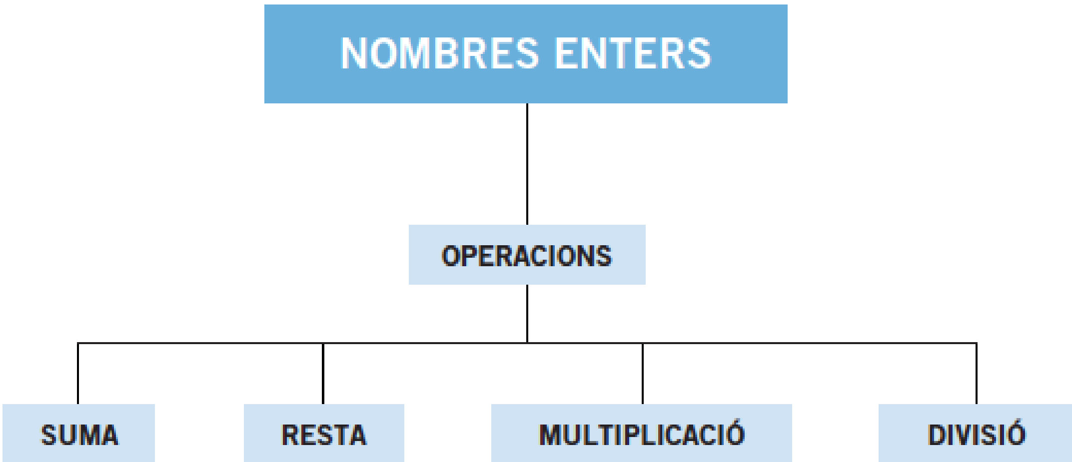
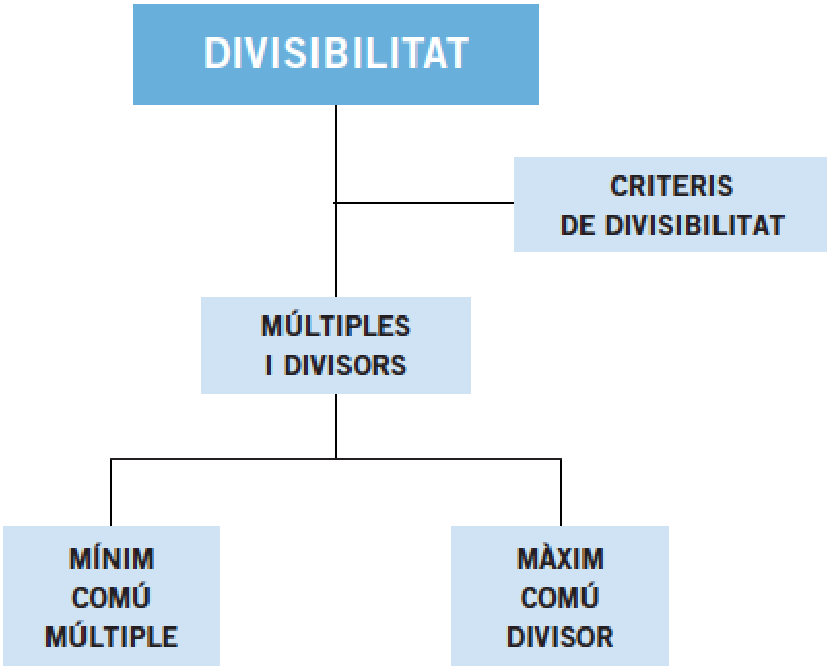
MATEMÀTIQUES 2n ESO
DOSSIER DE REPÀS
Curs 2014-15

Nom:
Professor:

Nombres enters

Per fer-nos una idea...





Convé que recordis...

CONVÉ QUE...

Recordis les **aplicacions dels nombres enters**.

PERQUÈ...

T'ajudarà a comprendre'n les propietats i la manera de fer les operacions.

Hi ha situacions en què és necessari fer servir nombres enters:

– Quan parlem de temperatures sota zero.
Per exemple, 4 graus sota zero ho expressem: –4 °C.

– En els deutes econòmics.
Si devem 100 €, diem que el nostre saldo és de –100 €.

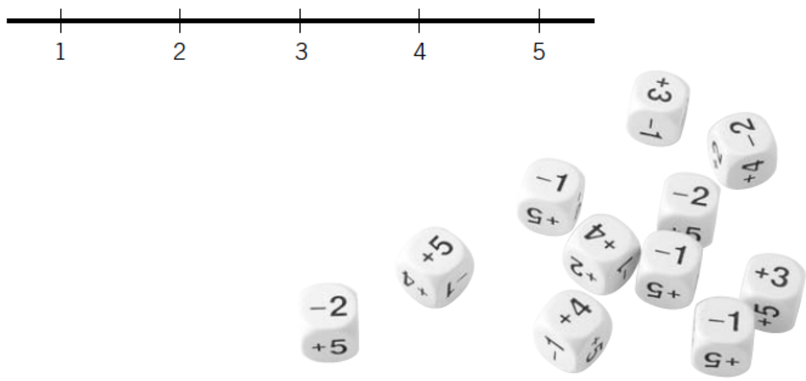
– Quan ens referim a les plantes d'un edifici.
El garatge és a la planta –3 i la terrassa és a la planta 5.

CONVÉ QUE...

Sàpigues representar **nombres naturals en la recta numèrica**.

PERQUÈ...

Et servirà com a base per representar els nombres enters en la recta numèrica i per establir relacions d'ordre entre els nombres fraccionaris.



CONVÉ QUE...

Coneguis la **jerarquia de les operacions**.

PERQUÈ...

Les hauràs d'aplicar en les operacions combinades amb nombres enters.

Primer resolem les multiplicacions i les divisions, d'esquerra a dreta.

Després, fem les sumes i les restes en el mateix ordre.

$$25 - \underline{4 \cdot 3} : 6 - 2 + \underline{12 : 3} + 6 =$$
$$= 25 - \underline{12 : 6} - 2 + 4 + 6 =$$
$$= 25 - 2 - 2 + 4 + 6 =$$
$$= 23 - 2 + 4 + 6 = 21 + 4 + 6 =$$
$$= 25 + 6 = 31$$

CONVÉ QUE...

Sàpigues calcular **el m.c.m. i el m.c.d. de nombres naturals**.

PERQUÈ...

Ho necessitaràs per calcular-los quan els nombres són enters.

El **MÍNIM COMÚ MÚLTIPLE** de dos nombres naturals és el més petit dels seus múltiples comuns. El calculem aplicant els factors primers comuns i no comuns elevats a l'exponent més gran.

$$\text{m.c.m. } (24, 36) = \text{m.c.m. } (2^3 \cdot 3, 2^2 \cdot 3^2) = 2^3 \cdot 3^2 = 72$$

El **MÀXIM COMÚ DIVISOR** de dos nombres naturals és el més gran dels seus divisors comuns. El calculem multiplicant els factors primers comuns elevats a l'exponent més petit.

$$\text{m.c.d. } (24, 36) = \text{m.c.d. } (2^3 \cdot 3, 2^2 \cdot 3^2) = 2^2 \cdot 3 = 12$$

Resum de la unitat:

NOMBRES ENTERS

El conjunt $\mathbb{Z}$ dels nombres enters està format per:
- Els enters positius: $+1, +2, +3, +4\ldots$
- El nombre 0.
- Els enters negatius: $-1, -2, -3, -4\ldots$

Operacions

Suma
- Si els nombres tenen el mateix signe, en sumem els valors absoluts i hi posem el mateix signe.
  $(+6) + (+7) = +13 \qquad (-6) + (-7) = -13$
- Si els nombres tenen signe diferent, en restem els valors absoluts (el més petit del més gran) i posem el signe del sumand amb el valor absolut més alt.
  $(-7) + (+6) = -1 \qquad (-6) + (+7) = +1$

Resta
- L'**oposat** d'un enter és el mateix nombre canviat de signe.
  $\text{op}\,(+3) = -3 \qquad \text{op}\,(-3) = +3$
- Per restar dos nombres enters sumem al primer sumand l'oposat del segon.
  $(-5) - (-2) = (-5) + \text{op}\,(-2) = -3$

Multiplicació i divisió

Per multiplicar (o dividir) nombres enters en multipliquem (o dividim) els valors absoluts.

El signe del resultat és + si tots dos tenen el mateix signe, i – si tenen signes diferents.

$(+2) \cdot (-3) = -6 \qquad (-4) \cdot (-2) = +8 \qquad (-12) : (+6) = -2 \qquad (+15) : (+3) = +5$

I ara, apliquem...

A LA VIDA QUOTIDIANA... Gratacels

En aquest projecte pretenem que aprenguis a:

- Conèixer alguns dels gratacels més alts del món i treballar les aproximacions.
- Fer servir la divisibilitat i els nombres enters en contextos reals.

1 Els deu gratacels més alts del món

Des dels primers temps de la història, l'ésser humà ha volgut construir edificis tan alts que gairebé arribessin a tocar el cel. Els gratacels, com la resta d'estructures arquitectòniques, han tingut un llarg període d'evolució. Avenços tecnològics com la invenció del primer elevador amb fre d'emergència per Elisha Otis, cap al 1850, i l'ús de l'acer en les estructures de les construccions, van fer possible que els edificis fossin cada vegada més alts.

El 1910, l'edifici Metropolitan Life va arribar a tenir 50 pisos d'altura, cosa fins llavors insòlita. Dues dècades més tard s'aixecava l'Empire State, amb 102 pisos.

L'evolució de les concepcions arquitectòniques i l'aplicació de solucions tecnològiques han permès aixecar edificis cada vegada més alts.

L'acció terrorista contra les Torres Bessones, que en el moment de l'atemptat ocupaven (amb 411 metres d'altura) el tercer lloc entre els edificis més alts del món, així com altres problemes associats a aquests edificis, han suscitat un moviment de reflexió sobre la seva conveniència.

Alguns dels gratacels més alts del món són:

Nom	País	Altura (m)
Torres Petrones	Malàisia	452
Torre Sears	EUA	436
Jim Mao Building	Xina	421
Plaça Rakyat	Malàisia	382
Empire Estat Building	EUA	369
Tuntex & Chein	Taiwan	347
Amoco	EUA	346
Centre John Hancock	EUA	343
Shung Hing Square	Xina	325
Plaça CITIC	Xina	322

RESOL LES ACTIVITATS SEGÜENTS

a) *Arrodoneix a les centenes les altures de tots els gratacels de la taula. Quin error comets en cadascun dels casos?*

b) *Arrodoneix les altures a les desenes. Quin error comets ara amb cada aproximació?*

c) *Trunca a les centenes i, després, a les desenes les altures de tots els gratacels de la taula. Quin error comets en cadascun dels casos?*

d) *Calcula la suma de les altures dels deu gratacels. Després, troba l'error comès en estimar aquesta suma arrodonint a les centenes i a les desenes.*

e) *Calcula l'error en l'estimació de la suma si, en lloc d'arrodonir, trunques a les centenes i a les desenes.*

f) *Estima quants gratacels caldria col·locar, un a sobre de l'altre, per aconseguir 1 km d'altura. Arrodoneix el divisor a les centenes.*

Respostes:

Les Torres Petrones, que pots veure a la fotografia inferior, tenen 88 pisos sobre el terra, 5 pisos sota terra i 76 ascensors, inclosos 29 d'alta velocitat en cada torre. Cadascun d'aquests ascensors pot transportar 26 persones. La Torre Sears, de Chicago, té 108 pisos sobre el terra i 3 pisos sota terra, i, en total, 104 ascensors.

FES AQUESTES ACTIVITATS

a) *En un matí, a les Torres Petrones, tots els ascensors d'alta velocitat han pujat plens des de la planta baixa. Troba quantes persones els han fet servir en total, si el nombre de persones va ser més gran de 45.000 i més petit que 46.000.*

b) *Si col·loquéssim apilades una a sobre de l'altra còpies de les Torres Petrones i de la Torre Sears, fins a obtenir dos edificis amb la mateixa altura, quantes còpies de cadascuna necessitaríem?*

c) *Partint del pis més baix de cadascun dels dos edificis, pugem 20 pisos, en baixem 23, en tornem a pujar 70 i en baixem 48. En quin pis estarem en cadascun dels casos?*

d) *Suposem que la velocitat dels ascensors sigui de 2 pisos per segon. Quant tardaríem a pujar des del pis 0 fins al pis més alt de cada edifici? I a pujar des del pis més baix?*

e) *Hem tardat 30 segons a arribar al pis 12. De quina planta hem sortit en cadascun dels edificis?*

Respostes:

2 Projectes per al futur

Actualment hi ha endegats projectes per construir edificis encara més alts. Entre els que han tingut més publicitat i significació en els últims anys hi ha el Projecte Torre Biònica, elaborat per Cervera & Pioz and Partners.

Respostes:

Aquest projecte, en el qual treballen molts especialistes espanyols, pretén fer un salt qualitatiu en la construcció amb l'ús de tècniques totalment diferents de les actuals.

Les tècniques innovadores, basades en la imitació dels principis de flexibilitat i adaptabilitat de les estructures biològiques, permetrien ajustar l'altura, la capacitat i l'ús de la torre a les diverses condicions econòmiques, mediambientals i socials de la ciutat on es construís.

L'altura de la Torre Biònica serà de 1.228 m (amb 300 plantes), tindrà una capacitat màxima per a 100.000 persones i hi haurà 368 ascensors de desplaçament vertical i horitzontal.

FES LES ACTIVITATS SEGÜENTS

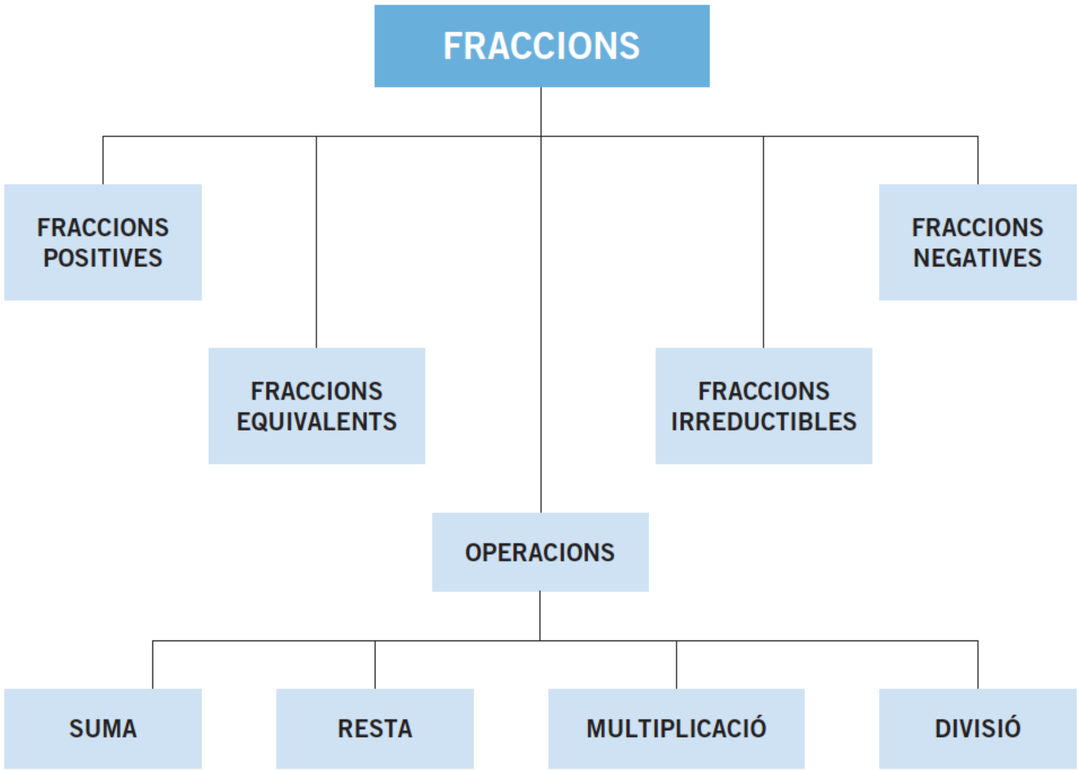
a) *Quants metres d'altura tindrà cada planta de la Torre Biònica? Fes una estimació arrodonint el dividend.*

b) *Quantes còpies de les torres Petrones necessitaríem apilar, una a sobre de l'altra, per arribar a l'altura de la Torre Biònica? Calcula el resultat exacte i el resultat arrodonint a les centenes, i troba'n l'error comès.*

Per si t'ha faltat espai...

Fraccions

Per fer-nos una idea...



Convé que recordis...

CONVÉ QUE...

Recordis què és una **fracció** i quins en són els termes.

PERQUÈ...

Et farà falta com a punt de partida per ampliar els teus coneixements.

Els termes d'una fracció són el **NUMERADOR** i el **DENOMINADOR**.

Numerador → 3

Denominador → 8

$\frac{3}{8} \longrightarrow$ Ho llegim: tres vuitens.

El denominador indica les parts iguals en què es divideix la unitat.

El numerador indica les parts que es prenen de la unitat.

CONVÉ QUE...

Sàpigues representar **fraccions amb gràfics**.

PERQUÈ...

T'ajudarà a comprendre algunes propietats de les fraccions.

Per representar fraccions acostumem a fer servir figures geomètriques. Les dividim en tantes parts iguals com indiqui el denominador, i després, marquem les parts que assenyali el numerador.

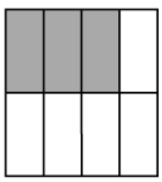
$\frac{5}{6}$

CONVÉ QUE...

Sàpigues identificar quan una fracció és **més petita**, **més gran** o **igual que la unitat**.

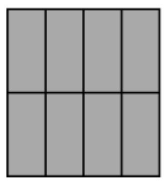
PERQUÈ...

Et servirà per classificar les fraccions.



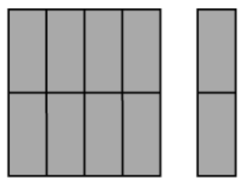
$\frac{3}{8} < 1$

Numerador < Denominador



$\frac{8}{8} = 1$

Numerador = Denominador



$\frac{10}{8} > 1$

Numerador > Denominador

CONVÉ QUE...

Sàpigues calcular **potències de nombres enters** i fer-hi operacions.

PERQUÈ...

Les potències de fraccions tenen les mateixes propietats.

Si la base és un nombre enter positiu, la potència és positiva.

$$5^5 = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 3.125$$

Si la base és un nombre enter negatiu, la potència és positiva si l'exponent és parell, i negativa si l'exponent és senar.

$$(-2)^4 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = 16$$

$$(-3)^5 = (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) = -243$$

Resum de la unitat:

FRACCIONS

Una **fracció** és una expressió del tipus $\frac{a}{b}$, amb $b \neq 0$, en què a i b són nombres enters.

Fraccions equivalents

Dues fraccions $\frac{a}{b}$ i $\frac{c}{d}$ són equivalents si $a \cdot d = b \cdot c$.

Operacions

Suma i resta

Per sumar (o restar) fraccions reduïm a comú denominador i sumem (o restem) els numeradors.

$$\frac{2}{3} + \frac{5}{2} = \frac{4}{6} + \frac{15}{6} = \frac{4+15}{6} = \frac{19}{6}$$

Producte

El producte de dues fraccions és una altra fracció que té com a numerador el producte dels numeradors, i com a denominador, el producte dels denominadors.

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d} \qquad \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{4} = \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 4} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}$$

Divisió

Per dividir dues fraccions multipliquem la primera fracció per la inversa de la segona.

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c} \qquad \frac{2}{3} : \frac{5}{4} = \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} = \frac{8}{15}$$

I ara, apliquem...

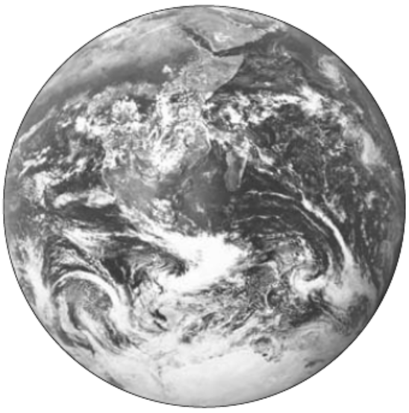
A LA VIDA QUOTIDIANA... L'aigua de la Terra

En aquest projecte pretenem que aprenguis a:

• Conèixer la superfície i la distribució dels oceans i la quantitat d'aigua disponible, i fer servir aquestes dades per resoldre problemes amb fraccions. • Interpretar un text i extreure'n les dades necessàries per resoldre problemes amb fraccions.

1 Els oceans i els mars a la Terra

La Terra té forma esfèrica i està aplatada pels pols. Si considerem la Terra com una esfera, la longitud dels seus cercles màxims (meridià zero i equador) és aproximadament de 40.000 quilòmetres. Així doncs, la superfície total de la Terra és d'uns 500 milions de quilòmetres quadrats.



Els oceans i mars ocupen els $\frac{7}{10}$ del total de la superfície del planeta. Per la seva part, els mars profunds ocupen els $\frac{13}{50}$ d'aquesta superfície total.

La fracció de la superfície total ocupada pels oceans que correspon a cadascun d'ells és aproximadament la següent:

Oceà Atlàntic .... $\frac{1}{4}$

Oceà Pacífic... $\frac{1}{2}$

Oceà Índic .... $\frac{1}{5}$

Oceà Àrtic .... $\frac{1}{20}$

D'altra banda, l'aigua dels oceans i dels mars és salada i conté al voltant de 35 grams de sal dissolts en cada litre d'aigua.

LLEGEIX LA INFORMACIÓ, CALCULA I CONTESTA

a) *Quina fracció de la superfície total de la Terra ocupen els oceans i mars profunds?*

b) *Quina fracció de la superfície terrestre constitueixen els continents?*

c) *Quina superfície en quilòmetres quadrats ocupen els oceans i mars profunds?*

d) *Quina superfície en quilòmetres quadrats ocupen els continents?*

e) *Quina fracció de la superfície total de la Terra ocupa cadascun dels oceans indicats en el text?*

f) *Quina superfície ocupa l'oceà Atlàntic en quilòmetres quadrats?*

g) *I l'oceà Pacífic?*

h) *Quina superfície en quilòmetres quadrats ocupa l'oceà Índic?*

i) *I l'oceà Àrtic?*

j) *S'estima que, a l'aigua dels oceans, les $\frac{3}{4}$ parts dels materials sòlids dissolts són sal. Quants grams de materials dissolts que no són sal hi ha en cada litre d'aigua?*

Respostes:

2 La distribució de l'aigua dolça a la Terra

El volum d'aigua total del planeta és d'uns 1.400 milions de quilòmetres cúbics.

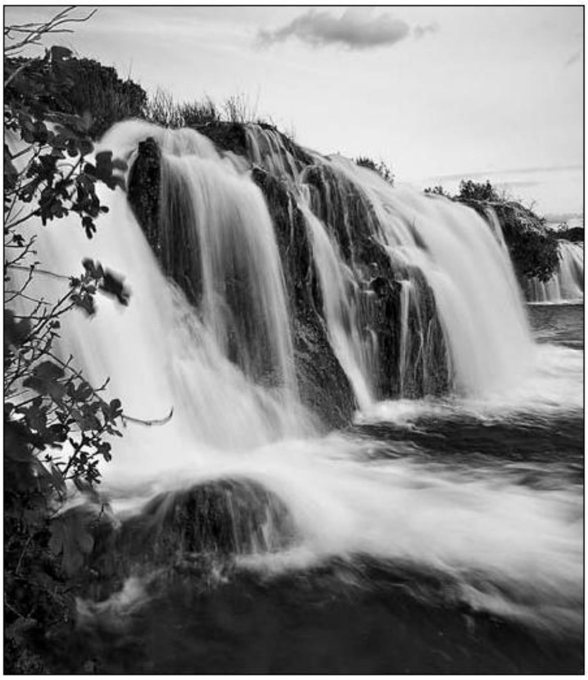
Els $\frac{97}{100}$ de tota l'aigua del planeta Terra és aigua salada i la resta és aigua dolça.

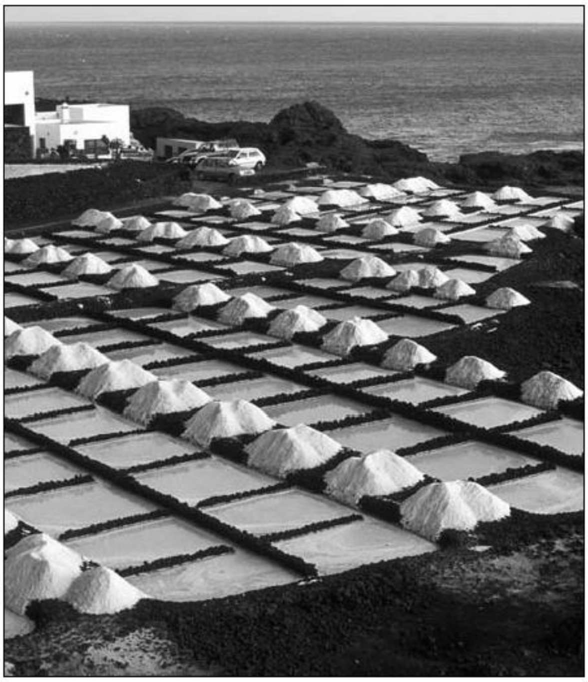
La major part de l'aigua dolça, concretament els $\frac{5}{7}$, la constitueixen el gel i la neu dels casquets polars i les glaceres. La resta està formada per l'aigua subterrània, l'aigua dels llacs i rius i de l'atmosfera. Les glaceres i els casquets polars, que són els magatzems més grans d'aigua dolça de la Terra, estan allunyats dels grans nuclis de població humana.

És per això que els rius, els llacs i les aigües superficials són el que ha fet servir tradicionalment l'ésser humà per abastir-se d'aigua. Però només una part de cada vint de l'aigua dolça és als rius i llacs o són aigües superficials.

Tot i que, en termes absoluts, l'aigua dolça disponible és suficient per abastir els més de 6.000 milions d'habitants de la Terra, hi ha el problema que aquesta aigua no està distribuïda de manera equitativa arreu del planeta.

Actualment es calcula que la quantitat mínima d'aigua per cobrir les necessitats bàsiques d'una persona és de 50 litres diaris. I es considera que la quantitat de 100 litres per persona i dia és la necessària per a un estàndard de vida acceptable.





RESOL LES ACTIVITATS SEGÜENTS

a) *Quina fracció del total d'aigua de la Terra és aigua dolça?*

b) *Quants quilòmetres cúbics d'aigua dolça hi ha a la Terra aproximadament?*

c) *Quants quilòmetres cúbics d'aigua dolça representen la neu i el gel dels casquets i les glaceres?*

d) *Quina fracció del total d'aigua del planeta representa l'aigua en forma de gel i neu que hi ha en els casquets i les glaceres?*

e) *Quins quilòmetres cúbics d'aigua dolça contenen els rius, llacs, aigües subterrànies i aigües superficials?*

f) *Quina fracció de l'aigua total de la Terra representen rius, llacs, aigües subterrànies i aigües superficials?*

g) *Quants metres cúbics d'aigua gastaria la humanitat diàriament si cada persona fes servir la quantitat mínima recomanada per a les seves necessitats bàsiques?*

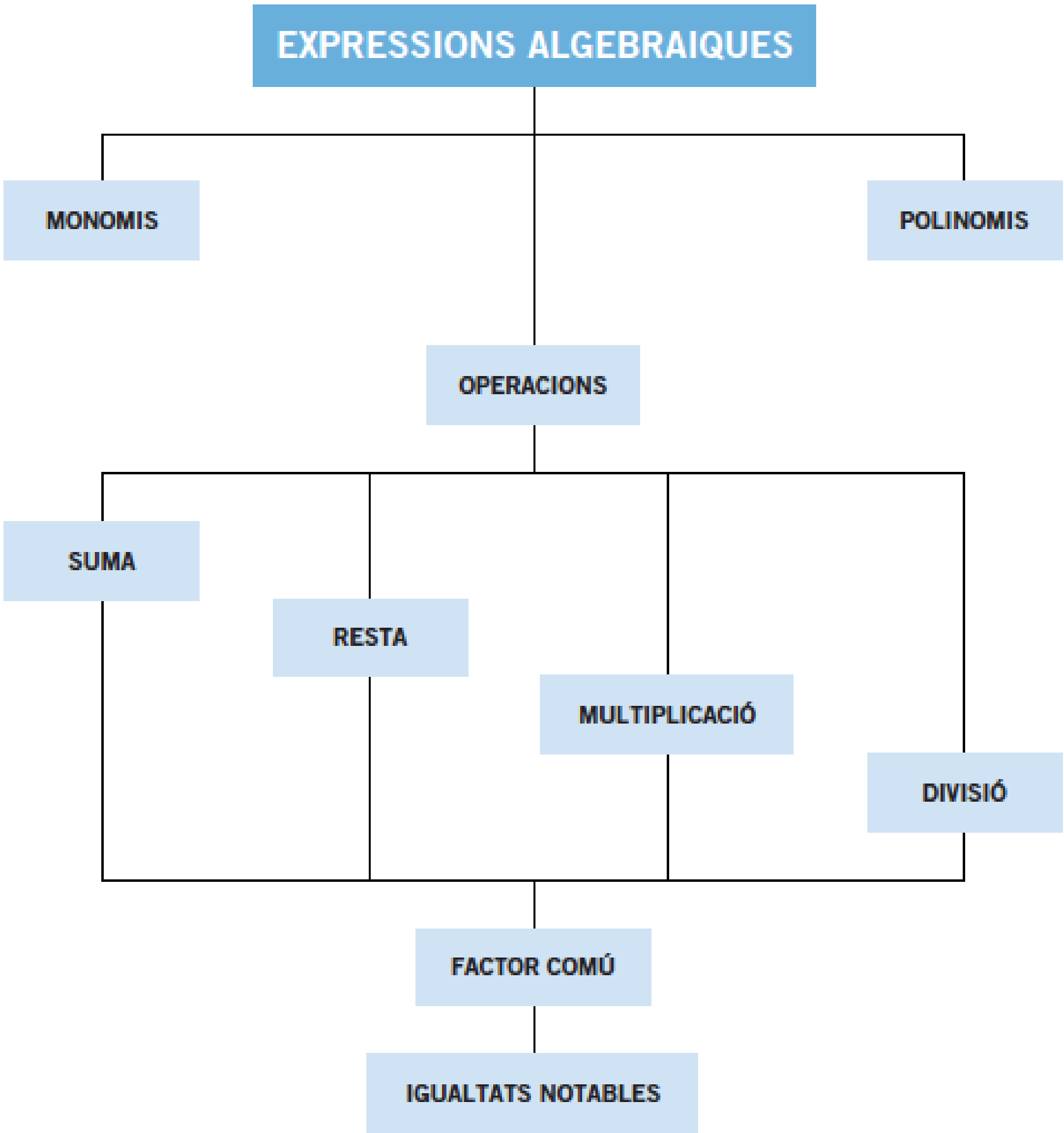
h) *Quants metres cúbics d'aigua al dia es gastaria al món si cada persona fes servir la quantitat necessària per a un estàndard de vida acceptable?*

i) *Quina fracció del total de l'aigua dolça disponible en rius, llacs, aigües subterrànies i aigües superficials suposaria cadascun dels dos casos?*

Respostes:

Introducció a l'àlgebra

Per fer-nos una idea...



Convé que recordis...

CONVÉ QUE... Recordis la **propietat distributiva del producte**. **PERQUÈ...** L'hauràs d'aplicar en la resolució d'equacions.	**PROPIETAT DISTRIBUTIVA DEL PRODUCTE RESPECTE DE LA SUMA I DE LA DIFERÈNCIA** $\mathbf{a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c}$ $\mathbf{a \cdot (b - c) = a \cdot b - a \cdot c}$ $7 \cdot (5 + 2) = 7 \cdot 5 + 7 \cdot 2 = 35 + 14 = 49$ $8 \cdot (4 - 3) = 8 \cdot 4 - 8 \cdot 3 = 32 - 24 = 8$
CONVÉ QUE... Repassis les **característiques del llenguatge algebraic**. **PERQUÈ...** Ho faràs servir per treballar amb equacions.	El **LLENGUATGE ALGEBRAIC** fa servir nombre i lletres units mitjançant operacions aritmètiques. Les expressions d'aquest tipus les denominem **EXPRESSIONS ALGEBRAIQUES**. $2x + 3y - 5z$ $4x + 9z^2$
CONVÉ QUE... Sàpigues obtenir el **valor numèric d'una expressió algebraica**. **PERQUÈ...** Et serà útil per verificar les solucions d'una equació.	El **VALOR NUMÈRIC** d'una expressió algebraica, per a uns valors donats de les lletres, l'obtenim substituint-los en l'expressió i operant. Valor numèric de $7x - 11y$, per a $x = 1$ i $y = -1$: $7 \cdot 1 - 11 \cdot (-1) = 7 + 11 = 18$
CONVÉ QUE... Sàpigues portar a terme la **simplificació de fraccions**. **PERQUÈ...** La faràs servir per fer divisions de monomis i per simplificar la solució d'una equació.	**SIMPLIFICAR** una fracció consisteix a trobar una altra fracció equivalent que no tingui factors comuns en el numerador i el denominador. $\frac{120}{180} = \frac{2^3 \cdot 3 \cdot 5}{2^2 \cdot 3^2 \cdot 5} = \frac{\cancel{2} \cdot \cancel{2} \cdot 2 \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{5}}{\cancel{2} \cdot \cancel{2} \cdot 3 \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{5}} = \frac{2}{3}$ $\frac{a^3b^2c}{a^2cd} = \frac{\cancel{a} \cdot \cancel{a} \cdot a \cdot b \cdot b \cdot \cancel{c}}{\cancel{a} \cdot \cancel{a} \cdot \cancel{c} \cdot d} = \frac{a \cdot b^2}{d}$

Resum de la unitat:

EXPRESSIONS ALGEBRAIQUES

Monomis

Un **monomi** és una expressió algebraica formada pel producte de nombres i lletres.

$$\overbrace{\underbrace{36}_{\text{Coeficient}}\,\underbrace{x^2y^3z}_{\text{Part literal}}}^{\text{Monomi}}$$

Grau $= 2 + 3 + 1 = 6$

Polinomis

Polinomi: $\boldsymbol{P(x)} = \overbrace{5x^3 + 7x^2 - \underbrace{4}_{\text{Terme independent}}}^{\text{Termes} \rightarrow \text{Monomis}}$ Grau $= 3$

Valor numèric de $P(x)$, per a $x = 2$: $P(2) = 5 \cdot 2^3 + 7 \cdot 2^2 - 4 = 64$

Igualtats notables

Quadrat d'una suma	Quadrat d'una diferència	Suma per diferència	Models geomètrics
$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$	$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$	$(a+b)\cdot(a-b) = a^2 - b^2$	

I ara, apliquem:

1 Valor numèric d'una expressió algebraica

Per fer càlculs numèrics llargs, normalment anem escrivint els resultats parcials a la llibreta fins que arribem al resultat final. Per exemple, per esbrinar el valor numèric de l'expressió algebraica $3x^3 - 2x^2 + 5x - 1$, per a $x = -2$, farem:

$$\begin{aligned} &3 \cdot (-2)^3 - 2 \cdot (-2)^2 + 5 \cdot (-2) - 1 = \\ &= 3 \cdot (-8) - 2 \cdot (4) - 10 - 1 = \\ &= -24 - 8 - 10 - 1 = -43 \end{aligned}$$

Les calculadores científiques permeten fer els càlculs de manera més eficaç sense necessitat de fer càlculs parcials, ni d'anar prenent-ne nota.

Les tecles que faríem servir en aquest cas serien:

$\boxed{3}\ \boxed{\times}\ \boxed{[(---}\ \boxed{2}\ \boxed{\pm}\ \boxed{x^y}\ \boxed{3}\ \boxed{---)]}\ \boxed{-}$

$\boxed{2}\ \boxed{\times}\ \boxed{[(---}\ \boxed{2}\ \boxed{\pm}\ \boxed{x^y}\ \boxed{2}\ \boxed{---)]}\ \boxed{+}$

$\boxed{5}\ \boxed{\times}\ \boxed{2}\ \boxed{\pm}\ \boxed{-}\ \boxed{1}\ \boxed{=}$

Observa que només hem fet servir les funcions (o tecles) següents:

$\boxed{\times}$ tecla de multiplicar

$\boxed{[(---}$ $\boxed{---)]}$ tecles de parèntesis

$\boxed{x^y}$ tecla per elevar a una potència

$\boxed{\pm}$ tecla de canvi de signe

DETERMINA AMB LA CALCULADORA EL VALOR NUMÈRIC DE LES EXPRESSIONS SEGÜENTS, PER ALS VALORS INDICATS

a) $3x^2 - 5x + 8$ per a $x = -1$

b) $6(x + 8)^3 - 5x^2 + 4x - 3$ per a $x = 4$

c) $(x - 5)^3 - \dfrac{4(x - 3)^2}{3} + 4x$ per a $x = 4$

d) $4x^3 + 3x^2 - 2x + 5$ per a $x = \dfrac{1}{2}$

Respostes:

2 Validació dels resultats en càlculs algebraics

La calculadora científica no fa càlculs simbòlics, però permet comprovar-los. Per saber si està ben fet el càlcul algebraic:

$$(3x - 5) \cdot (4x^2 + 5x - 2) = 12x^3 - 5x^2 - 30x + 10$$

donem a x un valor qualsevol i trobem amb la calculadora quant val cada membre.

Agafem el valor $x = 10$, i en el membre esquerre obtenim:

$$(3 \cdot 10 - 5) \cdot (4 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10 - 2) = 25 \cdot 448 = 11.200$$

I en el dret:

$$12 \cdot 10^3 - 5 \cdot 10^2 - 30 \cdot 10 + 10 = 11.210$$

La multiplicació algebraica no està ben feta.

Tingues en compte que obtenir el mateix resultat no significa que l'operació estigui ben feta. El mètode ens serveix per saber si està mal feta.

FES AQUESTES OPERACIONS AMB LA CALCULADORA

a) *Comprova si el producte següent està mal fer donant a x el valor 1:*

$$\begin{aligned} &(2x^2 + 3x - 5) \cdot (3x^2 - 5) = \\ &= 6x^4 + 9x^3 - 25x^2 - 15x + 25 \end{aligned}$$

b) *Fes el producte següent i comprova el resultat amb la calculadora, donant a x el valor 2:*

$$(2x^2 + 3x - 1) \cdot (3x + 7)$$

Respostes:

3 Resoldre equacions de primer grau per mètodes numèrics amb la calculadora

La calculadora també permet resoldre equacions. Vegem-ho amb un exemple.

Dos amics, en Pere i l'Anna, juguen amb les calculadores. En Pere té a la pantalla de la calculadora el nombre 8, i l'Anna, el 118.

En Pere li suma al seu nombre 3 unitats, i l'Anna li resta al seu 5 unitats de manera simultània. Obtenen com a resultat 11 i 113, respectivament.

Es plantegen el problema següent: si fan aquest procés repetides vegades, arribaran a tenir el mateix resultat a la pantalla? Quantes vegades serien necessàries? I si no és així, quan estaran més a prop d'aconseguir-ho?

Una suma repetida amb la calculadora, amb sumand constant 3, la podem fer així:

[3] [+] [=] [8] [=]

i, a la pantalla, obtenim:

11.

A partir de llavors, n'hi haurà prou de pitjar [=] repetidament i obtindrem: 14, 17, 20...

L'Anna podrà fer el mateix. En aquest cas, és una resta repetida amb subtrahend constant 5. Pitgem:

[5] [−] [−] [1] [1] [8]

Tots dos poden anotar els resultats successius en una taula, en què x és el nombre de vegades que cadascun haurà de pitjar la tecla [=].

x	0	1	2	3	4	…
Pere	8	11	14	17	20	…
Anna	118	113	108	103	98	…

Com pots veure, amb la calculadora podem resoldre equacions fent servir mètodes de resolució numèrics en lloc d'algebraics.

FES LES ACTIVITATS SEGÜENTS

a) *Creus que arribaran a ser iguals els nombres d'en Pere i l'Anna?*

b) *Per a quin valor de x creus que els nombres seran més semblants?*

c) *Resol el problema amb la calculadora i comprova les teves hipòtesis anteriors.*

d) *Resol algebraicament l'equació i contesta una altra vegada les preguntes dels apartats a) i b).*

e) *Si partim dels nombres 10 i 200, i augmentem el primer de 6 en 6 i disminuïm el segon de 3 en 3, obtindrem el mateix nombre? Després de quantes vegades? Planteja l'equació i resol-la algebraicament.*

f) *Ara partim dels nombres −5 i 255. El primer augmenta de 8 en 8 i el segon disminueix de 5 en 5. Obtindrem el mateix nombre? Després de quantes vegades? Quines seqüències de tecles faries servir? Planteja l'equació i resol-la algebraicament.*

g) *De la mateixa manera que amb la suma i la resta, actuem amb el producte. Així doncs, si teclegem la seqüència:*

[3] [×] [×] [4] [=]

resulta 12 i, cada vegada que tornem a pitjar [=], obtenim el producte per 3: 36, 108...

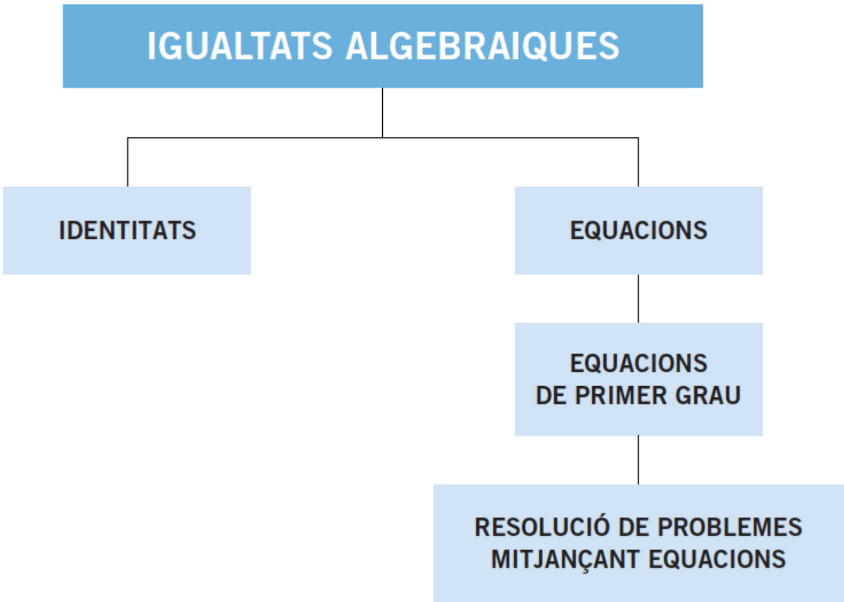
Quantes vegades hem de pitjar per obtenir el nombre 2.916? Sabries plantejar l'equació?

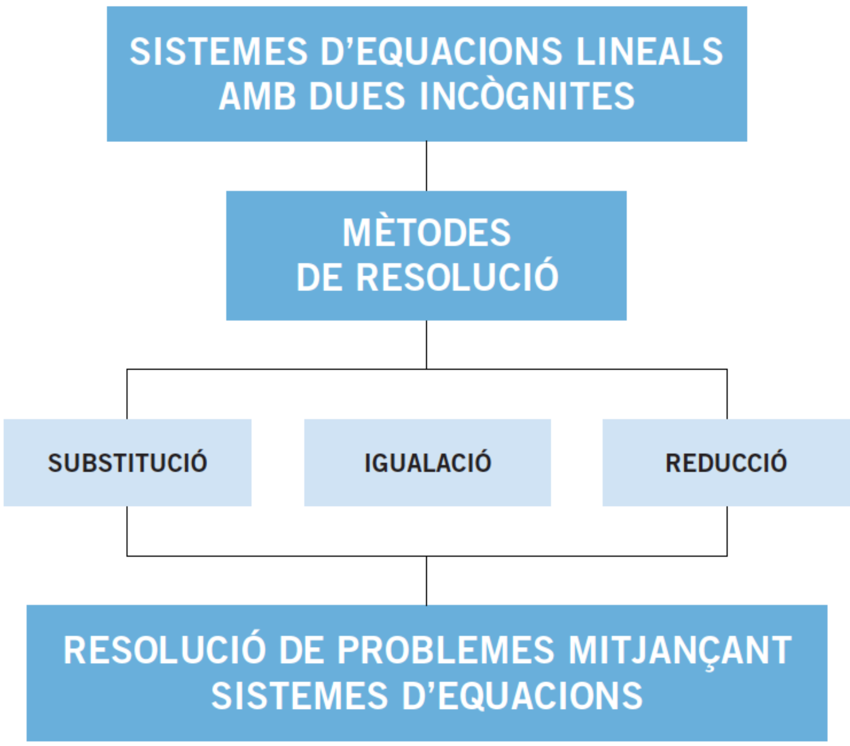
Respostes:

Respostes:

Equacions i sistemes

Per fer-nos una idea...





Convé que recordis...

CONVÉ QUE...

Recordis la **propietat distributiva del producte**.

PERQUÈ...

L'hauràs d'aplicar en el producte de polinomis.

PROPIETAT DISTRIBUTIVA DEL PRODUCTE RESPECTE DE LA SUMA I DE LA DIFERÈNCIA

$$\boldsymbol{a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c}$$
$$\boldsymbol{a \cdot (b - c) = a \cdot b - a \cdot c}$$

$(-3) \cdot (8 - 4) = (-3) \cdot 8 - (-3) \cdot 4 = -24 - (-12) = -12$

$5 \cdot (x + 3) = 5 \cdot x + 5 \cdot 3 = 5x + 15$

CONVÉ QUE...

Coneguis la **regla dels signes**.

PERQUÈ...

Et serà útil per fer transformacions en les equacions.

$(+10) \cdot (+5) = +50$
$(-10) \cdot (-5) = +50$
$(+10) \cdot (-5) = -50$

$(+10) : (+5) = +2$
$(-10) : (-5) = +2$
$(+10) : (-5) = -2$

Multiplicació	Divisió
$(+) \cdot (+) = +$	$(+) : (+) = +$
$(-) \cdot (-) = +$	$(-) : (-) = +$
$(+) \cdot (-) = -$	$(+) : (-) = -$
$(-) \cdot (+) = -$	$(-) : (+) = -$

CONVÉ QUE...

Sàpigues **reduir fraccions a comú denominador**.

PERQUÈ...

Ho faràs servir per resoldre equacions amb denominadors.

Reduïm $\frac{5}{6}$ i $\frac{7}{10}$ a comú denominador.

PRIMER. Calculem el m.c.m. dels denominadors.

m.c.m. (6, 10) = 30

SEGON. Dividim el m.c.m. entre el denominador de cada fracció i el resultat el multipliquem pel numerador.

$30 : 6 = 5 \longrightarrow \frac{5}{6} = \frac{5 \cdot 5}{6 \cdot 5} = \frac{25}{30}$

$30 : 10 = 3 \rightarrow \frac{7}{10} = \frac{7 \cdot 3}{10 \cdot 3} = \frac{21}{30}$

CONVÉ QUE...

Sàpigues calcular el **valor numèric** d'un polinomi.

PERQUÈ...

Ho faràs servir per verificar les solucions d'una equació.

$P(x) = x^2 - 3x + 2$ per a $x = 2$ $\quad P(2) = 2^2 - 3 \cdot 2 + 2 = 0$

$Q(x, y) = 2xy^2 + 3x^2y$ per a $x = 2, y = 1$ $\quad Q(2, 1) = 2 \cdot 2 \cdot 1^2 + 3 \cdot 2^2 \cdot 1 = 16$

Resum de la unitat:

IGUALTATS ALGEBRAIQUES

Identitats

Una identitat és una igualtat algebraica que es verifica per a qualsevol dels valors que prenguin les lletres que hi apareixen.

$2x + x = 3x \qquad (x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$

Equacions

Una equació és una igualtat algebraica que es verifica només per a certs valors de les lletres que hi apareixen.

$3x^3 + (x-1)^2 = 2x - (x-1) \rightarrow \text{Grau} = 3$

Equacions de primer grau

$$\frac{2(x-1)}{3} - \frac{x+3}{4} = -\frac{3-x}{2}$$

PRIMER. Eliminem els denominadors.

m.c.m. $(3, 4, 2) = 12$

$4 \cdot 2(x-1) - 3(x+3) = -6(3-x)$

SEGON. Traiem els parèntesis i reduïm termes semblants $\rightarrow 5x - 17 = -18 + 6x$

TERCER. Agrupem els termes amb x en un dels membres i els nombres, a l'altre.

$-17 + 18 = 6x - 5x$

QUART. Aïllem la incògnita $\rightarrow 1 = x$

CINQUÈ. Comprovem la solució.

SISTEMES DE DUES EQUACIONS LINEALS AMB DUES INCÒGNITES

- Dues equacions lineals de les quals busquem una solució comuna: $\left.\begin{aligned} ax + by &= c \\ a'x + b'y &= c' \end{aligned}\right\}$
- Una **solució del sistema** és tota parella de nombres que verifiquen les dues equacions a la vegada.

RESOLUCIÓ D'UN SISTEMA

Mètode de substitució: Aïllem una incògnita en una equació i la substituïm a l'altra.

$$\left.\begin{aligned} x + y &= 5 \\ 2x - y &= 4 \end{aligned}\right\} \rightarrow \left.\begin{aligned} y &= 5 - x \\ 2x - y &= 4 \end{aligned}\right\} \rightarrow x = 3, y = 2$$

$$y = 5 - x \xrightarrow{x=3} y = 5 - 3 = 2$$

Mètode d'igualació: Aïllem la mateixa incògnita a les dues equacions i igualem les expressions obtingudes.

$$\left.\begin{aligned} x + y &= 5 \\ 2x - y &= 4 \end{aligned}\right\} \rightarrow \left.\begin{aligned} y &= 5 - x \\ y &= 2x - 4 \end{aligned}\right\} 5 - x = 2x - 4 \rightarrow x = 3 \rightarrow \rightarrow y = 2$$

Mètode de reducció: Busquem un sistema equivalent en què els coeficients d'una mateixa incògnita siguin iguals i oposats.

$$\left.\begin{aligned} x + y &= 5 \\ 2x - y &= 4 \end{aligned}\right\} \xrightarrow{\cdot 2} \left.\begin{aligned} 2x + 2y &= 10 \\ 2x - y &= 4 \end{aligned}\right\} \xrightarrow{\cdot(-1)} \left.\begin{aligned} 2x + 2\cancel{y} &= 10 \\ + \; -2x + \cancel{y} &= -4 \end{aligned}\right\}$$

$$3y = 6 \rightarrow y = 2$$

$$x + y = 5 \xrightarrow{y=2} x + 2 = 5 \rightarrow x = 3$$

I ara, apliquem...

A LA VIDA QUOTIDIANA... Els Jocs Olímpics

En aquest projecte pretenem que aprenguis a:

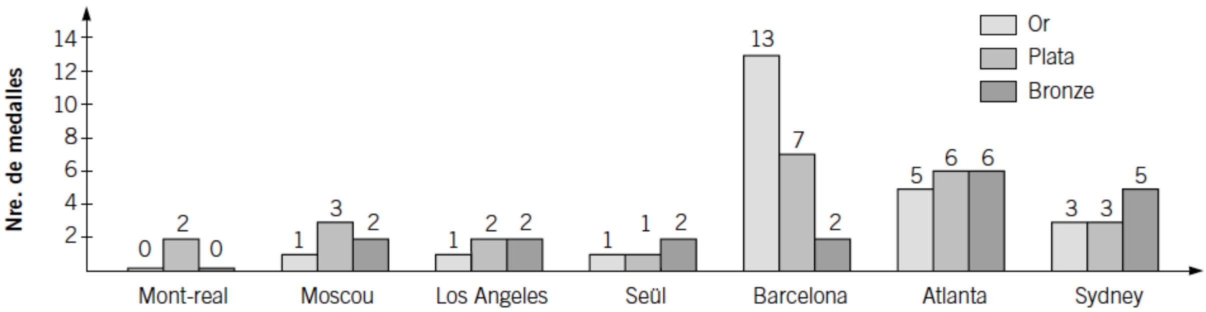
• Conèixer l'actuació espanyola en els Jocs Olímpics. • Relacionar les medalles amb el nombre d'habitants de cada país. • Analitzar els resultats d'alguns països de la Unió Europea en tres Jocs Olímpics consecutius. • Platejar equacions i sistemes si en coneixem les solucions.

1 Actuació espanyola en els Jocs Olímpics

Els Jocs Olímpics de l'era moderna van néixer a Atenes el 1896, i des de llavors s'han celebrat cada quatre anys, excepte el 1916, el 1940 i el 1944, en què es van suspendre. En els onze Jocs olímpics en què Espanya va competir fins al 1972 va obtenir només 9 medalles: París 1900 (1 de plata), Anvers 1920 (2 de plata), Amsterdam 1928 (1 d'or), Los Angeles 1932 (1 de bronze), Londres 1948 (1 de plata), Hèlsinki 1932 (1 de plata), Roma 1860 (1 de bronze) i Munic 1972 (1 de bronze).

La taula i el gràfic següents resumeixen el medaller espanyol en els Jocs Olímpics.

Edició	Or	Plata	Bronze	Total
Mont-real 1976	0	2	0	2
Moscou 1980	1	3	2	6
Los Angeles 1984	1	2	2	5
Seül 1988	1	1	2	4
Barcelona 1992	13	7	2	22
Atlanta 1996	5	6	6	17
Sydney 2000	3	3	5	11



2 Relació de les medalles amb el nombre d'habitants

En aquesta taula apareixen alguns països participants amb el barem (en milions d'habitants per medalla) als Jocs Olímpics de Sydney 2000.

País	Medalles	Habitants (mil.)	Barem
França	38	58,5	1,5
Rússia	88	147,7	1,7
R. Unit	28	58,2	2,1
Canadà	14	29,9	2,1
Ucraïna	23	51,4	2,2
Polònia	14	38,6	2,8
EUA	97	271,6	2,8
Espanya	11	39,7	3,6

AMB LES DADES DE LA TAULA, RESOL LES ACTIVITATS

a) *Si Espanya hagués repetit els resultats d'Atlanta 1996, en quin lloc de la taula estaria? I si hagués repetit els resultats de Barcelona 1992?*

b) *Un país amb 28 medalles i 45,7 milions d'habitants, quin barem va obtenir a Sydney 2000?*

c) *Un país amb 7 medalles i un barem de 2,4, quants milions d'habitants tenia l'any 2000?*

d) *Un país amb 8,8 milions d'habitants i un barem de 0,8, quantes medalles va obtenir a Sydney 2000?*

Respostes:

3 Anàlisi dels resultats d'alguns països de la Unió Europea

Els resultats (O-P-B) d'alguns països de la Unió Europea en tres Jocs Olímpics consecutius van ser:

País	Barcelona 92	Atlanta 96	Sydney 2000
Alemanya	33-21-28	20-8-27	14-17-26
Àustria	0-2-0	0-1-2	2-1-0
Bèlgica	0-1-2	2-2-2	0-2-3
Dinamarca	1-1-4	4-1-1	2-3-1
Espanya	13-7-2	5-6-6	3-3-5
Finlàndia	1-2-2	1-2-1	2-1-1
França	8-5-16	15-7-15	13-14-11
Grècia	2-0-0	4-4-0	4-6-3
Holanda	2-6-7	4-5-10	12-9-4
Irlanda	1-1-0	3-0-1	0-1-0
Itàlia	6-5-8	13-10-12	13-8-13
Luxemburg	0-0-0	0-0-0	0-0-0
Portugal	0-0-0	1-0-1	0-0-2
R. Unit	5-3-12	1-8-6	11-10-7
Suècia	1-7-4	2-4-2	4-5-3

Per analitzar els resultats i comprendre'n millor l'evolució, són molt útils les activitats següents, que has de fer amb les dades de la taula.

a) *Quantes medalles va obtenir en total cada país de la Unió Europea en cadascun dels Jocs Olímpics?*

b) *Estableix l'ordre dels països en funció de les medalles aconseguides en cadascun dels Jocs Olímpics.*

c) *Troba el nombre total de medalles de cada país en aquests tres Jocs Olímpics.*

d) *Estableix els percentatges de variació del total de medalles de cada país a Atlanta i a Sydney respecte dels Jocs Olímpics anteriors.*

e) *Tenint en compte la resposta a la pregunta anterior, quin país ha tingut una evolució millor en els seus resultats?*

f) *Quin país de la taula no ha obtingut cap medalla?*

Respostes:

4 Plantejament d'equacions i sistemes si en coneixem les solucions

Partirem de les taules anteriors per establir condicions que ens permetin formar sistemes d'equacions i arribar a la solució.

Considerant les medalles aconseguides per Espanya a Sydney 2000 (3 ors, 3 plates i 5 bronzes), formula un enunciat que permeti obtenir aquests valors resolent un sistema d'equacions.

Espanya va obtenir en total 11 medalles. Va aconseguir els mateixos ors que plates i va obtenir dues medalles més de bronze que de plata. Quantes medalles va obtenir de cada tipus?

Hi ha tres incògnites:

$o =$ or, $p =$ plata, $b =$ bronze

1a equació: $o + p + b = 11$

2a equació: $o = p$

3a equació: $b = p + 2$

El sistema d'equacions és:

$$\left.\begin{array}{r} o + p + b = 11 \\ o = p \\ b = p + 2 \end{array}\right\}$$

El resolem per substitució. Substituïm o i b en la primera equació:

$$p + p + (p + 2) = 11, \text{ d'on } p = 3$$

Per tant, va obtenir: or $= 3$, plata $= 3$ i bronze $= 5$.

RESOL LES ACTIVITATS

a) *Els països de la taula van obtenir entre Sydney i Atlanta 468 medalles. A Atlanta se'n van aconseguir 10 més que a Sydney. Quantes en van obtenir en cadascun dels Jocs Olímpics?*

b) *Itàlia va obtenir a Sydney 34 medalles. D'or i de bronze en va aconseguir el mateix nombre, i d'or en va obtenir cinc més que de plata. Quantes medalles va obtenir de cada tipus?*

Respostes:

Geometria

Per fer-nos una idea...

ÀREES

- **ÀREES DE POLÍGONS**
  - PARAL·LELOGRAMS
    - QUADRAT
    - RECTANGLE
    - ROMBE
    - ROMBOIDE
  - TRIANGLES
  - TRAPEZIS
  - POLÍGONS REGULARS
- **ÀREES DE FIGURES CIRCULARS**
  - CERCLE
    - SECTOR CIRCULAR
    - CORONA CIRCULAR

PERÍMETRES

- LONGITUD D'UNA CIRCUMFERÈNCIA
- LONGITUD D'UN ARC DE CIRCUMFERÈNCIA

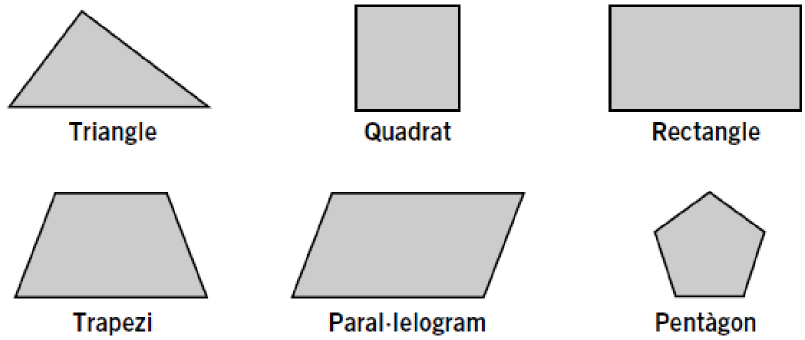
Convé que recordis...

CONVÉ QUE...

Repassis les principals **figures planes**.

PERQUÈ...

T'ajudarà a treballar amb cossos geomètrics.

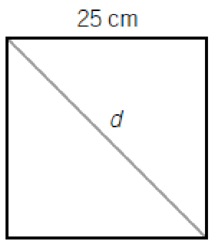


CONVÉ QUE...

Sàpigues aplicar el **teorema de Pitàgores** en el pla.

PERQUÈ...

L'hauràs de fer servir per calcular àrees de poliedres.



Per calcular la diagonal d'un quadrat el costat del qual fa 25 cm, apliquem el teorema de Pitàgores.

$$d^2 = 25^2 + 25^2 = 1.250$$

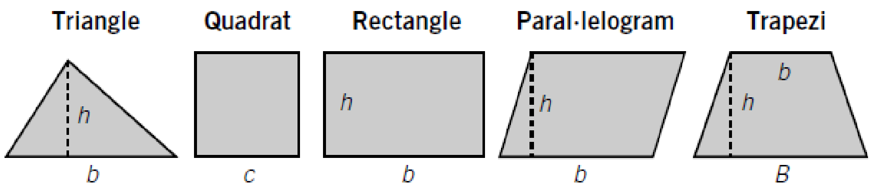
$$d = \sqrt{1.250} = 35{,}4 \text{ cm}$$

CONVÉ QUE...

Coneguis les **àrees de les figures planes**.

PERQUÈ...

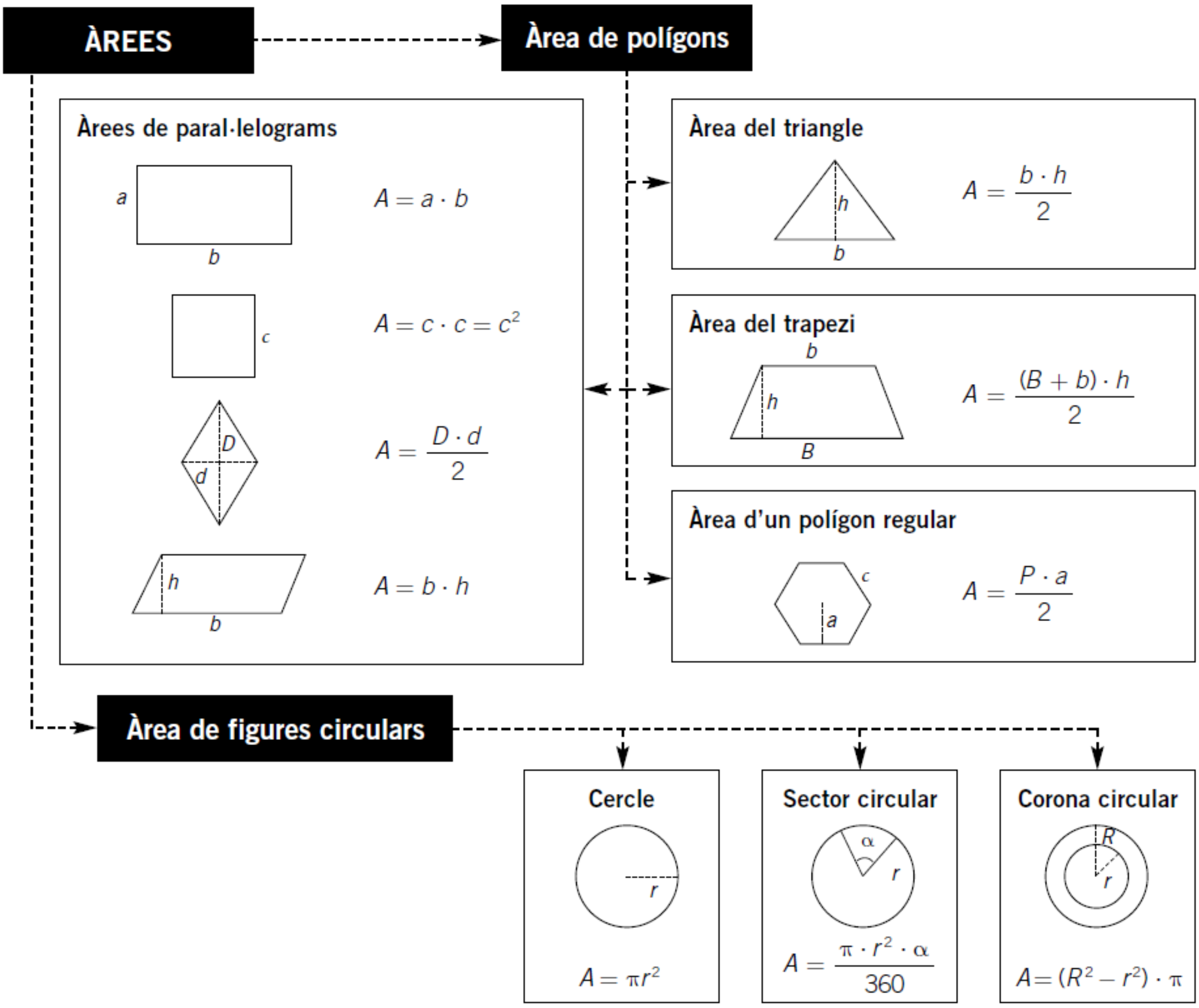
Et servirà per calcular les àrees dels cossos geomètrics.



$$A_{\text{Triangle}} = \frac{b \cdot h}{2} \qquad A_{\text{Rectangle}} = b \cdot h \qquad A_{\text{Trapezi}} = \frac{(B + b) \cdot h}{2}$$

$$A_{\text{Quadrat}} = c^2 \qquad A_{\text{Paral·lelogram}} = b \cdot h$$

Resum de la unitat:



I ara, apliquem...

A LA VIDA QUOTIDIANA... Disseny i moviments

En aquest projecte pretenem que aprenguis a:

• Utilitzar diferents tipus de mosaics per cobrir el pla i decorar-lo. • Calcular perímetres i àrees de rajoles amb diferents formes que cobreixen el pla.

1 Mosaics regulars

La Lluïsa té una empresa de fabricació de rajoles i ha rebut l'encàrrec d'un ajuntament de fer uns dissenys per pavimentar i decorar els carrers.

Per resoldre el problema, la Lluïsa ha de fer dissenys de mosaics. Un mosaic el formem amb la juxtaposició de figures planes, de manera que cobreixen tot el pla, és a dir, sense que quedin buits ni se solapin entre elles.

La Lluïsa ha decidit inicialment treballar amb mosaics regulars, els que es formen fent servir només polígons regulars iguals, però de seguida s'ha adonat que és més fàcil formar mosaics amb triangles equilàters, quadrats i hexàgons.

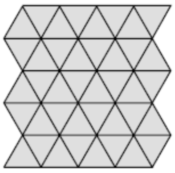
Per tant, decideix proposar els tres dissenys que mostrem, amb rajoles en forma de triangle equilàter, quadrat i hexàgon regular, respectivament.

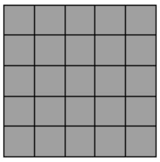
Observa que, perquè es formi un mosaic, la suma de tots els angles coincidents en cada vèrtex del mosaic ha de ser igual a 360°.

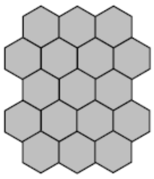
FES LES ACTIVITATS

a) *Aquests tres polígons regulars, són els únics que formen mosaics regulars? Treballa amb els divisors de 360° i recorda que l'angle interior d'un polígon regular de* n *costats fa:* $180° \cdot (n - 2)/n$.

b) *Totes les rajoles que ha dissenyat la Lluïsa fan 30 cm de costat. Calcula quantes rajoles necessitarà l'ajuntament per enrajolar 10.000 m² si fa servir triangles equilàters, quadrats o hexàgons regulars.*





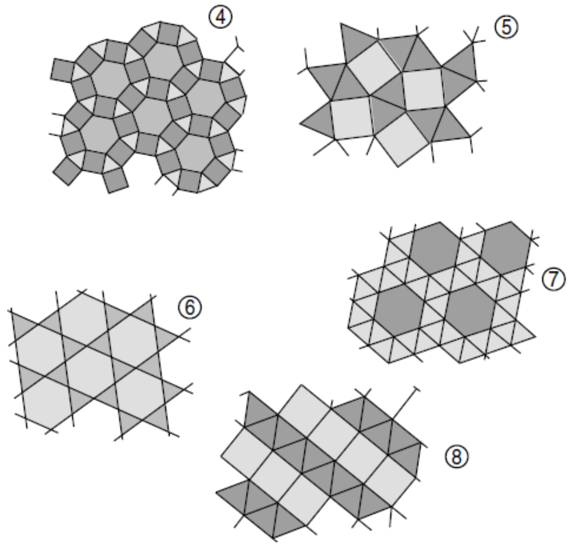


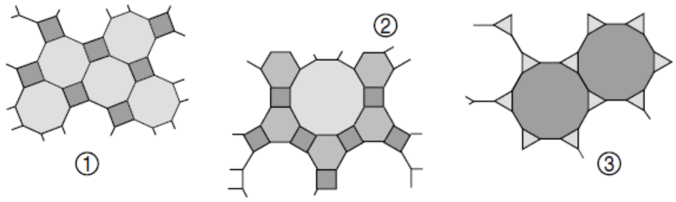
Respostes:

2 Mosaics irregulars

La Lluïsa decideix incloure també alguns dissenys de rajoles basats en els mosaics semiirregulars, els que fan servir dos o més tipus de polígons regulars, de manera que al voltant de cada vèrtex trobem sempre els mateixos polígons i en ordre idèntic.

Com en els mosaics anteriors, la suma dels angles coincidents en cada vèrtex ha de ser de 360°. Hi ha vuit mosaics semiirregulars, que són els que mostrem a continuació.





FES AQUESTES ACTIVITATS

a) *Comprova que tots els mosaics semiirregulars compleixen la relació numèrica que els correspon, si* m, n, p, q, r *i* s, *són el nombre de costats dels polígons que coincideix en cada vèrtex del mosaic.*

Per a tres polígons tenim que:

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{p} = \frac{1}{2}$$

I per a quatre, cinc i sis polígons:

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = \frac{3}{2}$$

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} + \frac{1}{s} = 2$$

b) *La Lluïsa decideix presentar com a dissenys semiirregulars els següents i pren com a peça base de cada mosaic:*

- *Mosaic ④: un hexàgon més els 6 quadrats i els 6 triangles que els envolten.*
- *Mosaic ⑤: un quadrat més els 4 triangles que l'envolten.*
- *Mosaic ⑥: un hexàgon més els 6 triangles que l'envolten.*
- *Mosaic ⑦: un hexàgon més els 18 triangles que l'envolten.*
- *Mosaic ⑧: un quadrat més els 2 triangles dels seus costats oposats.*

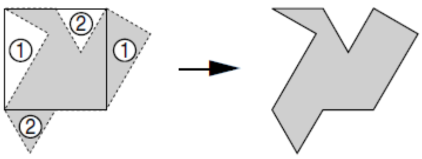
Calcula el perímetre i l'àrea de cada peça base, si saps que tots els triangles que apareixen són equilàters i fan 10 cm de costat.

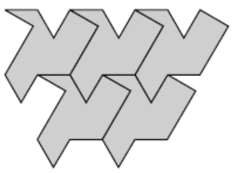
Respostes:

3 Mosaics pararegulars

La Lluïsa decideix proposar a l'ajuntament alguns dissenys de mosaics que no estiguin basats en polígons regulars. Quan fem servir polígons no regulars que permeten cobrir correctament el pla, el mosaic format l'anomenem **pararegular**.

Podem aconseguir mosaics pararegulars unint peces iguals obtingudes a partir de la deformació de polígons regulars. Observa l'exemple en què es deforma el quadrat.





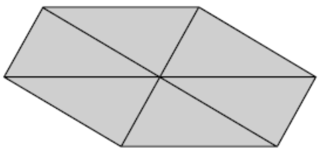
FES LES ACTIVITATS

a) *Si el quadrat que deforma la Lluïsa per obtenir la peça fa 10 cm de costat, quina àrea té, aquesta peça?*

b) *Troba el perímetre d'aquesta peça si saps que els triangles rectangles ① que apareixen a la deformació tenen catets de 6 cm i 8 cm, respectivament, i els equilàters ② tenen 5 cm de costat.*

c) *Construeix dos mosaics a partir de les peces obtingudes deformant un polígon regular. Quina àrea té cadascuna d'aquestes peces?*

Investigant, la Lluïsa observa també que amb qualsevol triangle és possible aconseguir mosaics que cobreixin tot el pla.



FES LES ACTIVITATS SEGÜENTS

a) *Explica com es pot formar un mosaic a partir d'un triangle qualsevol.*

b) *Passa el mateix amb un quadrilàter qualsevol? Raona la resposta.*

c) *Existeix un pentàgon els costats del qual són de la mateixa longitud i amb el qual es poden formar mosaics. Dibuixa'l.*

Respostes:

Per si t'ha faltat espai...