



MATEMÁTICAS II

El examen presenta dos opciones: A y B. Elige una de ellas y responde razonadamente a los cuatro ejercicios de que consta dicha opción.

OPCIÓN A

1. Dado el sistema
$$\begin{cases} x & + y + az = a \\ x + (a-1)y + az = 2 \\ -x & + z = 2 \end{cases}$$

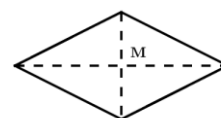
- a) Estudia y clasifica el sistema según los valores de $a \in \mathbb{R}$. (1.5 puntos)
 b) Resuélvelo, si es posible, para el caso $a = 2$. (1 punto)

2. Dada la función $f(x) = \frac{e^{-x}}{x+1}$

- a) Estudia su dominio de definición y calcula sus asíntotas. (1 punto)
 b) Halla, si existen: máximos y mínimos e intervalos de crecimiento y decrecimiento. (1 punto)
 c) Haz un esbozo de su gráfica. (0.5 puntos)

3. Sean $A(3, 1, 0)$ y $B(1, 3, 0)$ los vértices opuestos de un rombo situado en el plano $\pi : z = 0$.

- a) Calcula un vector director \vec{v}_r y la ecuación de la recta r a la que pertenecen los otros dos vértices del rombo C y D. (1.5 puntos)
 b) Determina dichos vértices C y D sabiendo que están a una distancia de $\sqrt{2}$ unidades del punto medio M. (1 punto)



Características de un rombo: Lados iguales paralelos dos a dos. Diagonales perpendiculares que se cortan en el centro de ambas.

4. Alicia tiene dos cajones. En uno tiene las camisetas y en el otro las faldas. La tabla muestra el número de todas las prendas que guarda en los dos cajones agrupadas en tres tipos: lisas, dibujos o rayas.

	Lisas	Dibujos	Rayas
Camisetas	10	5	10
Faldas	5	15	5

Se elige al azar una prenda de cada cajón. Calcula la probabilidad de que:

- a) Las dos sean de rayas. (0.75 puntos)
 b) Las dos sean del mismo tipo. (1 punto)
 c) Al menos una de ellas no sea de rayas. (0.75 puntos)



OPCIÓN B

1. Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} x & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x \end{pmatrix}$ $x \in \mathbb{R}$

- Estudia para qué valores de x se cumple $A^3 - I = O$ (I matriz identidad y O matriz nula). (1 punto)
- Calcula A^{12} para los valores de x que verifican la condición anterior. (0.75 puntos)
- Para $x = 0$ y sabiendo que ese valor verifica la condición del primer apartado, calcula, si existe, la inversa de A. (0.75 puntos)

2. Dadas las curvas $y = x^2/2$; $y = 4/x$.

- Calcula sus puntos de corte. (0.5 puntos)
- Esboza una gráfica de las curvas en el intervalo $[1, 3]$. (1 punto)
- Calcula el área que delimitan entre ellas en el intervalo $[1, 3]$. (1 punto)

3. Dados el plano $\pi : x + y = 1$ y la recta r que pasa por el punto $A(1, 1, 1)$ con vector director $\vec{v}_r = (0, 1, 1)$. Calcula:

- El punto P intersección del plano π y de la recta r . (1.25 puntos)
- El punto A' simétrico de A respecto al plano π . (1.25 puntos)

4. Las calificaciones de un examen en una clase siguen una distribución normal de media $\mu = 20$ y desviación típica $\sigma = 10$: Calcula:

- La probabilidad de que un alumno obtenga una calificación entre 15 y 25. (1.25 puntos)
- La calificación que sólo superan o igualan el 20% de los alumnos. (1.25 puntos)

Algunos valores de la función de distribución de la distribución normal de media 0 y desviación típica 1:

$$F(x) = P(Z \leq x); F(-0.8416) = 0.2; F(0.8416) = 0.8; F(0.4) = 0.6554; F(0.5) = 0.6915; F(0.6) = 0.7257$$

SOLUCIONES:**OPCIÓN A**

1. Dado el sistema
$$\begin{cases} x & + y + az = a \\ x + (a-1)y + az = 2 \\ -x & + z = 2 \end{cases}$$

a) Estudia y clasifica el sistema según los valores de $a \in \mathbb{R}$.

(1.5 puntos)

b) Resuélvelo, si es posible, para el caso $a = 2$.

(1 punto)

UNA FORMA DE HACERLO.

a) Simplificando el sistema con el método de Gauss.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & a \\ 1 & a-1 & a & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 2^a - \text{Fila } 1^a \\ \hline 1 \quad a-1 \quad a \quad 2 \\ -1 \quad -1 \quad -a \quad -a \\ \hline 0 \quad a-2 \quad 0 \quad 2-a \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a + \text{Fila } 1^a \\ \hline -1 \quad 0 \quad 1 \quad 2 \\ \hline 1 \quad 1 \quad a \quad a \\ \hline 0 \quad 1 \quad a+1 \quad a+2 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & a \\ 0 & a-2 & 0 & 2-a \\ 0 & 1 & a+1 & a+2 \end{array} \right) \Rightarrow \{ \text{Fila } 3^a \leftrightarrow \text{Fila } 2^a \} \Rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & a \\ 0 & 1 & a+1 & a+2 \\ 0 & a-2 & 0 & 2-a \end{array} \right) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a - (a-2)\text{Fila } 2^a \\ \hline 0 \quad a-2 \quad 0 \quad 2-a \\ \hline 0 \quad -a+2 \quad -(a+1)(a-2) \quad -(a+2)(a-2) \\ \hline 0 \quad 0 \quad -(a+1)(a-2) \quad -(a+2)(a-2)+2-a \end{array} \right\}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & a \\ 0 & 1 & a+1 & a+2 \\ 0 & 0 & -(a+1)(a-2) & -(a+2)(a-2)+2-a \end{array} \right)$$

Se distinguen tres casos diferentes.

CASO 1. $a \neq -1; a \neq 2$

En este caso el rango de la matriz de los coeficientes y de la matriz ampliada es 3 al igual que el número de incógnitas. El sistema es COMPATIBLE DETERMINADO. Tiene una única solución.

CASO 2. $a = -1$

En este caso el sistema equivalente queda

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -(1)(-3)+2+1 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{array} \right)$$

El sistema

$$\begin{cases} x + y - z = -1 \\ y = 1 \\ 0 = 6 \end{cases} \text{ es INCOMPATIBLE. No tiene solución.}$$

CASO 3. $a = 2$

En este caso el sistema equivalente queda

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

El sistema

$$\begin{cases} x + y + 2z = 2 \\ y + 3z = 4 \\ 0 = 0 \end{cases} \text{ es COMPATIBLE INDETERMINADO. Tiene infinitas soluciones.}$$

b) Para $a = 2$ el sistema es compatible indeterminado y el sistema equivalente asociado es

$$\begin{cases} x + y + 2z = 2 \\ y + 3z = 4 \\ 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = -2z + 2 \\ y = 4 - 3z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 4 - 3z = -2z + 2 \\ y = 3z - 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = z - 2 \\ y = 3z - 4 \end{cases}$$

La solución es $x = z - 2$; $y = 3z - 4$; $z = z$

OTRA FORMA DE HACERLO.

a) Consideramos la matriz de los coeficientes

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a-1 & a \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ con determinante}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a-1 & a \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \cancel{1} - \cancel{1} + a(a-1) - 1 = -1 + a^2 - a - 1 = a^2 - a - 2$$

$$\text{Lo igualamos a cero y } a^2 - a - 2 = 0 \Rightarrow a = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} = \begin{cases} x = \frac{1+3}{2} = 2 \\ x = \frac{1-3}{2} = -1 \end{cases}$$

Se distinguen tres casos diferentes.

CASO 1. $a \neq -1$; $a \neq 2$

En este caso el rango de la matriz de los coeficientes y de la matriz ampliada es 3 al igual que el número de incógnitas. El sistema es COMPATIBLE DETERMINADO. Tiene una única solución.

CASO 2. $a = -1$

En este caso el sistema queda

$$\begin{cases} x + y - z = -1 \\ x - 2y - z = 2 \\ -x + z = 2 \end{cases} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación 2}^a - \text{Ecuación 1}^a \\ \hline x \quad -2y \quad -z = 2 \\ -x \quad -y \quad +z = 1 \\ \hline -3y \quad 0 = 3 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación 3}^a + \text{Ecuación 1}^a \\ \hline -x \quad +z = 2 \\ x \quad +y \quad -z = -1 \\ \hline y = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x + y - z = -1 \\ -3y = 3 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y - z = -1 \\ y = -1 \\ y = 1 \end{cases} \quad \text{El sistema es INCOMPATIBLE. No tiene solución.}$$

CASO 3. $a = 2$

En este caso el sistema queda

$$\begin{cases} x + y + 2z = 2 \\ x + y + 2z = 2 \\ -x + z = 2 \end{cases} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación 2}^a = \text{Ecuación 1}^a \\ \text{Eliminamos ecuación 2}^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} x + y + 2z = 2 \\ -x + z = 2 \end{cases}$$

es COMPATIBLE INDETERMINADO. Tiene infinitas soluciones.

b) Para $a = 2$ el sistema queda

$$\begin{cases} x + y + 2z = 2 \\ -x + z = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 2 - 2z \\ x = z - 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z - 2 + y = 2 - 2z \\ x = z - 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -3z + 4 \\ x = z - 2 \end{cases}$$

La solución es $x = z - 2$; $y = -3z + 4$; $z = z$

2. Dada la función $f(x) = \frac{e^{-x}}{x+1}$

- a) Estudia su dominio de definición y calcula sus asíntotas. (1 punto)
 b) Halla, si existen: máximos y mínimos e intervalos de crecimiento y decrecimiento. (1 punto)
 c) Haz un esbozo de su gráfica. (0.5 puntos)

a) Veamos cuando se anula el denominador

$$x+1=0 \Rightarrow x=-1$$

El dominio es $\mathbb{R} - \{-1\}$

Asíntotas verticales. $x = a$

Dado el dominio la asíntota vertical es $x = -1$

Asíntotas horizontales. $y = b$

Calculamos los límites:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{-x}}{x+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x(x+1)} = \frac{1}{\infty} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{-x}}{x+1} = \frac{+\infty}{-\infty} = \text{Indeterminación (aplico L'Hôpital)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-e^{-x}}{1} = -\infty$$

La asíntota horizontal es $y = 0$

Asíntotas oblicuas. $y = mx + n$

Solo es necesario comprobar en $-\infty$.

$$m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{e^{-x}}{x+1}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{-x}}{x^2+x} = \frac{\infty}{\infty} = \text{Indeterminación} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-e^{-x}}{2x+1} = \frac{\infty}{\infty} = \text{Indeterminación} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{-x}}{2} = \infty$$

No hay asíntotas oblicuas.

b) Calculemos la derivada

$$f(x) = \frac{e^{-x}}{x+1} \Rightarrow f'(x) = \frac{-e^{-x}(x+1) - e^{-x}}{(x+1)^2} = \frac{e^{-x}(-x-2)}{(x+1)^2}$$

Igualamos a cero

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{e^{-x}(-x-2)}{(x+1)^2} = 0 \Rightarrow x = -2$$

La recta real se divide en 2 partes, antes de -2 y después de -2 .

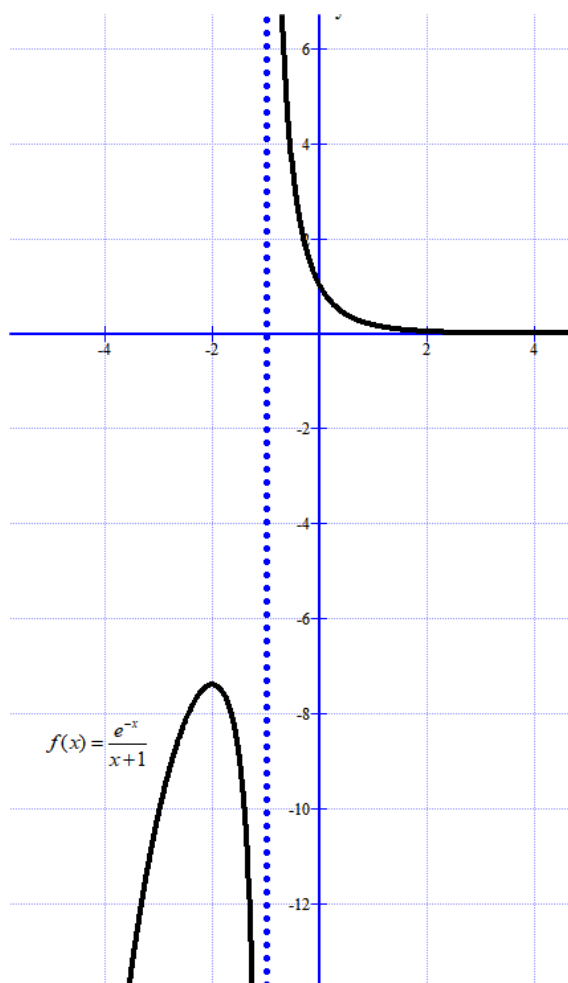
En $(-\infty, -2)$ tomamos el valor $x = -3 \rightarrow f'(-3) = \frac{e^3(3-2)}{(-3+1)^2} > 0 \rightarrow$ La función crece.

En $(-2, +\infty)$ tomamos el valor $x = 0 \rightarrow f'(0) = \frac{e^0(0-2)}{(0+1)^2} < 0 \rightarrow$ La función decrece.

La función crece en $(-\infty, -2)$ y decrece en $(-2, +\infty)$. Por lo que tiene un máximo en $x = -2$

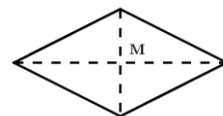
c) Para hacer el esbozo de la gráfica solo nos falta hacer una tabla de valores.

x	$y = \frac{e^{-x}}{x+1}$
-3	$\frac{e^3}{-2} = -10$
-2	$-e^2 = -7,38$
0	1
1	$\frac{e^{-1}}{2} = 0,18$



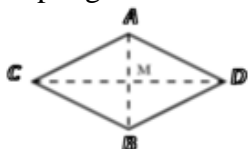
3. Sean $A(3, 1, 0)$ y $B(1, 3, 0)$ los vértices opuestos de un rombo situado en el plano $\pi : z = 0$.

- a) Calcula un vector director \vec{v}_r y la ecuación de la recta r a la que pertenecen los otros dos vértices del rombo C y D. (1.5 puntos)
 b) Determina dichos vértices C y D sabiendo que están a una distancia de $\sqrt{2}$ unidades del punto medio M. (1 punto)



Características de un rombo: Lados iguales paralelos dos a dos.
 Diagonales perpendiculares que se cortan en el centro de ambas.

- a) Supongamos los vértices



La recta que pasa por A y B tiene vector director $\overrightarrow{AB} = (1, 3, 0) - (3, 1, 0) = (-2, 2, 0)$ y el punto M es el punto medio del segmento AB, por lo que

$$M = \frac{A+B}{2} = \frac{(3, 1, 0) + (1, 3, 0)}{2} = (2, 2, 0).$$

El vector \vec{v}_r es perpendicular a $\overrightarrow{AB} = (-2, 2, 0)$ y puede ser $\vec{v}_r = (1, 1, 0)$ ya que la recta está en el plano $\pi : z = 0$.

La ecuación de la recta que une C y D es la que pasa por M y tiene vector director $\vec{v}_r = (1, 1, 0)$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v}_r = (1, 1, 0) \\ \text{Pasa por el punto } M(2, 2, 0) \end{array} \right\} \Rightarrow r : \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 2 + t \\ z = 0 \end{cases}$$

- b) Los puntos C y D son de la recta y tienen coordenadas $C(2 + \alpha, 2 + \alpha, 0)$ y

$D(2 + \lambda, 2 + \lambda, 0)$. Cumplen dos condiciones:

Primera: M es el punto medio del segmento CD

$$M = \frac{C+D}{2} \Rightarrow (2, 2, 0) = \frac{(2 + \alpha, 2 + \alpha, 0) + (2 + \lambda, 2 + \lambda, 0)}{2}$$

$$(4, 4, 0) = (4 + \alpha + \lambda, 4 + \alpha + \lambda, 0)$$

$$4 = 4 + \alpha + \lambda$$

$$0 = \alpha + \lambda$$

$$\alpha = -\lambda$$

Segunda: distancia de C a M es $\sqrt{2}$

$$d(C, M) = \sqrt{2} \Rightarrow |\overrightarrow{CM}| = \sqrt{2} \Rightarrow |(2, 2, 0) - (2 + \alpha, 2 + \alpha, 0)| = \sqrt{2}$$

$$|(-\alpha, -\alpha, 0)| = \sqrt{2} \Rightarrow \sqrt{\alpha^2 + \alpha^2} = \sqrt{2} \Rightarrow 2\alpha^2 = 2 \Rightarrow \alpha = \pm 1$$

Tomamos $\alpha = -\lambda$ y $\alpha = 1$. Si tomamos $\alpha = -1$ solo se intercambian las letras C por D.

Los puntos C y D tienen coordenadas $C(2 + \alpha, 2 + \alpha, 0) = (3, 3, 0)$ y $D(1, 1, 0)$

4. Alicia tiene dos cajones. En uno tiene las camisetas y en el otro las faldas. La tabla muestra el número de todas las prendas que guarda en los dos cajones agrupadas en tres tipos: lisas, dibujos o rayas.

	Lisas	Dibujos	Rayas
Camisetas	10	5	10
Faldas	5	15	5

Se elige al azar una prenda de cada cajón. Calcula la probabilidad de que:

- a) Las dos sean de rayas. (0.75 puntos)
 b) Las dos sean del mismo tipo. (1 punto)
 c) Al menos una de ellas no sea de rayas. (0.75 puntos)

a)

$$\begin{aligned}
 P(\text{Camiseta de rayas y falda de rayas}) &= P(\text{Camiseta de rayas}) \cdot P(\text{Falda de rayas}) = \\
 &= \frac{10}{25} \cdot \frac{5}{25} = \frac{50}{625} = \boxed{0,08}
 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
 P(\text{Las dos del mismo tipo}) &= P(\text{Las dos lisas}) + P(\text{Las dos dibujos}) + P(\text{Las dos rayas}) = \\
 &= P(\text{camiseta lisa}) \cdot P(\text{falda lisa}) + P(\text{camiseta dibujo}) \cdot P(\text{falda dibujo}) + P(\text{camiseta rayas}) \cdot P(\text{falda rayas}) = \\
 &= \frac{10}{25} \cdot \frac{5}{25} + \frac{5}{25} \cdot \frac{15}{25} + \frac{10}{25} \cdot \frac{5}{25} = \frac{50 + 75 + 50}{625} = \frac{175}{625} = \frac{7}{25} = \boxed{0,28}
 \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}
 P(\text{Al menos una no es de rayas}) &= 1 - P(\text{Las dos son de rayas}) = \\
 &= 1 - 0,08 = \boxed{0,92}
 \end{aligned}$$

Aunque también se puede hacer directamente.

$$\begin{aligned}
 P(\text{Al menos una no es de rayas}) &= \\
 &= P(\text{Solo la camiseta es de rayas o Solo la falda es de rayas o ninguna es de rayas}) = \\
 &= P(\text{camiseta de rayas y falda no de rayas}) + P(\text{camiseta no de rayas y falda de rayas}) + \\
 &+ P(\text{camiseta no es de rayas y falda no es de rayas}) = \\
 &= P(\text{camiseta de rayas}) \cdot P(\text{falda no de rayas}) + P(\text{camiseta no de rayas}) \cdot P(\text{falda de rayas}) + \\
 &+ P(\text{camiseta no es de rayas}) \cdot P(\text{falda no es de rayas}) = \\
 &= \frac{10}{25} \cdot \frac{20}{25} + \frac{15}{25} \cdot \frac{5}{25} + \frac{15}{25} \cdot \frac{20}{25} = \frac{200 + 75 + 300}{625} = \frac{575}{625} = \boxed{0,92}
 \end{aligned}$$

OPCIÓN B

1. Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} x & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x \end{pmatrix}$ $x \in \mathbb{R}$

- a) Estudia para qué valores de x se cumple $A^3 - I = O$ (I matriz identidad y O matriz nula). (1 punto)
- b) Calcula A^{12} para los valores de x que verifican la condición anterior. (0.75 puntos)
- c) Para $x = 0$ y sabiendo que ese valor verifica la condición del primer apartado, calcula, si existe, la inversa de A . (0.75 puntos)

a) Calculemos primero el valor de A^3 .

$$A^2 = \begin{pmatrix} x & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 & -1 & -x-x \\ -x & 0 & 1 \\ -1 & x & x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 & -1 & -2x \\ -x & 0 & 1 \\ -1 & x & x^2 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} x^2 & -1 & -2x \\ -x & 0 & 1 \\ -1 & x & x^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^3+1 & -2x & -x^2-2x^2 \\ -x^2 & 1 & x+x \\ -x-x & x^2 & 1+x^3 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} x^3+1 & -2x & -3x^2 \\ -x^2 & 1 & 2x \\ -2x & x^2 & x^3+1 \end{pmatrix}$$

Resolvamos ahora la ecuación $A^3 - I = O$

$$A^3 - I = O \Rightarrow \begin{pmatrix} x^3+1 & -2x & -3x^2 \\ -x^2 & 1 & 2x \\ -2x & x^2 & x^3+1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x^3 & -2x & -3x^2 \\ -x^2 & 0 & 2x \\ -2x & x^2 & x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x^3 = 0 \\ -2x = 0 \\ -3x^2 = 0 \\ -x^2 = 0 \\ 0 = 0 \Rightarrow \boxed{x=0} \\ 2x = 0 \\ -2x = 0 \\ x^2 = 0 \\ x^3 = 0 \end{cases}$$

b) Para $x = 0$ utilizando lo realizado en el apartado anterior tenemos las primeras potencias.

$$A^1 = A = \begin{pmatrix} x & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} x^2 & -1 & -2x \\ -x & 0 & 1 \\ -1 & x & x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} x^3+1 & -2x & -3x^2 \\ -x^2 & 1 & 2x \\ -2x & x^2 & x^3+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ahora seguimos calculando la potencia pedida

$$A^{12} = A^3 \cdot A^3 \cdot A^3 \cdot A^3 = I \cdot I \cdot I \cdot I = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

c) Al ser $A^3 = I \Rightarrow A \cdot A^2 = I \Rightarrow A^2 = A^{-1}$

$$A^{-1} = A^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

OTRA FORMA DE HACERLO.

Con la fórmula:

$$A^{-1} = \frac{Adj(A^t)}{|A|}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A^t = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } |A| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1$$

$$A^{-1} = \frac{Adj(A^t)}{|A|} = \frac{Adj \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}{1} = \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Dadas las curvas $y = x^2/2$; $y = 4/x$.

- a) Calcula sus puntos de corte. (0.5 puntos)
 b) Esboza una gráfica de las curvas en el intervalo $[1, 3]$. (1 punto)
 c) Calcula el área que delimitan entre ellas en el intervalo $[1, 3]$. (1 punto)

a) Resolvamos el sistema.

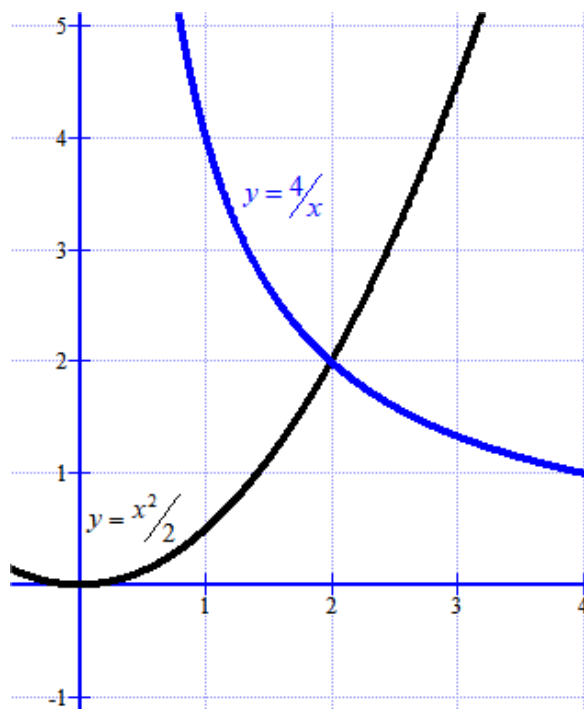
$$\left. \begin{matrix} y = \frac{x^2}{2} \\ y = \frac{4}{x} \end{matrix} \right\} \Rightarrow \frac{x^2}{2} = \frac{4}{x} \Rightarrow x^3 = 8 \Rightarrow x = \sqrt[3]{8} = 2$$

$$x = 2 \Rightarrow y = \frac{4}{x} = \frac{4}{2} = 2$$

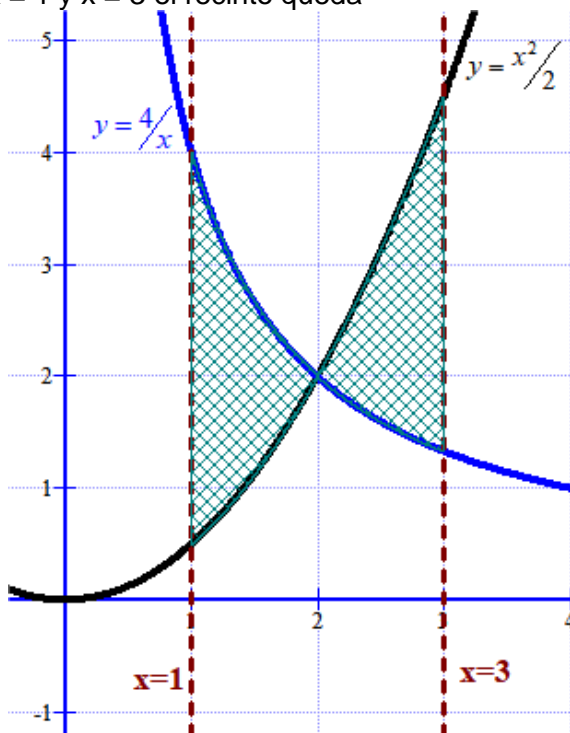
El punto de corte entre las curvas es P(2,2).

b) Haciendo una tabla de valores.

x	$y = \frac{x^2}{2}$	x	$y = \frac{4}{x}$
0	0	0	No existe
1	0,5	1	4
2	2	2	2
3	4,5	3	1,33



c) Si añadimos las rectas $x = 1$ y $x = 3$ el recinto queda



El área de este recinto se calcula con la integral definida siguiente

$$\begin{aligned} \text{Área} &= \int_1^2 \frac{4}{x} - \frac{x^2}{2} dx + \int_2^3 \frac{x^2}{2} - \frac{4}{x} dx = \left[4 \ln x - \frac{x^3}{6} \right]_1^2 + \left[\frac{x^3}{6} - 4 \ln x \right]_2^3 = \\ &= \left(4 \ln 2 - \frac{2^3}{6} \right) - \left(4 \ln 1 - \frac{1^3}{6} \right) + \left(\frac{3^3}{6} - 4 \ln 3 \right) - \left(\frac{2^3}{6} - 4 \ln 2 \right) = \\ &= 4 \ln 2 - \frac{8}{6} + \frac{1}{6} + \frac{27}{6} - 4 \ln 3 - \frac{8}{6} + 4 \ln 2 = \\ &= \frac{12}{6} - 4 \ln 3 + 8 \ln 2 = \boxed{3,1507 \text{ u}^2} \end{aligned}$$

3. Dados el plano $\pi: x + y = 1$ y la recta r que pasa por el punto $A(1, 1, 1)$ con vector director $\vec{v}_r = (0, 1, 1)$. Calcula:

- a) El punto P intersección del plano π y de la recta r . (1.25 puntos)
 b) El punto A' simétrico de A respecto al plano π . (1.25 puntos)

a) Hallemos la ecuación de la recta r .

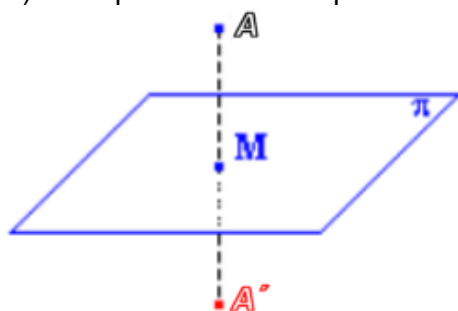
$$\left. \begin{array}{l} \vec{v}_r = (0, 1, 1) \\ \text{Pasa por } A(1, 1, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow r \equiv \left. \begin{array}{l} x = 1 \\ y = 1 + t \\ z = 1 + t \end{array} \right\}$$

Resolvamos el sistema formado por la ecuación del plano y de la recta.

$$\left. \begin{array}{l} \pi: x + y = 1 \\ x = 1 \\ r \equiv y = 1 + t \\ z = 1 + t \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 1 + 1 + t = 1 \Rightarrow t = -1 \Rightarrow y = 1 - 1 = 0 \\ z = 1 - 1 = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} x = 1 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{array}$$

El punto de intersección es $P(1, 0, 0)$

b) Nos piden obtener el punto simétrico como aparece en el dibujo.



Hallo primero la ecuación de la recta s que pasa por A , A' y M . Para ello tengo su vector director que es el vector normal del plano $\vec{v}_s = \vec{n} = (1, 1, 0)$ y un punto $A(1, 1, 1)$.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v}_s = (1, 1, 0) \\ \text{Pasa por } A(1, 1, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow s \equiv \left\{ \begin{array}{l} x = 1 + t \\ y = 1 + t \\ z = 1 \end{array} \right.$$

Determinemos las coordenadas del punto M intersección del plano $\pi: x + y = 1$ y la recta s .

$$\pi : x + y = 1$$

$$s \equiv \begin{cases} x = 1+t \\ y = 1+t \\ z = 1 \end{cases} \Rightarrow 1+t+1+t=1 \Rightarrow 2t = -1 \Rightarrow t = -\frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \\ y = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \\ z = 1 \end{cases} \Rightarrow M\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right)$$

Como M es el punto medio del segmento AA' se cumple

$$M = \frac{A + A'}{2} \Rightarrow 2M = A + A' \Rightarrow A' = 2M - A$$

$$A' = 2\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right) - (1, 1, 1) = (1, 1, 2) - (1, 1, 1) = (0, 0, 1)$$

El simétrico de A(1,1,1) respecto del plano $\pi : x + y = 1$ es el punto **A' (0,0,1)**

4. Las calificaciones de un examen en una clase siguen una distribución normal de media $\mu = 20$ y desviación típica $\sigma = 10$: Calcula:

- a) La probabilidad de que un alumno obtenga una calificación entre 15 y 25. (1.25 puntos)
 b) La calificación que sólo superan o igualan el 20% de los alumnos. (1.25 puntos)

Algunos valores de la función de distribución de la distribución normal de media 0 y desviación típica 1:

$$F(x) = P(Z \leq x); F(-0.8416) = 0.2; F(0.8416) = 0.8; F(0.4) = 0.6554; F(0.5) = 0.6915; F(0.6) = 0.7257$$

X=Calificación de un examen. $X = N(20, 10)$.

a)

$$\begin{aligned} P(15 < X < 25) &= \{\text{Tipificamos}\} = P\left(\frac{15-20}{10} < \frac{X-20}{10} < \frac{25-20}{10}\right) = \\ &= P(-0,5 < Z < 0,5) = P(Z < 0,5) - P(Z < -0,5) = \\ &= P(Z < 0,5) - (1 - P(Z < 0,5)) = 0,6915 - (1 - 0,6915) = \boxed{0,3829} \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} P(X > x) &= 0,20 \\ P\left(\frac{X-20}{10} > \frac{x-20}{10}\right) &= 0,2 \\ P\left(Z > \frac{x-20}{10}\right) &= 0,2 \\ 1 - P\left(Z < \frac{x-20}{10}\right) &= 0,2 \\ P\left(Z < \frac{x-20}{10}\right) &= 1 - 0,2 = 0,8 \end{aligned}$$

Buscando en la tabla de la normal $N(0,1)$ el valor 0,8

$$P\left(Z < \frac{x-20}{10}\right) = 0,8 \Rightarrow \frac{x-20}{10} = 0,8416 \Rightarrow x-20 = 8,416 \Rightarrow x = 28,416$$

La puntuación pedida es de 28,416 puntos.