

MATEMÁTICAS

GRADO 10°

UNIDAD 1

CIRCULO UNITARIO Y FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

UNIDAD 1

CÍRCULO UNITARIO Y FUNCIONES TRIGONOMETRICAS

LOGRO: Estudiar la trigonometría a partir del círculo unitario, reconociendo la formación de las funciones trigonométricas y sus valores en los ángulos notables.

INDICADORES DE LOGRO:

- Hallar la distancia entre dos puntos determinados en el plano cartesiano.
- Reconocer la trigonometría como una rama fundamental en el estudio de las matemáticas
- Identificar parte de la historia que dio origen al concepto de trigonometría
- Reconocer el círculo unitario como la fuente originaria de las funciones trigonométricas
- Aplicar las funciones trigonométricas para la resolución de problemas que involucran triángulos rectángulos.

¿trigonome... qué?, ¿eso con que se come?



APRENDAMOS ALGO NUEVO

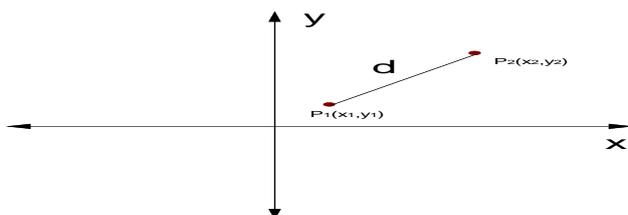
Reseña histórica Trigonometría:

Es la rama de las matemáticas que estudia las relaciones entre los lados y los ángulos de triángulos, de las propiedades y aplicaciones de las funciones trigonométricas de ángulos. Las dos ramas fundamentales de la trigonometría son la trigonometría plana, que se ocupa de figuras contenidas en un plano, y la trigonometría esférica, que se ocupa de triángulos que forman parte de la superficie de una esfera.

Las primeras aplicaciones de la trigonometría se hicieron en los campos de la navegación, la geodesia y la astronomía, en las que el principal problema era determinar una distancia inaccesible, como la distancia entre la Tierra y la Luna, o una distancia que no podía ser medida de forma directa. Otras aplicaciones de la trigonometría se pueden encontrar en la física, química y en casi todas las ramas de la ingeniería, sobre todo en el estudio de fenómenos periódicos, como el sonido o el flujo de corriente alterna.

Distancia entre dos puntos

Consideremos que existen dos puntos en el plano, y nos interesa determinar la distancia que existe entre ellos



Su distancia está determinada por medio de:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$



TRABAJEMOS EN
NUESTRO
APRENDIZAJE

ACTIVIDAD:

Encuentra la distancia que hay entre los siguientes pares de puntos.

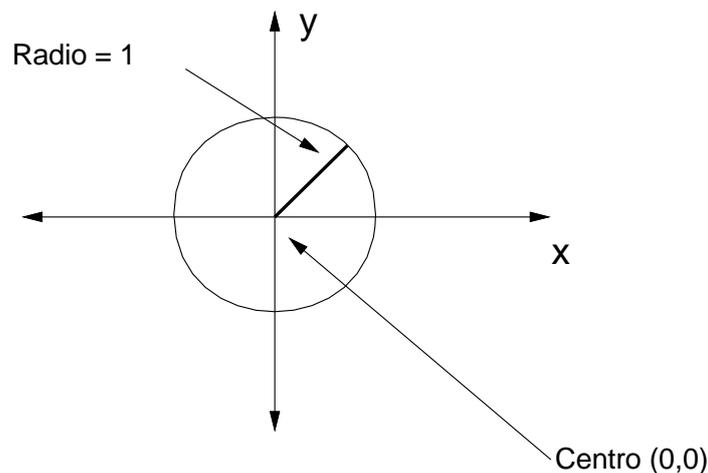
- (8,4) , (3 ,4)
- (5 ,6) , (5 ,7)
- (1,4) , (25 ,2)
- (2 ,6) , (1,5)
- (3,8) , (7 ,0)
- (1, 1) , (5 ,5)
- (2, 3) , (11, 4)
- (2 ,2) , (2 ,2)
- (4,9) , (3,7)
- (12,100) , (12,0)



APRENDAMOS ALGO NUEVO

Circunferencia unitaria

La circunferencia unitaria es el conjunto de puntos del plano que están a la misma distancia (radio) de un punto fijo llamado centro. Una circunferencia unitaria es aquella que tiene su centro en el origen y su radio es de 1 unidad.

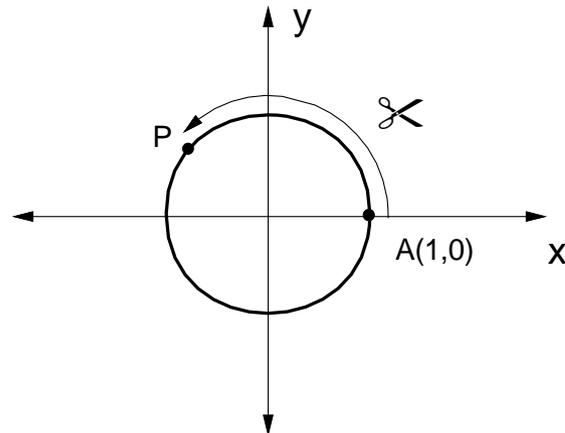


Circunferencia unitaria

Funciones circulares

Consideremos una circunferencia unitaria con centro en el origen, y un punto P que pueda desplazarse sobre la circunferencia, iniciando el

desplazamiento a partir del punto $A(1,0)$. En cada desplazamiento el punto P describe un arco de la circunferencia.



La longitud de un arco que implique un desplazamiento total a través de la circunferencia está dado por:

$$C = 2\pi r$$

En el caso de una circunferencia unitaria como el radio es de 1, se tiene que:

$$C = 2\pi$$

Definición del Seno y del Coseno

Si $P \alpha = x, y$ es un punto de la circunferencia unitaria, entonces tenemos que:

El coseno se define como el valor de x del punto $P \alpha$, el cual se puede apreciar que variará de -1 a 1

El seno se define como el valor de y del punto $P \alpha$, el cual se puede apreciar que variará de -1 a 1

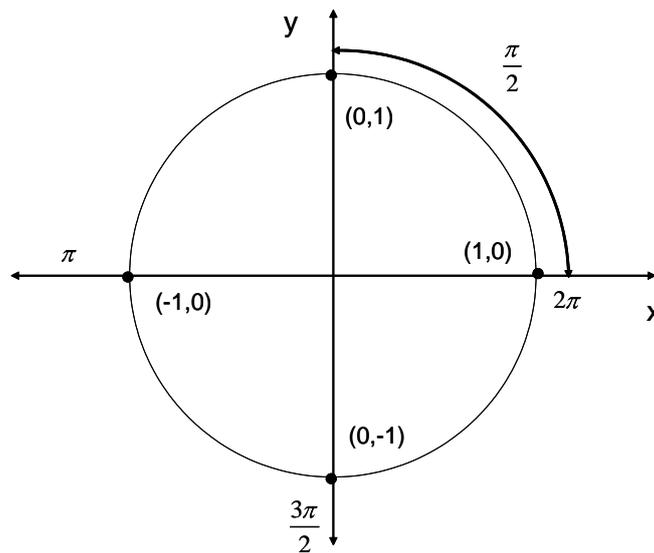
Definición de la Tangente

La tangente se define como:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{cos}\alpha} = \frac{Y}{X}$$

Funciones para, 0, 90, 180, 270 y 360°.

Consideremos la siguiente figura.



Con base en la figura anterior, llenar la siguiente tabla.

a	P(X,Y)	Cos(a) (X)	Sen(a) (Y)
0			
$\frac{\pi}{2}$			
π			

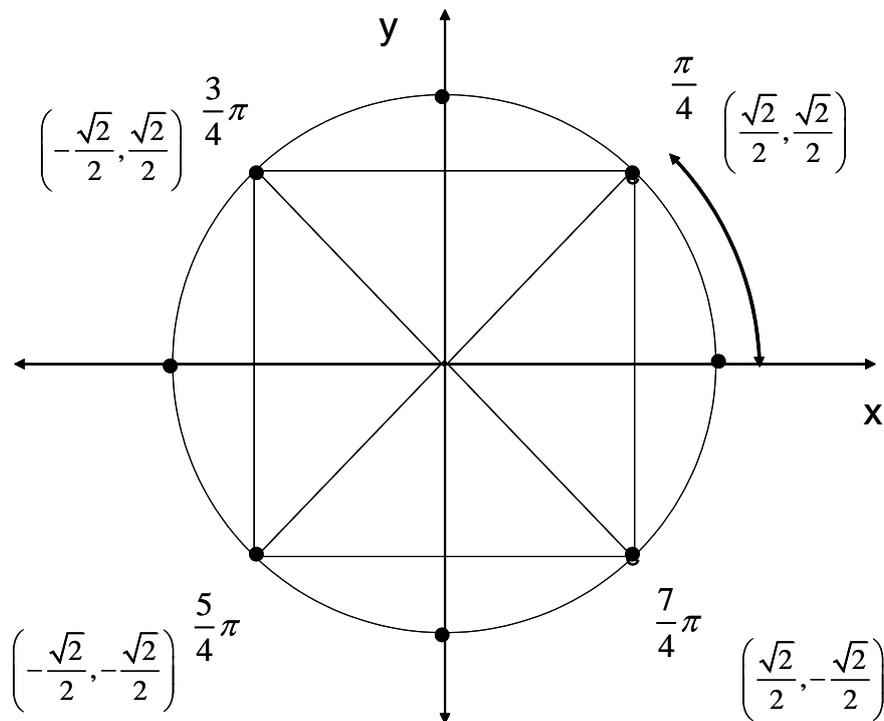
$\frac{3\pi}{2}$			
2π			



APRENDAMOS ALGO NUEVO

Funciones para, 45, 135, 225 y 315°.

Consideremos la siguiente figura:



Consideremos el triángulo POA que se muestra en la figura anterior. De este triángulo se aprecia que los lados AP y OA son iguales en tanto que el lado OP (hipotenusa) tiene una longitud unitaria. De aquí se puede plantear lo siguiente:

$$AP = l$$

$$OA = l$$

$$OP = 1$$

Por el teorema de Pitágoras se puede plantear que:

$$l^2 + l^2 = 1^2$$

Despejando el valor de l se tiene que:

$$l = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Se tiene entonces que la coordenada del punto P es: $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$



TRABAJEMOS EN
 NUESTRO
 APRENDIZAJE

ACTIVIDAD: Con base en la simetría que existe, determinar los valores de las funciones seno y coseno para los ángulos de 45°, 135°, 225° y 315°.

Ángulo	en	Ángulo	en	P(x,y)	Seno(a)	Coseno(a)
--------	----	--------	----	--------	---------	-----------

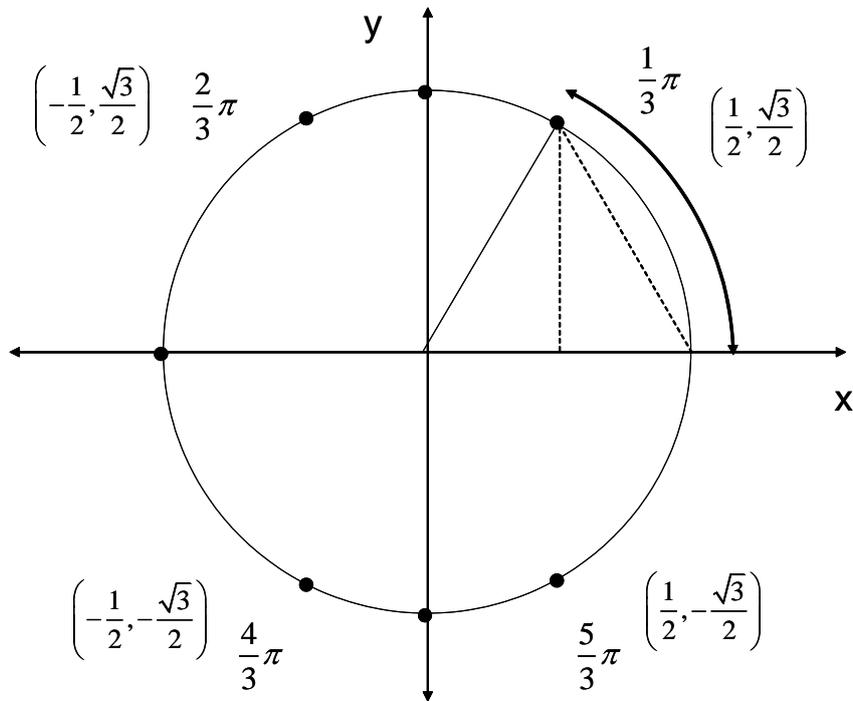
grados	radianes			
45	$\frac{1}{4}\pi$			
135	$\frac{3}{4}\pi$			
225	$\frac{5}{4}\pi$			
315	$\frac{7}{4}\pi$			



APRENDAMOS ALGO NUEVO

Funciones para, 60, 120, 240, 300°.

Consideremos la siguiente figura:





TRABAJEMOS EN
NUESTRO
APRENDIZAJE

ACTIVIDAD: llenar el siguiente cuadro basándose en la información de la figura anterior

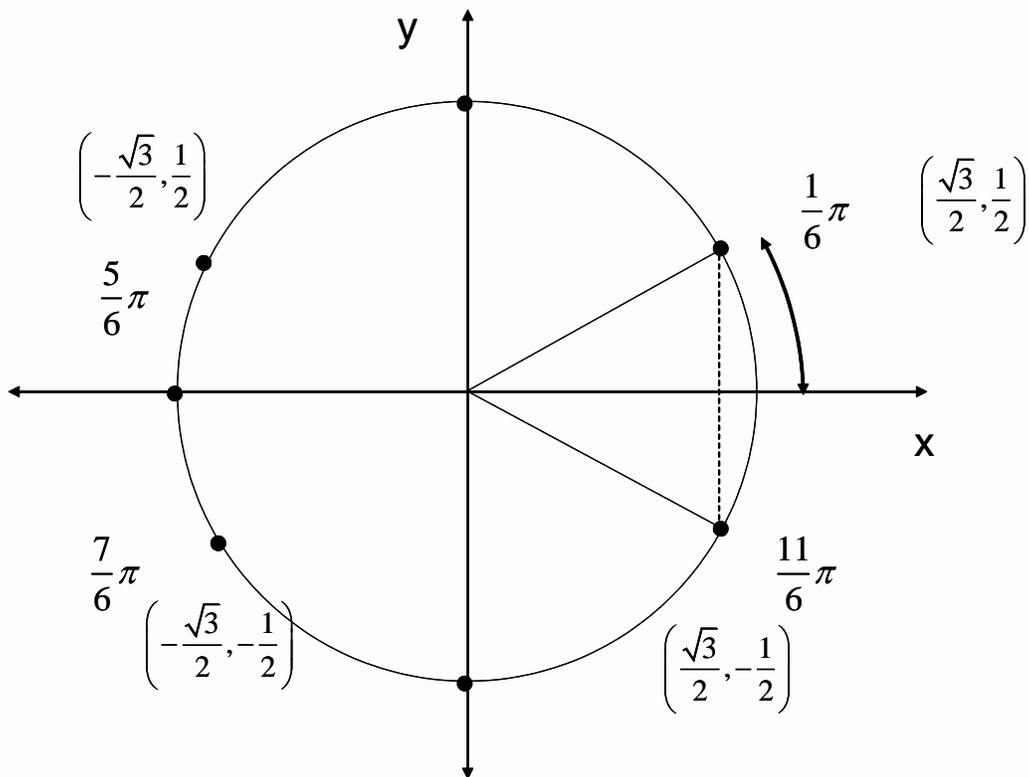
Ángulo en grados	Ángulo en radianes	P(x,y)	Seno(α)	Coseno(α)
60	$\frac{1}{3}\pi$			
120	$\frac{2}{3}\pi$			
240	$\frac{4}{3}\pi$			
300	$\frac{5}{3}\pi$			



**APRENDAMOS ALGO
NUEVO**

Funciones para, 30, 150, 210 y 330°.

Consideremos la siguiente figura:



TRABAJEMOS EN
 NUESTRO
 APRENDIZAJE

ACTIVIDAD: Llenar la siguiente tabla

Ángulo en grados	Ángulo en radianes	P(x,y)	Seno(α)	Coseno(α)
30				
150				
210				
330				



APRENDAMOS ALGO NUEVO

Definiciones de las seis funciones trigonométricas

Función	Valor
Seno	y
Coseno	x
Tangente	$\frac{y}{x} = \frac{\text{sen } \alpha}{\text{cos } \alpha}$

Cotangente	$\frac{x}{y} = \frac{\cos \alpha}{\text{sen } \alpha} = \frac{1}{\tan \alpha}$
Secante	$\frac{1}{x} = \frac{1}{\cos \alpha}$
Cosecante	$\frac{1}{y} = \frac{1}{\text{sen } \alpha}$



TRABAJEMOS EN
NUESTRO
APRENDIZAJE

ACTIVIDAD: Calcular las funciones tangente, cotangente, secante y cosecante para los ángulos múltiplos de 90° , (0, 90, 180, 270 y 360).

Ángulo	P(x, y)	Sen(a)	Coseno(a)	Tangente(a)	Cotangente(a)	Secante(a)	Cosecante(a)
0							
90							
180							
270							
360							

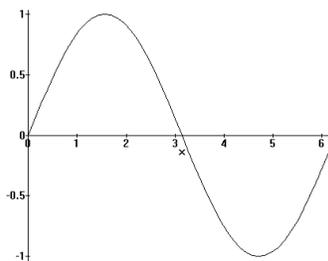


APRENDAMOS ALGO NUEVO

Gráfica de las funciones Trigonométricas

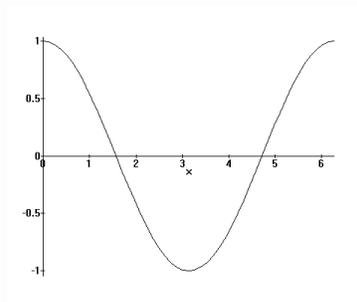
Gráfica de la función seno

Si consideramos la función $f(x) = \text{sen } x$, y después procedemos a darle valores a x desde 0 hasta 2π , tendríamos el siguiente resultado:

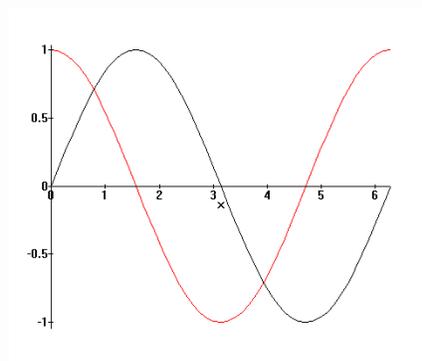


Gráfica de la función coseno

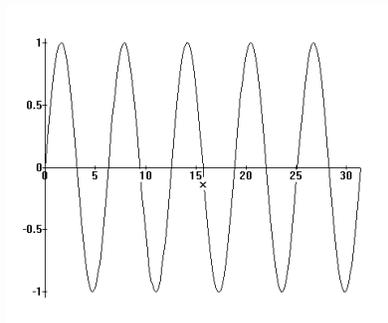
Si consideramos ahora a la función $f(x) = \text{cos } x$, y después procedemos a darle valores a x desde 0 hasta 2π , tendríamos el siguiente resultado:



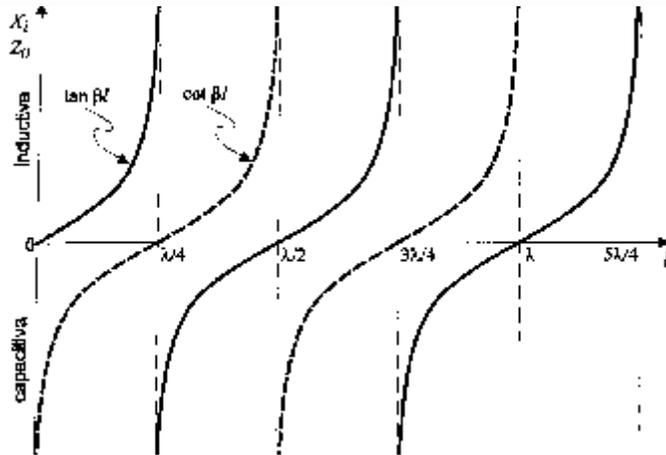
Sobreponiendo ambas gráficas se puede ver:



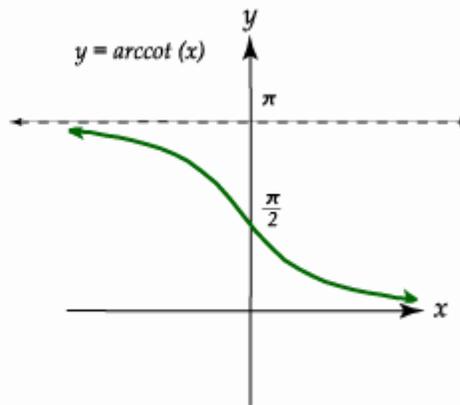
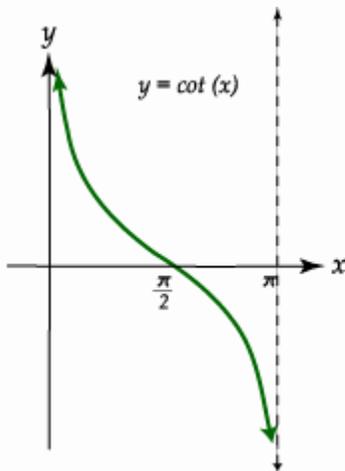
Debido a que las funciones son periódicas, se puede ver que si se graficara desde 0 hasta $10n$ se tendría:



gráfica de la función tangente



Gráfica de la función cotangente





**RECOLECTEMOS
LO APRENDIDO**

- Hallar la distancia entre los siguientes pares de puntos

Calcular el punto medio y distancia de los siguientes pares ordenados:

1. $P_1 (3,0)$ y $P_2 (5,0)$

2. $P_1 (1,8)$ y $P_2 (2,0)$

3. $P_1 (5,2)$ y $P_2 (5,4)$

4. $P_1 (5,4)$ y $P_2 (2,0)$

5. $P_1 (3,0)$ y $P_2 (5,2)$

- Calcular las funciones tangente, cotangente, secante y cosecante para los ángulos múltiplos de 45° , ($45, 135, 225$ y 315).

Ángulo	$P(x,y)$	Sen(a)	Coseno(a)	Tangente(a)	Cotangente(a)	Secante(a)	Cosecante(a)
45	$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$						

135	$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$						
225	$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$						
315	$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$						

Calcular las funciones tangente, cotangente, secante y cosecante para los ángulos múltiplos de 60° , (60, 120, 240 y 300).

Ángulo	P(x,y)	Sen(a)	Coseno(a)	Tangente(a)	Cotangente(a)	Secante(a)	Cosecante(a)
45	$\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$						
135	$\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$						
225	$\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$						

315	$\left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$						
-----	---	--	--	--	--	--	--

Llenar los espacios faltantes de la siguiente tabla:

Ángulo grados	P(x, y)	Seno (α)	Coseno (α)	Tangente (α)	Cotangente (α)	Secante (α)	Cosecante (α)
0							
30							
45							
60							
90							
120							
135							
150							
180							
210							
225							
240							
270							
300							

315							
330							
360							