{OA}}{\overline{OC}} + \frac{\overline{OC}}{\overline{OC}} = \frac{38}{8} \rightarrow \frac{\overline{AC}}{\overline{OC}} = \frac{38}{8} \rightarrow \frac{\overline{OC}}{\overline{AC}} = \frac{8}{38}$$

$$\overline{OM} + \overline{CO} = \frac{\overline{CA}}{2} \rightarrow \overline{OM} = \frac{\overline{CA}}{2} - \overline{CO} \rightarrow \frac{\overline{OM}}{\overline{AC}} = \frac{\frac{\overline{CA}}{2} - \overline{CO}}{\overline{AC}} = \frac{1}{2} - \frac{8}{38} = \frac{11}{38}$$

$$\frac{\overline{OA}}{\overline{OM}} = \frac{\frac{\overline{OA}}{\overline{AC}}}{\frac{\overline{OM}}{\overline{AC}}} = \frac{\frac{30}{38}}{\frac{11}{38}} = \frac{30}{11} \rightarrow \frac{\overline{OA}}{\overline{OM}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{MN}} \rightarrow \frac{30}{11} = \frac{30}{\overline{MN}} \rightarrow \overline{MN} = 11 \text{ cm}$$

073 **Obtén el teorema de Pitágoras utilizando solamente el teorema del cateto. ¿Se podría demostrar utilizando solo el teorema de la altura?**

Mediante el teorema del cateto:

$$\left.\begin{array}{l} c^2 = m \cdot a \\ b^2 = n \cdot a \end{array}\right\} \begin{array}{l} \rightarrow c^2 + b^2 = m \cdot a + n \cdot a \\ \rightarrow c^2 + b^2 = (m+n) \cdot a \xrightarrow{a=m+n} c^2 + b^2 = a^2 \end{array}$$

Únicamente con el teorema de la altura no se puede demostrar, ya que no intervienen los catetos, y necesitaríamos aplicar también el teorema del cateto.

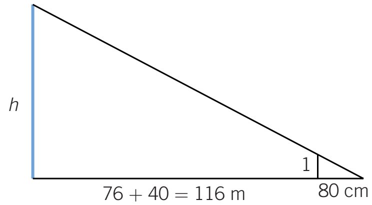
EN LA VIDA COTIDIANA

074 ●●●

Se ha colocado una antena cerca de un edificio de viviendas. La comunidad de vecinos piensa que la zona de acceso restringido es insuficiente para garantizar su seguridad.

Algunos vecinos aseguran que si la antena se cayera afectaría al edificio.

El informe municipal afirma que no existe ningún riesgo. ¿Es correcta esta información?



$$\frac{h}{1} = \frac{116}{0{,}8} \rightarrow h = 145 \text{ m}$$

La altura de la antena es de 145 m.

Y la distancia de la antena al edificio es: $76 + 38 = 114$ m.

Por tanto, si la antena cayese podría afectar al edificio, pues la distancia es menor que la altura de la antena. La conclusión del informe municipal no es correcta.

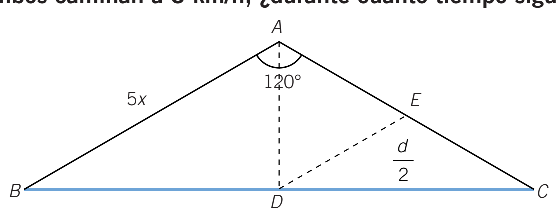
075 ●●

Gema y Manuel son hermanos gemelos, y les han regalado unos *walkie-talkies* el día de su cumpleaños.

Los hermanos no se separan de su regalo ni un momento.

Deciden ir a sus destinos por calles que forman un ángulo de 120° y se llevan los *walkie-talkies*.

Si ambos caminan a 5 km/h, ¿durante cuánto tiempo siguen recibiendo la señal?



Si x es el tiempo que caminan, la distancia que recorre cada hermano es $5x$.

Los triángulos $\widehat{ABC}$ y $\widehat{EDC}$ son semejantes, luego $|\overline{DE}| = \dfrac{5x}{2}$.

$$|\overline{DE}| = |\overline{AD}| \rightarrow |\overline{AD}| = \frac{5x}{2}$$

Aplicamos ahora el teorema de Pitágoras:

$$\overline{AD}^2 + \overline{DC}^2 = \overline{AC}^2 \rightarrow \frac{25x^2}{4} + \overline{DC}^2 = 25x^2 \rightarrow \overline{DC}^2 = 25x^2 - \frac{25x^2}{4} = \frac{75}{4}x^2$$

$$\overline{DC} = \sqrt{\frac{75}{4}x^2} = \frac{5\sqrt{3}}{2}x = 4{,}33x \rightarrow \overline{BC} = 5\sqrt{3} \cdot x = 8{,}66x$$

$$8{,}66x = 10 \rightarrow x = \frac{10}{8{,}66} = 1{,}1547 = 1 \text{ h } 9 \text{ min } 17 \text{ s}$$

Los hermanos dejarán de comunicarse al transcurrir 1 h 9 min 17 s, es decir, tras recorrer esta distancia: $5 \cdot 1{,}1547 = 5{,}773$ km.

8 Trigonometría

RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE UN ÁNGULO

- SENO
- COSENO
- TANGENTE

RELACIONES ENTRE LAS RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE UN ÁNGULO

- $sen^2 \alpha + cos^2 \alpha = 1$
- $\dfrac{sen\ \alpha}{cos\ \alpha} = tg\ \alpha$

RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE 30°, 45° Y 60°

- RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE UN ÁNGULO CUALQUIERA

REDUCCIÓN DE ÁNGULOS AL PRIMER CUADRANTE

- COMPLEMENTARIO
- SUPLEMENTARIO
- OPUESTO

Las Bocas del Cielo

Seguro que tenía poderes mágicos. Aquel cofre de ébano con adornos de plata ejercía sobre él tal atracción que daría lo que fuera por averiguar el contenido que su maestro, Claudio Ptolomeo, guardaba en él celosamente.

El momento había llegado y su corazón amenazaba con escaparse por su boca. Ptolomeo, por fin, había terminado su trabajo y se disponía a desvelar el misterio. El joven, Nemes, lo acuciaba hablando sin parar.

–¿Sabéis, maestro? Siempre he deseado ver el tesoro del cofre. A veces soñaba que podía hacerme tan pequeño como para entrar por la cerradura y al hacerlo el mundo entero estaba dentro, y corría mil aventuras, y… ¡por favor, decidme lo que hay!

Ptolomeo no pudo contener una risita y mientras abría el cofre, con gran solemnidad, le dijo:

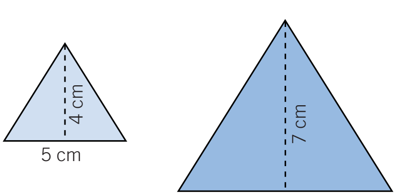
–Aquí tienes todo el mundo: sus mares y sus tierras, sus ríos y sus desiertos, sus montañas y sus valles.

Nemes no podía dar crédito a lo que veía: un mapa que representaba todo el mundo. Recorrió el Nilo con su dedo y, de repente, exclamó:

–El nacimiento de la divinidad es como dicen los sacerdotes: «Encontrarás las Bocas del Cielo más allá de las Montañas de la Luna». Pero, ¿cómo habéis sido capaz de saber el lugar exacto si nunca habéis estado en esos lugares?

–Hablo con los viajeros, algunos miden los ángulos con los que ven algunas estrellas, y eso me da la situación exacta: a ángulos iguales les corresponden distancias semejantes.

La altura sobre el lado desigual, que mide 5 cm, de un triángulo isósceles es 4 cm. ¿Cuánto mediría otro semejante si la altura fuera 7 cm?



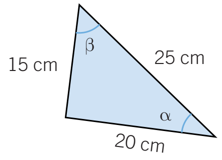
$$\frac{4}{5} = \frac{7}{x} \rightarrow x = \frac{5 \cdot 7}{4} = 8{,}75 \text{ cm}$$

Trigonometría

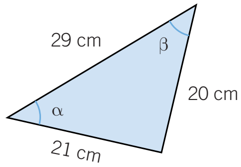
EJERCICIOS

001 **Calcula las razones trigonométricas de los ángulos α y β.**

a)



b)



a) $sen\,\alpha = \dfrac{15}{25} = 0{,}6$ $\quad$ $sen\,\beta = \dfrac{20}{25} = 0{,}8$

$cos\,\alpha = \dfrac{20}{25} = 0{,}8$ $\quad$ $cos\,\beta = \dfrac{15}{25} = 0{,}6$

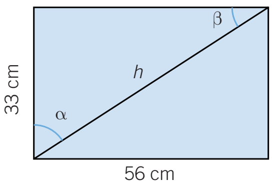
$tg\,\alpha = \dfrac{15}{20} = 0{,}75$ $\quad$ $tg\,\beta = \dfrac{20}{15} = 1{,}33$

b) $sen\,\alpha = \dfrac{20}{29} = 0{,}69$ $\quad$ $sen\,\beta = \dfrac{21}{29} = 0{,}72$

$cos\,\alpha = \dfrac{21}{29} = 0{,}72$ $\quad$ $cos\,\beta = \dfrac{20}{29} = 0{,}69$

$tg\,\alpha = \dfrac{20}{21} = 0{,}95$ $\quad$ $tg\,\beta = \dfrac{21}{20} = 1{,}05$

002 **Halla las razones trigonométricas de los ángulos.**



$$h = \sqrt{56^2 + 33^2} = 65\text{ cm}$$

$sen\,\alpha = \dfrac{56}{65} = 0{,}86$ $\quad$ $sen\,\beta = \dfrac{33}{65} = 0{,}51$

$cos\,\alpha = \dfrac{33}{65} = 0{,}51$ $\quad$ $cos\,\beta = \dfrac{56}{65} = 0{,}86$

$tg\,\alpha = \dfrac{56}{33} = 1{,}7$ $\quad$ $tg\,\beta = \dfrac{33}{56} = 0{,}59$

003 **Razona por qué las razones trigonométricas de un ángulo no dependen del triángulo que escogemos.**

Si las razones no dependen del triángulo es porque son triángulos semejantes, y el cociente de sus lados es constante.

004 **Calcula el resto de razones trigonométricas conociendo la que se indica.**

a) $sen\ \alpha = 0{,}3$ **b)** $sen\ \beta = 0$ **c)** $cos\ \gamma = 0{,}4$ **d)** $tg\ \delta = 2$

a) $sen^2\ \alpha + cos^2\alpha = 1 \rightarrow (0{,}3)^2 + cos^2\ \alpha = 1$

$\rightarrow cos\ \alpha = \sqrt{1-(0{,}3)^2} = \sqrt{0{,}91} = 0{,}95$

$tg\ \alpha = \dfrac{sen\ \alpha}{cos\ \alpha} \rightarrow tg\ \alpha = \dfrac{0{,}3}{0{,}95} = 0{,}32$

b) $sen^2\ \beta + cos^2\ \beta = 1 \rightarrow 0 + cos^2\ \beta = 1 \rightarrow cos\ \beta = \sqrt{1} \rightarrow \begin{cases} cos\ \beta = 1 \\ cos\ \beta = -1 \end{cases}$

$tg\ \beta = \dfrac{sen\ \beta}{cos\ \beta} = 0$

c) $sen^2\ \gamma + cos^2\ \gamma = 1 \rightarrow sen^2\ \gamma + (0{,}4)^2 = 1$

$\rightarrow sen\ \gamma = \sqrt{1-0{,}16} = \sqrt{0{,}84} = 0{,}92$

$tg\ \gamma = \dfrac{sen\ \gamma}{cos\ \gamma} \rightarrow tg\ \gamma = \dfrac{0{,}92}{0{,}4} = 2{,}3$

d) $\left.\begin{aligned} sen^2\ \delta + cos^2\ \delta &= 1 \\ \dfrac{sen\ \delta}{cos\ \delta} &= 2 \end{aligned}\right\} \xrightarrow{sen\ \delta = 2 \cdot cos\ \delta} (2 \cdot cos\ \delta)^2 + cos^2\ \delta = 1$

$\rightarrow 5 \cdot cos^2\ \delta = 1 \rightarrow cos\ \delta = \dfrac{1}{\sqrt{5}} = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$

$sen\ \delta = 2 \cdot cos\ \delta \rightarrow sen\ \delta = 2 \cdot \dfrac{\sqrt{5}}{5} = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

005 **¿Existe algún ángulo con $sen\ \alpha = 0{,}4$ y $cos\ \alpha = 0{,}6$? Justifica la respuesta.**

$sen^2\ \alpha + cos^2\ \alpha = 1$

$(0{,}4)^2 + (0{,}6)^2 = 0{,}16 + 0{,}36 = 0{,}52 \neq 1 \rightarrow$ No existe.

006 **¿Hay algún ángulo con $tg\ \alpha = 2$ y cuyo seno sea el doble que el coseno?**

$tg\ \alpha = \dfrac{sen\ \alpha}{cos\ \alpha} = 2 \rightarrow sen\ \alpha = 2 \cdot cos\ \alpha \rightarrow$ Sí existe.

007 **Calcula el valor de las siguientes expresiones.**

a) $cos\ 30° - sen\ 60° + tg\ 45°$ **c)** $tg\ 60° + sen\ 45° - cos^2\ 30°$

b) $cos^2\ 60° - sen^2\ 45°$ **d)** $tg\ 30° + tg\ 60° - sen\ 30° \cdot cos\ 30°$

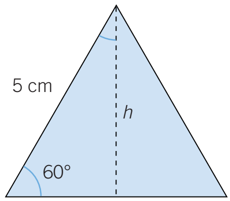
a) $cos\ 30° - sen\ 60° + tg\ 45° = \dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2} + 1 = 1$

b) $cos^2\ 60° - sen^2\ 45° = \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{2} = -\dfrac{1}{4}$

c) $tg\ 60° + sen\ 45° - cos^2\ 30° = \sqrt{3} + \dfrac{\sqrt{2}}{2} - \dfrac{3}{4} = \dfrac{4\sqrt{3} + 2\sqrt{2} - 3}{4}$

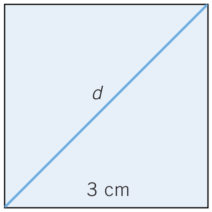
d) $tg\ 30° + tg\ 60° - sen\ 30° \cdot cos\ 30° = \dfrac{\sqrt{3}}{3} + \sqrt{3} - \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{13\sqrt{3}}{12}$

008 **Determina la altura de un triángulo equilátero de lado 5 cm, sin aplicar el teorema de Pitágoras.**



$$h = 5 \cdot sen\ 60° = 5 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{5\sqrt{3}}{2}\ \text{cm}$$

009 **Halla, utilizando las razones trigonométricas, la diagonal de un cuadrado de 3 cm de lado.**



$$d = \frac{3}{sen\ 45°} = \frac{3}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{6}{\sqrt{2}} = \frac{6\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}\ \text{cm}$$

010 **Razona en qué cuadrante está cada ángulo.**

a) $sen\ \alpha = 0{,}8$, $cos\ \alpha = -0{,}6$ **b)** $sen\ \beta = -0{,}8$, $cos\ \beta = -0{,}6$ **c)** $sen\ \gamma = 0{,}5$, $tg\ \gamma = 0{,}57$

a) Segundo cuadrante b) Tercer cuadrante c) Primer cuadrante

011 **Indica el signo que tienen las razones trigonométricas de estos ángulos.**

a) 66° b) 175° c) 342° d) 18° e) 135°

a) Todas sus razones son positivas.
b) Seno positivo, coseno y tangente negativos.
c) Coseno positivo, seno y tangente negativos.
d) Todas sus razones son positivas.
e) Seno positivo, coseno y tangente negativos.

012 **¿Por qué no existe *tg* 90°? ¿Sucede esto con los ángulos cuya amplitud es un múltiplo de 90°?**

No existe, porque $cos\ 90° = 0$.
Esto sucede con los ángulos de la forma $90° + n \cdot 180°$, con n un número entero.

013 **Calcula las razones trigonométricas de los siguientes ángulos, teniendo en cuenta que *cos* 50° = 0,6428.**

a) 140° b) 130° c) 230° d) 310°

a) $sen\ 140° = cos\ 50° = 0{,}6428$
$cos\ 140° = -sen\ 50° = -0{,}766$
$tg\ 140° = -\frac{1}{tg\ 50°} = -0{,}839$

b) $sen\ 130° = sen\ 50° = 0{,}766$
$cos\ 130° = -cos\ 50° = -0{,}6428$
$tg\ 130° = -tg\ 50° = -1{,}1917$

c) $sen\ 230° = -sen\ 50° = -0{,}766$
$cos\ 230° = -cos\ 50° = -0{,}6428$
$tg\ 230° = tg\ 50° = 1{,}1917$

d) $sen\ 310° = -sen\ 50° = -0{,}766$
$cos\ 310° = cos\ 50° = 0{,}6428$
$tg\ 310° = -tg\ 50° = -1{,}1917$

014 **Si sabemos que *sen* 25° = 0,4226; ¿cuáles son las razones trigonométricas de un ángulo cuya amplitud es 205°?**

$$sen^2\ 25° + cos^2\ 25° = 1 \rightarrow cos\ 25° = \sqrt{1-(0{,}4226)^2} = 0{,}9063$$

$$205° = 180° + 25° \rightarrow \begin{cases} sen\ 205° = -sen\ 25° = -0{,}4226 \\ cos\ 205° = -cos\ 25° = -0{,}9063 \\ tg\ 205° = tg\ 25° = \dfrac{-0{,}4226}{-0{,}9063} = 0{,}4663 \end{cases}$$

015 **Calcula las razones trigonométricas de 70°, sabiendo que *cos* 110° = −0,342.**

$$sen^2\ 110° + cos^2\ 110° = 1$$
$$\rightarrow sen\ 110° = \sqrt{1-cos^2\ 110°} = \sqrt{1-(-0{,}342)^2} = 0{,}94$$

$$70° = 180° - 110° \rightarrow \begin{cases} sen\ 70° = sen\ 110° = 0{,}94 \\ cos\ 70° = -cos\ 110° = 0{,}342 \\ tg\ 70° = \dfrac{sen\ 70°}{cos\ 70°} = \dfrac{0{,}94}{0{,}342} = 2{,}75 \end{cases}$$

016 **Expresa las razones trigonométricas de estos ángulos en función de las razones de otros ángulos del 1.^er^ cuadrante.**

a) 475° **c) 1.130°** **e) 1.215°**
b) 885° **d) 695°** **f) 985°**

a) $475° = 360° + 90° + 25°$
$sen\ 475° = cos\ 25°$
$cos\ 475° = -sen\ 25°$
$tg\ 475° = -\dfrac{1}{tg\ 25°}$

b) $885° = 2 \cdot 360° + 90° + 75°$
$sen\ 885° = cos\ 75°$
$cos\ 885° = -sen\ 75°$
$tg\ 885° = -\dfrac{1}{tg\ 75°}$

c) $1.130° = 3 \cdot 360° + 50°$
$sen\ 1.130° = sen\ 50°$
$cos\ 1.130° = cos\ 50°$
$tg\ 1.130° = tg\ 50°$

d) $695° = 2 \cdot 360° - 25°$
$sen\ 695° = -sen\ 25°$
$cos\ 695° = cos\ 25°$
$tg\ 695° = -tg\ 25°$

e) $1.215° = 3 \cdot 360° + 90° + 45°$
$sen\ 1.215° = cos\ 45°$
$cos\ 1.215° = -sen\ 45°$
$tg\ 1.215° = -\dfrac{1}{tg\ 45°}$

f) $985° = 2 \cdot 360° + 180° + 85°$
$sen\ 985° = -sen\ 85°$
$cos\ 985° = -cos\ 85°$
$tg\ 985° = tg\ 85°$

017 **Sabiendo que *sen* $\alpha = 0{,}2$; calcula.**

a) $sen\,(90° - \alpha)$ **b)** $sen\,(180° - \alpha)$ **c)** $sen\,(-\alpha)$

a) $sen\,(90° - \alpha) = cos\,\alpha = 0{,}98$

b) $sen\,(180° - \alpha) = sen\,\alpha = 0{,}2$

c) $sen\,(-\alpha) = -sen\,\alpha = -0{,}2$

018 **Si *sen* $18° = 0{,}309$ y *cos* $18° = 0{,}951$; halla.**

a) $sen\,72°$ **b)** $cos\,162°$ **c)** $tg\,(-72°)$

a) $sen\,72° = cos\,18° = 0{,}951$

b) $cos\,162° = -cos\,18° = -0{,}951$

c) $tg\,(-72°) = -\dfrac{1}{tg\,18°} = -3{,}077$

019 **Determina la relación entre los ángulos α y β si sus razones trigonométricas cumplen estas condiciones.**

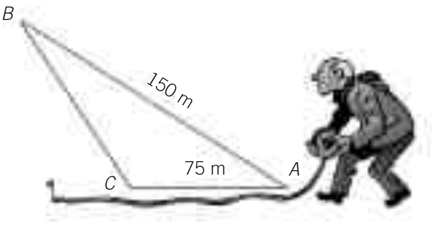
a) $sen\,\alpha = cos\,\beta$ **b)** $cos\,\alpha = cos\,\beta$ **c)** $sen\,\alpha = sen\,\beta$

a) $\alpha = 90° \pm \beta$

b) $\alpha = n \cdot 360° \pm \beta$

c) $\alpha = 180° - \beta$

020 **¿Cuál es el área del triángulo, si $\hat{A} = 30°$?**



$$h = 75 \cdot sen\,30° = 75 \cdot \frac{1}{2} = 37{,}5 \text{ m}$$

$$A = \frac{150 \cdot 37{,}5}{2} = 2.812{,}5 \text{ m}^2$$

021 **Halla el área de un hexágono regular de 4 cm de lado.**

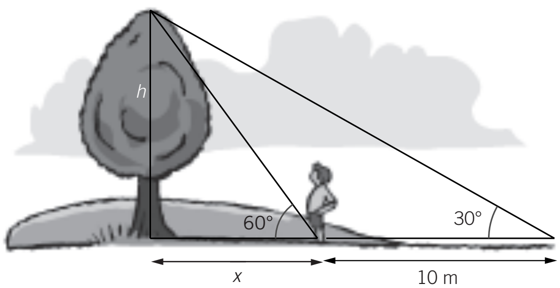
$\alpha = 60°$

$$A = \frac{4 \cdot 4 \cdot sen\,60°}{2} \cdot 6 = \frac{16 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2}}{2} \cdot 6 = 24 \cdot \sqrt{3} = 41{,}57 \text{ cm}^2$$

022 **Calcula el área de un triángulo isósceles cuyos lados iguales miden 8 cm y el ángulo desigual mide 45°.**

$$A = \frac{8 \cdot 8 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = 16 \cdot \sqrt{2} = 22{,}63 \text{ cm}^2$$

023 **Félix quiere medir uno de los árboles que hay al lado de su casa. Para ello ha pedido prestado un teodolito y ha medido algunos ángulos y distancias. ¿Cuánto mide el árbol?**



$$\left.\begin{array}{l} x \cdot tg\ 60° = h \\ (x+10) \cdot tg\ 30° = h \end{array}\right\} \rightarrow x\sqrt{3} = (x+10) \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} \rightarrow x \cdot 2\sqrt{3} = 10 \cdot \sqrt{3} \rightarrow x = 5 \text{ m}$$

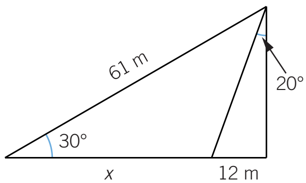
$$h = 5 \cdot \sqrt{3} = 8{,}66 \text{ m}$$

024 **Calcula el área de una parcela triangular, sabiendo que dos de sus lados miden 20 m y 30 m, y que los ángulos distintos al comprendido entre ellos miden 80° y 70°.**

El tercer ángulo mide: 180° − 80° − 70° = 30°.

$$A = \frac{30 \cdot 20 \cdot sen\ 30°}{2} = 150 \text{ m}^2$$

025 **Halla el valor de *x*.**



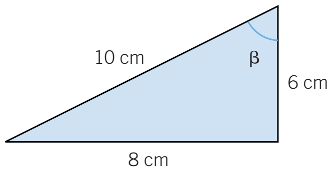
$$cos\ 30° = \frac{12+x}{61} \rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{12+x}{61} \rightarrow 61 \cdot \sqrt{3} = 24 + 2x$$

$$\rightarrow x = \frac{61 \cdot \sqrt{3} - 24}{2} = 40{,}8 \text{ m}$$

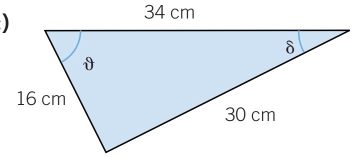
ACTIVIDADES

026 Calcula las razones trigonométricas de los ángulos marcados en cada caso.

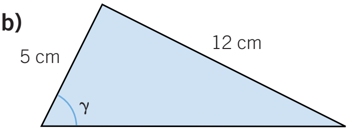
a)



c)



b)



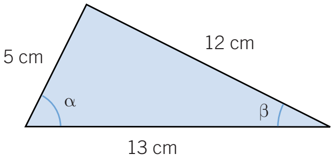
a) $sen\ \beta = \frac{8}{10}$ $\quad cos\ \beta = \frac{6}{10}$ $\quad tg\ \beta = \frac{8}{6}$

b) $sen\ \gamma = \frac{12}{13}$ $\quad cos\ \gamma = \frac{5}{13}$ $\quad tg\ \gamma = \frac{12}{5}$

c) $sen\ \delta = \frac{16}{34}$ $\quad cos\ \delta = \frac{30}{34}$ $\quad tg\ \delta = \frac{16}{30}$

$sen\ \vartheta = \frac{30}{34}$ $\quad cos\ \vartheta = \frac{16}{34}$ $\quad tg\ \vartheta = \frac{30}{16}$

027 **Las longitudes de los catetos de un triángulo rectángulo son 5 cm y 12 cm. Calcula las razones trigonométricas de los dos ángulos agudos del triángulo.**



$a = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13$ cm

$sen\ \alpha = \frac{12}{13} = 0{,}923$ $\quad cos\ \alpha = \frac{5}{13} = 0{,}385$ $\quad tg\ \alpha = \frac{12}{5} = 2{,}4$

$sen\ \beta = \frac{5}{13} = 0{,}385$ $\quad cos\ \beta = \frac{12}{13} = 0{,}923$ $\quad tg\ \beta = \frac{5}{12} = 0{,}417$

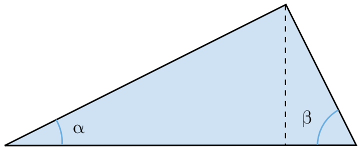
028 **Halla las razones trigonométricas de los dos ángulos de un triángulo rectángulo cuya hipotenusa mide 3 cm, y uno de sus catetos, 1 cm.**

$c = \sqrt{3^2 - 1^2} = \sqrt{8}$ cm

$sen\ \alpha = \frac{\sqrt{8}}{3}$ $\quad cos\ \alpha = \frac{1}{3}$ $\quad tg\ \alpha = \sqrt{8}$

$sen\ \beta = \frac{1}{3}$ $\quad cos\ \beta = \frac{\sqrt{8}}{3}$ $\quad tg\ \beta = \frac{\sqrt{2}}{4}$

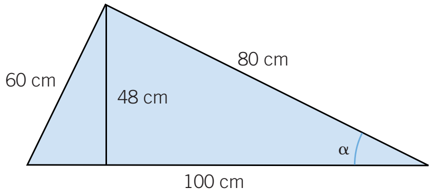
029 ● **Con ayuda de una regla graduada, halla el valor aproximado de las razones trigonométricas de los ángulos marcados.**



$$sen\ \alpha = \frac{2,1}{4,7} = 0,45 \qquad cos\ \alpha = \frac{4,1}{4,7} = 0,87 \qquad tg\ \alpha = \frac{2,1}{4,1} = 0,51$$

$$sen\ \beta = \frac{4,1}{4,7} = 0,87 \qquad cos\ \beta = \frac{2,1}{4,7} = 0,45 \qquad tg\ \beta = \frac{4,1}{2,1} = 1,96$$

030 ●● **Dado el siguiente triángulo rectángulo, calcula las razones trigonométricas del ángulo marcado, utilizando los triángulos mayor y menor. ¿Se obtiene el mismo resultado? Razónalo.**



Utilizando el triángulo mayor:

$$sen\ \alpha = \frac{60}{100} = 0,6 \qquad cos\ \alpha = \frac{80}{100} = 0,8 \qquad tg\ \alpha = \frac{60}{80} = 0,75$$

Utilizando el triángulo menor:

$$sen\ \alpha = \frac{48}{80} = 0,6 \qquad cos\ \alpha = \sqrt{1-(0,6)^2} = 0,8 \qquad tg\ \alpha = \frac{0,6}{0,8} = 0,75$$

El resultado es el mismo, ya que los dos triángulos son semejantes.

031 **HAZLO ASÍ**

¿CÓMO SE TRANSFORMAN GRADOS EN RADIANES, Y VICEVERSA?

¿Cuántos radianes son *n* grados? ¿Y cuántos grados son α radianes?

PRIMERO. Se plantea una regla de tres para calcular las cantidades desconocidas.

$$\begin{matrix} 360° & — & 2\pi \text{ rad} \\ n & — & x \text{ rad} \end{matrix} \qquad\qquad \begin{matrix} 360° & — & 2\pi \text{ rad} \\ y & — & \alpha \text{ rad} \end{matrix}$$

SEGUNDO. Al resolver las reglas de tres se obtienen las fórmulas para pasar de grados a radianes, y viceversa.

$$\left.\begin{matrix} 360° & — & 2\pi \text{ rad} \\ n & — & x \text{ rad} \end{matrix}\right\} \rightarrow x = \frac{n \cdot 2\pi \text{ rad}}{360} = n \cdot \frac{\pi}{180} \text{ rad}$$

$$\left.\begin{matrix} 360° & — & 2\pi \text{ rad} \\ y & — & \alpha \text{ rad} \end{matrix}\right\} \rightarrow y = \frac{360 \cdot \alpha}{2\pi} = \alpha \cdot \frac{180}{\pi} \text{ grados}$$

Así, por ejemplo:

$$30° = 30 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{6} \text{ rad} \qquad 1 \text{ rad} = 1 \cdot \frac{180}{\pi} = 57,296° = 57°\ 17'\ 45''$$

032 Transforma en radianes estos ángulos.

a) 45° **b)** 180° **c)** 30° **d)** 60°

a) $45° = \frac{\pi}{4}$ rad

b) $180° = \pi$ rad

c) $30° = \frac{\pi}{6}$ rad

d) $60° = \frac{\pi}{3}$ rad

033 Pasa a grados los siguientes ángulos.

a) $\frac{3\pi}{2}$ rad **b)** 0,33 rad **c)** $\frac{\pi}{4}$ rad **d)** 2 rad

a) 270° b) 18,91° c) 45° d) 114,64°

034 Calcula las razones trigonométricas de estos ángulos, sabiendo que:

a) $sen\ \alpha = 0{,}6$ **b)** $cos\ \alpha = 0{,}45$ **c)** $tg\ \alpha = 0{,}577$ **d)** $sen\ \alpha = \frac{1}{3}$

a) $sen\ \alpha = 0{,}6$
$cos\ \alpha = 0{,}8$
$tg\ \alpha = \frac{3}{4}$

b) $sen\ \alpha = 0{,}89$
$cos\ \alpha = 0{,}45$
$tg\ \alpha = 1{,}98$

c) $sen\ \alpha = 0{,}5$
$cos\ \alpha = 0{,}866$
$tg\ \alpha = 0{,}577$

d) $sen\ \alpha = \frac{1}{3}$
$cos\ \alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$
$tg\ \alpha = \frac{\sqrt{2}}{4}$

035 Halla el valor de las razones trigonométricas de los ángulos si:

a) $cos\ \alpha = \frac{1}{3}$ **b)** $sen\ \alpha = \frac{1}{6}$

a) $sen\ \alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$
$cos\ \alpha = \frac{1}{3}$
$tg\ \alpha = 2\sqrt{2}$

b) $sen\ \alpha = \frac{1}{6}$
$cos\ \alpha = \frac{\sqrt{35}}{6}$
$tg\ \alpha = \frac{\sqrt{35}}{35}$

036 Comprueba si son ciertas estas afirmaciones.

a) Si $sen\ \alpha = 0{,}45$; entonces $cos\ \alpha = 0{,}55$.

b) Si $tg\ \alpha = 1$; entonces $cos\ \alpha = sen\ \alpha$.

c) Si $sen\ \alpha = \frac{cos\ \alpha}{2}$; entonces $tg\ \alpha = 2$.

d) Si $cos\ \alpha = 0{,}8$; entonces $tg\ \alpha$ es menor que 1.

a) Falsa b) Verdadera c) Falsa d) Falsa

037 **HAZLO ASÍ**

¿CÓMO SE CALCULAN LAS RAZONES TRIGONOMÉTRICAS CON LA CALCULADORA?

Calcula *sen* α, *cos* α y *tg* α si $\alpha = 70°\ 42'\ 50''$.

PRIMERO. Se ajusta el Modo $\boxed{\text{MODE}}$, según se midan los ángulos en grados o radianes.

Grados $\longrightarrow$ $\boxed{\text{MODE}}\ \boxed{\text{DEG}}$

Radianes $\rightarrow$ $\boxed{\text{MODE}}\ \boxed{\text{RAD}}$

SEGUNDO. Se introduce el ángulo en la calculadora, especificando los grados, minutos y segundos.

$70\ \boxed{\circ\,'\,''}\quad 42\ \boxed{\circ\,'\,''}\quad 50\ \boxed{\circ\,'\,''}$

TERCERO. Se teclea la tecla correspondiente a la razón trigonométrica.

Seno $\longrightarrow$ $70\ \boxed{\circ\,'\,''}\ 42\ \boxed{\circ\,'\,''}\ 50\ \boxed{\text{sin}} = 0{,}94388\ldots$

Coseno $\longrightarrow$ $70\ \boxed{\circ\,'\,''}\ 42\ \boxed{\circ\,'\,''}\ 50\ \boxed{\text{cos}} = 0{,}33028\ldots$

Tangente $\longrightarrow$ $70\ \boxed{\circ\,'\,''}\ 42\ \boxed{\circ\,'\,''}\ 50\ \boxed{\text{tan}} = 2{,}85777\ldots$

En algunos tipos de calculadoras, la secuencia de teclas es diferente; primero se introduce la función ($\boxed{\text{sin}}\ \boxed{\text{cos}}\ \boxed{\text{tan}}$) y, después, el ángulo.

038 **Con la ayuda de la calculadora, determina las razones trigonométricas de los siguientes ángulos.**

a) 53° 36' 5''

b) 50° 12' 41''

c) 17° 42' 57''

d) 85° 50' 12

a) $sen\ \alpha = 0{,}805$
$cos\ \alpha = 0{,}593$
$tg\ \alpha = 1{,}356$

b) $sen\ \alpha = 0{,}768$
$cos\ \alpha = 0{,}64$
$tg\ \alpha = 1{,}2$

c) $sen\ \alpha = 0{,}304$
$cos\ \alpha = 0{,}953$
$tg\ \alpha = 0{,}319$

d) $sen\ \alpha = 0{,}997$
$cos\ \alpha = 0{,}073$
$tg\ \alpha = 13{,}738$

039 **Halla con la calculadora las razones trigonométricas de 48° y comprueba que se verifican las igualdades.**

a) $sen^2\ 48° + cos^2\ 48° = 1$

b) $tg\ 48° = \dfrac{sen\ 48°}{cos\ 48°}$

$sen\ \alpha = 0{,}743$
$cos\ \alpha = 0{,}669$
$tg\ \alpha = 1{,}11$

a) $(0{,}743)^2 + (0{,}669)^2 = 0{,}552 + 0{,}448 = 1$

b) $\dfrac{0{,}743}{0{,}669} = 1{,}11$

040 **Razona si existe un ángulo α que cumpla estas igualdades.**

$$\textit{sen}\ \alpha = \frac{1}{5} \quad \text{y} \quad \cos \alpha = \frac{1}{3}$$

No existe ningún ángulo que las cumpla, ya que:

$$\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{5}\right)^2 = \frac{1}{9} + \frac{1}{25} = \frac{34}{225} \neq 1$$

041 **Decide si existe algún ángulo para el que sus razones trigonométricas puedan tomar estos valores.**

a) $\textit{sen}\ \alpha = \frac{3}{2}$ b) $\textit{sen}\ \alpha = \pi$ c) $\textit{sen}\ \alpha = \frac{2}{5}$ d) $\textit{tg}\ \alpha = 0{,}5$

a) No es posible ($\textit{sen}\ \alpha > 1$).
b) No es posible ($\textit{sen}\ \alpha > 1$).
c) Es posible ($\textit{sen}\ \alpha < 1$).
d) Es posible.

042 **Razona si hay un ángulo α que cumpla estas igualdades.**

$$\textit{sen}\ \alpha = \frac{3}{5} \quad \text{y} \quad \textit{tg}\ \alpha = \frac{3}{4}$$

Halla las razones trigonométricas del ángulo α, sabiendo que $\textit{tg}\ \alpha = \textit{sen}\ \alpha$.

$$\cos \alpha = \frac{\textit{sen}\ \alpha}{\textit{tg}\ \alpha} = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{3}{4}} = \frac{4}{5}$$

$$\textit{sen}^2\ \alpha + \cos^2 \alpha = \left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{25}{25} = 1$$

Sí existe un ángulo con esas razones trigonométricas.

$\textit{sen}\ \alpha = \textit{tg}\ \alpha \rightarrow \cos \alpha = 1 \rightarrow \textit{sen}\ \alpha = 0 \rightarrow \textit{tg}\ \alpha = 0$

043 **Calcula las razones trigonométricas del ángulo agudo α, si $\textit{sen}\ \alpha = 2 \cdot \cos \alpha$.**

$$\textit{sen}\ \alpha = 2 \cdot \cos \alpha$$
$$1 = \textit{sen}^2\ \alpha + \cos^2 \alpha = 4 \cdot \cos^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 5 \cdot \cos^2 \alpha \rightarrow \cos \alpha = 0{,}447$$
$$\textit{sen}\ \alpha = 2 \cdot 0{,}447 = 0{,}894$$
$$\textit{tg}\ \alpha = \frac{2 \cdot \cos \alpha}{\cos \alpha} = 2$$

044 **Si $\cos \alpha = \textit{sen}\ \alpha$, halla cuánto valen sus razones trigonométricas, siendo α un ángulo agudo.**

$$\textit{sen}\ \alpha = \cos \alpha$$
$$1 = \textit{sen}^2\ \alpha + \cos^2 \alpha = \cos^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 2 \cdot \cos^2 \alpha \rightarrow \cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$\textit{sen}\ \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \textit{tg}\ \alpha = \frac{\textit{sen}\ \alpha}{\cos \alpha} = 1$$

045 Calcula el valor de las expresiones.

a) $sen\ 60° + sen\ 30° - tg\ 30°$

b) $sen^2\ 45° + cos^2\ 60° - sen^2\ 30°$

c) $tg\ 60° - tg\ 30°$

d) $cos\ 60° \cdot cos\ 30° + sen\ 60° \cdot sen\ 30°$

a) $sen\ 60° + sen\ 30° - tg\ 30° = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{3}+3}{6}$

b) $sen^2\ 45° + cos^2\ 60° - sen^2\ 30° = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$

c) $tg\ 60° - tg\ 30° = \sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

d) $cos\ 60° \cdot cos\ 30° + sen\ 60° \cdot sen\ 30° = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

046 Razona si estas igualdades son ciertas.

a) $sen^2\ 30° + cos^2\ 60° = \frac{1}{2}$

b) $3 \cdot tg\ 30° = tg\ 60°$

c) $sen\ 45° + cos\ 45° = 4\sqrt{2}$

d) $cos\ 30° + sen\ 60° = tg\ 30°$

a) Cierta: $sen^2\ 30° + cos^2\ 60° = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$

b) Cierta: $3 \cdot tg\ 30° = 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3} = tg\ 60°$

c) Falsa: $sen\ 45° + cos\ 45° = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} \neq 4\sqrt{2}$

d) Falsa: $cos\ 30° + sen\ 60° = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \neq tg\ 30°$

047 Comprueba que se verifica esta relación: $sen^2\ \alpha + cos^2\ \alpha = 1$, cuando α mide:

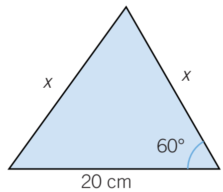
a) 30° b) 60° c) 45°

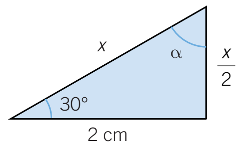
a) $sen^2\ 30° + cos^2\ 30° = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1$

b) $sen^2\ 60° + cos^2\ 60° = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = 1$

c) $sen^2\ 45° + cos^2\ 45° = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$

048 Halla el valor del lado *x* sin aplicar el teorema de Pitágoras.

a) 

b) 

a) Es un triángulo isósceles con los ángulos iguales que miden 60°, y el tercer ángulo es también de 60°, por lo que es equilátero, y los tres lados miden 20 cm.

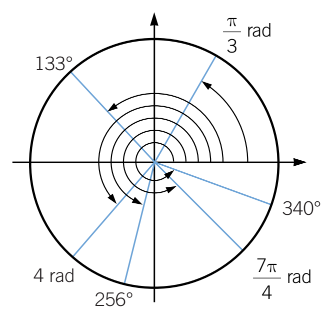
b) $\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \cos 30° = \dfrac{2}{x} \rightarrow x = \dfrac{4\sqrt{3}}{3}$ cm

049 Dibuja los siguientes ángulos en la circunferencia goniométrica y di cuál es el signo de sus razones trigonométricas.

a) 340° **b)** 256° **c)** $\dfrac{\pi}{3}$ rad **d)** 133° **e)** $\dfrac{7\pi}{4}$ rad **f)** 4 rad

Ángulo	340°	256°	$\frac{\pi}{3}$ rad
Seno	−	−	+
Coseno	+	−	+
Tangente	−	+	+

Ángulo	133°	$\frac{7\pi}{4}$ rad	4 rad
Seno	+	−	−
Coseno	−	+	−
Tangente	−	−	+

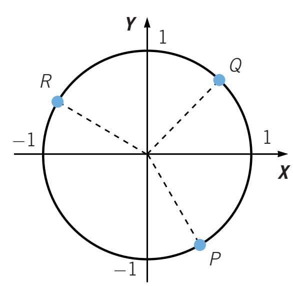


050 Halla las razones trigonométricas de un ángulo si el punto *P* tiene las siguientes coordenadas. Identifica el ángulo en cada caso.

a) $P\left(\dfrac{1}{2}, -\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$

b) $Q\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$

c) $R\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$



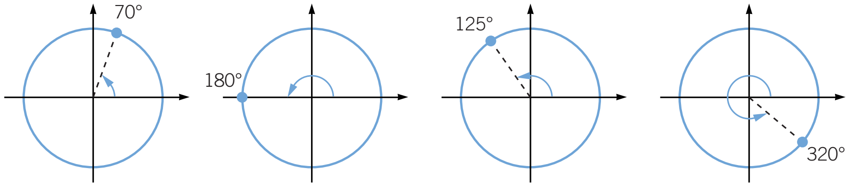
a) $\operatorname{sen} \alpha = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ b) $\operatorname{sen} \alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ c) $\operatorname{sen} \alpha = \dfrac{1}{2}$

$\cos \alpha = \dfrac{1}{2}$ $\cos \alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ $\cos \alpha = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{3}$ $\operatorname{tg} \alpha = 1$ $\operatorname{tg} \alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

051 Dibuja los siguientes ángulos en una circunferencia de radio 4 cm. Mide y calcula las razones trigonométricas, e indica si es relevante que el radio mida 4 cm.

a) $70°$ **b)** $180°$ **c)** $125°$ **d)** $320°$



a) $sen\ 70° = 0{,}94$
$cos\ 70° = 0{,}34$
$tg\ 70° = 2{,}75$

b) $sen\ 180° = 0$
$cos\ 180° = -1$
$tg\ 180° = 0$

c) $sen\ 125° = 0{,}82$
$cos\ 125° = -0{,}57$
$tg\ 125° = -1{,}43$

d) $sen\ 320° = -0{,}64$
$cos\ 320° = 0{,}77$
$tg\ 320° = -0{,}84$

No es relevante que el radio mida 4 cm.

052 Calcula las razones trigonométricas que faltan.

a) $cos\ \alpha = -\frac{4}{7}$, para $180° < \alpha < 270°$

b) $sen\ \alpha = \frac{1}{3}$, para $0° < \alpha < 90°$

c) $cos\ \alpha = -\frac{1}{3}$, para $90° < \alpha < 180°$

d) $sen\ \alpha = -\frac{2}{5}$, para $270° < \alpha < 360°$

a) $sen\ \alpha = -\frac{\sqrt{33}}{7}$
$tg\ \alpha = \frac{\sqrt{33}}{4}$

b) $cos\ \alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$
$tg\ \alpha = \frac{\sqrt{2}}{4}$

c) $sen\ \alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$
$tg\ \alpha = 2\sqrt{2}$

d) $cos\ \alpha = \frac{\sqrt{21}}{5}$
$tg\ \alpha = \frac{2\sqrt{21}}{21}$

053 Averigua para qué ángulos son ciertas las siguientes igualdades.

a) $cos\ \alpha = sen\ \alpha$ **b)** $tg\ \alpha = sen\ \alpha$ **c)** $cos\ \alpha = 3 \cdot sen\ \alpha$

a) $\alpha = 45° \pm n \cdot 180°$ b) $\alpha = \pm n \cdot 180°$ c) $\alpha = 18°\ 26'\ 6''$

054 ¿Cuántos ángulos tienen el mismo seno que un ángulo dado?

Infinitos ángulos, siendo dos ángulos por cada vuelta de circunferencia.

055 **Indica el signo que tienen las razones trigonométricas de estos ángulos, identificando el cuadrante en el que se encuentran.**

a) 140° b) 653° c) 50° d) 470° e) 9° f) 1.111°

	140°	653°	50°	470°	9°	1.111°
sen	+	−	+	+	+	+
cos	−	+	+	−	+	+
tg	−	−	+	−	+	+

056 **Di si las siguientes igualdades son verdaderas o falsas, razonando la respuesta.**

a) $\cos 390° = \operatorname{sen} 60°$

b) $\operatorname{sen} 405° = \cos 45°$

c) $\operatorname{sen} 520° = \cos 30°$

d) $\cos 850° = -\cos 50°$

e) $\operatorname{tg} 7.200° = \cos 90°$

f) $\operatorname{sen} 120° = -\operatorname{sen} 60°$

a) Verdadera; $\cos 390° = \cos (360° + 30°) = \cos 30° = \operatorname{sen} 60°$

b) Verdadera; $\operatorname{sen} 405° = \operatorname{sen} (360° + 45°) = \cos 45°$

c) Falsa; $\operatorname{sen} 520° = \operatorname{sen} (360° + 160°) = \operatorname{sen} 160° = \cos 70°$

d) Verdadera; $\cos 850° = \cos (2 \cdot 360° + 130°) = \cos 130° = -\cos 50°$

e) Verdadera; $\operatorname{tg} 7.200° = \operatorname{tg} 0° = \cos 90°$

f) Falsa; $\operatorname{sen} 120° = \operatorname{sen} 60°$

057 **Calcula las razones trigonométricas de los ángulos, reduciéndolas a otras razones conocidas de ángulos del 1.er cuadrante.**

a) 210° b) 240° c) 315° d) 330°

a) $\operatorname{sen} 210° = -\operatorname{sen} 30° = -\frac{1}{2}$

$\cos 210° = -\cos 30° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\operatorname{tg} 210° = \operatorname{tg} 30° = \frac{\sqrt{3}}{3}$

b) $\operatorname{sen} 240° = -\operatorname{sen} 60° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos 240° = -\cos 60° = -\frac{1}{2}$

$\operatorname{tg} 240° = \operatorname{tg} 60° = \sqrt{3}$

c) $\operatorname{sen} 315° = -\operatorname{sen} 45° = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\cos 315° = \cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\operatorname{tg} 315° = -\operatorname{tg} 45° = -1$

d) $\operatorname{sen} 330° = -\operatorname{sen} 30° = -\frac{1}{2}$

$\cos 330° = \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\operatorname{tg} 330° = -\operatorname{tg} 30° = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

058 **Halla las razones trigonométricas de los ángulos, reduciéndolas a otras razones conocidas de ángulos del 1.er cuadrante.**

a) 390° b) 480° c) 585° d) 600° e) 690° f) 675°

a) $sen\ 390° = sen\ 30° = \frac{1}{2}$

$cos\ 390° = cos\ 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$tg\ 390° = tg\ 30° = \frac{\sqrt{3}}{3}$

b) $sen\ 480° = sen\ 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$cos\ 480° = -cos\ 60° = -\frac{1}{2}$

$tg\ 480° = -tg\ 60° = -\sqrt{3}$

c) $sen\ 585° = -sen\ 45° = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$cos\ 585° = -cos\ 45° = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$tg\ 585° = tg\ 45° = 1$

d) $sen\ 600° = -sen\ 60° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$cos\ 600° = -cos\ 60° = -\frac{1}{2}$

$tg\ 600° = tg\ 60° = \sqrt{3}$

e) $sen\ 690° = -sen\ 30° = -\frac{1}{2}$

$cos\ 690° = cos\ 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$tg\ 690° = -tg\ 30° = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

f) $sen\ 675° = -sen\ 45° = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$cos\ 675° = cos\ 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$tg\ 675° = -tg\ 45° = -1$

059 ●● **Sabiendo que *sen* 20° = 0,342; calcula las razones trigonométricas de los siguientes ángulos.**

a) 110° **b) 200°** **c) 340°** **d) 380°**

a) $sen\ 110° = cos\ 20° = 0{,}94$

$cos\ 110° = -sen\ 20° = -0{,}342$

$tg\ 110° = -\frac{1}{tg\ 20°} = -2{,}747$

b) $sen\ 200° = -sen\ 20° = -0{,}342$

$cos\ 200° = -cos\ 20° = -0{,}94$

$tg\ 200° = tg\ 20° = 0{,}364$

c) $sen\ 340° = -sen\ 20° = -0{,}342$

$cos\ 340° = cos\ 20° = 0{,}94$

$tg\ 340° = -tg\ 20° = -0{,}364$

d) $sen\ 380° = sen\ 20° = 0{,}342$

$cos\ 380° = cos\ 20° = 0{,}94$

$tg\ 380° = tg\ 20° = 0{,}364$

060 ●● **Reduce estos ángulos al 1.^er^ cuadrante.**

a) 1.930° **b) 375°** **c) 5.350°** **d) 999°**

a) $1.930° = 5 \cdot 360° + 130°$
Sus razones trigonométricas se calculan a partir de las razones de: $180° - 130° = 50°$.

b) $375° = 360° + 15°$
Sus razones trigonométricas son las mismas que las razones de 15°.

c) $5.350° = 14 \cdot 360° + 310°$
Sus razones trigonométricas se calculan a partir de las razones de: $360° - 310° = 50°$.

d) $999° = 2 \cdot 360° + 279°$
Sus razones trigonométricas se calculan a partir de las razones de: $360° - 279° = 81°$.

061 **Si *sen* $\alpha = -0{,}2$ y α pertenece al 4.° cuadrante, calcula *cos* α y *tg* α.**

$sen\ \alpha = -0{,}2$

$cos\ \alpha = 0{,}98$

$tg\ \alpha = -0{,}205$

062 **Si *cos* $\alpha = -0{,}5$; ¿qué se puede afirmar del ángulo α?**

Se puede afirmar que el ángulo α está en el segundo o tercer cuadrante, y es un ángulo del tipo $180° \pm 30°$.

063 **Si *sen* $\alpha = \frac{3}{4}$ y α es un ángulo agudo, halla sin utilizar la calculadora.**

a) ***sen*** **$(90° - \alpha)$**

b) ***cos*** **$(180° - \alpha)$**

c) ***tg*** **α**

$$cos\ \alpha = \frac{\sqrt{7}}{4}$$

a) $sen\ (90° - \alpha) = cos\ \alpha = \dfrac{\sqrt{7}}{4}$

b) $cos\ (180° - \alpha) = -cos\ \alpha = -\dfrac{\sqrt{7}}{4}$

c) $tg\ \alpha = \dfrac{sen\ \alpha}{cos\ \alpha} = \dfrac{3\sqrt{7}}{7}$

064 **Si *cos* $(180° - \alpha) = -\frac{1}{3}$ y α es un ángulo del 1.er cuadrante, calcula.**

a) ***sen*** **α**

b) ***cos*** **$(90° - \alpha)$**

c) ***tg*** **$(-\alpha)$**

$$sen\ (180° - \alpha) = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

a) $sen\ \alpha = sen\ (180° - \alpha) = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

b) $cos\ (90° - \alpha) = sen\ \alpha = sen\ (180° - \alpha) = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

c) $tg\ (-\alpha) = -tg\ \alpha = tg\ (180° - \alpha) = -2\sqrt{2}$

065 Si $\cos\alpha = \frac{5}{6}$ y α es un ángulo agudo, calcula.

a) $sen\,(90° + \alpha)$
b) $\cos\,(180° + \alpha)$
c) $\cos\,(-\alpha)$
d) $sen\,(90° - \alpha)$

$$sen\ \alpha = \frac{\sqrt{11}}{6}$$

a) $sen\,(90° + \alpha) = \cos\alpha = \frac{5}{6}$

b) $\cos\,(180° + \alpha) = -\cos\alpha = -\frac{5}{6}$

c) $\cos\,(-\alpha) = \cos\alpha = \frac{5}{6}$

d) $sen\,(90° - \alpha) = \cos\alpha = \frac{5}{6}$

066 Si $sen\ 42° = 0{,}669$ y $\cos 42° = 0{,}743$; calcula las razones trigonométricas de 48°.

$sen\ 48° = 0{,}743$
$\cos 48° = 0{,}669$
$tg\ 48° = 1{,}111$

067 Sabiendo que $sen\ 35° = 0{,}574$; halla las razones trigonométricas de 55° y 145°.

$sen\ 55° = 0{,}819$
$\cos 55° = 0{,}574$
$tg\ 55° = 1{,}428$

$sen\ 145° = 0{,}574$
$\cos 145° = -0{,}819$
$tg\ 145° = -0{,}7$

068 Dado $\cos 24° = 0{,}914$; obtén las razones trigonométricas de su ángulo complementario.

$sen\ 66° = 0{,}914$
$\cos 66° = 0{,}407$
$tg\ 66° = 2{,}246$

069 Calcula las razones trigonométricas de 66°, siendo $\cos 114° = -0{,}407$.

$sen\ 66° = 0{,}914$
$\cos 66° = 0{,}407$
$tg\ 66° = 2{,}246$

070 Determina el área de un triángulo, sabiendo que dos de sus lados miden 10 cm y 15 cm, y que los ángulos distintos al comprendido entre esos lados miden 80° y 70°.

El tercer ángulo mide: 180° − 80° − 70° = 30°.

$$A = \frac{30 \cdot 20 \cdot sen\ 30°}{2} = 150\ \text{cm}^2$$

071 **HAZLO ASÍ**

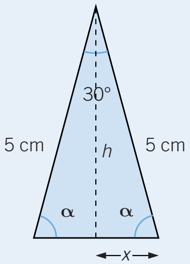
¿CÓMO SE CALCULA EL ÁREA DE UN TRIÁNGULO ISÓSCELES, CONOCIENDO SUS LADOS IGUALES Y SU ÁNGULO DESIGUAL?

Halla el área de un triángulo isósceles de lados iguales 5 cm y el ángulo desigual 30°.

PRIMERO. Se halla la medida de los ángulos iguales.

$$3 + \alpha + \alpha = 180°$$

$$\alpha = \frac{180° - 30°}{2} = 75°$$



SEGUNDO. Se calcula la altura.

$$sen\ 75° = \frac{h}{5} \rightarrow h = 5 \cdot sen\ 75° = 4{,}83\ \text{cm}$$

TERCERO. Se determina la longitud de la base.

$$cos\ 75° = \frac{x}{5} \rightarrow x = 5 \cdot cos\ 75° = 1{,}29\ \text{cm}$$

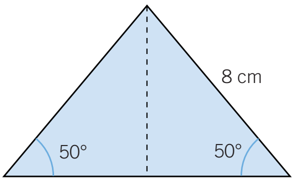
Por tanto, la base mide: $1{,}29 \cdot 2 = 2{,}58$ cm

CUARTO. Se halla el área.

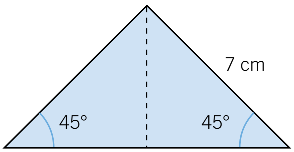
$$A = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{2{,}58 \cdot 4{,}83}{2} = 6{,}23\ \text{cm}^2$$

072 **Halla el área de estos triángulos isósceles.**

a)



b)



a) Llamando b a la base y h a la altura del triángulo:

$$h = 8 \cdot sen\ 50° = 6{,}13\ \text{cm}; \quad \frac{b}{2} = 8 \cdot cos\ 50° = 5{,}14\ \text{cm}$$

El área del triángulo es: $A = \dfrac{b \cdot h}{2} = 5{,}14 \cdot 6{,}13 = 31{,}5\ \text{cm}^2$.

b) $h = 7 \cdot sen\ 45° = 7 \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2} = 4{,}95$ cm

$$\frac{b}{2} = 7 \cdot cos\ 45° = 7 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 4{,}95\ \text{cm}$$

El área del triángulo es: $A = \dfrac{b \cdot h}{2} = 4{,}95 \cdot 4{,}95 = 24{,}5\ \text{cm}^2$.

073 ●● **¿Cuánto miden los catetos de un triángulo rectángulo isósceles si la hipotenusa mide 10 cm?**

Denotamos por x a cada cateto, y sabiendo que los ángulos agudos miden 45°:

$$\cos 45° = \frac{x}{10} \rightarrow x = 10 \cdot \cos 45° = 10 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 5\sqrt{2} \text{ cm}$$

074 ●● **Calcula el valor de la apotema de un decágono regular de lado 20 cm. ¿Cuál es su área?**

El ángulo central del decágono mide: 360° : 10 = 36°.

$$tg\left(\frac{36°}{2}\right) = tg\ 18° = \frac{10}{a} \rightarrow a = 31{,}25 \text{ cm}$$

$$A = \frac{20 \cdot 10 \cdot 31{,}25}{2} = 3.125 \text{ cm}^2$$

075 ●● **Halla el área de un decágono regular y de un octógono regular, ambos de 6 cm de lado. ¿Cuál es mayor?**

Decágono:

El ángulo central del decágono mide: 360° : 10 = 36°.

$$tg\left(\frac{36°}{2}\right) = tg\ 18° = \frac{3}{a} \rightarrow a = 9{,}37 \text{ cm} \qquad A_d = \frac{6 \cdot a}{2} \cdot 10 = 281{,}1 \text{ cm}^2$$

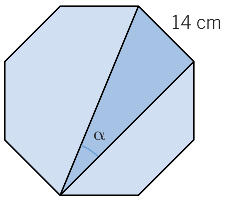
Octógono:

El ángulo central del octógono mide: 360° : 8 = 45°.

$$tg\left(\frac{45°}{2}\right) = tg\ 22{,}5° = \frac{3}{a} \rightarrow a = 7{,}31 \text{ cm} \qquad A_o = \frac{6 \cdot a}{2} \cdot 8 = 175{,}44 \text{ cm}^2$$

Tiene mayor área el decágono.

076 ●●● **Determina el área sombreada de este octógono regular.**



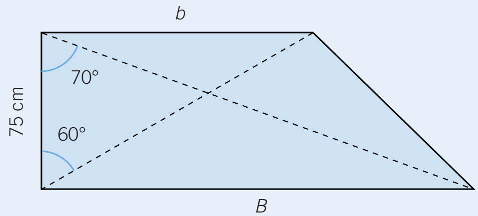
$$\alpha = \frac{45°}{2} = 22°\ 30'$$

$$A = \frac{14 \cdot \left(14 \cdot \dfrac{1}{tg\ \alpha}\right)}{2} = 236{,}59 \text{ cm}^2$$

077 **HAZLO ASÍ**

¿CÓMO SE CALCULA EL ÁREA Y EL PERÍMETRO DE UN TRAPECIO RECTÁNGULO?

Calcula el área del siguiente trapecio rectángulo.



PRIMERO. Se halla la medida de sus bases.

$$tg\ 60° = \frac{b}{75}$$

$$b = 75 \cdot tg\ 60° = 75 \cdot \sqrt{3} = 129{,}9 \text{ cm}$$

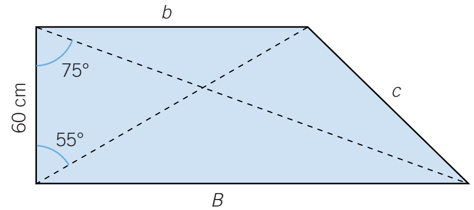
$$tg\ 70° = \frac{B}{75}$$

$$B = 75 \cdot tg\ 70° = 75 \cdot 2{,}75 = 206{,}25 \text{ cm}$$

SEGUNDO. Se calcula su área.

$$A = \frac{B + b}{2} \cdot h = \frac{206{,}25 + 129{,}9}{2} \cdot 75 = 12.605{,}625 \text{ cm}^2$$

078 ●●● **Calcula el área y el perímetro del siguiente trapecio rectángulo.**



$$B = 60 \cdot tg\ 75° = 223{,}92 \text{ cm}$$

$$b = 60 \cdot tg\ 55° = 85{,}69 \text{ cm}$$

$$c = \sqrt{60^2 + (223{,}92 - 85{,}69)^2} = 150{,}69 \text{ cm}$$

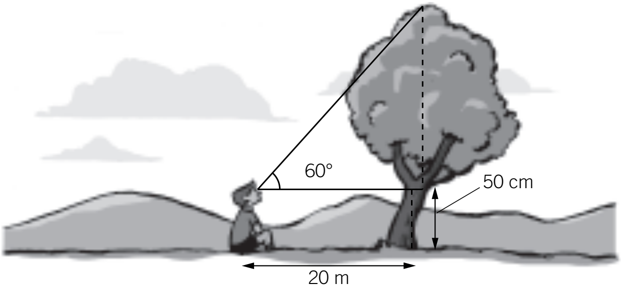
El área es:

$$A = \frac{223{,}92 + 85{,}69}{2} \cdot 60 = 9.288{,}3 \text{ cm}^2$$

El perímetro mide:

$$P = 223{,}92 + 85{,}69 + 60 + 150{,}69 = 520{,}3 \text{ cm}$$

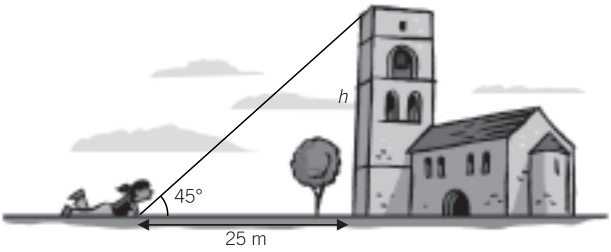
079 ¿Cuánto mide el árbol?



$h = 0{,}5 + 20 \cdot tg\,60° = 0{,}5 + 34{,}64 = 35{,}14$ m

El árbol mide 35,14 metros de altura.

080 Calcula la altura de la torre.



Denotando por h a la altura de la torre, se obtiene:

$$tg\ 45° = \frac{h}{25} \rightarrow h = 25 \cdot tg\ 45° = 25 \cdot 1 = 25 \text{ m}$$

La torre mide 25 m de altura.

081 ¿A qué distancia me encuentro de un edificio de 50 m de altura si observo su parte más elevada con un ángulo de 60°?

Siendo d la distancia a la que me encuentro del edificio:

$$tg\ 60° = \frac{50}{d} \rightarrow d = \frac{50°}{tg\ 60°} = \frac{50}{\sqrt{3}} = 28{,}87 \text{ m}$$

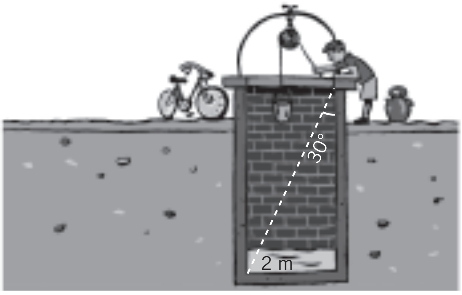
082 Una cometa está unida al suelo por un hilo de 100 m, que forma con la horizontal del terreno un ángulo de 60°. Suponiendo que el hilo esté completamente estirado, halla la altura a la que está la cometa.

$$h = 100 \cdot sen\ 60° = 100 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 50\sqrt{3} \text{ m}$$

083 **Una lancha está amarrada al muelle por una maroma de 25 m, que forma con la horizontal de la orilla un ángulo de 30°. Suponiendo que la maroma esté completamente estirada, halla la distancia a la que está de la orilla.**

Distancia $= 25 \cdot sen\ 30° = 12,5$ m

084 **Calcula la profundidad de un pozo de 2 m de ancho si vemos el borde opuesto del fondo con un ángulo de 30°.**



Siendo d la profundidad del pozo:

$$tg\ 30° = \frac{2}{d} \rightarrow d = \frac{2}{tg\ 30°} = \frac{2}{\frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{6}{\sqrt{3}} = 3,46 \text{ m}$$

El pozo tiene 3,46 m de profundidad.

085 **Determina la superficie de un logotipo con forma de pentágono regular inscrito en una circunferencia de 5 cm de radio.**

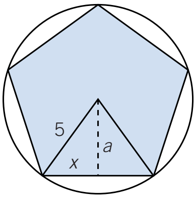
El ángulo central mide 72° y su mitad es 36°.

$a = 5 \cdot cos\ 36° = 4,05$ cm

$x = 5 \cdot sen\ 36° = 2,94$ cm

$b = 2x = 5,88$ cm

$$A = \frac{4,05 \cdot 5,88}{2} = 11,91 \text{ cm}^2$$



086 **Desde un barco vemos la luz de un faro con una inclinación de 20° y, después de avanzar 18 km en esa dirección, se ve con un ángulo de 30°. ¿A qué distancia estamos del faro?**

$$\left.\begin{array}{r} x \cdot tg\ 30° = h \\ (x+18) \cdot tg\ 20° = h \end{array}\right\} \rightarrow x \cdot 0,58 = (x+18) \cdot 0,36$$

$$\rightarrow 0,22x = 6,48 \rightarrow x = 29,45 \text{ km}$$

La distancia es: $18 + 29,45 = 47,45$ km.

087 **Halla la cantidad de chapa necesaria para fabricar una señal de STOP de forma octogonal, sabiendo que la diagonal marcada mide 1,25 m.**

La cantidad de chapa necesaria para fabricar esta señal es equivalente al área de un octógono regular inscrito en una circunferencia de 1,25 : 2 = 0,625 m de radio.

Dividimos el octógono en 8 triángulos isósceles iguales. El ángulo desigual de cada triángulo isósceles es un ángulo central de 360° : 8 = 45°.

Si llamamos $\hat{A}$ y $\hat{B}$ a los otros dos ángulos, se obtiene:

$$\left.\begin{array}{r}\hat{A} = \hat{B}\\ \hat{A} + \hat{B} + 45° = 180°\end{array}\right\} \rightarrow \hat{A} = \frac{180° - 45°}{2} = 67{,}5°$$

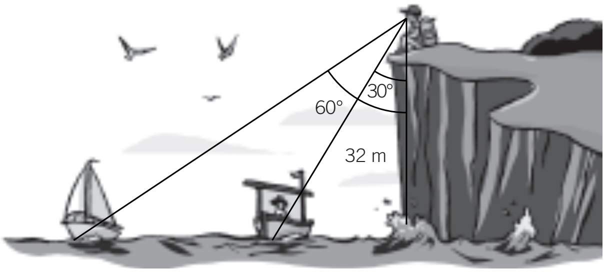
Si h es la altura del triángulo y b es la base:

$$h = 0{,}625 \cdot sen\,67{,}5° = 0{,}58 \text{ m}$$

$$\frac{b}{2} = 0{,}625 \cdot cos\,67{,}5° = 0{,}24 \text{ m}$$

$$A = \frac{b \cdot h}{2} = 0{,}24 \cdot 0{,}58 = 0{,}14 \text{ m}^2 \rightarrow A_{\text{Total}} = 0{,}14 \cdot 8 = 1{,}1 \text{ m}^2$$

088 **En un acantilado, situado a 32 m sobre el nivel del mar, se divisan dos embarcaciones. Halla la distancia de las mismas si los respectivos ángulos son de 30° y 60°.**



Sean x e y las distancias indicadas en el gráfico.

$$tg\,30° = \frac{x}{32} \rightarrow x = 32 \cdot tg\,30° = 18{,}48 \text{ m}$$

$$tg\,60° = \frac{y}{32} \rightarrow y = 32 \cdot tg\,60° = 55{,}43 \text{ m}$$

La distancia entre las embarcaciones es: 55,43 − 18,48 = 36,95 m.

089 **Desde cierto punto del suelo se ve la parte superior de una torre formando un ángulo de 30° con la horizontal. Si nos acercamos 75 m hacia el pie de la torre, ese ángulo es de 60°. Halla la altura de la torre.**

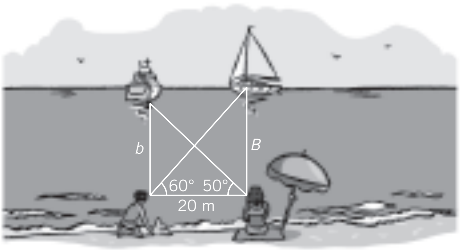
Llamando h a la altura de la torre y x a la distancia al pie de la torre:

$$\left.\begin{array}{r} x \cdot tg\,30° = h \\ (x - 75) \cdot tg\,60° = h \end{array}\right\} \to x \cdot tg\,30° = (x - 75) \cdot tg\,60°$$
$$\to x \cdot tg\,30° - x \cdot tg\,60° = -75 \cdot tg\,60°$$

$$\to x \cdot (tg\,30° - tg\,60°) = -75 \cdot 1{,}73 \to x = \frac{-129{,}75}{0{,}57 - 1{,}73} = 112{,}53 \text{ m}$$

$h = x \cdot tg\,30° = 112{,}53 \cdot 0{,}57 = 64{,}14$ m. La torre mide 64,14 m de altura.

090 **Desde la playa se observan dos barcos. Calcula la distancia que hay entre ellos con los ángulos que se indican.**



Sea d la distancia que hay entre los dos barcos.

Hallamos la medida de b y B.

$$tg\,50° = \frac{b}{20} \to b = 20 \cdot tg\,50° = 23{,}84 \text{ m}$$

$$tg\,60° = \frac{B}{20} \to B = 20 \cdot tg\,60° = 20 \cdot \sqrt{3} = 34{,}64 \text{ m}$$

Utilizando el teorema de Pitágoras:

$$d^2 = 20^2 + (34{,}64 - 23{,}84)^2 = 516{,}64 \to d = \sqrt{516{,}64} = 22{,}73 \text{ m}$$

Por tanto, los dos barcos distan 22,73 m.

091 **Desde la cima de una montaña, a una altura de 1.114 m, vemos una aldea y una granja situadas en el valle que está a una altura de 537 m sobre el nivel del mar. Si observamos la aldea con un ángulo de 68° y la granja con uno de 83°:**

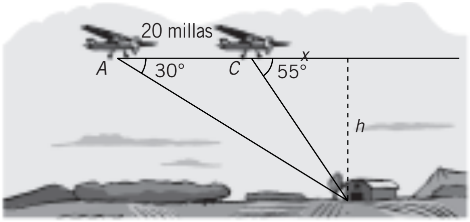
a) ¿Cuál de los dos lugares está más cerca de la montaña?

b) Si la montaña, la aldea y la granja se encuentran alineadas, halla la distancia que hay entre la aldea y la granja.

a) Está más cerca el lugar que se observa con menor grado, es decir, la aldea.
La distancia a la aldea es: $(1.114 - 537) \cdot tg\,68° = 1.428{,}13$ m.

b) La distancia a la granja es: $(1.114 - 537) \cdot tg\,83° = 4.699{,}29$ m.
La distancia entre la aldea y la granja es: $4.699{,}29 - 1.428{,}13 = 3.271{,}16$ m.

092 ●● **El piloto de un avión observa un punto del terreno con un ángulo de depresión de 30°. Dieciocho segundos más tarde, el ángulo de depresión obtenido sobre el mismo punto es de 55°. Si vuela horizontalmente y a una velocidad de 400 millas/hora, halla la altitud de vuelo.**



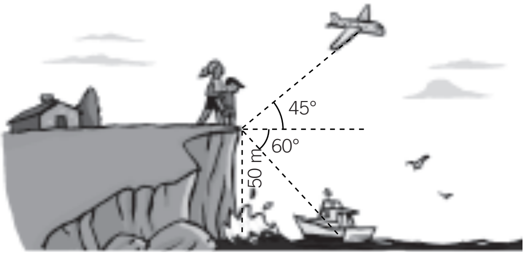
La distancia recorrida por el avión es: $400 \cdot \dfrac{18}{3.600} = 20$ millas.

$$\left.\begin{array}{r} x \cdot tg\ 55° = h \\ (x+20) \cdot tg\ 30° = h \end{array}\right\} \to x \cdot 1{,}43 = (x+20) \cdot 0{,}58$$

$$\to 0{,}85x = 11{,}6 \to x = 13{,}65 \text{ millas}$$

$h = 13{,}65 \cdot 1{,}43 = 19{,}52$ millas. La altitud de vuelo es de 19,52 millas.

093 ●●● **En un acantilado, situado a 50 m sobre el nivel del mar, se encuentran dos amigos. Uno de ellos observa un barco con un ángulo de depresión de 60°, y el otro mira un avión, situado encima del barco, con un ángulo de elevación de 45°.**



a) ¿A qué distancia se encuentra el barco de la costa?
b) ¿A qué altura vuela el avión?
c) ¿Cuál de los dos elementos está más lejos?

a) Llamando d a la distancia a la que se encuentra el barco de la costa:

$$tg\,30° = \frac{d}{50} \to d = 50 \cdot tg\,30° = 50 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = 28{,}87 \text{ m}$$

El barco se encuentra a 28,87 m de la costa.

b) Teniendo en cuenta que el avión está situado encima del barco, se obtiene:

$$tg\,45° = \frac{h}{28{,}87} \to h = 28{,}87 \cdot tg\,45° = 28{,}87 \text{ m}$$

El avión vuela a: $50 + 28{,}87 = 78{,}87$ m de altura sobre el mar.

c) Siendo d_1 la distancia a la que se encuentra el barco, y d_2, la del avión:

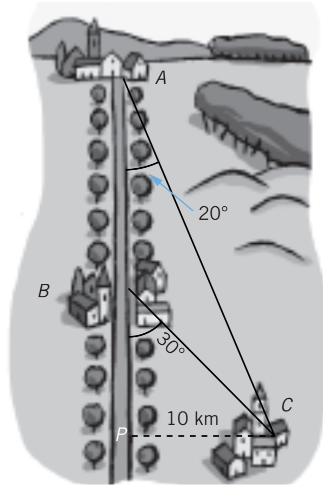
$$d_1 = \frac{50}{cos\ 30°} = 50 \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = 57{,}7 \text{ m}$$

$$sen\ 45° = \frac{28{,}87}{d_2} \to d_2 = \frac{28{,}87}{sen\ 45°} = \frac{28{,}87}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 40{,}8 \text{ m}$$

Luego el barco está más lejos de los amigos que el avión.

094 ●●●

Dos poblaciones, *A* y *B*, están situadas en una carretera que va del norte al sur. Otra población, *C*, a 10 kilómetros en línea recta de la carretera anterior, está situada a 20° al sureste de *A* y a 30° al sureste de *B*.
¿Qué distancia separa *A* de *B*?



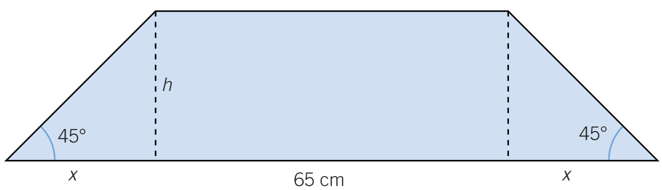
$$\overline{AP} = \frac{10}{tg\ 20°} = 27{,}47 \text{ km}$$

$$\overline{BP} = \frac{10}{tg\,30°} = 17{,}32 \text{ km}$$

$$\overline{AB} = \overline{AP} - \overline{BP} = 10{,}15 \text{ km}$$

095 ●●●

La superficie de un terreno de forma de trapecio es 1.200 m². Sabiendo que tiene dos ángulos de 45° y que la base menor mide 65 m, calcula la base mayor y la distancia entre las bases.



$$tg\ 45° = \frac{h}{x} \rightarrow x = h$$

$$\frac{65 + (65 + 2x)}{2} \cdot h = 1.200 \xrightarrow{x\,=\,h} h^2 + 65h - 1.200 = 0$$

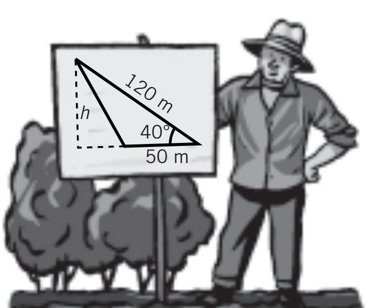
$$\rightarrow \begin{cases} h = 15 \\ h = -80 \text{ (solución no válida)} \end{cases}$$

$$B = 65 + 2x = 5 \text{ m}$$

La base mayor mide 95 m y la distancia entre las bases es 15 m.

096 ●●●

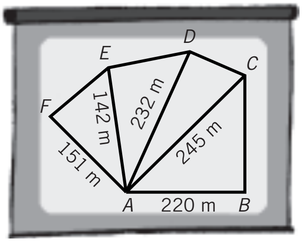
¿Cuánto se obtendrá por vender esta parcela si se paga a 300 €/m²?



$$A = \frac{120 \cdot (50 \cdot sen\ 40°)}{2} = 1.928{,}36 \text{ m}^2$$

$$\text{Precio} = 1.928{,}36 \cdot 300 = 578.508 \text{ €}$$

097 **Calcula la superficie de este terreno.**



$$\widehat{BAC} = 33^\circ\ 45'$$
$$\widehat{CAD} = 24^\circ\ 13'$$
$$\widehat{DAE} = 42^\circ\ 15'$$
$$\widehat{EAF} = 33^\circ\ 41'$$

$$A_{BAC} = \frac{220 \cdot 245 \cdot sen\ 33^\circ\ 45'}{2} = 14.972{,}62\ m^2$$
$$A_{CAD} = \frac{232 \cdot 245 \cdot sen\ 24^\circ\ 13'}{2} = 11.657{,}55\ m^2$$
$$A_{DAE} = \frac{142 \cdot 232 \cdot sen\ 42^\circ\ 15'}{2} = 11.698{,}17\ m^2$$
$$A_{EAF} = \frac{151 \cdot 142 \cdot sen\ 33^\circ\ 41'}{2} = 5.945{,}9\ m^2$$
$$A = A_{BAC} + A_{CAD} + A_{DAE} + A_{EAF} = 44.274{,}24\ m^2$$

098 **Sin utilizar la calculadora, ordena de menor a mayor.**

a) ***cos*** **24°** ***sen*** **113°** ***cos*** **292°** **b)** ***tg*** **242°** **1,70**

a) *cos* 24°
$sen\ 113^\circ = sen\ (90^\circ + 23^\circ) = cos\ 23^\circ$
$cos\ 292^\circ = cos\ (360^\circ - 68^\circ) = cos\ 68^\circ$
En los ángulos agudos, cuanto mayor es el ángulo, menor es el coseno.
$cos\ 292^\circ < sen\ 113^\circ < cos\ 24^\circ$

b) $tg\ 242^\circ = tg\ (180^\circ + 62^\circ) = tg\ 62^\circ$
$tg\ 60^\circ = \sqrt{3} > 1{,}70$
En los ángulos agudos, cuanto mayor es el ángulo, mayor es la tangente.
$1{,}70 < tg\ 62^\circ$

099 **Dos lados de un triángulo miden 15 cm y 20 cm.**

a) ¿Cuál es el área máxima que puede tener ese triángulo? ¿Por qué?

b) ¿Qué tipo de triángulo es en ese caso?

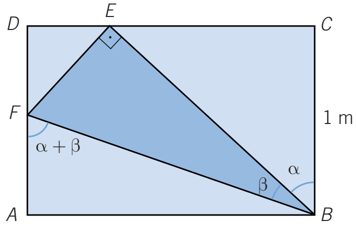
a) El área de un triángulo es:

$$A = \frac{a \cdot b \cdot sen\ \alpha}{2} \xrightarrow{sen\ \alpha \le 1} A \le \frac{a \cdot b}{2}$$
$$A \le \frac{15 \cdot 20}{2} = 150$$

El mayor valor que puede tomar es 150 cm^2, cuando el seno vale 1.

b) El máximo valor se da cuando el seno es igual a 1, es decir, cuando el ángulo mide 90°, luego es un triángulo equilátero.

100 **Deduce una fórmula para *tg* ($\alpha + \beta$) a partir de la longitud de los segmentos de la figura.**



$$tg\ (\alpha + \beta) = \frac{\overline{AB}}{\overline{AF}}$$

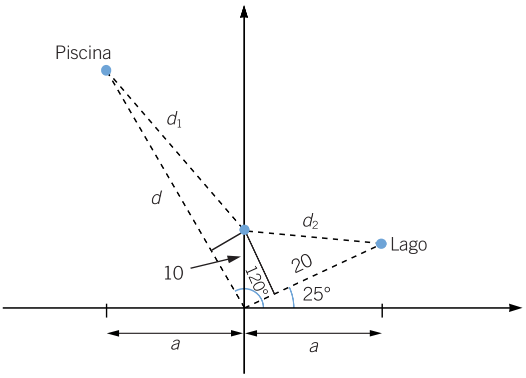
EN LA VIDA COTIDIANA

101 **Los datos en los medios de comunicación sobre los incendios que han tenido lugar en el país durante el verano no han sido muy desfavorables. Sin embargo, el último fin de semana se ha producido un incendio en uno de los parques naturales.**

Desde uno de los helicópteros de protección civil, situado en el radar en el origen de coordenadas, el piloto observa un fuego en dirección Norte y la situación del lago más cercano a 25° y de la piscina municipal a 120°.

Desde la torre de control les dan el aviso de que el viento empieza a ser más fuerte, y que es necesario que el incendio sea controlado antes de que se propague.

¿Adónde irán a recoger agua?



Hay que calcular la menor de estas distancias: $20 + d_2$, $d + d_1$.

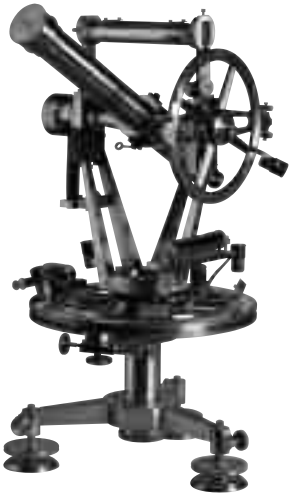
$$d_2 = \sqrt{(10 \cdot sen\ 65°)^2 + (20 - 10 \cdot cos\ 65°)^2} = 18{,}2 \text{ km}$$
$$\rightarrow 20 + d_2 = 38{,}2 \text{ km}$$

$$a = 20 \cdot cos\ 25° = 18{,}13 \rightarrow d = \frac{a}{cos\ 60°} = \frac{18{,}13}{0{,}5} = 36{,}26 \text{ km}$$

$$d_1 = \sqrt{(10 \cdot sen\ 30°)^2 + (36{,}26 - 10 \cdot cos\ 30°)^2} = 28{,}05$$
$$\rightarrow d + d_1 = 64{,}31 \text{ km}$$

Irán a recoger agua en el lago.

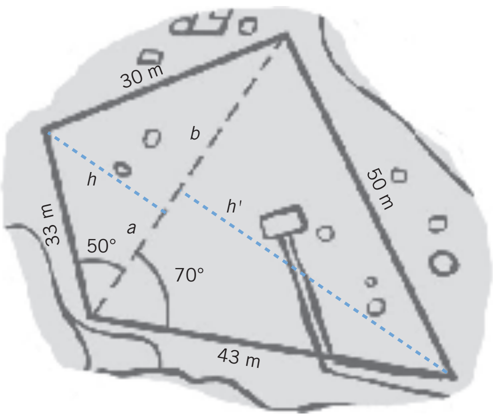
102 ●●● **El Ayuntamiento ha decidido construir viviendas de protección oficial en un terreno.**
Para realizar el proyecto han contratado a un estudio de arquitectos.



Los encargados municipales no les han proporcionado las dimensiones del recinto, y uno de los aparejadores ha visitado el terreno para hacer las mediciones.

Luego han presentado el estudio incluyendo redes geodésicas del terreno, formadas por puntos desde los cuales se mide con gran precisión y que, además, son los vértices de triángulos adosados unos a otros.

Con estos datos, determina la superficie de terreno que va a ser edificable.



$h = 33 \cdot sen\ 50° = 25{,}28$ m

$a = 33 \cdot cos\ 50° = 21{,}21$ m

$b = \sqrt{30^2 - 25{,}28^2} = 16{,}15$ m

$h' = 43 \cdot sen\ 70° = 40{,}41$ m

$$A_{ACD} = \frac{(a + b) \cdot h}{2} = \frac{37{,}36 \cdot 25{,}28}{2} = 472{,}23 \text{ m}^2$$

$$A_{ABC} = \frac{(a + b) \cdot h'}{2} = \frac{37{,}36 \cdot 40{,}41}{2} = 754{,}86 \text{ m}^2$$

$$A = A_{ACD} + A_{ABC} = 472{,}23 + 754{,}86 = 1.227{,}09 \text{ m}^2$$

La superficie del terreno que será edificable es de 1.227,09 m^2.

9 Vectores y rectas

- VECTORES
  - MÓDULO
  - DIRECCIÓN
  - SENTIDO

- OPERACIONES CON VECTORES
  - SUMA
  - RESTA
  - MULTIPLICACIÓN POR UN NÚMERO

- ECUACIONES DE LA RECTA
  - VECTORIAL
  - PARAMÉTRICAS
  - CONTINUA
  - PUNTO-PENDIENTE
  - EXPLÍCITA
  - GENERAL

- POSICIONES DE DOS RECTAS EN EL PLANO

Destino: el futuro

El agudo silbido despertó al monstruo, que comenzó a moverse lentamente entre chirridos metálicos y nubes de vapor.

Apenas la locomotora hubo iniciado la marcha, dos jóvenes, Sonia y Fedia, abandonaron el compartimento donde estaban sus padres y su hermana mayor, y atravesando algunos vagones llegaron al furgón de cola, desde donde vieron alejarse su ciudad, Palibino.

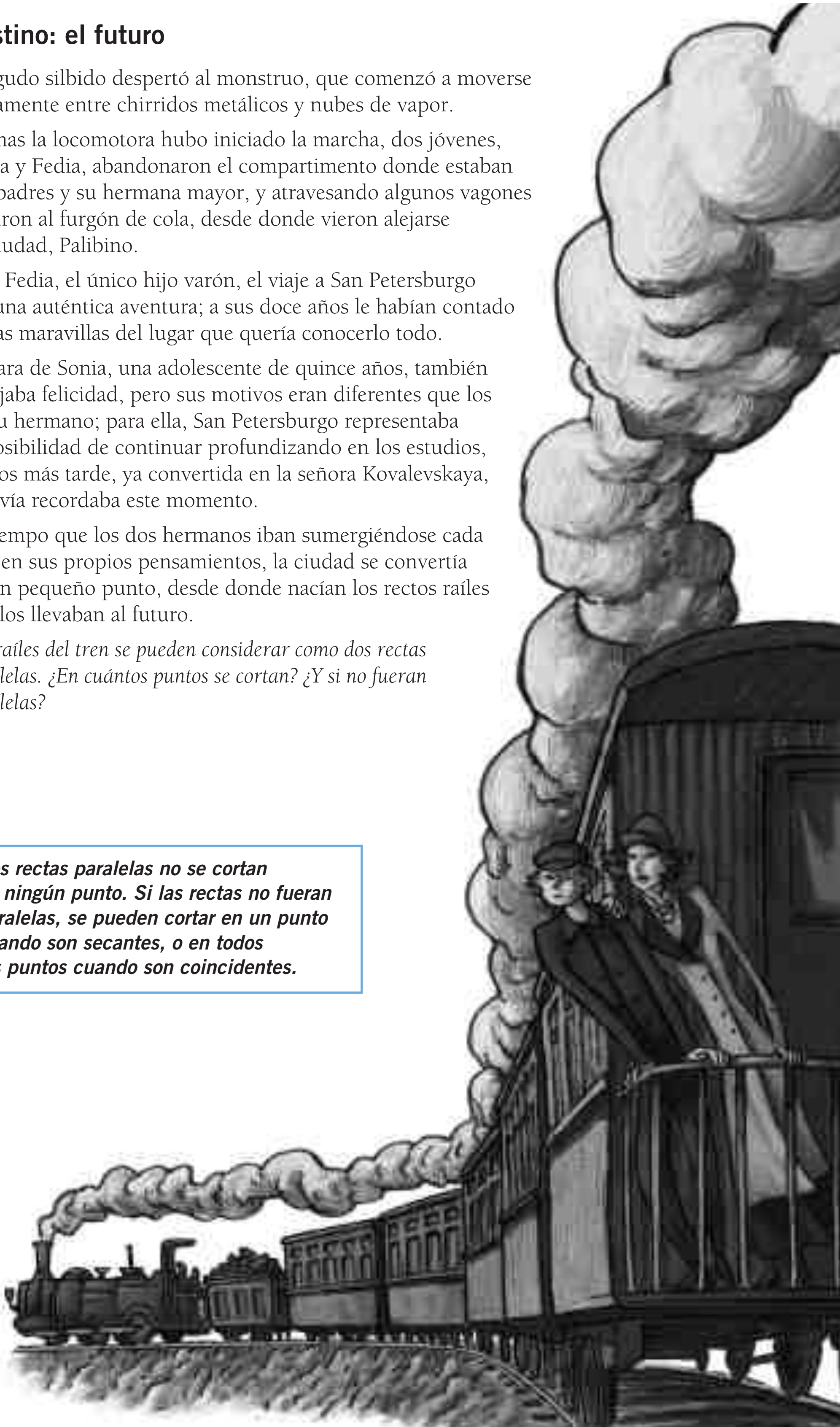
Para Fedia, el único hijo varón, el viaje a San Petersburgo era una auténtica aventura; a sus doce años le habían contado tantas maravillas del lugar que quería conocerlo todo.

La cara de Sonia, una adolescente de quince años, también reflejaba felicidad, pero sus motivos eran diferentes que los de su hermano; para ella, San Petersburgo representaba la posibilidad de continuar profundizando en los estudios, y años más tarde, ya convertida en la señora Kovalevskaya, todavía recordaba este momento.

Al tiempo que los dos hermanos iban sumergiéndose cada uno en sus propios pensamientos, la ciudad se convertía en un pequeño punto, desde donde nacían los rectos raíles que los llevaban al futuro.

Los raíles del tren se pueden considerar como dos rectas paralelas. ¿En cuántos puntos se cortan? ¿Y si no fueran paralelas?

Dos rectas paralelas no se cortan en ningún punto. Si las rectas no fueran paralelas, se pueden cortar en un punto cuando son secantes, o en todos los puntos cuando son coincidentes.



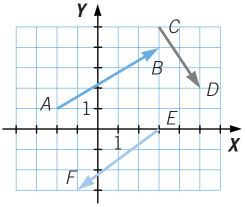
EJERCICIOS

001 **¿Cuáles son las coordenadas de los vectores?**

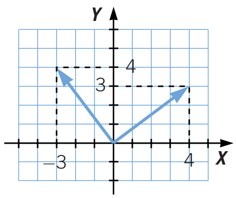
$\overrightarrow{AB} = (5, 3)$

$\overrightarrow{CD} = (2, -3)$

$\overrightarrow{EF} = (-4, -3)$



002 **Dibuja dos vectores diferentes que tengan el mismo módulo, distinta dirección y diferente sentido.**



003 **Expresa estas situaciones con vectores, indicando su módulo, dirección y sentido.**

a) Un barco sale de Canarias con dirección Norte a una velocidad de 10 nudos.

b) Un barco sale de Azores con dirección Sureste y una velocidad de 12 nudos.

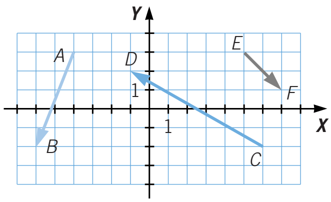
a)

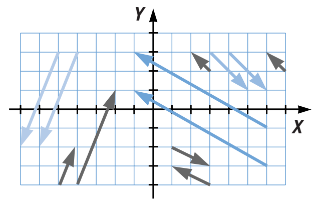
b)

004 **¿Qué diferencias hay entre $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{BA}$?**

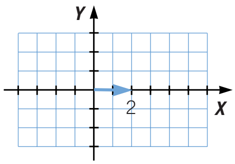
Son vectores con igual módulo y dirección, pero con distinto sentido.

005 **Dibuja dos vectores equivalentes a cada vector y otros dos paralelos.**

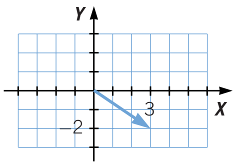




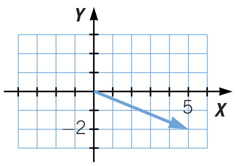
006 **Dados los puntos *A*(−2, 0), *B*(0, 0) y *C*(3, −2), representa y calcula las coordenadas y el módulo de los vectores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ y $\overrightarrow{AC}$.**



$\overrightarrow{AB} = (2, 0)$ $\quad |\overrightarrow{AB}| = 2$



$\overrightarrow{BC} = (3, -2)$ $\quad |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{13}$



$\overrightarrow{AC} = (5, -2)$ $\quad |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{29}$

007 **Dados los puntos *A*(0, 0), *B*(1, 1) y *C*(0, 2), halla las coordenadas de un punto *D* para que los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$ sean equivalentes, y también para que sean paralelos.**

$\overrightarrow{AB} = (1, 1)$

Sea $D(a, b) \rightarrow \overrightarrow{CD} = (a - 0, b - 2) = (a, b - 2)$.

Para que los vectores sean equivalentes:

$(1, 1) = (a, b - 2)$

Las coordenadas de D son (1, 3).

$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{2}$ y $|\overrightarrow{CD}| = \sqrt{2}$, porque dos vectores equivalentes tienen el mismo módulo.

Para que los vectores sean paralelos:

$$\frac{a}{1} = \frac{b-2}{1} \rightarrow a = b - 2$$

Las coordenadas de D son $(b - 2, b)$; por ejemplo, (2, 4).

008 **Las coordenadas de los puntos *A*, *B*, *C* y *D* son:**

$A(0, 0)$ $B(-1, 3)$ $C(-2, -2)$ $D(1\ -3)$

Calcula el resultado de estas operaciones.

a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$
b) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD}$
c) $\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{AB}$
d) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB}$
e) $\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{CD}$
f) $-\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD}$

$\overrightarrow{AB} = (-1, 3)$ $\overrightarrow{CD} = (3, -1)$

a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = (2, 2)$
b) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD} = (-4, 4)$
c) $\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{AB} = (4, -4)$
d) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} = (-2, 6)$
e) $\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{CD} = (0, 0)$
f) $-\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD} = (-2, -2)$

009 **Los puntos $A(-1, 1)$, $B(0, 2)$ y $C(2, 0)$ son los vértices de un triángulo. Halla las coordenadas de los vectores que forman sus lados.**

$\overrightarrow{AB} = (1, 1)$ $\overrightarrow{BC} = (2, -2)$ $\overrightarrow{CA} = (-3, 1)$

010 **Si $\vec{u} = (-3, 2)$ y $\vec{w} = (4, -1)$, determina el vector $\vec{v}$ tal que $\vec{u} + \vec{v} = \vec{w}$.**

$\vec{v} = \vec{w} - \vec{u} = (7, -3)$

011 **Sabiendo que $A(3, -4)$ y $B(5, 2)$, calcula $k \cdot \overrightarrow{AB}$.**

a) $k = 3$
b) $k = -2$
c) $k = 5$
d) $k = \frac{1}{2}$

$\overrightarrow{AB} = (2, 6)$

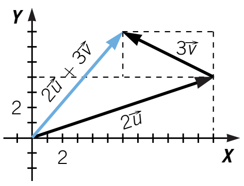
a) $3 \cdot \overrightarrow{AB} = 3 \cdot (2, 6) = (6, 18)$
b) $-2 \cdot \overrightarrow{AB} = -2 \cdot (2, 6) = (-4, -12)$
c) $5 \cdot \overrightarrow{AB} = 5 \cdot (2, 6) = (10, 30)$
d) $\frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AB} = \frac{1}{2} \cdot (2, 6) = (1, 3)$

012 **Efectúa las siguientes operaciones analítica y gráficamente, si $\vec{u} = (6, 2)$ y $\vec{v} = (-2, 1)$.**

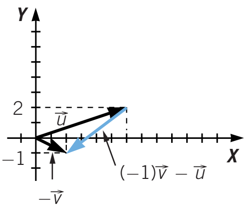
a) $2\vec{u} + 3\vec{v}$
b) $(-1) \cdot \vec{v} - \vec{u}$

a) $2 \cdot (6, 2) + 3 \cdot (-2, 1) = (12, 4) + (-6, 3) = (6, 7)$
b) $(-1) \cdot (-2, 1) - (6, 2) = (2, -1) - (6, 2) = (-4, -3)$

a)



b)



013 **Sabemos que A' es el transformado de A por la traslación de vector $\vec{u}$. Calcula x e y.**

a) $A(0, 2) \xrightarrow{\vec{u} = (x, y)} A'(-2, 4)$ **c)** $A(x, y) \xrightarrow{\vec{u} = (-2, -3)} A'(-4, 6)$

b) $A(-1, -2) \xrightarrow{\vec{u} = (x, 3)} A'(5, y)$ **d)** $A(x, 8) \xrightarrow{\vec{u} = (7, y)} A'(10, 5)$

a) $\vec{u} = (x, y) = (-2, 4) - (0, 2) = (-2, 2) \rightarrow x = -2, y = 2$

b) $(-1, -2) + (x, 3) = (5, y) \rightarrow x = 6, y = 1$

c) $(x, y) + (-2, -3) = (-4, 6) \rightarrow x = -2, y = 9$

d) $(x, 8) + (7, y) = (10, 5) \rightarrow x = 3, y = -3$

014 **Dados los puntos de coordenadas $A(-1, 7)$ y $B(0, 1)$:**

a) Calcula el vector director de la recta que pasa por A y B.

b) Halla la ecuación vectorial de dicha recta.

a) $\vec{v} = \overrightarrow{AB} = (1, -6)$

b) Ecuación vectorial de la recta: $(x, y) = (-1, 7) + t \cdot (1, -6)$

015 **Calcula la ecuación vectorial de la recta que pasa por el punto $A(0, -4)$ y tiene como vector director $\vec{v} = (-1, 7)$.**

La ecuación vectorial de la recta es: $(x, y) = (0, -4) + t \cdot (-1, 7)$.

016 **Determina la ecuación vectorial de la recta que pasa por el punto $A(-2, 3)$ y tiene como vector director:**

a) $\vec{v} = (3, 4)$ **b)** $-\vec{v} = (-3, -4)$ **c)** $2\vec{v} = (6, 8)$

Escribe cinco puntos de cada una de las rectas. ¿Qué característica tienen en común estas tres rectas?

a) $(x, y) = (-2, 3) + t \cdot (3, 4)$

b) $(x, y) = (-2, 3) + t \cdot (-3, -4)$

c) $(x, y) = (-2, 3) + t \cdot (6, 8)$

Los cinco puntos pueden ser: $(-2, 3)$, $(1, 7)$, $(4, 11)$, $(-5, -1)$ y $(-8, -5)$.

Las tres rectas son coincidentes.

017 **Calcula las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por el punto $A(0, -4)$ y tiene como vector director $\vec{v} = (-1, 7)$.**

$$\left.\begin{array}{l} x = 0 + (-1) \cdot t \\ y = -4 + 7 \cdot t \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} x = -t \\ y = -4 + 7t \end{array}\right\}$$

018 **¿Cuáles son las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por el punto $A(2, 3)$ y tiene como vector director $\vec{v} = (-1, 0)$?**

Ecuaciones paramétricas:

$$\left.\begin{array}{l} x = 2 + (-1) \cdot t \\ y = 3 + 0 \cdot t \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} x = 2 - t \\ y = 3 \end{array}\right\}$$

019 **Dados los puntos $A(-1, 7)$ y $B(0, 1)$, halla:**

a) Las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por ellos.

b) Tres puntos que pertenezcan a dicha recta.

a) El vector director de la recta es: $\vec{v} = \overrightarrow{AB} = (1, -6)$.

Las ecuaciones paramétricas son:

$$\left.\begin{array}{l} x = -1 + 1 \cdot t \\ y = 7 + (-6) \cdot t \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} x = -1 + t \\ y = 7 - 6t \end{array}\right\}$$

b) $t = 1 \rightarrow x = -1 + 1 = 0 \qquad y = 7 - 6 \cdot 1 = 1$

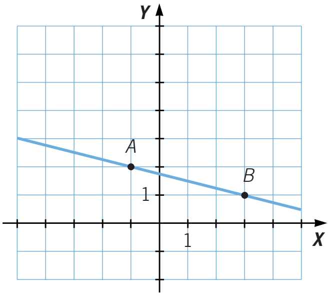
$t = 2 \rightarrow x = -1 + 2 = 1 \qquad y = 7 - 6 \cdot 2 = -5$

$t = -1 \rightarrow x = -1 - 1 = -2 \qquad y = 7 - 6 \cdot (-1) = 13$

020 **La siguiente gráfica muestra una recta.**

a) Escribe las ecuaciones paramétricas y la ecuación vectorial.

b) ¿Pertenece el punto $(-6, 4)$ a la recta?



La recta pasa por los puntos $A(-1, 2)$ y $B(3, 1)$.

El vector director de la recta es:

$\vec{v} = \overrightarrow{AB} = (4, -1)$

a) Las ecuaciones paramétricas son:

$$\left.\begin{array}{l} x = -1 + 4 \cdot t \\ y = 2 + (-1) \cdot t \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} x = -1 + 4t \\ y = 2 - t \end{array}\right\}$$

La ecuación vectorial es: $(x, y) = (-1, 2) + t \cdot (4, -1)$.

b) No, ya que no existe ningún valor t para que se cumpla $(-6, 4) = (-1, 2) + t \cdot (4, -1)$.

021 **Calcula la ecuación continua de la recta que pasa por estos puntos.**

$A(3, -1)$ $\qquad$ $B(4, 5)$

Punto: $A(3, -1)$ $\qquad$ Vector director: $\vec{v} = \overrightarrow{AB} = (1, 6)$

Ecuación continua: $\dfrac{x - 3}{1} = \dfrac{y + 1}{6}$

022 **Halla la ecuación continua de la siguiente recta expresada en forma paramétrica.**

$$\left.\begin{array}{l} \boldsymbol{x = 2 - 3t} \\ \boldsymbol{y = 2t} \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} x = 2 - 3t \rightarrow t = \dfrac{x - 2}{-3} \\ y = 2t \rightarrow t = \dfrac{y}{2} \end{array}\right\} \rightarrow \frac{x - 2}{-3} = \frac{y}{2}$$

023 **Calcula la ecuación de la recta que pasa por el punto *A*(2, 3) y tiene como vector director $\vec{v} = (-1, 0)$.**

$$\left.\begin{array}{l} x = 2 + (-1)\cdot t \\ y = 3 + 0\cdot t \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} x = 2 - t \\ y = 3 \end{array}\right\}$$

024 **Expresa la recta que pasa por los puntos *A*(1, −2) y *B*(1, 2) mediante sus ecuaciones:**

a) Vectorial. **b) Paramétricas.**

¿Se puede expresar en forma continua? ¿Por qué?

El vector director de la recta es: $\vec{v} = \overrightarrow{AB} = (0, 4)$.

a) Ecuación vectorial: $(x, y) = (1, -2) + t\cdot(0, 4)$

b) Ecuaciones paramétricas: $\left.\begin{array}{l} x = 1 + 0\cdot t \\ y = -2 + 4\cdot t \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} x = 1 \\ y = -2 + 4t \end{array}\right\}$

La recta no se puede expresar en forma continua, porque una de las coordenadas del vector director es cero.

025 **Determina las ecuaciones explícita y punto-pendiente de la recta que pasa por *A*(0, −4) y su vector director es $\vec{v} = (-1, 7)$.**

Ecuación explícita: $y = -7x - 4$

La pendiente es: $m = \dfrac{7}{-1} = -7$.

Ecuación punto-pendiente: $y + 4 = -7x$

026 **La ecuación de una recta es $y = 3x - 3$. ¿Cuál es la pendiente? Halla un vector director.**

La pendiente de la recta es $m = 3$.

Un vector director de la recta es $\vec{v} = (1, 3)$.

027 **La ecuación de la recta *r* es $y = -x + 2$.**

a) ¿Cuál es el valor de la pendiente? ¿Y el de la ordenada en el origen?

b) Determina las coordenadas de uno de sus vectores directores.

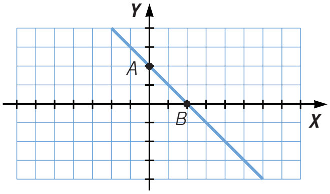
c) Obtén dos puntos de la recta y dibújala.

d) El punto *A*(−1, 4), ¿pertenece a esa recta?

a) La pendiente es −1 y la ordenada en el origen es 2.

b) Un vector director es (1, −1).

c) $A = (0, 2)$, $B = (2, 0)$



d) $4 \neq -1\cdot(-1) + 2$

No pertenece a la recta.

028 **Calcula la ecuación general de la recta que pasa por los puntos $A(0, -1)$ y $B(3, 2)$.**

Vector director: $\vec{v} = (3, 3)$.

La ecuación general es: $-3x + 3y + C = 0$.

Como el punto $B(3, 2)$ pertenece a la recta, resulta:

$$-3 \cdot 3 + 3 \cdot 2 + C = 0 \rightarrow C = 3$$

La ecuación general o implícita de la recta es: $-x + y + 1 = 0$.

029 **¿Cuál es la ecuación general de la recta cuya ecuación vectorial es $(x, y) = (1, 1) + t \cdot (3, 1)$?**

Vector director: $\vec{v} = (3, 1)$.

La ecuación general es: $-x + 3y + C = 0$.

Como el punto $(1, 1)$ pertenece a la recta, resulta:

$$-1 + 3 \cdot 1 + C = 0 \rightarrow C = -2$$

La ecuación general o implícita de la recta es: $-x + 3y - 2 = 0$.

030 **La pendiente de una recta es $m = 2$ y sabemos que pasa por el punto $A(0, -1)$.**

a) Escribe su ecuación general.

b) Calcula un vector director y otro paralelo.

a) Vector director: $\vec{v} = (1, 2)$.

La ecuación general es: $-2x + y + C = 0$.

Como el punto $A(0, -1)$ pertenece a la recta, resulta:

$$-2 \cdot 0 - 1 + C = 0 \rightarrow C = 1$$

La ecuación general o implícita de la recta es: $-2x + y + 1 = 0$.

b) Un vector director es: $\vec{v} = (B, -A) = (1, 2)$.

Un vector paralelo es: $\vec{u} = (2, 4)$.

031 **Indica cuál es la posición relativa de las siguientes rectas en el plano.**

a) $r\colon x + 3y + 3 = 0$
$s\colon x - 5y + 3 = 0$

b) $r\colon x + 3y + 2 = 0$
$s\colon 3x + 9y + 6 = 0$

a) El vector director de r es $(3, -1)$ y su pendiente es $m = \dfrac{-1}{3}$.

El vector director de s es $(-5, -1)$ y su pendiente es $m' = \dfrac{-1}{-5} \neq \dfrac{1}{3} = m$.

Las rectas son secantes.

b) El vector director de r es $(3, -1)$ y el vector director de s es $(9, -3)$.

Los vectores directores son proporcionales: $\dfrac{-1}{3} = \dfrac{-3}{9}$,

y el punto $(1, -1)$ pertenece a r y s. Las rectas son coincidentes.

032 **Estudia la posición relativa de las rectas r: $(x, y) = t \cdot (3, 1)$ y s: $x - 5y + 3 = 0$.**

El vector director de r es $(3, 1)$ y su pendiente es $m = \frac{1}{3}$.

El vector director de s es $(-5, -1)$ y su pendiente es $m' = \frac{-1}{-5} \neq \frac{1}{3}$.

Las rectas son secantes.

033 **¿Cuánto tiene que valer A para que las rectas r: $y = Ax + 6$ y s: $\frac{x}{2} = \frac{y-6}{4}$ sean paralelas?**

Un vector director de s es $(2, 4)$ y su pendiente es 2.

Las rectas son paralelas cuando $A = 2$.

ACTIVIDADES

034 ●● **Escribe tres ejemplos de magnitudes escalares y otros tres de magnitudes vectoriales.**

Magnitudes escalares: la edad de Juan, la altura de María y el precio de la compra.

Magnitudes vectoriales: la gravedad, la aceleración de un móvil y la frenada de un coche.

035 ● **Dibuja el vector $\overrightarrow{AB}$, cuyo origen y extremo son:**

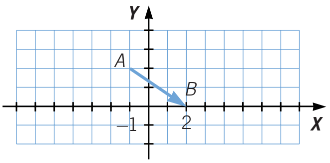
a) $A(-1, 2)$ y $B(2, 0)$

b) $A(2, 0)$ y $B(-1, 2)$

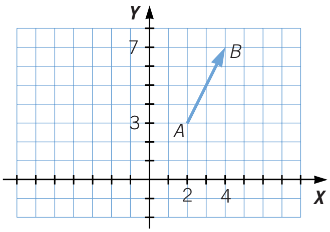
c) $A(2, 3)$ y $B(4, 7)$

d) $A(-2, 3)$ y $B(-4, 7)$

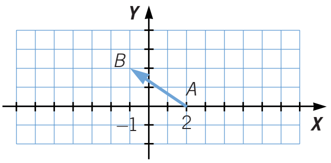
a)



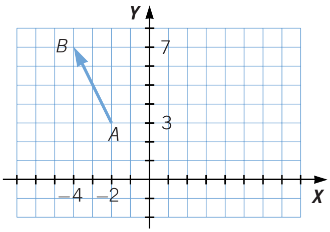
c)



b)



d)



036 Calcula las coordenadas del vector $\overrightarrow{AB}$, siendo A y B los siguientes puntos.

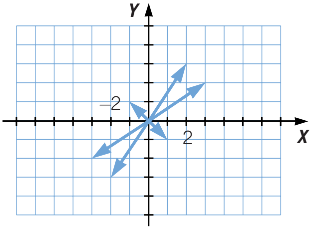
a) $A(0, 2)$ y $B(1, -1)$
b) $A(2, 1)$ y $B(4, 3)$
c) $A(-2, 1)$ y $B(-5, 1)$
d) $A(0, 0)$ y $B(6, 2)$

a) $\overrightarrow{AB} = (1, -3)$
b) $\overrightarrow{AB} = (2, 2)$
c) $\overrightarrow{AB} = (-3, 0)$
d) $\overrightarrow{AB} = (6, 2)$

037 ¿Cuántos vectores se pueden formar con los puntos $A(1, 2)$, $B(3, 5)$ y $C(4, 4)$? Descríbelos y represéntalos.

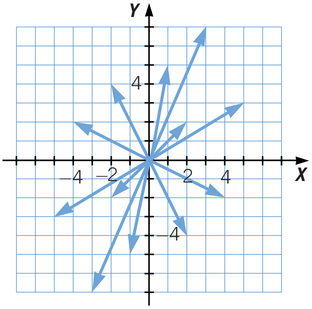
Se pueden formar 6 vectores:

$\overrightarrow{AB} = (2, 3)$ $\overrightarrow{BA} = (-2, -3)$
$\overrightarrow{BC} = (1, -1)$ $\overrightarrow{CB} = (-1, 1)$
$\overrightarrow{CA} = (-3, -2)$ $\overrightarrow{AC} = (3, 2)$



038 ¿Cuántos vectores se pueden formar con los puntos $A(4, 1)$, $B(2, 5)$, $C(0, 3)$ y $D(-1, -2)$? Descríbelos y represéntalos.

$\overrightarrow{AB} = (-2, 4)$ $\overrightarrow{BA} = (2, -4)$
$\overrightarrow{AC} = (-4, 2)$ $\overrightarrow{CA} = (4, -2)$
$\overrightarrow{AD} = (-5, -3)$ $\overrightarrow{DA} = (5, 3)$
$\overrightarrow{BC} = (-2, -2)$ $\overrightarrow{CB} = (2, 2)$
$\overrightarrow{BD} = (-3, -7)$ $\overrightarrow{DB} = (3, 7)$
$\overrightarrow{CD} = (-1, -5)$ $\overrightarrow{DC} = (1, 5)$



039 Calcula las coordenadas del punto A:

a) Si $\overrightarrow{AB} = (-1, 3)$ y $B(5, 2)$.
b) Si $\overrightarrow{AB} = (2, 3)$ y $B(1, 4)$.
c) Si $\overrightarrow{AB} = (-4, 1)$ y $B(-3, 3)$.

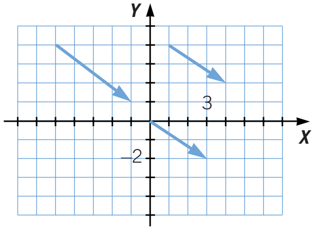
a) $A = (6, -1)$ b) $A = (-1, 1)$ c) $A = (1, 2)$

040 Calcula las coordenadas del punto B:

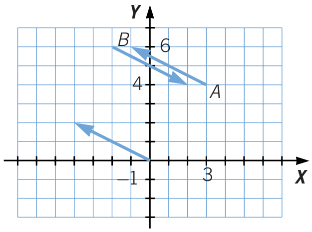
a) Si $\overrightarrow{AB} = (0, 2)$ y $A(-3, 5)$.
b) Si $\overrightarrow{AB} = (1, 0)$ y $A(4, 6)$.
c) Si $\overrightarrow{AB} = (2, 4)$ y $A(-2, 4)$.

a) $B = (-3, 7)$ b) $B = (5, 6)$ c) $B = (0, 8)$

041 Dibuja dos vectores que tengan el mismo sentido que $\overrightarrow{AB} = (3, -2)$.



042 Dibuja dos vectores que tengan la misma dirección que $\overrightarrow{AB}$, siendo $A(3, 4)$ y $B(-1, 6)$.

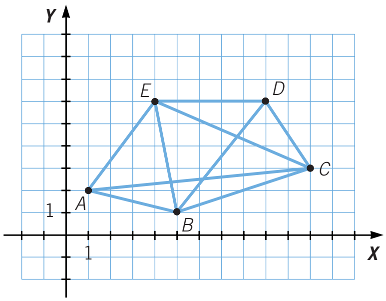


043 Calcula las coordenadas de los vectores $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BE}$ y $\overrightarrow{BD}$ en el siguiente gráfico.

$\overrightarrow{AC} = (11, 3) - (1, 2) = (10, 1)$

$\overrightarrow{BE} = (4, 6) - (5, 1) = (-1, 5)$

$\overrightarrow{BD} = (9, 6) - (5, 1) = (4, 5)$



044 Si los puntos $A(1, 1)$, $B(1, 3)$ y $C(7, 3)$ son vértices del paralelogramo *ABCD*, calcula.

a) Las coordenadas de *D*.

b) El vector $\overrightarrow{BD}$.

a) Por ser paralelogramo, tenemos que:

$AB = CD$, por lo que: $\overrightarrow{AB} = (0, 2) \rightarrow \overrightarrow{CD} = (0, 2) \rightarrow D = (7, 5)$.

b) $\overrightarrow{BD} = (6, 2)$

045 Encuentra dos vectores que cumplan que:

a) Tienen la misma dirección y sentido, siendo uno de ellos con origen en (0, 0) y otro en (2, 4).

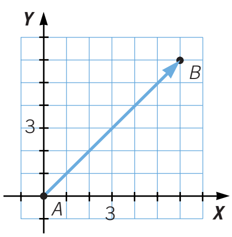
b) Tienen la misma dirección y sentido contrario.

a) $\overrightarrow{AB}$ con $A = (0, 0)$, $B = (1, 1)$ y $\overrightarrow{CD}$ con $C = (2, 4)$, $D = (4, 6)$.

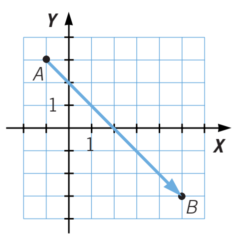
b) $\overrightarrow{AB}$ con $A = (0, 0)$, $B = (1, 1)$ y $\overrightarrow{CD}$ con $C = (2, 4)$, $D = (0, 2)$.

046 Calcula el módulo de los vectores.

a)



b)



a) $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{36 + 36} = \sqrt{72}$

b) $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{36 + 36} = \sqrt{72}$

047 Obtén el módulo del vector $\overrightarrow{AB}$.

a) $A(1, 1)$ y $B(2, 3)$

b) $A(-4, 1)$ y $B(5, -2)$

c) $A(3, -2)$ y $B(1, -1)$

d) $A(-3, 0)$ y $B(0, 4)$

a) $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{1 + 4} = \sqrt{5}$

b) $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{81 + 9} = \sqrt{90}$

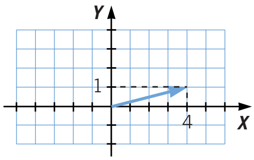
c) $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{4 + 1} = \sqrt{5}$

d) $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{9 + 16} = 5$

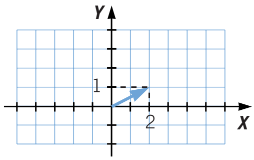
048 Dibuja un vector cuyo módulo sea:

a) $\sqrt{17}$ **b)** $\sqrt{29}$ **c)** $\sqrt{5}$ **d)** $\sqrt{13}$

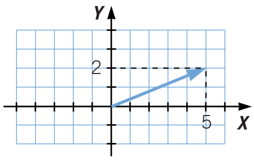
a)



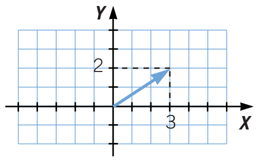
c)



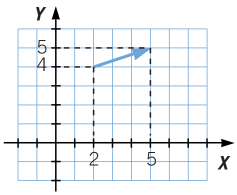
b)



d)

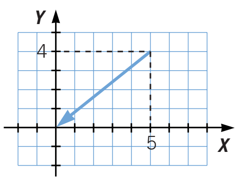


049 ●● **Dibuja un vector con origen en (2, 4) y módulo $\sqrt{10}$. ¿Existe más de uno? Razona la respuesta.**



Existen infinitos vectores, tantos como direcciones y sentidos se pueden tomar.

050 ●● **Dibuja un vector con extremo en (0, 0) y módulo $\sqrt{41}$. ¿Existe más de uno? Razona la respuesta.**



Existen infinitos vectores, tantos como direcciones y sentidos se pueden tomar.

051 ● **Escribe dos vectores equivalentes y otros dos paralelos al vector $\overrightarrow{AB}$, siendo $A(-4, 3)$ y $B(1, -2)$.**

$\overrightarrow{AB} = (5, -5)$

Equivalentes:

$C(2, 8)$, $D(7, 3)$

$E(1, 5)$, $F(6, 0)$

Los vectores son $\overrightarrow{CD}$ y $\overrightarrow{EF}$.

Paralelos:

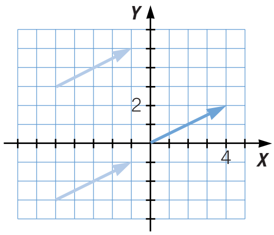
$G(0, -3)$, $H(-5, 2)$

$I(3, -11)$, $J(13, 1)$

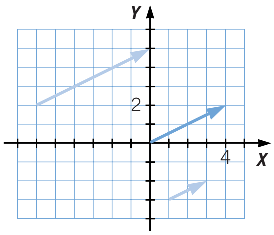
Los vectores son $\overrightarrow{GH}$ e $\overrightarrow{IJ}$.

052 ● **Dibuja dos vectores equivalentes a $\overrightarrow{AB} = (4, 2)$ y otros dos paralelos, situados en diferentes cuadrantes.**

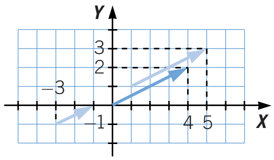
Equivalentes:



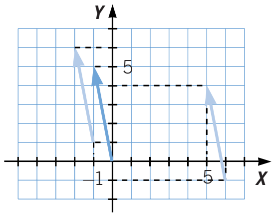
Paralelos:



053 ●● **Dibuja un vector equivalente a $\overrightarrow{AB} = (4, 2)$ y otro paralelo con origen en (1, 1) y en (−3, −1), respectivamente.**



054 ●● **Dibuja un vector equivalente a $\overrightarrow{AB} = (-1, 5)$ y otro paralelo con extremo en (−2, 6) y en (5, 4), respectivamente.**



055 ● **Halla la suma de los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$.**

a) $A(0, 2)$, $B(2, 5)$, $C(2, -1)$ y $D(5, -2)$

b) $A(3, 5)$, $B(-1, 6)$, $C(6, 4)$ y $D(5, 0)$

a) $\overrightarrow{AB} = (2, 3)$, $\overrightarrow{CD} = (3, -1) \rightarrow \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = (5, 2)$

b) $\overrightarrow{AB} = (-4, 1)$, $\overrightarrow{CD} = (-1, -4) \rightarrow \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = (-5, -3)$

056 ● **Obtén la diferencia de los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$.**

a) $A(-3, 2)$, $B(0, 5)$, $C(3, 1)$ y $D(4, -2)$

b) $A(0, 5)$, $B(-1, 3)$, $C(-2, 4)$ y $D(5, 1)$

a) $\overrightarrow{AB} = (3, 3)$, $\overrightarrow{CD} = (1, -3) \rightarrow \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD} = (2, 6)$

b) $\overrightarrow{AB} = (-1, -2)$, $\overrightarrow{CD} = (7, -3) \rightarrow \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD} = (-8, 1)$

057 ● **Dados los vectores $\vec{u} = (-6, 1)$ y $\vec{v} = (2, 3)$, calcula.**

a) $\vec{u} + \vec{v}$ **b) $\vec{u} - \vec{v}$**

a) $\vec{u} + \vec{v} = (-4, 4)$ b) $\vec{u} - \vec{v} = (-8, -2)$

058 ● **Determina el módulo del vector que resulta de sumar los vectores $\vec{u} = (3, 7)$ y $\vec{v} = (-6, 2)$.**

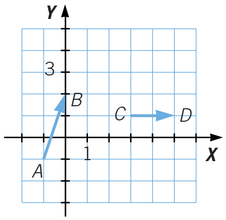
$\vec{u} + \vec{v} = (-3, 9) \rightarrow |\vec{u} + \vec{v}| = \sqrt{9 + 81} = \sqrt{90}$

059 ● **Calcula el módulo del vector que resulta de restar los vectores $\vec{u} = (4, -2)$ y $\vec{v} = (-3, 1)$.**

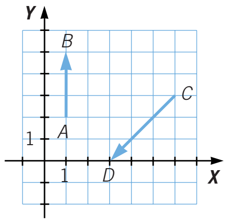
$\vec{u} - \vec{v} = (7, -3) \rightarrow |\vec{u} - \vec{v}| = \sqrt{49 + 9} = \sqrt{58}$

060 Obtén gráficamente la suma y la diferencia de los vectores $\vec{AB}$ y $\vec{CD}$.

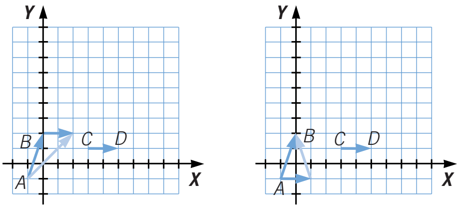
a)



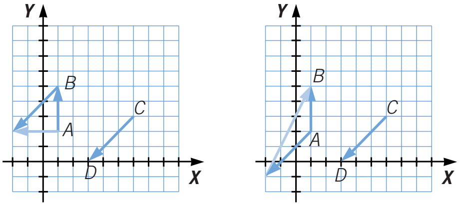
b)



a)



b)



061 **Halla $\vec{v}$, si $\vec{u} = (5, 4)$ y $\vec{u} + \vec{v} = (2, 6)$.**

$\vec{v} = (\vec{u} + \vec{v}) - \vec{u} = (2, 6) - (5, 4) = (-3, 2)$

062 **Calcula $\vec{v}$, sabiendo que $\vec{u} = (-1, 6)$ y que $\vec{u} - \vec{v} = (3, -2)$.**

$\vec{v} = \vec{u} - (\vec{u} - \vec{v}) = (-1, 6) - (3, -2) = (-4, 8)$

063 **Halla las coordenadas de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, si $\vec{u} + \vec{v} = (1, 1)$ y $\vec{u} - \vec{v} = (3, 5)$.**

$2 \cdot \vec{u} = (\vec{u} + \vec{v}) + (\vec{u} - \vec{v}) = (1, 1) + (3, 5) = (4, 6) \rightarrow \vec{u} = (2, 3)$

$2 \cdot \vec{v} = (\vec{u} + \vec{v}) - (\vec{u} - \vec{v}) = (1, 1) - (3, 5) = (-2, -4) \rightarrow \vec{v} = (-1, -2)$

064 Representa el vector $k\vec{u}$, con origen en (0, 0), en estos casos.

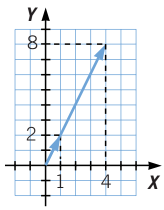
a) $k = 4$ y $\vec{u} = (1, 2)$

b) $k = -2$ y $\vec{u} = (-2, 3)$

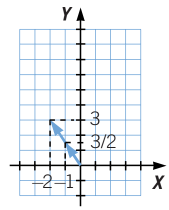
c) $k = \frac{1}{2}$ y $\vec{u} = (-2, 3)$

d) $k = \frac{3}{5}$ y $\vec{u} = (10, 20)$

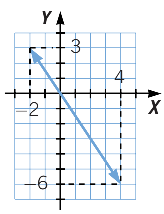
a) $4 \cdot \vec{u} = (4, 8)$



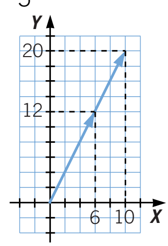
c) $\frac{1}{2} \cdot \vec{u} = \left(-1, \frac{3}{2}\right)$



b) $-2 \cdot \vec{u} = (4, -6)$



d) $\frac{3}{5} \cdot \vec{u} = (6, 12)$



065 Sabiendo que $A(8, -3)$, $B(5, -1)$ y $C(4, 3)$, calcula los siguientes vectores.

a) $3 \cdot \overrightarrow{AB}$

b) $-5 \cdot \overrightarrow{BC}$

c) $-2 \cdot \overrightarrow{CA}$

d) $4 \cdot \overrightarrow{AC}$

e) $\overrightarrow{BA} + 3 \cdot \overrightarrow{BC}$

f) $\overrightarrow{AC} - 4 \cdot \overrightarrow{AB}$

a) $\overrightarrow{AB} = (-3, 2) \rightarrow 3 \cdot \overrightarrow{AB} = (-9, 6)$

b) $\overrightarrow{BC} = (-1, 4) \rightarrow -5 \cdot \overrightarrow{BC} = (5, -20)$

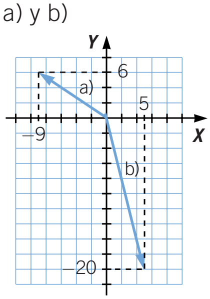
c) $\overrightarrow{CA} = (4, -6) \rightarrow -2 \cdot \overrightarrow{CA} = (-8, 12)$

d) $\overrightarrow{AC} = (-4, 6) \rightarrow 4 \cdot \overrightarrow{AC} = (-16, 24)$

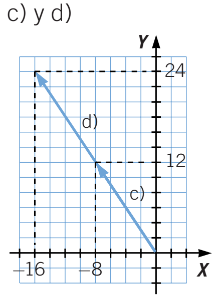
e) $\overrightarrow{BA} = (3, -2)$, $\overrightarrow{BC} = (-1, 4) \rightarrow \overrightarrow{BA} + 3 \cdot \overrightarrow{BC} = (3, -2) + (-3, 12) = (0, 10)$

f) $\overrightarrow{AC} = (-4, 6)$, $\overrightarrow{AB} = (-3, 2) \rightarrow \overrightarrow{AC} - 4 \cdot \overrightarrow{AB} = (4, 6) - (-12, 8) = (16, -2)$

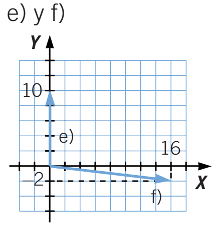
a) y b)



c) y d)



e) y f)



066 Halla el punto trasladado del punto *A*(4, 5) por estos vectores.

a) $\vec{v} = (-2, 5)$
b) $\vec{v} = (0, 4)$
c) $\vec{v} = (1, -3)$
d) $\vec{v} = (-4, 0)$

a) $A' = A + \vec{v} = (2, 10)$
b) $A' = A + \vec{v} = (4, 9)$
c) $A' = A + \vec{v} = (5, 2)$
d) $A' = A + \vec{v} = (0, 5)$

067 **HAZLO ASÍ**

¿CÓMO SE CALCULA LA DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS?

Calcula la distancia entre dos puntos *A*(−1, 3) y *B*(2, −1).

La **distancia entre dos puntos** coincide con el módulo del vector que tiene como extremos esos puntos.

PRIMERO. Se calculan las coordenadas del vector $\overrightarrow{AB}$.

$$\overrightarrow{AB} = (2 - (-1), -1 - 3) = (3, -4)$$

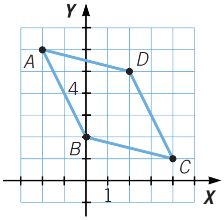
SEGUNDO. Se halla su módulo.

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$

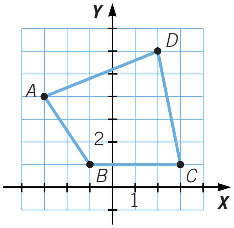
La distancia entre *A* y *B* es de 5 unidades.

068 Dadas las siguientes figuras, halla su perímetro.

a)



b)



a)
$$\left.\begin{array}{l} |\overrightarrow{AB}| = |(2, -4)| = \sqrt{20} \\ |\overrightarrow{BC}| = |(4, -1)| = \sqrt{17} \\ |\overrightarrow{CD}| = |(-2, 4)| = \sqrt{20} \\ |\overrightarrow{DA}| = |(-4, 1)| = \sqrt{17} \end{array}\right\} \rightarrow P = 2 \cdot \left(\sqrt{20} + \sqrt{17}\right)$$

b)
$$\left.\begin{array}{l} |\overrightarrow{AB}| = |(2, -3)| = \sqrt{13} \\ |\overrightarrow{BC}| = |(4, 0)| = 4 \\ |\overrightarrow{CD}| = |(-1, 5)| = \sqrt{26} \\ |\overrightarrow{DA}| = |(-5, -2)| = \sqrt{29} \end{array}\right\} \rightarrow P = 4 + \sqrt{13} + \sqrt{26} + \sqrt{29}$$

069 **HAZLO ASÍ**

¿CÓMO SE CALCULA EL PUNTO MEDIO DE UN SEGMENTO?

Calcula las coordenadas del punto medio del segmento de extremos *A*(−2, 3) y *B*(2, −1).

El **punto medio de un segmento** se calcula sumando al punto A la mitad del vector $\overrightarrow{AB}$.

PRIMERO. Se calculan las coordenadas del vector $\overrightarrow{AB}$.

$$\overrightarrow{AB} = (2 - (-2), -1 - 3) = (4, -4)$$

SEGUNDO. Se hallan la coordenadas del punto medio, sumando a A la mitad de $\overrightarrow{AB}$.

$$M = A + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \rightarrow (x, y) = (-2, 3) + \frac{1}{2} \cdot (4, -4) = (0, 1)$$

Las coordenadas del punto medio son (0, 1).

070 **Calcula el punto medio del segmento *AB*, cuyos extremos son *A*(1, 4) y *B*(4, 3). Si al punto medio le llamamos *M*, calcula el punto medio de los segmentos *AM* y *MB*.**

$$M = A + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = (1, 4) + \frac{1}{2} \cdot (3, -1) = \left(\frac{5}{2}, \frac{7}{2}\right)$$

$$M_1 = A + \frac{1}{2}\overrightarrow{AM} = (1, 4) + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{7}{4}, \frac{15}{4}\right)$$

$$M_2 = M + \frac{1}{2}\overrightarrow{MB} = \left(\frac{5}{2}, \frac{7}{2}\right) + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{13}{4}, \frac{13}{4}\right)$$

071 **Averigua las coordenadas del punto *A*, sabiendo que el punto medio del segmento *AB* es *M*(5, 2) y el punto *B*(7, −3).**

$$A = M + \overrightarrow{BM} = (5, 2) + (-2, 5) = (3, 7)$$

072 **Halla las coordenadas del punto *B*, si *A*(−2, −1) y el punto medio es $M\left(\frac{1}{4}, \frac{5}{2}\right)$.**

$$B = M + \overrightarrow{AM} = \left(\frac{1}{4}, \frac{5}{2}\right) + \left(\frac{9}{4}, \frac{7}{2}\right) = \left(\frac{5}{2}, 6\right)$$

073 **Calcula la ecuación de la recta que pasa por los puntos *A*(5, 3) y *B*(4, 7) en forma vectorial, paramétrica y continua.**

Vector director: (−1, 4)

Ecuación vectorial: $(x, y) = (5, 3) + t \cdot (-1, 4)$

Ecuaciones paramétricas: $\left.\begin{array}{l} x = 5 - t \\ y = 3 + 4t \end{array}\right\}$

Ecuación continua: $\dfrac{x - 5}{-1} = \dfrac{y - 3}{4}$

074 Obtén la ecuación de la recta, en forma implícita, que pasa por el punto $A(4, 1)$ y tiene como vector director $\vec{v} = (3, 1)$.

$A = -1$ y $B = 3$, la ecuación general es: $-x + 3y + C = 0$.

Como el punto $A(4, 1)$ pertenece a la recta, resulta:

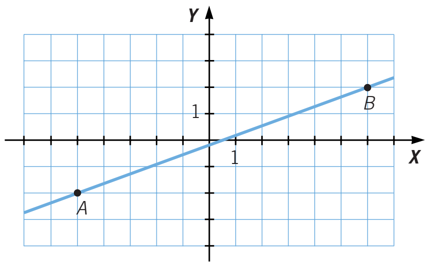
$$-4 + 3 \cdot 1 + C = 0 \rightarrow C = 1$$

La ecuación general o implícita de la recta es: $-x + 3y + 1 = 0$.

075 Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto $A(0, 2)$ y tiene como vector director $(-2, 3)$, en forma explícita.

Ecuación explícita: $y = -\dfrac{3}{2}x + 2$

076 A partir de la representación de la siguiente recta, calcula sus ecuaciones de todas las formas posibles.



La recta pasa por los puntos $A(-5, -2)$ y $B(6, 2)$.

El vector director es $\overrightarrow{AB} = (11, 4)$.

Ecuación vectorial:
$(x, y) = (-5, -2) + t \cdot (11, 4)$

Ecuaciones paramétricas: $\left.\begin{array}{l} x = -5 + 11t \\ y = -2 + 4t \end{array}\right\}$

Ecuación continua: $\dfrac{x+5}{11} = \dfrac{y+2}{4}$

Ecuación general o implícita: $4x - 11y - 2 = 0$

Ecuación explícita: $y = \dfrac{4}{11}x - \dfrac{2}{11}$

Ecuación punto-pendiente: $y + 2 = \dfrac{4}{11}(x + 5)$

077 Escribe la ecuación de estas rectas de todas las formas posibles.

a) $\left.\begin{array}{l} x = 2 - t \\ y = 3 + 2t \end{array}\right\}$

b) $(x, y) = (0, 3) + t \cdot (2, 1)$

c) $y = 3x - 1$

d) $y - 3 = 3 \cdot (x - 5)$

e) $2x + y - 5 = 0$

a) Ecuación vectorial: $(x, y) = (2, 3) + t \cdot (-1, 2)$

Ecuaciones paramétricas: $\left.\begin{array}{l} x = 2 - t \\ y = 3 + 2t \end{array}\right\}$

Ecuación continua: $\dfrac{x-2}{-1} = \dfrac{y-3}{2}$

Ecuación general o implícita: $2x + y - 7 = 0$

Ecuación explícita: $y = -2x + 7$

Ecuación punto-pendiente: $y - 3 = -2(x - 2)$

b) Ecuación vectorial: $(x, y) = (0, 3) + t \cdot (2, 1)$

Ecuaciones paramétricas: $\left.\begin{array}{l} x = 2t \\ y = 3 + t \end{array}\right\}$

Ecuación continua: $\dfrac{x}{2} = \dfrac{y-3}{1}$

Ecuación general o implícita: $x - 2y + 6 = 0$

Ecuación explícita: $y = \dfrac{1}{2}x + 3$

Ecuación punto-pendiente: $y - 3 = \dfrac{1}{2}x$

c) Ecuación explícita: $y = 3x - 1$

Ecuación general o implícita: $3x - y - 1 = 0$

Ecuación continua: $\dfrac{x}{1} = \dfrac{y+1}{3}$

Ecuaciones paramétricas: $\left.\begin{array}{l} x = t \\ y = -1 + 3t \end{array}\right\}$

Ecuación vectorial: $(x, y) = (0, -1) + t \cdot (1, 3)$

Ecuación punto-pendiente: $y + 1 = 3x$

d) Ecuación punto-pendiente: $y - 3 = 3 \cdot (x - 5)$

Ecuación explícita: $y = 3x - 12$

Ecuación general o implícita: $3x - y - 12 = 0$

Ecuación continua: $\dfrac{x-5}{1} = \dfrac{y-3}{3}$

Ecuaciones paramétricas: $\left.\begin{array}{l} x = 5 + t \\ y = 3 + 3t \end{array}\right\}$

Ecuación vectorial: $(x, y) = (5, 3) + t \cdot (1, 3)$

e) Ecuación general o implícita: $2x + y - 5 = 0$

Ecuación continua: $\dfrac{x}{1} = \dfrac{y-5}{-2}$

Ecuaciones paramétricas: $\left.\begin{array}{l} x = t \\ y = 5 - 2t \end{array}\right\}$

Ecuación vectorial: $(x, y) = (0, 5) + t \cdot (1, -2)$

Ecuación explícita: $y = -2x + 5$

Ecuación punto-pendiente: $y - 5 = -2x$

078 **Obtén cuatro puntos que pertenezcan a la recta de ecuación: $(x, y) = (1, 3) + t \cdot (2, 2)$.**

$t = 1 \longrightarrow (x, y) = (1, 3) + 1 \cdot (2, 2) = (3, 5)$

$t = 2 \longrightarrow (x, y) = (1, 3) + 2 \cdot (2, 2) = (5, 7)$

$t = -2 \rightarrow (x, y) = (1, 3) - 2 \cdot (2, 2) = (-3, -1)$

$t = -3 \rightarrow (x, y) = (1, 3) - 3 \cdot (2, 2) = (-5, -3)$

079 **HAZLO ASÍ**

¿CÓMO SE CALCULA EL PUNTO DE CORTE DE DOS RECTAS SECANTES?

Calcula el punto de corte de estas rectas.

$$\frac{x-3}{2}=\frac{y}{3} \qquad \left.\begin{aligned} x &= 2-3t \\ y &= 1+t \end{aligned}\right\}$$

PRIMERO. Se resuelve el sistema que plantean las dos ecuaciones de las rectas.

La segunda ecuación viene dada en forma paramétrica y, como están despejadas las variables x e y, se sustituyen esos valores en la primera ecuación.

$$\frac{x-3}{2}=\frac{y}{3} \rightarrow \frac{2-3t-3}{2}=\frac{1+t}{3}$$

Se resuelve la ecuación que resulta.

$$3\cdot(2-3t-3)=2\cdot(1+t)$$
$$6-9t-9=2+2t$$
$$11t=-5 \rightarrow t=\frac{-5}{11}$$

SEGUNDO. Se sustituye el valor de t en las ecuaciones paramétricas, donde x e y están despejadas.

$$x=2-3\cdot\frac{-5}{11}=\frac{37}{11}$$
$$y=1-\frac{5}{11}=\frac{6}{11}$$

TERCERO. Las coordenadas del punto de corte son la solución del sistema.

Luego el punto de corte es $P\left(\frac{37}{11},\frac{6}{11}\right)$.

080 ●● **Halla el punto de corte de estas rectas.**

$$r\!: \frac{x}{1}=\frac{y-2}{2} \qquad s\!: \left.\begin{aligned} x &= 4-t \\ y &= t \end{aligned}\right\}$$

Para hallar el punto de corte hay que resolver el sistema.

$$\frac{4-t}{1}=\frac{t-2}{2} \rightarrow 8-2t=t-2 \rightarrow t=\frac{10}{3}$$

$$x=4-\frac{10}{3}=\frac{2}{3} \qquad y=\frac{10}{3}$$

El punto de corte es $P\left(\frac{2}{3},\frac{10}{3}\right)$.

081 Calcula las coordenadas de los vértices del triángulo, cuyos lados están contenidos en las rectas que vienen expresadas mediante estas ecuaciones.

$$r\colon x - y - 1 = 0 \qquad s\colon x + y + 2 = 0 \qquad p\colon 3x - y + 2 = 0$$

Los vértices del triángulo son los puntos de intersección de las rectas:

$$\left.\begin{array}{l} r\colon x - y - 1 = 0 \\ s\colon x + y + 2 = 0 \end{array}\right\} \rightarrow x = -\frac{1}{2} \qquad y = -\frac{3}{2}$$

Un vértice es el punto de coordenadas $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right)$.

$$\left.\begin{array}{l} r\colon \ \ x - y - 1 = 0 \\ p\colon 3x - y + 2 = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} y = x - 1 \\ y = 3x + 2 \end{array}\right\} \rightarrow x = -\frac{3}{2} \qquad y = -\frac{3}{2} - 1 = -\frac{5}{2}$$

Otro vértice es el punto de coordenadas $\left(-\frac{3}{2}, -\frac{5}{2}\right)$.

$$\left.\begin{array}{l} s\colon \ \ x + y + 2 = 0 \\ p\colon 3x - y + 2 = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} y = -x - 2 \\ y = 3x + 2 \end{array}\right\} \rightarrow x = -1 \qquad y = 1 - 2 = -1$$

Otro vértice es el punto de coordenadas $(-1, -1)$.

082 Halla las coordenadas de los vértices del cuadrilátero, cuyos lados están contenidos en las rectas que tienen por ecuación:

$$r\colon 3x - 4y - 8 = 0 \qquad p\colon 2x + y + 2 = 0$$
$$s\colon x - 2y + 12 = 0 \qquad q\colon 2x + y + 5 = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} r\colon 3x - 4y - 8 = 0 \\ p\colon 2x + y + 2 = 0 \end{array}\right\} \rightarrow x = 0 \qquad y = -2$$

$$\left.\begin{array}{l} r\colon 3x - 4y - 8 = 0 \\ q\colon 2x + y + 5 = 0 \end{array}\right\} \rightarrow x = -\frac{12}{11} \qquad y = -\frac{31}{11}$$

$$\left.\begin{array}{l} s\colon x - 2y + 12 = 0 \\ p\colon 2x + y + 2 = 0 \end{array}\right\} \rightarrow x = -\frac{16}{5} \qquad y = \frac{22}{5}$$

$$\left.\begin{array}{l} s\colon x - 2y + 12 = 0 \\ q\colon 2x + y + 5 = 0 \end{array}\right\} \rightarrow x = -\frac{22}{5} \qquad y = \frac{24}{5}$$

083 ¿Cuáles son las ecuaciones que corresponden a las rectas que forman los ejes de coordenadas? Razona si puedes escribirlas de todas las formas.

- Eje de abscisas

  Ecuación vectorial: $(x, y) = (0, 0) + t \cdot (1, 0)$

  Ecuaciones paramétricas: $\left.\begin{array}{l} x = t \\ y = 0 \end{array}\right\}$ Ecuación general: $y = 0$

- Eje de ordenadas

  Ecuación vectorial: $(x, y) = (0, 0) + t \cdot (0, 1)$

  Ecuaciones paramétricas: $\left.\begin{array}{l} x = 0 \\ y = t \end{array}\right\}$ Ecuación general: $x = 0$

Ninguna de estas rectas se puede escribir en forma continua, porque ambas tienen algún componente de su vector director igual a cero.

084 ●●

Dos rectas tienen por ecuaciones:

$$\boldsymbol{r: y = 3x - 1}$$
$$\boldsymbol{s: (x, y) = (1, 3) + t \cdot (-3, 2)}$$

a) Escribe las rectas en forma paramétrica.

b) ¿Cuáles son sus vectores directores?

c) Calcula cuatro puntos distintos de cada una de las rectas.

d) Halla, si lo tienen, un punto común de ambas rectas.

a) $r: \left.\begin{array}{l} x = t \\ y = 3t - 1 \end{array}\right\}$ $\quad s: \left.\begin{array}{l} x = 1 - 3t \\ y = 3 + 2t \end{array}\right\}$

b) El vector director de r es $\vec{u} = (1, 3)$ y el vector director de s es $\vec{v} = (-3, 2)$.

c) Puntos de la recta r:

$t = 1 \rightarrow (1, 2)$; $t = 0 \rightarrow (0, -1)$; $t = 2 \rightarrow (2, 5)$; $t = -1 \rightarrow (-1, -4)$

Puntos de la recta s:

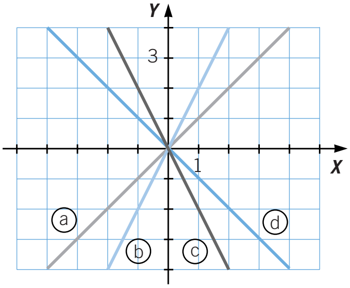
$t = 1 \rightarrow (-2, 5)$; $t = -2 \rightarrow (7, -1)$; $t = 0 \rightarrow (1, 3)$; $t = -1 \rightarrow (4, 1)$

d) $\left.\begin{array}{l} r: y = 3x - 1 \\ x: y = -\dfrac{2}{3}x + \dfrac{11}{3} \end{array}\right\} \rightarrow x = \dfrac{14}{11} \qquad y = \dfrac{-31}{11}$

085 ●●

Las rectas que no tienen término independiente en su forma general, verifican la propiedad de que pasan todas por el origen de coordenadas.

Halla las ecuaciones explícita e implícita de estas rectas, y comprueba que se verifica la propiedad.



a) $y = x \rightarrow x - y = 0$

b) $y = 2x \rightarrow 2x - y = 0$

c) $y = -2x \rightarrow -2x - y = 0 \rightarrow 2x + y = 0$

d) $y = -x \rightarrow -x - y = 0 \rightarrow x + y = 0$

No hay término independiente y el punto (0, 0) pertenece a todas las rectas.

086 **Estudia la posición de estas rectas en el plano.**

$$r\colon 2x + 3y - 1 = 0 \qquad s\colon 3x - 4y + 4 = 0$$

El vector director de r es $(3, -2)$ y su pendiente es $m = -\frac{2}{3}$.

El vector director de s es $(-4, -3)$ y su pendiente es $m' = \frac{3}{4}$.

Las pendientes son distintas, luego las rectas son secantes.

087 **Estudia la posición relativa en el plano de las siguientes parejas de rectas.**

a) $r\colon 3x + y - 7 = 0$ $\quad s\colon 3x + y + 5 = 0$

b) $r\colon x + y - 3 = 0$ $\quad s\colon 2x + 2y - 6 = 0$

c) $r\colon x + 3y - 4 = 0$ $\quad s\colon x + 2y + 5 = 0$

d) $r\colon -5x + 10y - 8 = 0$ $\quad s\colon 10x - 20y + 16 = 0$

e) $r\colon -x + 2y - 1 = 0$ $\quad s\colon 2 - x + 3y - 8 = 0$

f) $r\colon \frac{1}{2}x + y - 3 = 0$ $\quad s\colon x - \frac{1}{5}y + 8 = 0$

a) El vector director de r y de s es $(1, -3)$. Los vectores directores son iguales, pero el punto $(0, 7)$ de r no pertenece a s: $3 \cdot 0 + 7 + 5 \neq 0$. Las rectas son paralelas.

b) El vector director de r es $(1, -1)$ y el de s es $(2, -2)$. Los vectores directores son proporcionales y también los coeficientes: $\frac{1}{2} = \frac{1}{2} = \frac{-3}{-6}$. Las rectas son coincidentes.

c) El vector director de r es $(3, -1)$ y su pendiente es $m = -\frac{1}{3}$.

El vector director de s es $(2, -1)$ y su pendiente es $m' = \frac{-1}{2}$.

Las pendientes son distintas, luego las rectas son secantes.

d) El vector director de r es $(10, 5)$ y el de s es $(-20, -10)$. Los vectores directores son proporcionales y también los coeficientes: $\frac{-5}{10} = \frac{10}{-20} = \frac{-8}{16}$. Las rectas son coincidentes.

e) El vector director de r es $(2, 1)$ y su pendiente es $m = \frac{1}{2}$.

El vector director de s es $(3, 1)$ y su pendiente es $m' = \frac{1}{3}$.

Las pendientes son distintas, y las rectas son secantes.

f) El vector director de r es $\left(1, -\frac{1}{2}\right)$ y su pendiente es $m = -\frac{1}{2}$.

El vector director de s es $\left(-\frac{1}{5}, -1\right)$ y su pendiente es $m' = \frac{-1}{-\frac{1}{5}} = 5$.

Las pendientes son distintas, por lo que las rectas son secantes.

088 **Estudia la posición relativa de los siguientes pares de rectas en el plano.**

a) r: $(x, y) = (1, 3) + t \cdot (1, 2)$ $\quad$ s: $\dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y-5}{2}$

b) r: $\left.\begin{array}{l} x = 2 - t \\ y = t \end{array}\right\}$ $\quad$ s: $(x, y) = (2, 0) + t \cdot (2, -1)$

c) r: $\left.\begin{array}{l} x = 3 + 5t \\ y = 2 - 2t \end{array}\right\}$ $\quad$ s: $\dfrac{x-8}{10} = \dfrac{y}{-4}$

d) r: $2x - 3y = 0$ $\quad$ s: $(x, y) = t \cdot (1, -1)$

e) r: $\left.\begin{array}{l} x = -2t \\ y = -3 + 2t \end{array}\right\}$ $\quad$ s: $x + 3y - 2 = 0$

a) El vector director de r y s es $(1, 2)$. El punto $(1, 3)$ de r pertenece a s: $\dfrac{1-2}{1} = \dfrac{3-5}{2}$. Las rectas son coincidentes.

b) El vector director de r es $(-1, 1)$ y su pendiente es $m = -1$.

El vector director de s es $(2, -1)$ y su pendiente es $m' = \dfrac{-1}{2}$.

Las pendientes son distintas, por lo que las rectas son secantes.

c) El vector director de r es $(5, -2)$ y el de s es $(10, -4)$. Los vectores directores son proporcionales. El punto $(3, 2)$ de r pertenece también a s: $\dfrac{3-8}{10} = \dfrac{2}{-4}$. Las rectas son coincidentes.

d) El vector director de r es $(-3, -2)$ y su pendiente es $m = \dfrac{-2}{-3} = \dfrac{2}{3}$.

El vector director de s es $(1, -1)$ y su pendiente es $m' = \dfrac{-1}{1} = -1$.

Las pendientes son distintas, y las rectas son secantes.

e) El vector director de r es $(-2, 2)$ y su pendiente es $m = \dfrac{2}{-2} = -1$.

El vector director de s es $(3, -1)$ y su pendiente es $m' = \dfrac{-1}{3}$.

Las pendientes son distintas, luego las rectas son secantes.

089 **Calcula las coordenadas del vértice A de un triángulo isósceles, cuyo lado desigual coincide con el segmento de extremos $B(3, 1)$ y $C(9, 3)$, y sabiendo que la altura sobre BC es de 4 cm.**

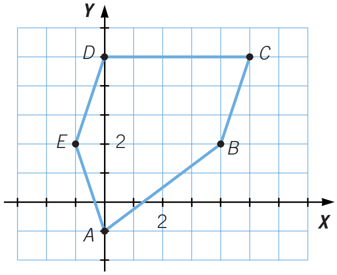
El vértice Awe(x, y) está a la misma distancia de B y de C.

$$(x-3)^2 + (y-1)^2 = (x-9)^2 + (y-3)^2 \to x^2 - 6x + 9 + y^2 - 2y + 1 =$$
$$= x^2 + 18x + 81 + y^2 - 6y + 9 \to 12x + 4y - 40 = 0 \to y = 10 - 3x$$

Por ser un triángulo isósceles, la base mide: $\overline{BC} = \sqrt{6^2 + 2^2} = \sqrt{20}$, y por el teorema de Pitágoras, la distancia de A a B y C es: $\overline{AC} = \overline{AB} = \sqrt{4^2 + 5} = \sqrt{16}$.

$$(x-3)^2 + (y-1)^2 = 21 \xrightarrow{y=10-3x} 10x^2 - 120x + 349 = 0$$
$$\to \left\{\begin{array}{l} x = 7{,}05 \to y = -1{,}15 \\ x = 4{,}95 \to y = 5{,}15 \end{array}\right. \to A(7{,}05; -1{,}15) \quad A(4{,}95; 5{,}15)$$

090 **Halla la suma de los vectores que forman los lados *AB*, *BC*, *CD*, *DE* y *EA* del siguiente polígono.**



¿Ocurre lo mismo en todos los polígonos?

La suma de los vectores es (0, 0). Esto ocurre en todos los polígonos cerrados.

091 **Si dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ tienen distinta dirección y $a \cdot \vec{u} = b \cdot \vec{v}$, siendo *a* y *b* números reales, ¿qué puedes afirmar sobre los números *a* y *b*?**

$\vec{u} = (u_1, u_2)$ $\qquad\qquad$ $\vec{v} = (v_1, v_2)$

Por tener los vectores distinta dirección: $\dfrac{v_1}{u_1} \neq \dfrac{v_2}{u_2}$

$$a \cdot \vec{u} = b \cdot \vec{v} \rightarrow (a \cdot u_1, a \cdot u_2) = (b \cdot v_1, b \cdot v_2) \rightarrow (a \cdot u_1 - b \cdot v_1, a \cdot u_2 - b \cdot v_2) = (0, 0)$$

$$\rightarrow \begin{cases} a \cdot u_1 - b \cdot v_1 = 0 \\ a \cdot u_2 - b \cdot v_2 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = \dfrac{b \cdot v_1}{u_1} \\ a = \dfrac{b \cdot v_2}{u_2} \end{cases} \rightarrow b \cdot \frac{v_1}{u_1} = b \cdot \frac{v_2}{u_2} \xrightarrow{\frac{v_1}{u_1} \neq \frac{v_2}{u_2}} b = 0 \rightarrow a = 0$$

Los números reales *a* y *b* son 0.

092 **Utilizando vectores, demuestra que las diagonales de un paralelogramo se cortan en su punto medio.**

El punto de corte es el corte de las rectas $A + a \cdot (\vec{u} + \vec{v})$ y $B + b \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = A + \vec{u} + b \cdot (\vec{u} - \vec{v})$.

$\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ $\qquad\qquad$ $\vec{v} = \overrightarrow{AD}$

$$A + a \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = A + \vec{u} + b \cdot (\vec{u} - \vec{v}) \rightarrow a \cdot \vec{u} + a \cdot \vec{v} =$$
$$= (b + 1) \cdot \vec{u} - b \cdot \vec{v} \rightarrow (a + b) \cdot \vec{v} = (b + 1 - a) \cdot \vec{u}$$

Como $\vec{u}$ y $\vec{v}$ no son vectores paralelos:

$a + b = 0 \rightarrow a = -b$

$$b + 1 - a = 0 \xrightarrow{a = -b} 2b + 1 = 0 \rightarrow b = -\frac{1}{2} \rightarrow a = \frac{1}{2}$$

El punto de corte es: $A + \dfrac{1}{2} \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = A + \dfrac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AC}$, que es el punto medio.

093 **Calcula la ecuación de la recta vertical que divide al triángulo, de vértices $A(0, 0)$, $B(2, 2)$ y $C(10, 2)$, en dos regiones con igual área.**

Tomando como base el lado horizontal y como altura la distancia al eje X:

$$\text{Área} = \frac{(10-2)\cdot 2}{2} = 8$$

La ecuación de los lados que no forman la base es: $\left.\begin{array}{l} y = x \\ y = \dfrac{x}{5} \end{array}\right\}$

La base del nuevo triángulo es: $10 - a$.

La altura del nuevo triángulo es $2 - \dfrac{a}{5}$.

Por tanto, el área será: $4 = \dfrac{(10-a)\cdot\left(2-\dfrac{a}{5}\right)}{2} \to a = \begin{cases} 10 + 2\sqrt{10} \\ 10 - 2\sqrt{10} \end{cases}$.

La recta vertical es: $x = 10 - 2\sqrt{10}$.

EN LA VIDA COTIDIANA

094 **Algunas especies de ballenas se encuentran en peligro de extinción.**

Pedro es biólogo marino y forma parte de una de las plataformas en defensa de estos mamíferos. En su equipo de trabajo han decidido colocar localizadores en algunas de las crías para seguir sus desplazamientos y asegurarse de que no sufren ningún daño.

Se le ha implantado uno de los localizadores a una hembra joven y se ha anotado su recorrido desde ese momento.

a) ¿Qué dirección debe tomar el barco del equipo de Pedro desde el punto inicial para volver a encontrar a la ballena?

b) ¿Cuántas millas deberá recorrer?

a) El barco debe tomar dirección Noroeste.

b) $2.500 + \sqrt{(5.000)^2 + (4.500)^2} = 6.726{,}81$ millas

095 ●●

En el radar de la torre de control de un aeropuerto se ve, en un instante $t = 0$, la posición de tres aviones.

Transcurrida una unidad de tiempo, es decir, cuando $t = 1$, los aviones aparecen en el radar en las siguientes posiciones.

La torre de control informa a dos de los aviones de que tienen que cambiar su trayectoria o su velocidad para evitar una colisión.

a) ¿Cuáles son los aviones que van a chocar?

b) Si estuvieras en la torre de control, ¿qué órdenes darías a cada uno de los aviones para evitar un accidente?

a) Los aviones parten de los puntos A, B y C, para llegar a A', B' y C'.

Avión 1: $A = (-2, 4)$; $A'(0, 3) \rightarrow \vec{u}_1 = (2, -1)$
La trayectoria que sigue es $A + t \cdot \vec{u}_1$.

Avión 2: $B = (-3, 1)$; $B'(1, 1) \rightarrow \vec{u}_2 = (4, 0)$
La trayectoria que sigue es $B + t \cdot \vec{u}_2$.

Avión 3: $C = (1, -3)$; $C'(4, 2) \rightarrow \vec{u}_3 = (3, 1)$
La trayectoria que sigue es $C + t \cdot \vec{u}_3$.

Para que los aviones chocaran tendrían que llegar al mismo punto en el mismo momento.

Aviones 2 y 3:

$$B + t \cdot \vec{u}_2 = C + t \cdot \vec{u}_3 \rightarrow (-3, 1) + t \cdot (4, 0) = (1, -3) + t \cdot (3, 1)$$
$$\rightarrow (-2, 2) = t \cdot (-1, 1) \rightarrow t = 2$$

Los aviones 2 y 3 se chocarían para $t = 2$.

b) Para que los aviones no se choquen es suficiente con indicarle a uno de ellos que cambie la trayectoria o modifique su velocidad.

10 Funciones

- FUNCIONES
  - EXPRESIÓN ALGEBRAICA
  - TABLA DE VALORES
  - GRÁFICA
  - DOMINIO Y RECORRIDO

- FUNCIONES DEFINIDAS A TROZOS

- PROPIEDADES DE LAS FUNCIONES
  - CONTINUIDAD
  - CRECIMIENTO Y DECRECIMIENTO
  - SIMETRÍA Y PERIODICIDAD

Alimento de parásitos

Otra vez se producía la misma situación, cada vez que cambiaban el destacamento encargado de vigilar el Centro de Investigación ocurría lo mismo: los nuevos soldados con su brillante uniforme del ejército nazi los insultaban, los humillaban y, si se atrevían a protestar, llegaban incluso al castigo físico.

Stefan Banach y su compañero Piotr agacharon la cabeza, y como si los comentarios no fueran con ellos, atravesaron la entrada disponiéndose a comenzar su trabajo.

Abrieron las cajas y, con meticulosa precisión, empezaron a alimentar a los diminutos parásitos.

Al verlo, los guardias se reían a la vez que hacían comentarios claramente ofensivos hacia los dos operarios.

–¿Qué es eso, Hans? –preguntó un soldado.

El otro contestó entre risotadas:

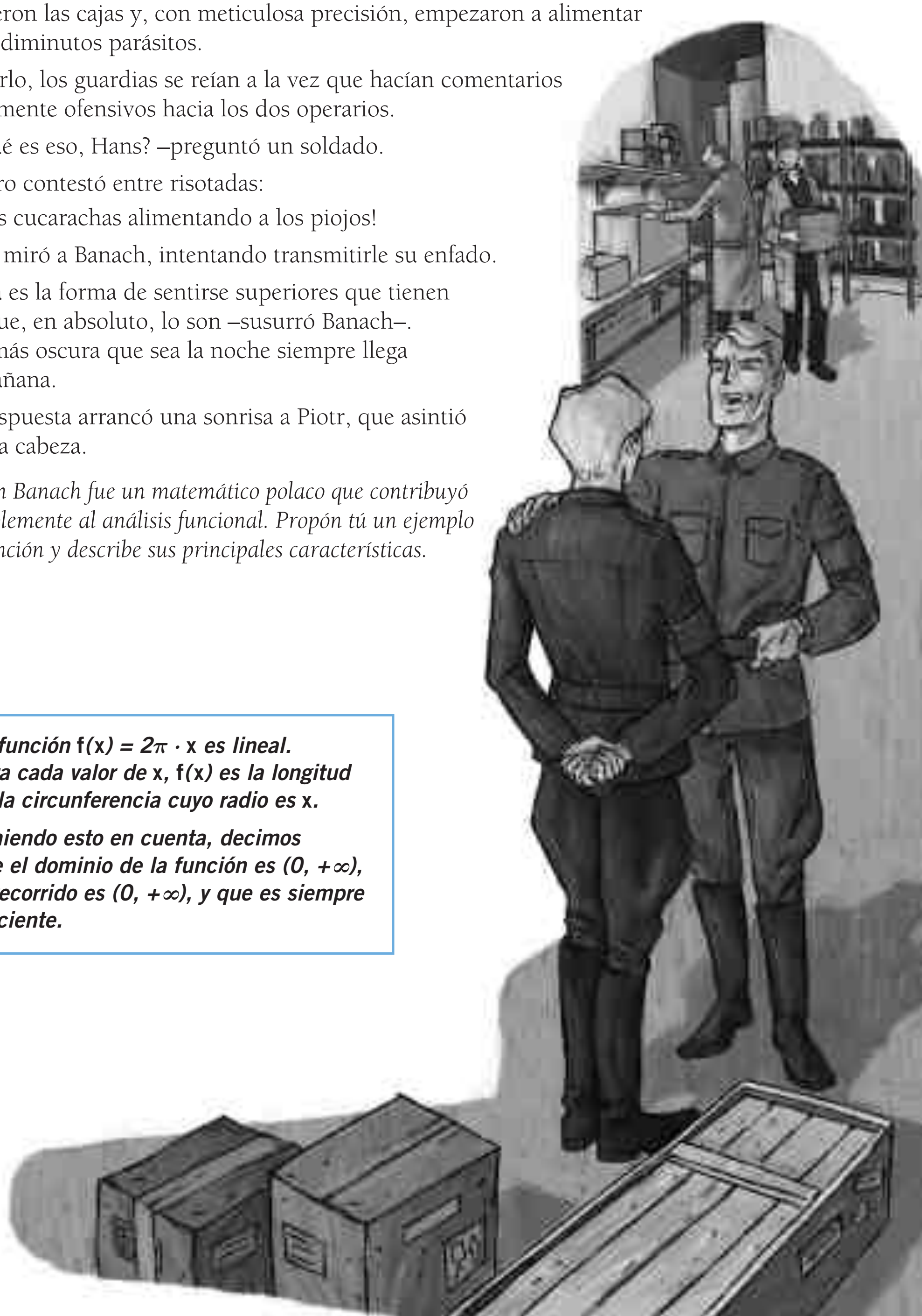
–¡Dos cucarachas alimentando a los piojos!

Piotr miró a Banach, intentando transmitirle su enfado.

–Esta es la forma de sentirse superiores que tienen los que, en absoluto, lo son –susurró Banach–. Por más oscura que sea la noche siempre llega la mañana.

La respuesta arrancó una sonrisa a Piotr, que asintió con la cabeza.

Stefan Banach fue un matemático polaco que contribuyó notablemente al análisis funcional. Propón tú un ejemplo de función y describe sus principales características.



La función $f(x) = 2\pi \cdot x$ es lineal. Para cada valor de x, $f(x)$ es la longitud de la circunferencia cuyo radio es x.

Teniendo esto en cuenta, decimos que el dominio de la función es $(0, +\infty)$, el recorrido es $(0, +\infty)$, y que es siempre creciente.

Funciones

EJERCICIOS

001 **Expresa, de forma algebraica y mediante una tabla de valores, la función que asigna a cada número su cubo menos dos veces su cuadrado.**

Expresión algebraica: $y = x^3 - 2x^2$ o $f(x) = x^3 - 2x^2$

Tabla de valores:

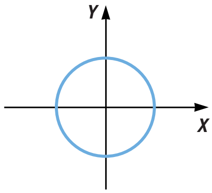
x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	-16	-3	0	-1	0

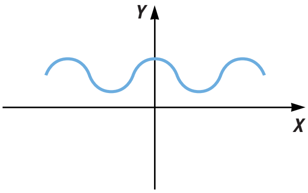
002 **Expresa, mediante un enunciado y una tabla de valores, la función $y = 2x - 1$.**

En el aula hay el doble de chicas menos uno que de chicos.

x	1	2	3	4	5
$f(x)$	1	3	5	7	9

003 **Averigua si estas gráficas representan a una función.**





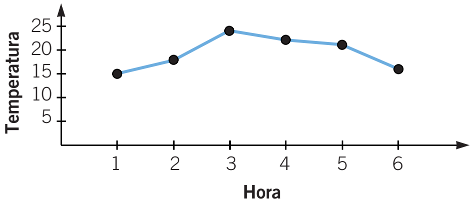
La primera gráfica no es una función, porque a cada valor de la variable x le corresponden dos valores de la variable y.

La segunda gráfica es una función, pues a cada valor de la variable x le corresponde un único valor de la variable y.

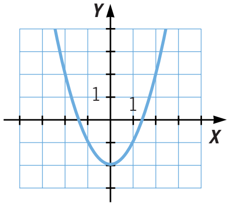
004 **Se ha medido la temperatura de una sala durante 6 horas y se ha construido una tabla con los resultados. Realiza una gráfica asociada a dicha tabla.**

Hora	1	2	3	4	5	6
Temperatura (°C)	15	18	24	22	21	16

¿Se pueden unir los puntos?



005 **Elabora una tabla de valores que se corresponda con la siguiente gráfica.**

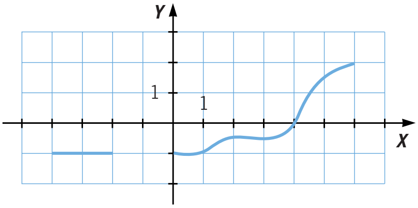


x	−2	−1	0	1	2
y	2	−1	−2	−1	2

006 **Pon un ejemplo de función en cuya gráfica no se puedan unir los puntos.**

Cualquier función discreta; por ejemplo, el precio de la compra, dependiendo de la cantidad de artículos que adquiramos.

007 **A partir de la gráfica de esta función, determina su dominio y su recorrido.**



Dom $f = [-4, -2] \cup [0, 6]$; Im $f = [-1, 2]$

008 **Halla el dominio y el recorrido de esta función.**

$$f(x) = \frac{5}{x-1}$$

El dominio está formado por todos los valores de x menos $x = 1$.

Dom $f = \mathbb{R} - \{1\}$

El recorrido está formado por todos los valores de y menos $y = 0$, pues no hay ningún número, a, tal que $0 = \dfrac{5}{a-1}$.

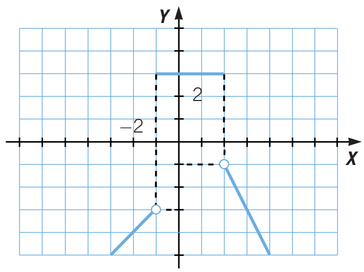
Im $f = \mathbb{R} - \{0\}$

009 **¿Cuál es el dominio y el recorrido de la función que a cada valor de *x* le hace corresponder su raíz cuadrada positiva?**

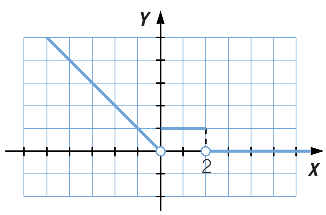
El dominio está formado por todos los valores positivos de x: $\mathbb{R}^+$.
El recorrido está formado por todos los valores positivos de y: $\mathbb{R}^+$.

010 **Representa estas funciones definidas a trozos.**

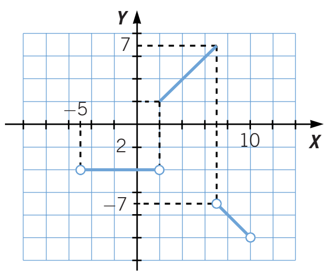
a) $f(x) = \begin{cases} x - 2 & \text{si } -\infty < x < -1 \\ 3 & \text{si } -1 \le x \le 2 \\ 3 - 2x & \text{si } 2 < x < +\infty \end{cases}$

a) 

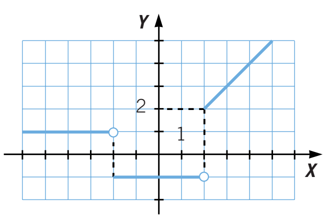
b) $f(x) = \begin{cases} -x & \text{si } -\infty < x < 0 \\ 1 & \text{si } 0 \le x \le 2 \\ 0 & \text{si } 2 < x < +\infty \end{cases}$

b) 

c) $f(x) = \begin{cases} -4 & \text{si } -5 < x < 2 \\ x & \text{si } 2 \le x \le 7 \\ -x & \text{si } 7 < x < 10 \end{cases}$

c) 

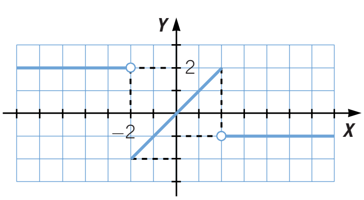
011 **Determina la expresión algebraica que corresponde a la siguiente gráfica.**



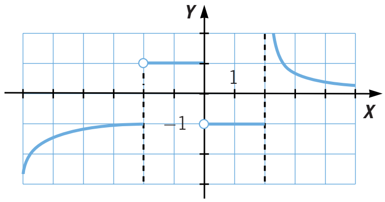
$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } -\infty < x < -2 \\ -1 & \text{si } -2 \le x \le 2 \\ x & \text{si } 2 < x < +\infty \end{cases}$$

012 **Escribe la expresión de una función definida a trozos y represéntala.**

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } -\infty < x < -2 \\ x & \text{si } -2 \le x \le 2 \\ -1 & \text{si } 2 < x < +\infty \end{cases}$$



013 **Estudia la continuidad de esta función. ¿Tiene puntos de corte con los ejes?**



La función es continua en todos los puntos menos en $x = -2$, $x = 0$ y $x = 2$.

En $x = -2$, la función tiene un salto, y vale -1 a la izquierda y 1 a la derecha.

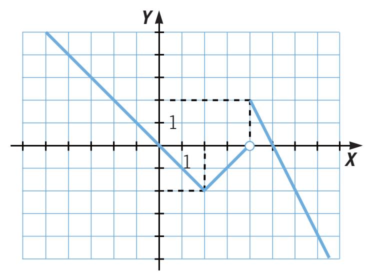
En $x = 0$, la función tiene otro salto, y vale 1 a la izquierda y -1 a la derecha.

En $x = 2$, la función no está definida a la derecha.

El único punto de corte con los ejes es (0, 2).

014 **Representa $f(x)$ y estudia su continuidad.**

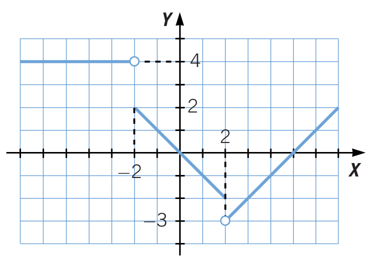
$$f(x) = \begin{cases} -x & \text{si} \quad -\infty < x \leq 2 \\ x - 4 & \text{si} \quad 2 < x < 4 \\ 10 - 2x & \text{si} \quad 4 \leq x < +\infty \end{cases}$$



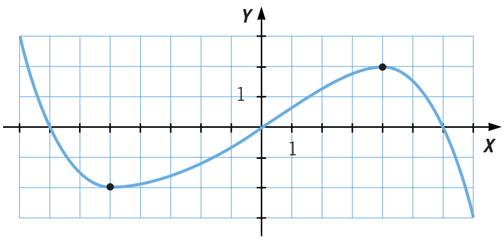
La función es continua en todos los puntos menos en $x = 4$, donde tiene un salto.

015 **Inventa una función que tenga dos puntos de discontinuidad y que corte dos veces al eje *X*.**

$$f(x) = \begin{cases} 4 & \text{si} \quad -\infty < x < -2 \\ -x & \text{si} \quad -2 \leq x \leq 2 \\ x - 5 & \text{si} \quad 2 < x < +\infty \end{cases}$$



016 **Estudia el crecimiento de la función y la existencia de máximos y mínimos.**

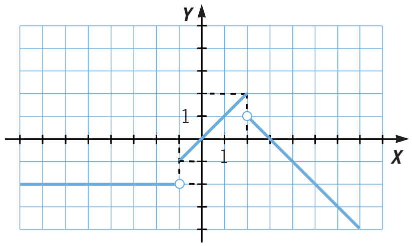


La función es decreciente en el intervalo $(-\infty, -5)$, es creciente en $(-5, 4)$ y es decreciente en $(4, +\infty)$.

La función presenta un mínimo en $x = -5$ y un máximo en $x = 4$.

017 **Estudia la continuidad, el crecimiento y los máximos y mínimos de la función.**

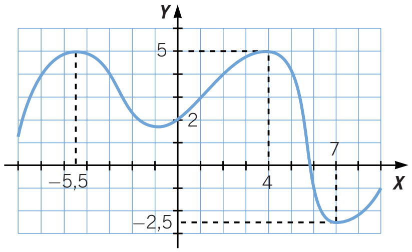
$$f(x) = \begin{cases} -2 & \text{si} \quad -\infty < x < -1 \\ x & \text{si} \quad -1 \leq x \leq 2 \\ 3 - x & \text{si} \quad 2 < x < +\infty \end{cases}$$



La función es continua en todos los puntos menos en $x = -1$ y $x = 2$.

La función es constante en el intervalo $(-\infty, -1)$, es creciente en $(-1, 2)$ y es decreciente en $(2, +\infty)$. Presenta un máximo absoluto en $x = 2$.

018 **Dibuja una función que tenga dos máximos y dos mínimos.**

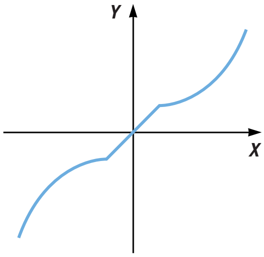


Máximos: (−5,5; 5) y (4, 5)

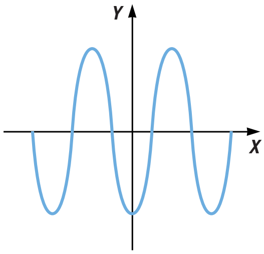
Mínimos: (−1; 1,8) y (7; −2,5)

019 **Estudia la simetría de las siguientes funciones.**

a)



b)



a) Esta función es simétrica respecto del origen, pues la parte del semieje negativo se puede obtener girando 180°, respecto del origen, la parte correspondiente del semieje positivo.

b) Esta función es simétrica respecto del eje de ordenadas porque, si doblamos por el eje *Y*, las dos ramas de la función coinciden.

020 **Determina algebraicamente si estas funciones presentan algún tipo de simetría.**

a) $f(x) = x^5 + x$ c) $h(x) = \dfrac{2}{x^5}$ e) $j(x) = \sqrt{x^3}$

b) $g(x) = x^3 - x^2$ d) $i(x) = 5$ f) $h(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2-1}$

a) $f(x) = x^5 + x$

$f(-x) = (-x)^5 - x = -x^5 - x = -(x^5 + x) = -f(x)$

Como $f(-x) = -f(x)$, es una función impar y simétrica respecto del origen de coordenadas.

b) $g(x) = x^3 - x^2$

$g(-x) = (-x)^3 - (-x)^2 = -x^3 - x^2$

Como $g(-x) \neq g(x)$ y $g(-x) \neq -g(x)$, la función no es simétrica.

c) $h(x) = \dfrac{2}{x^5}$ $\quad h(-x) = \dfrac{2}{(-x)^5} = \dfrac{2}{-x^5} = -h(x)$

Como $h(-x) = -h(x)$, es una función impar y simétrica respecto del origen de coordenadas.

d) $i(x) = 5$ $\quad i(-x) = 5 = i(x)$

Como $i(-x) = i(x)$, la función es par y simétrica respecto del eje de ordenadas.

e) $j(x) = \sqrt{x^3}$ $\quad j(-x) = \sqrt{(-x)^3} = \sqrt{-x^3}$

Como $j(-x) \neq j(x)$ y $j(-x) \neq -j(x)$, la función no es simétrica.

f) $g(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2-1}$ $\quad g(-x) = \dfrac{(-x)^2+1}{(-x)^2-1} = \dfrac{x^2+1}{x^2-1} = g(x)$

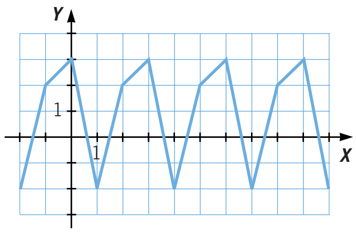
Como $g(-x) = g(x)$, la función es par y simétrica respecto del eje de ordenadas.

021 **¿Puede ser una función simétrica respecto del eje *Y* y, a la vez, respecto del origen?**

Si la función es par, $f(x) = f(-x)$. Y si la función es impar, $-f(x) = f(-x)$.

Por tanto, si la función es par e impar, $f(x) = f(-x) = -f(x)$. La única opción es $f(x) = 0$, que corresponde a la función constante 0.

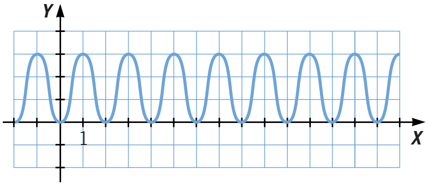
022 **Determina si la función es periódica y calcula su período.**



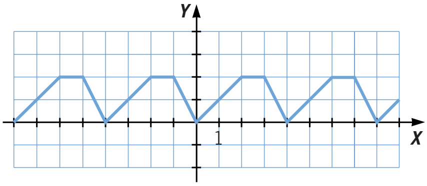
La función es periódica, de período 3.

023 **Dibuja una función de período 2 y otra función de período 4.**

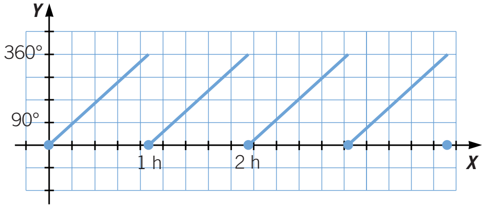
Con período 2:



Con período 4:



024 **Dibuja la gráfica de la función que mide el ángulo formado por las manecillas del reloj. ¿Es una función periódica?**



Es una función periódica, con período de $1,\overset{\frown}{09}$ h.

ACTIVIDADES

025 **Para cada una de las funciones, calcula la imagen de 2, −2, 3, −3, 1 y −1.**

a) $f(x) = 5x^2 - 1$

b) $f(x) = 2x^2 - x$

c) $f(x) = x^2 - x - 1$

d) $f(x) = -x^2 + 1$

a) $f(2) = 19$; $f(-2) = 19$; $f(3) = 44$; $f(-3) = 44$; $f(1) = 4$; $f(-1) = 4$

b) $f(2) = 6$; $f(-2) = 10$; $f(3) = 15$; $f(-3) = 21$; $f(1) = 1$; $f(-1) = 3$

c) $f(2) = 1$; $f(-2) = 5$; $f(3) = 5$; $f(-3) = 11$; $f(1) = -1$; $f(-1) = 1$

d) $f(2) = -3$; $f(-2) = -3$; $f(3) = -8$; $f(-3) = -8$; $f(1) = 0$; $f(-1) = 0$

026 **Razona cuáles de las siguientes relaciones corresponden a funciones.**

a) El tamaño de una pared y la cantidad de pintura necesaria para pintarla.

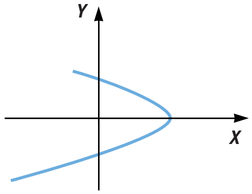
b) Cada mes del año y su número de días.

a) Es una función. Son variables numéricas y para cada tamaño de pared se necesita una única cantidad de pintura.

b) No es una función. La variable independiente, x, que corresponde a cada mes del año, no es una variable numérica; además, al mes de febrero le podrían corresponder dos valores, 28 o 29 días.

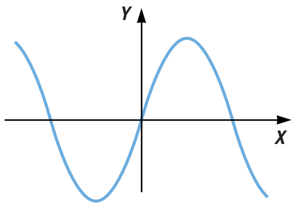
027 **Justifica si las gráficas corresponden a una función.**

a)



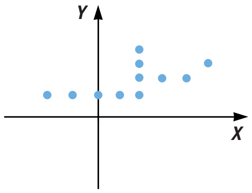
No es una función, porque a un valor de x le corresponden dos valores de y.

c)



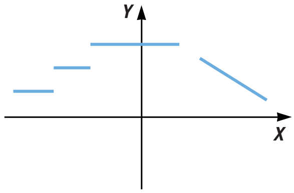
Es una función, pues a cada valor de x le corresponde un único valor de y.

b)



No es una función, porque a $x = 2$ le corresponde más de un valor de y.

d)



Es una función, porque a cada valor de x le corresponde un único valor de y.

028 **HAZLO ASÍ**

¿QUÉ ES Y CÓMO SE CALCULA LA TASA DE VARIACIÓN MEDIA DE UNA FUNCIÓN?

Halla la tasa de variación media de la función $f(x) = x^2$, en el intervalo [2, 4].

La **tasa de variación media** de una función en un intervalo $[a, b]$ mide el aumento o la disminución de dicha función en $[a, b]$.

PRIMERO. Se halla la variación de x y la variación de la función.

Variación de x: $4 - 2 = 2$ Variación de $f(x)$: $f(4) - f(2) = 16 - 4 = 12$

SEGUNDO. Se calcula el cociente que resulta al dividir la variación de $f(x)$ entre la variación de x.

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{f(4) - f(2)}{4 - 2} = \frac{16 - 4}{2} = 6$$

Este cociente es la tasa de variación media de $f(x)$ en el intervalo [2, 4].

029 **Halla la tasa de variación media de las siguientes funciones, en el intervalo [1, 3].**

a) $f(x) = x^3$ **b)** $f(x) = x - 2$

a) $\dfrac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = \dfrac{9 - 1}{2} = 4 \rightarrow$ La tasa de variación media es 4.

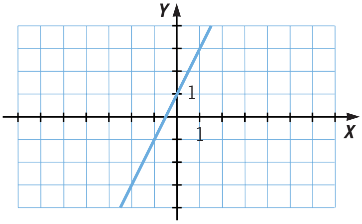
b) $\dfrac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = \dfrac{1 - (-1)}{2} = 1 \rightarrow$ La tasa de variación media es 1.

030 Completa la tabla de valores correspondiente a la función $f(x) = x^2 - 3$.

x	−3	−2	−1	0	1	2	3
$f(x)$	6	1	−2	−3	−2	1	6

031 Dada la función $f(x) = 2x + 1$, haz una tabla con seis valores y dibuja su gráfica.

x	−2	−1	0	1	2	3
$f(x)$	−3	−1	1	3	5	7



032 Elabora una tabla de valores para estas funciones.

a) $f(x) = \dfrac{1}{x+3}$ b) $f(x) = \dfrac{7x}{x^2+3}$

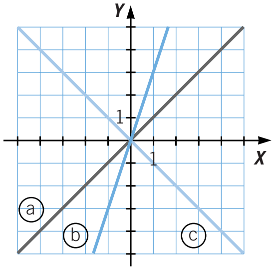
a)

x	−2	−1	0	1	2
$f(x)$	1	$\frac{1}{2} = 0{,}5$	$\frac{1}{3} = 0{,}33$	$\frac{1}{4} = 0{,}25$	$\frac{1}{5} = 0{,}2$

b)

x	−2	−1	0	1	2
$f(x)$	−2	$-\frac{7}{4} = -1{,}75$	0	$\frac{7}{4} = 1{,}75$	$\frac{14}{5} = 2$

033 Realiza una tabla de valores y encuentra la expresión algebraica correspondiente a estas funciones.



a) $f(x) = x$

x	−2	−1	0	1	2
$f(x)$	−2	−1	0	1	2

b) $f(x) = 3x$

x	−2	−1	0	1	2
$f(x)$	−6	−3	0	3	6

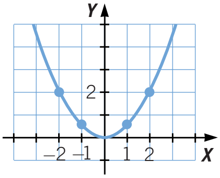
c) $f(x) = -x$

x	−2	−1	0	1	2
$f(x)$	2	1	0	−1	−2

034 Representa la función que relaciona el área de un triángulo rectángulo isósceles y la longitud del cateto.

a) ¿Cuál es la variable dependiente? b) ¿Y la variable independiente?

$$y = \frac{x^2}{2}$$



a) La variable independiente es la longitud del cateto.

b) La variable dependiente es el área del triángulo.

035 Dada la función que asocia a cada número entero su cuarta parte más cinco unidades:

a) Halla su expresión algebraica.

b) Calcula los valores de la función para $x = 2$ y $x = 0$.

c) ¿Existe valor de la función en $x = \frac{2}{3}$?

a) $y = \frac{x}{4} + 5$

b) $f(2) = 5{,}5$; $f(0) = 5$

c) No, ya que la función solo está definida para los números enteros.

036 Señala si la relación que asocia a cada número su raíz cuadrada positiva es una función.

a) ¿Cuál el valor de la variable dependiente para los valores 0, 1, 2 y 3 de x?

b) ¿Qué ocurre con los valores negativos de la variable independiente?

c) Halla el dominio y el recorrido de la función.

Es una función, ya que cada número solo tiene una única raíz positiva.

a) $f(0) = 0$; $f(1) = 1$; $f(2) = +\sqrt{2}$; $f(3) = +\sqrt{3}$

b) Cuando la variable es negativa, la función no está definida.

c) Dominio: $\mathbb{R}^+$, recorrido: $\mathbb{R}^+$.

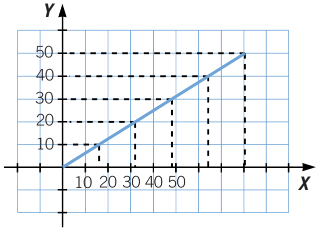
037 Esta tabla muestra la conversión de la velocidad medida en kilómetros por hora a millas por hora.

Velocidad (km/h)	16,1	32,2	48,3	64,4	80,5	…
Velocidad (millas/h)	10	20	30	40	50	…

a) Represéntala gráficamente.

b) Escribe la expresión algebraica que relaciona la velocidad en kilómetros por hora y en millas por hora.

a)

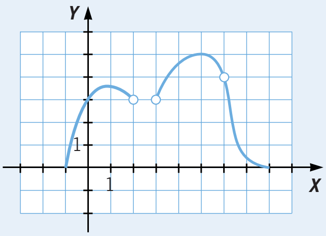


b) $y = \frac{x}{1{,}61}$

038 **HAZLO ASÍ**

¿CÓMO SE CALCULA EL DOMINIO Y EL RECORRIDO DE UNA FUNCIÓN A PARTIR DE SU REPRESENTACIÓN GRÁFICA?

Calcula el dominio y el recorrido de esta función.



1. DOMINIO

PRIMERO. Observando el eje *X*, se establece el primer y el último valor de *x* para el que está definida la función.
En este caso, el primer valor es $x = -1$ y el último valor es $x = 8$.

SEGUNDO. Observando la gráfica de la función, se determinan los tramos y los puntos en los que no está definida la función.
La función no está definida en el intervalo [2, 3] y en el punto $x = 6$.

TERCERO. Se expresa el dominio con los datos obtenidos

$$\text{Dom } f = [-1, 8] - [2, 3] - \{6\}$$

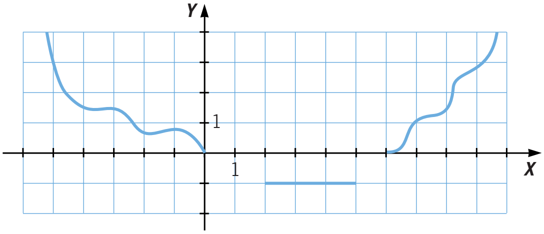
2. RECORRIDO

PRIMERO. Observando la gráfica se establece en qué valores de *y* la función alcanza el valor máximo y el valor mínimo.
El valor mínimo está en $y = 0$ y el valor máximo está en $y = 5$.
SEGUNDO. El recorrido de la función será el intervalo formado por esos valores.

$$\text{Im } f = [0, 5]$$

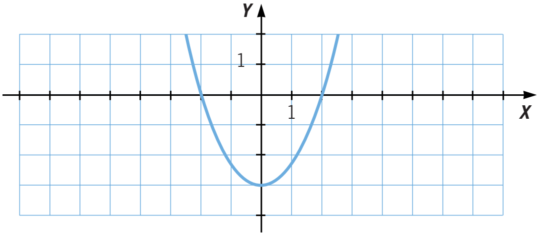
039 ●● **Calcula el dominio y el recorrido de estas funciones.**

a)



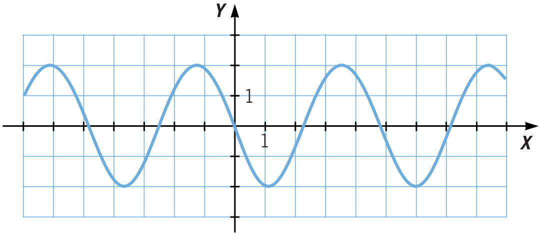
Dom $f = (-\infty, 0] \cup [2, 5] \cup [6, +\infty)$ Im $f = \{-1\} \cup [0, +\infty)$

b)



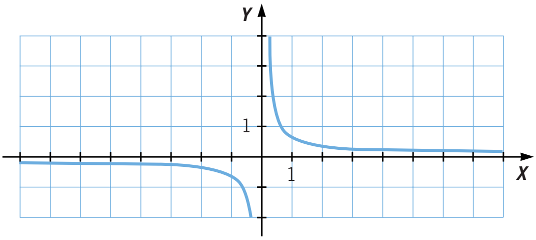
Dom $f = \mathbb{R}$ Im $f = [-3, +\infty)$

c)



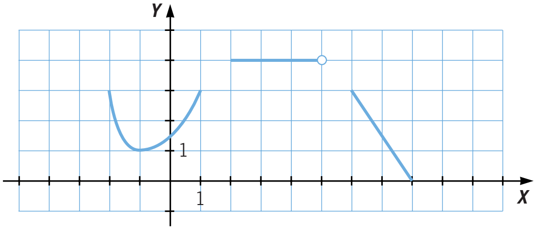
Dom $f = \mathbb{R}$ Im $f = [-2, 2]$

d)



Dom $(f) = \mathbb{R} - \{0\}$ Im $(f) = \mathbb{R} - \{0\}$

e)



Dom $f = [-2, 1] \cup [2, 5) \cup [6, 8]$ Im $f = [0, 3] \cup \{5\}$

040 **Determina el dominio y el recorrido de las funciones.**

a) $f(x) = 3x + 2$

b) $f(x) = \dfrac{1}{x - 2}$

c) $f(x) = 5x^2$

d) $f(x) = \sqrt{x - 1}$

a) Dom $f = \mathbb{R}$; Im $f = \mathbb{R}$

b) Dom $f = \mathbb{R} - \{2\}$; Im $f = \mathbb{R} - \{0\}$

c) Dom $f = \mathbb{R}$; Im $f = \mathbb{R}^+$

d) Dom $f = [1, +\infty)$; Im $f = \mathbb{R}^+$

041 **Halla el dominio y el recorrido de las siguientes funciones.**

a) $f(x) = 3x - 1$ **b)** $g(x) = x^2 + 4x$ **c)** $h(x) = \dfrac{2}{x - 5}$

a) Dom $f = \mathbb{R}$; Im $f = \mathbb{R}$

b) Dom g; Im $g = [-4, +\infty)$

c) Dom $h = \mathbb{R} - \{5\}$; Im $h = \mathbb{R} - \{0\}$

042 Calcula el dominio de las siguientes funciones definidas a trozos.

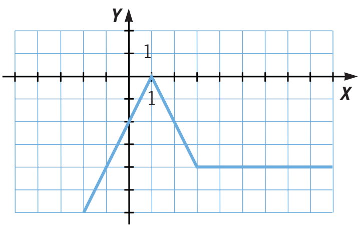
a) $f(x)=\begin{cases} 2x & \text{si } x \le 1 \\ \dfrac{2-2x}{x} & \text{si } 1 < x \le 3 \\ \sqrt{x-4} & \text{si } x > 3 \end{cases}$ b) $f(x)=\begin{cases} \sqrt[3]{x} & \text{si } x \le 0 \\ \dfrac{2-2x}{x} & \text{si } 0 < x \le 4 \\ \sqrt{x-4} & \text{si } x > 4 \end{cases}$

a) Dom $f = \mathbb{R} - (3, 4)$

b) Dom $f = \mathbb{R}$

043 Representa la función y obtén el dominio y el recorrido.

$$f(x)=\begin{cases} 2x-2 & \text{si } x \le 1 \\ 2-2x & \text{si } 1 < x \le 3 \\ -4 & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

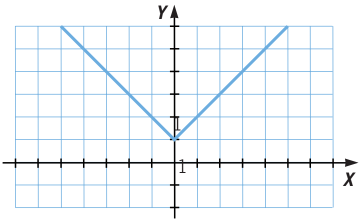


Dom $f = \mathbb{R}$

Im $f = (-\infty, 0]$

044 Representa esta función sobre unos ejes de coordenadas, y halla su dominio y recorrido.

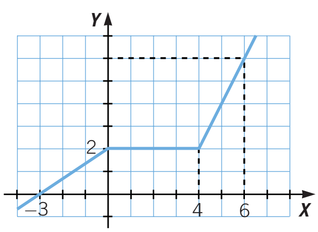
$$f(x)=\begin{cases} x+1 & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \\ -x+1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$



Dom $f = \mathbb{R}$

Im $f = [1, +\infty)$

045 Calcula la expresión algebraica de la función, y halla su dominio y recorrido.



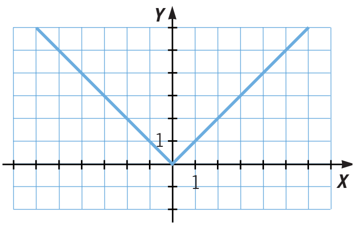
$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{2}{3}x+2 & \text{si } -\infty < x \le 0 \\ 2 & \text{si } 0 < x \le 4 \\ 2x-6 & \text{si } 4 < x < +\infty \end{cases}$$

Dom $f = \mathbb{R}$ Im $f = \mathbb{R}$

046 La función que asigna a cada número su valor absoluto, $f(x) = |x|$, se puede expresar como una función definida a trozos de la forma:

$$f(x)=\begin{cases} -x & \text{si } -\infty < x < 0 \\ x & \text{si } 0 \le x < +\infty \end{cases}$$

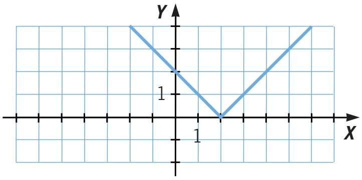
Representa gráficamente esta función.



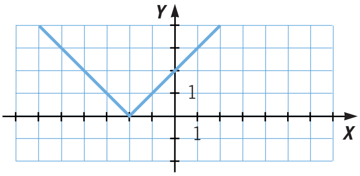
047 Escribe, en forma de función definida a trozos, y representa estas funciones.

a) $f(x) = |x - 2|$ b) $g(x) = |x + 2|$ c) $h(x) = |2x|$ d) $i(x) = |-2x|$

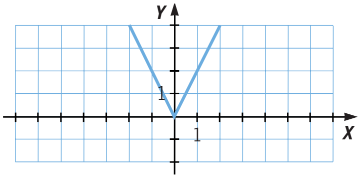
a) $f(x) = \begin{cases} -x + 2 & \text{si} \quad x - 2 < 0 \rightarrow -\infty < x < 2 \\ x - 2 & \text{si} \quad x - 2 \geq 0 \rightarrow \quad 2 \leq x < +\infty \end{cases}$



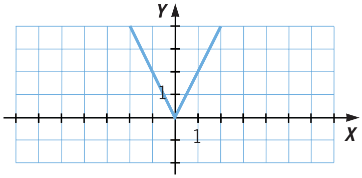
b) $g(x) = \begin{cases} -x - 2 & \text{si} \quad x + 2 < 0 \rightarrow -\infty < x < -2 \\ x + 2 & \text{si} \quad x + 2 \geq 0 \rightarrow -2 \leq x < +\infty \end{cases}$



c) $h(x) = \begin{cases} -2x & \text{si} \quad 2x < 0 \rightarrow -\infty < x < 0 \\ 2x & \text{si} \quad 2x \geq 0 \rightarrow \quad 0 \leq x < +\infty \end{cases}$



d) $i(x) = \begin{cases} 2x & \text{si} \quad -2x < 0 \rightarrow \quad 0 \leq x < +\infty \\ -2x & \text{si} \quad -2x \geq 0 \rightarrow -\infty < x < 0 \end{cases}$

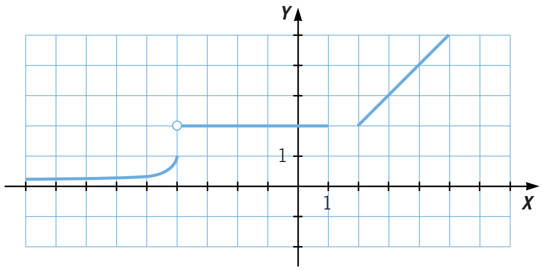


048 Determina una función definida a trozos cuya gráfica pase por (–3, 2), (–2, 1) y (3, 2). ¿Cuántas funciones pasan por los tres puntos?

Existen infinitas funciones que pasan por los tres puntos. Por ejemplo:

$$f(x) = \begin{cases} -x - 1 & \text{si} \quad -\infty < x < 0 \\ 2 & \text{si} \quad 0 \leq x < +\infty \end{cases}$$

049 Estudia la continuidad de esta función.



La función es continua en todos los puntos excepto en $x = -4$ y en el intervalo (1, 2).

En $x = -4$, la función tiene un salto, y vale 1 a la izquierda y 2 a la derecha.

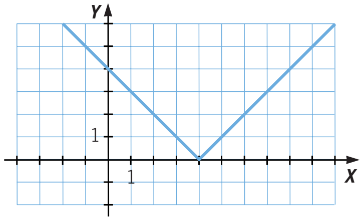
En el intervalo (1, 2), la función no está definida, y estos puntos no pertenecen al dominio.

050 Representa la función: $f(x) = \begin{cases} 4 - x & \text{si } x \leq 4 \\ x - 4 & \text{si } x > 4 \end{cases}$

a) Estudia su continuidad.

b) ¿Dónde crece y decrece la función?

c) Escribe sus máximos y mínimos relativos.



a) La función es continua en $\mathbb{R}$.

b) La función crece en el intervalo $(4, +\infty)$ y decrece en el intervalo $(-\infty, 4)$.

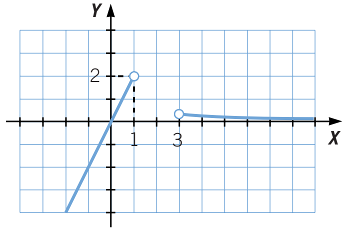
c) La función tiene un mínimo relativo en $x = 4$.

051 Estudia y representa estas funciones.

a) $f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x < 1 \\ \dfrac{1}{x} & \text{si } x > 3 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < -1 \\ 2 & \text{si } x = 1 \\ x + 1 & \text{si } x > 3 \end{cases}$

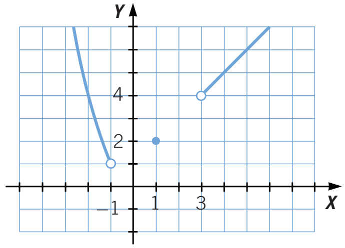
a)



Dom $f = (-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$ Im $f = (-\infty, 2)$

La función es continua en todo su dominio.

b)

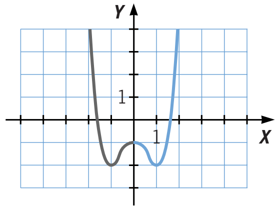


Dom $f = (-\infty, -1) \cup \{1\} \cup (3, +\infty)$ Im $f = (1, +\infty)$

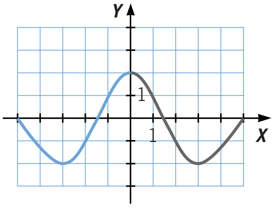
La función es continua en $(-\infty, -1) \cup (3, +\infty)$.

052 ●● **Completa las gráficas para que las funciones sean simétricas respecto del eje *Y*.**

a)

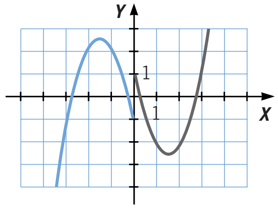


b)

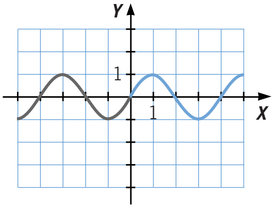


053 ●● **Completa las gráficas para que estas funciones sean impares.**

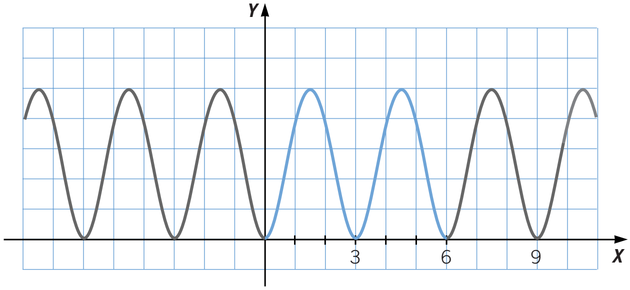
a)



b)



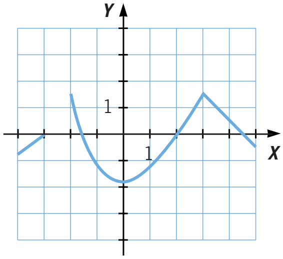
054 ●● **La gráfica pertenece a una función periódica, de período $T = 3$. Completa la gráfica a ambos lados y justifica cómo lo haces.**



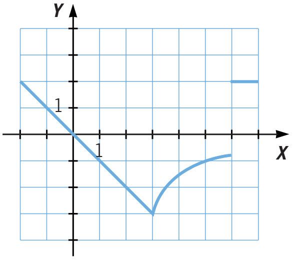
Lo hacemos mediante una traslación.

055 **Estudia las siguientes funciones.**

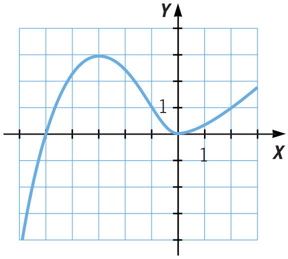
a)



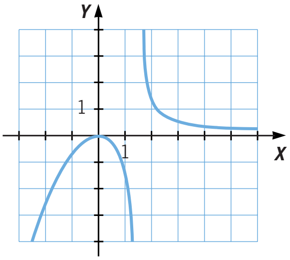
c)



b)



d)



a) Dominio: Dom $f = \mathbb{R} - (-3, -2)$

Recorrido: Im $f = (-\infty; 1{,}5]$

Cortes con los ejes de coordenadas: corta al eje X en los puntos $x = -3$; $x = -1{,}5$; $x = 2$; $x = 4{,}5$; y al eje Y, en $y = -1{,}8$.

Continuidad: la función es continua en todos los puntos, menos en el intervalo $(-3, -2)$, donde no está definida.

b) Dominio: Dom $f = \mathbb{R}$

Recorrido: Im $f = \mathbb{R}$

Cortes con los ejes de coordenadas: corta al eje X en $x = -5$ y en $(0, 0)$.

Continuidad: la función es continua en todos los puntos.

Es creciente en $(-\infty, -3) \cup (0, +\infty)$ y es decreciente en $(-3, 0)$.

Tiene un máximo relativo en $x = -3$ y un mínimo relativo en $x = 0$.

No presenta ningún tipo de simetría y no es periódica.

c) Dominio: Dom $f = \mathbb{R}$

Recorrido: Im $f = (-3, +\infty)$

Cortes con los ejes de coordenadas: corta al eje X y al eje Y en el punto $(0, 0)$.

Continuidad: la función es continua en todos los puntos, menos en $x = 6$.

Es decreciente en $(-\infty, 3)$, es creciente en $(3, 6)$ y es constante en $(6, +\infty)$.

Tiene un mínimo relativo en $x = 3$.

No presenta ningún tipo de simetría y no es periódica.

d) Dominio: Dom $f = \mathbb{R} - \{1,5\}$

Recorrido: Im $f = \mathbb{R}$

Cortes con los ejes de coordenadas: corta al eje X y al eje Y en el punto (0, 0).

Continuidad: la función es continua en todos los puntos, menos en $x = 1,5$; donde no está definida.

Es creciente en $(-\infty, 0)$ y es decreciente en $(0; 1,5) \cup (1,5; +\infty)$.

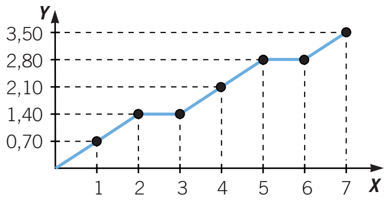
Tiene un máximo relativo en $x = 0$.

No presenta ningún tipo de simetría y no es periódica.

056 ●●

En un centro comercial, al comprar 3 kg de naranjas solo pagas 2 kg. Si el kilo de naranjas cuesta 0,70 €, representa la función que relaciona el peso de naranjas (*x*) y su precio (*y*). ¿Es una función definida a trozos? ¿Por qué?

N.º de kilos	1	2	3	4	5	6	7
Precio	0,70	1,40	1,40	2,10	2,80	2,80	3,50

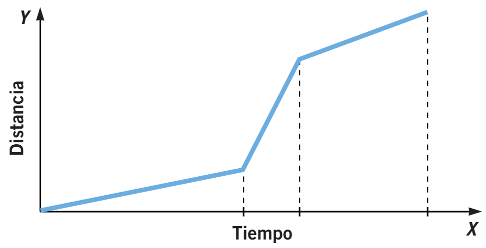


No es una función definida a trozos, porque la expresión algebraica de la función, para cualquier valor de x, es: $f(x) = 0,70x$.

057 ●●

Para ir a su centro escolar, Concha realiza cada día este trayecto y tarda el mismo tiempo aproximadamente: sale de casa y sube una cuesta para llegar a la parada del autobús; se traslada en él y se baja en la tercera parada, donde la espera una amiga, para ir desde allí andando juntas. Dibuja una gráfica que se ajuste a esta situación.

Indica los tramos crecientes y constantes, siendo *x* el tiempo en minutos, e *y* la distancia recorrida.



En los tres tramos, la función es creciente.

058 **Un electrocardiograma presenta la variación de actividad coronaria, marcando los movimientos del corazón. ¿Es una función periódica?**

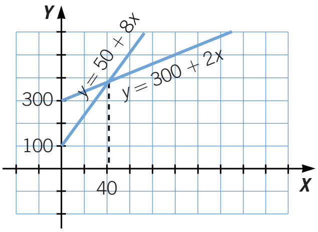
La función es periódica cuando el ritmo cardíaco es constante, y en la gráfica vemos que no lo es.

059 **Queremos hacer un viaje al extranjero y preguntamos en dos agencias.**

a) Representa las funciones que relacionan los kilómetros recorridos y el precio.

b) ¿Con qué agencia interesa contratar el viaje?

a)



b) Viajes Águila: $y = 300 + 2x$

Viajes Princesa: $y = 50 + 8x$

$300 + 2x = 50 + 8x \rightarrow x = 41,67$

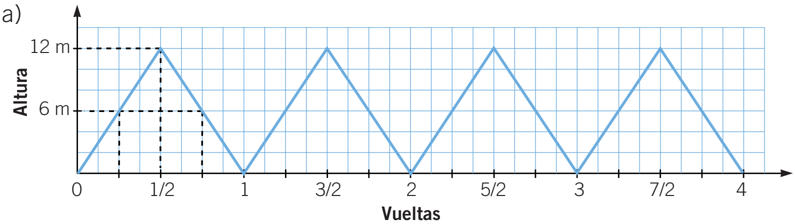
Para viajes con trayecto inferior a 41,67 km, nos interesa contratar Viajes Princesa. Y como queremos viajar al extranjero, será mejor contratar Viajes Águila.

060 **En un parque de atracciones hay una noria de 12 m de diámetro.**

a) Representa la altura que alcanza un niño que monta en la noria, en cada momento, durante 4 vueltas.

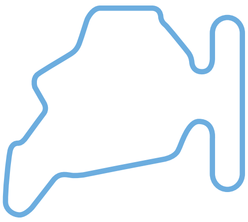
b) Realiza un boceto de la función, estudiando su periodicidad. ¿Cuál es su período?

a)



b) La función es creciente hasta alcanzar la altura de 12 m (media vuelta) y, después, es decreciente hasta estar a nivel del suelo (otra media vuelta). El período de la función es una vuelta.

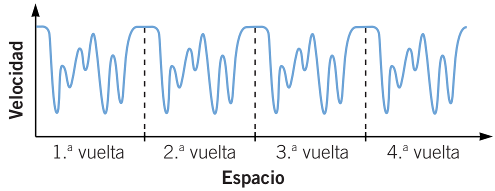
061 **En el Gran Premio de Hungría de Automovilismo, el piloto Fernando Alonso obtuvo su primera victoria en Fórmula 1, en un circuito de 4.381 m de longitud.**



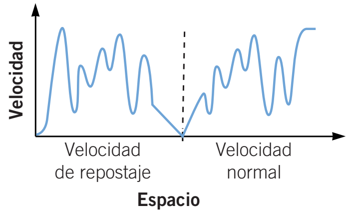
a) Representa aproximadamente la evolución de la velocidad del coche durante 4 vueltas. ¿Es una función periódica?

b) Dibuja la gráfica que corresponda a la vuelta en la que el piloto se detiene a repostar.

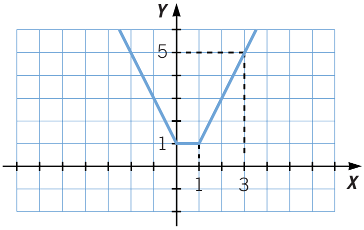
a) Gráfica correspondiente a 4 vueltas:



b) Gráfica correspondiente a la vuelta en la que se detiene a repostar:



062 Representa la función $y = |x| + |x - 1|$.



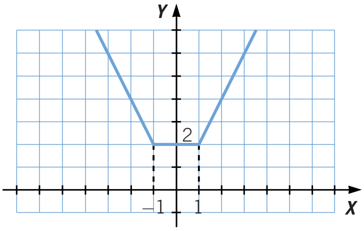
$$f(x) = \begin{cases} -2x + 1 & \text{si} \quad x < 0 \\ 1 & \text{si} \quad 0 \le x \le 1 \\ 2x - 1 & \text{si} \quad 1 < x \end{cases}$$

063 A partir de $|x - 1| = \begin{cases} -x + 1 & \text{si} \quad x < 1 \\ x - 1 & \text{si} \quad x \ge 1 \end{cases}$ representa estas funciones.

a) $y = |x + 1| + |x - 1|$

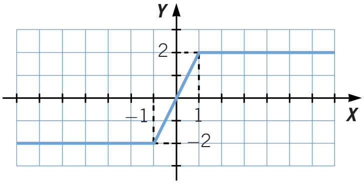
b) $y = |x + 1| - |x - 1|$

a)



$$f(x) = \begin{cases} -2x & \text{si} \quad x < -1 \\ 2 & \text{si} \quad -1 \le x \le 1 \\ 2x & \text{si} \quad 1 < x \end{cases}$$

b)



$$f(x) = \begin{cases} -2 & \text{si} \quad x < -1 \\ 2x & \text{si} \quad -1 \le x \le 1 \\ 2 & \text{si} \quad 1 < x \end{cases}$$

064 Si $f(f(x)) = 5x - 2.008$ para cualquier valor de x, demuestra que existe un número entero n tal que $f(n) = 5n - 2.008$. ¿Cuánto vale n?

Sabemos que $f(f(x)) = 5x - 2.008$ para cualquier valor de x.

Vamos a demostrar que existe un valor tal que $f(f(x)) = x$.

$$x = 5x - 2.008 \rightarrow x = \frac{2.008}{4} = 502 \rightarrow f(f(502)) = 502$$

$$f(f(502)) = 502 \rightarrow f(f(f(502))) = f(502) \rightarrow 5f(502) - 2.008 = f(502)$$
$$\rightarrow f(502) = \frac{2.008}{4} = 502$$

Por tanto, se ha demostrado que existe un valor $n = 502$ tal que $f(n) = n$

$\rightarrow f(f(n)) = f(n)$ y como $f(f(n)) = 5n - 2.008$ para cualquier n.

Para el valor $n = 512$ tenemos que $f(f(512)) = 5 \cdot 512 - 2.008$.

065 Una función $f(x)$ es creciente, su dominio es $[-6, 3]$ y su recorrido es $[3, 6]$.

a) ¿Cuánto valen $f(-6)$ y $f(3)$?

b) ¿Tiene máximos o mínimos relativos?

a) $f(-6) = 3$; $f(3) = 6$

b) No tiene máximos ni mínimos relativos por ser una función creciente.

EN LA VIDA COTIDIANA

066 **Un grupo de alumnos va a publicar una revista escolar. Los profesores de los departamentos de Lengua y Literatura y de Matemáticas van a ser los coordinadores.**

Los profesores de Matemáticas les proponen simular lo que ocurriría si decidieran vender la revista. Para ello deben preguntar al resto de alumnos y profesores del centro escolar cuánto dinero estarían dispuestos a pagar.

Con la información recogida por los alumnos, ¿a qué precio deberían vender la revista para poder comprar el papel necesario para imprimirla?

Hay 150 + 95 + 47 + 18 = 310 alumnos, y si queremos dar una revista a cada uno harán falta 310 revistas, cuyo coste en papel asciende a:

$310 \cdot 0{,}20 = 62$ €.

Si vendieran la revista a 1 €, la pagarían 18 personas, de modo que obtendrían 18 €, que es una cantidad insuficiente para comprar el papel de la próxima tirada.

Si vendieran la revista a 0,50 €, la pagarían 18 + 47 = 65 personas, de modo que obtendrían 32,50 €, que es una cantidad insuficiente para comprar el papel de la próxima tirada.

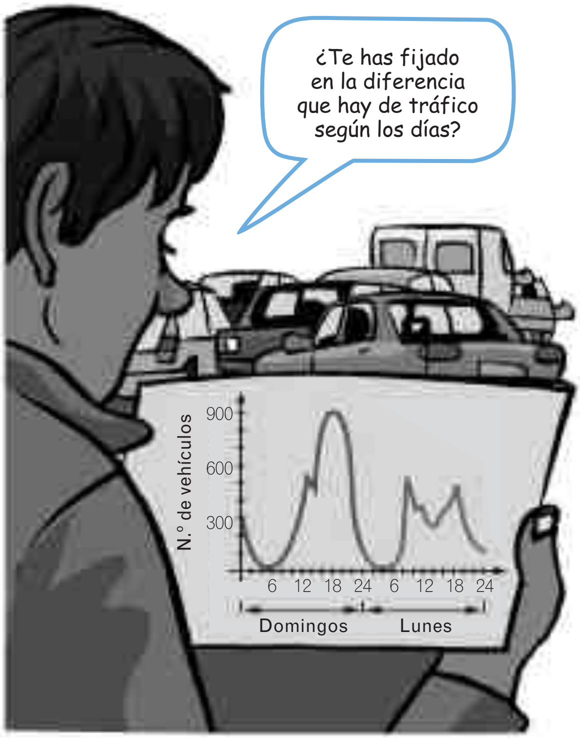
Y si vendieran la revista a 0,25 €, la pagarían 18 + 47 + 95 = 160 personas, de modo que obtendrían 40 €, que es una cantidad insuficiente para comprar el papel de la próxima tirada.

La solución es que cada persona pague lo que considera justo, de manera que la cantidad recaudada ascenderá a:

$18 \cdot 1 + 47 \cdot 0{,}50 + 95 \cdot 0{,}25 = 65{,}25$ €.

067 ●●● **Como respuesta a las críticas realizadas por los medios de comunicación en relación con los atascos de cada fin de semana, la Dirección General de Tráfico va a elaborar un informe sobre el volumen de tráfico en las principales carreteras.**

Los resultados se han publicado en forma de gráfica. En ella se muestra la media de vehículos que circulaban en la carretera durante los domingos y los lunes del último mes.



¿En qué momento se han producido más retenciones? ¿A qué horas se presentan menos problemas de tráfico? Ayúdalos a resolver la situación, y di quién tiene razón.

El mayor número de atascos se produce en la tarde de los domingos, a las 18:00 h.

Los menores problemas de tráfico se producen en la madrugada.

Por tanto, los medios de comunicación tienen razón en que se producen atascos en ciertos momentos del día. Para evitar estos atascos se debería recomendar a los conductores evitar esos tramos horarios: el domingo, entre las 16:00 h y las 20:00 h, y el lunes, en torno a las 8:00 h y las 19:00 h.

11 Funciones polinómicas, racionales y exponenciales

FUNCIONES POLINÓMICAS

- **DE PRIMER GRADO: RECTAS**
  - $y = mx + n$
- **DE SEGUNDO GRADO: PARÁBOLAS**
  - $y = ax^2 + bx + c$

FUNCIONES DE PROPORCIONALIDAD INVERSA

- $y = \dfrac{k}{x}$

FUNCIONES RACIONALES: HIPÉRBOLAS

- $y = \dfrac{k}{x - a}$
- $y = \dfrac{k}{x - a} + b$

FUNCIONES EXPONENCIALES

- $y = a^{k \cdot x}$
- $y = a^x + b$

Funesto presagio

Moscú amaneció plomizo, tan negro que más parecía la continuación de la noche que el nuevo día.

Esa misma sensación tuvo Christian Goldbach cuando, como cada mañana, se dirigió al palacio donde el joven zar Pedro II lo esperaba para recibir su formación. Tras un corto trayecto, su carruaje se detuvo ante el puesto de la guardia real.

–La entrada está prohibida hasta nueva orden.

–¡Soy el tutor del zar! –dijo Goldbach asomándose a la ventanilla del carruaje.

El jefe de la guardia ni siquiera se inmutó y con voz impersonal, casi metálica, le dijo de manera tajante:

–Su trabajo en palacio ha terminado.

–¿Por qué? ¿No está contento el zar con mi trabajo?

–Pretendéis decirme que no habéis oído los cañones, ni las campanas de las iglesias… Ni habéis visto a los correos ir y venir como locos, ni oís los lamentos de toda Rusia –espetó el soldado con furia contenida.

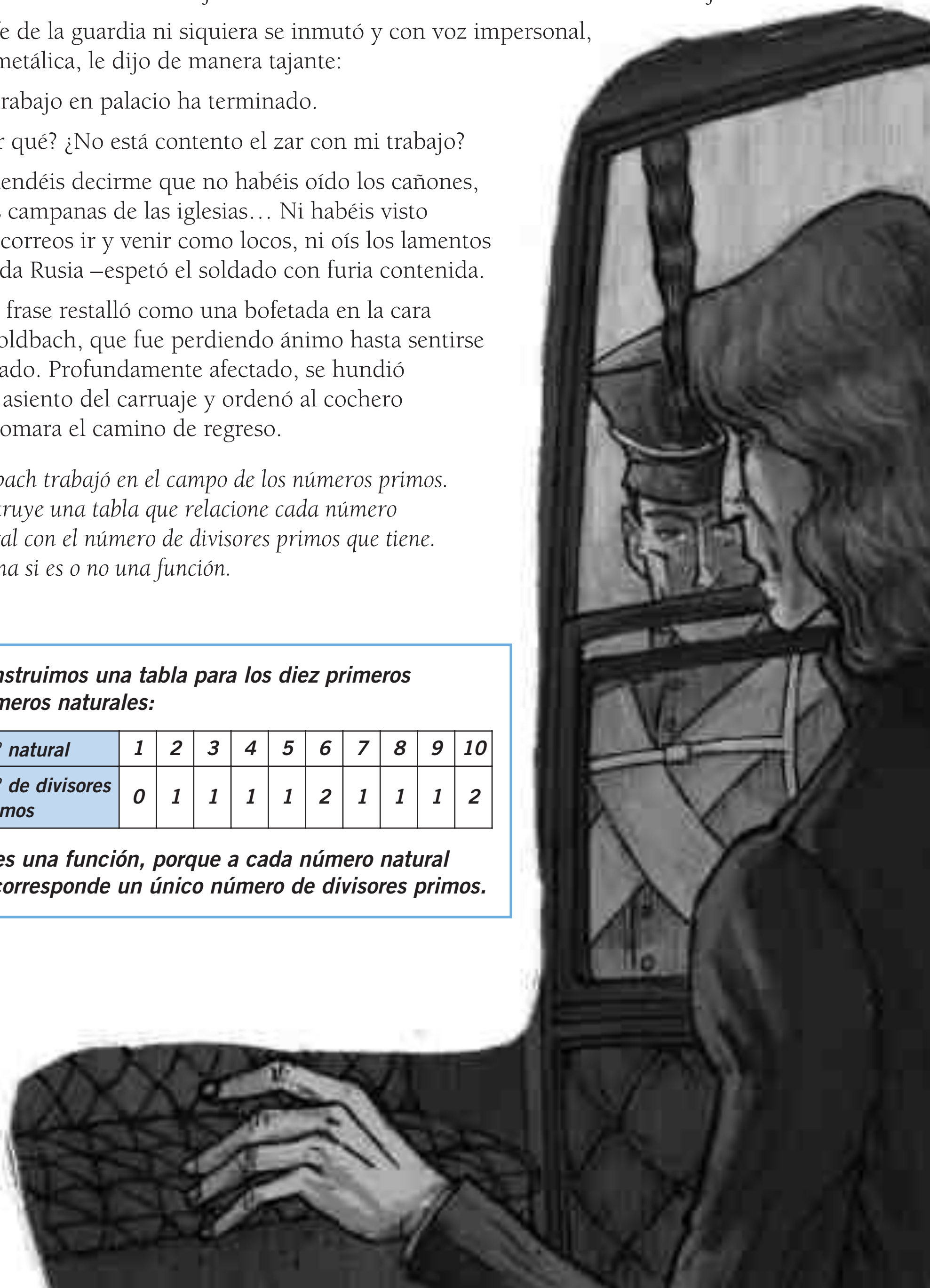
Cada frase restalló como una bofetada en la cara de Goldbach, que fue perdiendo ánimo hasta sentirse mareado. Profundamente afectado, se hundió en el asiento del carruaje y ordenó al cochero que tomara el camino de regreso.

Goldbach trabajó en el campo de los números primos. Construye una tabla que relacione cada número natural con el número de divisores primos que tiene. Razona si es o no una función.

Construimos una tabla para los diez primeros números naturales:

N.º natural	***1***	***2***	***3***	***4***	***5***	***6***	***7***	***8***	***9***	***10***
N.º de divisores primos	***0***	***1***	***1***	***1***	***1***	***2***	***1***	***1***	***1***	***2***

Sí es una función, porque a cada número natural le corresponde un único número de divisores primos.



EJERCICIOS

001 **Decide si las siguientes funciones son polinómicas o no.**

a) $y = -x + 2$

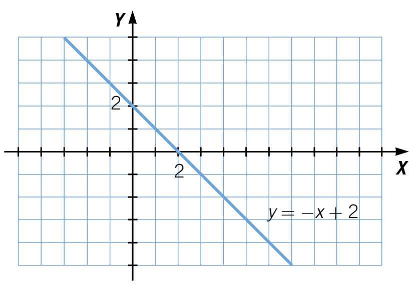
b) $y = -x + \dfrac{2}{x}$

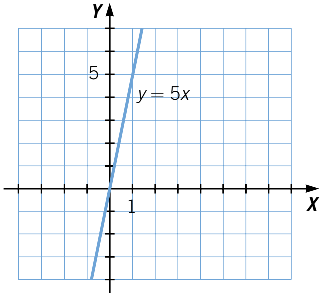
c) $y = 5x$

d) $y = 5\sqrt{x} + 2$

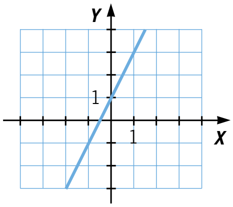
Son funciones polinómicas las funciones de los apartados a) y c).

002 **Representa gráficamente las funciones polinómicas del ejercicio anterior.**





003 **Razona de qué tipo es la función representada, y determina su expresión algebraica y su pendiente.**



Es una función afín, de ecuación $y = 2x + 1$.
Su pendiente es 2.

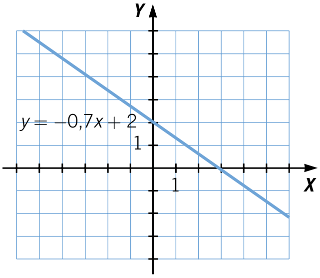
004 **Decide de qué tipo son estas funciones polinómicas y represéntalas.**

a) $f(x) = -0{,}7x + 2$

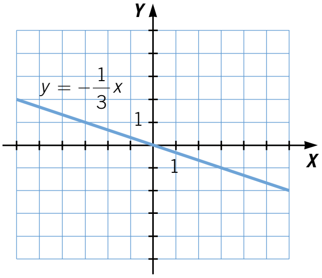
b) $f(x) = -\dfrac{1}{3}x$

c) $f(x) = -1$

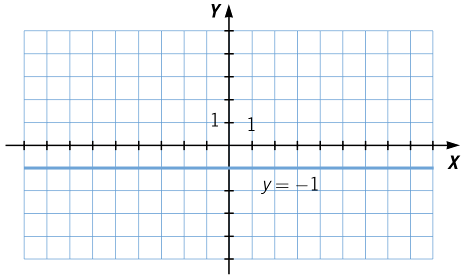
a) Afín



b) Lineal

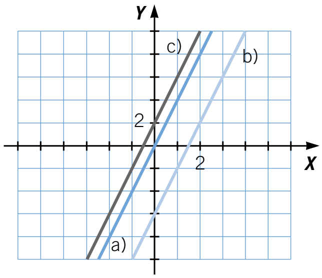


c) Constante



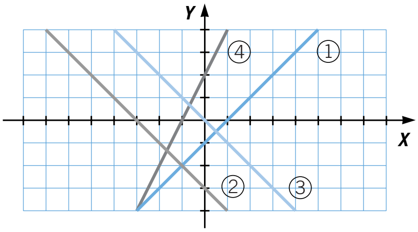
005 **Representa, en unos mismos ejes, estas funciones y explica sus diferencias.**

a) $y = 2x$ **b) $y = 2x - 3$** **c) $y = 2x + 1$**



Son rectas paralelas, con la misma pendiente. Se diferencian en su ordenada en el origen.

006 **Asocia cada recta con su expresión algebraica.**



a) $y = 2x + 2$ **c) $y = \frac{1}{2}x - 1$**

b) $y = -x - 3$ **d) $y = -x$**

a) ④

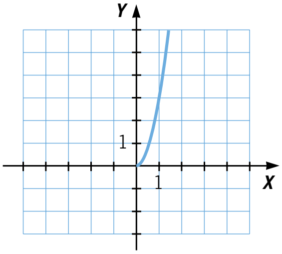
b) ②

c) No se corresponde con ninguna de las rectas dibujadas en el gráfico.

d) ③

La recta ① tiene por ecuación $y = x - 1$ y tampoco tiene correspondencia con ninguna de las ecuaciones.

007 **Completa esta parábola y señala sus elementos y sus propiedades.**



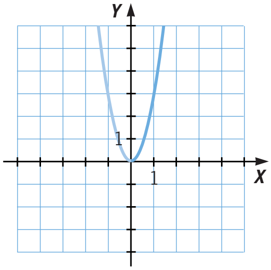
El dominio de la función es todos los números reales: $\mathbb{R}$.

Es continua en todo su dominio.

La función es simétrica respecto del eje de ordenadas.

El vértice es el punto (0, 0), donde tiene un mínimo.

Pasa por los puntos (−1, 3) y (1, 3).



008 **Representa las siguientes funciones.**

a) $y = 3x^2$

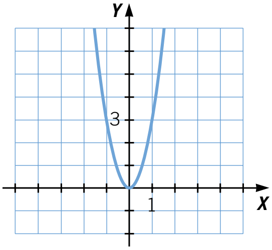
b) $y = -\dfrac{1}{3}x^2$

c) $y = -2x^2$

d) $y = \dfrac{1}{2}x^2$

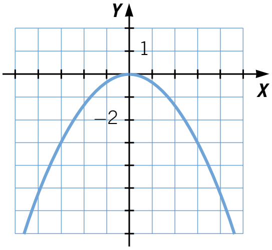
a) Construimos una tabla con valores alrededor del vértice.

x	−2	−1	0	1	2
y	12	3	0	3	12



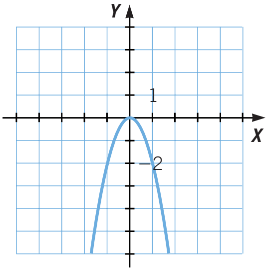
b) Construimos una tabla con valores alrededor del vértice.

x	−6	−3	0	3	6
y	−12	−3	0	−3	−12



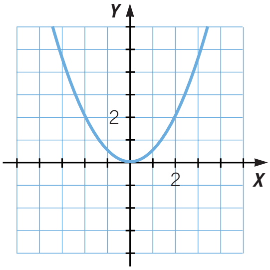
c) Construimos una tabla con valores alrededor del vértice.

x	−2	−1	0	1	2
y	−8	−2	0	−2	−8



d) Construimos una tabla con valores alrededor del vértice.

x	−2	−1	0	1	2
y	2	0,5	0	0,5	2



009 **¿Qué ocurre si $a = 0$ en $f(x) = ax^2 + bx + c$?**

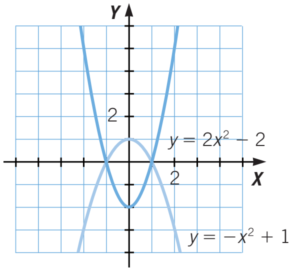
Si $a = 0$, sería la ecuación de una recta en vez de la ecuación de una parábola.

010 **Representa las siguientes funciones.**

a) $y = 2x^2 - 2$ **b)** $y = -x^2 + 1$

a) El vértice es el punto (0, −2). Las ramas de la parábola van hacia arriba y es más cerrada que la parábola de ecuación $y = x^2$.

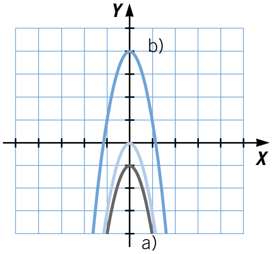
b) El vértice es el punto (0, 1) y se obtiene trasladando la parábola $y = x^2$ una unidad hacia arriba e invirtiendo el sentido de las ramas.



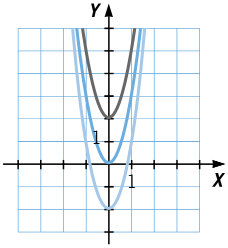
011 **Representa la función $y = -3x^2$ y, a partir de ella, explica cómo se pueden representar estas funciones.**

a) $y = -3x^2 - 1$ **b)** $y = -3x^2 + 4$

Las parábolas que corresponden a las funciones del tipo $y = -3x^2 + c$ se obtienen trasladando verticalmente la parábola $y = -3x^2$, c unidades hacia arriba si $c > 0$, o c unidades hacia abajo si $c < 0$.



012 **Si la parábola de color naranja corresponde a la función $y = 3x^2$, ¿a qué funciones corresponden las otras dos?**



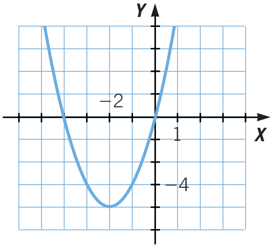
La parábola roja corresponde a $y = 3x^2 + 2$ y la parábola verde corresponde a $y = 3x^2 - 2$.

013 **Representa las siguientes funciones.**

a) $y = x^2 + 4x$ **b)** $y = -2x^2 + 6x$

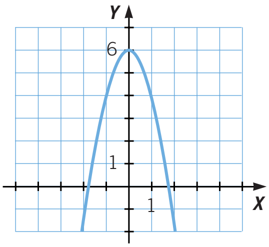
a) El eje de simetría es la recta $x = -2$.
El vértice de la parábola es el punto $(-2, -4)$.

x	-4	-3	-2	-1	0
y	0	-3	-4	-3	0

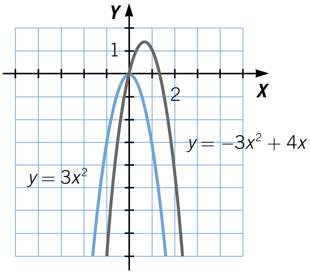


b) El eje de simetría es la recta $x = 0$.
El vértice de la parábola es el punto $(0, 6)$.

x	-2	-1	0	1	2
y	-2	4	6	4	-2



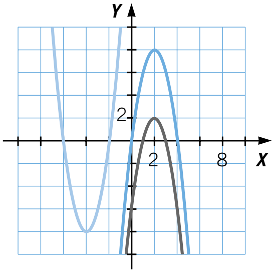
014 **Dibuja las parábolas de las funciones $y = -3x^2$ e $y = -3x^2 + 4x$. Estudia el desplazamiento que presenta la última con respecto a la primera.**



Se desplaza de forma oblicua $y = -3x^2$, pasando a ser el vértice

$$\left(\frac{-4}{-6}, \frac{-16}{-12}\right) = \left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right).$$

015 **La parábola de color verde corresponde a $y = -2x^2 + 8x$. ¿Qué funciones representan las otras dos?**

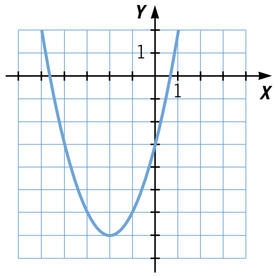


La parábola de color rojo es:
$y = -2x^2 + 8x - 6$
La parábola de color amarillo es:
$y = 2x^2 - 8x$

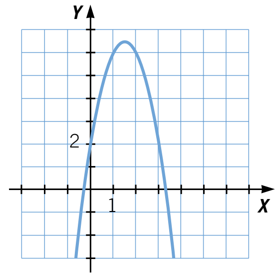
016 **Representa las siguientes funciones.**

a) $y = x^2 + 4x - 3$ **b)** $y = -2x^2 + 6x + 2$

a)



b)



El vértice está en $(2, -7)$.

La tabla de valores es:

x	y
0	3
1	0
2	−1
3	0
4	3

El vértice está en

$$\left(\frac{-6}{-4}, \frac{-36-16}{8}\right) = \left(\frac{3}{2}, \frac{13}{2}\right).$$

La tabla de valores es:

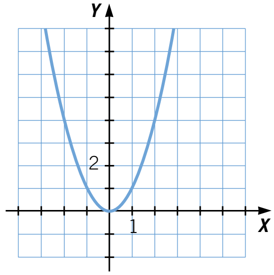
x	y
0	2
0,5	4,5
1	6
1,5	6,5
2	6
2,5	4,5
3	2

017 **Representa estas funciones y compara sus gráficas.**

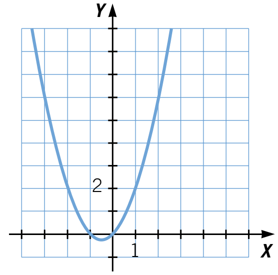
a) $y = x^2$ **c)** $y = x^2 + x$ **e)** $y = x^2 + x + 1$

b) $y = -x^2$ **d)** $y = x^2 - x$ **f)** $y = x^2 - x - 1$

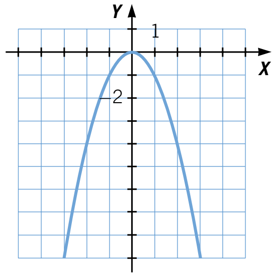
a)



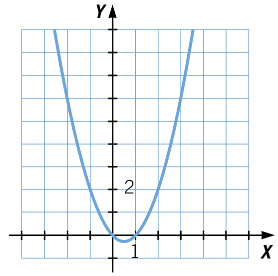
c)

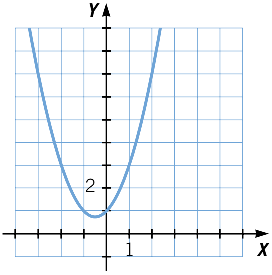


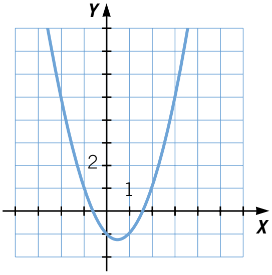
b)



d)

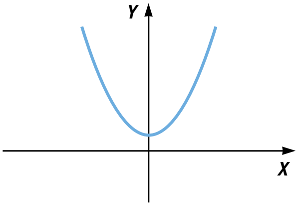


e) 

f) 

Todas las parábolas son similares, tienen como base $y = x^2$, y se consiguen trasladando la parábola inicial, excepto $y = -x^2$, que se obtiene por simetría.

018 **Explica cómo son los coeficientes de la función cuya gráfica es esta parábola. ¿Hay alguno que sea cero? ¿Qué pasaría si cambiamos de signo a todos?**

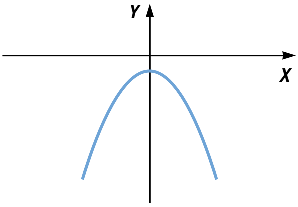


La gráfica tiene un mínimo en el vértice, luego $a > 0$.

El eje de ordenadas coincide con el eje de simetría, por lo que $b = 0$.

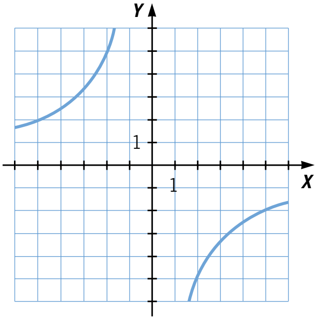
El vértice está desplazado hacia arriba respecto de la parábola $y = ax^2$, luego $c > 0$.

Si cambiamos todos los coeficientes de signo obtendríamos la parábola.



019 **Representa la función $y = -\dfrac{10}{x}$.**

x	y
−5	2
−4	2,5
−3	3,3333
−2	5
−1	10
1	−10
2	−5
3	−3,3333
4	−2,5
5	−2

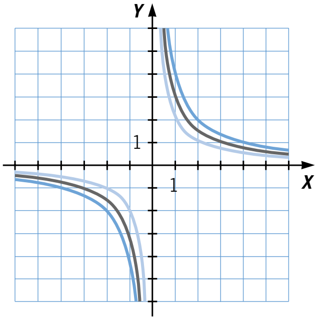


020 **Dadas las funciones:** $y = \dfrac{2}{x}$ $y = \dfrac{3}{x}$ $y = \dfrac{4}{x}$

a) Represéntalas en los mismos ejes.

b) ¿Qué gráfica está más lejos del origen?

a)



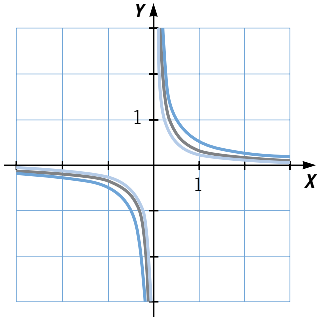
b) La gráfica que está más lejos del origen es $y = \dfrac{4}{x}$.

021 **Dadas las funciones:** $y = \dfrac{\frac{1}{2}}{x}$ $y = \dfrac{\frac{1}{3}}{x}$ $y = \dfrac{\frac{1}{4}}{x}$

a) Represéntalas en los mismos ejes.

b) ¿Cuál de ellas se aleja más del origen?

a)

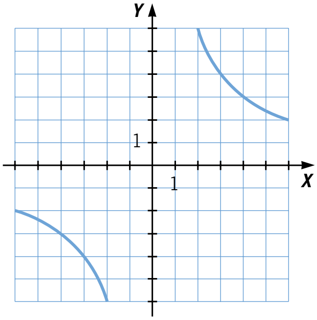


b) La gráfica que está más lejos del origen es $y = \dfrac{\frac{1}{2}}{x}$.

022 **El producto de *x* e *y* es 12. Realiza una tabla de valores y representa la función correspondiente.**

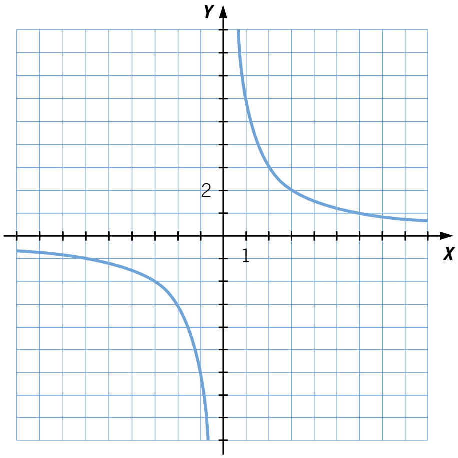
$x \cdot y = 12 \rightarrow y = \dfrac{12}{x}$

x	*y*
−10	−1,2
−8	−1,5
−6	−2
−4	−3
−2	−6
2	6
4	3
6	2
8	1,5
10	1,2



023 **Representa la función $y = \dfrac{24}{x}$ y escribe sus características.**

x	y
−16	−1,5
−12	−2
−8	−3
−6	−4
−4	−6
−3	−8
−2	−12
−1	−24
1	24
2	12
3	8
4	6
6	4
8	3
12	2
16	1,5



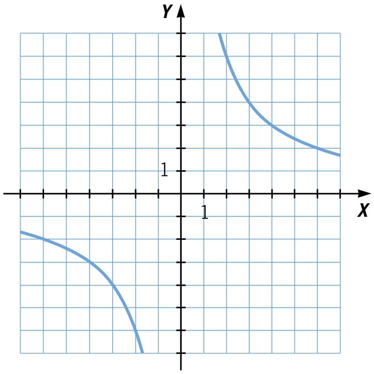
- El dominio lo forman todos los números reales menos 0: $\mathbb{R} - \{0\}$.
- La función no es continua en $x = 0$.
- La gráfica no corta a los ejes de coordenadas.
- Tiene una asíntota vertical en $x = 0$.
- Tiene una asíntota horizontal en $y = 0$.
- La función es simétrica respecto del origen de coordenadas.
- La función es decreciente y la gráfica está situada en los cuadrantes 1.° y 3.°.

024 **El área de un triángulo es 12 m². Escribe la expresión de la función que relaciona su base con su altura, y represéntala.**

La expresión en función de la base (x) y la altura (y) es:

$$x \cdot y = 12 \rightarrow y = \frac{12}{x}$$

x	y
−10	−1,2
−8	−1,5
−6	−2
−4	−3
−2	−6
2	6
4	3
6	2
8	1,5
10	1,2



025 **Responde a estas preguntas para la función $y = -\dfrac{k}{x}$, con $k > 0$.**

a) ¿Cuál es su dominio?

b) ¿Es creciente o decreciente?

c) Si pasa por el punto (1, −1), ¿puede pasar por el punto (−1, 2)?

a) El dominio es todos los números reales menos 0: $\mathbb{R} - \{0\}$.

b) La función es creciente.

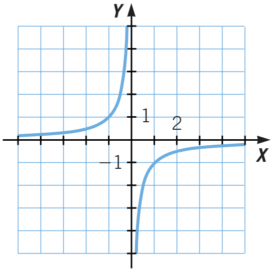
c) No puede pasar por (−1, 2), y por simetría pasará por (−1, 1).

026 **Representa las siguientes funciones.**

a) $y = \dfrac{-1}{x}$ b) $y = \dfrac{-1}{x-1}$ c) $y = \dfrac{-1}{x+1}$

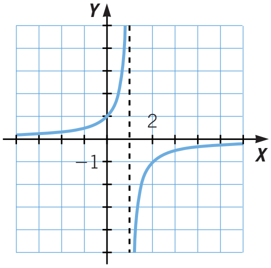
a) Como el numerador tiene signo negativo, la hipérbola ocupa los cuadrantes 2.° y 4.°. Los ejes son las rectas $x = 0$ e $y = 0$.

x	−2	−1	1	2
y	1/2	1	−1	−1/2



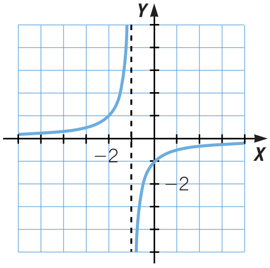
b) Como el numerador tiene signo negativo, la hipérbola ocupa los cuadrantes 2.° y 4.°. Los ejes son las rectas $x = 1$ e $y = 0$.

x	−1	0	2	3
y	1/2	1	−1	−1/2



c) Como el numerador tiene signo negativo, la hipérbola ocupa los cuadrantes 2.° y 4.°. Los ejes son las rectas $x = -1$ e $y = 0$.

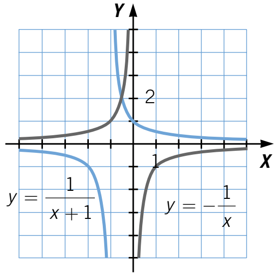
x	−3	−2	0	1
y	1/2	1	−1	−1/2



027 **A partir de la gráfica de la función $y = \frac{-1}{x}$, representa la gráfica de:**

$$y = \frac{1}{x+1}$$

Dibujamos $y = \frac{-1}{x}$, la trasladamos para conseguir $y = \frac{-1}{x+1}$ y la invertimos respecto del eje X para conseguir $y = \frac{1}{x+1}$.

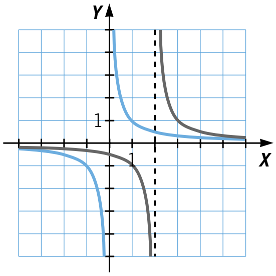


028 **Conocida la gráfica de la función $y = \frac{1}{x}$, representada en rojo, ¿qué expresión algebraica tiene la gráfica verde?**

La gráfica de color verde es una traslación de $y = \frac{1}{x}$, dos unidades a la derecha.

Los ejes de la gráfica de color verde son las rectas $x = 2$ e $y = 0$, por lo que su expresión algebraica será de la forma $y = \frac{k}{x-2}$, con $k > 0$.

Además, la gráfica pasa por el punto (3, 1), luego $k = 1$.



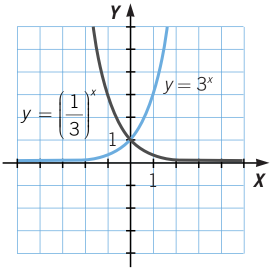
La ecuación de la hipérbola es $y = \frac{1}{x-2}$.

029 **Realiza una tabla de valores y representa las funciones exponenciales.**

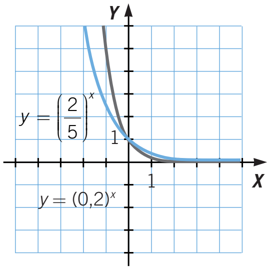
a) $y = 3^x$ **b)** $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ **c)** $y = \left(\frac{2}{5}\right)^x$ **d)** $y = (0,2)^x$

	x	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4
a)	$y = 3^x$	0,0123	0,037	0,111	0,333	1	3	9	27	81
b)	$y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$	81	27	9	3	1	0,333	0,111	0,037	0,0123
c)	$y = \left(\frac{2}{5}\right)^x$	39,0625	15,625	6,25	2,5	1	0,4	0,16	0,064	0,0256
d)	$y = (0,2)^x$	625	125	25	5	1	0,2	0,04	0,008	0,0016

a) y b)



c) y d)

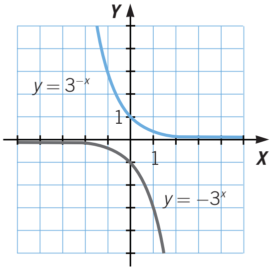


030 **Estudia y representa estas funciones.**

a) $y = -3^x$ **b)** $y = 3^{-x}$

	x	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4
a)	$y = -3^x$	−0,0123	−0,037	−0,111	−0,333	−1	−3	−9	−27	−81
b)	$y = 3^{-x}$	81	27	9	3	1	0,333	0,111	0,037	0,0123

a) y b)



031 **¿Qué ocurre si $a = 1$ en una función exponencial? ¿Y si $a < 0$?**

Si $a = 1$, la función exponencial es de la forma $y = 1^x = 1$, siendo una función constante igual a 1.

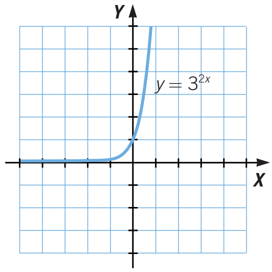
Y si $a < 0$, la función no está definida.

032 **Realiza una tabla de valores, y representa estas funciones exponenciales.**

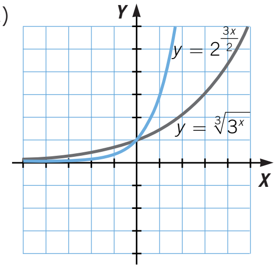
a) $y = 3^{2x}$ **b)** $y = \sqrt[3]{3^x}$ **c)** $y = 2^{\frac{3x}{2}}$

	x	−2	−1	0	1	2
a)	$y = 3^{2x}$	0,0123	0,111	3	9	81
b)	$y = \sqrt[3]{3^x}$	0,48	0,693	1	1,442	2,08
c)	$y = 2^{\frac{3x}{2}}$	0,125	0,3536	1	2,828	8

a)



b) y c)

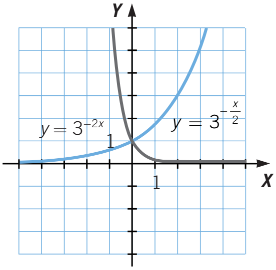


033 **Representa las funciones.**

a) $y = 3^{-2x}$ **b)** $y = 3^{-\frac{x}{2}}$

	x	−2	−1	0	1	2
a)	$y = 3^{-2x}$	81	9	1	0,111	0,012
b)	$y = 3^{-\frac{x}{2}}$	3	1,732	1	0,577	0,333

a) y b)



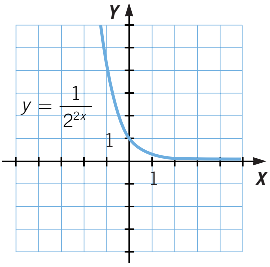
034 **Estudia y representa las funciones exponenciales.**

a) $y = \dfrac{1}{2^{2x}}$ **b)** $y = \dfrac{3^x}{2^{2x}}$

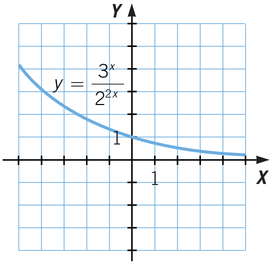
Razona si son decrecientes o no.

	x	−2	−1	0	1	2
a)	$y = \dfrac{1}{2^{2x}} = \left(\dfrac{1}{4}\right)^x$	16	4	1	0,25	0,0625
b)	$y = \dfrac{3^x}{2^{2x}} = \left(\dfrac{3}{4}\right)^x$	1,777	1,333	1	0,75	0,5625

a)



b)



Las dos funciones son decrecientes, porque son funciones exponenciales con bases menores que 1.

035 **Halla el capital que obtendríamos en los 5 primeros años al invertir, a interés compuesto, un capital de 300 € a un rédito del 3,5 %.**

$$C_f = 300 \cdot \left(1 + \frac{3,5}{100}\right)^5 = 300 \cdot (1,035)^5 = 356,30\ €$$

036 **Calcula, gráficamente, el capital que obtendremos al cabo de 2 años y 6 meses al invertir, a interés compuesto, 2.000 € a un rédito del 5 %.**

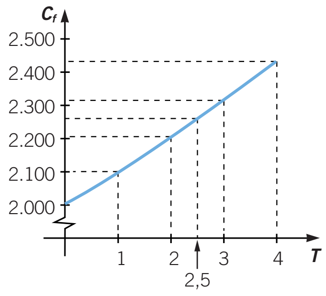
$$C_f = 2.000 \cdot \left(1 + \frac{5}{100}\right)^t = 2.000 \cdot (1,05)^t$$

El capital, en cada instante, es una función exponencial.

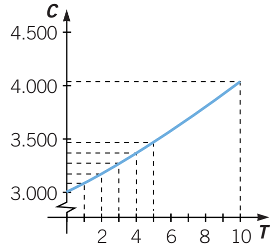
Para representar la función correspondiente, construimos primero una tabla de valores.

t	0	1	2	3	4
$C_f = 2.000 \cdot (1,05)^t$	2.000	2.100	2.205	2.315,25	2.431,01

Para conocer cuál es el capital al cabo de 2 años y 6 meses hay que ver en la gráfica el valor correspondiente a $x = 2,5$; que es 2.260 €.



037 **La siguiente gráfica muestra la evolución de un capital invertido a interés compuesto. Calcula cuál es el capital que hemos invertido y explica cómo lo haces.**



En la gráfica se observa que se han invertido 3.000 €, porque es el valor que le corresponde a $t = 0$.

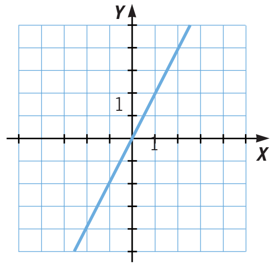
ACTIVIDADES

038 **Estudia y representa las siguientes funciones polinómicas de primer grado.**

a) $y = 2x$ **b)** $y = -2x$ **c)** $y = 2x - 3$ **d)** $y = -2x + 3$

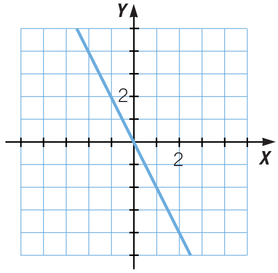
a) Su pendiente es 2, luego es creciente.

x	−2	−1	0	1	2
y	−4	−2	0	2	4

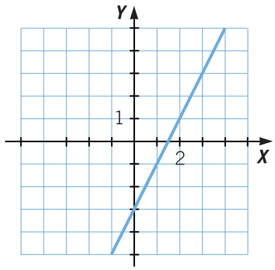


b) Su pendiente es −2, y es decreciente.

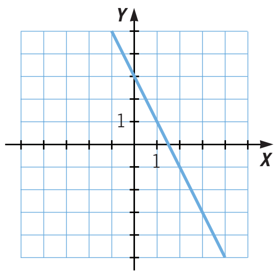
x	−2	−1	0	1	2
y	4	2	0	−2	−4



c) Esta recta se obtiene trasladando tres unidades hacia abajo la gráfica de la recta $y = 2x$.
Es creciente y su pendiente es 2.



d) Esta recta se obtiene trasladando tres unidades hacia arriba la gráfica de la recta $y = -2x$.
Es decreciente y su pendiente es −2.



039 **Pon un ejemplo de función lineal, otro de función afín y otro de función constante. Enumera sus semejanzas y diferencias.**

Función lineal: $y = -3x$ Función constante: $y = -4$

Función afín: $y = -2x + 1$

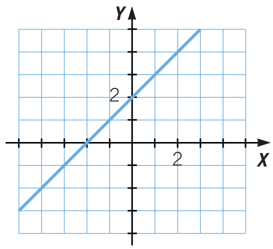
Todas las funciones son rectas, la función constante no depende de x, la función lineal pasa por el origen de coordenadas y la función afín no pasa por el origen de coordenadas; estas dos últimas tienen pendiente distinta de cero.

040 Representa estas funciones.

a) $f(x) = x + 2$ b) $g(x) = -x - 2$ c) $h(x) = 3$ d) $i(x) = \frac{1}{3}x + \frac{5}{4}$

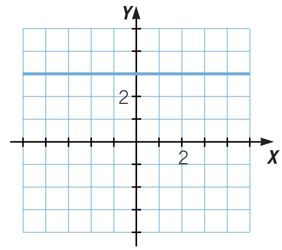
a)

x	-2	0
$f(x) = x + 2$	0	2



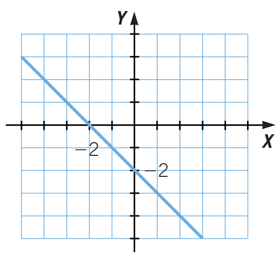
c)

x	-2	0
$h(x) = 3$	3	3



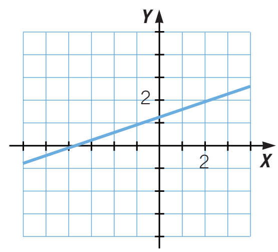
b)

x	0	1
$g(x) = -x - 2$	-2	-3



d)

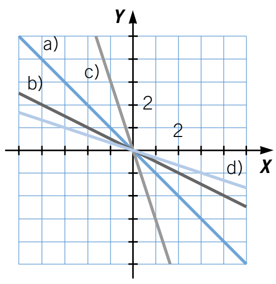
x	0	3
$i(x) = \frac{1}{3}x + \frac{5}{4}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{9}{4}$



041 Representa en los mismos ejes de coordenadas estas funciones. Explica sus diferencias.

a) $y = -x$ b) $y = -\frac{1}{2}x$ c) $y = -3x$ d) $y = -\frac{1}{3}x$

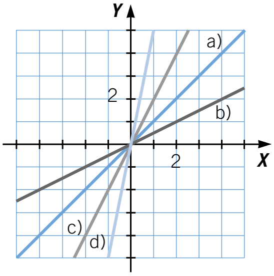
Todas son funciones lineales que se diferencian en el valor de su pendiente.



042 Representa estas funciones en los mismos ejes de coordenadas. ¿Qué diferencias hay?

a) $y = x$ c) $y = 2x$

b) $y = \frac{1}{2}x$ d) $y = 5x$

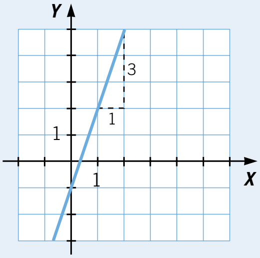


Todas son funciones lineales que se diferencian en el valor de su pendiente.

043 **HAZLO ASÍ**

¿CÓMO SE CALCULA LA ECUACIÓN DE UNA FUNCIÓN AFÍN A PARTIR DE SU GRÁFICA?

¿A qué función corresponde esta gráfica?



PRIMERO. Se halla la pendiente. Para ello, se calcula la variación de las variables x e y entre dos puntos de la recta:

$$m = \frac{3}{1} = 3$$

SEGUNDO. Se determina la ordenada en el origen. El punto de corte de la función con el eje Y es $(0, -1)$.

TERCERO. Se escribe la expresión algebraica de la función con los datos obtenidos.

$$y = mx + n \rightarrow y = 3x - 1$$

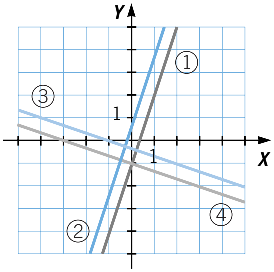
044 Relaciona cada expresión algebraica con su gráfica.

a) $y = 3x - 1$

b) $y = -\frac{1}{3}x - 1$

c) $y = 3x + \frac{2}{3}$

d) $y = -\frac{1}{3}x - \frac{1}{3}$



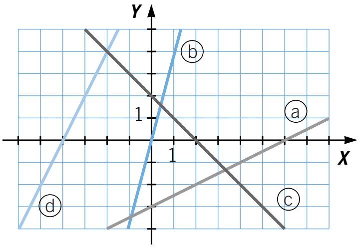
Las rectas son paralelas dos a dos, luego tienen pendientes iguales dos a dos.

Las rectas ① y ② son crecientes, es decir, tienen pendiente positiva y sus expresiones algebraicas serán a) y c).

Para distinguir una gráfica de otra calculamos su punto de corte con el eje Y. Deducimos que la gráfica ① se corresponde con a) y la gráfica ② con c).

Con un razonamiento análogo deducimos que la gráfica ③ corresponde a d) y la gráfica ④ corresponde a b).

045 Calcula las expresiones algebraicas de las funciones representadas por estas rectas.



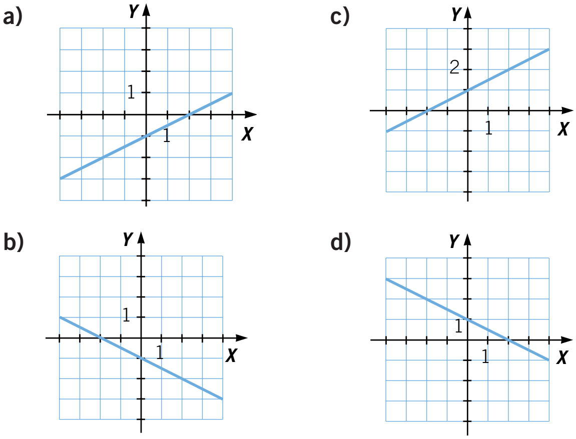
a) $y = -\dfrac{1}{2}x - 1$

b) $y = 4x$

c) $y = -x + 2$

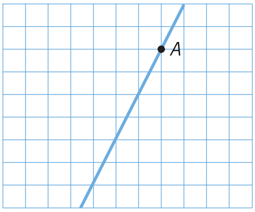
d) $y = 2x + 8$

046 **¿Cuál de las rectas tiene por ecuación $y = -\dfrac{1}{2}x - 1$?**



La recta que tiene por ecuación $y = -\dfrac{1}{2}x - 1$ es la del apartado b), ya que es decreciente y pasa por el punto (0, −1).

047 **Esta gráfica corresponde a una función de proporcionalidad directa. Dibuja los ejes si la abscisa del punto *A* es 3.**

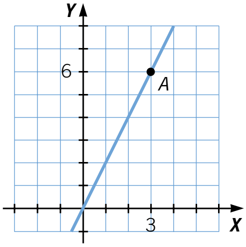


a) ¿Cuál es la ordenada del punto *A*?

b) ¿Y la expresión algebraica de la función?

a) La ordenada en *A* es 6.

b) $y = 2x$



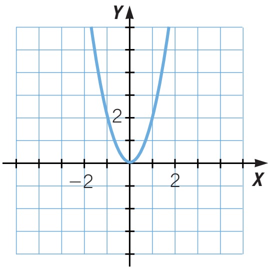
048 Estudia y representa las siguientes funciones polinómicas de segundo grado.

a) $y = 2x^2$ b) $y = -2x^2$ c) $y = \frac{1}{2}x^2$ d) $y = \frac{x^2}{4}$

a) La función es simétrica respecto del eje de ordenadas.

El vértice es el punto (0, 0), donde tiene un mínimo.

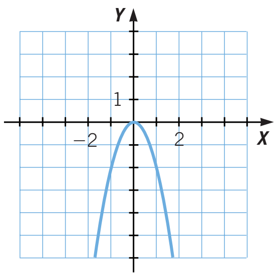
x	−2	−1	0	1	2
y	8	2	0	2	8



b) La función es simétrica respecto del eje de ordenadas.

El vértice es el punto (0, 0), donde tiene un máximo.

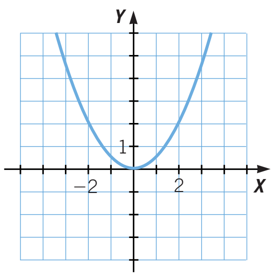
x	−2	−1	0	1	2
y	−8	−2	0	−2	−8



c) La función es simétrica respecto del eje de ordenadas.

El vértice es el punto (0, 0), donde tiene un mínimo.

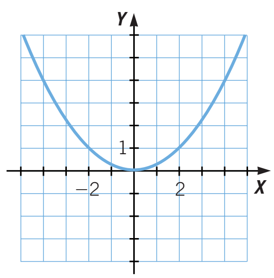
x	−2	−1	0	1	2
y	2	0,5	0	0,5	2



d) La función es simétrica respecto del eje de ordenadas.

El vértice es el punto (0, 0), donde tiene un mínimo.

x	−2	−1	0	1	2
y	1	0,25	0	0,25	1



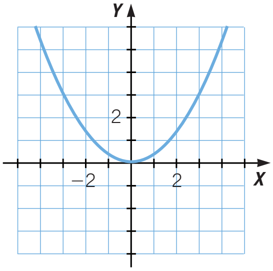
049 Representa la función polinómica de segundo grado $y = \frac{1}{3}x^2$ a partir de una tabla de valores.

a) ¿Cuál es el vértice de la parábola?

b) Determina la ecuación de la recta que es su eje de simetría.

La función es simétrica respecto del eje de ordenadas.

x	-2	-1	0	1	2
y	4/3	1/3	0	1/3	4/3

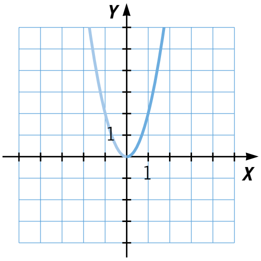


a) El vértice es el punto (0, 0), donde tiene un mínimo.

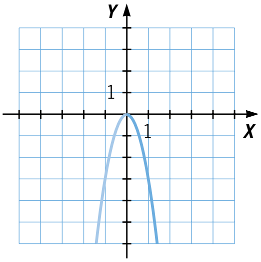
b) El eje de simetría es la recta de ecuación $x = 0$.

050 Completa las siguientes parábolas, teniendo en cuenta que son simétricas respecto de un eje que pasa por su vértice.

a)



b)



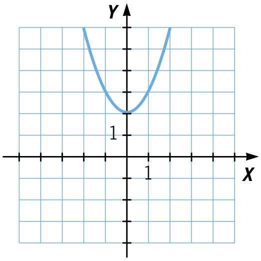
Escribe la expresión algebraica de cada una de las funciones.

a) $y = 2x^2$

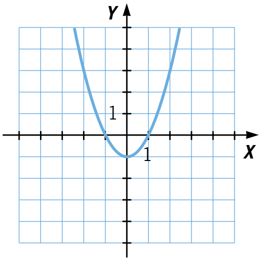
b) $y = -3x^2$

051 Calcula cuál es el valor de la constante c en la expresión $y = x^2 + c$ de estas parábolas. Explica cómo lo haces.

a)



b)

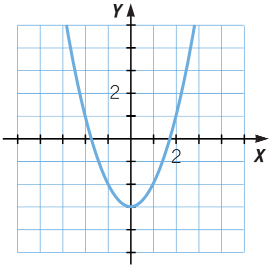


a) El vértice de la parábola es el punto (0, 2), y sustituyendo en $y = x^2 + c$, resulta que $c = 2$. Luego la ecuación de la parábola es $y = x^2 + 2$.

b) El vértice de la parábola es el punto $(0, -1)$, y sustituyendo en la expresión $y = x^2 + c$, resulta que $c = -1$. Por tanto, la ecuación de la parábola es $y = x^2 - 1$.

052 ●●

Determina el recorrido de la función $y = x^2 - 3$, representando primero la parábola correspondiente. ¿Existe alguna función polinómica de segundo grado cuyo recorrido sea todos los números reales? ¿Por qué?



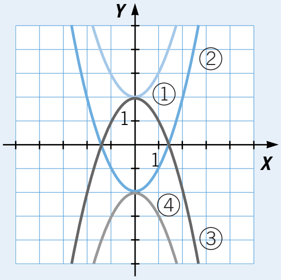
El recorrido de la parábola es el intervalo $[-3, +\infty)$.

No existe ninguna parábola cuyo recorrido sea todos los números reales, porque siempre está limitado por el vértice.

053 **HAZLO ASÍ**

¿CÓMO SE PUEDEN RELACIONAR ALGUNAS PARÁBOLAS CON SUS ECUACIONES?

Relaciona cada parábola con su correspondiente expresión algebraica.



a) $y = x^2 + 2$

b) $y = x^2 - 2$

c) $y = -x^2 + 2$

d) $y = -x^2 - 2$

PRIMERO.

Se relaciona la existencia de máximos o mínimos con el valor de a.

Las parábolas ① y ② presentan un mínimo $\rightarrow a > 0$

Las parábolas ③ y ④ presentan un máximo $\rightarrow a < 0$

Por tanto, las parábolas ① y ② corresponden a las ecuaciones c) y d), y las parábolas ③ y ④ a a) y b).

SEGUNDO. Se estudian sus ejes de simetría. El eje de simetría de todas las parábolas es $x = 0$. Por tanto, resulta que $b = 0$.

TERCERO. Se estudian las traslaciones de cada parábola.

La parábola ① está trasladada 2 unidades hacia arriba respecto de $y = x^2$. Su ecuación es $y = x^2 + 2$.

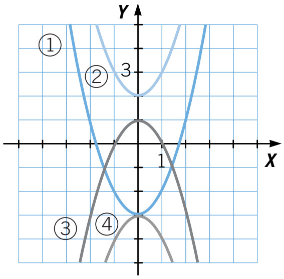
La parábola ② está trasladada 2 unidades hacia abajo respecto de $y = x^2$. Su ecuación es $y = x^2 - 2$.

La parábola ③ está trasladada 2 unidades hacia arriba respecto de $y = -x^2$. Su ecuación es $y = -x^2 + 2$.

La parábola ④ está trasladada 2 unidades hacia abajo respecto de $y = -x^2$. Su ecuación es $y = -x^2 - 2$.

054 **Relaciona cada parábola con su correspondiente expresión algebraica.**

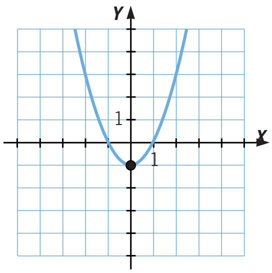
a) $y = x^2 - 3$
b) $y = -x^2 + 1$
c) $y = x^2 + 2$
d) $y = -x^2 - 3$



Las dos parábolas que tienen un mínimo relativo son ① y ②, que se corresponden con las expresiones $y = x^2 - 3$ e $y = x^2 + 2$, respectivamente.

Las gráficas ③ y ④, que poseen un máximo relativo, se corresponden con las expresiones $y = -x^2 + 1$ e $y = -x^2 - 3$, respectivamente.

055 **Calcula la expresión algebraica de la siguiente parábola.**



Esta parábola tiene un mínimo, luego el coeficiente de x^2 es $a > 0$.

El eje de simetría es el eje de ordenadas, por lo que su expresión es de la forma $y = ax^2 + c$, con $a > 0$.

El vértice está en el punto $(0, -1)$, siendo $c = -1$.

Corta al eje de abscisas en $x = 1$ y $x = -1$.

La expresión algebraica de la parábola es $y = x^2 - 1$.

056 **Halla los cortes con los ejes, el vértice y la ecuación del eje de simetría de estas parábolas.**

a) $y = -x^2 - 3x$
b) $y = x^2 - \frac{2}{3}x$
c) $y = \frac{3}{2}x^2 - x$
d) $y = x^2 + 2x$

a) Corta a los ejes en los puntos $(0, 0)$ y $(-3, 0)$.
El eje de simetría es la recta $x = \frac{-3}{2}$ y el vértice es el punto $\left(\frac{-3}{2}, \frac{9}{4}\right)$.

b) Corta a los ejes en los puntos $(0, 0)$ y $\left(\frac{2}{3}, 0\right)$.
El eje de simetría es la recta $x = \frac{1}{3}$ y el vértice es el punto $\left(\frac{1}{3}, \frac{-1}{9}\right)$.

c) Corta a los ejes en los puntos $(0, 0)$ y $\left(\frac{2}{3}, 0\right)$.
El eje de simetría es la recta $x = \frac{1}{3}$ y el vértice es el punto $\left(\frac{1}{3}, \frac{-1}{6}\right)$.

d) Corta a los ejes en los puntos $(0, 0)$ y $(-2, 0)$.
El eje de simetría es la recta $x = -1$ y el vértice es el punto $(-1, -1)$.

057 Analiza cómo será la gráfica de estas funciones polinómicas sin representarlas.

a) $y = x^2 - 3x^2 + 4$ **b)** $y = -x - 3$

a) La función $y = x^2 - 3x^2 + 4$ es un polinomio de segundo grado, luego su gráfica es una parábola.

El coeficiente de x^2 es $-2 < 0$, por lo que la parábola tiene un máximo en el vértice.

El coeficiente de x es 0, y el eje de la parábola es la recta $x = 0$.

Su vértice es el punto (0, 4).

b) La función $y = -x - 3$ es un polinomio de primer grado, y su gráfica es una recta.

El coeficiente de x es $-1 < 0$, la recta es decreciente, su pendiente es negativa y pasa por el punto (0, −3).

058 Realiza, analizando el valor de los coeficientes, una aproximación de la gráfica de esta función polinómica.

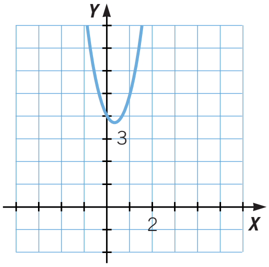
$$y = 3x^2 - 2x + 4$$

La función $y = 3x^2 - 2x + 4$ es un polinomio de segundo grado y su representación gráfica es una parábola.

El coeficiente de x^2 es positivo, por lo que la parábola tiene un mínimo en el vértice. Como este coeficiente, en valor absoluto, es mayor que 1, sus ramas están más cerradas que las de la parábola $y = x^2$.

El eje es la recta $x = \frac{1}{3}$ y su vértice es el punto $\left(\frac{1}{3}, \frac{11}{3}\right)$.

059 Representa la parábola $y = 3x^2 - 2x + 4$, y comprueba que la aproximación de la actividad anterior es correcta.

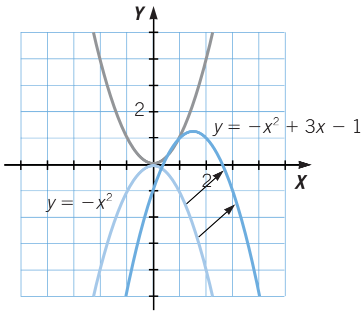


060 A partir de la gráfica de la función $y = x^2$, describe cómo realizarías la gráfica de la función polinómica $y = -x^2 + 3x - 1$.

Como son funciones polinómicas de segundo grado, sus representaciones son parábolas. Analizando el coeficiente de x^2 observamos que son iguales en valor absoluto, $|1| = |-1|$, pero de signo contrario.

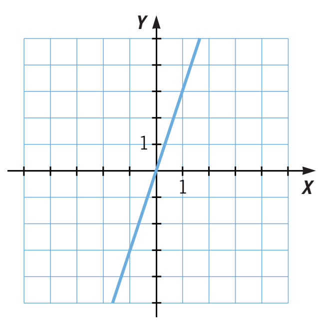
Esto quiere decir que las dos parábolas son iguales en cuanto a la abertura de sus ramas, pero $y = -x^2 + 3x - 1$ tiene un máximo en el vértice, pues es una traslación de la parábola $y = -x^2$.

El eje de la parábola es la recta $x = \frac{3}{2}$, y el vértice es el punto de coordenadas $V\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{4}\right)$. Para representarla hay que trasladar el vértice de la parábola $y = -x^2$ al nuevo vértice.



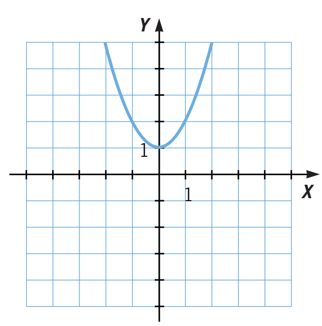
061 ●● **Discute cómo serán los coeficientes de la expresión algebraica que corresponde a cada una de estas parábolas o rectas.**

a) Es una recta $\rightarrow$ $y = mx + n$.



- Pasa por el origen de coordenadas, luego la función es lineal $\rightarrow$ $n = 0$.
- La función es creciente $\rightarrow$ $m > 0$.
- La pendiente es 3, porque al aumentar una unidad en el eje X, se aumentan tres unidades en el eje $Y \rightarrow$ $m = 3$.
- La ecuación es $y = 3x$.

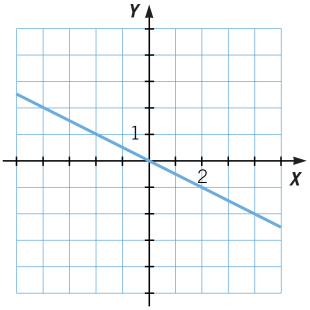
b) Es una parábola $\rightarrow$ $y = ax^2 + bx + c$.



- Tiene un mínimo en el vértice $\rightarrow$ $a > 0$.
- Es igual de cerrada que $y = x^2$ $\rightarrow$ $|a| = 1$.
- El eje de simetría es X $\rightarrow$ $b = 0$.
- El vértice es $V(0, 1)$ $\rightarrow$ $c = 1$.
- La ecuación es $y = x^2 + 1$.

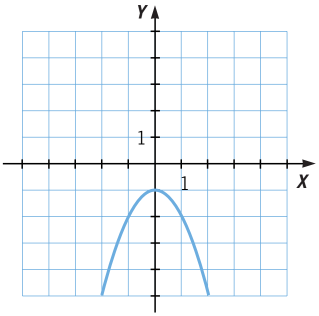
c) Es una recta $\rightarrow$ $y = mx + n$.

- Pasa por el origen de coordenadas, luego la función es lineal $\rightarrow$ $n = 0$.
- La función es decreciente $\rightarrow$ $m < 0$.
- La pendiente es $-\frac{1}{2}$, ya que al aumentar una unidad en el eje X se disminuye media unidad en el eje Y $\rightarrow$ $m = -\frac{1}{2}$.
- La ecuación es $y = -\frac{x}{2}$.



d) Es una parábola $\rightarrow$ $y = ax^2 + bx + c$.

- Tiene un máximo en el vértice $\rightarrow$ $a < 0$.
- Es igual de cerrada que $y = x^2$ $\rightarrow$ $|a| = 1$.
- El eje de simetría es X $\rightarrow$ $b = 0$.
- El vértice es $V(0, -1)$ $\rightarrow$ $c = -1$.
- La ecuación es $y = -x^2 - 1$.



062 **La siguiente tabla corresponde a una función de proporcionalidad inversa.**

x	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**...**
y			$\frac{1}{4}$			

a) Completa la tabla.

b) Escribe la expresión algebraica de la función.

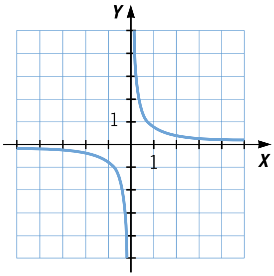
c) Representa la función.

a)

x	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**...**
y	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{3}{20}$	...

b) $y = \dfrac{\frac{3}{4}}{x}$

c)



063 **La relación entre dos números positivos viene establecida por la tabla.**

x	0,02	0,1	0,2	0,5	1	2	...
y	300	60	30	12	6	3	...

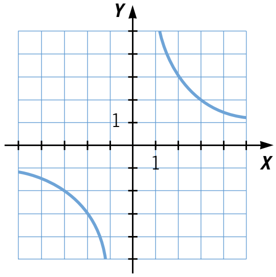
a) ¿Cuál es su expresión algebraica?

b) Represéntala gráficamente.

c) Da valores a x próximos a cero. ¿Qué ocurre con los valores de y?

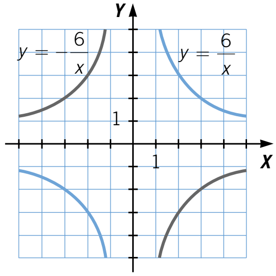
a) $xy = 6 \rightarrow y = \frac{6}{x}$

b)



c) Cuando x toma valores cercanos a cero, y toma valores muy elevados.

064 **Representa las funciones $y = \frac{6}{x}$ e $y = -\frac{6}{x}$, y escribe sus diferencias.**



Son funciones simétricas respecto del eje horizontal.

A cada valor de x le corresponden valores opuestos para y.

$y = \frac{6}{x}$ es decreciente y su representación está en los cuadrantes 1.° y 3.°.

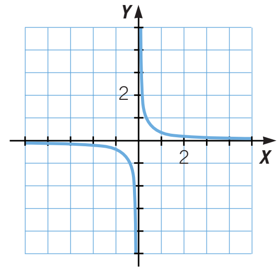
$y = -\frac{6}{x}$ es creciente y su representación está en los cuadrantes 2.° y 4.°.

065 Estudia y representa las siguientes funciones de proporcionalidad inversa.

a) $y = \dfrac{1}{3x}$ b) $y = -\dfrac{1}{3x}$

a)

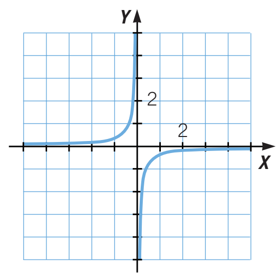
x	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**…**
y	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{3}{20}$	…



Dominio: todos los números reales menos 0: $\mathbb{R} - \{0\}$.
Recorrido: todos los números reales menos 0: $\mathbb{R} - \{0\}$.
Continuidad: la gráfica es continua en todos los puntos excepto en $x = 0$.
Crecimiento y decrecimiento: la función es decreciente.
No tiene máximos ni mínimos relativos.
Presenta una simetría respecto del origen de coordenadas.

b)

x	-2	-1	1	2
y	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{6}$



Dominio: todos los números reales
menos 0: $\mathbb{R} - \{0\}$.
Recorrido: todos los números reales menos 0: $\mathbb{R} - \{0\}$.
Continuidad: la gráfica es continua en todos los puntos excepto en $x = 0$.
Crecimiento y decrecimiento: la función es creciente.
No tiene máximos ni mínimos relativos.
Presenta una simetría respecto del origen de coordenadas.

066 Dada la función $y = -\dfrac{5}{x}$:

a) ¿Para qué valores es creciente la función?

b) ¿Tiene máximo o mínimo?

c) Haz una tabla de valores donde x tome valores de -1 a 0 y de 1 a 0 cercanos a 0. ¿A qué valores se acerca la función?

a) Es creciente en toda la recta real, menos en 0, donde no está definida.

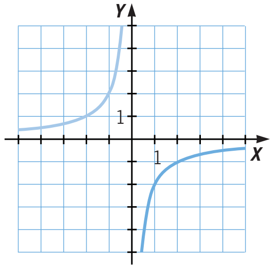
b) No tiene máximos ni mínimos, por ser siempre creciente.

c)

x	-1	$-0{,}1$	$-0{,}01$	$-0{,}001$	$-0{,}0001$	$0{,}0001$	$0{,}001$	$0{,}01$	$0{,}1$	1
y	5	50	500	5.000	50.000	-50.000	-5.000	-500	-50	-5

Cuando toma valores negativos próximos a 0 y valores positivos muy grandes, se acerca a infinito.
Cuando toma valores positivos próximos a 0 y valores negativos muy grandes, se acerca a menos infinito.

067 **Completa la gráfica correspondiente a una hipérbola.**



Como la gráfica de la hipérbola es simétrica respecto del origen de coordenadas, la otra rama pasa por los puntos $(-2, 1)$ y $(-1, 2)$.

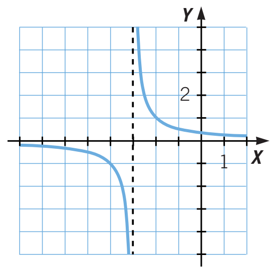
068 **Realiza la gráfica de las hipérbolas.**

a) $y = \dfrac{1}{x+3}$ **b)** $y = \dfrac{1}{x-1}$

¿Cuáles son los ejes de cada una?

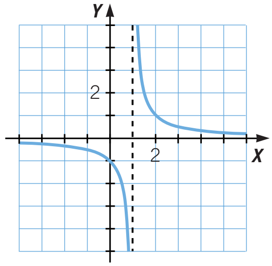
a) Como el numerador es positivo, la hipérbola ocupa los cuadrantes 1.° y 3.°. Los ejes son $x = -3$ e $y = 0$.

x	-5	-4	-2	-1
y	$-\frac{1}{2}$	-1	1	$\frac{1}{2}$



b) Como el numerador es positivo, la hipérbola ocupa los cuadrantes 1.° y 3.°. Los ejes son $x = 1$ e $y = 0$.

x	-1	0	2	3
y	$-\frac{1}{2}$	-1	1	$\frac{1}{2}$



069 **Con ayuda de la calculadora, halla los valores que toma la función $y = 2{,}5^x$ para estos valores de x.**

a) $x = -3$ **d)** $x = 0$ **g)** $x = 3$
b) $x = -2$ **e)** $x = 1$ **h)** $x = 4$
c) $x = -1$ **f)** $x = 2$ **i)** $x = -4$

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$y = 2{,}5^x$	0,0256	0,064	0,16	0,4	1	2,5	6,25	15,625	39,0625

070 **Copia y completa la tabla de valores para la función $y = \left(\dfrac{5}{3}\right)^x$.**

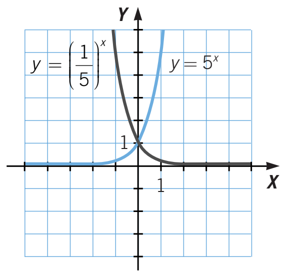
x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$y = \left(\frac{5}{3}\right)^x$	0,1296	0,216	0,36	0,6	1	1,6667	2,7778	4,6296	7,7160

071 ●● Realiza una tabla de valores y representa las funciones exponenciales.

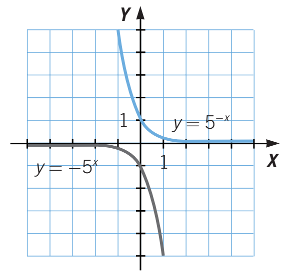
a) $y = 5^x$ b) $y = \left(\dfrac{1}{5}\right)^x$ c) $y = -5^x$ d) $y = 5^{-x}$

	x	-2	-1	0	1	2
a)	$y = 5^x$	0,04	0,2	1	5	25
b)	$y = \left(\dfrac{1}{5}\right)^x$	25	5	1	0,2	0,04
c)	$y = -5^x$	−0,04	−0,2	−1	−5	−25
d)	$y = 5^{-x}$	25	5	1	0,2	0,4

a) y b)



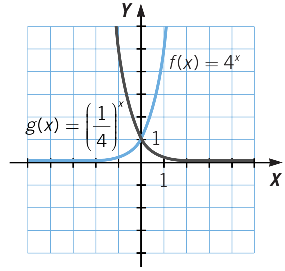
c) y d)



072 ●● Analiza las semejanzas y diferencias de estas funciones exponenciales.

$$f(x) = 4^x \qquad g(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x$$

x	-2	-1	0	1	2
$f(x) = 4^x$	0,0625	0,25	1	4	16
$g(x) = \left(\dfrac{1}{4}\right)^x$	16	4	1	0,25	0,0625

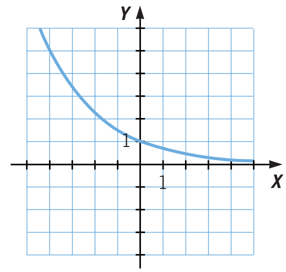


Las gráficas de ambas funciones son simétricas respecto del eje de ordenadas. El dominio de ambas funciones es $\mathbb{R}$ y el recorrido es $(0, +\infty)$. Las gráficas de ambas funciones son continuas. La función $f(x)$ es creciente y la función $g(x)$ es decreciente.

073 ● Estudia y representa la función exponencial.

$$y = \left(\frac{2}{3}\right)^x$$

x	-2	-1	0	1	2
$y = \left(\dfrac{2}{3}\right)^x$	2,25	1,5	1	0,67	0,4



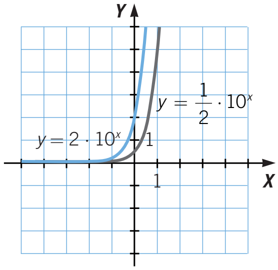
La función es continua en $\mathbb{R}$, su recorrido es $(0, +\infty)$, y es monótona decreciente.

074 Haz una tabla de valores de las siguientes funciones.

a) $y = 2 \cdot 10^x$ b) $y = \frac{1}{2} \cdot 10^x$

Representa las funciones en los mismos ejes de coordenadas, y enumera sus propiedades.

	x	−2	−1	0	1	2
a)	$y = 2 \cdot 10^x$	0,02	0,2	2	20	200
b)	$y = \frac{1}{2} \cdot 10^x$	0,005	0,05	0,5	5	50



El dominio de ambas funciones es $\mathbb{R}$ y el recorrido es $(0, +\infty)$.

Las gráficas de ambas funciones son continuas y crecientes.

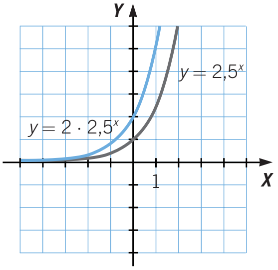
La gráfica de la función $y = 2 \cdot 10^x$ corta al eje de ordenadas en el punto (0, 2), y la gráfica de $y = \frac{1}{2} \cdot 10^x$ lo corta en (0; 0,5).

075 Representa gráficamente y enumera las propiedades de las funciones.

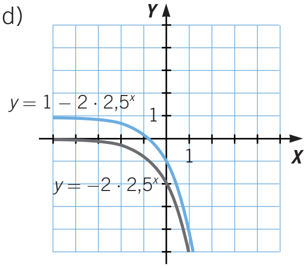
a) $y = 2{,}5^x$ b) $y = 2 \cdot 2{,}5^x$ c) $y = -2 \cdot 2{,}5^x$ d) $y = 1 - 2 \cdot 2{,}5^x$

	x	−1	−0,5	−0,25	0	0,25	0,5	1
a)	$y = 2{,}5^x$	0,4	0,63	0,8	1	1,3	1,58	2,5
b)	$y = 2 \cdot 2{,}5^x$	0,8	1,26	1,6	2	2,6	3,16	5
c)	$y = -2 \cdot 2{,}5^x$	−0,8	−1,26	−1,6	−2	−2,6	−3,16	−5
d)	$y = 1 - 2 \cdot 2{,}5^x$	0,2	−0,26	−0,6	−1	−1,6	−2,16	−4

a) y b)

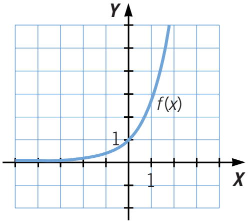


c) y d)



076 Representa la función $y = e^x$. Recuerda que el número e es un número irracional cuyo valor aproximado es $e = 2{,}718281...$

La gráfica $f(x) = e^x$ es:

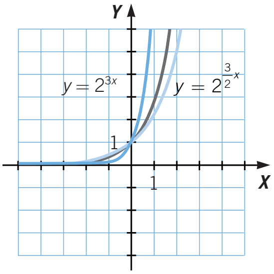


077 Representa las siguientes funciones de tipo exponencial.

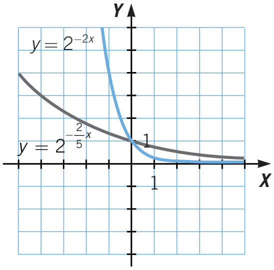
a) $y = 2^{3x}$ b) $y = 2^{\frac{3}{2}x}$ c) $y = 2^{-2x}$ d) $y = 2^{-\frac{2}{5}x}$

	x	-2	-1	0	1	2
a)	$y = 2^{3x}$	0,015625	0,125	1	8	64
b)	$y = 2^{\frac{3}{2}x}$	0,125	0,3536	1	2,8284	8
c)	$y = 2^{-2x}$	16	4	1	0,25	0,0625
d)	$y = 2^{-\frac{2}{5}x}$	1,7411	1,3195	1	0,7579	0,5744

a) y b)

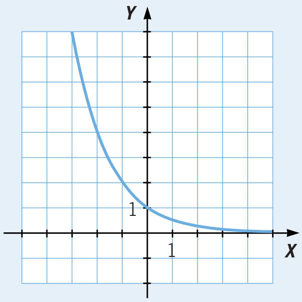


c) y d)



078 **HAZLO ASÍ**

¿CÓMO SE CALCULA LA EXPRESIÓN ALGEBRAICA DE UNA FUNCIÓN EXPONENCIAL A PARTIR DE SU GRÁFICA?



Determina la expresión algebraica de esta función exponencial.

PRIMERO. Se determina uno de los puntos, distinto del punto (0, 1), por el que pasa la gráfica.

En este caso, la gráfica pasa por el punto (−2, 4).

SEGUNDO. Se sustituyen estas coordenadas en la expresión algebraica de la función exponencial.

$$y = a^x \xrightarrow{x=-2,\ y=4} 4 = a^{-2} = \frac{1}{a^2}$$

TERCERO. Se calcula el valor de a.

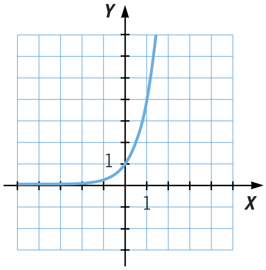
$$4 = \frac{1}{a^2} \rightarrow a^2 = \frac{1}{4} \rightarrow a = \pm\frac{1}{2}$$

CUARTO. No se considera la solución negativa, pues en una función exponencial sucede que $a > 0$.

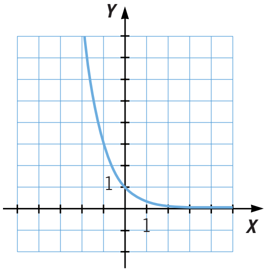
La expresión algebraica de la función es $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

079 Determina la expresión algebraica de estas funciones exponenciales.

a)



b)

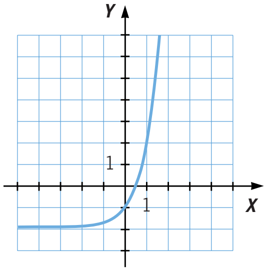


a) $y = 4^x$

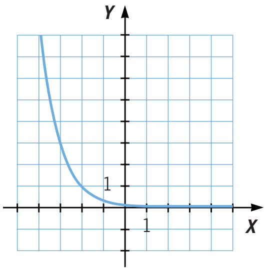
b) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$

080 Halla la expresión algebraica de las siguientes funciones.

a)



b)



a) $y = 4^x - 2$

b) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^{x+2}$

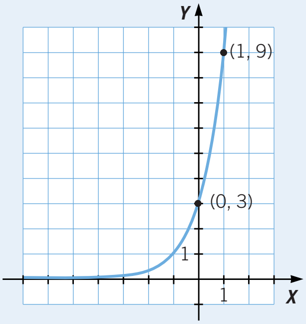
081 **HAZLO ASÍ**

¿CÓMO SE REPRESENTA GRÁFICAMENTE UNA FUNCIÓN EXPONENCIAL, CONOCIENDO ALGUNAS DE SUS CARACTERÍSTICAS?

Dibuja la gráfica de una función exponencial del tipo $y = a^{(x+b)}$ que es creciente, no corta el eje X y pasa por los puntos (0, 3) y (1, 9).

PRIMERO. Se representan los puntos por los que pasa la función.

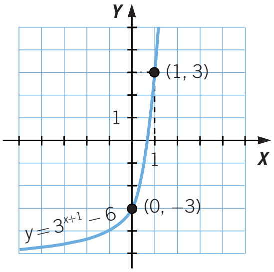
SEGUNDO. Si la función es creciente, la parte situada junto al eje X será la parte izquierda de la gráfica. Y si es decreciente, será su parte derecha.



082 Realiza la gráfica de una función exponencial que tenga las siguientes propiedades.

- **Es creciente.**
- **Corta al eje *Y* en el punto (0, −3).**
- **Pasa por el punto (1, 3).**

Conociendo la forma que tiene la gráfica de la función exponencial, y teniendo en cuenta las condiciones del enunciado, una posible gráfica es:



083 **Calcula el capital que obtendríamos en los 5 primeros años al invertir, a interés compuesto, un capital de 30.000 € a un rédito del 3,65 %.**

$$C_f = 30.000 \cdot \left(1 + \frac{3,65}{100}\right)^t = 30.000 \cdot (1,0365)^t$$

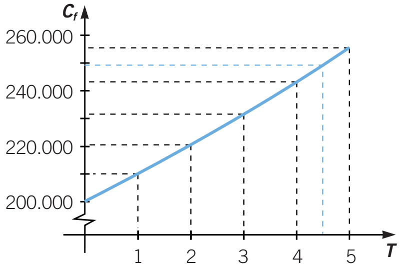
t	0	1	2	3	4	5
$C_f = 30.000 \cdot (1,0365)^t$	30.000	31.095	32.230	33.406	34.626	35.890

084 **Halla gráficamente el capital que tendremos al cabo de 4 años y 6 meses al invertir, a interés compuesto, 200.000 € a un rédito del 5 %.**

$$C_f = 200.000 \cdot \left(1 + \frac{5}{100}\right)^t = 200.000 \cdot (1,05)^t$$

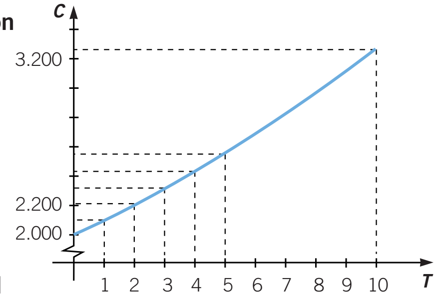
t	0	1	2	3	4	5
$C_f = 200.000 \cdot (1,05)^t$	200.000	210.000	220.500	231.525	243.101	255.256

Si queremos saber cuál será el capital al cabo de 4 años y 6 meses tendremos que hallar, en la gráfica, el valor de la ordenada correspondiente al valor 4,5 de la abscisa. Observando la gráfica se ve que el capital es 249.178 €.



085 **La siguiente gráfica muestra la evolución de un capital invertido, en €, a interés compuesto. Calcula cuál es el capital invertido y explica cómo lo haces.**

¿Cuánto tiempo, en años, es necesario mantener la inversión para duplicar el capital?



Observando la gráfica se ve que se han invertido 2.000 €, porque es el valor que le corresponde a $t = 0$.

Además, para $t = 1$ el capital es 2.100 €, luego el rédito es del 5 %, y para duplicar el capital, como la gráfica es exponencial, y crece cada vez más deprisa, podemos calcular que se obtendrán 4.000 € en 14 años aproximadamente.

086 **A nivel del mar, el agua hierve a 100 °C, pero cada incremento de 100 m en la altitud supone una décima de grado menos para hervir.**

a) Calcula el punto de ebullición en las cimas del Aneto (3.404 m) y del Everest (8.844 m).

b) Indica la expresión algebraica de la función *Temperatura de ebullición del agua—Altitud.*

a) $T_{\text{Aneto}} = 100 - \dfrac{3.404}{100} \cdot 0{,}1 = 96{,}596 \text{ °C}$

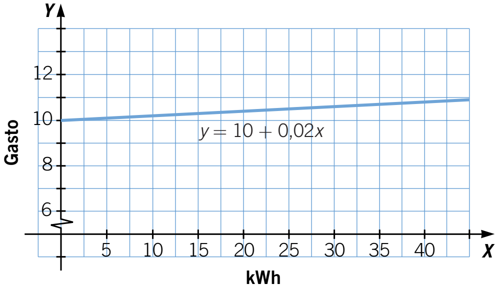
$T_{\text{Everest}} = 100 - \dfrac{8.844}{100} \cdot 0{,}1 = 91{,}156 \text{ °C}$

b) Temperatura: y Altura: x

$y = 100 - 0{,}1 \cdot \dfrac{x}{100} \rightarrow y = 100 - \dfrac{x}{1.000}$

087 **El coste fijo de la factura mensual de electricidad es de 10 €. Además, cada kilowatio cuesta 0,02 €. Haz una tabla que relacione el gasto mensual, en kWh, y el importe, en €. Escribe la función y represéntala.**

kWh	Gasto
0	10
10	10,2
20	10,4
30	10,6
40	10,8
50	11



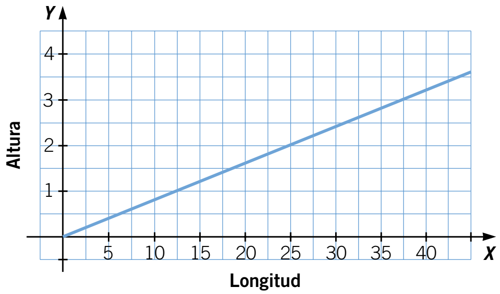
088 La relación entre la longitud recorrida y la altura alcanzada al subir un puerto de montaña se determina por la señal de tráfico que informa de la pendiente.

Si en un puerto de montaña la pendiente es del 8 %, expresa la relación entre la longitud recorrida y la altura alcanzada de forma algebraica, y representa la función.

Altura: y

Longitud: x

$y = 0{,}08x$



089 **Los taxis de una ciudad cobran 1 € por bajada de bandera y 0,80 € por cada kilómetro recorrido.**

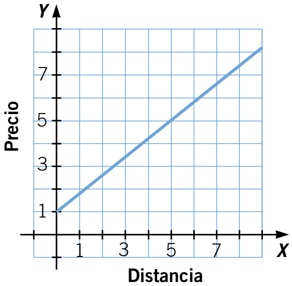
a) Haz una tabla que exprese el precio del viaje en función de los kilómetros recorridos.

b) Escribe la función que relaciona ambas magnitudes y represéntala.

a)

x	y
0	1
1	1,8
2	2,6
3	3,4
4	4,2
5	5
6	5,8
7	6,6
8	7,4
9	8,2
10	9

b) $y = 1 + 0{,}8x$



090 Existen varias escalas numéricas para medir la temperatura. Escribe una expresión algebraica que transforme:

a) Grados Celsius a grados Kelvin.

b) Grados Celsius a grados Farenheit.

Representa ambas funciones y determina la temperatura a la que coinciden ambas escalas.

	Agua	
Escalas	$P_{\text{fusión}}$	$P_{\text{ebullición}}$
Celsius	0	100
Farenheit	32	212
Kelvin	273,15	373,15

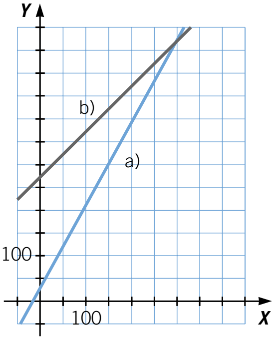
a) $y = 32 + \frac{180}{100}x$

b) $y = 273{,}15 + x$

$$\left.\begin{array}{l} y = 32 + \frac{180}{100}x \\ y = 273{,}15 + x \end{array}\right\}$$

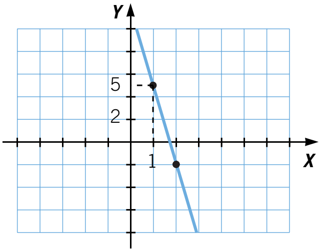
$$\rightarrow 32 + \frac{180}{100}x = 273{,}15 + x$$

$$\rightarrow x = 301{,}39375 \text{ °C} \rightarrow y = 574{,}54375$$



Las escalas Kelvin y Farenheit coinciden en 574,54375 °F = 574,54375 °K.

091 **La gráfica refleja la temperatura del aire, en °C, en función de los kilómetros de altitud.**



a) Escribe la expresión algebraica de la función *Altitud—Temperatura*.

b) ¿Cuál es su ordenada en el origen? ¿Qué significado tiene?

c) ¿Qué temperatura habrá a 9 km de altitud?

a) La función es $y = -6x + 11$.

b) La ordenada en el origen es 11, y esto significa que, a nivel del mar, la temperatura es de 11°C.

c) A 9 km de altura habrá: $11 - 6 \cdot 9 = -43$ °C.

092 **En un momento del día, la sombra de un palo de 1 m de altura es de 0,3 m.**

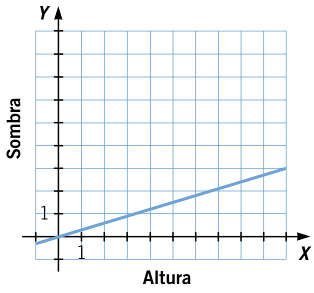
a) Haz una tabla donde se refleje la longitud de la sombra de varios objetos, en función de su altura, para ese instante.

b) Escribe la función y represéntala.

a)

x	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5
y	0	0,15	0,3	0,45	0,6	0,75	0,9	1,05	1,2	1,35	1,5

b) $y = 0{,}3x$



093 **Queremos construir un depósito prismático de base rectangular, 2 metros de altura y cuya capacidad sea 500 litros.**

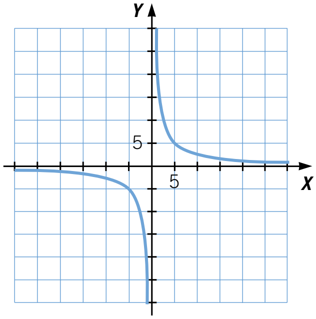
a) Haz una tabla con los diferentes valores de las dimensiones que puede tener.

b) Escribe la función correspondiente y represéntala.

a)

Base	1	10	50	100	200	250
Altura	250	25	5	2,5	1,25	1

b) $y = \dfrac{250}{x}$



Realmente la representación corresponde a la parte del 1.er cuadrante, ya que la longitud de la base del rectángulo nunca puede ser negativa.

094 ●●

Los alumnos de 4.º ESO quieren ir de viaje de estudios. Para obtener fondos compran 360 cajas de polvorones que han de vender entre todos los alumnos.

a) Haz una tabla que relacione el número de alumnos que van a viajar con el número de cajas que ha de vender cada uno.

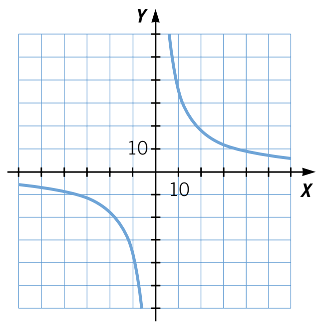
b) Escribe su expresión algebraica y representa la función.

c) Comprueba que el producto del número de alumnos y el de cajas es constante. ¿Cuál es ese valor?

a)

N.º de alumnos	1	10	20	60	120	360
Cajas	360	36	18	6	3	1

b) $y = \dfrac{360}{x}$

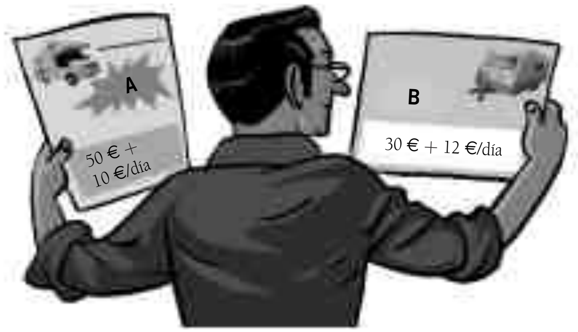


Realmente la representación corresponde a la parte del 1.er cuadrante, ya que el número de alumnos nunca puede ser negativo.

c) El producto siempre vale 360.

095 ●●●

Carlos se va de vacaciones y quiere alquilar una caravana. Por ello, acude a dos empresas de alquiler de caravanas que le ofrecen diferentes posibilidades.



a) Si Carlos va a viajar 8 días con la caravana, ¿en qué empresa le resulta más barato hacerlo?

b) ¿Y si va a viajar 15 días?

c) Escribe las funciones *Precio—Tiempo* y represéntalas en los mismos ejes. ¿Dónde se cortan? ¿Qué representa el punto de corte?

a) Precio en la compañía A: $50 + 10 \cdot 8 = 130$ €

Precio en la compañía B: $30 + 12 \cdot 8 = 126$ €

Le resulta más barato hacerlo en la compañía B.

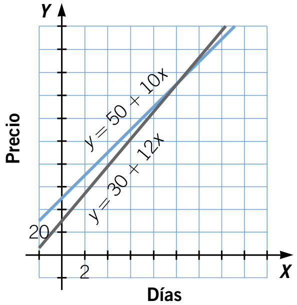
b) Precio en la compañía A: $50 + 10 \cdot 15 = 200$ €

Precio en la compañía B: $30 + 12 \cdot 15 = 210$ €

Le resulta más barato hacerlo en la compañía A.

c) Función de la compañía A: $y = 50 + 10x$

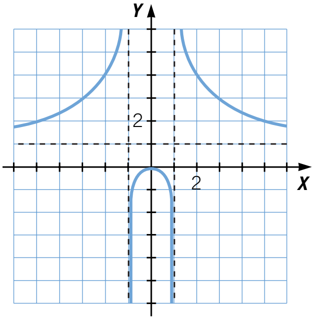
Función de la compañía B: $y = 30 + 12x$



Las funciones se cortan en el punto (10, 150), y esto significa que el precio de las dos compañías coincide para un alquiler de 10 días, y sería de 150 €.

096 **Haz la gráfica de $f(x)$ que cumpla que:**

- **Es continua en todo $\mathbb{R}$, salvo en $x = -1$ y en $x = 1$.**
- **Es creciente en $x < 0$ y es decreciente en $x > 0$.**
- **Tiende a 1 cuando x tiende a $+\infty$.**
- **Tiende a 1 cuando x tiende a $-\infty$.**
- **Tiene dos asíntotas verticales, una en $x = -1$ y otra en $x = 1$.**
- **Pasa por el origen y por el punto (2, 4).**

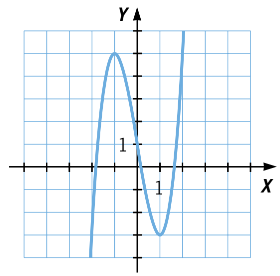


097 **A partir de la gráfica de $f(x) = 2x^3 - 6x + 1$ razona cuántas soluciones tienen estas ecuaciones.**

a) $2x^3 - 6x + 1 = 10$

b) $2x^3 - 6x + 1 = 2$

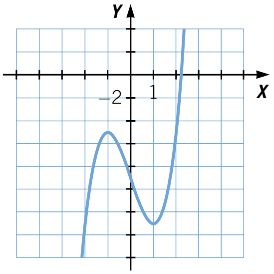
c) $2x^3 - 6x + 1 = -3$



Las soluciones de las ecuaciones coinciden con los cortes de las funciones con el eje X, y la representación de cada función se consigue trasladando la gráfica de la función.

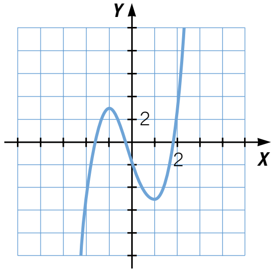
a) La gráfica de $y = 2x^3 - 6x - 9$ se realiza desplazando diez unidades hacia abajo la gráfica de $y = 2x^3 - 6x + 1$.

La ecuación solo tiene una raíz y está en el intervalo (2, 3).



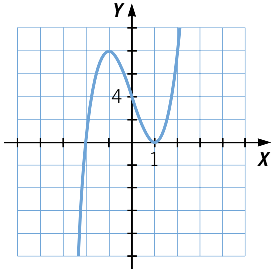
b) La gráfica de $y = 2x^3 - 6x - 2$ se realiza desplazando dos unidades hacia abajo la gráfica de $y = 2x^3 - 6x + 1$.

La ecuación tiene tres soluciones, en los intervalos $(-2, -1)$, $(-1, 0)$ y $(1, 2)$.



c) La gráfica de $y = 2x^3 - 6x + 4$ se realiza desplazando tres unidades hacia arriba la gráfica de $y = 2x^3 - 6x + 1$.

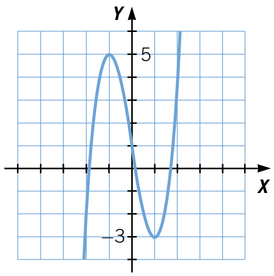
La ecuación tiene tres soluciones, una solución doble en $x = 1$ y otra solución en $x = -2$.



098 ●●● **¿Para qué valores del parámetro *a* tiene 3 soluciones la ecuación $2x^3 - 6x + 1 = a$? ¿Y para qué valores tiene 4 o más soluciones?**

Tiene tres soluciones para todos los valores comprendidos entre el máximo relativo ($y = 5$) y el mínimo relativo ($y = -3$).

Nunca puede tener más de tres soluciones por ser una ecuaciones de grado 3. Tiene tres soluciones para cualquier valor del intervalo $(-3, 5)$.



099 ●●● **De una función polinómica sabemos que:**

$$f(0) = 3 \qquad f(1) = 2 \qquad f(-1) = 8$$

a) ¿Cuántas funciones polinómicas de grado 2 cumplen estas condiciones?

b) ¿Y cuántas de grado superior a 2?

a) Una ecuación de grado 2 es de la forma $y = Ax^2 + Bx + C$, por lo que sustituyendo resulta el sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas, que tiene una sola solución.

$$\left.\begin{array}{r} f(0) = 3 \rightarrow C = 3 \\ f(1) = 2 \rightarrow A + B + C = 2 \\ f(-1) = 8 \rightarrow A - B + C = 8 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \rightarrow A = 2,\ B = -3,\ C = 3 \\ \rightarrow 2x^2 - 3x + 3 = 0 \end{array}$$

b) Para ecuaciones de grado mayor que 2 se obtienen sistemas con tres ecuaciones y, al menos, con cuatro incógnitas, por lo que habrá infinitas soluciones.

EN LA VIDA COTIDIANA

100 ●●● **Los alumnos de 4.º ESO están organizando su viaje de fin de curso y acuden a distintas agencias de viajes para tener varios presupuestos de las ciudades que podrían visitar.**

En una de las agencias les sugieren viajar a Francia durante 11 días. Tienen una oferta que ya habían visto en el escaparate, y la directora de la agencia les ofrece una promoción especial, dependiendo del número de alumnos que contraten el viaje.

Cuando vuelven al centro escolar para contárselo al resto de alumnos, todos tienen claro que les conviene ser el mayor número de alumnos posible.

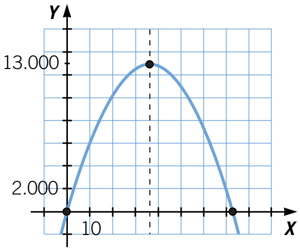
¿Qué número de alumnos le interesa a la agencia que contrate el viaje?

Número de alumnos: x

Precio de cada alumno: $\begin{cases} 400 - 10 \cdot (x - 32) = 720 - 10x & \text{si } x > 32 \\ 400 & \text{si } x \leq 32 \end{cases}$

Gasto a partir de 32 alumnos: $y = x \cdot (720 - 10x)$

A la agencia le interesa que se realice el mayor gasto posible, y que se corresponde con el vértice de la función. El vértice está en el eje que pasa por el punto medio de los dos puntos de corte con el eje X.



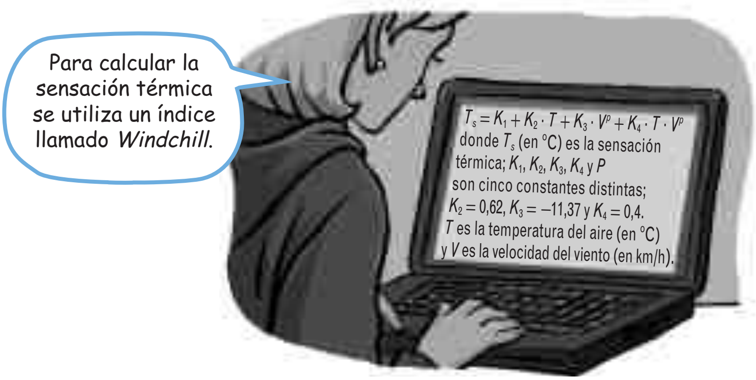
$$x \cdot (720 - 10x) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 72 \end{cases}$$

El eje es: $x = \dfrac{72}{2} = 36$

A la agencia le interesa que vayan 36 alumnos.

101 ●●● **Como habrás observado, a la misma temperatura no todos sentimos igualmente el frío o el calor. Por ejemplo, a una temperatura de 2 °C sentirás más frío si sopla un viento fuerte que si no hay viento. Este fenómeno se llama sensación térmica y depende de cada persona.**

Belén tiene una beca para estudiar en Moscú y está preocupada por la intensidad del frío en esa ciudad. Para calcular la sensación térmica en zonas frías, los parámetros que se tienen en cuenta son la temperatura y la velocidad del viento, siempre que la temperatura sea menor que 5 °C y la velocidad del viento sea mayor que 5 km/h.



En Internet, Belén no ha encontrado los valores de K_1 y P, pero sí ha localizado en los periódicos estos datos para determinarlos.

Día	T (°C)	V (km/h)	T_s
Lunes	−13	40	−24,8
Miércoles	−15	35	−26,9
Viernes	−7	55	−18,1

Si esta mañana ha escuchado por la radio que la sensación térmica en Moscú es de −7 °C, ¿cuál es la temperatura?

Tomando el sistema de ecuaciones obtenido con los datos del lunes, del miércoles y del viernes tenemos que:

$$\left.\begin{array}{r}-24{,}8 = k_1 + 0{,}62 \cdot (-13) + (-11{,}37) \cdot 40^p + 0{,}4 \cdot (-13) \cdot 40^p\\ -26{,}9 = k_1 + 0{,}62 \cdot (-15) + (-11{,}37) \cdot 35^p + 0{,}4 \cdot (-15) \cdot 35^p\\ -18{,}1 = k_1 + 0{,}62 \cdot (-7) + (-11{,}37) \cdot 55^p + 0{,}4 \cdot (-7) \cdot 55^p\end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{r}-24{,}8 = k_1 - 8{,}06 - 16{,}57 \cdot 40^p\\ -26{,}9 = k_1 - 9{,}3 - 17{,}37 \cdot 35^p\\ -18{,}1 = k_1 - 4{,}34 - 14{,}17 \cdot 55^p\end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r}-16{,}74 = k_1 - 16{,}57 \cdot 40^p\\ -17{,}6 = k_1 - 17{,}37 \cdot 35^p\\ -13{,}76 = k_1 - 14{,}17 \cdot 55^p\end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{r}-16{,}74 = k_1 - 16{,}57 \cdot 40^p\\ -17{,}6 = k_1 - 17{,}37 \cdot 35^p\end{array}\right\}$$
$$0{,}86 = -16{,}57 \cdot 40^p + 17{,}37 \cdot 35^p$$

$$\left.\begin{array}{r}-16{,}74 = k_1 - 16{,}57 \cdot 40^p\\ -13{,}76 = k_1 - 14{,}17 \cdot 55^p\end{array}\right\}$$
$$-2{,}98 = -16{,}57 \cdot 40^p + 14{,}17 \cdot 55^p$$

Calculamos p a partir de cualquiera de las ecuaciones, por ejemplo en la segunda:

$$-2{,}98 = -16{,}57 \cdot 40^p + 14{,}17 \cdot 55^p \rightarrow -2{,}98 + 16{,}57 \cdot 40^p = 14{,}17 \cdot 55^p$$

Consideramos las funciones $f(p) = -2{,}98 + 16{,}57 \cdot 40^p$ y $g(p) = 14{,}17 \cdot 55^p$, y obtenemos mediante tanteo el valor de p donde coinciden:

p	$f(p)$	$g(p)$
0	13,59	14,17
0,1	20,982	21,155
0,2	31,672	31,582
0,3	47,132	47,15

p	$f(p)$	$g(p)$
0,1	20,982	21,155
0,11	21,883	22,02
0,12	22,817	22,92
0,13	23,786	23,857
0,14	24,792	24,833
0,15	25,836	25,848
0,16	26,919	26,905
0,17	28,042	28,005

Es decir, las funciones se hacen iguales para un valor de p comprendido entre 0,16 y 0,17.

Si tomamos como solución un valor aproximado $p = 0{,}16$; calculamos el valor de k_1.

$$-16{,}74 = k_1 - 16{,}57 \cdot 40^{0{,}16} \rightarrow k_1 = -16{,}74 + 16{,}57 \cdot 40^{0{,}16} = 13{,}16$$

La fórmula del índice Windchill es:

$$T_S = 13{,}16 + 0{,}62 \cdot T - 11{,}37 \cdot V^{0{,}16} + 0{,}4 \cdot T \cdot V^{0{,}16}$$

Para $T = -7$ °C y $V = 32$ km/h:

$$T_S = 13{,}16 + 0{,}62 \cdot (-7) + 11{,}37 \cdot 32^{0{,}16} + 0{,}4 \cdot (-7) \cdot 32^{0{,}16} = -15{,}85$$

12 Estadística

VARIABLES ESTADÍSTICAS

GRÁFICOS ESTADÍSTICOS

- DIAGRAMA DE BARRAS
- HISTOGRAMA
- POLÍGONO DE FRECUENCIAS
- DIAGRAMA DE SECTORES

MEDIDAS DE CENTRALIZACIÓN

- MEDIA ARITMÉTICA
- MEDIANA
- MODA

MEDIDAS DE POSICIÓN

- CUARTILES
- PERCENTILES

MEDIDAS DE DISPERSIÓN

- RANGO
- VARIANZA
- DESVIACIÓN TÍPICA
- COEFICIENTE DE VARIACIÓN

El cirujano

El agua se volvió rojiza a medida que el joven se frotaba enérgicamente las manos, eliminando los restos de sangre y jabón; después, vació la pila y continuó el proceso de limpieza de forma casi convulsiva.

A su espalda, la voz de su tío intentaba consolarlo:

–Tranquilo, una operación tiene estos riesgos, pero con el tiempo aprenderás a superarlo.

El joven, Simèon Poisson, observó con detenimiento sus manos todavía húmedas como queriendo descubrir algún fallo y contestó:

–¡Un hombre ha muerto! Tío, mira mis manos, todavía tiemblan, y esto en un cirujano es la sentencia de muerte de su paciente.

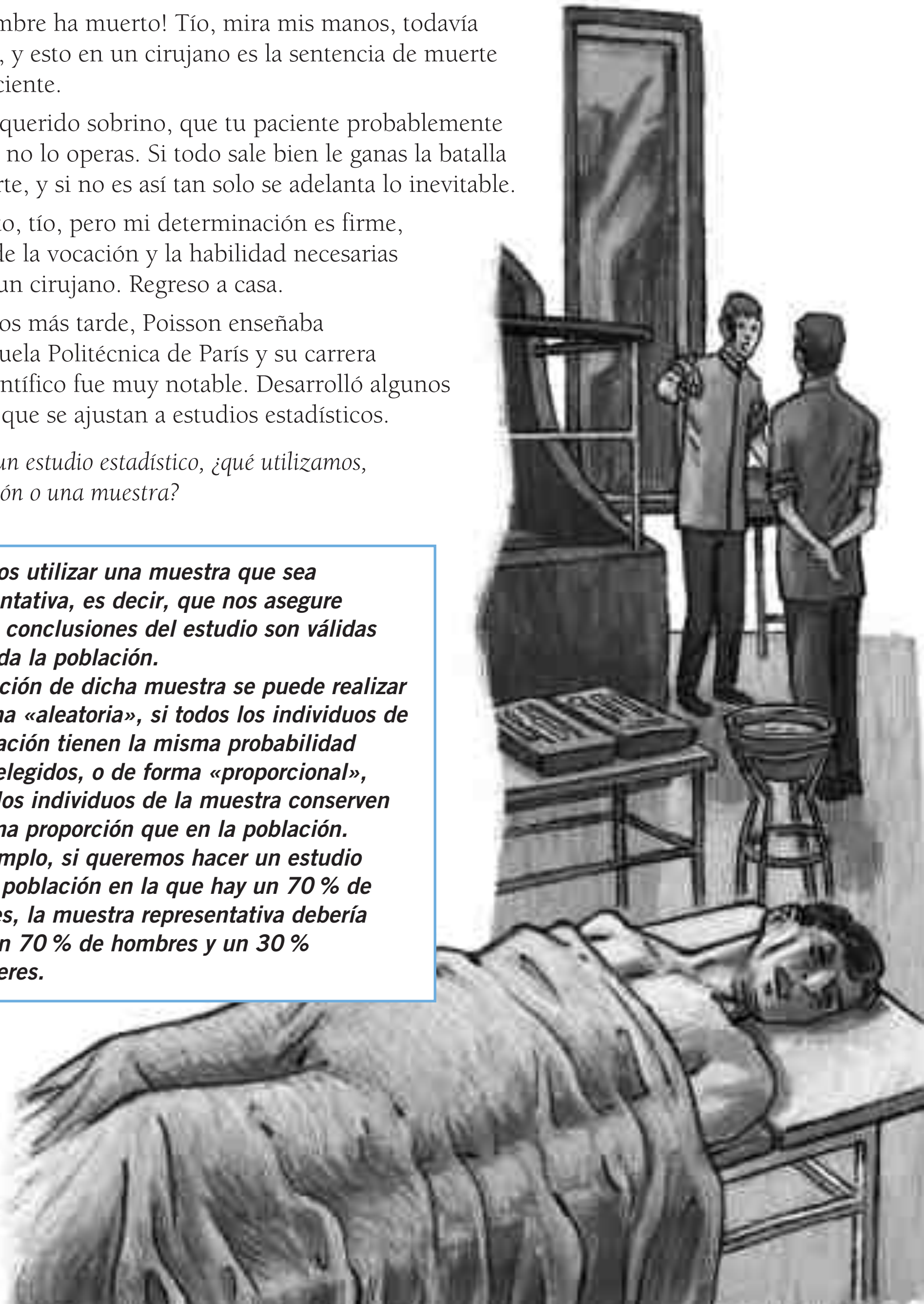
–Piensa, querido sobrino, que tu paciente probablemente morirá si no lo operas. Si todo sale bien le ganas la batalla a la muerte, y si no es así tan solo se adelanta lo inevitable.

–Lo siento, tío, pero mi determinación es firme, carezco de la vocación y la habilidad necesarias para ser un cirujano. Regreso a casa.

Pocos años más tarde, Poisson enseñaba en la Escuela Politécnica de París y su carrera como científico fue muy notable. Desarrolló algunos modelos que se ajustan a estudios estadísticos.

Al hacer un estudio estadístico, ¿qué utilizamos, la población o una muestra?

Debemos utilizar una muestra que sea representativa, es decir, que nos asegure que las conclusiones del estudio son válidas para toda la población.
La elección de dicha muestra se puede realizar de forma «aleatoria», si todos los individuos de la población tienen la misma probabilidad de ser elegidos, o de forma «proporcional», donde los individuos de la muestra conserven la misma proporción que en la población.
Por ejemplo, si queremos hacer un estudio de una población en la que hay un 70 % de hombres, la muestra representativa debería tener un 70 % de hombres y un 30 % de mujeres.



Estadística

EJERCICIOS

001 **Señala en qué caso es más conveniente estudiar la población o una muestra.**

a) La longitud de los tornillos que fabrica una máquina de manera continua.

b) El peso de un grupo de cinco amigos.

a) Una muestra, pues la población es excesivamente grande.

b) La población, ya que es pequeña.

002 **Determina las variables estadísticas que se estudian en el ejercicio anterior.**

En el caso de los tornillos, la variable estadística es la longitud, y en el caso de los amigos, es el peso. En ambos casos son variables cuantitativas continuas.

003 **Este es el titular de un periódico:**

«EL PESO MEDIO DE LOS ESPAÑOLES ES 69 KG».

a) ¿Cómo se ha llegado a esta conclusión? ¿Se habrá estudiado a toda la población?

b) ¿Qué características debería tener la muestra elegida? ¿Podrían ser todos los individuos de la muestra de la misma edad? Y si todos fueran mujeres, ¿sería representativa la muestra?

a) Se ha llegado a la conclusión a partir del estudio de una muestra.

b) La muestra debe ser representativa de los sectores que forman la población española, respetando la proporción de cada uno de ellos. Si todos los individuos fueran de la misma edad o el mismo sexo no sería representativa, ya que no se mantendría la proporción de los sectores en la población.

004 **Las notas en Inglés de 20 alumnos son:**

6 5 3 1 2   5 6 5 9 8

7 4 9 5 7   7 8 6 5 10

Obtén la tabla de frecuencias.

Notas	f_i	h_i	F_i	H_i
1	1	0,05	1	0,05
2	1	0,05	2	0,1
3	1	0,05	3	0,15
4	1	0,05	4	0,2
5	5	0,25	9	0,45
6	3	0,15	12	0,6
7	3	0,15	15	0,75
8	2	0,1	17	0,85
9	2	0,1	19	0,95
10	1	0,05	20	1

005 **El número de horas diarias de estudio de 30 alumnos es:**

3 4 3 5 5   1 1 1 1 2   3 4 5 0 2
0 3 2 2 1   2 1 3 2 0   1 2 1 4 3

Construye una tabla de frecuencias.

Horas	f_i	h_i	F_i	H_i
0	3	0,1	3	0,1
1	8	0,27	11	0,37
2	7	0,23	18	0,6
3	6	0,2	24	0,8
4	3	0,1	27	0,9
5	3	0,1	30	1

006 **El color de pelo de 30 personas elegidas al azar es:**

M = moreno
R = rubio
P = pelirrojo

M R P M M
M M R R P
P M M M M
M P R R R
P M M M R
M M M R P

Construye su tabla de frecuencias.

Color	f_i	h_i
Moreno	16	0,53
Rubio	8	0,27
Pelirrojo	6	0,2

007 **Estas son las edades, en años, de 18 alumnos:**

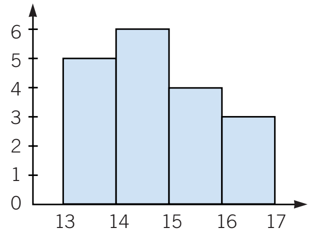
13 15 14 16 13   15 14 16 15
14 13 13 13 15   14 16 14 14

Realiza un gráfico de sus frecuencias relativas.

Antes de dibujar el gráfico es necesario hacer la tabla de frecuencias.

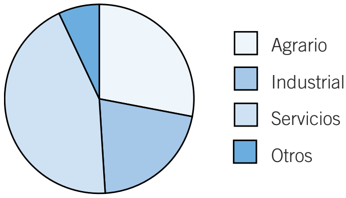
Aunque los valores parecen discretos, al representarlos consideramos que alguien que afirma tener 14 años, realmente tiene más de 14 años y menos de 15 años. Por esta razón utilizamos un histograma.

x_i	f_i	h_i
13	5	0,278
14	6	0,333
15	4	0,222
16	3	0,167



008 Representa estos datos con el gráfico adecuado.

Sector	Agrario	Industrial	Servicios	Otros
Trabajadores	28 %	21 %	44 %	7 %

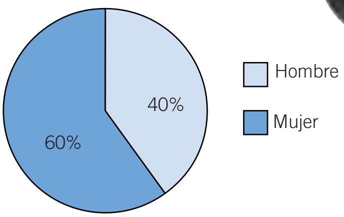


009 El sexo de 20 bebés nacidos en un hospital ha sido:

H M H H M ***M H H M M***
M M M H M ***M H H M M***

Construye la tabla asociada a estos datos, y represéntalos.

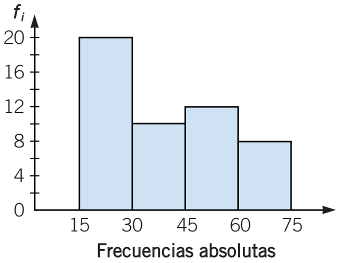
Sexo	f_i	h_i
Hombre	8	0,4
Mujer	12	0,6

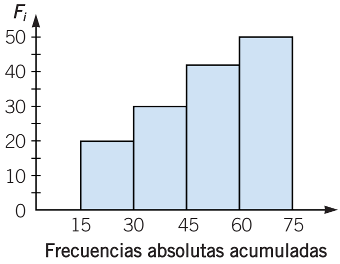


010 Completa la tabla de frecuencias y dibuja el histograma de frecuencias absolutas y acumuladas con los datos de esta tabla.

Edad	[15, 30)	[30, 45)	[45, 60)	[60, 75)
N.º de personas	20	10	12	8

Edad	f_i	h_i	F_i	H_i
[15, 30)	20	0,4	20	0,4
[30, 45)	10	0,2	30	0,6
[45, 60)	12	0,24	42	0,84
[60, 75)	8	0,16	50	1



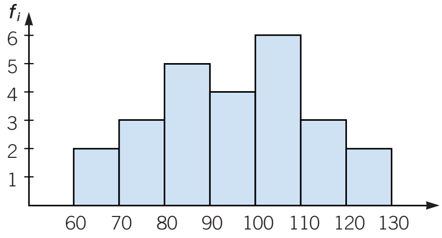


011 **Los resultados de un test de inteligencia realizado a 25 personas fueron:**

100 80 92 101 65 72 121 68 75 93 101 100
102 97 89 73 121 114 113 113 106 84 94 83 82

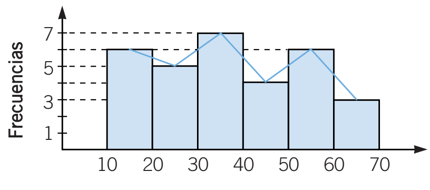
Obtén la tabla de frecuencias y de porcentajes, tomando intervalos de amplitud 10. Representa los datos en un histograma.

Resultados	f_i	%	h_i	F_i	H_i
[60, 70)	2	8	0,08	2	0,08
[70, 80)	3	12	0,12	5	0,2
[80, 90)	5	20	0,2	10	0,4
[90, 100)	4	16	0,16	14	0,56
[100, 110)	6	24	0,24	20	0,8
[110, 120)	3	12	0,12	23	0,92
[120, 130)	2	8	0,08	25	1



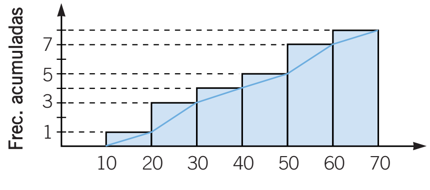
012 **Construye las tablas de frecuencias que corresponden a los siguientes gráficos estadísticos, indicando de qué tipo es cada uno.**

a) En este histograma están representados las frecuencias absolutas y el polígono de frecuencias. La tabla de frecuencias correspondiente es:



Intervalos	f_i	h_i
[10, 20)	6	0,19
[20, 30)	5	0,16
[30, 40)	7	0,23
[40, 50)	4	0,13
[50, 60)	6	0,19
[60, 70)	3	0,1

b) En este histograma están representados las frecuencias acumuladas y el polígono de frecuencias. La tabla de frecuencias correspondiente es:



Intervalos	F_i	H_i
[10, 20)	1	0,125
[20, 30)	3	0,375
[30, 40)	4	0,5
[40, 50)	5	0,625
[50, 60)	7	0,875
[60, 70)	8	1

013 **Organiza en una tabla de frecuencias estos datos relativos al peso, en kg, de 20 personas.**

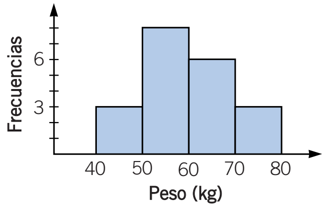
42	51	56	66	75	47	51	45	63	79
69	59	50	70	59	62	54	60	63	58

a) Representa los datos mediante el gráfico más adecuado.

b) Calcula sus medidas de centralización.

a)

Peso	x_i	f_i
[40, 50)	45	3
[50, 60)	55	8
[60, 70)	65	6
[70, 80)	75	3



b) La media aritmética es:

$$\overline{x} = \frac{3 \cdot 45 + 8 \cdot 55 + 6 \cdot 65 + 3 \cdot 75}{20} = 59{,}5$$

La frecuencia mayor es 8, que corresponde al intervalo [50, 60).

Intervalo modal = [50, 60)

Ordenamos los datos: 42, 45, 47, 50, 51, 51, 54, 56, 58, 59, 59, 60, 62, 63, 63, 66, 69, 70, 75, 79

$$Me = \frac{59 + 59}{2} = 59$$

014 **Halla las medidas de centralización.**

[0, 5)	[5, 10)	[10, 15)	[15, 20)
10	12	37	21

La media aritmética es:

$$\overline{x} = \frac{10 \cdot 2{,}5 + 12 \cdot 7{,}5 + 37 \cdot 12{,}5 + 21 \cdot 17{,}5}{80} = 11{,}8$$

La frecuencia mayor es 37, que corresponde al intervalo [10, 15).

Intervalo modal = [10, 15)

Intervalo mediano = [10, 15)

015 **Decide qué valores podemos añadir a este conjunto de datos: 18, 8, 7, 9, 12, 15, 21 y 12 para que la mediana siga siendo la misma.**

Ordenamos los datos: 7, 8, 9, 12, 12, 15, 18, 21

La mediana es 12.

Si solo añadimos un valor, independientemente de cuál sea, la mediana seguirá siendo 12.

016 **Con los datos de la tabla del ejemplo anterior, calcula los siguientes percentiles.**

a) P_{22} **b)** P_7 **c)** P_{98} **d)** P_{66}

Datos	f_i	h_i	F_i	H_i
1	11	0,18	11	0,18
2	27	0,45	38	0,63
3	4	0,07	42	0,7
4	18	0,3	60	1

a) $P_{22} = 2$ b) $P_7 = 1$ c) $P_{98} = 4$ d) $P_{66} = 3$

017 **¿Qué tipo de frecuencias se utilizan para calcular las medidas de posición? ¿Es la mediana una medida de posición?**

Para calcular las medidas de posición se utilizan las frecuencias acumuladas.

La mediana se puede considerar una medida de posición, ya que divide la distribución de los datos en dos partes iguales:
$Me = Q_2 = P_{50}$

018 **Salen 20 plazas a concurso por oposición y se presentan 200 personas.**

Notas	3	4	5	6	7	8	9	10
f_i	6	25	34	42	50	27	13	3

¿Con qué nota se obtiene una de las plazas mediante el concurso por oposición? ¿Qué percentil es la nota 5?

Hay $200 - 20 = 180$ personas que suspenden la oposición. Como 180 es el 90 % de 200, y $P_{10} = 8$, siendo 8 la nota mínima para aprobar. Ordenados los datos, del 32.° al 65.° tienen de nota 5, luego 5 es el percentil P_{16}, P_{17}, …, hasta P_{32}.

019 **Lidia ha obtenido las siguientes notas en Matemáticas: 7, 5, 6, 10, 9, 7 y 6. Halla las medidas de dispersión.**

$\bar{x} = 7{,}14$ $\sigma^2 = 2{,}69$ $\sigma = 1{,}64$ $CV = 0{,}23$

020 **Calcula las medidas de dispersión de estos datos.**

N.° de vehículos	0	1	2	3
N.° de familias	115	456	268	161

x_i	f_i	$\lvert x_i - \bar{x}\rvert$	$(x_i - \bar{x})^2$	$f_i \cdot (x_i - \bar{x})^2$
0	115	1,475	2,175	250,125
1	456	0,475	0,225	102,6
2	268	0,525	0,275	140,7
3	161	1,525	2,325	374,325
	1.000			867,75

$\bar{x} = 1{,}475$
$\sigma^2 = 0{,}867$
$\sigma = 0{,}931$
$CV = 0{,}631$

021 **Compara la dispersión en estas dos variables: la primera mide el peso de los elefantes, con $\overline{x} = 2.000$ kg y $\sigma = 100$ kg, y la otra mide el peso de los ratones, con $\overline{x} = 0{,}05$ kg y $\sigma = 0{,}02$ kg.**

$$CV_e = \frac{100}{2.000} = 0{,}05 \qquad CV_r = \frac{0{,}02}{0{,}05} = 0{,}4$$

La dispersión en los ratones es mayor, ya que su coeficiente de variación es mayor.

022 **Obtén y comenta las medidas estadísticas de estos datos: 1, 3, 2, 5, 2 y 5.**

x_i	f_i	F_i	$f_i \cdot x_i$	$f_i \cdot x_i^2$	$f_i \cdot \lvert x_i - \overline{x} \rvert$
1	1	1	1	1	2
2	2	3	4	8	2
3	1	4	3	9	0
5	2	6	10	50	4
Total	**6**		**18**	**68**	**8**

Las medidas de centralización son:

$$\overline{x} = \frac{18}{6} = 3 \qquad Me = 2{,}5 \qquad Mo = 2 \text{ y } 5$$

Las medidas de dispersión son:

Rango: $R = \text{máximo} - \text{mínimo} = 5 - 1 = 4$

Desviación media: $DM = \dfrac{\sum f_i \cdot |x_i - \overline{x}|}{N} = \dfrac{8}{6} = 1{,}333\ldots$

Varianza: $\sigma^2 = \dfrac{\sum f_i \cdot x_i^2}{N} - \overline{x}^2 = \dfrac{68}{6} - 9 = \dfrac{14}{6} = 2{,}333\ldots$

Desviación típica: $\sigma = \sqrt{\sigma^2} = 1{,}5275$

Coeficiente de variación: $CV = \dfrac{\sigma}{\overline{x}} = \dfrac{1{,}5275}{3} = 0{,}509 = 50{,}9\,\%$

Los datos presentan una agrupación pequeña respecto de las medidas de centralización.

023 **Varía las frecuencias del ejercicio anterior para obtener una conclusión distinta.**

Por ejemplo, con 1, 2, 2, 2, 3, 4 se obtendría una agrupación bastante mayor.

024 **La tabla muestra el número de accidentes laborales que han tenido lugar en el último año.**

N.º de accidentes	[0, 10)	[10, 20)	[20, 30)	[30, 40)
N.º de meses	1	5	4	2

Calcula las medidas de dispersión.

N.º de accidentes	x_i	f_i	F_i	$f_i \cdot x_i$	$f_i \cdot x_i^2$	$f_i \cdot \lvert x_i - \overline{x} \rvert$
[0, 10)	5	1	1	5	25	15,83
[10, 20)	15	5	6	75	1.125	29,15
[20, 30)	25	4	10	100	2.500	16,68
[30, 40)	35	2	12	70	2.450	28,34
Total		**12**		**250**	**6.100**	**90**

Las medidas de centralización son:

$$\overline{x} = \frac{250}{12} = 20,83$$

Intervalo mediano = [20, 30)

Intervalo modal = [10, 20)

Las medidas de dispersión son:

Rango: $R = \text{máximo} - \text{mínimo} = 40 - 0 = 40$

Desviación media: $DM = \dfrac{\sum f_i \cdot |x_i - \overline{x}|}{N} = \dfrac{90}{12} = 7,5$

Varianza: $\sigma^2 = \dfrac{\sum f_i \cdot x_i^2}{N} - \overline{x}^2 = \dfrac{6.100}{12} - 433,89 = 74,44$

Desviación típica: $\sigma = \sqrt{\sigma^2} = 8,63$

Coeficiente de variación: $CV = \dfrac{\sigma}{\overline{x}} = \dfrac{8,63}{20,83} = 0,414 = 41,4\,\%$

ACTIVIDADES

025 **Indica el tipo de variable estadística que estudiamos y razona, en cada caso, si sería mejor analizar una muestra o la población.**

a) La talla de los alumnos de un IES.
b) La temperatura de tu provincia.
c) La edad de los habitantes de un país.
d) El sexo de los habitantes de un pueblo.
e) El dinero gastado a la semana por tus amigos.
f) Los efectos de un nuevo medicamento en el ser humano.
g) El color del pelo de tus compañeros de clase.

a) Cuantitativa discreta, estudiar la población.
b) Cuantitativa continua, estudiar una muestra.
c) Cuantitativa continua, estudiar una muestra.
d) Cualitativa, estudiar una muestra.
e) Cuantitativa continua, estudiar la población.
f) Cualitativa, estudiar una muestra.
g) Cualitativa, estudiar la población.

026 El número de horas diarias de estudio de 30 alumnos es:

3 4 3 5 5	1 1 1 1 2	3 4 5 0 2
0 3 2 2 1	2 1 3 2 0	1 2 1 4 3

a) Efectúa un recuento y organiza los resultados en una tabla de frecuencias.

b) ¿Qué significan las frecuencias acumuladas que has calculado?

a)

N.º de horas	f_i	h_i	F_i	H_i
0	3	0,1	3	0,1
1	8	0,267	11	0,367
2	7	0,233	18	0,6
3	6	0,2	24	0,8
4	3	0,1	27	0,9
5	3	0,1	30	1

b) Veamos el significado de las frecuencias acumuladas relativas mediante un ejemplo:

$F_3 = 24$ quiere decir que hay 24 alumnos que estudian tres horas o menos cada día.

$H_2 = 0{,}6$ significa que el 60 % de los alumnos estudia dos horas o menos cada día.

027 Completa la siguiente tabla de frecuencias.

x_i	h_i	F_i	Porcentaje
10	4	**4**	8
20	**5**	9	**10**
30	7	**16**	14
40	**10**	26	20
50	15	**41**	30
60	9	50	**18**

028 En una evaluación, de los 30 alumnos de una clase, el 10 % aprobó todo, el 20 % suspendió una asignatura, el 50 % suspendió dos asignaturas y el resto más de dos asignaturas.

a) Realiza la tabla de frecuencias correspondiente.

b) ¿Hay algún tipo de frecuencia que responda a la pregunta de cuántos alumnos suspendieron menos de dos asignaturas? Razona tu respuesta.

a)

N.º de asignaturas suspensas	f_i	h_i	F_i	H_i
0	3	0,1	3	0,1
1	6	0,2	9	0,3
2	15	0,5	24	0,8
Más de 2	6	0,2	30	1

b) La frecuencia que nos proporciona la respuesta a la pregunta de cuántos alumnos suspendieron menos de dos asignaturas, es la frecuencia acumulada, $F_1 = 9$.

029 **Explica cómo completarías una tabla de frecuencias conociendo solo las frecuencias absolutas acumuladas. ¿Podrías hacer lo mismo con las frecuencias relativas acumuladas?**

Para completar una tabla de frecuencias, conociendo las frecuencias absolutas acumuladas, es necesario tener en cuenta que:

$F_1 = f_1$

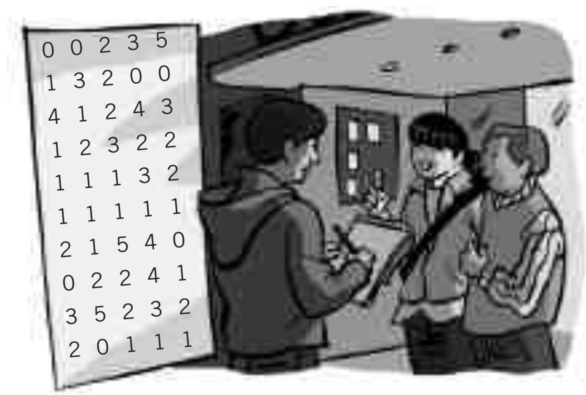
$F_i = f_{i-1} + f_i \rightarrow f_i = F_i - F_{i-1}$, para $i > 1$

Conociendo las frecuencias relativas acumuladas, las frecuencias relativas se calculan de forma análoga, ya que se verifica:

$H_1 = h_1$

$H_i = H_{i-1} + h_i \rightarrow h_i = H_i - H_{i-1}$, para $i > 1$

030 **Para realizar un estudio hacemos una encuesta entre los jóvenes de un barrio, y les preguntamos por el número de veces que van al cine por semana. Los resultados de la encuesta son:**



a) ¿Cuál y de qué tipo es la variable estadística que estamos estudiando?
b) Construye una tabla de frecuencias.
c) ¿Cuántos jóvenes van al cine más de dos veces por semana?
d) ¿Y cuántos van, al menos, una vez por semana?

a) La variable estadística que estamos estudiando es «el número de veces que los jóvenes van al cine por semana», y es una variable cuantitativa discreta.

b)

x_i	f_i	F_i	h_i	H_i
0	7	7	0,14	0,14
1	16	23	0,32	0,46
2	13	36	0,26	0,72
3	7	43	0,14	0,86
4	4	47	0,08	0,94
5	3	50	0,06	1

c) 14 jóvenes van al cine más de dos veces por semana.

d) Al menos una vez por semana van al cine 43 jóvenes.

031 ●●

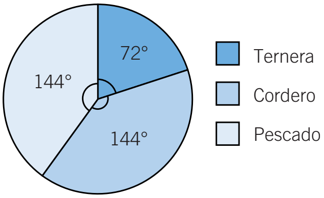
De los 30 asistentes a una cena, el 20 % comió ternera, el 40 % cordero y el resto pescado.

a) Organiza los resultados en una tabla de frecuencias, y representa los datos en un diagrama de sectores.

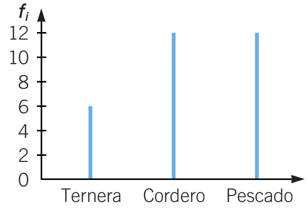
b) Realiza un diagrama de barras y explica cómo lo haces. ¿Cuál de los dos gráficos prefieres? ¿Por qué?

a)

Comida	f_i	F_i	h_i	H_i
Ternera	6	6	0,2	0,2
Cordero	12	18	0,4	0,6
Pescado	12	30	0,4	1



b) Representamos, en el diagrama de barras, las frecuencias absolutas. En este caso es preferible utilizar el gráfico de sectores porque es más fácil de comprender.



032 ●●

La siguiente tabla muestra los resultados de lanzar 50 veces un dado.

Cara	1	2	3	4	5	6
N.º de veces	8	12	5	9	6	10

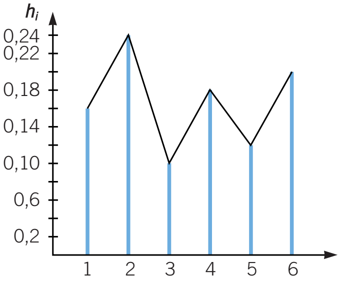
a) Representa los diagramas de barras de frecuencias relativas y absolutas. ¿Qué observas?

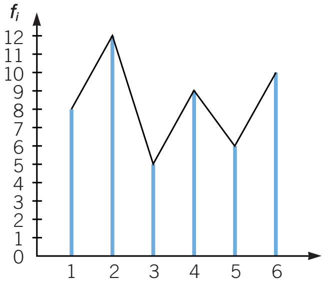
b) Sobre los gráficos anteriores, dibuja su polígono de frecuencias.

c) ¿Podrías representar los datos en un histograma? Razona tu respuesta.

a) y b) Al representar los dos diagramas se observa que el gráfico es el mismo, y lo único que cambia es el eje vertical; en un caso son frecuencias absolutas, y el en otro caso, son relativas.

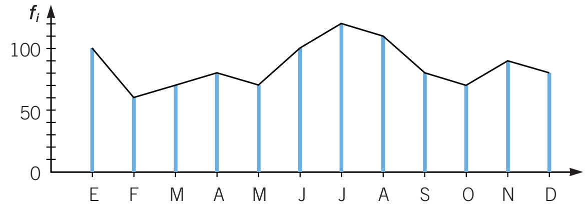
Cara	f_i	F_i	h_i	H_i
1	8	8	0,16	0,16
2	12	20	0,24	0,4
3	5	25	0,1	0,5
4	9	34	0,18	0,68
5	6	40	0,12	0,8
6	10	50	0,2	1





c) Estos datos no pueden representarse mediante un histograma porque la variable no es continua.

033 ●● La venta de turismos durante un año en un concesionario viene representada por el siguiente gráfico.



a) Halla las frecuencias absolutas y relativas.

b) Obtén las frecuencias acumuladas.

a) y b)

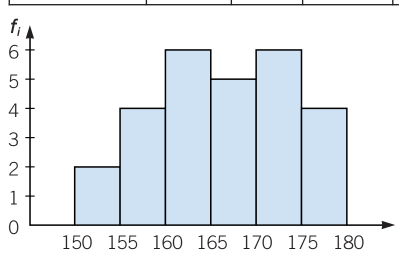
Mes	f_i	F_i	h_i	H_i
Enero	100	100	0,09	0,09
Febrero	60	160	0,05	0,14
Marzo	70	230	0,06	0,2
Abril	80	310	0,07	0,27
Mayo	70	380	0,06	0,33
Junio	100	480	0,09	0,42
Julio	120	600	0,11	0,52
Agosto	110	710	0,1	0,62
Septiembre	80	790	0,07	0,69
Octubre	70	860	0,06	0,75
Noviembre	90	950	0,08	0,83
Diciembre	80	1.030	0,07	0,9

034 ●●● Las estaturas, en cm, de 27 jóvenes son las siguientes.

155 178 170 165 173 168 160 166 176
169 158 170 179 161 164 156 170 171
167 151 163 158 164 174 176 164 154

Utiliza intervalos de amplitud 5, comenzando con el intervalo [150, 155), forma una tabla, efectúa el recuento y obtén las marcas de clase. Representa los datos en un histograma.

Estatura	x_i	f_i	h_i	F_i	H_i
[150, 155)	152,5	2	0,074	2	0,074
[155, 160)	157,5	4	0,148	6	0,222
[160, 165)	162,5	6	0,222	12	0,444
[165, 170)	167,5	5	0,185	17	0,629
[170, 175)	172,5	6	0,222	23	0,851
[175, 180)	177,5	4	0,148	27	1



035 ●● Hemos estudiado el contenido en sales de 22 botellas de agua, y obtenemos los siguientes datos expresados en miligramos.

46 25 27 30 48 40
27 44 37 62 56 29
76 75 49 59 33 52
54 45 66 69

a) Clasifica la variable estadística estudiada.

b) Justifica el hecho de tomar o no intervalos al hacer una tabla.

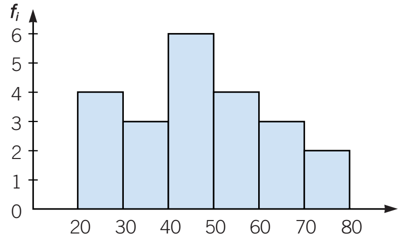
c) Realiza el gráfico que consideres más adecuado.

a) La variable estadística es cuantitativa continua.

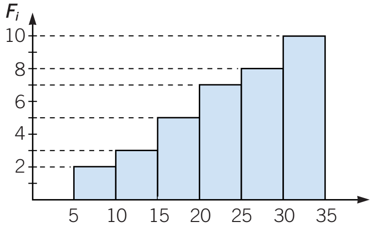
b) Debido al tamaño de la muestra, es conveniente tomar intervalos.

c) Para realizar cualquier representación gráfica es necesario construir primero la tabla de frecuencias. Construimos el histograma.

Sales	x_i	f_i
[20, 30)	25	4
[30, 40)	35	3
[40, 50)	45	6
[50, 60)	55	4
[60, 70)	65	3
[70, 80)	75	2



036 ●●● Reconstruye la tabla de frecuencias asociada a este gráfico de frecuencias acumuladas.



Intervalos	x_i	f_i	h_i	F_i	H_i
[5, 10)	7,5	2	0,2	2	0,2
[10, 15)	12,5	1	0,1	3	0,3
[15, 20)	17,5	2	0,2	5	0,5
[20, 25)	22,5	2	0,2	7	0,7
[25, 30)	27,5	1	0,1	8	0,8
[30, 35)	32,5	2	0,2	10	1

037 HAZLO ASÍ

¿CÓMO SE DIBUJA UN DIAGRAMA DE CAJAS?

Un diagrama de cajas es un gráfico en el que se dibuja una caja central, que indica el intervalo en el que se concentra el 50 % de los datos (sus extremos son el 1.er y 3.er cuartiles) y una línea central que marca la mediana. A partir de él podemos detectar datos atípicos que se alejan del resto. Con esta información, representa estos datos mediante un diagrama de cajas.

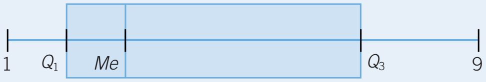
x_i	1	2	3	4	5	6	7	8
f_i	1	7	8	2	1	1	6	4
F_i	1	8	16	18	19	20	26	30

PRIMERO. Se calcula la mediana, Q_1 y Q_3.

$$Me = 3$$
$$Q_1 = 2$$
$$Q_3 = 7$$

SEGUNDO. Se representan estos datos en una recta.

TERCERO. Se dibuja un rectángulo de anchura comprendida entre Q_1 y Q_3, una línea que pase por la mediana y rectas exteriores que marcan el rango de los datos.



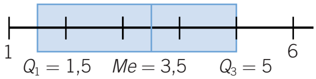
038 **Dibuja un diagrama de cajas para estos datos.**

x_i	1	2	3	4	5	6
f_i	3	1	2	1	4	1

x_i	12	13	14	15
f_i	11	9	8	62

x_i	f_i	h_i	F_i	H_i
1	3	0,25	3	0,25
2	1	0,08	4	0,33
3	2	0,17	6	0,5
4	1	0,08	7	0,58
5	4	0,33	11	0,92
6	1	0,08	12	1

$Q_1 = 1,5$
$Me = 3,5$
$Q_3 = 5$



039 Obtén las medidas de centralización de la siguiente serie de datos.

7	3	2	4	5	1	8	6	1	5
3	2	4	9	8	1	0	2	4	1
2	5	6	5	4	7	1	3	0	5
8	6	3	4	0	9	2	5	7	4
0	2	1	5	6	4	3	5	2	3

x_i	f_i	F_i	$f_i \cdot x_i$	$f_i \cdot x_i^2$	$f_i \cdot \lvert x_i - \overline{x} \rvert$
0	4	4	0	0	15,44
1	6	10	6	6	17,16
2	7	17	14	28	13,02
3	6	23	18	54	5,16
4	7	30	28	112	0,98
5	8	38	40	200	9,12
6	4	42	24	144	8,56
7	3	45	21	147	9,42
8	3	48	24	192	12,42
9	2	50	18	162	10,28
Total	**50**		**193**	**1.045**	**101,56**

Las medidas de centralización son: $\overline{x} = \frac{193}{50} = 3,86 \quad Me = 4 \quad Mo = 5$

Las medidas de dispersión son: Rango: $R = \text{máximo} - \text{mínimo} = 9 - 0 = 9$

Desviación media: $DM = \frac{\sum f_i \cdot |x_i - \overline{x}|}{N} = \frac{101,56}{50} = 2,0312$

Varianza: $\sigma^2 = \frac{\sum f_i \cdot x_i^2}{N} - \overline{x}^2 = \frac{1.045}{50} - 14,9 = 6$

Desviación típica: $\sigma = \sqrt{\sigma^2} = 2,45$

Coeficiente de variación: $CV = \frac{\sigma}{\overline{x}} = \frac{2,45}{3,86} = 0,63 = 63\,\%$

040 Realiza la actividad anterior, pero agrupa en intervalos de amplitud 2, comenzando en cero. ¿Obtienes los mismos resultados? ¿Por qué?

Intervalos	x_i	f_i	F_i	$f_i \cdot x_i$	$f_i \cdot x_i^2$	$f_i \cdot \lvert x_i - \overline{x} \rvert$
[0, 2)	1	10	10	10	10	33,6
[2, 4)	3	13	23	39	117	17,68
[4, 6)	5	15	38	75	375	9,6
[6, 8)	7	7	45	49	343	18,48
[8, 10)	9	5	50	45	405	23,2
Total		**50**		**218**	**1.250**	**102,56**

Las medidas de centralización son:

$\overline{x} = 4,36$ Intervalo mediano $= [4, 6)$ Intervalo modal $= [4, 6)$

Las medidas de dispersión son: Rango: $R = \text{máximo} - \text{mínimo} = 9 - 0 = 9$

Desviación media: $DM = \frac{\sum f_i \cdot |x_i - \overline{x}|}{N} = \frac{102,56}{50} = 2,05$

Varianza: $\sigma^2 = \dfrac{\sum f_i \cdot x_i^2}{N} - \overline{x}^2 = \dfrac{1.250}{50} - 19 = 6$

Desviación típica: $\sigma = \sqrt{\sigma^2} = 2{,}45$

Coeficiente de variación: $CV = \dfrac{\sigma}{\overline{x}} = \dfrac{2{,}45}{4{,}36} = 0{,}56 = 56\ \%$

Se observa que no se obtienen los mismos resultados. Hemos trabajado con marcas de clase debido a la agrupación de los datos.

041 ●●

Una cadena de televisión ha realizado un estudio entre 200 espectadores para determinar el grado de satisfacción de un programa, obteniendo estos resultados.

Opinión	Muy bueno	Bueno	Regular	Malo	Muy malo
Porcentaje	15	25	30	25	5

Calcula e interpreta las medidas de centralización.

Me = Regular → Significa que la mitad de los datos son peores o iguales que Regular y la otra mitad son mejores o iguales que Regular.

Mo = Regular → Significa que Regular es la opinión en la que coinciden más espectadores.

042

HAZLO ASÍ

¿CÓMO SE PUEDEN AÑADIR O SUPRIMIR DATOS PARA OBTENER UNA MEDIA DETERMINADA?

Añade un dato a este conjunto para que:

3 3 3 4 4 4 4 5 5 6 6 7 7 7 7

a) La media no varíe. **b) La media sea 6.**

PRIMERO. Se calcula la media de los datos.

$$N = 15 \rightarrow \overline{x} = \frac{75}{15} = 5$$

SEGUNDO. Se multiplica la media que se quiere obtener por el nuevo número de datos, $N = 16$.

a) $16 \cdot 5 = 80$ b) $16 \cdot 6 = 96$

TERCERO. Se resta $\sum_{i=1}^{n} f_i \cdot x_i$ a este resultado y se obtiene el nuevo resultado.

a) $80 - 75 = 5$. Hay que añadir un 5. b) $96 - 75 = 21$. Hay que añadir un 21.

043 ●●

Añade dos datos a este conjunto para que la media cumpla estas condiciones.

5 5 5 5 8 8 8 8 8 10

a) No varíe. **b) Sea 8.** **c) Sea 4.**

$\overline{x} = 7$

a) Los dos números deben sumar 14, por ejemplo 7 y 7.

b) $8 \cdot 12 = 96$; $96 - 70 = 26$. La suma de los dos números debe ser 26. Por ejemplo, 10 y 16.

c) $4 \cdot 12 = 48$; $48 - 70 = -22$. La suma de los dos números debe ser -22. Por ejemplo, -10 y -12.

044 **HAZLO ASÍ**

¿CÓMO SE PUEDEN AÑADIR O SUPRIMIR DATOS PARA OBTENER UNA MEDIANA DETERMINADA?

Añade un dato a este conjunto para que la mediana no varíe.

3 3 3 4 4 4 5 5 5 6 6 7 7 7 7

PRIMERO. Se calcula la mediana: $Me = 5$

SEGUNDO. Al añadir datos, la mediana se desplazará tantos lugares como datos se añadan.

Al añadir un dato, $N = 16$ y la mediana será la media entre los datos colocados en el 8.° y 9.° lugares (5 y 5). Por tanto, la mediana será siempre 5.

045 ●●

Añade dos datos a esta distribución para que la mediana:

8 8 8 8 8 9 9 10 10 10

a) No varíe. **b) Sea 8.** **c) Sea 9.**

a) Uno de los datos debe ser mayor o igual a 9 y el otro dato debe ser menor o igual a 8. Por ejemplo, 5 y 11.

b) Los dos datos deben ser menores o iguales que 8. Por ejemplo, 2 y 6.

c) Los datos deben ser mayores o iguales a 9. Por ejemplo, 10 y 11.

046 ●●

Un corredor entrena, de lunes a viernes, recorriendo las siguientes distancias: 2, 5, 5, 7 y 3 km, respectivamente. Si el sábado también entrena:

a) ¿Cuántos kilómetros debe recorrer para que la media sea la misma?

b) ¿Y para que la mediana no varíe?

c) ¿Y para que la moda no varíe?

a) La distancia media que recorre, de lunes a viernes, es:

$$\frac{2 + 5 + 5 + 7 + 3}{5} = \frac{22}{5} = 4{,}4 \text{ km}$$

Suponiendo que el sábado recorre d kilómetros, para que se conserve la media se ha de cumplir que:

$$\frac{2 + 5 + 5 + 7 + 3 + d}{6} = 4{,}4 \rightarrow \frac{22 + d}{6} = 4{,}4$$
$$\rightarrow d = 4{,}4 \cdot 6 - 22 = 44 \text{ km}$$

El sábado deberá recorrer 4,4 km.

b) La mediana es $Me = 5$.

$2 \quad 3 \quad \boxed{5} \quad 5 \quad 7$

Para que la mediana no varíe, el sábado debe recorrer 5 km o más.

c) Para que la moda no varíe es necesario que el sábado recorra cualquier distancia excepto 2, 3 o 7 kilómetros. De esta manera, la moda seguirá siendo 5.

047 **La tabla muestra las notas obtenidas por 120 alumnos en una prueba de 100 preguntas.**

Notas	x_i	f_i	F_i
[30, 40)	35	1	1
[40, 50)	45	3	4
[50, 60)	55	11	15
[60, 70)	65	21	36
[70, 80)	75	43	79
[80, 90)	85	32	111
[90, 100)	95	9	120
Total		$N = 120$	

a) Calcula los tres cuartiles. **b) Halla los percentiles P_{23}, P_{46} y P_{90}.**

Para hallar los cuartiles y percentiles es necesario calcular primero las frecuencias acumuladas.

a) El 25 % de 120 es 30, luego Q_1 debe dejar 30 datos por debajo y el resto por encima. En la columna de frecuencias acumuladas, el primer número mayor o igual que 30 es 36, por lo que $Q_1 = 65$.

Como el 50 % de 120 es 60, repitiendo el proceso, tenemos que $Q_2 = 75$.

Análogamente, como el 75 % de 120 es 90, resulta que $Q_3 = 85$.

b) El 23 % de 120 es 27,6; y la primera frecuencia acumulada mayor o igual que 27,6 es 36, que se corresponde con la marca de clase: 65, luego $P_{23} = 65$.

Como el 46 % de 120 es 55,2; repitiendo el proceso, resulta que $P_{46} = 75$.

Análogamente, como el 90 % de 120 es 108, tenemos que $P_{90} = 85$.

048 **Contesta razonadamente a las siguientes cuestiones sobre medidas estadísticas.**

a) ¿Es la media siempre mayor que la desviación típica?

b) En un estudio estadístico, ¿qué cantidad de datos es mayor que el cuartil primero, Q_1, y menor que el cuartil tercero, Q_3?

c) ¿Qué significa que el peso de un niño está situado en P_{90}?

a) No, por ejemplo, si todos los datos fueran negativos, la media sería negativa, pero la desviación típica es siempre positiva.

b) Sabemos que, entre dos cuartiles consecutivos cualesquiera, hay un 25 % de los datos, luego entre el cuartil primero, Q_1, y el cuartil tercero, Q_3, está el 50 % de los datos.

c) Si el peso de un niño está situado en el percentil P_{90}, esto quiere decir que el 90 % de los niños pesa menos que lo que este indica.

049 Calcula e interpreta las medidas de dispersión de los siguientes datos, que expresan los días de baja por enfermedad de 10 trabajadores de una fábrica.

0 2 3 4 2 1 1 0 0 3

x_i	f_i	F_i	$f_i \cdot x_i$	$f_i \cdot x_i^2$	$f_i \cdot \|x_i - \overline{x}\|$
0	3	3	0	0	4,8
1	2	5	2	2	1,2
2	2	7	4	8	0,8
3	2	9	6	18	2,8
4	1	10	4	16	2,4
Total	**10**		**16**	**44**	**12**

$$\overline{x} = \frac{16}{10} = 1,6$$

Las medidas de dispersión son:

Rango: $R =$ máximo $-$ mínimo $= 4 - 0 = 4$

Desviación media:

$$DM = \frac{\sum f_i \cdot |x_i - \overline{x}|}{N} = \frac{12}{10} = 1,2$$

Varianza: $\sigma^2 = \dfrac{\sum f_i \cdot x_i^2}{N} - \overline{x}^2 = \dfrac{44}{10} - 2,56 = 1,84$

Desviación típica: $\sigma = \sqrt{\sigma^2} = 1,36$

Coeficiente de variación: $CV = \dfrac{\sigma}{\overline{x}} = \dfrac{1,36}{1,6} = 0,85 = 85\,\%$

050 Una persona ingresa 6.000 € en un fondo de inversión el 1 de enero de 2002. Las rentabilidades anuales del fondo durante los años siguientes han sido:

Año	2002	2003	2004	2005
Rentabilidad (%)	5	4	−3	5

Si no ha retirado el capital, ¿cuál ha sido la rentabilidad media de dicho fondo durante estos años?

La rentabilidad media ha sido: $\overline{x} = \dfrac{5 + 4 + (-3) + 5}{4} = 2,75\,\%$

051 Realiza el estudio del peso, en kg, de 20 alumnos que se muestra en la tabla.

Peso	x_i	f_i	F_i	$f_i \cdot x_i$	$f_i \cdot x_i^2$	$f_i \cdot \|x_i - \overline{x}\|$
[36, 42)	39	4	4	156	6.084	50,4
[42, 48)	45	4	8	180	8.100	26,4
[48, 54)	51	5	13	255	13.005	3
[54, 60)	57	2	15	114	6.498	10,8
[60, 66)	63	3	18	189	11.907	34,2
[66, 72)	69	2	20	138	9.522	34,8
Total		**20**		**1.032**	**55.116**	**159,6**

Las medidas de centralización son:

$\overline{x} = \dfrac{1.032}{20} = 51,6$ Intervalo mediano $=$ [48, 54) Intervalo modal $=$ [48, 54)

Las medidas de dispersión son:

Rango: R = máximo − mínimo = 72 − 36 = 36

Desviación media: $DM = \dfrac{\sum f_i \cdot |x_i - \overline{x}|}{N} = \dfrac{159{,}6}{20} = 7{,}98$

Varianza: $\sigma^2 = \dfrac{\sum f_i \cdot x_i^2}{N} - \overline{x}^2 = \dfrac{55.116}{20} - 51{,}6^2 = 93{,}24$

Desviación típica: $\sigma = \sqrt{\sigma^2} = 9{,}65$

Coeficiente de variación: $CV = \dfrac{\sigma}{\overline{x}} = \dfrac{9{,}65}{51{,}6} = 0{,}19 = 19\,\%$

052 ●●●

Los salarios, en euros, en una empresa son los siguientes.

Mujeres: 1.200, 1.300, 1.000, 900, 900, 1.100, 1.200, 1.100, 1.400, 1.200, 1.000, 1.300, 1.200, 1.100, 1.100

Hombres: 1.200, 1.300, 1.500, 1.300, 1.400, 900, 1.700, 1.600, 1.400, 1.300, 1.500, 1.300, 1.900, 1.700, 1.200

a) Calcula la distribución de frecuencias, la media, la mediana y la desviación típica, de cada grupo: hombres y mujeres.

b) Calcula sus medidas de dispersión.

c) Compara ambos grupos. ¿Cómo lo haces?

d) Si consideramos todos los datos en el mismo grupo, ¿qué resultados obtenemos?

a) y b) Mujeres:

x_i	f_i	F_i	$f_i \cdot x_i$	$f_i \cdot x_i^2$
900	2	2	1.800	1.620.000
1.000	2	4	2.000	2.000.000
1.100	4	8	4.400	4.840.000
1.200	4	12	4.800	5.760.000
1.300	2	14	2.600	3.380.000
1.400	1	15	1.400	1.960.000
Total	**15**		**17.000**	**19.580.000**

Las medidas de centralización son:

$\overline{x} = \dfrac{17.000}{15} = 1.133$ $\quad Me = 1.100 \quad Mo = 1.100$ y 1.200

Las medidas de dispersión son:

Rango: R = máximo − mínimo = 1.400 − 900 = 500

Varianza: $\sigma^2 = \dfrac{\sum f_i \cdot x_i^2}{N} - \overline{x}^2 = \dfrac{19.580.000}{15} - 1.133^2 = 21.644$

Desviación típica: $\sigma = \sqrt{\sigma^2} = 147$

Coeficiente de variación: $CV = \dfrac{\sigma}{\overline{x}} = \dfrac{147}{1.133} = 0{,}13 = 13\,\%$

Hombres:

x_i	f_i	F_i	$f_i \cdot x_i$	$f_i \cdot x_i^2$
900	1	1	900	810.000
1.200	2	3	2.400	2.880.000
1.300	4	7	5.200	6.760.000
1.400	2	9	2.800	3.920.000
1.500	2	11	3.000	4.500.000
1.600	1	12	1.600	2.560.000
1.700	2	14	3.400	5.780.000
1.900	1	15	1.900	3.610.000
Total	**15**		**21.200**	**30.920.000**

Las medidas de centralización son:

$\overline{x} = \dfrac{21.200}{15} = 1.413 \qquad Me = 1.400 \qquad Mo = 1.300$

Las medidas de dispersión son:

Rango: $R = \text{máximo} - \text{mínimo} = 1.900 - 900 = 1.000$

Varianza: $\sigma^2 = \dfrac{\sum f_i \cdot x_i^2}{N} - \overline{x}^2 = \dfrac{30.920.000}{15} - 1.413^2 = 64.764$

Desviación típica: $\sigma = \sqrt{\sigma^2} = 254$

Coeficiente de variación: $CV = \dfrac{\sigma}{\overline{x}} = \dfrac{254}{1.413} = 0{,}18 = 18\,\%$

c) A la vista de los resultados, podemos afirmar que el salario medio en los hombres es mayor que en las mujeres. En ambos casos, la desviación típica es pequeña con relación a la media. Esto significa que los datos están bastante próximos al respectivo valor medio, estando más próximos en las mujeres que en los hombres, ya que el coeficiente de variación en los hombres es mayor que en las mujeres. En el caso de los hombres, los datos están más dispersos que en el caso de las mujeres.

d)

x_i	f_i	F_i	$f_i \cdot x_i$	$f_i \cdot x_i^2$
900	3	3	2.700	2.430.000
1.000	2	5	2.000	2.000.000
1.100	4	9	4.400	4.840.000
1.200	6	15	7.200	8.640.000
1.300	6	21	7.800	10.140.000
1.400	3	24	4.200	5.880.000
1.500	2	26	3.000	4.500.000
1.600	1	27	1.600	2.560.000
1.700	2	29	3.400	5.780.000
1.900	1	30	1.900	3.610.000
Total	**30**		**38.200**	**50.380.000**

$\overline{x} = 1.273{,}33 \qquad Me = 1.250 \qquad Mo = 1.200$ y 1.300

Rango: $R = 1.900 - 900 = 1.000$

$\sigma^2 = \dfrac{50.380.000}{30} - 1.273^2 = 58.804 \qquad \sigma = \sqrt{\sigma^2} = 242$

$CV = \dfrac{\sigma}{\overline{x}} = 0{,}19 = 19\,\%$

053 ●●● **El tiempo, en minutos, que un conjunto de estudiantes dedica a preparar un examen es:**

220 500 450 390 550 600

790 200 60 300 400 90

Las calificaciones de ese conjunto de estudiantes son las siguientes.

4 5 6 5 7 6 8 4 1 5 6 2

¿Cuál es la media y la desviación típica de ambos conjuntos? ¿Qué podemos hacer para comparar su variabilidad? ¿En qué conjunto los datos están más dispersos?

	Minutos de estudio	Calificaciones
Media	379	4,92
Varianza	43.037	3,58
Desviación típica	207	1,89
Coeficiente de variación	0,55	0,38

Para comparar la variabilidad nos fijamos en el coeficiente de variación.

Están más dispersos los datos de los minutos dedicados al estudio.

054 ●● **Dos alumnos realizan 5 pruebas de calificación, obteniendo los siguientes resultados.**

Juan: 2 6 5 7 5 **Ana: 0 1 9 8 7**

Compara sus datos, utilizando la media aritmética y la desviación típica.

La media aritmética y la desviación típica de ambos estudiantes son:

Juan: $\overline{x} = 5$ $\sigma = 1{,}67$ Ana: $\overline{x} = 5$ $\sigma = 3{,}74$

Las dos medias son iguales, pero tienen distinto significado dependiendo de sus desviaciones típicas.

En ambos casos, las medias son iguales y valen 5.

Sin embargo, Juan tiene una desviación típica mucho menor que Ana. Esto significa que Juan es un alumno constante, pues sus notas están próximas a la media. Por el contrario, podemos afirmar que Ana es una alumna bastante irregular, porque alterna notas muy altas y bajas, estando todas excesivamente alejadas de la media.

055 ●● **Un grupo de ratones tiene de media de sus pesos $\overline{x} = 70$ g y desviación típica $\sigma = 20$ g. Un conjunto de gatos tiene de media $\overline{x} = 2{,}5$ kg y desviación típica $\sigma = 20$ g. Compara ambos grupos.**

Aunque las desviaciones típicas sean iguales, debido a la diferencia existente entre las medias, podemos decir que en el grupo de ratones hay más dispersión en los datos que en el grupo de gatos: $CV_R = \dfrac{20}{70} > \dfrac{20}{2.500} = CV_G$

056 ●●● **Los diplomados en Informática de gestión tienen un salario medio, en su primer empleo, de 1.080 €, con una desviación típica de 180 €. Los diplomados en Informática de sistemas tienen un salario medio de 960 €, con una desviación típica de 150 €. Si a un diplomado en Informática de gestión le ofrecen un sueldo de 1.200 €, y a un diplomado en Informática de sistemas, un sueldo de 1.140 €, ¿cuál recibe una mejor oferta? ¿Por qué?**

Para poder comparar ambas ofertas vamos a medir sus beneficios en unidades de desviación típica.

Sabiendo que un diplomado en Informática de gestión tiene un salario medio de 1.080 €, con una desviación típica de 180 €, podemos decir que la oferta de 1.200 € se desvía por encima de la media:

$$\frac{1.200 - 1.080}{180} = 0{,}75 \text{ unidades de desviación típica}$$

Sin embargo, una oferta de 1.140 € a un diplomado en Informática de sistemas, con un sueldo medio de 960 € y 150 € de desviación típica, se desvía por encima de la media:

$$\frac{1.140 - 960}{150} = \frac{180}{150} = 1{,}2 \text{ unidades de desviación típica}$$

Esto indica que el diplomado en Informática de sistemas es quien recibe la mejor oferta.

057 ●●● **La edad media de los integrantes de una orquesta aumentaría en un año si abandonaran la orquesta 5 músicos de 19 años cada uno, o si se unieran a ella 5 músicos de 17 años cada uno. ¿Es posible esta situación?**

Es imposible, ya que si la edad media aumenta quitando 5 músicos de 19 años, esto quiere decir que la media era menor de 19 años, y si aumenta añadiendo 5 músicos de 17 años, significa que la media es inferior a 17, por lo que es imposible.

058 ●●● **El peso medio de 4 amigos es 90 kg, pero hay un error, pues el peso de Carlos es 79 kg, y no 97 kg. ¿Cuál es realmente el peso medio?**

$$\overline{x} = \frac{4 \cdot 90 - 18}{4} = 85{,}5$$

El peso medio es 85,5 kg.

059 ●●● **El salario mensual, en euros, de los cinco trabajadores de una empresa es el siguiente.**

1.500	1.500	2.000	2.700	11.000

¿Cuál de las tres medidas de centralización describe mejor los sueldos de la empresa?

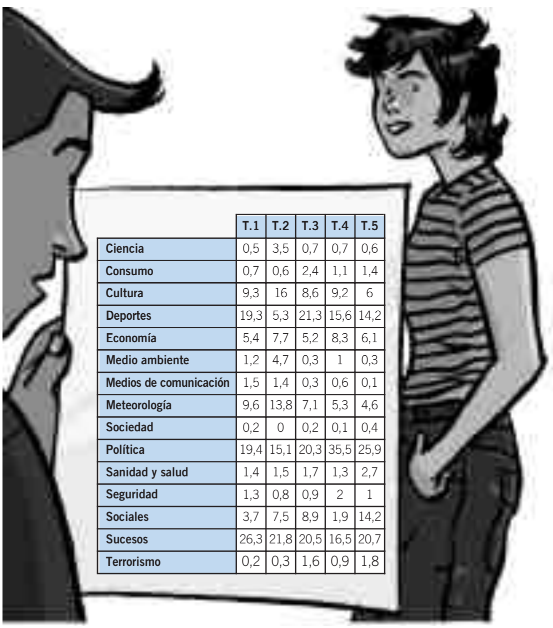
La mediana, ya que la moda nos da el valor mínimo del salario mensual, mientras que la mayoría de la empresa cobra menos de la media.

EN LA VIDA COTIDIANA

060 ●●●

Para la revista de un centro escolar se hace un estudio estadístico que consiste en analizar el tipo de noticias que ofrecen los informativos de las principales cadenas de televisión.

Después de elegir qué variables se van a estudiar, los alumnos han organizado los datos en una tabla que muestra el porcentaje de noticias de cada tipo que se ha emitido.



	T.1	T.2	T.3	T.4	T.5
Ciencia	0,5	3,5	0,7	0,7	0,6
Consumo	0,7	0,6	2,4	1,1	1,4
Cultura	9,3	16	8,6	9,2	6
Deportes	19,3	5,3	21,3	15,6	14,2
Economía	5,4	7,7	5,2	8,3	6,1
Medio ambiente	1,2	4,7	0,3	1	0,3
Medios de comunicación	1,5	1,4	0,3	0,6	0,1
Meteorología	9,6	13,8	7,1	5,3	4,6
Sociedad	0,2	0	0,2	0,1	0,4
Política	19,4	15,1	20,3	35,5	25,9
Sanidad y salud	1,4	1,5	1,7	1,3	2,7
Seguridad	1,3	0,8	0,9	2	1
Sociales	3,7	7,5	8,9	1,9	14,2
Sucesos	26,3	21,8	20,5	16,5	20,7
Terrorismo	0,2	0,3	1,6	0,9	1,8

Construye un gráfico adecuado y contesta a estas preguntas.

a) ¿Qué tres tipos de noticias se emiten más en cada cadena?

b) ¿Cuál de las cinco cadenas reparte más uniformemente sus noticias?

c) ¿Consideras que alguna noticia interesa mucho más o mucho menos que el resto?

a)

	Noticias más emitidas		
	1.º	**2.º**	**3.º**
T.1	Sucesos	Política	Deportes
T.2	Sucesos	Cultura	Política
T.3	Deportes	Sucesos	Política
T.4	Política	Sucesos	Deportes
T.5	Política	Sucesos	Deportes y Sociales

b) Calculamos las varianzas.

	T.1	T.2	T.3	T.4	T.5
Varianza	66,9	44,42	57,51	86,93	62,96

La menor varianza la tiene la cadena T.2, por lo que es la cadena que reparte más uniformemente los contenidos.

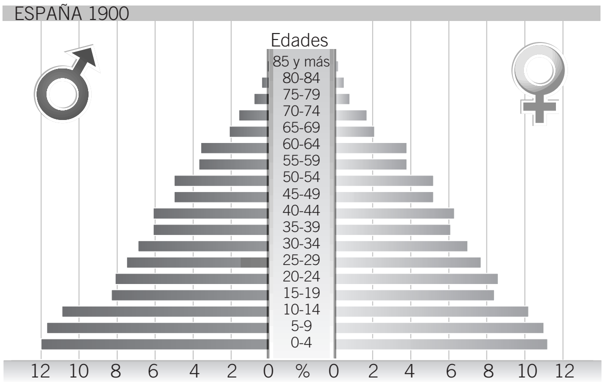
c) Hallamos la media de cada tipo de contenido.

	Media
Ciencia	1,2
Consumo	1,24
Cultura	9,82
Deportes	15,14
Economía	6,54
Medio ambiente	1,5
Medios de comunicación	0,78
Meteorología	8,08
Sociedad	0,18
Política	23,24
Sanidad y salud	1,72
Seguridad	1,2
Sociales	7,24
Sucesos	21,16
Terrorismo	0,96

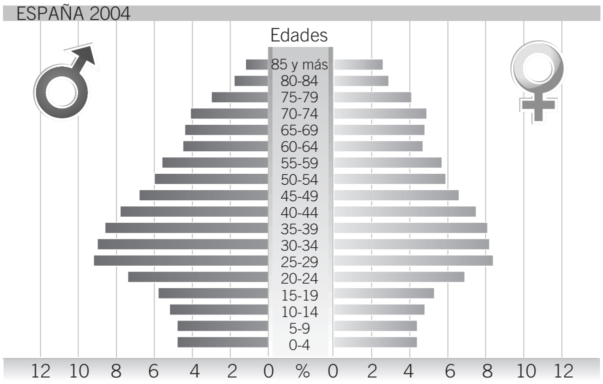
Las noticias que más interesan son las referentes a política, sucesos y deportes.

061 ●●●

En una revista científica se ha publicado un informe sobre la evolución de la estructura de la población en España durante un siglo.



Los datos se muestran en pirámides de población, es decir, diagramas de barras, donde se representa la estructura de la población por intervalos de edades y porcentaje de cada sexo.



Para interpretar una pirámide de población debemos fijarnos en su forma.

Fíjate en las dos pirámides de población y describe cómo ha cambiado la estructura de la población española de 1900 y la de un siglo después. ¿Qué diferencias puedes destacar?

La pirámide de población en 2004 empieza a ser invertida, y eso quiere decir que la natalidad está disminuyendo cada año, desde hace 25 años, y que la esperanza de vida va aumentando.

Se observa una mayor esperanza de vida en 2004 que en 1900. En 2004 hay más porcentaje de personas de mayor edad.

13 Combinatoria

- MÉTODOS DE CONTEO
  - MÉTODO DEL PRODUCTO
  - MÉTODO DEL DIAGRAMA DE ÁRBOL
- NÚMEROS COMBINATORIOS
  - PROPIEDADES
- BINOMIO DE NEWTON
- VARIACIONES
- PERMUTACIONES
- COMBINACIONES

El destierro

A nadie en su sano juicio se le ocurriría discutir una orden de Su Eminencia. Y mucho menos a Etiénne Pascal, para quien el cardenal Richelieu había dispuesto que pasara a ocupar el puesto de recaudador en la zona de Rouen.

Este encargo, a los ojos de su hijo, Blaise Pascal, tenía poco de premio y mucho de castigo.

Blaise había observado que el carácter de su padre había cambiado, pasaba el día fuera de casa y por la noche tenía que repasar los asientos contables que periódicamente enviaba a París. El joven, deseoso de ayudar, ideó una máquina de contar para facilitar el trabajo de su padre.

–¡Padre! Tengo algo que podría ahorraros un tiempo precioso –dijo Blaise irrumpiendo en la sala.

–Ahora no puedo atenderte, Blaise –contestó su padre de forma cansada–, mañana tengo que enviar el informe y he de comprobar todas las operaciones.

–De eso se trata, padre –dijo Blaise y comenzó a introducir las cantidades, unas sumando y otras restando, con las que la máquina operaba sin esfuerzo alguno.

–¡Gracias, hijo! Ahora mi trabajo queda reducido a la mitad y, tal vez, si los avances agradan a Richelieu nos ofrezca la posibilidad de volver a París.

El joven Blaise, por primera vez en tres años, vio cerca los jardines de París y el final de su destierro en Rouen.

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 1 & & \\
 & 1 & & 2 & & 1 & \\
1 & & 3 & & 3 & & 1 \\
 & & & \dots & & &
\end{array}
$$

En este triángulo de Pascal, comprueba que la suma de cada fila es una potencia de 2. ¿Cuánto vale la suma de los números de la fila n*?*

Podemos observar que la suma de todos los números de cada fila forman la sucesión 1, 2, 4, 8...

Es una progresión geométrica de razón 2 y cuyo término general es: $a_n = 2^{n-1}$.

La suma de los números de la fila n ***coincide con el término*** n***-ésimo de la progresión.***

Combinatoria

EJERCICIOS

001 **Un equipo de fútbol tiene 2 equipaciones, compuestas de camiseta, pantalón y medias, de diferentes colores, verde y azul. ¿Cuántas formas distintas tendrán para vestirse sin que se repita la indumentaria?**

$2 \cdot 2 \cdot 2 = 8 \rightarrow$ Tendrán 8 posibilidades distintas para vestirse.

002 **¿De cuántas maneras diferentes se pueden colocar las 4 letras de la palabra PACO?**

$4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24 \rightarrow$ Se pueden colocar de 24 maneras diferentes.

003 **¿Cuántos caminos diferentes hay para llegar de mi casa al restaurante pasando por el cine?**

$3 \cdot 4 = 12$
Hay 12 caminos diferentes.

004 **Mediante un diagrama de árbol, indica cuántas y cuáles son las distintas combinaciones de letras que podemos formar con las 4 letras de la palabra ROSA.**

Las distintas posibilidades son:

ROSA	OSAR	SARO	AROS
ROAS	OSRA	SAOR	ARSO
RSAO	OARS	SORA	ASOR
RSOA	OASR	SOAR	ASRO
RAOS	ORAS	SROA	AOSR
RASO	ORSA	SRAO	AORS

Hay 24 posibilidades distintas.

005 **Lanzamos simultáneamente una moneda y un dado de 6 caras, numeradas del 1 al 6. Describe cuántas y cuáles son las posibilidades del experimento. Ayúdate con un diagrama de árbol.**

Cara (C) → 1, 2, 3, 4, 5, 6

Cruz (X) → 1, 2, 3, 4, 5, 6

El número de posibilidades del experimento es 12:

C1 C2 C3 C4 C5 C6 X1 X2 X3 X4 X5 X6

006 **Para los cargos de delegado y subdelegado de tu clase se han presentado 3 estudiantes: Juan, Rosa y María. Representa, mediante un diagrama de árbol, las posibles combinaciones que se pueden dar en la elección.**

Delegado	Subdelegado	Delegado	Subdelegado	Delegado	Subdelegado
Juan	Rosa	Rosa	Juan	María	Juan
	María		María		Rosa

007 **¿Cuántos números de 3 cifras, ninguna de ellas repetida, se pueden formar con los números impares? ¿Cuáles son?**

135	137	139	153	157	159	173	175	179	193	195	197
315	317	319	351	357	359	371	375	379	391	395	397
513	517	519	531	537	539	571	573	579	591	593	597
713	715	719	731	735	739	751	753	759	791	793	795
913	915	917	931	935	937	951	953	957	971	973	975

Hay 60 números posibles.

008 **Calcula.**

a) $8!$ **b)** $\binom{6}{2}$ **c)** $15!$ **d)** $\binom{8}{4}$

a) $8! = 40.320$

b) $\binom{6}{2} = 15$

c) $15! = 1.307.674.368.000$

d) $\binom{8}{4} = 70$

009 **Haz las operaciones.**

a) $12 \cdot 11!$ **b)** $\binom{7}{3} + \binom{7}{4}$ **c)** $12! - 11!$ **d)** $\binom{5}{2} - \binom{4}{2}$

a) $12 \cdot 11! = 479.001.600$

b) $\binom{7}{3} + \binom{7}{4} = 35 + 35 = 70$

c) $12! - 11! = 439.084.800$

d) $\binom{5}{2} - \binom{4}{2} = 10 - 6 = 4$

010 **Simplifica estas operaciones con factoriales y números combinatorios.**

a) $(n+1) \cdot n!$ **c)** $\binom{n}{0}$ **e)** $(n+1)! - n!$ **g)** $\binom{n}{n-1}$

b) $\binom{n}{n}$ **d)** $(n+1)!$ **f)** $\binom{n}{1}$ **h)** $(n-1)! \cdot (n-3)!$

a) $(n+1) \cdot n! = (n+1)!$

b) $\binom{n}{n} = 1$

c) $\binom{n}{0} = 1$

d) $(n+1)!$

e) $(n+1)! - n! = n \cdot n!$

f) $\binom{n}{1} = n$

g) $\binom{n}{n-1} = n$

h) $(n-1)! \cdot (n-3)!$

011 **Realiza las siguientes operaciones con números combinatorios.**

a) $\binom{5}{4} + \binom{10}{5} - \binom{8}{7} - \binom{9}{3}$

b) $\binom{10}{4} + \binom{8}{5} - \binom{7}{7} - \binom{5}{3}$

c) $\binom{7}{7} - \binom{7}{0} + \binom{9}{3} - \binom{9}{6}$

a) $\binom{5}{4} + \binom{10}{5} - \binom{8}{7} - \binom{9}{3} = \frac{5!}{4!\cdot 1!} + \frac{10!}{5!\cdot 5!} - \frac{8!}{7!\cdot 1!} - \frac{9!}{3!\cdot 6!} =$
$= 5 + 252 - 8 - 84 = 165$

b) $\binom{10}{4} + \binom{8}{5} - \binom{7}{7} - \binom{5}{3} = \frac{10!}{4!\cdot 6!} + \frac{8!}{5!\cdot 3!} - 1 - \frac{5!}{3!\cdot 2!} =$
$= 210 + 56 - 1 - 10 = 255$

c) $\binom{7}{7} - \binom{7}{0} + \binom{9}{3} - \binom{9}{6} = \left[\binom{7}{7} - \binom{7}{0}\right] + \left[\binom{9}{3} - \binom{9}{6}\right] = 0 + 0 = 0$

012 **Aplica las propiedades de los números combinatorios, sin realizar las operaciones, y calcula $\binom{5}{3}$, sabiendo que $\binom{5}{2} = 10$.**

$\binom{5}{3} = \binom{5}{5-3} = \binom{5}{2} = 10$

013 **Haz estas operaciones.**

a) $\binom{7}{4} + \binom{7}{5}$ **b)** $\binom{10}{6} + \binom{9}{6}$

a) $\binom{7}{4} + \binom{7}{5} = \binom{8}{5} = \frac{8!}{5!\cdot 3!} = 56$

b) $\binom{10}{6} + \binom{9}{6} = \frac{10!}{6!\cdot 4!} + \frac{9!}{6!\cdot 3!} = 210 + 84 = 294$

014 **Calcula estas potencias de binomios y simplifica todo lo que sea posible.**

a) $(x+1)^6$ **c)** $\left(\frac{1}{2} - x\right)^7$ **e)** $(5-y)^4$

b) $(2x-1)^5$ **d)** $(2x+2)^6$ **f)** $\left(\frac{3}{4} + x\right)^4$

a) $(x+1)^6 = \binom{6}{0}x^6\cdot 1^0 + \binom{6}{1}x^5\cdot 1^1 + \binom{6}{2}x^4\cdot 1^2 + \binom{6}{3}x^3\cdot 1^3 + \binom{6}{4}x^2\cdot 1^4 +$
$+ \binom{6}{5}x^1\cdot 1^5 + \binom{6}{6}x^0\cdot 1^6 = x^6 + 6x^5 + 15x^4 + 20x^3 + 15x^2 + 6x + 1$

b) $(2x-1)^5 = \binom{5}{0}(2x)^5 \cdot (-1)^0 + \binom{5}{1}(2x)^4 \cdot (-1)^1 + \binom{5}{2}(2x)^3 \cdot (-1)^2 +$
$+\binom{5}{3}(2x)^2 \cdot (-1)^3 + \binom{5}{4}(2x)^1 \cdot (-1)^4 + \binom{5}{5}(2x)^0 \cdot (-1)^5 =$
$= 32x^5 - 80x^4 + 80x^3 - 40x^2 + 10x - 1$

c) $\left(\frac{1}{2}-x\right)^7 = \binom{7}{0}\left(\frac{1}{2}\right)^7 \cdot (-x)^0 + \binom{7}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^6 \cdot (-x)^1 + \binom{7}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^5 \cdot (-x)^2 +$
$+\binom{7}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot (-x)^3 + \binom{7}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot (-x)^4 + \binom{7}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot (-x)^5 +$
$+\binom{7}{6}\left(\frac{1}{2}\right)^1 \cdot (-x)^6 + \binom{7}{7}\left(\frac{1}{2}\right)^0 \cdot (-x)^7 =$
$= \frac{1}{128} - \frac{7}{64}x + \frac{21}{32}x^2 - \frac{35}{16}x^3 + \frac{35}{8}x^4 - \frac{21}{4}x^5 + \frac{7}{2}x^6 - x^7$

d) $(2x+2)^6 = \binom{6}{0}(2x)^6 \cdot 2^0 + \binom{6}{1}(2x)^5 \cdot 2^1 + \binom{6}{2}(2x)^4 \cdot 2^2 + \binom{6}{3}(2x)^3 \cdot 2^3 +$
$+\binom{6}{4}(2x)^2 \cdot 2^4 + \binom{6}{5}(2x)^1 \cdot 2^5 + \binom{6}{6}(2x)^0 \cdot 2^6 =$
$= 64x^6 + 384x^5 + 960x^4 + 1.280x^3 + 960x^2 + 384x + 64$

e) $(5-y)^4 = \binom{4}{0}5^4 \cdot (-y)^0 + \binom{4}{1}5^3 \cdot (-y)^1 + \binom{4}{2}5^2 \cdot (-y)^2 +$
$+\binom{4}{3}5^1 \cdot (-y)^3 + \binom{4}{4}5^0 \cdot (-y)^4 =$
$= 625 - 500y + 150y^2 - 20y^3 + y^4$

f) $\left(\frac{3}{4}+x\right)^4 = \binom{4}{0}\left(\frac{3}{4}\right)^4 \cdot x^0 + \binom{4}{1}\left(\frac{3}{4}\right)^3 \cdot x^1 + \binom{4}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^2 \cdot x^2 +$
$+\binom{4}{3}\left(\frac{3}{4}\right)^1 \cdot x^3 + \binom{4}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^0 \cdot x^4 = \frac{81}{256} + \frac{27}{16}x + \frac{27}{8}x^2 + 3x^3 + x^4$

015 **Desarrolla los siguientes binomios.**

a) $(a+b)^6$ **b) $(a-b)^8$**

a) $(a+b)^6 = \binom{6}{0}a^6 \cdot b^0 + \binom{6}{1}a^5 \cdot b^1 + \binom{6}{2}a^4 \cdot b^2 + \binom{6}{3}a^3 \cdot b^3 +$
$+\binom{6}{4}a^2 \cdot b^4 + \binom{6}{5}a^1 \cdot b^5 + \binom{6}{6}a^0 \cdot b^6 =$
$= a^6 + 6a^5b^1 + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$

b) $(a-b)^8 = \binom{8}{0}a^8 \cdot (-b)^0 + \binom{8}{1}a^7 \cdot (-b)^1 + \binom{8}{2}a^6 \cdot (-b)^2 +$
$+\binom{8}{3}a^5 \cdot (-b)^3 + \binom{8}{4}a^4 \cdot (-b)^4 + \binom{8}{5}a^3 \cdot (-b)^5 +$
$+\binom{8}{6}a^2 \cdot (-b)^6 + \binom{8}{7}a^1 \cdot (-b)^7 + \binom{8}{8}a^0 \cdot (-b)^8 =$
$= a^8 - 8a^7b + 28a^6b^2 - 56a^5b^3 + 70a^4b^4 - 56a^3b^5 +$
$+ 28a^2b^6 - 8ab^7 + b^8$

016 **Desarrolla el binomio.**

$$(ax^2 - y)^5$$

$$(ax^2-y)^5 = \binom{5}{0}(ax^2)^5\cdot(-y)^0+\binom{5}{1}(ax^2)^4\cdot(-y)^1+\binom{5}{2}(ax^2)^3\cdot(-y)^2+$$
$$+\binom{5}{3}(ax^2)^2\cdot(-y)^3+\binom{5}{4}(ax^2)^1\cdot(-y)^4+\binom{5}{5}(ax^2)^0\cdot(-y)^5=$$
$$=a^5x^{10}-5a^4x^8y+15a^3x^6y^2-10a^2x^4y^3+5ax^2y^4-y^5$$

017 **Hemos alquilado un palco en el teatro con 6 asientos. ¿De cuántas formas podemos sentarnos mis padres, mi hermana y yo?**

$V_{6,4}=\dfrac{6!}{2!}=360 \rightarrow$ Podemos sentarnos de 360 formas.

018 **Además de nosotros, vienen al palco dos amigos más. ¿Cuántas agrupaciones distintas podemos hacer?**

En este caso habrá tantos asientos como personas.
Podemos hacer: $P_6 = 6! = 720$ agrupaciones

019 **Con 14 bolas rojas, 13 azules, 12 naranjas y 11 blancas, ¿cuántos collares diferentes de 10 bolas podemos hacer?**

$VR_{4,10}=4^{10}=1.048.576$
Podemos hacer 1.048.576 collares.

020 **Con 4 botes de pintura: amarilla, azul, roja y blanca, ¿cuántas mezclas de dos colores puedes realizar?**

$C_{4,2}=\binom{4}{2}=\dfrac{4!}{2!\cdot 2!}=6 \rightarrow$ Se pueden hacer 6 mezclas de dos colores.

021 **En una clase de 25 alumnos se tiene que elegir delegado y subdelegado. ¿Cuántas parejas se pueden formar para desempeñar estos cargos?**

$V_{25,2}=\dfrac{25!}{(25-2)!}=\dfrac{25!}{23!}=25\cdot 24=600 \rightarrow$ Se pueden formar 600 parejas.

022 **Tenemos 6 pesas de 1, 2, 3, 4, 5 y 6 kg. ¿Cuántas pesadas diferentes podemos hacer?**

Dependiendo de si utilizamos 1, 2, 3, 4, 5 o 6 pesas,
el número de pesadas distintas es:

$$C_{6,1}+C_{6,2}+C_{6,3}+C_{6,4}+C_{6,5}+C_{6,6}=$$
$$=6+15+20+15+6+1=63 \text{ pesadas}$$

023 **Calcula el número de alineaciones distintas que podremos hacer para jugar un partido de fútbol, si tenemos 22 jugadores en la plantilla.**

$C_{22,\,11} = \dfrac{22!}{11! \cdot 11!} = 705.432 \;\rightarrow\;$ Se pueden hacer 705.432 alineaciones.

024 **Con las letras de la palabra POTENCIA, ¿cuántas palabras se pueden formar, con o sin sentido, suponiendo que las letras puedan repetirse? ¿Y si no se pueden repetir?**

Si las letras pueden repetirse, dependerá del número de letras que queramos que tenga la palabra; así, si tiene n letras: $VR_{8,\,n} = 8^n$

Si las letras no pueden repetirse, dependerá del número de letras que queramos que tenga la palabra; así, si tiene n letras: $V_{8,n} = \dfrac{8!}{(8-n)!}$

025 **Tres compañeros de un centro escolar están en la fila de un autobús. ¿De cuántas maneras se pueden subir, sabiendo que tienen que hacerlo de uno en uno? ¿Y si van cinco compañeros?**

Si son tres compañeros: $P_3 = 3! = 6$, pueden subir de 6 formas diferentes.

Si son cinco compañeros: $P_5 = 5! = 120$, pueden subir de 120 formas diferentes.

026 **¿Cuántos números de 7 cifras iguales o diferentes se pueden formar con los dígitos 1, 4, 5, 7 y 8?**

$VR_{5,\,7} = 5^7 = 78.125 \;\rightarrow\;$ Se pueden formar 78.125 números distintos.

027 **¿De cuántas maneras distintas pueden llegar 4 nadadores a la meta?**

En este caso influye el orden y se trabaja con todos los elementos, pero no se repite ninguno, luego habrá que calcular el número de permutaciones de 4 elementos.

$P_4 = 4! = 24 \;\rightarrow\;$ Pueden llegar a la meta de 24 maneras.

028 **¿De cuántas formas podemos colocarnos 2 anillos diferentes en una mano, de modo que no estén en el mismo dedo?**

$V_{5,\,2} = \dfrac{5!}{(5-2)!} = \dfrac{5!}{3!} = 20 \rightarrow$ Podemos colocarlos de 20 formas.

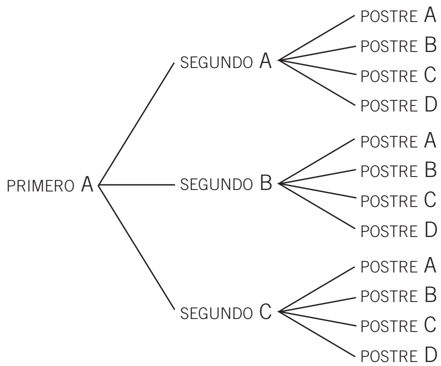
ACTIVIDADES

029 **Lanzamos un dado y una moneda consecutivamente. Razona cuántos resultados diferentes se pueden producir.**

Por cada resultado distinto del dado se pueden obtener dos resultados de la moneda. Aplicando el método del producto concluimos que se pueden producir: $6 \cdot 2 = 12$ resultados diferentes.

030 ● **En un restaurante, el menú del día tiene 3 primeros platos, 3 segundos y 4 postres para elegir. ¿Cuántos menús diferentes podemos confeccionar? Utiliza el método del producto y represéntalo con un diagrama de árbol.**

Utilizando el método del producto podemos confeccionar: $3 \cdot 3 \cdot 4 = 36$ menús distintos. En el siguiente diagrama de árbol, aparecen los posibles menús con el plato PRIMERO A. El diagrama de árbol es análogo con el plato PRIMERO B y con el plato PRIMERO C.



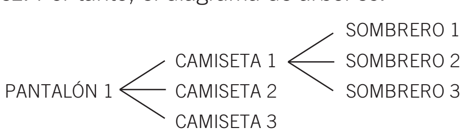
031 ●● **La clave de acceso de un ordenador consta de 4 caracteres (solo letras o números) y distingue entre letras mayúsculas y minúsculas. Calcula el número de posibilidades distintas que hay para escribir la clave.**

Suponiendo que un ordenador personal tiene 26 letras (sin considerar la letra ñ), y teniendo en cuenta que distingue entre mayúsculas y minúsculas, hay 52 posibles letras y 10 números. En total, son 62 elementos. Por tanto, el número de posibilidades que hay para escribir la clave es el número de variaciones con repetición de 62 elementos, tomados de 4 en 4.

$$VR_{62,\,4} = 62^4 = 14.776.336 \text{ posibilidades}$$

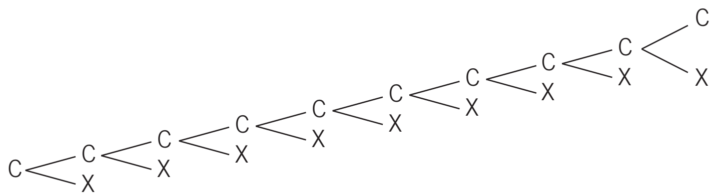
032 ●● **Susana dispone en su armario de 2 faldas, 3 pares de pantalones de diferentes colores, 2 blusas, 3 camisetas y 3 sombreros. Construye, en un diagrama de árbol, las posibles combinaciones que puede hacer.**

Consideramos que no se pueden poner falda y pantalón juntos, ni camiseta y blusa a la vez. Por tanto, el diagrama de árbol es:



Se procedería de forma análoga con PANTALÓN 2 y PANTALÓN 3. Después, se hace un diagrama de árbol similar al anterior sustituyendo las camisetas por BLUSA 1 y BLUSA 2. Por último, se realizan los diagramas de árbol similares a los anteriores con FALDA 1 y FALDA 2.

033 Representa, en un diagrama de árbol, los resultados obtenidos al lanzar una moneda al aire y anotar el resultado de 10 tiradas.



El diagrama de árbol se completaría añadiendo las ramas (C–X) a cada X que aparece en el diagrama. Por último, se haría otro diagrama análogo, considerando que la primera tirada es X.

034 El código PIN de un teléfono móvil está formado por 4 dígitos. Halla el número de códigos diferentes que podemos poner en el teléfono.

Teniendo en cuenta que el teclado de un teléfono móvil dispone de 10 números distintos, el número de códigos diferentes es el número de variaciones con repetición de 10 elementos, tomados de 4 en 4.

$$VR_{10,\,4} = 10^4 = 10.000 \text{ códigos}$$

035 Calcula el valor de los siguientes números combinatorios.

a) $\binom{80}{70}$

b) $\binom{50}{30}$

c) $\binom{60}{40}$

d) $\binom{90}{80}$

a) $\binom{80}{70} = \dfrac{80!}{70! \cdot 10!} = 1.646.492.110.120$

b) $\binom{50}{30} = \dfrac{50!}{30! \cdot 20!} = 47.129.212.243.960$

c) $\binom{60}{40} = \dfrac{60!}{40! \cdot 20!} = 4.191.844.505.805.495$

d) $\binom{90}{80} = \dfrac{90!}{80! \cdot 10!} = 5.720.645.481.903$

036 **Realiza estas operaciones con números combinatorios.**

a) $\binom{9}{4}+\binom{20}{5}-\binom{10}{2}-\binom{6}{3}$ **b)** $\binom{10}{9}+\binom{8}{7}-\binom{7}{7}-\binom{5}{4}$

a) $\binom{9}{4}+\binom{20}{5}-\binom{10}{2}-\binom{6}{3}=\dfrac{9!}{4!\cdot 5!}+\dfrac{20!}{5!\cdot 15!}-\dfrac{10!}{2!\cdot 8!}-\dfrac{6!}{3!\cdot 3!}=$
$= 126 + 15.504 - 45 - 208 = 15.565$

b) $\binom{10}{9}+\binom{8}{7}-\binom{7}{7}-\binom{5}{4}=10+8-1-5=12$

037 **Razona si es o no cierta esta igualdad.**

$$n! + m! = (n + m)!$$

Pon varios ejemplos en los que compruebes si la igualdad es cierta o falsa.

La igualdad de números combinatorios $n! + m! = (n + m)!$ no es cierta.
Veamos algunos ejemplos en los que no se cumple la igualdad.

$$\left.\begin{aligned} 3! + 2! = 6 + 2 = 8 \\ (3 + 2)! = 5! = 120 \end{aligned}\right\} \rightarrow 3! + 2! \neq (3 + 2)!$$

$$\left.\begin{aligned} 5! + 3! = 120 + 6 = 126 \\ (5 + 3)! = 8! = 40.320 \end{aligned}\right\} \rightarrow 5! + 3! \neq (5 + 3)!$$

038 **Halla, con ayuda de la calculadora, los siguientes números factoriales.**

a) 12!	c) 7!	e) 12 · 6!	g) 25!
b) 2!	d) 22!	f) 3 · 3!	h) 7 · 6!

a) $12! = 479.001.600$
b) $2! = 2$
c) $7! = 5.040$
d) $22! \simeq 1,124 \cdot 10^{21}$
e) $12 \cdot 6! = 8.640$
f) $3 \cdot 3! = 18$
g) $25! \simeq 1,55 \cdot 10^{25}$
h) $7 \cdot 6! = 5.040$

039 **Calcula el valor de los números combinatorios, utilizando, si es necesario, la calculadora científica.**

a) $\binom{16}{14}$ **b)** $\binom{70}{3}+\binom{70}{4}$

a) $\binom{16}{14}=120$

b) $\binom{70}{3}+\binom{70}{4}=\binom{71}{4}=54.740+916.895=971.635$

040 Demuestra con ejemplos que se verifican estas igualdades.

a) $\binom{n}{n-1} = n$ **b)** $\binom{n}{n-2} = \frac{1}{2}(n^2 - n)$

a) $\binom{5}{4} = 5$

b) $\binom{6}{4} = \frac{6!}{4! \cdot 2!} = 15 = \frac{1}{2}(6^2 - 6)$

041 Desarrolla las potencias de estos binomios.

a) $(a-b)^5$ **b)** $\left(x-\frac{1}{x}\right)^5$ **c)** $\left(x+\frac{1}{x}\right)^5$ **d)** $(3-2a)^6$ **e)** $\left(x+\frac{1}{x}\right)^6$ **f)** $\left(x-\frac{1}{x}\right)^6$

a) $(a-b)^5 = \binom{5}{0}a^5 \cdot (-b)^0 + \binom{5}{1}a^4 \cdot (-b)^1 + \binom{5}{2}a^3 \cdot (-b)^2 +$
$+ \binom{5}{3}a^2 \cdot (-b)^3 + \binom{5}{4}a^1 \cdot (-b)^4 + \binom{5}{5}a^0 \cdot (-b)^5 =$
$= a^5 - 5a^4b + 10a^3b^2 - 10a^2b^3 + 5ab^4 - b^5$

b) $\left(x-\frac{1}{x}\right)^5 = \binom{5}{0}x^5 \cdot \left(-\frac{1}{x}\right)^0 + \binom{5}{1}x^4 \cdot \left(-\frac{1}{x}\right)^1 + \binom{5}{2}x^3 \cdot \left(-\frac{1}{x}\right)^2 +$
$+ \binom{5}{3}x^2 \cdot \left(-\frac{1}{x}\right)^3 + \binom{5}{4}x^1 \cdot \left(-\frac{1}{x}\right)^4 + \binom{5}{5}x^0 \cdot \left(-\frac{1}{x}\right)^5 =$
$= x^5 - 5x^3 + 10x - 10x^{-1} + 5x^{-3} - x^{-5}$

c) $\left(x+\frac{1}{x}\right)^5 = \binom{5}{0}x^5 \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^0 + \binom{5}{1}x^4 \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^1 + \binom{5}{2}x^3 \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^2 +$
$+ \binom{5}{3}x^2 \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^3 + \binom{5}{4}x^1 \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^4 + \binom{5}{5}x^0 \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^5 =$
$= x^5 + 5x^3 + 10x + 10x^{-1} + 5x^{-3} + x^{-5}$

d) $(3-2a)^6 = \binom{6}{0}3^6 \cdot (-2a)^0 + \binom{6}{1}3^5 \cdot (-2a)^1 + \binom{6}{2}3^4 \cdot (-2a)^2 + \binom{6}{3}3^3 \cdot (-2a)^3 +$
$+ \binom{6}{4}3^2 \cdot (-2a)^4 + \binom{6}{5}3^1 \cdot (-2a)^5 + \binom{6}{6}3^0 \cdot (-2a)^6 =$
$= 729 - 2.916a + 4.860a^2 - 4.320a^3 + 2.160a^4 - 576a^5 + 64a^6$

e) $\left(x+\frac{1}{x}\right)^6 = \binom{6}{0}x^6 \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^0 + \binom{6}{1}x^5 \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^1 + \binom{6}{2}x^4 \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^2 +$
$+ \binom{6}{3}x^3 \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^3 + \binom{6}{4}x^2 \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^4 + \binom{6}{5}x^1 \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^5 + \binom{6}{6}x^0 \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^6 =$
$= x^6 + 6x^4 + 15x^2 + 20 + 15x^{-2} + 6x^{-4} + x^{-6}$

f) $\left(x-\frac{1}{x}\right)^6 = \binom{6}{0}x^6 \cdot \left(\frac{-1}{x}\right)^0 + \binom{6}{1}x^5 \cdot \left(\frac{-1}{x}\right)^1 + \binom{6}{2}x^4 \cdot \left(\frac{-1}{x}\right)^2 +$
$+ \binom{6}{3}x^3 \cdot \left(\frac{-1}{x}\right)^3 + \binom{6}{4}x^2 \cdot \left(\frac{-1}{x}\right)^4 + \binom{6}{5}x^1 \cdot \left(\frac{-1}{x}\right)^5 + \binom{6}{6}x^0 \cdot \left(\frac{-1}{x}\right)^6 =$
$= x^6 - 6x^4 + 15x^2 - 20 + 15x^{-2} - 6x^{-4} + x^{-6}$

042 ¿Cuál es el desarrollo del binomio $(x+4y)^5$?

$$(x+4y)^5=\binom{5}{0}x^5\cdot(4y)^0+\binom{5}{1}x^4\cdot(4y)^1+\binom{5}{2}x^3\cdot(4y)^2+\binom{5}{3}x^2\cdot(4y)^3+$$
$$+\binom{5}{4}x^1\cdot(4y)^4+\binom{5}{5}x^0\cdot(4y)^5=$$
$$=x^5+20x^4y+160x^3y^2+640x^2y^3+1.280xy^4+1.024y^5$$

043 **HAZLO ASÍ**

¿CÓMO SE CALCULA UNO DE LOS TÉRMINOS DE UN BINOMIO DE NEWTON?

Calcula el término octavo de $(2x-y)^{12}$.

PRIMERO. Se determinan a, b y n en el binomio.

$$(2x-y)^{12}\rightarrow \begin{aligned} a&=2x\\ b&=-y\\ n&=12\end{aligned}$$

SEGUNDO. El término m del desarrollo del binomio de Newton es:

$$\binom{n}{m-1}a^{n-(m-1)}b^{(m-1)}$$

El término octavo es $m=8$ si:

$$\binom{n}{m-1}a^{n-(m-1)}b^{(m-1)}$$
$$\downarrow\ a=2x,\ b=-y,\ n=12,\ m=8$$
$$\binom{12}{8-1}(2x)^{12-(8-1)}(-y)^{(8-1)}=-792\cdot 32x^5\cdot y^7=-25.344x^5y^7$$

044 **Calcula el término sexto de $(3x+y)^9$.**

$$\binom{9}{5}(3x)^4\cdot y^5=126\cdot 81x^4\cdot y^5=10.206x^4y^5$$

045 **Halla el término tercero de $(x+2y)^5$.**

$$\binom{5}{2}x^3\cdot(2y)^2=10x^3\cdot 4y^2=40x^3y^2$$

046 **Obtén el término noveno de $(3x+y)^9$.**

$$\binom{9}{8}(3x)^1\cdot y^8=9\cdot 3x\cdot y^8=27xy^8$$

047 Calcula la suma de todos los coeficientes de los polinomios.

a) $(x+y)^3$
b) $(x+y)^4$
c) $(x+y)^5$
d) $(x+y)^6$
e) $(x-y)^3$
f) $(x-y)^4$
g) $(x-y)^5$
h) $(x-y)^6$

a) $\binom{3}{0}+\binom{3}{1}+\binom{3}{2}+\binom{3}{3}=8$

b) $\binom{4}{0}+\binom{4}{1}+\binom{4}{2}+\binom{4}{3}+\binom{4}{4}=16$

c) $\binom{5}{0}+\binom{5}{1}+\binom{5}{2}+\binom{5}{3}+\binom{5}{4}+\binom{5}{5}=32$

d) $\binom{6}{0}+\binom{6}{1}+\binom{6}{2}+\binom{6}{3}+\binom{6}{4}+\binom{6}{5}+\binom{6}{6}=64$

e) $\binom{3}{0}-\binom{3}{1}+\binom{3}{2}-\binom{3}{3}=0$

f) $\binom{4}{0}-\binom{4}{1}+\binom{4}{2}-\binom{4}{3}+\binom{4}{4}=0$

g) $\binom{5}{0}-\binom{5}{1}+\binom{5}{2}-\binom{5}{3}+\binom{5}{4}-\binom{5}{5}=0$

h) $\binom{6}{0}-\binom{6}{1}+\binom{6}{2}-\binom{6}{3}+\binom{6}{4}-\binom{6}{5}+\binom{6}{6}=0$

048 Halla estas variaciones.

a) De 6 elementos, tomados de 3 en 3.
b) De 10 elementos, tomados de 2 en 2.
c) De 19 elementos, tomados de 4 en 4.
d) Con repetición de 4 elementos, tomados de 3 en 3.
e) Con repetición de 20 elementos, tomados de 5 en 5.
f) Con repetición de 17 elementos, tomados de 4 en 4.

a) $V_{6,3}=\frac{6!}{3!}=120$

b) $V_{10,2}=\frac{10!}{8!}=90$

c) $V_{19,4}=\frac{19!}{15!}=93.024$

d) $VR_{4,3}=4^3=64$

e) $VR_{20,5}=20^5=3.200.000$

f) $VR_{17,4}=17^4=83.521$

049 Calcula las siguientes permutaciones.

a) De 6 elementos.
b) De 11 elementos.
c) De 19 elementos.
d) De 8 elementos.
e) De 20 elementos.
f) De 17 elementos.
g) De 10 elementos.
h) De 15 elementos.

a) $P_6 = 6! = 720$
b) $P_{11} = 11! = 39.916.800$
c) $P_{19} = 19! \simeq 1{,}2 \cdot 10^{17}$
d) $P_8 = 8! = 40.320$
e) $P_{20} = 20! \simeq 2{,}4 \cdot 10^{18}$
f) $P_{17} = 17! \simeq 3{,}5 \cdot 10^{14}$
g) $P_{10} = 10! = 3.628.800$
h) $P_{15} = 15! \simeq 1{,}3 \cdot 10^{12}$

050 Realiza las combinaciones.

a) De 6 elementos, tomados de 4 en 4.
b) De 10 elementos, tomados de 2 en 2.
c) De 19 elementos, tomados de 4 en 4.
d) De 4 elementos, tomados de 3 en 3.
e) De 20 elementos, tomados de 5 en 5.
f) De 17 elementos, tomados de 4 en 4.

a) $C_{6,4} = \binom{6}{4} = \dfrac{6!}{4! \cdot 2!} = 15$

b) $C_{10,2} = \binom{10}{2} = \dfrac{10!}{2! \cdot 8!} = 45$

c) $C_{19,4} = \binom{19}{4} = \dfrac{19!}{4! \cdot 15!} = 3.876$

d) $C_{4,3} = \binom{4}{3} = \dfrac{4!}{3! \cdot 1!} = 4$

e) $C_{20,5} = \binom{20}{5} = \dfrac{20!}{5! \cdot 15!} = 15.504$

f) $C_{17,4} = \binom{17}{4} = \dfrac{17!}{4! \cdot 13!} = 2.380$

051 Calcula y simplifica.

a) $P_4 + P_5$ **b)** $P_4 + P_3 + P_2$ **b)** $P_7 - P_6$

a) $P_4 + P_5 = 4! + 5! = 4! + 5 \cdot 4! = (1 + 5) \cdot 4! = 6 \cdot 4! = 144$
b) $P_4 + P_3 + P_2 = 4 \cdot 3 \cdot 2! + 3 \cdot 2! + 2! = (12 + 3 + 1) \cdot 2! = 32$
c) $P_7 - P_6 = 7! - 6! = 7 \cdot 6! - 6! = (7 - 1) \cdot 6! = 6 \cdot 6! = 4.320$

052 Calcula y simplifica los resultados.

a) $\dfrac{C_{6,\,2}}{C_{5,\,2}}$ b) $\dfrac{C_{6,\,2}}{C_{5,\,2}} + \dfrac{C_{4,\,2}}{C_{3,\,2}} + \dfrac{C_{5,\,2}}{C_{4,\,2}} + \dfrac{C_{6,\,2}}{C_{5,\,1}}$ c) $\dfrac{C_{40,\,30}}{C_{10,\,5}}$ d) $\dfrac{C_{4,\,3}}{C_{10,\,6}}$

a) $$\frac{C_{6,2}}{C_{5,2}} = \frac{\dfrac{6!}{2!\cdot 4!}}{\dfrac{5!}{2!\cdot 3!}} = \frac{6!\cdot 2!\cdot 3!}{2!\cdot 4!\cdot 5!} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

b) $$\frac{C_{6,2}}{C_{5,2}} + \frac{C_{4,2}}{C_{3,2}} + \frac{C_{5,2}}{C_{4,2}} + \frac{C_{6,2}}{C_{5,1}} = \frac{\dfrac{6!}{2!\cdot 4!}}{\dfrac{5!}{2!\cdot 3!}} + \frac{\dfrac{4!}{2!\cdot 2!}}{\dfrac{3!}{2!\cdot 1!}} + \frac{\dfrac{5!}{2!\cdot 3!}}{\dfrac{4!}{2!\cdot 2!}} + \frac{\dfrac{6!}{2!\cdot 4!}}{\dfrac{5!}{1!\cdot 4!}} =$$
$$= \frac{6}{4} + \frac{4}{2} + \frac{5}{3} + \frac{6}{2} = \frac{80}{6} = \frac{49}{6}$$

c) $$\frac{C_{40,30}}{C_{10,5}} = \frac{\dfrac{40!}{30!\cdot 10!}}{\dfrac{10!}{5!\cdot 5!}} = \frac{40!\cdot 5!\cdot 5!}{30!\cdot 10!\cdot 10!} = \frac{211.915.132}{63}$$

d) $$\frac{C_{4,3}}{C_{10,6}} = \frac{\dfrac{4!}{3!\cdot 1!}}{\dfrac{10!}{6!\cdot 4!}} = \frac{4!\cdot 6!\cdot 4!}{10!\cdot 3!\cdot 1!} = \frac{2}{105}$$

053 ¿De cuántas formas se pueden sentar 5 personas en un sofá de 3 plazas?

$V_{5,\,3} = \dfrac{5!}{2!} = 60$ formas de sentarse

054 Escribe todas las palabras de 3 letras, con o sin sentido, que se pueden formar con las letras de la palabra HOLA.

$V_{4,\,3} = \dfrac{4!}{1!} = 24$ palabras Ejemplo: HOL, HOA, OHL, OHA…

055 ¿Cuántas banderas tricolores se pueden formar con los 7 colores del arco iris?

$V_{7,\,3} = \dfrac{7!}{4!} = 210$ banderas

056 **Para aprobar un examen de 5 preguntas hay que contestar correctamente a 2 de ellas. ¿De cuántas formas diferentes se pueden elegir las 2 preguntas?**

$$C_{5,\,2} = \frac{5!}{2! \cdot 3!} = 10 \text{ formas}$$

057 **Un artesano hace pulseras con 3 hilos de diferentes colores. Si tiene hilo de 12 colores, ¿cuántos tipos de pulsera distintos puede hacer?**

$$V_{12,\,3} = \frac{12!}{9!} = 1.320 \text{ tipos de pulseras}$$

058 **Un entrenador de fútbol quiere presentar una alineación con 4 defensas, 3 centrocampistas y 3 delanteros.**

¿Cuántas posibilidades tiene de hacerlo si dispone de 3 porteros, 7 defensas, 6 centrocampistas y 7 delanteros, y cada jugador solo puede jugar en su línea correspondiente?

Para elegir al portero tendrá: $C_{3,\,1} = 3$ posibilidades

Para elegir a los 4 defensas tendrá: $C_{7,\,4} = \dfrac{7!}{4! \cdot 3!} = 35$ posibilidades

Para elegir a los 3 centrocampistas tendrá: $C_{6,\,3} = \dfrac{6!}{3! \cdot 3!} = 20$ posibilidades

Para elegir a los 3 delanteros tendrá: $C_{7,\,3} = \dfrac{7!}{3! \cdot 4!} = 35$ posibilidades

Aplicando el método del producto, el número total de posibilidades es: $3 \cdot 35 \cdot 20 \cdot 35 = 73.500$.

059 **¿Cuántos números de 4 cifras pueden formarse con los dígitos 0, 2, 3, 4, 5, 8 y 9? ¿Y cuántos números de 5 cifras?**

Considerando que los dígitos no se pueden repetir, y teniendo en cuenta que los números que comienzan por 0 no se consideran de 4 cifras, resulta:

$$V_{7,\,4} - V_{6,\,3} = \frac{7!}{3!} - \frac{6!}{3!} = 840 - 120 = 720 \text{ números}$$

Análogamente, la cantidad de números de 5 cifras es:

$$V_{7,\,5} - V_{6,\,4} = \frac{7!}{2!} - \frac{6!}{2!} = 2.520 - 360 = 2.160 \text{ números}$$

060 ¿Cuántas tripulaciones de 6 remeros se pueden formar con un total de 12 remeros?

$$C_{12,\,6} = \frac{12!}{6! \cdot 6!} = 924 \text{ tripulaciones}$$

061 Si 5 integrantes de un equipo de baloncesto se sitúan en fila para hacer un tiro a canasta, ¿de cuántas formas distintas pueden ponerse?

$$P_5 = 5! = 120 \text{ formas}$$

062 En una clase hay 25 alumnos y se forman grupos de 5 alumnos para realizar un trabajo de Matemáticas. ¿Cuántos grupos diferentes se pueden hacer?

$$C_{25,\,5} = \frac{25!}{5! \cdot 20!} = 53.130 \text{ grupos}$$

063 ¿Cuántos productos distintos se pueden formar con los dígitos 1, 2, 3, 4, 5 y 7, de forma que cada producto conste de 3 factores?

Puesto que el orden de los factores no altera el producto, el número de productos de 3 factores que se puede formar es: $C_{6,\,3} = \dfrac{6!}{3! \cdot 3!} = 20$

064 **HAZLO ASÍ**

¿CÓMO SE CALCULA EL NÚMERO DE POSIBILIDADES QUE CUMPLEN UNA PROPIEDAD?

Con las cifras 3, 5, 8 y 9, ¿cuántos números distintos de 3 cifras se pueden formar que sean mayores que 600?

PRIMERO. Se examinan los resultados que cumplen la condición.

Si el número de 3 cifras que formemos tiene que ser mayor que 600, tendría que empezar por 8 o por 9. Los números buscados serán de la forma:

$8ab \rightarrow$ a y b pueden ser: 3, 5 o 9

$9ab \rightarrow$ a y b pueden ser: 3, 5 u 8

SEGUNDO. Se calculan las posibilidades.

En ambos casos influye el orden y no hay repeticiones, por lo que son variaciones. También en ambos casos hay 3 elementos que se agrupan de 2 en 2.

$$V_{3,\,2} = \frac{3!}{(3-2)!} = \frac{3!}{1!} = 6$$

Así, habrá 6 números que empiecen por 8 y otros 6 números que empiecen por 9. Hay 12 números mayores que 600.

065 **Considera los dígitos 1, 2, 4, 6, 8 y 0.**

a) ¿Cuántos números de 3 cifras se pueden formar?

b) ¿Cuántos de estos números empiezan por 2? ¿Y por 3?

a) Un número de 3 cifras deberá empezar por 1, 2, 4, 6 u 8. Las otras dos cifras pueden ser cualquier número, incluido el 0: $5VR_{6,2} = 5 \cdot 6^2 = 180$. Se pueden formar 180 números.

b) Números que empiecen por 2: $VR_{6,2} = 6^2 = 36$. Se pueden formar 36 números.
Números que empiecen por 3: $VR_{6,2} = 6^2 = 36$. Se pueden formar 36 números.

066 **Con las letras de la palabra PERMUTACIÓN, ¿cuántas palabras pueden formarse que comiencen por PE? ¿Y que terminen en ON?**

Palabras que empiecen por PE: $P_9 = 9! = 362.880$ palabras

Palabras que terminen en ON: $P_9 = 9! = 362.880$ palabras

067 **Con los dígitos 1, 2, 3, 4 y 5, ¿cuántos números de 5 cifras se pueden hacer que sean múltiplos de 5?**

Consideramos que los dígitos no se puede repetir.

Son múltiplos de 5 los números que acaben en 5: $P_4 = 4! = 24$ números

068 **Con las cifras 0, 2, 4, 6 y 8, ¿cuántos números de 2 cifras se pueden formar? ¿Y cuántos son múltiplos de 3?**

Consideramos que los dígitos no se repiten.

$$V_{5,2} - V_{4,1} = \frac{5!}{3!} - \frac{4!}{3!} = 20 - 4 = 16 \text{ números}$$

Son múltiplos de 3: 24, 42, 48, 60 y 84.

069 **Con las cifras 1, 2, 3 y 5:**

a) ¿Cuántos números pares de 2 cifras se pueden formar?

b) ¿Y cuántos números pares de 3 cifras?

c) ¿Cuántos múltiplos de 5 con 3 cifras se pueden formar?

Consideramos que los dígitos no se pueden repetir.

a) Son pares los números terminados en 2: $V_{3,1} = 3$ números

b) $V_{3,2} = \dfrac{3!}{1!} = 6$ números

c) Son múltiplos de 5 los números terminados en 5: $V_{3,2} = \dfrac{3!}{1!} = 6$ números

070 **¿En cuántos puntos se cortan 7 rectas de manera que no haya 2 rectas que sean paralelas, ni más de 2 rectas que se corten en un punto?**

Dado que todas las rectas se han de cortar dos a dos, el número de puntos de corte distintos es: $C_{7,2} = \dfrac{7!}{2! \cdot 5!} = 21$

071 ¿En cuántos puntos se cortan, como máximo, las diagonales de un octógono?

El número de diagonales de un octógono es el número de rectas que unen dos de sus vértices, a las que hay que restar las rectas formadas por dos vértices consecutivos (lados):

$$C_{8,\,2} - 8 = \frac{8!}{2! \cdot 6!} - 8 = 20$$

El máximo número de puntos de corte es el número de vértices más los posibles cortes de las diagonales, dos a dos. Hay que considerar que las diagonales que salen de un mismo vértice solo se cortan en ese vértice; por tanto, debemos restarle el número de puntos de corte de las diagonales:

$$8 + C_{20,\,2} - 8 \cdot C_{5,\,2} = 110$$

072 ¿En cuántos puntos se cortan, como máximo, las diagonales de un pentágono?

El número de diagonales de un pentágono es: $C_{5,\,2} - 5 = \dfrac{5!}{2! \cdot 3!} - 5 = 5$

Puntos de corte: $5 + C_{5,\,2} - 5 \cdot C_{2,\,2} = 10$

073 ¿En cuántos puntos se cortan, como máximo, las diagonales de un hexágono?

El número de diagonales de un hexágono es: $C_{6,\,2} - 6 = \dfrac{5!}{2! \cdot 3!} - 6 = 15$

Puntos de corte: $6 + C_{15,\,2} - 6 \cdot C_{3,\,2} = 93$

074 Con las letras de la palabra ESTERNOCLEIDOMASTOIDEO, ¿cuántas palabras se pueden formar de 6 letras?

a) Si se pueden repetir. **b) Si no se pueden repetir.**

a) $VR_{12,\,6} = 12^6 = 2.985.984$ palabras

b) $V_{12,\,6} = \dfrac{12!}{6!} = 665.280$ palabras

075 ¿De cuántas formas se pueden alinear 5 signos + y 9 signos −, de manera que no puedan situarse 2 signos − seguidos?

No es posible alinearlos de ninguna manera, ya que al haber más signos − que signos +, siempre quedarán dos signos − seguidos.

076 Calcula cuántas palabras, con o sin sentido, se pueden formar con 3 letras de tu nombre, si:

a) Se pueden repetir. **b) No se pueden repetir.**

Dependerá de la cantidad de letras que tenga el nombre; por ejemplo, si tiene n letras:

a) $VR_{n,\,3} = n^3$ b) $V_{n,\,3} = \dfrac{n!}{(n-3)!}$

077 **La escala musical se compone de 7 notas: do, re, mi, fa, sol, la y si. Si se ordenan de grave a agudo, ¿cuántas melodías diferentes podemos hacer con 150 notas?**

No influye el orden, puesto que las notas siempre se ordenan de grave a agudo.
Son combinaciones con repetición de 7 elementos, tomados de 150 en 150, y su fórmula es:

$$CR_n^m = C_{n+m-1}^m = \frac{156!}{150! \cdot 6!} = 18.161.699.556$$

078 **En código Morse se escribe cada letra del alfabeto mediante series de puntos (.) y rayas (–):**

A se escribe utilizando 2 símbolos → . –

B se escribe utilizando 4 símbolos → – . . .

¿Cuántas series diferentes hay si utilizamos como máximo 4 símbolos?

Como las series pueden constar de 1, 2, 3 o 4 símbolos, el número de series diferentes es: $VR_{2,1} + VR_{2,2} + VR_{2,3} + VR_{2,4} = 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 = 30$

079 **Calcula el número de pulseras diferentes de 20 bolas de colores que podemos elaborar si tenemos bolas de 5 colores.**

Considerando que la disposición de las bolas da lugar a collares diferentes, el número de collares distintos es: $VR_{5,20} = 5^{20} \simeq 9{,}54 \cdot 10^{13}$

080 **Un alumno tiene 8 asignaturas en un curso. La nota de cada asignatura puede ser suspenso, aprobado, notable o sobresaliente. ¿Cuántos boletines de notas distintos puede obtener?**

$VR_{4,8} = 4^8 = 65.536$ boletines de notas

081 **Un grupo de 12 personas quiere hacer una excursión en coche. Si en cada coche viajan 5 personas:**

a) ¿Cuántos grupos diferentes se pueden formar?

b) ¿En cuántos de estos grupos estarán Carlos y María, que son dos de las 12 personas que van a la excursión?

a) Puesto que el orden de elección de los integrantes de un grupo no es influyente en el grupo, el número de grupos de 5 personas distintos que se podrán formar, es: $C_{12,5} = \frac{12!}{5! \cdot 7!} = 792$

b) María y Carlos estarán en: $C_{10,3} = \frac{10!}{3! \cdot 7!} = 120$ grupos diferentes

082 **Utilizando solamente números enteros positivos, ¿cuántas sumas distintas dan como resultado 5? Dos posibles sumas serían:**

$$\mathbf{2 + 2 + 1 = 5} \qquad\qquad \mathbf{2 + 3 = 5}$$

Suponiendo que no importa el orden en la suma:

$1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 5$ $\quad 1 + 1 + 1 + 2 = 5$ $\quad 1 + 1 + 3 = 5$

$1 + 2 + 2 = 5$ $\quad 1 + 4 = 5$ $\quad 2 + 3 = 5$

Hay 6 sumas que dan como resultado 5.

083 **¿Cuántos números capicúas de 6 cifras hay?**

Los números capicúas de 6 cifras son de la forma *abccba*, con $a \neq 0$.

$VR_{9,1} \cdot VR_{10,2} = 9 \cdot 100 = 900$. Existen 900 números capicúas de 6 cifras.

084 **Tres amigos han encontrado 8 piedras idénticas. ¿De cuántas maneras pueden repartirlas si cada amigo se lleva al menos una piedra?**

Cada amigo tendrá entre 1 y 6 piedras, pudiendo estar repartidas de la siguiente manera.

1, 1, 6	2, 1, 5	3, 1, 4	4, 1, 3	5, 1, 2	6, 1, 1
1, 2, 5	2, 2, 4	3, 2, 3	4, 2, 2	5, 2, 1	
1, 3, 4	2, 3, 3	3, 3, 2	4, 3, 1		
1, 4, 3	2, 4, 2	4, 3, 1			
1, 5, 2	2, 5, 1				
1, 6, 1					

Se pueden repartir de 21 maneras diferentes.

085 **Entre 8 estudiantes y 6 profesores tenemos que elegir un comité de 6 personas que contenga, al menos, 3 estudiantes y 2 profesores. ¿De cuántas formas podemos elegirlo?**

El comité estará constituido por 3 estudiantes y 3 profesores, o por 4 estudiantes y 2 profesores.

$$C_{8,3} \cdot C_{6,3} + C_{8,4} \cdot C_{6,2} = \binom{8}{3} \cdot \binom{6}{3} + \binom{8}{4} \cdot \binom{6}{2} = 56 \cdot 20 + 70 \cdot 15 = 2.170$$

Se puede formar de 2.170 maneras diferentes.

086 **Con las letras de la palabra NADIE podemos formar palabras de 5 letras utilizando todas sus letras sin repetirlas. Si ordenamos esas palabras alfabéticamente, ¿qué lugar ocupará la palabra NADIE?**

Las palabras que empiezan por A, D, E, I son: $4 \cdot P_4 = 48$

La palabra NADIE ocupará el lugar 49, por orden alfabético.

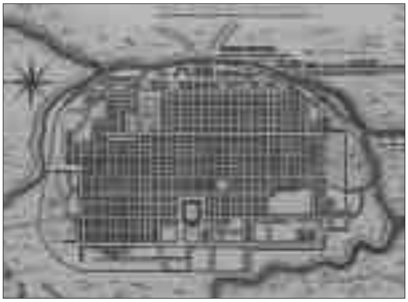
087 ●● **Con las letras de PERMUTACIÓN formamos palabras, con o sin sentido. ¿En cuántas de ellas aparecen las 5 vocales juntas y ordenadas?**

La secuencia AEIOU puede comenzar entre la primera y la séptima posiciones. El resto de letras pueden estar en cualquiera de las posiciones restantes.

$7 \cdot P_6 = 5.040$. Aparecen en 5.040 palabras.

EN LA VIDA COTIDIANA

088 ●● **Desde que los romanos usaron la cuadrícula para organizar sus campamentos, muchas civilizaciones copiaron esta idea para planificar sus ciudades. Actualmente podemos ver este diseño en ciudades de todo el mundo.**



Estas calles perpendiculares que forman manzanas facilitan enormemente la ubicación.

Javier trabaja en una empresa de mensajería y acaban de trasladarlo de oficina. Hoy tiene que llevar un pedido hasta una farmacia.

Su jefe le entrega este plano de la zona.

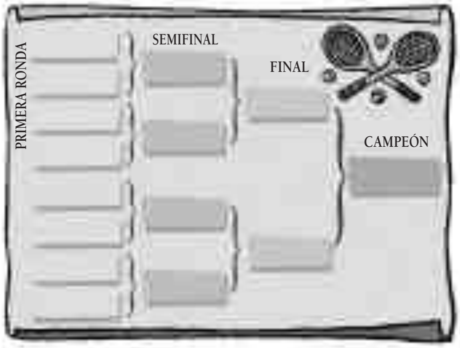
¿Cuántos caminos distintos puede hacer?

En el recorrido tendrá que adoptar 7 decisiones de tomar rumbo norte o este, donde 3 decisiones serán de tomar rumbo norte y 4 decisiones serán de tomar rumbo este, por lo que si decide en qué momento de las 7 decisiones se elige tomar rumbo norte está determinado el camino.

Como $C_{7,4} = \binom{7}{4} = 35$, hay 35 caminos distintos.

089 ●●

Al comenzar un torneo de tenis, en el polideportivo donde se van a jugar los partidos publican este organigrama.



Dentro de cada casilla se escriben los nombres de los participantes. Las llaves representan los partidos y el tenista que pierda quedará eliminado.

La organización del torneo tiene que decidir qué sucede si el número de jugadores es impar.

a) ¿Cuántos partidos habrá que disputar en un torneo en el que hay 32 jugadores inscritos?

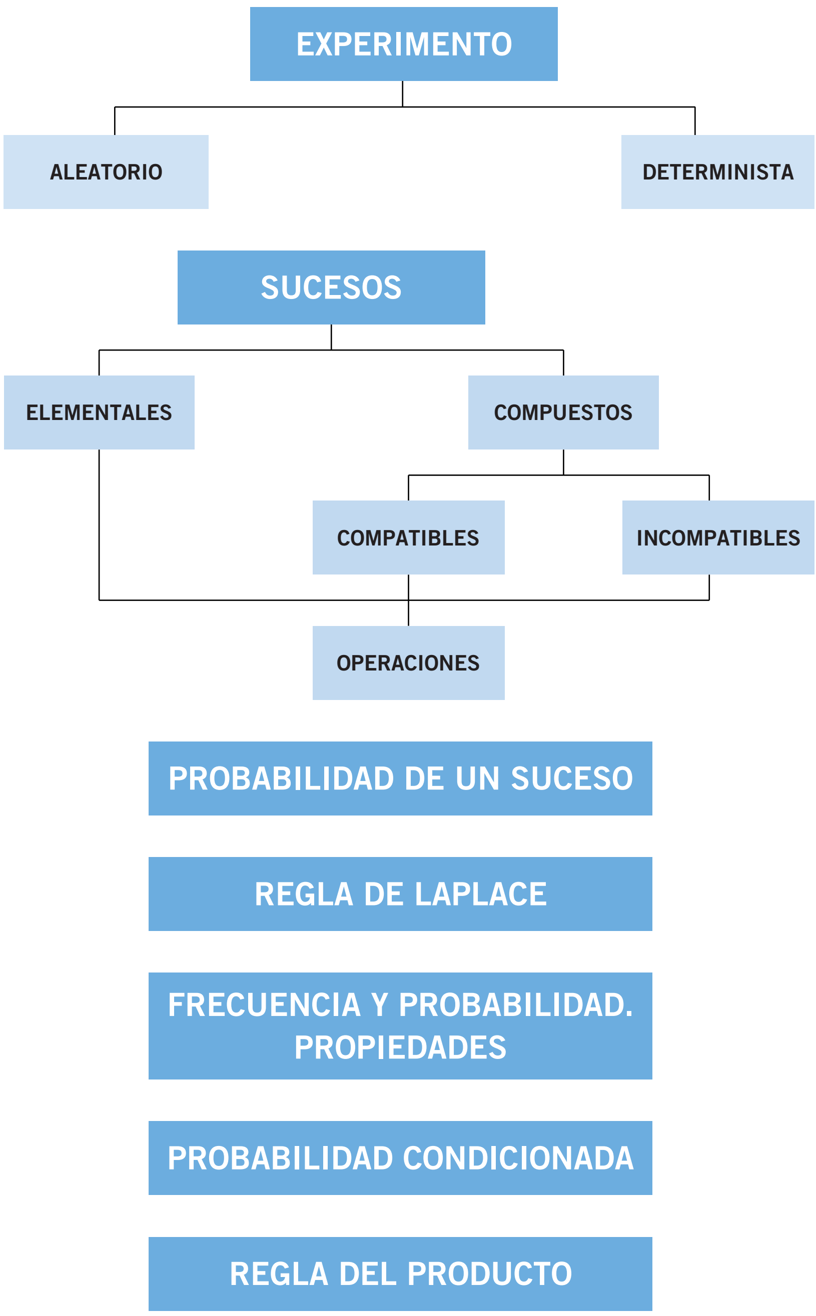
b) ¿Y si se inscriben 209 jugadores?

a) Se jugarán 16 partidos de dieciseisavos de final, 8 de octavos, 4 de cuartos, 2 de semifinal y 1 final; en total, 31 partidos.

b) Si hubiera 256 participantes, los partidos serían 255, pero como el cuadro no está completo, $256 - 209 = 47$ jugadores pasarán directamente a la segunda fase, y de la primera fase se jugarán 81 partidos, en vez de los 128 partidos que se habrían jugado de estar completo el cuadro.

Por tanto, habrá: $255 - 47 = 208$ partidos.

14 Probabilidad



Requiescant in pace

El horizonte devoraba el día a la misma velocidad con la que crecían las sombras producidas por las cruces y los ángeles de piedra, hasta que, con el último mordisco, día y sombras desaparecieron dando paso a la noche.

El encargado del cementerio, Hans, acostumbrado al silencio del lugar, se sobresaltó al oír unas pisadas que parecían venir de todos los lados. Aumentaban su intensidad como si estuvieran a su espalda y, al volverse, el sonido se difuminaba como si viniera desde muy lejos.

–¡Odio este trabajo! –maldijo.

De repente una sombra pasó a su izquierda dejándolo paralizado. A duras penas logró reunir el valor suficiente para esconderse tras una lápida y observar la escena.

La sombra era un hombre embozado, que se agachó sobre una de las tumbas y, tras murmurar unas palabras, que Hans no alcanzó entender, se alejó dejando sobre el mármol un libro.

Cuando Hans recuperó la movilidad, con precaución se acercó a la tumba y, sin atreverse a tocarlo, leyó en el libro: *Ars Conjectandi*, por Jakob Bernoulli.

Creyendo que eran cosas de espíritus, corrió hacia la salida jurándose a sí mismo no contarle jamás a nadie lo ocurrido.

El *Ars Conjectandi* es un tratado de probabilidad escrito por Jakob Bernoulli y publicado por su sobrino Nikolaus cinco años después de su muerte.

¿Entre qué valores puede estar la probabilidad de un suceso?

La probabilidad de un suceso* A *toma valores siempre entre 0 y 1.

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

Probabilidad

EJERCICIOS

001 **Di cuáles de los siguientes experimentos son aleatorios y cuáles son deterministas.**

a) Pesar 1 dm^3 de agua.

b) Medir el lado de un cuadrado de 2 cm^2.

c) Preguntar un número de 2 cifras.

d) Lanzar un dado y anotar la puntuación.

e) Elegir un jersey del armario.

a) Determinista.

b) Determinista.

c) Aleatorio.

d) Aleatorio.

e) Determinista.

002 **Define los sucesos elementales, el espacio muestral y dos sucesos no elementales al extraer una carta de la baraja española.**

El espacio muestral tiene 40 sucesos elementales, que serían cada una de las cartas de la baraja.

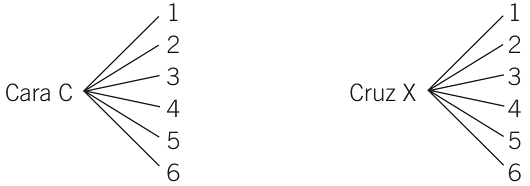
Sucesos elementales: {as de copas}, {2 de copas}…

Sucesos no elementales: {salir una figura}, {salir espadas}.

003 **En el experimento de elegir un número al azar y anotar su resto al dividir entre 3, pon un ejemplo de suceso que no sea el conjunto vacío.**

Suceso: que el resto sea 1.

004 **Lanzamos una moneda y un dado. Calcula el espacio muestral mediante un diagrama de árbol.**



El espacio muestral es: $E = \{C1, C2, C3, C4, C5, C6, X1, X2, X3, X4, X5, X6\}$.

005 **Se extrae una carta de la baraja española. Indica cómo son los siguientes sucesos.**

a) *A* = «Sacar oros» y *B* = «Sacar copas»

b) *A* = «Sacar bastos» y *B* = «Sacar un as»

a) Incompatibles. b) Compatibles.

006 **Tenemos una bolsa con 8 bolas numeradas del 1 al 8. Extraemos una bola, y si tiene un número impar, extraemos otra sin reemplazar la primera. Si el número es par, extraemos dos bolas sin reemplazar la que ya hemos sacado.**

a) Determina el espacio muestral.

b) Pon un ejemplo de dos sucesos compatibles.

c) Escribe dos sucesos incompatibles.

a) Espacio muestral: {2, 4, 6, 8, 13, 15, 17, 1234, 1235, 1236, 1237, 1238, 1245, 1246, 1247, 1248, 1256, 1257, 1258, 1267, 1268, 1278, 1423, 1425, 1426, 1527, 1428, 1435, 1436, 1437, 1438, 1456, 1457, 1458, 1467, 1468, 1478, 1623, 1624, 1625, 1627, 1628, 1634, 1635, 1637, 1638, 1645, 1647, 1648, 1657, 1658, 1678, 1823, 1824, 1825, 1826, 1827, 1834, 1835, 1836, 1837, 1845, 1846, 1847, 1856, 1857, 1867, 3214, 3215, 3216, 3217, 3218, 3245, 3246, 3247, 3248, 3256, 3257, 3258, 3267, 3268, 3278, 3423, 3425, 3426, 3527, 3428, 3415, 3416, 3417, 3418, 3456, 3457, 3458, 3467, 3468, 3478, 3621, 3624, 3625, 3627, 3628, 3614, 3615, 3617, 3618, 3645, 3647, 3648, 3657, 3658, 3678, 3821, 3824, 3825, 3826, 3827, 3814, 3815, 3816, 3817, 3845, 3846, 3847, 3856, 3857, 3867, 5234, 5231, 5236, 5237, 5238, 5241, 5246, 5247, 5248, 5216, 5217, 5218, 5267, 5268, 5278, 5423, 5421, 5426, 5127, 5428, 5431, 5436, 5437, 5438, 5416, 5417, 5418, 5467, 5468, 5478, 5623, 5624, 5621, 5627, 5628, 5634, 5631, 5637, 5638, 5641, 5647, 5648, 5617, 5618, 5678, 5823, 5824, 5821, 5826, 5827, 5834, 5831, 5836, 5837, 5841, 5846, 5847, 5816, 5817, 5867, 7234, 7235, 7236, 7231, 7238, 7245, 7246, 7241, 7248, 7256, 7251, 7258, 7261, 7268, 7218, 7423, 7425, 7426, 7521, 7428, 7435, 7436, 7431, 7438, 7456, 7451, 7458, 7461, 7468, 7418, 7623, 7624, 7625, 7621, 7628, 7634, 7635, 7631, 7638, 7645, 7641, 7648, 7651, 7658, 7618, 7823, 7824, 7825, 7826, 7821, 7834, 7835, 7836, 7831, 7845, 7846, 7841, 7856, 7851, 7861}

b) Sacar impar, sacar cuatro bolas.

c) Sacar par, sacar impar.

007 **En el experimento aleatorio que consiste en lanzar un dado con sus caras numeradas del 1 al 8, expresa en forma de uniones e intersecciones los siguientes sucesos.**

a) «Salir número par y no primo»

b) «Salir número impar o primo»

c) «Salir número primo o par»

A = «Salir par» C = «Salir no primo»

B = «Salir primo» D = «Salir impar»

a) $A \cap C$ b) $D \cup B$ c) $B \cup A$

008 **En la extracción de una bola de una bolsa que contiene 10 bolas numeradas del 1 al 10, consideramos los sucesos A = «Número par» y B = «Múltiplo de 3». Calcula.**

a) $A \cup B$ **b)** $A \cap B$

a) $A \cup B$ = «Salir par o múltiplo de 3» = {2, 3, 4, 6, 8, 9, 10}

b) $A \cap B$ = «Salir par y múltiplo de 3» = {6}

009 **Dados un experimento aleatorio y un suceso A, halla:**

a) $A \cup A$ **b)** $A \cap A$

a) $A \cup A = A$ b) $A \cap A = A$

010 **En el experimento de sacar una carta de la baraja española, consideramos los sucesos A = «Sacar una figura» y B = «Sacar oros». Obtén los sucesos.**

a) $A \cup B$ **b)** $A \cap B$ **c)** $\overline{A}$ **d)** $\overline{B}$

a) $A \cup B$ = {sacar figura u oros}

b) $A \cap B$ = {sacar figura de oros}

c) $\overline{A}$ = {no sacar figura}

d) $\overline{B}$ = {no sacar oros}

011 **Tomamos una pieza de fruta de un frutero donde hay manzanas, fresas, plátanos y peras. Calcula los contrarios de los siguientes sucesos.**

a) «Que sea manzana o pera»

b) «Que no sea plátano»

c) «Que crezca en árboles»

a) {fresa, plátano} b) {plátano} c) {fresa}

012 **En una caja hay 8 bolas numeradas del 1 al 8. Escribe el suceso contrario, uno compatible y otro incompatible de estos sucesos.**

a) A = **«Sacar número menor que 4»**

b) B = **«Sacar número impar»**

		Suceso contrario	Suceso compatible	Suceso incompatible
a)	A = {número $<$ 4}	{número $\geq$ 4}	{número $>$ 2}	{número $>$ 5}
b)	B = {número impar}	{número par}	{número múltiplo de 3}	{número múltiplo de 4}

013 **Con los datos del ejercicio anterior, calcula estos sucesos.**

a) $\overline{\overline{A}}$ **c)** $\overline{A \cup B}$ **e)** $\overline{A} \cap B$ **g)** $\overline{A} \cap \overline{B}$

b) $\overline{A \cap B}$ **d)** $\overline{A} \cup B$ **f)** $A \cup \overline{B}$ **h)** $A \cap \overline{B}$

a) {1, 2, 3}

b) {2, 4, 5, 6, 7, 8}

c) {4, 6, 8}

d) {1, 3, 4, 5, 6, 7, 8}

e) {5, 7}

f) {1, 2, 3, 4, 6, 8}

g) {4, 6, 8}

h) {2}

014 **Si en una bolsa tenemos 4 bolas de diferentes colores: rojo, blanco, verde y amarillo, calcula la probabilidad de:**

a) «Sacar bola marrón»
b) «Sacar bola de algún color»
c) «Sacar bola verde»

a) $P(\text{bola marrón}) = 0 \rightarrow$ Suceso imposible

b) $P(\text{bola de color}) = \frac{4}{4} = 1 \rightarrow$ Suceso seguro

c) $P(\text{bola verde}) = \frac{1}{4}$

015 **Halla las probabilidades de estos sucesos.**

a) «Salir cara al lanzar una moneda»
b) «Obtener un 5 cuando juegas al parchís»
c) «Sacar un 2 en un dado con forma de tetraedro y caras numeradas del 1 al 4»

a) $P(\text{sacar cara}) = \frac{1}{2} = 0{,}5$

b) $P(\text{sacar 5}) = \frac{1}{6}$

c) $P(\text{sacar 2 en un tetraedro}) = \frac{1}{4} = 0{,}25$

016 **De los siguientes experimentos, escribe cuáles son sus sucesos elementales.**

a) «Lanzar un dado»
b) «Lanzar una moneda»
c) «Observar cómo cae una chincheta, con la punta hacia arriba o hacia abajo»
d) «Contestar al azar una pregunta con 4 posibles respuestas»
e) «Extraer una bola de una bolsa que tiene 2 bolas rojas y 3 azules»
f) «Lanzar un dado de 8 caras y una moneda»
¿Qué probabilidad le asignarías a cada uno de los sucesos?

a) El espacio muestral tiene 6 sucesos elementales: $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

La probabilidad de cada suceso elemental es $P(i) = \frac{1}{6}$, para $i = 1, 2, \dots, 6$.

b) El espacio muestral tiene 2 sucesos elementales: $E = \{\text{cara, cruz}\}$.

La probabilidad de cada suceso elemental es $P(\text{cruz}) = P(\text{cara}) = \frac{1}{2}$.

c) El espacio muestral tiene 2 sucesos elementales:
$E = \{\text{punta hacia arriba, punta hacia abajo}\}$.

La probabilidad de cada suceso elemental es solo cuantificable de modo experimental.

d) El espacio muestral tiene 4 sucesos elementales: $E = \{a, b, c, d\}$.

La probabilidad de cada suceso elemental es:

$P(a) = P(b) = P(c) = P(d) = \frac{1}{4}$.

e) El espacio muestral tiene 2 sucesos elementales:
$E = \{$sacar bola roja, sacar bola azul$\}$.

$P(\text{roja}) = \frac{2}{5}$; $P(\text{azul}) = \frac{3}{5}$

f) El espacio muestral tiene 16 sucesos elementales:
$E = \{C1, C2, C3, C4, C5, C6, C7, C8, X1, X2, X3, X4, X5, X6, X7, X8\}$.

La probabilidad de cada suceso elemental es $P(A) = \frac{1}{16}$.

017 **En una bolsa hay 5 bolas rojas, 10 verdes y 5 azules, y se extrae una bola. Calcula la probabilidad de los sucesos.**

a) «Sacar bola roja» **b) «Sacar bola verde»** **c) «Sacar bola azul»**

a) $P(\text{roja}) = \frac{5}{20} = \frac{1}{4}$

b) $P(\text{verde}) = \frac{10}{20} = \frac{1}{2}$

c) $P(\text{azul}) = \frac{5}{20} = \frac{1}{4}$

018 **En un aula hay 17 chicos y 19 chicas. Se elige una persona al azar. Determina la probabilidad de estos sucesos.**

a) «Ser un chico» **b) «Ser una chica»**

a) $P(\text{chico}) = \frac{17}{36}$ b) $P(\text{chica}) = \frac{19}{36}$

019 **Se lanza un dado de 6 caras. Calcula la probabilidad de estos sucesos.**

a) A = «Salir número par»

b) B = «Salir número múltiplo de 3»

c) C = «Salir número menor que 4»

a) $P(A) = \frac{3}{6} = 0{,}5$ b) $P(B) = \frac{2}{6} = 0{,}33$ c) $P(C) = \frac{3}{6} = 0{,}5$

020 **En un dado se suprime la cara 6 y se añade otra cara 1. ¿Cuál es el espacio muestral? ¿Son los sucesos elementales equiprobables? ¿Puedes calcular su probabilidad?**

$E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

Los sucesos no son equiprobables: $P(1) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ y $P(i) = \frac{1}{6}$ para $i = 2, 3, 4$ y 5.

021 **Se ha lanzado una moneda 75 veces obteniéndose 43 caras. ¿Cuál es la frecuencia relativa del suceso «Salir cruz»?**

a) $\frac{32}{75}$ **b)** 32 **c)** $\frac{32}{100}$ **d)** 0,32

La frecuencia relativa del suceso «Salir cruz» es la opción a) $\frac{32}{75}$.

022 **Una máquina hace arandelas para tornillos. Explica cómo calcularías la probabilidad de que, escogida una de las arandelas al azar, sea defectuosa.**

Se toma una muestra grande de arandelas. Calculamos la frecuencia relativa (h_i) de arandelas defectuosas.

La probabilidad de que, escogida una arandela al azar, sea defectuosa será el dato calculado.

023 **En una bolsa hay bolas numeradas del 1 al 5. Se repite 5.000 veces el experimento de extraer una bola, se anota el resultado y, después, se devuelve a la bolsa. Las frecuencias obtenidas son:**

Bola	1	2	3	4	5
f_i	1.200	800	700	1.300	1.000

Calcula la probabilidad de que, al sacar una bola, se obtenga un múltiplo de 2.

$$P(\text{sacar múltiplo de 2}) = \frac{800}{5.000} + \frac{1.300}{5.000} = \frac{21}{50} = 0,42$$

024 **Una urna contiene 4 bolas blancas, 1 roja y 5 negras. Se considera el experimento de sacar una bola al azar. Calcula las probabilidades de estos sucesos.**

a) ***A*** **= «Sacar bola blanca»**
b) ***B*** **= «Sacar bola roja»**
c) ***C*** **= «Sacar bola que no sea negra»**
d) ***D*** **= «Sacar bola que no sea roja»**
e) ***E*** **= «Sacar bola verde»**
f) ***F*** **= «Sacar bola blanca o negra»**
g) ***G*** **= «Sacar bola roja o negra»**

a) $P(A) = \frac{4}{10} = 0,4$

b) $P(B) = \frac{1}{10} = 0,1$

c) $P(C) = P(A \cup B) = 0,4 + 0,1 = 0,5$

d) $P(\overline{B}) = 1 - P(B) = 1 - 0,1 = 0,9$

e) $P(E) = 0$, porque no hay bolas verdes.

f) $P(F) = \frac{9}{10} = 0,9$

g) $P(G) = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$

025 **Se lanzan dos dados y se suman los puntos obtenidos. Halla la probabilidad de que la suma:**

a) Sea 3. **b) No sea 7.** **c) Sea inferior a 11.** **d) Sea 4 o 5.**

a) Casos favorables: {1-2, 2-1}

Casos posibles: 36

$$P(\text{sea } 3) = \frac{2}{36} = 0{,}056$$

b) Casos favorables para que la suma sea 7: {1-6, 2-5, 3-4, 4-3, 5-2, 6-1}

$$P(\text{no sea } 7) = 1 - P(7) = 1 - \frac{6}{36} = 0{,}83$$

c) Casos favorables para que la suma sea mayor o igual que 11: {5-6, 6-6, 6-5}

$$P(\text{sea inferior a } 11) = 1 - P(\text{mayor o igual que } 11) = 1 - \frac{3}{36} = 0{,}9167$$

d) Casos favorables: {1-3, 1-4, 2-2, 2-3, 3-1, 3-2, 4-1}

$$P(\text{sea salir 4 o 5}) = \frac{7}{36} = 0{,}194$$

026 **Si dos sucesos, *A* y *B*, verifican que la suma de sus probabilidades es igual a 1, son:**

a) Compatibles **b) Contrarios** **c) Incompatibles** **d) No se puede saber**

d) No se puede saber

027 **En una caja de bombones hay 5 bombones de chocolate blanco y 15 de chocolate negro. Si 2 bombones de chocolate blanco y 10 de chocolate negro tienen relleno de licor, y escogemos un bombón al azar, calcula la probabilidad de los sucesos.**

a) «Sea de chocolate negro y esté relleno»

b) «No tenga relleno o sea de chocolate blanco»

c) «Sea de chocolate blanco, sabiendo que es relleno»

d) «Sea relleno, sabiendo que es de chocolate negro»

B = «Chocolate blanco» N = «Chocolate negro» R = «Relleno»

a) $P(N \cap R) = \dfrac{10}{20} = 0{,}5$

b) $P(\overline{R} \cup B) = P(\overline{R}) + P(B) - P(\overline{R} \cap B) = \dfrac{8}{20} + \dfrac{5}{20} - \dfrac{3}{20} = \dfrac{10}{20} = 0{,}5$

c) $P(B/R) = \dfrac{\text{n.º de bombones blancos rellenos}}{\text{n.º de bombones rellenos}} = \dfrac{2}{12} = 0{,}167$

d) $P(N/R) = \dfrac{\text{n.º de bombones negros rellenos}}{\text{n.º de bombones negros}} = \dfrac{10}{15} = 0{,}67$

028 **En una urna tenemos 2 bolas blancas y 2 azules. Si la primera bola que extraemos no se vuelve a introducir en la urna (sin reemplazamiento), calcula la probabilidad de obtener una bola azul y, después, una bola blanca.**

Ilustramos el problema con un diagrama de árbol.

Blanca → Blanca / Azul

Azul → Blanca / Azul

En la 1.ª extracción tenemos 4 bolas y en la 2.ª extracción tenemos solo 3 bolas, por lo que de antemano no conocemos la probabilidad.

P(extraer 1.º bola azul y 2.º bola blanca) =

$$= P(A_1 \cap B_2) = P(A_1) \cdot P(B_2/A_1) = \frac{2}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

029 **Si el experimento anterior fuera con reemplazamiento, halla la probabilidad de obtener una bola azul y, después, una bola blanca.**

Ilustramos el problema con un diagrama de árbol.

Blanca → Blanca / Azul

Azul → Blanca / Azul

En este caso, los sucesos elementales tienen la misma probabilidad, y son independientes.

P(extraer 1.º azul y 2.º blanca) $= P(A_1 \cap B_2) = P(A_1) \cdot P(B_2) = \frac{1}{4} = 0{,}25$

030 **Al extraer una bola de la urna y anotar el color, se devuelve a la urna. Calcula la probabilidad de que, al extraer dos bolas, sean rojas.**

En la urna hay 2 bola rojas y 3 azules.

Llamamos R_i = {sacar bola roja en la i-ésima extracción}.

$$P(R_1 \cap R_2) = P(R_1) \cdot P(R_2) = \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} = 0{,}6$$

031 **En el ejercicio anterior, ¿son los sucesos dependientes o independientes?**

Son sucesos independientes, porque se devuelve la bola.

032 **Propón un experimento, y busca un ejemplo de sucesos independientes y otro de sucesos incompatibles.**

Respuesta abierta.

ACTIVIDADES

033 ● **Escribe dos experimentos aleatorios y otros dos que no lo sean. Justifica tu respuesta.**

Respuesta abierta.

Sucesos aleatorios $\longrightarrow$ Lanzar un dado, tirar una moneda, etc.

Sucesos deterministas $\rightarrow$ Medir la longitud de una circunferencia de radio *r*, calcular el volumen de un cubo de arista 3 cm, etc.

034 ● **Indica si los siguientes experimentos son deterministas o aleatorios.**

a) Medir la longitud de una clase.

b) Extraer una carta de la baraja.

c) Dejar caer una piedra al vacío y medir la aceleración.

d) Pesar una botella de agua de 1 litro.

e) Lanzar una moneda y observar el resultado.

a) Determinista.
b) Aleatorio.
c) Determinista.
d) Determinista.
e) Aleatorio.

035 ● **Describe el espacio muestral del experimento aleatorio que consiste en lanzar 2 dados y anotar la resta de los números de las caras superiores.**

(–)	1	2	3	4	5	6
1	0	1	2	3	4	5
2	1	0	1	2	3	4
3	2	1	0	1	2	3
4	3	2	1	0	1	2
5	4	3	2	1	0	1
6	5	4	3	2	1	0

Restamos siempre al mayor número el menor: $E = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.

036 ●● **En una urna tenemos 8 bolas rojas, 4 amarillas y 1 verde. Si extraemos una bola al azar y anotamos su color, ¿cuál es el espacio muestral?**

$E = \{$bola roja, bola amarilla, bola verde$\}$

037 ●● **Jaime lanza 2 dados y, después, suma la puntuación obtenida. Describe el espacio muestral de este experimento. Haz lo mismo si, tras sumar los puntos, hallamos el resto al dividir entre 3.**

(+)	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

$E = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$

El resto al dividir entre 3 es 0, 1 o 2, luego el espacio muestral es:
$E = \{0, 1, 2\}$.

038 **Se lanza un dado con 12 caras numeradas del 1 al 12, y se consideran los sucesos:**

A **= «Salir número par»**
B **= «Salir número impar»**
C **= «Salir múltiplo de 3»**
D **= «Salir múltiplo de 5»**
F **= «Salir número mayor que 5»**
G **= «Salir número menor que 4»**

a) Escribe estos sucesos.
b) Señala los pares de sucesos que son incompatibles.
c) ¿Hay tres sucesos que sean incompatibles?

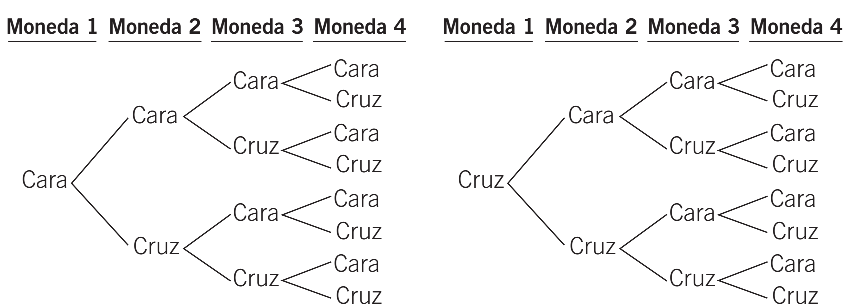
a) $A = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$ $\quad D = \{5, 10\}$
$B = \{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$ $\quad E = \{6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$
$C = \{3, 6, 9, 12\}$ $\quad F = \{1, 2, 3\}$

b) *A-B*, *C-D*, *D-F*, *E-F*

c) No los hay.

039 **Considera el lanzamiento de 4 monedas. Describe el espacio muestral utilizando un diagrama de árbol y escribe los sucesos elementales de los siguientes sucesos.**

A **= «Obtener al menos una cara»** ***B*** **= «Obtener una sola cara»**



$A = \{$CCCC, CCCX, CCXC, CXCC, CXCX, CXXC, CXXX, XCCC, XCCX, XCXC,XCXX, XXCC, XXCX, XXXC$\}$

$B = \{$CXXX, XCXX, XXCX, XXXC$\}$

040 Con los datos de la actividad anterior, calcula.

a) $A \cup B$ **b)** $A \cap B$ **c)** $\overline{A}$ **d)** $\overline{B}$

a) $A \cup B = A$, porque el suceso B está contenido en el suceso A.

b) $A \cap B = B$

c) $\overline{A}$ = «Obtener 0 caras» = {XXXX}

d) $\overline{B}$ = «Obtener 0, 2, 3 o 4 caras» =
= {CCCC, CCCX, CCXC, CXCC, CXCX, CXXC, XCCC, XCCX, XCXC, XXCC, XXXX}

041 Consideramos las 28 fichas del dominó. Si cogemos una ficha y sumamos los puntos, calcula.

a) A = «Obtener múltiplo de 5»

b) B = «Obtener número par»

c) $A \cup B$, $A \cap B$, $\overline{A}$ y $\overline{B}$

d) $A \cup \overline{A}$ y $B \cap \overline{B}$

(+)	0	1	2	3	4	5	6
0	0	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6	7
2	2	3	4	5	6	7	8
3	3	4	5	6	7	8	9
4	4	5	6	7	8	9	10
5	5	6	7	8	9	10	11
6	6	7	8	9	10	11	12

$E = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$

a) $A = \{5, 10\}$

b) $B = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$

c) $A \cup B = \{2, 4, 5, 6, 8, 10, 12\}$ $A \cap B = \{10\}$
$\overline{A} = \{0, 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 11, 12\}$ $\overline{B} = \{0, 1, 3, 5, 7, 9, 11\}$

d) $A \cup \overline{A} = E$ $\overline{B} \cap B = \varnothing$

042 Extraemos 2 cartas de una baraja española. Un suceso imposible es:

a) «Sacar 2 cartas de oros»

b) «Sacar 2 cartas del mismo palo»

c) «Sacar 2 cartas de distinto palo»

d) «Sacar 2 figuras iguales del mismo palo»

Un suceso imposible es d) «Sacar 2 figuras iguales del mismo palo».

043 Ordena, de menor a mayor grado de probabilidad, los siguientes sucesos al lanzar un dado de 6 caras.

a) «Salir número impar»
b) «Salir número igual o mayor que 5»
c) «Salir número menor que 7»
d) «Salir número mayor que 7»

$P(D) < P(B) < P(A) < P(C)$

044 De una baraja española se extrae una carta. Calcula la probabilidad de estos sucesos.

a) A = «Obtener oros»
b) B = «Obtener el rey de oros»
c) C = «Obtener espadas o copas»

a) $P(A) = \frac{10}{40} = 0{,}25$ b) $P(B) = \frac{1}{40} = 0{,}025$ c) $P(C) = \frac{20}{40} = 0{,}5$

045 Se lanza un dado al aire y se suman los puntos de todas las caras menos la cara de arriba. Obtén el espacio muestral y la probabilidad de obtener un número que sea múltiplo de 3.

$E = \{15, 16, 17, 18, 19, 20\}$

$P(\text{obtener múltiplo de 3}) = \frac{2}{6} = 0{,}33$

046 **HAZLO ASÍ**

¿CÓMO SE CALCULA LA PROBABILIDAD DE ALGUNOS SUCESOS NO EQUIPROBABLES?

En un dado trucado, la probabilidad de salir 5 es el triple que la de salir cualquiera de los otros números. ¿Qué probabilidad hay de que al tirar el dado salga 2?

PRIMERO. La suma de todas las probabilidades de los sucesos elementales es 1. Si se llama x a la probabilidad de que salga 1, 2, 3, 4 o 6, la probabilidad de que salga 5 será $3x$.

$$P(1) = x \qquad P(3) = x \qquad P(5) = 3x$$
$$P(2) = x \qquad P(4) = x \qquad P(6) = x$$
$$P(1) + P(2) + P(3) + P(4) + P(5) + P(6) = 1$$
$$x + x + x + x + 3x + x = 1$$

SEGUNDO. Se resuelve la ecuación resultante.

$$x + x + x + x + 3x + x = 1 \rightarrow 8x = 1 \rightarrow x = 0{,}125$$

La probabilidad de que salga 2 es 0,125.

047 **Si en un dado tenemos que:**

$\boldsymbol{P(1) = P(2) = P(3) = \frac{1}{7}}$ **y** $\boldsymbol{P(4) = P(5) = P(6) = x}$**,**

¿cuál es el valor de $\boldsymbol{x}$**?**

$$P(E) = P(1) + P(2) + P(3) + P(4) + P(5) + P(6) =$$
$$= \frac{1}{7} + \frac{1}{7} + \frac{1}{7} + x + x + x \rightarrow 1 = \frac{3}{7} + 3x$$

Resolviendo la ecuación, se obtiene que: $x = \frac{4}{21}$.

048 **Se ha trucado un dado de 6 caras, de modo que las caras que son números primos tienen doble probabilidad de salir que las que no lo son.**

¿Cuál es la probabilidad de cada una de las caras? ¿Y la probabilidad de obtener un número par?

Llamamos $x = P(1) = P(4) = P(6)$ y $2x = P(2) = P(3) = P(5)$.

Estos sucesos son incompatibles, y como $P(E) = 1$:

$$P(E) = P(1) + P(2) + P(3) + P(4) + P(5) + P(6) = 1$$
$$x + 2x + 2x + x + 2x + x = 1 \rightarrow 9x = 1 \rightarrow x = \frac{1}{9}$$

$$P(1) = P(4) = P(6) = \frac{1}{9} \qquad P(2) = P(3) = P(5) = \frac{2}{9}$$

$$P(\text{par}) = P(2) + P(4) + P(6) = \frac{2}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} = \frac{4}{9}$$

049 **En un dado trucado, la probabilidad de cada una de las 6 caras es:**

Cara	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
$\boldsymbol{P}$	**0,1**	**0,1**	**0,1**	$\boldsymbol{a}$	$\boldsymbol{b}$	**0,1**

Si $\boldsymbol{P(4) = 2 \cdot P(5)}$**, ¿cuánto valen** $\boldsymbol{a}$ **y** $\boldsymbol{b}$**?**

$$P(E) = P(1) + P(2) + P(3) + P(4) + P(5) + P(6) =$$
$$= 0{,}1 + 0{,}1 + 0{,}1 + a + b + 0{,}1 = 1$$

Además, se verifica que: $P(4) = 2 \cdot P(5) \rightarrow a = 2b$

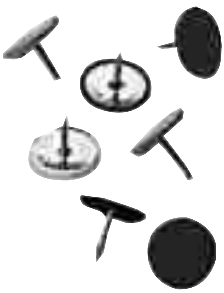
Resolviendo el sistema: $\begin{cases} a + b = 0{,}6 \\ a = 2b \end{cases}$ se obtiene que: $a = 0{,}4$ y $b = 0{,}2$.

050 **Tomando un número del 20 al 79, ¿cuál es la probabilidad de que el producto de sus cifras sea 18?**

Hay 60 casos posibles y 3 casos favorables: 29, 36 y 63.

La probabilidad es: $P(\text{el producto de las cifras del número sea 18}) = \frac{3}{60} = \frac{1}{20}$.

051 **Al lanzar una chincheta, esta puede caer con la punta hacia arriba o hacia abajo.**



a) ¿Se trata de un experimento aleatorio?

b) ¿Cuáles son los sucesos elementales?

c) ¿Son estos sucesos equiprobables?

a) Es un experimento aleatorio.

b) $E = \{\text{punta hacia arriba, punta hacia abajo}\}$

c) Los sucesos no son equiprobables.

052 **En un bombo hay 10 bolas numeradas del 0 al 9. Se repite 100 veces el experimento de extraer una bola y reemplazarla. Los resultados son:**

Bola	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
f_i	7	13	11	12	8	10	12	6	10	11

A = «Múltiplo de 3»

B = «Número impar»

C = «Divisor de 6»

Calcula.

a) La frecuencia relativa de A, B y C.

b) La frecuencia relativa de $A \cup B$, $A \cap B$, $A \cup C$ y $A \cap C$.

c) La probabilidad de cada uno de los sucesos anteriores.

a) $h_i(A) = \dfrac{12+12+11}{100} = \dfrac{35}{100} = 0{,}35$

$h_i(B) = \dfrac{13+12+10+6+11}{100} = \dfrac{52}{100} = 0{,}52$

$h_i(C) = \dfrac{13+11+12+12}{100} = \dfrac{48}{100} = 0{,}48$

b) $h_i(A \cup B) = \dfrac{12+12+11+13+10+6}{100} = \dfrac{64}{100} = 0{,}64$

$h_i(A \cap B) = \dfrac{12+11}{100} = \dfrac{23}{100} = 0{,}23$

$h_i(A \cup C) = \dfrac{12+12+11+13+11}{100} = \dfrac{59}{100} = 0{,}59$

$h_i(A \cap C) = \dfrac{12+12}{100} = \dfrac{24}{100} = 0{,}24$

c) Para cada suceso, la frecuencia relativa, hallada en los apartados anteriores, se aproxima al valor de la probabilidad.

053 Se lanza 100 veces un dado tetraédrico y se anota el número de la cara oculta.

Cara	1	2	3	4
f_i	28	22	30	20

Halla la frecuencia relativa de los sucesos.

a) «Múltiplo de 3»

b) «Múltiplo de 2»

c) «Número mayor que 1»

d) «Número menor que 1»

a) $h_i\,(\text{múltiplo de } 3) = \frac{30}{100} = 0{,}3$

b) $h_i\,(\text{múltiplo de } 2) = \frac{22 + 20}{100} = \frac{42}{100} = 0{,}42$

c) $h_i\,(\text{cara mayor que } 1) = \frac{22 + 30 + 20}{100} = \frac{72}{100} = 0{,}72$

d) $h_i\,(\text{cara menor que } 1) = 0$

054 **Se extrae al azar una carta de una baraja española. Halla la probabilidad de estos sucesos.**

a) «Obtener un caballo»

b) «No obtener una figura»

c) «Obtener el rey de oros o de espadas»

d) «No obtener oros ni bastos»

e) «Obtener una figura que no sea de copas»

a) $P = \frac{4}{40} = 0{,}1$

b) $P = \frac{28}{40} = 0{,}7$

c) $P = \frac{2}{40} = 0{,}05$

d) $P = \frac{20}{40} = 0{,}5$

e) $P = \frac{9}{40} = 0{,}225$

055 **En una urna hay 100 bolas numeradas del 1 al 100. Sacamos una bola y definimos los siguientes sucesos.**

A = «n es múltiplo de 5»
B = «n es múltiplo de 3»
C = «n es divisible por 2»
D = «n es divisible por 10»
F = «n es divisible por 1»
G = «n es múltiplo de 11»

a) ¿Cuántos sucesos elementales componen cada suceso? ¿Cuál es su probabilidad?

b) ¿Hay dos sucesos incompatibles?

c) ¿Y dos sucesos compatibles?

d) ¿Hay dos sucesos contrarios?

e) Halla la probabilidad de $A \cap B$, $B \cup C$ y D.

a) $A = \{5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, 55, 60, 65, 70, 75, 80, 85, 90, 95, 100\}$

$$P(A) = \frac{20}{100} = 0{,}2$$

$B = \{3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, 33, 36, 39, 42, 45, 48, 51, 54, 57, 60, 63, 66, 69, 72, 75, 78, 81, 84, 87, 90, 93, 96, 99\}$

$$P(B) = \frac{33}{100} = 0{,}33$$

$C = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26, \ldots, 100\}$

$$P(C) = \frac{50}{100} = 0{,}5$$

$D = \{10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, 100\}$

$$P(D) = \frac{10}{100} = 0{,}1$$

$F = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, \ldots, 99, 100\}$

$$P(F) = \frac{100}{100} = 1$$

$G = \{11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88, 99\}$

$$P(F) = \frac{9}{100} = 0{,}09$$

b) Los sucesos D y G son incompatibles, ya que $D \cap G = \emptyset$.

c) Los sucesos A y B son compatibles, pues $A \cap B = \{15, 30, 45, 60, 75, 90\} \neq \emptyset$.

d) No hay sucesos contrarios, porque no hay ninguna pareja de sucesor cuya intersección sea $\emptyset$ y cuya unión sea E.

e) $A \cap B = \{15, 30, 45, 60, 75, 90\} \rightarrow P(A \cap B) = \dfrac{6}{100} = 0{,}06$

$P(B \cup C) = P(B) + P(C) - P(B \cap C) = 0{,}33 + 0{,}5 - 0{,}16 = 0{,}67$

$P(D) = \dfrac{10}{100} = 0{,}1$

056 ●●● **En una urna tenemos 4 bolas rojas y 6 bolas blancas. Si extraemos 2 bolas consecutivamente, calcula la probabilidad de los sucesos.**

a) «Sacar dos bolas blancas»
b) «Sacar una bola blanca y otra roja»
c) «Sacar al menos una bola roja»
d) «No sacar ninguna bola roja»

Suponemos que la extracción es sin reemplazamiento.

$$B = \{\text{sacar bola blanca}\} \qquad R = \{\text{sacar bola roja}\}$$

a) $P(B_1 \cap B_2) = P(B_1) \cdot P(B_2/B_1) = \dfrac{6}{10} \cdot \dfrac{5}{9} = \dfrac{1}{3}$

b) $P(B_1 \cap R_2) + P(R_1 \cap B_2) = P(B_1) \cdot P(R_2/B_1) + P(R_1) \cdot P(B_2/R_1) =$

$$= \frac{6}{10} \cdot \frac{4}{9} + \frac{4}{10} \cdot \frac{6}{9} = \frac{8}{15}$$

c) $1 - P(B_1 \cap B_2) = 1 - \dfrac{1}{3} = \dfrac{2}{3}$

d) $P(B_1 \cap B_2) = \dfrac{1}{3}$

057 ●●

Se lanzan 3 monedas al aire. Obtén el espacio muestral, determina la probabilidad de cada suceso elemental y calcula las siguientes probabilidades.

a) ***P*(3 caras)**
b) ***P*(0 caras)**
c) ***P*(4 caras)**
d) ***P*(2 cruces y 1 cara)**
e) ***P*(2 caras y 1 cruz)**
f) ***P*(1 cruz)**
g) ***P*(al menos 2 caras)**
h) ***P*(a lo sumo 1 cara)**

a) $P(\text{3 caras}) = \frac{1}{8} = 0{,}125$

b) $P(\text{0 caras}) = \frac{1}{8} = 0{,}125$

c) $P(\text{4 caras}) = 0$

d) $P(\text{2 cruces y 1 cara}) = \frac{3}{8} = 0{,}375$

e) $P(\text{2 caras y 1 cruz}) = \frac{3}{8} = 0{,}375$

f) $P(\text{1 cruz}) = \frac{3}{8} = 0{,}375$

g) $P(\text{al menos 2 caras}) = \frac{4}{8} = 0{,}5$

h) $P(\text{a lo sumo 1 cara}) = \frac{4}{8} = 0{,}5$

058 **HAZLO ASÍ**

¿CÓMO SE CALCULA LA PROBABILIDAD DE UN SUCESO COMPUESTO MEDIANTE TABLAS DE CONTINGENCIA?

En 4.º ESO hay 12 chicos y 28 chicas. Llevan gafas 10 chicos y 8 chicas. Elegido un alumno al azar, calcula la probabilidad de que sea chico y no lleve gafas.

PRIMERO. Se recogen los datos del problema en una tabla de contingencia o de doble entrada.

	Chico	Chica	Total
Con gafas	10	8	
Sin gafas			
Total	12	28	

SEGUNDO. Se completa la tabla.

	Chico	Chica	Total
Con gafas	10	8	18
Sin gafas	2	20	22
Total	12	28	40

TERCERO. Se extraen los datos necesarios de la tabla para calcular la probabilidad pedida.

$$P(\text{chico sin gafas}) = \frac{\text{n.º de chicos sin gafas}}{\text{n.º total de alumnos}} = \frac{2}{40} = 0{,}05$$

059 **En una guardería hay 10 niños y 12 niñas. Si 6 niños saben andar y 6 niñas no saben andar, calcula la probabilidad de que, elegido uno de ellos al azar, sea niño y no sepa andar.**

$A =$ «Ser niño»
$B =$ «Ser niña»
$C =$ «Saber andar»

$$P(A \cap \overline{C}) = \frac{\text{n.º de niños que no saben andar}}{\text{n.º total de niños}} = \frac{4}{22} = 0{,}18$$

060 **Sabemos que en una clase hay 20 niños y 16 niñas. La mitad de los niños y tres cuartas partes de las niñas tienen el pelo moreno y el resto lo tiene rubio. ¿Cuál es la probabilidad de que, elegido un alumno, sea niño con el pelo rubio? ¿Y de que sea rubio, sin importar el sexo?**

$A =$ «Ser niño» $\qquad C =$ «Tener el pelo moreno»
$B =$ «Ser niña» $\qquad D =$ «Tener el pelo rubio»

$$P(A \cap D) = P(A) \cdot P(D/A) = \frac{20}{36} \cdot \frac{1}{2} = \frac{20}{72} = \frac{5}{18}$$

$$P(D) = P(A \cap D) + P(B \cap D) = \frac{10}{36} + \frac{4}{36} = \frac{14}{36} = \frac{7}{18}$$

061 **A una comida asisten 28 hombres y 32 mujeres. Han elegido carne 16 hombres y 20 mujeres, tomando pescado el resto. Si elegimos una persona al azar, calcula la probabilidad de los siguientes sucesos.**

a) ¿Qué probabilidad hay de que sea hombre?
b) ¿Cuál es la probabilidad de que haya tomado pescado?
c) ¿Y la probabilidad de que sea hombre y haya tomado pescado?
d) ¿Cuál es la probabilidad de que tome carne y pescado?

$A =$ «Ser hombre» $\qquad C =$ «Comer carne»
$B =$ «Ser mujer» $\qquad D =$ «Comer pescado»

a) $P(A) = \dfrac{28}{60} = \dfrac{7}{15}$

b) Como hay 12 hombres y 12 mujeres que han comido pescado:

$$P(D) = \frac{24}{60} = \frac{2}{5} = 0{,}4$$

c) $P(A \cap D) = P(A) \cdot P(D/A) = \dfrac{7}{15} \cdot \dfrac{12}{28} = \dfrac{1}{5} = 0{,}2$

d) $P(C \cap D) = 0$, porque los sucesos son contrarios.

062 ●●●

Luis y Juan tienen que recoger la habitación que comparten. Luis pone en una bolsa 3 bolas rojas, 2 verdes y 1 azul, y le propone a su hermano sacar una. Si es roja recoge Juan, y si es azul, recogerá él.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que salga bola roja? ¿Y de que salga bola azul?

b) ¿Es justo lo que propone Luis?

c) Juan no acepta el trato y propone que si sale roja recoge él, y si sale azul o verde recoge Luis. ¿Es justo este trato? ¿Por qué?

a) $P(\text{roja}) = \frac{3}{6} = 0{,}5$ $\qquad P(\text{azul}) = \frac{1}{6} = 0{,}167$

b) No es justo, porque hay más probabilidad de que salga bola roja.

c) $P(\text{verde o azul}) = P(\text{verde}) + P(\text{azul}) = \frac{2}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = 0{,}5$

El trato que propone Juan es justo, ya que ambos sucesos tienen igual probabilidad.

063 ●●

En el juego de los dados, el experimento consiste en lanzar dos dados y se gana si la suma de puntos es 11 o 7.

a) Describe el espacio muestral. **b) Calcula la probabilidad de ganar.**

(+)	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

a) El espacio muestral es:

$E = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$.

b) Casos posibles: $6 \cdot 6 = 36$

$P(\text{salir 11 o 7}) =$

$= P(\text{salir 11}) + P(\text{salir 7}) =$

$= \frac{2}{36} + \frac{6}{36} = \frac{8}{36} = \frac{2}{9}$

064 ●●

Considera el experimento que consiste en elegir al azar un número del 1 al 30. Sean los sucesos *A* = «Obtener número par menor o igual que 14», *B* = «Obtener múltiplo de 3 menor o igual que 10» y *C* = «Obtener múltiplo de 10». Describe los sucesos y calcula su probabilidad.

a) $A \cup B$ **c)** $B \cup C$ **e)** $C \cap B$

b) $A \cup C$ **d)** $A \cap B$ **f)** $A \cap C$

$A = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14\}$ $\qquad B = \{3, 6, 9\}$ $\qquad C = \{10, 20, 30\}$

a) $A \cup B = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 3, 9\} \rightarrow P(A \cup B) = \frac{9}{30} = 0{,}3$

b) $A \cup C = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 20, 30\} \rightarrow P(A \cup C) = \frac{9}{30} = 0{,}3$

c) $B \cup C = \{3, 6, 9, 10, 20, 30\} \rightarrow P(B \cup C) = \frac{6}{30} = 0{,}2$

d) $A \cap B = \{6\} \rightarrow P(A \cap B) = \frac{1}{30}$

e) $C \cap B = \emptyset \rightarrow P(C \cap B) = 0$

f) $A \cap C = \{10\} \rightarrow P(A \cap C) = \frac{1}{30}$

065 **Halla la probabilidad de los contrarios de cada uno de los sucesos anteriores.**

a) $P(\overline{A \cup B}) = 1 - 0{,}3 = 0{,}7$

b) $P(\overline{A \cup C}) = 1 - 0{,}3 = 0{,}7$

c) $P(\overline{B \cup C}) = 1 - 0{,}2 = 0{,}8$

d) $P(\overline{A \cap B}) = 1 - \frac{1}{30} = \frac{29}{30}$

e) $P(\overline{C \cap B}) = 1 - 0 = 1$

f) $P(\overline{A \cap C}) = 1 - \frac{1}{30} = \frac{29}{30}$

066 **En una clase de 4.º ESO hay 30 alumnos. Si la probabilidad de que, elegido un alumno al azar, sea una chica es 0,6; ¿cuántos chicos y chicas hay en la clase? ¿Cuál es la probabilidad de que el alumno elegido sea un chico?**

$$P(\text{ser chica}) = \frac{\text{n.º de chicas de clase}}{\text{n.º de alumnos de clase}} = 0{,}6 \rightarrow \text{Chicas: } 0{,}6 \cdot 30 = 18$$

$$P(\text{ser chico}) = \frac{12}{30} = 0{,}4$$

067 **Un examen de tipo test consta de 5 preguntas, cada una de las cuales tiene 3 posibles respuestas.**

a) Halla la probabilidad de acertar 3 preguntas si contestas al azar.

b) Determina la probabilidad de acertar al menos 2 preguntas si contestas al azar.

c) Si, para aprobar el examen, hay que contestar al menos 3 preguntas correctamente, calcula cuál es la probabilidad de aprobar y de suspender, si contestamos al azar.

Llamamos A = «Acertar una pregunta».

a) Los subgrupos de 3 preguntas que se pueden formar, son:

$$C_{5,3} = \frac{5!}{3! \cdot 2!} = 10$$

Como cada pregunta tiene una probabilidad de $\frac{1}{3}$ de ser acertada:

$P(A) = \frac{1}{3}$ y $P(\overline{A}) = \frac{2}{3}$.

$$P(\text{acertar 3 preguntas}) = C_{5,3} \cdot P(A \cap A \cap A \cap \overline{A} \cap \overline{A}) =$$
$$= \binom{5}{3} \cdot P(A) \cdot P(A) \cdot P(A) \cdot P(\overline{A}) \cdot P(\overline{A}) = \frac{5!}{3! \cdot 2!} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 = 0{,}16$$

b)
$$P(\text{acertar al menos 2 preguntas}) = P(\text{acertar 2}) + P(\text{acertar 3}) +$$
$$+ P(\text{acertar 4}) + P(\text{acertar 5}) = C_{5,2} \cdot P(A \cap A \cap \overline{A} \cap \overline{A} \cap \overline{A}) +$$
$$+ C_{5,3} \cdot P(A \cap A \cap A \cap \overline{A} \cap \overline{A}) + C_{5,4} \cdot P(A \cap A \cap A \cap A \cap \overline{A}) +$$
$$+ C_{5,5} \cdot P(A \cap A \cap A \cap A \cap A) = \binom{5}{2} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3 +$$
$$+ \binom{5}{3} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \binom{5}{4} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^4 \cdot \left(\frac{2}{3}\right) + \binom{5}{5} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^5 = \frac{131}{243} = 0{,}54$$

c)
$$P(\text{aprobar}) = P(\text{acertar 3}) + P(\text{acertar 4}) + P(\text{acertar 5}) =$$
$$= P(\text{acertar al menos 2}) - P(\text{acertar 2}) = \frac{131}{243} - \frac{80}{243} = \frac{51}{243} = 0{,}21$$

$$P(\text{suspender}) = 1 - 0{,}21 = 0{,}79$$

068 ●●● **Paula va a una tienda de complementos 2 veces por semana, y Roberto trabaja en esa tienda 4 días cada semana. Si el viernes no acude ninguno de los dos y la tienda cierra los domingos, ¿qué probabilidad tienen de coincidir?**

Si el día fijado es viernes o domingo, la probabilidad será cero, pues en esos días ninguno de los dos va a la tienda.

En cualquier otro día, por ejemplo, el martes, sucede que:

$$P(\text{Roberto vaya el martes}) = \frac{4}{5} \text{ y } P(\text{Paula vaya el martes}) = \frac{2}{5}$$

La probabilidad de que vayan ambos es la probabilidad de la intersección, y como los dos sucesos son independientes, es el producto:

$$P(R \cap P) = P(R) \cdot P(P) = \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{5} = \frac{8}{25}$$

069 ●● **Indica un experimento donde todos los sucesos sean elementales.**

El experimento es el lanzamiento de una moneda.

Su espacio muestral está formado por dos sucesos: «Salir cara» y «Salir cruz».

En este caso, el suceso no elemental es el suceso seguro.

070 ●● **¿Cuántos sucesos relacionados con un experimento tienen probabilidad 1? ¿Y cuántos sucesos tienen probabilidad 0?**

Tienen probabilidad 1 todos los sucesos que siempre ocurren, y tienen probabilidad 0 todos los sucesos que nunca pueden ocurrir. Los primeros sucesos contienen el espacio muestral y los segundos sucesos no contienen ningún suceso elemental.

Por ejemplo, consideremos el experimento consistente en lanzar un dado y anotar la puntuación obtenida.

El suceso «Salir puntuación menor o igual que 6» es seguro, y también lo es «Obtener una puntuación menor que 8».

Por otro lado, el suceso «Obtener un número menor que 0» es imposible, y también lo es «Obtener puntuación negativa».

071 ●●● **Tengo 3 llaves que abren las 3 cerraduras de una puerta, pero no sé cuál es la llave que abre cada cerradura.**

a) ¿Cuál es la probabilidad de que acierte con la combinación a la primera oportunidad?

b) ¿Y si tuviera 3 llaves y solo 2 cerraduras? (Una de las llaves no abre ninguna cerradura.)

a) El número de casos posibles es: $P_3 = 3! = 6$

$$P(\text{acertar}) = \frac{\text{casos favorables}}{\text{casos posibles}} = \frac{1}{6}$$

b) Con dos cerraduras, el número de casos posibles es: $V_{3,2} = 6$

Luego la probabilidad de acertar a la primera es igual en ambos apartados.

072 **Partimos al azar una barra de 1 metro de longitud en 3 trozos. ¿Cuál es la probabilidad de que podamos formar un triángulo con los 3 trozos?**

Se podrá formar un triángulo cuando el lado mayor sea menor que la unión de los otros dos, o cuando el lado mayor mida menos de 0,5 m.

Como es el lado mayor, mide más de $\frac{1}{3}$ m.

A: medir menos de 0,5 m. B: medir más de $\frac{1}{3}$ m.

La probabilidad es: $P(A/B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = \dfrac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}}{\frac{2}{3}} = \dfrac{1}{4}$

073 **En una comarca, cuando un caso judicial no era fácil de resolver, se ofrecía a los procesados otra oportunidad. Se entregaban al reo 100 bolas verdes, 100 bolas rojas y dos urnas. A continuación, el reo distribuía las 200 bolas en las urnas. Después, este elegía al azar una urna y sacaba una bola de su interior. En el caso de que la bola fuera verde se salvaba.**

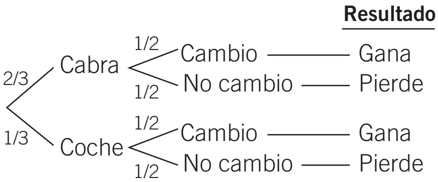
Si tú fueras el procesado, ¿cómo distribuirías las bolas para que la probabilidad de salvarte fuera la mayor posible?

La opción para que la probabilidad de salvarse sea mayor es que en una urna se ponga una bola verde, y en la otra urna, las demás bolas.

La probabilidad de sacar bola verde es:

$$P(\text{verde}) = P(\text{verde} \cap \text{urna 1}) + P(\text{verde} \cap \text{urna 2}) =$$
$$= P(\text{verde/urna 1}) \cdot P(\text{urna 1}) + P(\text{verde/urna 2}) \cdot P(\text{urna 2}) =$$
$$= 1 \cdot \frac{1}{2} + \frac{99}{199} \cdot \frac{1}{2} = \frac{149}{199}$$

074 **En un concurso televisivo, el presentador enseña al concursante tres puertas cerradas, en las cuales hay un coche y dos cabras. El concursante elige una puerta y el presentador abre una de las otras puertas y aparece una cabra. Entonces, le pregunta al concursante si quiere cambiar su respuesta. ¿Qué debería hacer el concursante?**



$$P(\text{coche/cambio}) = \frac{P(\text{coche} \cap \text{cambio})}{P(\text{cambio})} = \frac{\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$$

El concursante debería cambiar.

EN LA VIDA COTIDIANA

075 ●●●

En los periódicos ha salido publicada esta noticia.

En la noticia se cuenta que había un total de 165.432 jóvenes que entraban en el sorteo, de los cuales 16.442 jóvenes conseguirían vivienda.

Una vez numeradas todas las personas, había que elegir al azar un número y a partir de este, correlativamente, se nombrarían las 16.442 personas que obtendrían vivienda.

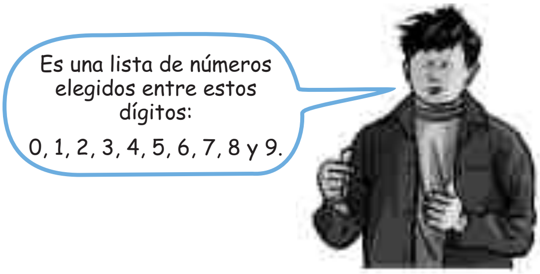
Los encargados de realizar el sorteo colocaron seis bombos. Todos ellos contenían diez bolas numeradas del 0 al 9, salvo en el caso de las centenas de millar, que estaba formado por cinco bolas con el número 0 y otras cinco bolas con el número 1.

Tras la extracción de las bolas, el número agraciado fue el número 155.611 y, a partir de él, se nombró a los elegidos llegando al final y empezando desde el principio.

¿Crees que es cierta la noticia?

Antes de asignar los números a las personas, todas tienen la misma probabilidad, pero una vez asignados tienen mayor probabilidad de salir los números mayores de 100.000, ya que en el primer bombo hay una proporción de 5 a 1 bolas 1 frente a bolas 0. Por tanto, la noticia es cierta.

076 ●●● **A Roberto se le ha ocurrido que una manera correcta de hacer sorteos, como el de la actividad anterior, puede ser utilizando una tabla de números aleatorios.**



Observa la siguiente tabla de números aleatorios, que en realidad forma parte de una tabla mayor.

91274	87624	04137	77079	54286	58762
25593	37710	46437	05553	58275	11138
10521	59667	00980	75632	58008	10060
45563	51874	90785	78923	46611	39359
98036	25351	88031	72020	13875	03171
86644	79455	49072	30694	75185	81691

Ahora solo falta decidir por dónde empezar. Para ello, podemos tirar dos dados, de los cuales el primero indicará la fila, y el segundo, la columna, y comenzamos a buscar el número.

Si saliera, por ejemplo, el número 00980 la persona que ganaría sería la que tuviera el número 980 y todas las siguientes hasta completar las 16.442 personas.

Como asegura Roberto, ¿tienen todas las personas la misma probabilidad de ser elegidas?

No tienen la misma probabilidad, ya que las personas que tengan un número menor que 998, y las personas que tengan un número mayor que: 98.036 + 16.442 = 104.447, nunca obtendrán la vivienda, y la probabilidad de que les toque la vivienda es nula.

Dirección de arte: **José Crespo**

Proyecto gráfico:
Portada: **CARRIÓ/SÁNCHEZ/LACASTA**
Interiores: **Manuel García, Rosa Barriga**
Ilustración: **Estudio Haciendo el león, Bartolomé Seguí, José María Valera**

Jefa de proyecto: **Rosa Marín**
Coordinación de ilustración: **Carlos Aguilera**
Jefe de desarrollo de proyecto: **Javier Tejeda**
Desarrollo gráfico: **José Luis García, Raúl de Andrés**

Dirección técnica: **Ángel García Encinar**

Coordinación técnica: **Félix Rotella**
Confección y montaje: **MonoComp, S. A., Luis González**

Corrección: **Marta Rubio, Gerardo Z. García**
Documentación y selección fotográfica: **Nieves Marinas**

Fotografías: C. Jiménez; C. Roca; F. de Madariaga; J. Jaime; J. M.ª Escudero; Krauel; S. Enríquez; S. Padura; X. S. Lobato; A. G. E. FOTOSTOCK; DIGITALVISION; HIGHRES PRESS STOCK/AbleStock.com; STOCKBYTE; BIBLIOTECA NACIONAL, MADRID/Laboratorio Biblioteca Nacional; BlackBerry; SERIDEC PHOTOIMAGENES CD; ARCHIVO SANTILLANA

Torrelaguna, 60. 28043 Madrid
PRINTED IN SPAIN
Impreso en España por
Huertas Industrias Gráficas, S.A.

ISBN: 978-84-294-0953-6
CP: 829522
Depósito legal: M-47255-2008