Matemáticas Ii
Exámenes resueltos
MODELO 2019)

Iñigo Zunzunegui Monterrubio

25 de abril de 2019

2019

Modelo 2019

Modelo 2019
Opción A

Ejercicio 1 (2.5 *puntos*)

Para cada uno de los siguientes apartados proponga un ejemplo de matriz cuadrada A, de dimensión 3×3, con todos sus números distintos de cero y con sus tres filas y columnas diferentes, que cumpla la condición pedida.

a) El determinante de A vale 0.

b) El determinante de A vale 1.

c) La matriz A coincide con su traspuesta.

d) Para una cierta matriz cuadrada C, distinta de la matriz nula y de la identidad, se verifica que $A \cdot C = C \cdot A$. (Debe proponer ejemplos concretos para las dos matrices A y C)

(Madrid - Matemáticas II - Modelo 2019 - Opción A)

Solución.

a) Para que $|A| = 0$ vamos a elegir A de forma que $F_3 = F_1 + F_2$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 5 & 7 & 9 \end{pmatrix}$$

b) Proponemos tres maneras diferentes de hacerlo:

1) Cogemos una matriz diagonal A, con $|A| = 1$ (producto de la diagonal principal) y la transformamos utilizando las propiedades de los determinantes de forma que no se altere el valor del mismo:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 = \begin{matrix} \\ F_2 + F_1 \\ F_3 + F_1 \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} \Longrightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

2) Dividiendo una fila de una matriz por su determinante (siendo éste no nulo) obtenemos una matriz de determinante igual a 1.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -2 \end{vmatrix} = -3 \implies A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ -1/3 & 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$$

3) Cogemos una matriz cualquiera sin ceros y con un parámetro a. Hallamos su determinante y obligamos a que valga 1.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & a \end{pmatrix} \implies |A| = 2a - 2 = 1 \implies a = \frac{3}{2}$$

$$\implies A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 3/2 \end{pmatrix}$$

c) Cualquier matriz simétrica cumple la condición de que $A = A^\top$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

d) Como los elementos de la matriz C no están obligados a ser distintos de cero, podemos tomar $C = k \cdot I$, siendo $k \neq 0$. De esta forma:

$$A \cdot C = A \cdot k \cdot I = kA \qquad \& \qquad CA = k \cdot I \cdot A = kA, \text{ luego } A = \begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix}$$

Ejercicio 2 (2.5 *puntos*)

La contaminación por dióxido de nitrógeno, NO_2, en cierta estación de medición de una ciudad, durante el pasado mes de abril, se puede modelar por la función $c(t) = 80 - 6t + \frac{23t^2}{20} - \frac{t^3}{30}$ mg/m^3, donde $t \in [0, 30]$ representa el tiempo, expresado en días, transcurrido desde las 0 horas del día 1 de abril.

a) ¿Qué nivel de NO_2, había a las 12 horas del día 10 de abril?

b) ¿En qué momento se alcanzó el máximo nivel de NO_2?, ¿cuál fue ese nivel máximo?

c) Calcule, mediante $\frac{1}{30}\int_0^{30} c(t)\,dt$, el nivel promedio del mes.

(Madrid - Matemáticas II - Modelo 2019 - Opción A)

Solución.

a) Hasta las 12 horas del día 10 de abril han transcurrido $t = 9.5$ días.

$$c(9.5) = 80 - 6 \cdot 9.5 + \frac{23 \cdot 9.5^2}{20} - \frac{9.5^3}{30} = 98.21 \ mg/m^3$$

b) Los puntos singulares se encuentran en $c'(t) = 0$

$$c'(t) = -6 + \frac{23t}{10} - \frac{t^2}{10} = 0 \Longrightarrow t^2 - 23t + 60 = 0 \Longrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = 20 \end{cases}$$

$$c''(t) = \frac{23}{10} - \frac{t}{5} \Longrightarrow \begin{cases} c''(3) = \frac{23}{10} - \frac{3}{5} = \frac{17}{10} > 0 \overset{(\cup)}{\Longrightarrow} \text{Mínimo} \\ c''(20) = \frac{23}{10} - \frac{20}{5} = -\frac{17}{10} < 0 \overset{(\cap)}{\Longrightarrow} \text{Máximo} \end{cases}$$

El máximo se da el día 20, siendo $c(20) = 80 - 6\cdot 20 + \frac{23\cdot 20^2}{20} - \frac{20^3}{30} = 153.33\ mg/m^3$

c)

$$\frac{1}{30}\int_0^{30} c(t)\,dt = \frac{1}{30}\int_0^{30}\left(80 - 6t + \frac{23t^2}{20} - \frac{t^3}{30}\right)dt = \frac{1}{30}\left(80t - 3t^2 + \frac{23t^3}{60} - \frac{t^4}{120}\right)\Bigg]_0^{30}$$

$$= \frac{1}{30}\left(80\cdot 30 - 3\cdot 30^2 + \frac{23\cdot 30^3}{60} - \frac{30^4}{120}\right) - (0) = 110\ mg/m^3$$

Ejercicio 3 (2.5 *puntos*)

Dados los puntos $A(1,2,-3)$, $B(1,5,0)$, $C(5,6,-1)$ y $D(4,-1,3)$, se pide:

a) Calcular el plano π que contiene a los puntos A, B, C y la distancia del punto D a dicho plano.

b) Calcular el volumen del tetraedro definido por los cuatro puntos dados.

c) Calcular el área del triángulo definido por A, B y C.

(Madrid - Matemáticas II - Modelo 2019 - Opción A)

Solución.

$$\text{a)}\ \pi \in \begin{cases} A(1,2,-3) \\ B(1,5,0) \\ C(5,6,-1) \end{cases} \Longrightarrow \pi \equiv \begin{cases} A(1,2,-3) \\ \overrightarrow{AB} = (0,3,3) \\ \overrightarrow{AC} = (4,4,2) \end{cases}$$

$$\pi \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z+3 \\ 0 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow \boxed{\pi \equiv -x + 2y - 2z - 9 = 0}$$

$$d(D,\pi) = \frac{|-4 + 2\cdot(-1) - 2\cdot 3 - 9|}{\sqrt{(-1)^2 + 2^2 + (-2)^2}} = \frac{21}{3} = 7\ u$$

b) $\overrightarrow{AD} = (3,-3,6)$

$$Vol_{ABCD} = \frac{1}{6}\cdot\left|\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right| = \frac{1}{6}\cdot\left\|\begin{matrix} 0 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 2 \\ 3 & -3 & 6 \end{matrix}\right\| = \frac{|-126|}{6} = 21\ u^3$$

c) $$Area_{\overset{\triangle}{ABC}} = \frac{1}{2} \cdot \left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 2 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \cdot |(-6, 12, .12)| = \frac{\sqrt{324}}{2} = 9\ u^2$$

—————— ○ ——————

Ejercicio 4 (2.5 *puntos*)

El examen de oposición a la Administración Local de cierta ciudad consta de 300 preguntas, con respuesta verdadero o falso. Un opositor responde al azar todas las preguntas. Se considera la variable aleatoria X ("número de respuestas acertadas") y se pide:

a) Justificar que la variable X se puede aproximar por una normal y obtener los parámetros correspondientes.

b) Utilizando la aproximación por la normal, hallar la probabilidad de que el opositor acierte a lo sumo 130 preguntas y la probabilidad de que acierte exactamente 160 preguntas.

(Madrid - Matemáticas II - Modelo 2019 - Opción A)

Solución.

a) Se trata de un experimento aleatorio en donde los resultados posibles son *acierto* y *fallo*, con probabilidad de 1/2 en cada caso. Se repite el experimento 300 veces, por lo tanto X es una binomial $\mathcal{B}(300; 0.5)$, en donde $n = 300$ y $p = 0.5 = q$. Como $np = 150 > 5$ y $nq = 150 > 5$ se puede aproximar por una normal

$$\mathcal{N}(np; \sqrt{npq}) \sim \mathcal{N}(150; 8.66)$$

b)
- La probabilidad $P(X' \leq 130) = P(X \leq 130.5)$ aplicando la aproximación por continuidad de Yates.

$$P(X \leq 130.5) = P\Big(Z \leq \frac{130.5 - 150}{8.66}\Big) = P(Z \leq -2.25) = P(Z \geq 2.25)$$
$$= 1 - P(Z \leq 2.25) = 1 - 0.9878 = 0.0122$$

- De igual manera $P(X' = 160) = P(159.5 \leq X \leq 160.5)$

$$P(159.5 \leq X \leq 160.5) = P\Big(\frac{159.5 - 150}{8.66} \leq Z \leq \frac{160.5 - 150}{8.66}\Big)$$
$$= P(1.10 \leq Z \leq 1.21) = P(Z \leq 1.21) - P(Z \leq 1.10)$$
$$= 0.8869 - 0.8643 = 0.0226$$

—————— ○ ——————

2019 Modelo
Opción B

Ejercicio 1 (2.5 *puntos*)

Dado el sistema de ecuaciones: $\begin{cases} x - my - z = 0 \\ mx - 4y + (6-2m)z = -8m \\ -x + 2y + z = 6 \end{cases}$ *, se pide*

a) Discutir el sistema en unción de los valores del parámetro m.

b) Resolver el sistema en el caso $m = 6$.

(Madrid - Matemáticas II - Modelo 2019 - Opción B)

Solución.

a) Escribimos el sistema en forma matricial y hallamos el determinante de la matriz de coeficientes A.

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -m & -1 & 0 \\ m & -4 & 6-2m & -8m \\ -1 & 2 & 1 & 6 \end{array}\right) \Longrightarrow |A| = -m^2+8m-12 = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = 2 \\ m = 6 \end{cases}$$

- Si $m \neq \{2, 6\}$ $\quad |A| \neq 0 \Longrightarrow \text{ran}(A) = 3 = \text{ran}(A^*) = \text{n}^{\text{o}}$ incóg. $\Longrightarrow$ Sistema Compatible Determinado (Solución única).

- Si $m = 2 \Longrightarrow A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 2 & -4 & 2 & -16 \\ -1 & 2 & 1 & 6 \end{array}\right)$

  $|A| = 0 \Longrightarrow \text{ran}(A) < 3$ y como $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \neq 0 \Longrightarrow \text{ran}(A) = 2$

  $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & -16 \\ -1 & 1 & 6 \end{vmatrix} = 24 \neq 0 \Longrightarrow \text{ran}(A^*) = 3$

  $\text{ran}(A) = 2 \neq \text{ran}(A^*) = 3 \Longrightarrow$ Sistema Incompatible (No tiene solución)

- Si $m = 6 \Longrightarrow A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -6 & -1 & 0 \\ 6 & -4 & -6 & -48 \\ -1 & 2 & 1 & 6 \end{array}\right)$

  $|A| = 0 \Longrightarrow \text{ran}(A) < 3$ y como $\begin{vmatrix} 1 & -6 \\ 6 & -4 \end{vmatrix} \neq 0 \Longrightarrow \text{ran}(A) = 2$

  $\begin{vmatrix} 1 & -6 & 0 \\ 6 & -4 & -48 \\ -1 & 2 & 6 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow \text{ran}(A^*) = 2$

  $\text{ran}(A) = 2 = \text{ran}(A^*) \neq \text{n}^{\text{o}}$ incóg. $\Longrightarrow$ Sistema Compatible Indeterminado (Infinitas soluciones)

b) Resolvemos el sistema para $m = 6$ por el método de Gauss. Como estamos ante un S.C.I. solamente vamos a resolver las ecuaciones correspondientes al menor de orden

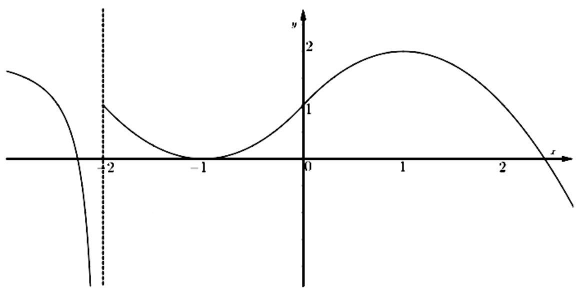
2 encontrado en la discusión. Así:

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & -6 & -1 & 0 \\ 6 & -4 & -6 & -48 \end{array}\right) \sim_{F_2 - 6F_1} \sim \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & -6 & -1 & 0 \\ 0 & 32 & 0 & -48 \end{array}\right)$$

$$\Longrightarrow \begin{array}{c} x - 6\cdot\left(-\frac{3}{2}\right) - \lambda = 0 \\ 32y = -48 \\ z = \lambda \end{array} \Longrightarrow \boxed{\begin{array}{c} x = \lambda - 9 \\ y = -3/2 \\ z = \lambda \end{array}}$$

Ejercicio 2 (2.5 *puntos*)

a) *A partir de la siguiente gráfica de la función f, determine los valores de:* $f'(-1)$, $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to -2^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.



b) *Calcule* $\displaystyle\int_{-3}^{\pi} g(x)\,dx$, *donde* $g(x) = \begin{cases} x^2 + 2x + 1 & si \quad -3 \le x \le 0 \\ 1 + \operatorname{sen} x & si \quad 0 < x \le 4 \end{cases}$

(Madrid - Matemáticas II - Modelo 2019 - Opción B)

Solución.

a)
- $f'(-1) = 0$, pues es un mínimo de $f(x)$.
- $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x) = 1$
- $\lim\limits_{x\to -2^-} f(x) = -\infty$
- $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$

b)
$$\int_{-3}^{\pi} g(x)\,dx = \int_{-3}^{0} (x^2 + 2x + 1)\,dx + \int_{0}^{\pi} (1 + \operatorname{sen} x)\,dx = \left.\frac{x^3}{3} + x^2 + x\right]_{-3}^{0}$$
$$+\, x - \cos x]_0^{\pi} = (0) - \left(\frac{(-3)^3}{3} + (-3)^2 + (-3)\right)$$
$$+\left(\pi - \cancel{\cos\pi}^{\,-1}\right) - \left(0 - \cancel{\cos 0}^{\,1}\right) = 3 + \pi + 2 = \pi + 5$$

Ejercicio 3 (2 *puntos*)

Dadas las rectas $r \equiv \begin{cases} x = 2+\lambda \\ y = 3+\lambda \\ z = 1-\lambda \end{cases}$ & $s \equiv \begin{cases} x - y = 2 \\ y + z = 1 \end{cases}$ *, se pide:*

a) Determinar la posición relativa de r y s.

b) Obtener un plano que contenga a las dos rectas.

c) Dado el punto $A(3,1,0)$, de la recta s, obtener un punto B, de la recta r, de modo que el vector $\overrightarrow{AB}$ sea perpendicular a la recta r.

(Madrid - Matemáticas II - Modelo 2019 - Opción B)

Solución.

$$r \equiv \begin{cases} P(2,3,1) \\ \vec{d_r} = (1,1,-1) \end{cases} \qquad s \equiv \begin{cases} Q(2,0,1) \\ \vec{d_s} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-1,-1,1) \end{cases} \qquad \overrightarrow{PQ} = (0,-3,0)$$

a) $\left[\overrightarrow{PQ}, \vec{d_r}, \vec{d_s}\right] = \begin{vmatrix} 0 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$ & $\operatorname{ran}\left[\overrightarrow{PQ}, \vec{d_r}\right] = 2$ & $\operatorname{ran}\left[\vec{d_r}\vec{d_s}\right] = 1$

Las rectas r y s son paralelas.

b) $\pi \equiv \begin{cases} P(2,3,1) \\ \vec{d_r} = (1,1,-1) \\ \overrightarrow{PQ} = (0,-3,0) \end{cases} \equiv \begin{vmatrix} x-2 & y-3 & z-1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 0 \end{vmatrix} = 0 \implies \boxed{\pi \equiv x + z - 3 = 0}$

c) $\begin{cases} A(3,1,0 \\ B(2+\lambda, 3+\lambda, 1-\lambda)) \end{cases}$. Si $\overrightarrow{AB} = (-1+\lambda, 2+\lambda, 1-\lambda) \perp \vec{d_r} \implies \overrightarrow{AB} \cdot \vec{d_r} = 0$

$-1+\lambda+2+\lambda-1+\lambda = 0 \implies \lambda = 0 \implies B(2,3,1)$

Ejercicio 4 (2.5 *puntos*)

El grupo de WhatsApp, formado por los alumnos de una escuela de idiomas, está compuesto por un 60 % de mujeres y el resto varones. Se sabe que el 30 % del grupo estudia alemán y que la cuarta parte de las mujeres estudia alemán. Se recibe un mensaje en el grupo. Se pide:

a) Calcular la probabilidad de que lo haya enviado una mujer, si se sabe que el o la remitente estudia alemán.

b) Si en el mensaje no hay ninguna información sobre el sexo y estudios del remitente, calcular la probabilidad de que sea varón y estudie alemán.

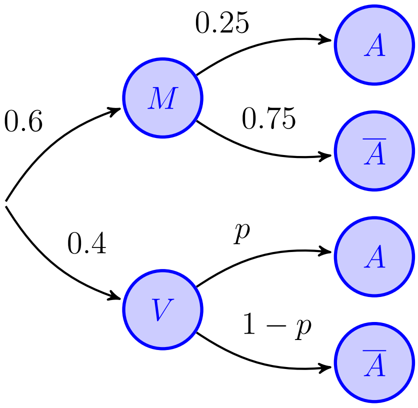
(Madrid - Matemáticas II - Modelo 2019 - Opción B)

Solución.

Denominamos los sucesos:

$$M \equiv \text{El mensaje lo envía una mujer}$$
$$V \equiv \text{El mensaje lo envía un hombre}$$
$$A \equiv \text{El remitente estudia alemán}$$

a) $P(M \mid A) = \dfrac{P(M \cap A)}{P(A)} = \dfrac{P(M) \cdot P(A \mid M)}{P(A)} = \dfrac{0.6 \cdot 0.25}{0.3} = 0.5$



b)

$$\begin{aligned} P(A) &= P(M \cap A) + P(V \cap A) \\ &= P(M) \cdot P(A \mid M) \\ &+ P(V) \cdot P(A \mid V) \\ &= 0.6 \cdot 0.25 + 0.4 \cdot p = 0.3 \\ &\implies p = 0.375 \\ P(V \cap A) &= P(V) \cdot P(A \mid V) = 0.4 \cdot 0.375 \\ &= 0.15 \end{aligned}$$