Matematika 2
zbirka zadataka

E. Kovač-Striko
N. Kapetanović
B. Ivanković

23. svibnja 2006.

Sadržaj

1 Matrice

1.1 Definicija i primjeri

Neka je

$$D = \{(i, j); \quad i = 1, \ldots, m; \quad i = 1, \ldots, n\}.$$

Realna matrica tipa $m \times n$ je funkcija

$$A : D \to R$$

čije su vrijednosti $A((i,j)) = a_{i,j}$, a koja se simbolično zapisuje u obliku

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Zadatak 1.1 *Tvornica cigareta proizvodi četiri tipa cigareta koje prodaje u pet gradova. Prodaja je tokom mjeseca imala slijedeće rezultate:*

- *prvi grad je prodao po tipovima: 40, 60, 20 i 30 tisuća kutija*
- *drugi grad: 50, 50,15 i 35 tisuća*
- *treći: 40,45,25,40*
- *četvrti: 30, 20, 10, 20,*
- *peti: 35, 40, 15 i 25 tisuća.*

Prikažite matrično rezultate prodaje.

Zadatak 1.2 *Nacrtajte graf od pet čvorova* $\{1, 2, 3, 4, 5\}$. *Spojite čvorove 1 i 2 i iznad spojnice napišite 35 koji simbolizira udaljenost komunikacije čvora 1 i 2. Nadalje spojite 1 i 3 spojnicom naznačene duljine 40, 1 i 5 duljine 30, 2 i 5 s 40, 5 i 3 s 25, 3 i 4 s 35 i 4 i 5 s 35.*

Matrično zapišite komunikacije tako da je element matrice jednak nuli u slučaju da između i-tog i j-tog čvora nema neposredne komunikacije.

Rješenje:

$$\mathcal{M} = \begin{bmatrix} 0 & 35 & 40 & 0 & 30 \\ 35 & 0 & 0 & 0 & 40 \\ 40 & 0 & 0 & 35 & 25 \\ 0 & 0 & 35 & 0 & 35 \\ 30 & 40 & 25 & 35 & 0 \end{bmatrix}$$

Zadatak 1.3 *Udaljenost čvorova u grafu je duljina najkraćeg puta između dva zadana čvora. Put u grafu je niz čvorova kod kojih su svaka dva susjedna povezana komunikacijom. Napišite matricu najkraćih udaljenosti čvorova iz Zadatka 2.*

Rješenje:

$$\mathcal{L} = \begin{bmatrix} 0 & 35 & 40 & 65 & 30 \\ 35 & 0 & 65 & 75 & 40 \\ 40 & 65 & 0 & 35 & 25 \\ 65 & 75 & 35 & 0 & 35 \\ 30 & 40 & 25 & 35 & 0 \end{bmatrix}$$

Posebne matrice:

1. kvadratna matrica: $m = n$
2. nul-matrica tipa $m \times n$:

$$a_{ij} = 0, \quad \forall i, j$$

3. dijagonalna matrica je kvadratna matrica: $i \neq j \Rightarrow a_{ij} = 0$:

$$d_{ij} = \delta_{ij} \cdot a_{ij}$$

4. jedinična matrica I ili E, je kvadratna matrica za koju vrijedi $e_{ij} = \delta_{ij}$
5. transponirana matrica matrice A tipa $m \times n$ je matrica A^T tipa $n \times m$, u kojoj je $(a_{ij})^T = (a_{ji})$
6. simetrična matrica je kvadratna matrica $A = A^T$
7. antisimetrična matrica je $A^T = -A$
8. gornja trokutasta matrica: $i > j \quad \Rightarrow a_{ij} = 0$
9. donja trokutasta matrica: $i < j \quad \Rightarrow a_{ij} = 0$

Zadatak 1.4 *Navedite po jedan primjer za svaku od matrica. Koristite se matricama najviše do* 4×4.

Zadatak 1.5 *Napišite simetričnu donjotrokutastu matricu i antisimetričnu gornjotrokutastu matricu reda 3.*

1.2 Zbrajanje matrica. Množenje matrice skalarom.

Zadatak 5. Ako pretpostavimo da će svaki mjesec prodaja cigareta biti povećana za 10%, izračunajte predvidjenu prodaju za iduća dva mjeseca i ukupnu predvidjenu prodaju u tromjesečju.

Zbrajanje matrica istog tipa daje ponovno matricu tog tipa čije elemente dobivamo zbrajanjem po elementima matrica pribrojnika

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}.$$

Množenje matrice skalarom izvodi se tako, da skalarom pomnožimo svaki član matrice posebno. Pritom se tip matrice ne mijenja

$$\lambda \cdot A = (\lambda \cdot a_{ij}).$$

Svojstva zbrajanja su

1. asocijativnost
2. postoji neutralan element, nul-matrica
3. svaka matrica ima suprotnu
4. komutativnost

Množenje skalarom prema zbrajanju je:

1. kvaziasocijativnost
2. distributivnost prema zbrajanju matrica
3. distributivnost prema zbrajanju skalara
4. $1 \cdot A = A$

Zadatak 6. Ispitajte svojstva zbrajanja za proizvoljne matrice.

1.3 Množenje matrica

Umnožak matrice A tipa $m \times n$ i matrice B tipa $n \times p$ je matrica C tipa $m \times p$ čiji se elementi dobivaju

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot b_{kj}.$$

Matrice A i B su ulančane i matrica B se nadovezuje na matricu A. Obratno ne vrijedi.

Zadatak 1.6 *Primjenom definicije pomnožite zadane matrice:*

1.

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$$

2.

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 3 & -4 & 1 \\ 2 & -5 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

Rješenja: *1.* $\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 0 \end{bmatrix}$; *2.* $\begin{bmatrix} 1 & 5 & -5 \\ 3 & 10 & 0 \\ 2 & 9 & -7 \end{bmatrix}$

Kvadratne matrice reda n zatvorene su za množenje matrica. Množenje kvadratnih matrica nije komutativno.

Jedinična matrica reda n neutralan je element za množenje.

Determinante koje se mogu računati za kvadratne matrice, imaju vrlo prirodan odnos prema množenju matrica:

$$det(A \cdot B) = detA \cdot detB$$

poznatiji kao Binet-Cauchyjev teorem.

Zadatak 8. Provjerite svojstvo za slijedeće matrice:

a)

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$$

b)

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 8 & -4 \\ 6 & 9 & -5 \\ 4 & 7 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 4 & -1 & 3 \\ 6 & 9 & 5 \end{bmatrix}$$

c)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -4 \\ -1 & -2 & -4 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

Zadatak 9. Ako je $\varphi(x) = -2 - 5x + 3x^2$ i ako je $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$, koliko je $\varphi(A)$?

Zadatak 10. Izračunajte $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^n$ i $\begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}^n$.

Zadatak 11. Dokažite da svaka kvadratna matrica $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ zadovoljava uvjet:

$$A^2 - (a+d)A + (ad - bc)E = O,$$

gdje je E jedinična, a O nul-matrica. Na osnovu toga odredite matricu $\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & -a \end{bmatrix}\right)^4$.

Matrični polinom 1. Neka je matrica

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 1 \\ 3 & -5 & 2 \end{bmatrix}$$

i neka je zadan polinom $f(x) = 3x^2 - 2x + 5$. Izračunajte matricu $f(A)$.

Rješenje:

$$f(A) = \begin{bmatrix} 21 & -23 & 15 \\ -13 & 34 & 10 \\ -9 & 22 & 25 \end{bmatrix}.$$

2. Uvjerite se da matrica

$$B = \begin{bmatrix} 5 & 2 & -3 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

poništava polinom $f(x) = x^3 - 7x^2 + 13x - 5$.

Zadatak 1.7 *Sustav linearnih jednadžbi*

$$\begin{aligned}2x - y + 3z &= 9\\ 3x - 5y + z &= -4\\ 4x - 7y + z &= 5\end{aligned}$$

Napišite u matričnom obliku. Riješite sustav metodom eliminacije. Riješite sustav matrično.

Sustav nema rješenja. Izračunajte determinantu matrice sustava.

1.4 Inverzna matrica. Matrična jednadžba

Zadatak 1.8 *Metodom eliminacije rješite slijedeći sustav linearnih jednadžbi. Prepisivanje nepoznanica izbjegnite primjenjujući matrice.*

$$\begin{aligned}2x + y + 4z + 8t &= -1\\ x + 3y - 6z + 2t &= 3\\ 3x - 2y + 2z - 2t &= 8\\ 2x - y + 2z &= 4\end{aligned}$$

Rješenje: $x = 2, y = -3, z = -3/2, t = 1/2$

Regularna matrica M je kvadratna matrica za koju je $detM \neq 0$. Matrice koje nisu regularne nazivaju se **singularnima**.

Matrica sustava je matrica koeficijenata koji se nalaze uz nepoznanice u sustavima linearnih jednadžbi. Postoji prirodna veza između rješivosti sistema n linearnih jednadžbi s n nepoznanica i regularnosti matrice sustava.

Primjer 1.1 *Izračunati Lagrangeovim razvojem po četvrtom stupcu determinantu matrice sustava sistema linearnih jednadžbi iz Zadatka 8.*

Rješenje:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & -6 & 2 \\ 3 & -2 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{aligned}
&= -8\begin{vmatrix} 1 & 3 & -6 \\ 3 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} - (-2)\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & -6 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} + 0\cdot\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & -6 \\ 3 & -2 & 2 \end{vmatrix} = \\
&= -8(-2-6-6) + 2(-4-2-28) + 2(14-28) = \\
&= 112 - 68 - 28 = 16 \neq 0
\end{aligned}$$

Primjer 1.2 *Izračunati determinantu matrice iz Zadatka 7.*

Rješenje:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & -5 & 1 \\ 4 & -7 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Svojstvo invertibilnosti matrica obzirom na množenje još je jedna posljedica regularnosti kvadratne matrice. Svaka regularna matrica ima inverz obzirom na množenje:

$$detA \neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1} \qquad A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E.$$

Vrijede i određena svojstva:

$$\begin{aligned}
(AB)^{-1} &= B^{-1}A^{-1} \\
(A^T)^{-1} &= (A^{-1})^T \\
(A^k)^{-1} &= (A^{-1})^k
\end{aligned}$$

Inverznu matricu, ako postoji, moguće je dobiti elementarnim transformacijama inspiriranih metodom eliminacije varijabli u sistemima od n linearnih jednadžbi s n nepoznanica

$$\begin{aligned}
AX &= B \\
AX &= EB \\
A^{-1}AX &= A^{-1}EB \\
EX &= A^{-1}B.
\end{aligned}$$

Primjer 1.3 *Za matricu*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$$

odredite A^{-1}.

Rješenje. Konstruira se matrica 2×4:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ -3 & 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Dozvoljeno je

- dijeliti ili množiti redak brojem različitim od nule
- dodati ili oduzeti jedan redak od drugog.

Cilj: u lijevom krilu matrice dobiti jediničnu matricu.

Zadatak 1.9 *Primjenom prethodnog primjera riješite sustav zapisan matrično:*

$$AX = B,$$

gdje je

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 6 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Zadatak 1.10 *Odredite inverz matrice*

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

Provjerite rješenje množenjem matrice i njenog inverza.

Inverznu matricu moguće je dobiti i postupno:

$$A^{-1} = \frac{1}{detA} \cdot \widetilde{A}^T$$

gdje je $\widetilde{A}$ matrica algebarskih komplemenata.

Algebarski komplement je broj

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$$

gdje je Mij **minor** elementa a_{ij}: determinanta koju dobivamo brisanjem i-tog retka i j-tog stupca.

Matrica $\widetilde{A}^T$ naziva se adjungirana matrica matrice A.

Zadatak 12. Odredite inverzne matrice slijedećih matrica:

1. $$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

2. $$\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 7 & -4 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}.$$

3. $$\begin{bmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -38 & 41 & -34 \\ 27 & -29 & 24 \end{bmatrix}.$$

4. Izračunati $K \cdot L^{-1} \cdot M^{-1}$ ako je

$$K = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 4 \end{bmatrix}, \qquad L = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Rješenje: $\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Matrična jednadžba je jednadžba u kojoj se traži nepoznata matrica. Kod traženja nepoznanice moramo voditi računa o nekomutativnosti množenja matrica.

Riješite slijedeće matrične jednadžbe:

1. $$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{bmatrix}$$

2.

$$X \cdot \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -5 & 6 \end{bmatrix}$$

3.

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -2 \end{bmatrix} \cdot X \cdot \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & 16 \\ 9 & 10 \end{bmatrix}$$

4. Riješite matričnu jednadžbu:

$$X \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & -3 & 4 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Rješenja zadataka:

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}; \quad ?$$

1.5 Rang matrice

Linearno nezavisan skup vektora je ona kolekcija vektora

$$\{A_1, A_2, \dots, A_n\},$$

za koju se **linearna kombinacija**

$$\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \dots + \alpha_n A_n$$

poništava jedino za trivijalan izbor skalara

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0.$$

Najjednostavniji linearno nezavisni skup vektora je očito:

$$\{A_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}\}.$$

Očito takovih vektora može biti najviše onoliko, koliko vektori imaju komponenti. Taj broj ne mora biti broj n, već može biti $m \geq n$. Vektore gornjeg oblika nazivamo **Baznim vektorima**.

Rang matrice je najveći broj linearno nezavisnih stupaca kao vektora.

Elementarne transformacije nad retcima matrice su:

1. Zamjena dvaju redaka.
2. Množenje nekog retka skalarom različitim od nule.
3. Dodavanje nekog retka pomnoženog skalarom nekom drugom retku.

Elementarnim transformacijama ne mijenja se rang matrice. Cilj elementarnih transformacija je dobivanje što većeg broja baziĉnih stupaca.

Odredite rang slijedećih matrica:

1.
$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & -2 & 0 \\ -3 & 2 & 1 & -3 & 2 \\ -4 & 5 & 5 & -8 & 4 \end{bmatrix}$$

2.
$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & -2 & 1 \\ 4 & 5 & -3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Algoritam za nalaženje inverzne matrice sastoji se u tome, da se kvadratnoj matrici pripiše jedinična matrica istog tipa, a zatim se izvode elementarne transformacije u pokušaju da s lijeve strane dobijemo jediničnu. Ako je to moguće, tada se u desnom krilu dobiva inverzna matrica.

Odredite algoritmom inverze slijedećih matrica:

1.
$$\begin{bmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & -1 \end{bmatrix}$$

2.
$$\begin{bmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{bmatrix}$$

3.
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Rješenja zadataka:

$$\begin{bmatrix} -8 & 29 & -11 \\ -5 & 18 & -7 \\ 1 & -3 & 1 \end{bmatrix}; \quad \frac{-1}{3}\begin{bmatrix} -7 & 6 & -1 \\ 5 & -3 & -1 \\ -6 & 3 & 3 \end{bmatrix}; \quad \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Koristeći algoritam riješite matrične jednadžbe:

1.
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 10 & 2 & 7 \\ 10 & 7 & 8 \end{bmatrix}$$

2.
$$X \cdot \begin{bmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \\ -5 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 & 3 & 0 \\ -5 & 9 & 0 \\ -2 & 15 & 0 \end{bmatrix}$$

3.
$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \end{bmatrix} \cdot X \cdot \begin{bmatrix} 9 & 7 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 18 & 12 & 9 \\ 23 & 15 & 11 \end{bmatrix}$$

Rješenja jednadžbi:

$$\begin{bmatrix} 6 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

1.6 Linearni sustavi

Linearna jednadžba nad poljem realnih brojeva R u nepoznanicama

$$x_1, x_2, \ldots, x_n,$$

je izraz oblika

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n = \beta$$

Sistem linearnih jednadžbi je konačna kolekcija linearnih jednadžbi. Rješenje sistema koji ima n nepoznanica i m jednadžbi je uredjena n-torka brojeva $\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}$ čije uvrštavanje u sistem zadovoljava sve jednadžbe. Glede egzistencije i jednoznačnosti, sistem može:

1. biti nekonzistentan, nemati rješenje
2. imati jedinstveno rješenje
3. imati skup rješenja, koji je moguće suvislo zapisati

Efektivno rješavanje sistema provodi se izvodjenjem elementarnih transformacija na retcima proširene matrice sustava.

Riješite slijedeći sistem linearnih jednadžbi:

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + 11x_3 + 5x_4 &= 2 \\ x_1 + x_2 + 5x_3 + 2x_4 &= 1 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 &= -3 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= -3 \end{aligned}$$

(rješenje: $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

Cramerovim sustavima nazivamo sustave koji imaju jednoznačno rješenje. Determinanta matrice sustava u tom je slučaju različita od nule.

Homogeni sustav je onaj sustav kod kojeg su slobodni koeficijenti jednaki nuli. Sustav uvijek ima trivijalno rješenje. Neki slučajevi imaju beskonačno mnogo rješenja:

$$\begin{aligned} 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 + x_4 &= 0 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 5x_4 &= 0 \\ x_1 - x_2 - 4x_3 + 9x_4 &= 0 \end{aligned}$$

Reducirani sustav

$$\begin{aligned} x_3 &= \frac{39}{16} x_4 \\ x_2 &= \frac{143}{16} x_4 \\ x_1 &= \frac{155}{16} \end{aligned}$$

daje 1-parametarsko rješenje:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{155}{16} x_4 \\ \frac{143}{16} x_4 \\ \frac{39}{16} x_4 \\ x_4 \end{bmatrix} = \frac{1}{16} \cdot t \cdot \begin{bmatrix} 155 \\ 143 \\ 39 \\ 16 \end{bmatrix},$$

gdje t ima ulogu parametra, generatora rješenja. Kažemo da rješenje ima jednu dimenziju. Uočimo da je rang matrice sustava jednak 3. Dimenzija prostora u kojem tražimo rješenje je 4. Dimenzija rješenja homogenog sustava je 1, predstavlja dimenziju potprostora koji poništava sistem i naziva se defekt matrice sustava. Jednakost da rang i defekt zbrojeni daju broj varijabli je univerzalna dokazana činjenica poznata kao teorem o rangu i defektu.

Matrični zapis sistema jednadžbi

$$AX = B$$

ima geometrijsko objašnjenje iz tipova matrica:

$$m \times n \cdot n \times 1 = m \times 1,$$

jer se rezultat umnoška AX može interpretirati kao pridruživanje koje n-dimenzionalnom vektoru X pridruži m-dimenzionalni vektor B. Ukoliko je $B = 0$, tada tražimo one vektore koje matrica šalje u ishodište m-dimenzionalnog sustava. Defekt matrice je upravo dimenzija skupa takvih vektora.

Riješite nehomogeni sustav linearnih jednadžbi:

$$\begin{aligned} 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 &= 5 \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 &= 3 \\ x_1 + 5x_2 - 9x_3 + 8x_4 &= 1 \\ 5x_1 + 18x_2 + 4x_3 + 5x_4 &= 12 \end{aligned}$$

Redicirani sistem:

$$\begin{aligned} x_1 &= 6 - 26x_3 + 17x_4 \\ x_2 &= -1 + 7x_3 - 5x_4 \end{aligned}$$

Ima 2-dimenzionalno rješenje:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \cdot \begin{bmatrix} -26 \\ 7 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \cdot \begin{bmatrix} 17 \\ -5 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Uvjerite se da koordinate vektora izvodnica poništavaju sustav. To znači da je defekt matrice sustava 2 i da je dvodimenzionalni prostor poslan ovdje po matrici u ishodište susjednog, 4-dimenzionalnog sustava.

Rješavanjem sustava pokažite da je nekonzistentan:

$$\begin{aligned} 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 + 4x_4 &= 2 \\ 7x_1 - 4x_2 + x_3 + 3x_4 &= 5 \\ 5x_1 + 7x_2 - 4x_3 - 6x_4 &= 3 \end{aligned}$$

1.7 Problemski zadaci

1. Zadan je polinom $f(x) = 2x^3 + 4x - 7$ i matrica $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & -2 \end{bmatrix}$.

   Odredite matricu $f(A^{-1})$.

2. Riješite matričnu jednadžbu:

   $$(A - 2E)X = A + E$$

   ako je E jedinična matrica, dok je $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

3. Riješiti sustav Gauss-Jordanovom metodom eliminacije

   $$\begin{aligned} x_1 + x_2 - 6x_3 - 4x_4 &= 6 \\ 3x_1 - x_2 - 6x_3 - 4x_4 &= 2 \\ 2x_1 + 3x_2 + 9x_3 + 2x_4 &= 6 \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 8x_4 &= -7 \end{aligned}$$

4. Zapišite sva rješenja sistema linearnih jednadžbi

$$\begin{aligned}
3x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 4x_4 &= 2 \\
6x_1 - 4x_2 + 4x_3 + 3x_4 &= 3 \\
9x_1 - 6x_2 + 3x_3 + 2x_4 &= 4
\end{aligned}$$

5. Riješite metodom eliminacije varijabli:

$$\begin{aligned}
2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 &= 3 \\
4x_1 - 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 &= \\
2x_1 - x_2 + 5x_3 - 6x_4 &= 1 \\
2x_1 - x_2 - 3x_3 + 4x_4 &= 5
\end{aligned}$$

Rješenja problemskih zadataka:

1. $\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ -18 & -4 & 0 \\ 1 & 3 & -10 \end{bmatrix}$.

2. $X = \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 6 & 2 & 12 \\ -1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$

3. Rješenje: $x_1 = 0$; $\quad x_2 = 2$; $\quad x_3 = \frac{1}{3}$; $\quad x_4 = -\frac{3}{2}$.

4. $$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \\ -7 \end{bmatrix} + x_1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -15 \\ 18 \end{bmatrix} + x_2 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 10 \\ -12 \end{bmatrix}.$$

5. Sistem je inkonzistentan.

1.8 Ispitni zadaci

Zadaci su prepisani s ispitnih primjeraka i nemaju rješenja, no ona se provjerom mogu potvrditi ili opovrgnuti.

1. Zadan je polinom $f(x) = -81x^2+9x-2$ i matrica $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$.

   Izračunajte $f(A^{-1})$.

2. Simetričnim dijelom matrice A nazivamo matricu

   $$A_s = \frac{1}{2}(A + A^T).$$

   Odredite $41A_s^{-1}$ ako je zadana matrica

   $$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 3 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & -3 \end{bmatrix}.$$

3. Izračunajte $AB^{-1}C$ ako je $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$, $\quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\quad C = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$.

4. Izračunati $A^{-2}B$, gdje je $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$, $\quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ -16 \\ 12 \end{bmatrix}$.

5. Riješiti matričnu jednadžbu:

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot X \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

6. Riješiti matričnu jednadžbu, a potom izračunati $X \cdot X^T$.

$$X \cdot \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

7. Zapišite rješenje sistema:

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 &= 2 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 5x_4 &= 3 \\ 9x_1 + x_2 + 4x_3 - 5x_4 &= 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= 5 \\ 7x_1 + x_2 + 6x_3 - x_4 &= 7 \end{aligned}$$

8. Riješite homogeni sistem:

$$\begin{aligned} 2x_1 - 4x_2 + 5x_3 + 3x_4 &= 0 \\ 3x_1 - 6x_2 + 4x_3 + 2x_4 &= 0 \\ 4x_1 - 8x_2 + 17x_3 + 11x_4 &= 0 \end{aligned}$$

1.9 Input-output analiza

Input-output analiza zanimljiva je i za ekonomiste vrlo značanja materija.

U njoj se analizira gospodarstvo neke zemlje podijeljeno na sektore.

Neka je podjela ekonomije neke zamlje na 3 sektora zadana tablično:

Q_i	Q_{ij}			q_i
300	30	40	100	130
400	60	120	100	120
500	60	160	150	130

Stupac vrijednosti

$$Q_i, \quad i \in I = \{1, 2, 3\}$$

predstavlja ukupnu količinu proizvoda (outputa) proizvedenih u i-tom sektoru.

Elementi središnje matrice

$$Q_{ij}, \quad i, j \in I$$

predstavljaju količine outputa i-tog sektora koji je u j-tom sektoru u ulozi sirovine ili poluproizvoda.

Posljednji stupac

$$q_i, \quad i \in I$$

količina je finalne potražnje i-tog sektora. To može biti količina proizvoda koju dotočni sektor troši ili dio koji se kao roba može prodati na tržištu.

Temeljna pretpostavka input-output modela jest da se sva količina svakog outputa utroši ili kroz proizvodnu (međusektorsku) potrošnju:

$$Q_{ij}, \quad i, j \in I$$

ili kroz finalnu potrošnju:

$$q_i \quad i \in I.$$

Temeljna pretpostavka daje:

$$\begin{aligned} Q_1 &= Q_{11} + Q_{12} + Q_{13} + q_1 \\ Q_2 &= Q_{21} + Q_{22} + Q_{23} + q_2 \\ Q_3 &= Q_{31} + Q_{32} + Q_{33} + q_3, \end{aligned}$$

što se očito može u primjeru vidjeti.

Navedeni sustav jednadžbi ravnoteže može se zapisati

$$Q_i = \sum_{j=1}^{3} Q_{ij} + q_i, \quad i \in I.$$

Sustav općenito ima n jednadžbi i $n^2 + 2n$ mjesta za nepoznanice. Budući je svaka proizvodnja vezana uz određenu tehnologiju, uz nepromjenjene tehnološke uvjete proizvodnje udio i-tog sektora u jedinici proizvoda j-tog sektora je konstantna veličina.

Tehnički koeficijenti, normativi ili tehničke norme definiraju se formulama:

$$a_{ij} = \frac{Q_{ij}}{Q_j}, \quad i, j \in I$$

i predstavlja postotak količine proizvoda i-tog sektora u proizvodnji j-tog sektora, odnosno količinu proizvoda i-tog sektora potrebnu za jednu jedinicu proizvoda j-tog sektora:

$$Q_{ij} = a_{ij} Q_j.$$

Matrica tehničkih karakteristika u ovom je slučaju:

$$A = \begin{bmatrix} \frac{Q_{11}}{Q_1} & \frac{Q_{12}}{Q_2} & \frac{Q_{13}}{Q_3} \\ \frac{Q_{21}}{Q_1} & \frac{Q_{22}}{Q_2} & \frac{Q_{23}}{Q_3} \\ \frac{Q_{31}}{Q_1} & \frac{Q_{32}}{Q_2} & \frac{Q_{33}}{Q_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.1 & 0.2 \\ 0.2 & 0.3 & 0.2 \\ 0.2 & 0.4 & 0.3 \end{bmatrix}$$

Sada sustav može imati oblik:

$$Q_i = \sum_{j=1}^{3} a_{ij} Q_j + q_i, \quad i, j \in I,$$

ili u razvijenom obliku:

$$\begin{aligned} Q_1 &= a_{11}Q_1 + a_{12}Q_2 + a_{13}Q_3 + q_1 \\ Q_2 &= a_{21}Q_1 + a_{22}Q_2 + a_{23}Q_3 + q_2 \\ Q_3 &= a_{31}Q_1 + a_{32}Q_2 + a_{33}Q_3 + q_3 \end{aligned}$$

Sustav jednadžbi ravnoteže u matričnom obliku glasi:

$$Q = AQ + q$$

gdje je:

$$\begin{aligned} A &= (a_{ij}), \quad i,j \in I \\ Q &= (Q_i), \quad i \in I \\ q &= (q_i), \quad i \in I. \end{aligned}$$

Ovaj sustav ima općenito $2n$ nepoznanica, pa je potrebno znati njih n da bi se drugih n moglo jednoznačno odrediti. Moguća su slijedeća tri slučaja:

1. poznat je vektor ukupnih outputa Q
2. poznat je vektor finalne potražnje q
3. za neke sektore poznata je ukupna količina proizvoda, a za preostale količina finalne potražnje, to jest poznato je $Q_i, i \in J \subset I$ i $q_j, j \in I \setminus J$.

Sva se tri navedena slučaja vode na sustave od n lenearnih jednadžbi sa n nepoznanica.

1. Ako je poznat vektor ukupnih outputa Q, onda je moguće izračunati vektor finalne potražnje slijedom matričnih jednadžbi:

$$\begin{aligned} Q &= AQ + q \\ Q - AQ &= q \\ q &= (E - A)Q \end{aligned}$$

Matrica tehnologije definira se kao matrica

$$T = E - A.$$

U primjeru je

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.1 & 0.1 & 0.2 \\ 0.2 & 0.3 & 0.2 \\ 0.2 & 0.4 & 0.3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.9 & -0.1 & -0.2 \\ -0.2 & 0.7 & -0.2 \\ -0.2 & -0.4 & 0.7 \end{bmatrix}$$

Međusektorska potrošnja računa se posebno za svaki par sektora proizvodnje:

$$Q_{ij} = a_{ij} Q_j, \quad i,j \in I$$

ukoliko se tehnološki uvjeti proizvodnje nisu promijenili. Tehnološki uvjeti definiraju koeficijente a_{ij}.

Primjer Sastaviti novu input-output tablicu koja odgovara planu proizvodnje $Q_1 = 360$, $Q_2 = 480$ i $Q_3 = 600$.

Rješenje:

Vektor finalne potražnje q dobiva se po formuli

$$q = TQ$$

i daje:

$$q = \begin{bmatrix} 0.9 & -0.1 & -0.2 \\ -0.2 & 0.7 & -0.2 \\ -0.2 & -0.4 & 0.7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 360 \\ 480 \\ 600 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 156 \\ 144 \\ 156 \end{bmatrix}$$

Koeficijenti međusektorske potrošnje dobivaju se preko koeficijenat iz matrice tehničkih karakteristika:

$$\begin{array}{lll} Q_{11} = 36 & Q_{12} = 48 & Q_{13} = 120 \\ Q_{21} = 72 & Q_{22} = 144 & Q_{23} = 120 \\ Q_{31} = 72 & Q_{23} = 192 & Q_{33} = 180 \end{array}$$

Nova input-output tablica sada izgleda:

Q	Q_{ij}			q_i
360	36	48	120	156
480	72	144	120	144
600	72	192	180	156

i sve je u najboljem redu.

2. Ako je poznat vektor količina finalne potražnje, q, onda za vektor proizvodnje treba naći inverz matrice tehnologije:

$$\begin{aligned} q &= TQ \\ T^{-1}q &= Q \end{aligned}$$

Primjer. Odredite input-output tablicu prethodne ekonomije, ako finalna potrošnja treba iznositi: $q_1 = 143$, $q_2 = 132$ i $q_3 = 143$.

Rješenje.

Inverz matrice moguće je računati pomoću adjungirane matrice, radi decimalnih brojeva. Tako se dobiva:

$$T^{-1} = \frac{1}{0.307} \begin{bmatrix} 0,41 & 0,15 & 0,16 \\ 0,18 & 0,59 & 0,22 \\ 0,18 & 0,38 & 0,61 \end{bmatrix}$$

iz koje je

$$Q = \frac{1}{0.307}\begin{bmatrix} 0,41 & 0,15 & 0,16 \\ 0,18 & 0,59 & 0,22 \\ 0,18 & 0,38 & 0,61 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 143 \\ 132 \\ 143 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 330 \\ 440 \\ 550 \end{bmatrix}$$

Kada se doznaju količine proizvoda Q_i onda je relacijama

$$Q_{ij} = a_{ij} \cdot Q_j, \quad i,j \in I$$

moguće izračunati svaku međusektorsku potrošnju:

$$\begin{array}{lll} Q_{11} = 33 & Q_{12} = 44 & Q_{13} = 110 \\ Q_{21} = 66 & Q_{22} = 132 & Q_{23} = 110 \\ Q_{31} = 66 & Q_{23} = 176 & Q_{33} = 165 \end{array}$$

Konačno, nova input-output tablica:

Q	Q_{ij}			q_i
330	33	44	110	143
440	66	132	110	132
550	66	176	165	143

i sve je opet u najboljem redu.

3. Treći slučaj može tražiti sastavljanje input-output tablicu za proizvodnju prvog sektora od $Q_1 = 330$ jedinica i finalne potražnje ostalih sektora $q_2 = 132$ i $q = 143$.

   U ovom slučaju iz matrične jednadžbe ravnoteže

$$\begin{bmatrix} 0.9 & -0.1 & -0.2 \\ -0.2 & 0.7 & -0.2 \\ -0.2 & -0.4 & 0.7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 330 \\ Q_2 \\ Q_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_1 \\ 132 \\ 143 \end{bmatrix}$$

   izlazi sustav:

$$\begin{aligned} 297 - 0.1Q_2 - 0.2Q_3 &= q_1 \\ -66 + 0.7Q_2 - 0.2Q_3 &= 132 \\ -66 - 0.4Q_2 + 0.7Q_3 &= 143 \end{aligned}$$

koji se može zapisati u matričnom obliku kao

$$\begin{bmatrix} -0.1 & -0.2 & -1 \\ 0.7 & -0.2 & 0 \\ -0.4 & 0.7 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_2 \\ Q_3 \\ q_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -297 \\ 198 \\ 209 \end{bmatrix}$$

Nakon nalaženja inverzne matrice, moguće je dobiti $Q_2 = 440, Q_3 = 550$ i $q_1 = 143$.

Zadaci za vježbu

1. Zadana je matrica tehničkih koeficijenata:

$$\begin{bmatrix} 0.20 & 0.15 & 0.10 \\ 0.10 & 0.30 & 0.25 \\ 0.20 & 0.20 & 0.10 \end{bmatrix}$$

i vektor ukupne proizvodnje:

$$\begin{bmatrix} 100 \\ 200 \\ 100 \end{bmatrix}.$$

Sastavite pripadnu input-output tablicu.

2. Zadana je input-output jedne trosektorske ekonomije

Q_i	Q_{ij}			q_i
100	30	30	30	q_1
150	30	20	60	q_2
150	20	30	40	q_3

Ako se planira novi vektor ukupne proizvodnje

$$\begin{bmatrix} 110 & 165 & 165 \end{bmatrix},$$

kako će izgledati input-output tablica s istim tehnološkim uvjetima.

3. Zadana je matrica tehničkih koeficijenata

$$\begin{bmatrix} 0 & 0.1 & 0.2 \\ 0.3 & 0.2 & 0.4 \\ 0.2 & 0.3 & 0.1 \end{bmatrix}$$

i vektor finalne potražnje

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 19 \end{bmatrix}.$$

Sastavite pripadnu input-output tablicu.

4. Zadana je input-output tablica

Q_i	Q_{ij}			q_i
Q_1	30	20	20	30
Q_2	50	50	50	50
Q_3	50	20	20	10

Ako se planiraju nove ukupne proizvodnje $Q_1 = 110$ i $Q_3 = 220$, te nova finalna potražnja $q_2 = 165$, dok je tehnologija ista, sastavite novu tablicu.

Rješenja:

1.

Q_i	Q_{ij}			q_i
100	20	30	10	40
200	10	60	25	105
100	20	40	10	30

, 2.

Q_i	Q_{ij}			q_i
110	33	33	33	11
165	33	22	66	44
165	22	33	44	66

, 3.

Q_i	Q_{ij}			q_i
10	0	2	6	2
20	3	4	12	1
30	2	6	3	19

, 4.

Q_i	Q_{ij}			q_i
110	33	22	22	33
220	55	55	55	55
110	55	22	22	11

,

2 Redovi brojeva

2.1 Definicija i primjeri

Izraz

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

nazivamo redom. Važno je znati navesti formulu za opći član reda.

Napišite formule za n-ti član slijedećih redova:

1. $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \cdots$
2. $1 + \frac{2}{2} + \frac{3}{4} + \frac{4}{8} + \cdots$

3. $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \cdots$

4. $\frac{3}{4} + \frac{4}{9} + \frac{5}{16} + \frac{6}{25} + \cdots$

5. $\frac{2}{5} + \frac{4}{8} + \frac{6}{11} + \frac{8}{14} + \cdots$

6. $\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \frac{1}{42} + \cdots$

7. $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$

8. $1 + \frac{1}{2} + 3 + \frac{1}{4} + 5 + \frac{1}{6} + \cdots$

Iako je nemoguće neposredno pobrojati elemente sume, moguće je u nekim slučajevima sumu izračunati točno.

Zadatak 2.1 *Odredite sumu reda*

$$\frac{1}{1\cdot 4} + \frac{1}{2\cdot 5} + \frac{1}{3\cdot 6} + \cdots$$

Rješenje se dobiva trikom:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1\cdot 4} + \frac{1}{2\cdot 5} + \frac{1}{3\cdot 6} + \cdots &= \sum_{n=1}^{\infty} \\
\frac{1}{n(n+3)} &= \frac{A}{n} + \frac{B}{n+3} \\
&= \frac{1}{3n} - \frac{1}{3(n+3)} \\
\frac{1}{1\cdot 4} + \frac{1}{2\cdot 5} + \frac{1}{3\cdot 6} + \cdots &= \frac{1}{3} - \frac{1}{12} + \frac{1}{6} - \frac{1}{15} + \frac{1}{9} - \frac{1}{18} + \frac{1}{12} - \frac{1}{21} + \frac{1}{15} - \frac{1}{24} + \frac{1}{18} - \frac{1}{27} + \\
&\quad \frac{1}{21} - \frac{1}{30} + \cdots \\
&= \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{9} \\
&= \frac{11}{18}
\end{aligned}$$

Kod računanja sume reda bez smicalica teoretsku ulogu ima niz parcijalnih suma reda. Niz čine n-te parcijalne sume reda:

$$s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

Geometrijski red zadan je svojim jedinstvenim općim članom:

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n.$$

Mogućnost računanja sume izlazi iz analize niza parcijalnih suma.

Neki poznati identiteti i generalizacije:

$$\begin{aligned}
1-q^2 &= (1-q)(1+q) \\
1-q^3 &= (1-q)(1+q+q^2) \\
1-q^4 &= (1-q)(1+q+q^2+q^3) \\
&\vdots \\
1-q^n &= (1-q)(1+q+\cdots+q^{n-1})
\end{aligned}$$

Gornje jednakosti navode na formulu za računanje n-te sume geometrijskog reda:

$$1+q+q^2+\cdots+q^n = \frac{1-q^n}{1-q}$$

Suma reda jednaka je graničnoj vrijednosti niza parcijalnih suma. U slučaju geometrijskog reda to je

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1-q^n}{1-q}.$$

Limes postoji ako je

$$|q| < 1$$

i tada je

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}.$$

Zadaci:

1. Tvornica ulja proizvela je u prošlom mjesecu 6000 litara ulja, i odlučila svaki idući mjesec proizvoditi 40% manje ulja nego prethodni mjesec. Koliko ulja će ukupno proizvesti?

Rješenje:

$$\begin{aligned} 6000 + 40\% \cdot 6000 + (40\%)^2 \cdot 6000 + \cdots &= 6000 \cdot \sum_{i=0}^{\infty} (0.4)^n \\ &= 6000 \cdot \frac{1}{1 - 0.4} \\ &= 10000 \end{aligned}$$

litara ulja, bez obzira na to koliko dugo proizvodili.

2. U jednakostranični trokut upisan je krug, u taj krug opet trokut, u koji opet upišemo krug ... Nadjite zbroj površina svih tako nastalih jednakostraničnih trokut. Izračunajte zbroj površina svih tako nastalih krugova.

   Rješenje možemo dobiti jedino ako znamo formule za površinu jednakostraničnog trokuta stranice a_0:

$$P_0 = \frac{a_0^2\sqrt{3}}{4}$$

   i radijusa ρ_0 kružnice upisane jednakostraničnom trokutu:

$$\rho_0 = \frac{a_0\sqrt{3}}{6}.$$

   Taj isti ρ_0 polumjer je kružnice opisane trokutu stranice a_1:

$$\rho_0 = \frac{a_1\sqrt{3}}{3}$$

   pa izjednačavanjem

$$\begin{aligned} \frac{a_0\sqrt{3}}{6} &= \frac{a_1\sqrt{3}}{3} \\ a_1 &= \frac{a_o}{2} \end{aligned}$$

   Računanje površina daje:

$$\begin{aligned} P_0 &= \frac{a_0^2\sqrt{3}}{4} \\ P_1 &= \frac{a_1^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a_0^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{1}{4} \\ P_2 &= \frac{a_0^2\sqrt{3}}{4} \cdot (\frac{1}{4})^2 \end{aligned}$$

konačno tražena suma za trokute:

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} P_n &= P_0 + P_1 + P_2 + \cdots \\ &= \frac{a_0^2\sqrt{3}}{4} \cdot (1 + \frac{1}{4} + (\frac{1}{4})^2 + \cdots \\ &= \frac{a_0^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{4}} \\ &= \frac{a_0^2\sqrt{3}}{3}\end{aligned}$$

3. Odredite zbroj geometrijskog reda

$$16 + 12 + 9 + \frac{27}{4} + \cdots$$

Rješenje je 64.

Periodičke uplate pojedinca kojem se na jednake uplate iznosa R pribrajaju kamate trebale bi istog osigurati da nakon n uplata uz kamatnu stopu p koja se računa u vremenskim intervalima uplata, podigne odredjenu svotu. Radi kraćeg izgleda formule, uvodi se pojam kamatnog faktora

$$r = 1 + p.$$

Zbrajanjem uplata na koje se računaju kamate:

$$S = Rr + Rr^2 + Rr^3 + \cdots + Rr^n = Rr \cdot \frac{1-r^n}{1-r}.$$

Primjer 2.1

Izračunajte kolikom će svotom raspolagati osoba nakon što bi 35 godina svaki mjesec uplaćivala po 30 Eura, a Reiseheisenbakne banka bi joj davala 2.4% godišnje kamate. Računajte s konformnim mjesečnim kamatnim faktorom:

$$r = \sqrt[12]{1+p}$$

Rješenje je po meni 19755.80 Eura.

Akontacija ili **početna svota** koju bi danas trebalo staviti u banku ili fond, da bi uz odgovarajući kamatnjak p dizali periodički ratu R proizvoljno, ali konačno n-puta mnogo, očito je zbroj:

$$A = \frac{R}{r} + \frac{R}{r^2} + \ldots \frac{R}{r^n} = R \cdot \frac{1}{r^n} \cdot \frac{r^n - 1}{r - 1}$$

Primjer 2.2 *Kolika svota novca može na 10 godina osigurati krajem mjeseca* 300 *prihoda uz godišnju garantiranu kamatu* 2.2%*?*

Rješenje: Primjenom mjesečnog konformnog kamatnog faktora

$$r = \sqrt[12]{1+p} = 1,018151029$$

dobiva se tražena svota $A = 14,619.21$

Vječna renta osigurava se svotom

$$A = \lim_{n\to\infty} R \cdot \frac{1}{r^n} \cdot \frac{r^n - 1}{r - 1} =$$

Zadatak 2.2 *Izračunati potrebna sredstva za osiguravanje vječne rente od* 300

Rješenje: $A = 16,527.99$

Zadaci

1. Koliko bi se mjesečno trebalo uplaćivati u fond koji daje 2.2% godišnjih kamata da bi se nakon 30 godina imalo pravo mjesečne isplate od 400
   (a) vječno
   (b) slijedećih 20 godina.

2.2 Konvergencija

Redovi koji se ne mogu nekim postupkom točno izračunati, a suma postoji, nazivaju se konvergentnim redovima. Njihova suma računa se zbrajanjem reda do one točnosti koja nas zadovoljava.

Redovi kod kojih zbrajanje ne teži nekom iznosu u smislu limesa niza parcijalnih suma nazivaju se divergentnim redovima i nema smisla računati njihovu sumu.

Nužan uvjet konvergencije je

$$\lim_{n\to\infty} a_n.$$

Zadaci:

1. Ispitajte konvergenciju reda

$$\sum \ln(1+\frac{1}{n})$$

Rješenje: je u ispitivanju nužnog uvjeta konvergencije

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \ln(1+\frac{1}{n}) = 0,$$

a zatim računanje niza parcijalnih suma:

$$\begin{aligned} s_1 &= \ln(1+\frac{1}{1}) = \ln 2 \\ s_2 &= \ln 2 + \ln(1+\frac{1}{2}) = \ln 3 \\ s_3 &= \ln 3 + \ln(1+\frac{1}{3}) = \ln 4 \\ &\vdots \\ s_n &= \ln(n+1) \end{aligned}$$

Budući je

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \infty$$

red divergira.

2. Konvergira li red

$$\sum \frac{n+1}{2n+1}?$$

Rj. Ne, jer nužan uvjet

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{2}$$

nije ispunjen.

3. Da li je konvergentan red

$$\sum (\frac{3n}{3n+1})^n?$$

Rj. Ponovo niz članova reda

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{3n}}\right)^n &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{((1+\frac{1}{3n})^{3n})^{\frac{1}{3}}}\\ &= \frac{1}{e^{\frac{1}{3}}}\\ &\neq 0\end{aligned}$$

nema graničnu vrijednost nula, pa nužan uvjet konvergencije nije zadovoljen.

2.3 Kriteriji konvergencije

Dokazana je činjenica da Dirichletov red

$$\sum \frac{1}{n^p}$$

konvergira jedino za

$$p > 1$$

dok u ostalim slučajevima divergira.

Ako za red $\sum a_n$ pouzdano znamo da **konvergira**, tada sigurno konvergira i red $sumb_n$ ako je

$$b_n \leq a_n.$$

Analogno, znamo li sigurno da red $\sum a_n$ divergira, tada divergira i red $\sum b_n$ za koji je

$$b_n \geq a_n.$$

Redovi $\sum a_n$ i $\sum b_n$ istovremeno konvergiraju ili divergiraju ako postoji konačan

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} \neq 0.$$

Integralni kriterij (Cauchy) primjenjuje se ako je za $a_n = f(n)$ funkcija $f(x)$ pozitivna, monotono silazna i neprekidna za $x \geq a \geq 1$ i govori o istovremenoj konvergenciji niza $\sum a_n$ i nepravog integrala

$$\int_a^\infty f(x)dx$$

Pomoću tog kriterija dokazuje se konvergencija i divergencija Dirichletovog reda $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^p}$.

Zadaci .

1. Usporedjivanjem s geometrijskim redom, ispitajte konvergenciju reda

$$\sum \frac{1}{n}(\frac{2}{5})^n.$$

Rj. Nužan uvjet je ispunjen:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}(\frac{2}{5})^n = 0 \cdot 0 = 0$$

Zbog

$$a_n = \frac{1}{n}(\frac{2}{5})^n \leq (\frac{2}{5})^n = b_n,$$

a red

$$\sum (\frac{2}{5})^n$$

je geometrijski kojem zbog

$$\frac{2}{5} < 1$$

možemo i sumu izračunati, zadani red je konvergentan.

2. Kakva je konvergencija reda

$$\frac{1}{11} + \frac{1}{21} + \frac{1}{31} + \frac{1}{41} + \cdots ?$$

Rj. Opći član reda

$$a_n = \frac{1}{10n+1}$$

usporedjujemo preko limesa s poznatim divergentnim harmonijskim redom:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{10n+1}} = 10 \neq 0,$$

pa red divergira, iako je nužni uvjet

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{10n+1} = 0$$

zadovoljen.

3. Ispitati konvergenciju reda

$$\frac{1}{\sqrt{1\cdot 2}} + \frac{1}{\sqrt{2\cdot 3}} + \frac{1}{\sqrt{3\cdot 4}} + \cdots .$$

Rješenje. Nužan uvjet je zadovoljen ali zbog

$$\sqrt{n(n+1)} < n+1$$
$$\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} > \frac{1}{n+1}$$

i konvergencije harmonijskog reda, zadani red divergira.

4. Konvergira li

$$\sum \frac{1}{(3n-1)^2}?$$

Rješenje Očito je nužno zadovoljeno, a budući red $\sum \frac{1}{n^2}$ konvergira,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{(3n-1)^2}}{\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{9},$$

tada i zadani red konvergira.

5. Ispitajte konvergenciju reda

$$\sum \frac{\sqrt[3]{n}}{(n+1)\sqrt{n}}.$$

Rješenje. Nužan uvjet:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{n}}{(n+1)\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(n+1)\sqrt[6]{n}} = 0.$$

Budući je

$$\frac{1}{(n+1)\sqrt[6]{n}} < \frac{1}{n^{\frac{7}{6}}}$$

ispada da red konvergira jer $\sum \frac{1}{n^p}$ konvergira za $p > 1$.

6. Treba ispitati konvergenciju reda

$$\sum \frac{n+1}{n \cdot 2^n}.$$

Rješenje. Nužni uvjet je zadovoljen:

$$\lim_{n\to\infty} [(1+\frac{1}{n}) \cdot \frac{1}{2^n}] = 0,$$

a usporedbom:

$$\frac{n+1}{n} \cdot \frac{1}{2^n} < 2 \cdot \frac{1}{2^n}$$

i konvergiranjem geometrijskog reda

$$\sum 2 \cdot \frac{1}{2^n} = 2 \cdot \sum \frac{1}{2^n}$$

konvergira i početni red.

7.
$$\sum \arcsin \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Divergencija. Iako je nužni uvjet zadovoljen, zbog geometrijski očite činjenice da je duljina luka veća od udaljenosti kuta od apscise:

$$\arcsin \frac{1}{\sqrt{n}} > \frac{1}{\sqrt{n}}$$

izlazi da red koji je napisan divergira, jer $\sum \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$ divergira zbog $\frac{1}{2} < 1$.

8. Dokažite da
$$\sum \frac{1}{2n-1}$$
divergira. Da li je zadovoljen nužan uvjet i zašto?

Slijedeći kriteriji primjenjuju se nakon provjere nužnog uvjeta.

Leibnitzov kriterij konvergencije primjenjuje se kod alterniranih redova

$$c_1 - c_2 + c_3 - c_4 + \cdots + c_{2n-1} + \cdots$$

i vrlo je jednostavan, jer dovoljno je da je niz apsolutnih vrijednosti članova silazan.

D'Alembertov kriterij računa

$$\lim |\frac{a_{n+1}}{a_n}|$$

koji za konvergenciju mora biti manji od jedan, za divergenciju je veći, dok za jednakost nema odgovora.

Cauchyjev kriterij računa
$$lim \sqrt[n]{|a_n|}$$
a odluka je analogna D'Alembertu.

Integralni kriterij pronašao je Cauchy. Opći član reda a_n moguće je promatrati kao funkciju:
$$a : N \rightarrow R$$
u oznaci $a_n = a(n)$. Cauchy proširuje funkciju na realne brojeve

$$a : R \rightarrow R$$

i promatra konvergenciju nepravog integrala

$$\int_c^\infty a(x)dx$$

Pod uvjetom da je za $x > c$ funkcija $a(x)$ monotono silazna, nepravi integral i red konvergiraju i divergiraju zajedno.

Red $\sum a_n$ konvergira apsolutno, ako $\sum |a_n|$ konvergira. Kaže se da red a_n konvergira uvjetno, ako $\sum |a_n|$ divergira.

Ispitajte konvergenciju slijedećih redova. Naglasite uvjetnu konvergenciju.

Zadatak 2.3 *Ispitajte konvergenciju reda*

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{2^n n!}{n^n}$$

Rješenje: Nužan uvjet konvergencije

$$\lim n \to \infty \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n}{n \cdot n \cdot n \cdots n} = 0$$

dok D'Alambert:

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{2^n \cdot n!}{n^n}} &= \lim_{n\to\infty} \frac{2 \cdot n^n}{(n+1)^n} \\ &= 2 \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n} \\ &= 2 \cdot \frac{1}{e} > 1 \end{aligned}$$

ukazuje na divergenciju.

Zadatak 2.4 *Ispitajte konvergenciju reda*

$$\sum_{n=2}^\infty \frac{1}{n(\ln n)^2}$$

U ovom slučaju jedino integralni kriterij daje konvergenciju. Funkcija

$$a(x) = \frac{1}{x(\ln x)^2}$$

definirana je na

$$< 0, \infty > \setminus \{1\}.$$

Prva derivacija

$$f'(x) = -\frac{\ln^2 x + 2\ln x}{x^2 \ln^4 x}$$

je sigurno monotono padajuća na $< e, \infty >$, pa nepravi integral

$$\int_e^\infty \frac{1}{x\ln^2 x} dx = -\frac{1}{t}\,|_e^\infty = -(\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t} - \frac{1}{e}) = \frac{1}{e}.$$

svojom konvergencijom ukazuje na konvergenciju reda.

1. $$\sum n(\frac{3}{4})^n$$

   (po Cauchyju konvergira.)

2. $$\sum \frac{n}{e^n}$$

   (konvergira po Cauchyu)

3. $$1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \cdots \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}} + \cdots$$

   (divergira apsolutno usporedjivanjem, no niz općih članova je silazan pa po Leibnitzovom kriteriju red uvjetno konvergira.)

4. $$\sum \frac{(-1)^n}{n\cdot\sqrt{n}}$$

   (konvergira apsolutno zbog $\sum \frac{1}{n^p}$.)

5. $$\sum (-1)^{n-1}\frac{2n+1}{n(n+1)}$$

   (apsolutno, u limesu sa harmonijskim redom divergira, no red je alterniran i članovi reda apsolutno čine silazan niz, pa red uvjetno konvergira.)

6. $$\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{3}{2} + \frac{5}{2\sqrt{2}} + \cdots + \frac{2n-1}{(\sqrt{2})^n} + \cdots$$

   (konvergira po Cauchyju.)

7.
$$\sum \frac{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdots (3n-1)}{1 \cdot 5 \cdot 9 \cdots (4n-3)}$$

(konvergira po D'Alembertu.)

8.
$$\sum \frac{n!}{2^n + 1}$$

(divergira jer nužan uvjet nije zadovoljen.)

9.
$$\sum \frac{2^{n-1}}{(n-1)!}$$

(konvergira po D'Alambertovom kriteriju.)

10.
$$\sum \frac{2^{n-1}}{n^n}$$

(konvergira po Cauchyu.)

11.
$$\sum \frac{(n!)}{(2n)!}$$

(konvergira po D'Alembertovom kriteriju.)

12.
$$\sum (\frac{n}{n+1})^{n^2}$$

(konvergira po Cauchyjevom kriteriju, jer

$$\lim_{n\to\infty} (\frac{n}{n+1})^n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n} = \frac{1}{e}.$$

13.
$$\sum \frac{3^n n!}{n^n}$$

(konvergira i to po, zbog faktorijele, jedino primjenjivom kriteriju D'Alemberta.)

3 Redovi funkcija

3.1 Definicija reda funkcija i područja konvergencije

Članovi u redu ovise o varijabli x. Svaki izbor varijable može donijeti konvergenciju ili divergenciju. Izborom Cauchyjevog ili D'Alembertovog kriterija odredi se interval u kojem red apsolutno konvergira, a potom se ispituje konvergencija u rubovima intervala.

Ispitajte konvergenciju reda:

1. $$\sum \frac{e^{nx}}{n}$$

   (Cauchy daje konvergenciju za $x \in < -\infty, 0 >$)

2. $$\sum \frac{1}{n! x^n}$$

   (D'Alembert $x \in R \setminus 0$)

3. $$\sum \frac{e^{n(x-1)}}{n}$$

   (Cauchy $x \in < -\infty, 1 >$)

4. $$\sum \frac{n!}{x^n}$$

   (D'Alembert daje divergenciju na cijelom R)

5. $$\sum \frac{2^n (\ln x)^n}{n}$$

   (Cauchy $x \in [e^{-\frac{1}{2}}, e^{\frac{1}{2}} >$)

6. $$\sum \frac{(\ln x)^n}{n^2 \cdot 5^n}$$

   (Cauchy $x \in [e^{-5}, e^5]$)

7.
$$\sum \frac{(2x+3)^n}{\sqrt[3]{n}}$$

(Cauchy $x \in [-2, -1 >$)

8.
$$\sum e^{n^2} \cdot x^{n^2}$$

(Cauchy vodi na zahtjev $\lim_n |ex|^n < 1$ koji je jedino ispunjen za $|ex| < 1$, pa red konvergira za $x \in < -\frac{1}{e}, \frac{1}{e} >$.)

9.
$$\sum \frac{(\ln x)^n}{3^n}$$

($x \in < e^{-3}, e^3 >$)

10.
$$\sum \frac{3^{n-1}(2x-1)^n}{\sqrt{n}}$$

($x \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3} >$)

Odredite interval konvergencije reda i ispitajte konvergenciju na krajevima intervala za slijedeće redove:

1.
$$\sum \frac{3^{n(x+5)}}{n-2}$$

(Cauchy zbog pozitivnosti reda daje $x \in < -\infty, -5 >$)

2.
$$\sum \frac{(2x-3)^n}{4^n \cdot n^2}$$

(Cauchy $x \in [-\frac{1}{2}, \frac{7}{2}]$)

Zadatak 3.1 *Odredite područje konvergencije reda*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{3n}}{(2x-1)^n}$$

i ispitajte ponašanje na rubovima intervala.

Rješenje dobivamo po Cauchyjevom kriteriju:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|\frac{\sqrt{3n}}{(2x-1)^n}|} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{|2x-1|} < 1$$

nakon rješenja nejednadžbe:

$$-1 < \frac{1}{2x-1} < 1$$

odnosno dviju nejednadžbi:

$$\begin{aligned} -1 &< \frac{1}{2x-1} \\ \frac{1}{2x-1}+1 &> 0 \\ \frac{2x}{2x-1} &> 0 \end{aligned}$$

čije je rješenje $R - [0, \frac{1}{2}]$, i lijeve nejednadžbe:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2x-1} &< 1 \\ \frac{1}{2x-1}-1 &< 0 \\ \frac{2-2x}{2x-1} &< 0 \end{aligned}$$

čije je rješenje $R - [\frac{1}{2}, 1]$, što zajedno daje područje konvergencije:

$$< -\infty, 0 > \cup < 1, +\infty > .$$

Uvrstite li $x = 0$ u formulu reda, dobivate red brojeva:

$$\sum (-1)^n \cdot \sqrt{3n}$$

koji očito divergira, kao i red brojeva dobiven nakon uvrštavanja vrijednosti $x = 1$.

Zadatak 3.2 *Ispitajte konvergenciju reda*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{2n+1} .$$

Rješenje. D'Alambertov uvjet daje $< 0, +\infty >$

Zadatak 3.3 *Odrediti interval konvergencije reda*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\ln 2x)^n}{n}.$$

Rješenje. Cauchyjev uvjet daje apsolutnu konvergenciju za $\frac{1}{2e} < x < \frac{e}{2}$. Za $x = \frac{e}{2}$ divergira harmonijski, a za $x = \frac{1}{2e}$ red konvergira uvjetno po Leibnitzovu kriteriju.

3.2 Redovi potencija

Red

$$\sum a_n(x-c)^n$$

zovemo redom potencija oko točke $c \in R$. Očito je red konvergentan za $x = c$ a postavlja se prirodno pitanje konvergencije i radijusa konvergencije oko točke $c \in R$.

Zadaci:

1. Odredite interval konvergencije reda i ispitajte konvergenciju u rubnim točkama intervala:

   (a)
   $$\sum \frac{x^n}{n!}$$
   (D'Alembert $x \in R$)

   (b)
   $$\sum \frac{x^n}{n \cdot 2^n}$$
   (Cauchy $x \in [-2, 2>$)

   (c)
   $$\sum \frac{(3n-2)(x-3)^n}{(n+1)^2 \cdot 2^{n+1}}$$
   (D'Alembert vodi na $\frac{|x-3|}{2} < 1$ i dobiva se $x \in [-1, 5>$)

   (d)
   $$\sum (-1)^n \frac{(x-2)^n}{(n+1) \cdot \ln(n+1)}$$
   (D'Alembert za red s apsolutnim vrijednostima daje nakon primjene L'Hospitalovog pravila $x \in <1, 3]$. Primjeniti treba integralni kriterij konvergencije reda.)

   (e)
   $$\sum \frac{n^5(x+5)^n}{(n+1)!}$$

   (f)
   $$\frac{1}{2}\frac{x-1}{2} + \frac{2}{3}(\frac{x-1}{2})^2 + \frac{3}{4}(\frac{x-1}{2})^3 + \frac{4}{5}(\frac{x-1}{2})^4 + \cdots$$

Zadatak 3.4 *Odrediti interval konvergencije reda*

$$(x-2)+\frac{(x-2)^2}{2\cdot 10}+\frac{(x-2)^3}{3\cdot 10^2}+\frac{(x-2)^4}{4\cdot 10^3}+\cdots.$$

Rješenje dobivamo inzistiranjem na Cauchyjevom kriteriju:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|\frac{(x-2)^n}{n\cdot 10^{n-1}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{|x-2|}{10}<1$$

koji nakon rješevanja nejednadžbi

$$-10<x-2<10$$

ispada da je $<-8,12>$. Ispitivanje na krajevima intervala daje za $x=-8$ red brojeva

$$\begin{aligned}\sum\frac{(-10)^n}{n\cdot 10^{n-1}} &= \sum(-1)^n\cdot\frac{10}{n}\\ &= 10\cdot\sum\frac{(-1)^n}{n}\end{aligned}$$

koji apsolutno divergira, jer je harmonijski, no po Leibnitzu, budući njegovi članovi čine padajući niz, uvjetno konvergira. Analogno Uvrštavanje $x=12$ daje divergentan harmonijski red.

Zadatak 3.5 *Ispitajte konvergenciju reda*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!x^n}{n^n}$$

D'Alambertov uvjet daje $\left|x\cdot\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\right|=\left|x\cdot e^{-1}\right|$

3.3 Taylorov polinom

Neka je $I\subset R$ otvoreni interval oko točke $c\in I$ i neka je

$$f:I\to R$$

funkcija koja ima neprekidnu $n+1$-vu derivaciju na I. Polinom

$$T_n(x)=f(c)+\frac{f'(c)}{1!}(x-c)+\frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n$$

naziva se n-ti Taylorov polinom.

Funkcija

$$R_n(x) = f(x) - T_n(x)$$

naziva se n-ti ostatak funkcije f u točki $c \in I$.

Taylorova formula glasi:

$$f(x) = T_n(x) + R_n(x)$$

Može se dokazati da postoji interval I oko točke c u kojem polinom $T_n(x)$ među svim polinomima stupnja n najbolje aproksimira funkciju f.

Lagrangeov integralni oblik ostatka glasi:

$$R_n(x) = \int_c^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n dt,$$

za koji po teoremu o srednjoj vrijednosti sigurno postoji $\vartheta \in < 0, 1 >$ za koji je

$$R_n(x) = \frac{(x-c)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x - \vartheta(x-c)).$$

Primjer Taylorov polinom prvog stupnja je

$$T_1(x) = f(c) + f'(c)(x-c),$$

a graf tog polinoma upravo je tangenta

$$y - f(c) = f'(c)(x-c)$$

povučena u točki $(c, f(c))$ grafa funkcije.

Zadatak 3.6 *Rastavite polinom $x^3 - 2x^2 + 5x - 7$ po potencijama od $(x-1)$*

Rješenje.

$$\begin{aligned}
f(x) &= x^3 - 2x^2 + 5x - 7 \\
f(1) &= -3 \\
f'(x) &= 3x^2 - 4x + 5 \\
f'(1) &= 4 \\
f''(x) &= 6x - 4 \\
f''(1) &= 2
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
f'''(x) &= 6\\
f'''(1) &= 6\\
T(x) &= \sum_{k=0}^{3} \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^k\\
T(x) &= -3+4(x-1)+\frac{6}{2!}(x-1)^2+\frac{6}{3!}(x-1)^3\\
&= -3+4(x-1)+3(x-1)^2+(x-1)^3
\end{aligned}
$$

Zadaci

1. Napišite prva četiri Taylorova polinoma za $c = 1$, svake od funkcija:

$$\sin x, \cos x, e^x, xe^x$$

2. Podijelite Taylorove polinome za funkcije sinus i kosinus stupnja ≤ 3 i usporedite s Taylorovim polinomom trećeg stupnja za funkciju tangens.

3. Napišite četiri člana Taylorovog polinoma funkcije

$$f(x) = x^x.$$

Rješenje:

$$T_4(x) = 1 + (x-1) + (x-1)^2 + \frac{2}{3}(x-1)^3$$

3.4 Taylorovi redovi

Taylorov red funkcije $f(x)$ u točki $x = c$ naziva se red

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n$$

Zanimljivo je odrediti interval konvergencije.

MacLaurinov red je Taylorov red za $c = 0$

Binomni red je red

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} \cdot x^n,$$

gdje je

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{1\cdot 2\cdots n}$$

poopćenje definicije binomnog koeficijenta na realne brojeve. Red konvergira za $-1 < x < 1$.

Uvjeti da Taylorov red konvergira upravo funkciji iz koje je razvijen su

- funkcija je beskonačno glatka (derivabilna)
- ograničene su derivacije u smislu da postoji realni broj $C > 0$ tako da je
$$|f^{(n)}| \leq C \cdot M^n \cdot n!$$

Neki važniji redovi su:

- $$e^x = \sum \frac{x^n}{n!}$$
- $$\sin x = \sum (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$
- $$\cos x = \sum (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$
- $$\ln(1+x) = \sum (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$$

  za $-1 < x \leq 1$

Konvergentni redovi mogu se derivirati i integrirati član po član, u smislu da će novi redovi biti opet konvergentni i da će konvergirati derivacijama i integralima pripadnih funkcija.

Primjer 3.1 *Pomoću teorema koji govori da se red na području svoje konvergencije može derivirati i integrirati po članovima, razviti u Mc-Laurinov red funkciju*
$$f(x) = \arcsin x.$$

Rješenje. Derivacija funkcije
$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \left(1 + (-x^2)\right)^{-\frac{1}{2}}$$

razvija se u binomni red:

$$
\begin{aligned}
(1+t)^{-\frac{1}{2}} &= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{n} x^n \\
&= 1 - \frac{1}{2}t + \frac{-\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)}{1\cdot 2}t^2 + \frac{-\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)\cdot\left(-\frac{5}{2}\right)}{1\cdot 2\cdot 3}t^3 + \frac{-\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)\cdot\left(-\frac{5}{2}\right)\cdot\left(-\frac{7}{2}\right)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}t^4 + \cdots \\
&= 1 - \frac{1}{2}t + \frac{1\cdot 3}{2!\cdot 2^2}t^2 - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{3!\cdot 2^3}t^3 + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{4!\cdot 2^4}t^4 - \ldots \\
t = -x^2 & \\
f'(x) &= 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1\cdot 3}{2!\cdot 2^2}x^4 + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{3!\cdot 2^3}x^6 + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{4!\cdot 2^4}x^8 + \cdots \\
\int_0^x f'(t)dt &= x + \frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2!\cdot 2^2}\frac{x^5}{5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{3!\cdot 2^3}\frac{x^7}{7} + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{4!\cdot 2^4}\frac{x^9}{9} + \cdots \\
f(x) - f(0) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-3)}{(n-1!\cdot 2^{n-1}}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}
\end{aligned}
$$

Ispitivanje konvergencije izvodi se po D'Alambertu:

$$
\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-3)(2n-1)}{n!2^n}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}}{\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-3)}{(n-1)!2^{n-1}}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}} = x^2 \lim_{n\to\infty} \frac{(2n-1)^2}{(2n-1)(2n+1)} = x^2 < 1
$$

daje apsolutnu konvergenciju za

$$-1 < x < 1.$$

Provjeravanje konvergencije na rubu intervala počinje uvrštavanjem $x = 1$:

$$
\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1\cdot 3\cdots(2n-3)}{(n-1)!2^{n-1}(2n-1)}.
$$

Konvergenciju je moguće pokazati nakon dokaza slabo vidljive činjenice

$$
\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n} = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot(2n-1)}{n!2^n} < \frac{1}{\sqrt{n+1}}
$$

koja je dokazljiva jedino indukcijom:

- za $n = 1$ vrijedi očito
$$\frac{1}{2} < \frac{1}{\sqrt{2}}$$
- pretpostavi se da vrijedi za n
- tada bi za $n+1$ trebalo vrijediti
$$
\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)(2n+1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n(2n+2)} < \frac{1}{\sqrt{n+2}}.
$$

Korištenje pretpostavke indukcije povlači:

$$\begin{aligned}
\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}\cdot\frac{2n+1}{2n+2} < \frac{1}{\sqrt{n+1}}\cdot\frac{2n+1}{2n+2} &< \frac{1}{\sqrt{n+2}}|^2 \\
(2n+1)^2(n+1) &< (n+1)(2n+2)^2 \\
(4n^2+4n+1)(n+2) &< (4n^2+8n+4)(n+1) \\
n+2 &< 4n+4
\end{aligned}$$

istinitu tvrdnju

Sada je moguće napisati istinu

$$\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-3)}{(n-1)!\cdot 2^{n-1}\cdot(2n-1)} < \frac{1}{\sqrt{n}(2n-1)} \approx \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$$

koja povlači konvergenciju po usporedivosti s Dirichletovim redovima.

Uvrštavanjem $x=-1$ dobiva se red čiji su članovi suprotni po predznaku, pa apsolutno konvergiraju.

Zadatak 3.7 *Razviti* $\ln x$ *u red po potencijama od* $x-1$.

Rješenje. Taylorov red u ovom zadatku je

$$\begin{aligned}
c &= 1 \\
f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n
\end{aligned}$$

Ostaje računati koeficijente do konstrukcije općeg člana:

$$\begin{aligned}
f(1) &= 0 & & \\
f'(x) &= \frac{1}{x} & f'(1) &= 1 \\
f''(x) &= -\frac{1}{x^2} & f''(1) &= -1 \\
f'''(x) &= \frac{2}{x^3} & f'''(1) &= 2 \\
f^{iv}(x) &= -\frac{2\cdot 3}{x^4} & f^{iv}(1) &= -2\cdot 3 \\
f^{v}(x) &= \frac{2\cdot 3\cdot 4}{x^5} & f^{v}(1) &= 2\cdot 3\cdot 4 \\
&\vdots & & \\
f^{(n)}(1) &= (-1)^{n+1}(n-1)! & &
\end{aligned}$$

i uvrštavanjem dobiti:

$$\begin{aligned}
T(x) &= 0-(x-1)+\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{n!}(x-1)^n \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(x-1)^n}{n}
\end{aligned}$$

Konvergencija se ispituje po Cauchyevom kriteriju:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{|x-1|^n}{n}} = |x-1| < 1$$

i daje interval apsolutne konvergencije

$$< 0, 2 > .$$

Uvrštavanje $x = 0$ daje divergentan red

$$-\sum \frac{1}{n}.$$

Uvrštavanje $x = 2$ daje red

$$\sum \frac{-1}{n}$$

koji konvergira po Leibnitzovom uvjetu.

Zadaci.

1. Razvijte u Taylorov red funkciju
$$f(x) = \frac{1}{x^2}$$
u točki $c = -1$.

2. Razviti funkciju
$$f(x) = \frac{1}{1+3x}$$
u Maclaurinov red i ispitati konvergenciju.

3. Napišite Taylorov red funkcije
$$y = \frac{1}{(2-2x)^2}$$
oko točke $x = \frac{1}{2}$.

4. Nadjite Taylorov red funkcije $y = \ln 2x$ oko točke $x = 1$. Odredite interval konvergencije i ispitajte ponašanje reda na rubovima intervala.

5. Napisati MacLaurinov red funkcije:

   (a)
$$f(x) = \ln(e + x),$$

(b)
$$f(x) = \ln(e + x),$$
a zatim odredite interval konvergencije i ponašanje na krajevima intervala.

6. Razviti funkciju
$$f(x) = 2^{-x}$$
u okolini točke $x_0 = 1$ i ispitati konvergenciju.

7. Napisati Taylorove redove u okolinama zadanih točaka

   (a) $f(x) = 5^{2-x}$ u okolini $x_0 = 2$

   (b) $f(x) = 3^{1-x}$ u okolini $x_0 = 1$,

   i odredite interval konvergencije dobivenih redova.

8. Napisati Maclaurinov red funkcije
$$f(x) = \ln(1 - 5x),$$
odrediti interval konvergencije reda i ponašanje na krajevima intervala.

Zadatak 3.8 *Napišite Taylorov red funkcije $f(x) = e^{ax}$ po potencijama od $x - a$, te diskutirajte konvergenciju reda u ovisnosti o paremetru a.*

Rješenje leži u ispitivanju derivacija višeg reda :

$$\begin{aligned} f(a) &= e^{a^2} \\ f'(a) &= ae^{a^2} \\ f''(a) &= a^2e^{a^2} \\ &\vdots \\ f^{(n)}(a) &= a^n e^{a^2} \end{aligned}$$

pa je Taylorov red po potencijama od $x - a$ jednak

$$\begin{aligned} f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n e^{a^2}}{n!}(x-a)^n \\ &= e^{a^2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!}(x-a)^n. \end{aligned}$$

Ispitivanje po D'Alembertovom kriteriju

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{a^{n+1}(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{a^n(x-a)^n}{n!}} &= \lim_{n\to\infty} \frac{a(x-a)}{n+1} \\
&= a|x-a| \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} \\
&= 0
\end{aligned}$$

pa red konvergira bez obzira na parametar $a \neq 0$.

3.5 Fourierovi redovi

Neka je

$$f : [a,b] \to R$$

funkcija koja zadovoljava Dirichletove uvjete:

- jednoliko je omeđena: $|f(x) \leq M$
- ima konačan broj prekida prvevrste, dakle s konačnim limesima u točkama prekida,
- po dijelovima je glatka, odnosno derivabilna
- je integrabilna na $[a, b]$.

Koeficijenti za Fourierov red su:

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{2}{b-a} \int_a^b f(x)dx \\
a_k &= \frac{2}{b-a} \int_a^b f(x) \cdot \cos \frac{2k\pi x}{b-a} dx \\
b_k &= \frac{2}{b-a} \int_a^b f(x) \cdot \sin \frac{2k\pi x}{b-a} dx
\end{aligned}$$

Fourierov red je:

$$F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{infty} (a_k \cos \frac{2k\pi x}{b-a} + b_k \sin \frac{2k\pi x}{b-a}).$$

Zadatak 3.9 *Razvijte parnu funkciju*

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in [0, \pi] \\ -x, & x \in [-\pi, 0] \end{cases}$$

u Fourierov red.

Računanje Fourierovih koeficijenata:

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx \\
&= \frac{1}{\pi} \cdot [\int_{-\pi}^{0} -x dx + \int_{0}^{\pi} x dx] \\
&= \frac{1}{\pi} \cdot [-\frac{x^2}{2}|_{-\pi}^{0} + \frac{x^2}{2}|_{0}^{\pi}] \\
&= \frac{1}{\pi} \cdot [\frac{\pi^2}{2} + \frac{\pi^2}{2}] \\
&= \pi \\
a_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos\frac{2k\pi x}{2\pi} dx \\
&= \frac{1}{\pi} [\int_{-\pi}^{0} -x \cos kx dx + \int_{0}^{\pi} x \cos kx dx] \\
&\vdots \\
&= \frac{2}{k^2\pi}[(-1)^k - 1] \\
b_k &= 0
\end{aligned}$$

Dobiveni red je

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \cos(2k+1)\pi x.$$

Zadatak 3.10 *Napišite Fourierov red funkcije*

$$f(x) = x, \qquad x \in [0, 1).$$

Koeficijente nalazimo formulama:

$$a_0 = \frac{2}{1} \int_{0}^{1} x dx = 1$$

$$
\begin{aligned}
a_k &= 2\int_0^1 x\cos 2\pi x dx \\
&= \left\{\begin{array}{ll} u = x & dv = \cos 2k\pi x \\ du = dx & v = \frac{1}{2k\pi}\sin 2k\pi x \end{array}\right. \\
&= 2[\frac{x}{2k\pi}\sin 2k\pi x|_0^1 - \frac{1}{2k\pi}\int_0^1 \sin 2k\pi x dx] \\
&= -\frac{1}{2k^2\pi^2}\cos 2k\pi x|_0^1 \\
&= 0 \\
b_k &= 2\int_0^1 x\sin 2k\pi x dx \\
&\vdots \\
&= -\frac{1}{k\pi}
\end{aligned}
$$

Traženi red je

$$F(x) = \frac{1}{2} - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin 2k\pi x}{k\pi}$$

Zadatak 3.11 *Odredite Fourierov red funkcije čiji je period zadan grafički. (spojnica* $(-1,0);(0,-1)$ *i* $(0,1);(1,0)$*).*

Funkcija zadana grafički može se napisati formulama:

$$f(x) = \left\{\begin{array}{ll} -x+1 & 0 \le x < 1 \\ -x-1 & -1 \le x < 0 \end{array}\right.$$

Formule za Fourierove koeficijente periodičkog proširenja funkcije u zadatku s $a = -1$, $b = 1$ su:

$$
\begin{aligned}
a_0 &= \frac{2}{b-a}\int_a^b f(x)dx \\
&= \frac{2}{2}\int_{-1}^1 f(x)dx \\
&= \int_{-1}^0 (-x-1)dx + \int_0^1 (-x+1)dx \\
&= (-\frac{x^2}{2} - x)|_{-1}^0 + (-\frac{x^2}{2} + x)|_0^1 \\
&= 0 - (-\frac{1}{2} + 1) + (-\frac{1}{2}) - 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} - 1 - \frac{1}{2} + 1 \\
&= 0 \\
a_k &= \frac{2}{b-a}\int_a^b f(x)\cos\frac{2k\pi x}{b-a}dx \\
&= \int_{-1}^{0}(-x-1)\cos\frac{2k\pi x}{2}dx + \int_0^1(-x+1)\cos k\pi x dx \\
&= \begin{array}{cc} u=-x-1 & dv=\cos k\pi x dx \\ du=-dx & v=\frac{1}{k\pi}\sin k\pi x \end{array} \qquad \begin{array}{cc} u=-x+1 & dv=\cos k\pi x dx \\ du=-dx & v=\frac{1}{k\pi}\sin k\pi x \end{array} \\
&= \frac{-x-1}{k\pi}\sin k\pi x|_{-1}^{0} + \frac{1}{k\pi}\int_{-1}^{0}\sin k\pi x dx + \frac{-x+1}{k\pi}\sin k\pi x|_0^1 + \frac{1}{k\pi}\int_0^1 \sin k\pi x dx \\
&= \frac{-1}{k^2\pi^2}\cos k\pi x|_{-1}0 - \frac{1}{k^2\pi^2}\cos k\pi x|_0^1 \\
&= \frac{-1}{k^2\pi^2} + \frac{1}{k^2\pi^2}\cos k\pi - \frac{1}{k^2\pi^2}\cos k\pi + \frac{1}{k^2\pi^2} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

što je bilo i za očekivati, jer je funkcija neparna:

$$f(-x) = f(x)$$

Slijedi dalje računanje koeficijenata:

$$
\begin{aligned}
b_k &= \frac{2}{b-a}\int_a^b f(x)\cdot\sin\frac{2k\pi x}{b-a}dx \\
&= \frac{2}{2}\int_{-1}^{1} f(x)\cdot\sin k\pi x dx \\
&= \int_{-1}^{0}(-x-1)\sin k\pi x dx + \int_0^1(-x+1)\sin k\pi x dx \\
&= \begin{array}{cc} u=-x-1 & dv=\sin k\pi x dx \\ du=-dx & v=-\frac{1}{k\pi}\cos k\pi x \end{array}, \qquad \begin{array}{cc} u=-x+1 & dv=\sin k\pi x dx \\ du=-dx & v=-\frac{1}{k\pi}\cos k\pi x \end{array} \\
&= \frac{x+1}{k\pi}\cos k\pi x|_{-1}^{0} - \int_{-1}^{0}\frac{1}{k\pi}\cos k\pi x dx + \frac{x-1}{k\pi}\cos k\pi x|_0^1 - \frac{1}{k\pi}\int_0^1 \cos k\pi x dx \\
&= \frac{1}{k\pi} - \frac{1}{k^2\pi^2}\sin k\pi x|_{-1}^{0} - (\frac{-1}{k\pi}) - \frac{1}{k^2\pi^2}\sin k\pi x|_0^1 \\
&= \frac{2}{k\pi}
\end{aligned}
$$

Konačno Fourierov red ima oblik:

$$F(x): R \to R$$

formulom

$$F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos\frac{2k\pi x}{b-a} + b_k \sin\frac{2k\pi x}{b-a}).$$

Uvažavajući sve dosadašnje rezultate, rješenje zadatka je:

$$F(x) = \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin k\pi x}{k}.$$

Zadatak 3.12 *Razvijte u Fourierov red funkciju čiji je period zadan crtežom. (trokut* $(-1,0),(0,1),(1,0)$*.)*

Fourierov je red

$$F(x) = \frac{1}{2} + \frac{4}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos(2k+1)\pi}{(2k+1)^2}.$$

Postupak je u fazi štampanja.

Problemski zadaci:

1. Nađite Fourierov red funkcije:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -1 < x < 0 \\ 2x, & 0 < x < 1 \end{cases}$$

2. Razvijte u Fourierov red funkciju nastalu parnim proširenjem funkcije

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \frac{3}{2} < x < 2 \\ 3-x & 2 < x < 3 \end{cases}$$

3. Periodički proširite funkciju

$$f(x) = x^2, \quad -\pi < x < \pi.$$

4. Odredite Fourierov red funkcije

$$f(x) = \begin{cases} -1, & -1 < x < 0 \\ 1, & 0 < x < 1 \end{cases}$$

   i pomoću reda izračunajte π.

5. Po neparnom periodičkom zakonu proširite funkciju:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1 \\ 2-x, & 1 < x < 2 \end{cases}$$

4 Funkcije više varijabli

4.1 Definicija i primjeri

Formalni zapis:

$$f : R \times R \to R,$$

a vrijednost funkcije i nezavisne varijable:

$$z = f(x, y).$$

Odredite i nacrtajte područje definicije funkcije:

1. $$z = \arcsin \frac{y}{x^2}.$$

2. $$z = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{y}$$

3. $$z = x + \arccos y$$

4. $$z = \sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-y^2}$$

5. $$z = \sqrt{x^2-4} - \sqrt{y^2-4}$$

6. $$z = \sqrt{(x^2+y^2-a^2)(2a^2-x^2-y^2)}$$

7. $$z = 1 + \sqrt{-(x-y)^2}$$

8. $$z = \sqrt{y \sin x}$$

9. $$z = \ln(4x^2 + y^2 - 4)$$

10.
$$z = \frac{\cot x}{\sqrt{36 - 4x^2 - 9y^2}} + \frac{1}{y - x}$$

11.
$$z = \sqrt{x^2 - 4y^2 - 16}$$

12.
$$z = \ln(x^2 + y) + \frac{2}{x}$$

13.
$$z = \sqrt{\sin(x^2 + y^2)}$$

14.
$$z = \ln \frac{x^2 + y^2}{x^2 - y^2}$$

15.
$$z = \sqrt{1 + x^2 - y^2} + \ln(4 - x^2 - y^2) + \frac{1}{x^2 + y^2}$$

4.2 Parcijalne derivacije

Primjer 4.1 *Napišite formule prvih parcijalnih derivacija funkcije*

$$z = \frac{x + 2y}{x^2 - y^2}$$

.

Zadaci:

1. U slijedećim zadacima napišite prve parcijalne derivacije funkcija

   (a)
   $$z = x \cdot arctg\frac{x}{y}$$

   (b)
   $$z = \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2})$$

(c)
$$z = \arcsin\sqrt{\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}}$$

(d)
$$z = \ln \sin \frac{x + a}{\sqrt{y}}$$

(e)
$$z = \ln tg\frac{x}{y}$$

Druge parcijalne derivacije dobivaju se parcijalnim deriviranjem prvih. Mješovite derivacije su po Schwartzovom teoremu jednake.

2. Odredite drugu mješovitu derivaciju funkcije

   (a)
   $$z = arctg\frac{x + y}{1 - xy}.$$

   (b)
   $$z = \arcsin\sqrt{\frac{x - y}{x}}.$$

3. Odredite formule drugih parcijalnih derivacija funkcije
   $$z = \ln(y + x^2).$$

   Drugi diferencijal funkcije računa se po formuli:
   $$d^2z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2$$

4. Nađite d^2z, ako je
   $$z = x \ln \frac{y}{x}.$$
   (rj:$d^2z = -\frac{1}{x}dx^2 + 2 \cdot \frac{1}{y}dydx - \frac{x}{y^2}dy^2$)
   Simbolička formula za računanje viših diferencijala je
   $$d^n z = (\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy)^n z$$

   Implicitno zadane funkcije deriviraju se tehnikom deriviranja analognom deriviranju funkcije jedne varijable.

5. Odredite formule prvih i drugih parcijalnih derivacija funkcije zadane formulom
$$x^2 - 2y^2 + 3z^2 - yz + y = 0.$$
Rješenje:
$$\begin{aligned} x^2 - 2y^2 + 3z^2 - yz + y &= 0 | \frac{\partial}{\partial x} \\ 2x + 6z \cdot \frac{\partial z}{\partial x} - y\frac{\partial z}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{2x}{y - 6z} \end{aligned}$$
$$\begin{aligned} x^2 - 2y^2 + 3z^2 - yz + y &= 0 | \frac{\partial}{\partial y} \\ -4y + 6z\frac{\partial z}{\partial y} - z - y\frac{\partial z}{\partial y} + 1 &= 0 \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{4y + z - 1}{6z - y} \end{aligned}$$
druge parcijalne derivacije
$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial z}{\partial x}) &= \frac{\partial}{\partial x}(\frac{2x}{y - 6z}) \\ &= \frac{2(y - 6z) - 2x(-6\frac{\partial z}{\partial x})}{(y - 6z)^2} \end{aligned}$$
dobivaju se analogno, korištenjem dobivenih formula prvih parcijalnih derivacija.

4.3 Teorem srednje vrijednosti. Diferencijal

Prvi ili totalni diferencijal funkcije
$$z = f(x, y)$$
računa se po formuli
$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy.$$
Zadaci:

1. Nađite totalni diferencijal funkcije

$$z = y \cdot x^y.$$

2. Izračunajte primjenom prvog diferencijala

   (a)
   $$\sqrt{4.05^2 + 2.93^2}.$$

   (b)
   $$arctg(\frac{2.02}{0.97} - 1)$$

3. Izračunajte formulu prvog diferencijala funkcije

$$z = \arcsin \frac{y}{x^2}$$

   u točki $T = (1, \frac{1}{2})$.

4. Napišite prve diferencijale funkcija:

   (a)
   $$z = \ln \frac{2x^2 - y}{x + 3y}$$

   (b)
   $$z = x^y \cdot \sin y$$

5. Nađite vrijednost prvog diferencijala funkcije

$$u = e^{xy}$$

   u točki $x = 1$, $y = 2$. (rj:$du = 2e^2dx + e^2dy$)

6. Izračunajte promjenu vrijednosti funkcije

$$z = xy$$

   ako se u ročki $(5, 4)$ promijene varijable za $dx = 0.1$ i $dy = -0.2$. Izračunajte vrijednost prvog diferencijala u tadanoj točki za zadane promjene varijabli. Kolika je relativna greška? (rj:3.2%)

7. Pri deformaciji valjka njegov polumjer R poveća se od 2 na $2.05dm$. Visina valjka pri istoj deformaciji smanji se sa 10 na $9.95dm$. Nađite približnu vrijednost promjene volumena. (rj: $dV =$)

8. Katete pravokutnog trokuta izmjerene su s točnošću od $0.1cm$ i iznosile su 7.5 i $18cm$. Kolika je točnost u računanju hipotenuze? (rj: $dc = 0.1$)

4.4 Tangencijalna ravnina i normala na plohu

Ploha je u trodimenzionalnom prostoru zadana jednadžbom

$$F(x, y, z) = 0.$$

Tangencijalna ravnina koja dira plohu u točki

$$T(x_0, y_0, z_0), \qquad F(x_0, y_0, z_0) = 0$$

zadana je jednadžbom

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial F}{\partial y}(y - y_0) + \frac{\partial F}{\partial z}(z - z_0) = 0,$$

gdje se vrijednosti parcijalnih derivacija računaju u točki (x_0, y_0, z_0).

Zadatak 4.1 *Napišite jednadžbu tangencijalne ravnine na eliptički paraboloid*

$$z = x^2 + 2y^2$$

u točki $(1, 1, ?)$.

Rješenje:

Točka na paraboloidu ima koordinate:

$$\begin{aligned} x_0 &= 1 \\ y_0 &= 1 \\ z_0 &= x_0^2 + 2y_0^2 \\ &= 3 \end{aligned}$$

Jednadžba kojom je paraboloid zadan je

$$x^2 + 2y^2 - z = 0$$

Parcijalne derivacije

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial x} &= 2x = 2 \\
\frac{\partial F}{\partial y} &= 4y = 4 \\
\frac{\partial F}{\partial z} &= -1
\end{aligned}$$

Tangencijalna ravnina ima jednadžbu:

$$2(x-1) + 4(y-1) - (z-3) = 0$$

koju po volji može imati jednostavniji oblik.

Zadaci

1. Napišite jednadžbu tangencijalne ravnine na plohu

   $$xy = z^2$$

   u točki s koordinatama $(3, 12, z > 0)$.

2. Odredite onu tangencijalnu ravninu elipsoida

   $$x^2 + 4y^2 + z^2 = 36$$

   koja je paralelna s ravninom

   $$x + y - z = 0.$$

   (rj: $x + y - z + 9 = 0$.)

Normala na plohu u točki plohe je pravac okomit na tangencijalnu ravninu u toj točki. Jednadžbe normale su

$$\frac{x - x_0}{\frac{\partial F}{\partial x}} = \frac{y - y_0}{\frac{\partial F}{\partial x}} = \frac{z - z_0}{\frac{\partial F}{\partial x}}.$$

Zadatak 4.2 *Napišite jednadžbe normale na plohu stošca*

$$x^2 + y^2 = z^2$$

u točki $(3, 4, 5)$.

Rješenje:
Analogno kao kod tangencijalne ravnine:

$$\frac{x-3}{6} = \frac{y-4}{8} = \frac{z-5}{-10}$$

Zadatak:

1. Nađite kuteve koje s koordinatnim osima zatvara normala koja je na plohu
$$x^2 + y^2 - xz - yz = 0$$
povučena u točki $T(0, 2, 2)$. (rj:125,125 i 55)
2. Napišite jednadžbu normale na plohu
$$x^2 z + y^2 z = 4$$
u točki $T(-2, 0, 1)$. Nacrtajte plohu i normalu. (rj:$\frac{x+2}{-4} = \frac{y}{0} = \frac{z-1}{4}$
3. Dokažite da tangencijalne ravnine plohe
$$xyz = a^3$$
tvore s koordinatnim osima piramide istog volumena. (rj:$V = \frac{1}{6}a^3$)

4.5 Lokalni ekstremi

Funkcija dviju varijabli

$$z = f(x, y)$$

ima u točki

$$(x = a, y = b)$$

lokalni maksimum, ako postoji broj $r > 0$, takav da je

$$f(x, y) < f(a, b)$$

za svaku točku $T(x, y)$ unutar kruga sa središtem u (a, b), polumjera r. Analogno za minimum.

Analizom formule $f(x, y)$ može se dobiti lokalni ekstrem funkcije.

Nužan uvjet lokalnog ekstrema je poništavanje prvih parcijalnih derivacija funkcije:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

Rješavanjem sistema od dvije jednadžbe s dvije nepoznanice dobivaju se koordinate mogućih točaka ekstrema.

Nakon dobivanja kandidata za ekstrem, mora se provjeriti vrijednost determinante:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{vmatrix}.$$

Pozitivnost garantira nepromjenjivost predznaka drugog diferencijala u kandidatima za ekstrem i može se sigurno tvrditi da ekstrem postoji.

U tom slučaju,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} > 0$$

ukazuje na minimum, dok za

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} < 0$$

funkcija ima lokalni maksimum. Negativna vrijednost determinante povlači da drugi diferencijal u točkama dobivenih iz nužnog uvjeta mijenja predznak ovisno o vrijednostima dx i dy, pa je sigurno da ekstrema nema.

Odluka se ne može donijeti samo u slučaju da je determinanta jednaka nuli ili da se ne mogu izračunati druge parcijalne derivacije. Tada bi trebalo ispitivati diferencijalne viših redova, no to prelazi okvire kolegija.

Zadatak 4.3 *Odrediti i ispitati lokalne ekstreme funkcije*

$$z = \frac{2x + 2y - 1}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1}}.$$

Rješenje započeti uočavanjem da je područje definicije čitava ravnina R^2.

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{2\sqrt{x^2 + y^2 + 1} - (2x + 2y - 1) \cdot \frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2+1}}}{x^2 + y^2 + 1} \\ &= \frac{2(x^2 + y^2 + 1) - x(2x + 2y - 1)}{(x^2 + y^2 + 1)^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{2y^2 - 2xy + x + 2}{(x^2 + y^2 + 1)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{2\sqrt{x^2+y^2+1}-(2x+2y-1)\cdot\frac{2y}{2\sqrt{x^2+y^2+1}}}{x^2+y^2+1} \\
&= \frac{2x^2-2xy+y+2}{(x^2+y^2+1)^{\frac{3}{2}}}
\end{aligned}$$

Nužan uvjet daje sistem:

$$\begin{aligned}
2x^2-2xy+y+2 &= 0 \\
2y^2-2xy+x+2 &= 0
\end{aligned}$$

Oduzimanjem donje jednadžbe od gornje, dobiva se

$$\begin{aligned}
2x^2-2y^2+y-x &= 0 \\
2(x-y)(x+y) &= x-y
\end{aligned}$$

odakle slijedi:

$$x=y; \quad \textit{ili} \quad 2x+2y=1.$$

Jednakost $x=y$ nakon uvrštavanja u prvu jednadžbu sistema daje:

$$\begin{aligned}
x+2 &= 0 \\
x &= -2
\end{aligned}$$

pa je kandidat za ekstrem točka $T_1(-2,-2)$.

Uvrštavanje uvjeta $y=\frac{1}{2}-x$ u prvu jednadžbu vodi na

$$\begin{aligned}
2x^2-2x(\frac{1}{2}-x)+\frac{1}{2}-x+2 &= 0 \\
2x^2-x+2x^2-x+\frac{5}{2} &= 0 \\
8x^2-4x+5 &= 0 \\
x_{1,2}=\frac{4\pm\sqrt{16-160}}{16}
\end{aligned}$$

pa je jedini kandidat za točku ekstrema: $T=(-2,-2)$.

Dovoljan uvjet dobiva se ispitivanjem determinante drugih parcijalnih derivacija. Formule drugih parcijalnih derivacija su:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{(-2y+1)(x^2+y^2+1)^{\frac{3}{2}}-(2y^2-2xy+x+2)\frac{3}{2}(x^2+y^2+1)^{\frac{1}{2}}2x}{(x^2+y^2+1)^3}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} &= \frac{(-2x+1)(x^2+y^2+1)^{\frac{3}{2}} - (2x^2-2xy+y+2)\cdot\frac{3}{2}(x^2+y^2+1)^{\frac{1}{2}}\cdot 2y}{(x^2+y^2+1)^3} \\
\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} &= \frac{(4y-2x)(x^2+y^2+1)^{\frac{3}{2}} - (2y^2-2xy+x+2)\cdot\frac{3}{2}(x^2+y^2+1)^{\frac{1}{2}}\cdot 2x}{(x^2+y^2+1)^3}
\end{aligned}$$

a nakon uvrštavanja koordinata točke $T = (-2, -2)$ dobiva se

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}|_{(-2,-2)} &= \frac{5}{27} \\
\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}|_{(-2,-2)} &= \frac{5}{27} \\
\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}|_{(-2,-2)} &= -\frac{4}{27}
\end{aligned}$$

koje daju determinantu

$$\begin{vmatrix} \frac{5}{27} & -\frac{4}{27} \\ -\frac{4}{27} & \frac{5}{27} \end{vmatrix} = \frac{9}{27} > 0$$

što vodi na zaključak da se u točki $T(-2, -2)$ postiže lokalni minimum u vrijednosti

$$z_{min} = -3.$$

4.6 Uvjetni ekstremi funkcije

Problem je u nalaženju ekstrema funkcije

$$z = f(x, y)$$

uz uvjet da su varijable x i y vezane jednadžbom

$$\varphi(x, y) = 0.$$

Rješavanje počinje konstrukcijom Lagrangeove funkcije:

$$F(x, y) = f(x, y) + \lambda \cdot \varphi(x, y).$$

Nužan uvjet je zadovoljavanje sistema:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0 \\
\frac{\partial F}{\partial y} &= \frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0 \\
\varphi(x, y) &= 0
\end{aligned}$$

Rješenje sistema daje stacionarne točke

$$T_0(x_0, y_0), \quad \lambda_0$$

Dovoljan uvjet je ispitivanje predznaka drugog diferencijala

$$(d^2F)_{T_0}$$

uz obavezan uvjet

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}|_{T_0} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y}|_{T_0} dy = 0.$$

$(d^2F)|_{T_0} < 0$ znači da je u (x_0, y_0) za λ_0 lokalni maksimum.
$(d^2F)|_{T_0} > 0$ znači da je u (x_0, y_0) za λ_0 lokalni minimum.
Ako $(d^2F)_{T_0}$ mijenja predznak, sigurno nema ekstrema, dok $d^2F = 0$ traži dalje ispitivanje.

Drugi diferencijal računa se po formuli:

$$d^2F(x, y) = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} dx^2 + 2\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} dxdy + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} dy^2.$$

Zadatak 4.4 *Odredite ekstreme funkcije $z = x + 2y$ uz uvjet $x^2 + y^2 = 5$.*

Rješenje. Lagrangeova funkcija izgleda

$$F(x, y) = x + 2y + \lambda(x^2 + y^2 - 5).$$

Nužni uvjet ekstrema daje jednadžbe:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x} &= 1 + 2\lambda x = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y} &= 2 + 2\lambda y = 0 \\ x^2 + y^2 &= 5 \end{aligned}$$

Iz prve dvije moguće je dvije nepoznanice izraziti preko treće:

$$\begin{aligned} x &= -\frac{1}{2\lambda} \\ y &= -\frac{1}{\lambda}, \end{aligned}$$

koja se otkriva iz jednadžbe

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^2} &= 5 \\ \frac{5}{4\lambda^2} &= 1 \\ \lambda_{1,2} &= \pm\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Iz navedenog je moguće zaključiti da $\lambda_1 = -\frac{1}{2}$ daje prvu točku mogućeg ekstrema:

$$P_1 = (1, 2).$$

Slično $\lambda_2 = \frac{1}{2}$ daje drugu točku koja kandidira za uvjetni ekstrem:

$$P_2(-1, -2).$$

Dovoljan uvjet dobiva se iz analize predznaka drugog diferencijala:

$$d^2F = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}dy^2$$

koji za bilo koju točku domene glasi:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} &= 2\lambda \\
\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} &= 0 \\
\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} &= 2\lambda \\
d^2F &= 2\lambda dx^2 + 2\lambda dy^2 \\
&= 2\lambda(dx^2 + dy^2).
\end{aligned}$$

Bilo bi dobro uočiti da bez obzira na uvjet koji točke ekstrema moraju zadovoljiti:

$$\begin{aligned}
x^2 + y^2 &= 5 \\
2xdx + 2ydy &= 0 \\
dy &= -\frac{y}{x}dx
\end{aligned}$$

predznak drugog diferencijala ovisi o parametru λ, koji je negativan za točku

$$T_1(1, 2, 5)$$

u kojoj funkcija ima lokalni maksimum. Točka

$$T_(-1, -2, -5)$$

točka je lokalnog minimuma zbog pozitivnosti parametra λ koji daje pozitivnost drugog diferencijala u toj točki bez obzira na komponente smjera tangencijalnog vektora (dx,dy)

Zadatak 4.5 *Odredite lokalne ekstreme funkcije* $z = x^2 + y^2$ *uz uvjet* $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$

Rješavanje počinje konstrukcijom Lagrangeove funkcije:

$$F(x, y) = x^2 + y^2 + \lambda(\frac{x}{2} + \frac{y}{3} - 1).$$

Nužni uvjeti:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x} &= 2x + \frac{\lambda}{2} = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y} &= 2y + \frac{\lambda}{3} = 0 \\ \frac{x}{2} + \frac{y}{3} &= 1 \end{aligned}$$

vode na izlučivanje nepoznanica

$$\begin{aligned} x &= -\frac{\lambda}{4} \\ y &= -\frac{\lambda}{6} \end{aligned}$$

iz prve dvije jednadžbe i uvrštavanje u treću daje:

$$\begin{aligned} -\frac{\lambda}{8} - \frac{\lambda}{18} &= 1 | \cdot 72 \\ -9\lambda - 4\lambda &= 72 \\ \lambda &= -\frac{72}{13} \end{aligned}$$

Za vrijednost $\lambda = -\frac{72}{13}$ imamo točku $(\frac{18}{13}, \frac{12}{13})$ za koju treba ispitati predznak:

$$d^2F(x, y) = 2dx^2 + 2dy^2 > 0$$

što pokazuje da se minimum postiže u točki i iznosi

$$\begin{aligned} z_{min} &= (\frac{18}{13})^2 + (\frac{12}{13})^2 \\ &= \frac{36}{13} \end{aligned}$$

Zadatak 4.6 *Odredite ekstreme funkcije*

$$z = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$$

uz uvjet

$$\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = 1.$$

Rješenje. $z_{min} = (-\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = -\sqrt{2}$, $z_{max}(\sqrt{2}, \sqrt{2}) = \sqrt{2}$

Zadatak 4.7 *Odredite lokalne ekstreme funkcije*

$$z = xy$$

uz uvjet

$$x + y = 1$$

Zadatak 4.8 *Odredite ekstreme funkcije*

$$z = \cos^2 x + \cos^2 y$$

uz uvjet

$$y - x = \frac{\pi}{4}.$$

Rješavanje počinje ponovo konstrukcijom Lagrangeve funkcije

$$F(x, y) = \cos^2 x + \cos^2 y + \lambda(y - x - \frac{\pi}{4}$$

iz koje dobivamo sistem nužnih uvjeta:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial x} &= -2\cos x \sin x - \lambda = 0 \\
\frac{\partial F}{\partial y} &= -2\cos y \sin y + \lambda = 0 \\
y - x &= \frac{\pi}{4}
\end{aligned}$$

Zbrajanjem prve dvije jednadžbe i korištenjem formula dvostrukog kuta dobiva se

$$\begin{aligned}
\sin 2x + \sin 2y &= 0 \\
\sin 2x + \sin(2x + \frac{\pi}{2}) &= 0 \\
\sin 2x + \cos 2x &= 0 | : \cos 2x \neq 0 \\
tg 2x &= -1 \\
2x &= -\frac{\pi}{4} + k\pi \\
x &= -\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2} \\
y &= \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}
\end{aligned}$$

Za ispitivanje gore navedene kolekcije od prebrojivo, ali beskonačno mnogo stacionarnih točaka koje generiraju cijeli brojevi k, koristimo se drugim diferencijalom:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} &= -2\cos 2x \\
\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} &= -2\cos 2y \\
\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} &= 0
\end{aligned}$$

Ispitivanje predznaka drugog diferencijala

$$d^2 F = -2\cos 2x dx^2 - 2\cos 2y dy^2$$

za točke
$$x = -\frac{\pi}{8}, \quad y = \frac{\pi}{8}$$
daje uz primjenu adicionih formula:
$$\begin{aligned} d^2F &= -2\cos(-\frac{\pi}{4} + k\pi)dx^2 - 2\cos(\frac{\pi}{4} + k\pi)dy^2 \\ &= -2\cos\frac{\pi}{4}\cos k\pi dx^2 - 2\cos\frac{\pi}{4}\cos k\pi dy^2 \end{aligned}$$
slijedeću diskusiju:
$$\begin{aligned} k = 2n \quad &\Rightarrow \quad d^2F < 0 \\ k = 2n+1 \quad &\Rightarrow \quad d^2F > 0 \end{aligned}$$
koja rezultira da se lokalni maksimumi postižu u točkama
$$x = -\frac{\pi}{8} + n\pi, \quad y = -\frac{\pi}{8} + n\pi$$
i imaju vrijednost:
$$z_{max} = \frac{2+\sqrt{2}}{2},$$
dok se lokalni minimumi postižu u točkama:
$$x = \frac{3\pi}{8} + n\pi, \quad y = \frac{5\pi}{8} + n\pi$$
i iznose
$$z_{min} = \frac{2-\sqrt{2}}{2}.$$

Zadatak 4.9 *Odredite pravokutni paralelepiped koji bi za zadano oplošje S imao najveći volumen.*

Rješenje. Lokalni maksimum za
$$x = y = z = \sqrt{\frac{S}{6}}$$

Zadatak 4.10 *U elipsu*
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$
upisati pravokutnik maksimalne površine.

Rješenje. Površina je $2ab$, a vrhovi su zadani jednakostima:
$$|x| = \frac{a}{\sqrt{2}}, |y| = \frac{b}{\sqrt{2}}$$

Zadatak 4.11 *Na paraboli*

$$y^2 = 4x$$

odredite točku koja je najbliža pravcu

$$x - y + 4 = 0$$

Rješenje. Koristeći formulu za udaljenost točke $T(x_0, y_0)$ do pravca $Ax + By + C = 0$:

$$d(T,p) = \left| \frac{Ax_0 + By_0 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right|$$

dobiva se točka na paraboli s koordinatama $T(1, 2)$.

5 Višestruki integrali

5.1 Pojam dvostrukog integrala i izračunavanje

Dvostruki integral pretpostavlja funkciju u dvije varijable zadanu formulom $z = f(x, y)$ i područje D koje je podskup domene funkcije:

$$\int\int_D f(x,y)dxdy = \int_a^b dx \cdot \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dy.$$

Unutrašnji integral računa se kao jednostruki po varijabli y, dok se x podrazumijeva kao konstanta.

Zadatak 5.1 *Izračunajte*

$$\int\int_D e^{-x} dxdy$$

ako je D trokut s vrhovima u ishodištu, točki $(1, 1)$ i $(0, 2)$.

Nakon crteža, konstruiramo granice:

$$\begin{aligned} \int\int_D e^{-x} dxdy &= \int_0^1 dx \cdot \int_x^{2-x} e^{-x} dy \\ &= \int_0^1 e^{-x} \cdot dx \cdot y|_x^{2-x} \\ &= \int_0^1 (2 - 2x)e^{-x} dx \\ &= \left\{ \begin{array}{ll} u = 2 - 2x & dv = e^{-x} \\ du = -2dx & v = -e^{-x} \end{array} \right\} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= -(2-2x)e^{-x}|_0^1 - \int_0^1 -e^{-x}(-2dx) \\
&= 2 - 2\int_0^1 e^{-x}dx \\
&= 2 + 2e^{-x}|_0^1 \\
&= \frac{2}{e} \approx 0.735
\end{aligned}
$$

Zadatak 5.2 *Izračunajte vrijednost i komentirajte rezultat:*

$$\int\int_D ydxdy,$$

gdje je

$$D\ldots y^2 - x^2 = 1, x = 1, x = 2, x = -2.$$

Kad nacrtate hiperbolu okrenutu duž osi OY, s asimptotama $x = y, x = -y$ i tjemenima u $(0,1)$ i $(0,-1)$ te vertikale $x = 2$ i $x = -2$, traženi integral biti će:

$$
\begin{aligned}
\int_{-2}^{2} dx \int_{-\sqrt{x^2+1}}^{\sqrt{1+x^2}} ydy &= \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} [1 + x^2 - (1 + x^2)]dx \\
&= 0
\end{aligned}
$$

Rješenje opravdava simetričnost područja i neparna funkcija. Koliki je brijeg iznad osi OX, tolika je jama ispod nje.

Zadatak 5.3 *Koliko je*

$$\int\int_S e^{-\frac{x}{y}}dxdy,$$

gdje je D krivocrtni trokut OAB omeđen parabolom $y^2 = x$ i pravcima $x = 0$ i $y = 1$.

Nakon crtanja dobiva se

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 dy \int_0^{y^2} e^{-\frac{x}{y}} dx &= \int_0^1 [-e^{-\frac{x}{y}} \cdot y]|_0^{y^2} dy \\
&= -\int_0^1 (ye^{-y} - y)dy \\
&= ye^{-y} + e{-}y + \frac{y^2}{2}|_0^1 \\
&= \frac{2}{e} - \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

Zadatak 5.4 *Odredite vrijednost*

$$\int\int_D \frac{x^2}{y^2} dxdy,$$

ako je D omeđeno krivuljama $x = 2, y = x$ i $xy = 1$.

Iz slike je

$$\int_1^2 dx \int_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{x^2}{y^2} dy = \frac{9}{4}$$

Zadaci

1. Izračunati
$$\int\int_D \sin(x - 2y) dxdy$$
ako je D područje omeđeno s $x = 0, y = 0$ i
$$x - 2y = \frac{\pi}{2}.$$

2. Promijeniti redoslijed integriranja a onda izračunati
$$\int_0^1 dy \int_{\sqrt{y}}^{1} \frac{1}{x} e^{-\frac{y}{x}} dx.$$

3. Izračunati
$$\int\int_D x \sin(x + y) dxdy$$
gdje je D omeđeno sa $x = 0, x = \pi, y = 0$ i $y = \frac{\pi}{2}$.

5.2 Zamjena varijabli u dvostrukom integralu

Prijelaz na polarne koordinate

Polarne koordinate povezane su s kartezijevima:

$$\begin{aligned}
x &= r\cos\varphi \\
y &= r\sin\varphi \\
\mathcal{J} &= \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \end{vmatrix} \\
&= r \\
dxdy &= rdrd\varphi \\
\int\int_D f(x, y) &= \int\int_D f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) rdrd\varphi
\end{aligned}$$

Zadatak 5.5 *Izračunajte*

$$\int\int_D ln(x^2+y^2)dxdy,$$

gdje je područje D omedjeno krivuljama

$$x^2+y^2=e^2,$$

$$x^2+y^2=e^4.$$

Uz navedenu supstituciju, zadani integral prelazi u

$$\begin{aligned}
\int\int_D \ln(r^2)\cdot rdrd\varphi &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_e^{e^2} \cdot rdr \\
&= \left\{ \begin{array}{c} r^2 = t \\ 2rdr = dt \end{array} \right\} \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_{e^2}^{e^4} \ln t dt \\
&= \left\{ \begin{array}{cc} u = \ln t & dv = dt \\ du = \frac{1}{t}dt & v = t \end{array} \right\} \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} [t\ln t|_{e^2}^{e^4} - \int_{e^2}^{e^4} dt]d\varphi \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} d\varphi[4e^4 - 2e^2 - (e^4 - e^2)] \\
&= \frac{1}{2}(3e^4 - e^2)\cdot 2\pi \\
&\approx 491
\end{aligned}$$

Zadatak 5.6 *Izračunajte vrijednost*

$$\int\int_S \frac{dxdy}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

gdje je S područje omedjeno kružnicom $x^2+y^2=6x$.

Uvedemo li polarne koordinate $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ uz zamjenu $dxdy = rdrd\varphi$ dobivamo integral po kružnici:

$$\begin{aligned}
x^2 - 6x + y^2 &= 0 \\
(x-3)^2 - 9 + y^2 &= 0 \\
(x-3)^2 + y^2 &= 9
\end{aligned}$$

sa središtem u $(3,0)$ i polumjerom $r=3$. Granice za kut φ su $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$, dok za proizvoljni kut φ polumjer na zraci kuta φ je od nule, pa do

$$\begin{aligned}
r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi &= 6r\cos\varphi \\
r &= 6\cos\varphi
\end{aligned}$$

Konačno, računamo u polarnim koordinatama:

$$\begin{aligned}
\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{6\cos\varphi} \frac{rdr}{r} &= 6\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi d\varphi \\
&= 6\sin\varphi|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \\
&= 6\cdot 2 \\
&= 12
\end{aligned}$$

Zadatak 5.7 *Izračunajte vrijednost*

$$\int\int_{\pi^2\le x^2+y^2\le 4\pi^2} \sin\sqrt{x^2+y^2}dxdy.$$

Zadatak se rješava polarnim koordinatama:

$$\begin{aligned}
\int\int_{\pi^2\le x^2+y^2\le 4\pi^2} \sin\sqrt{x^2+y^2}dxdy &= \Bigg/ \begin{array}{c} x=r\cos\varphi \\ y=r\sin\varphi \\ dxdy=rdrd\varphi \\ 0\le\varphi\le 2\pi \\ \pi\le\le 2\pi \end{array} \Bigg/ \\
&= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_\pi^{2\pi} \sin\sqrt{r^2}rdr \\
&= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_\pi^{2\pi} r\sin rdr \\
&= \Bigg/ \begin{array}{cc} u=r & dv=\sin rdr \\ du=dr & v=-\cos r \end{array} \Bigg/ \\
&= \int_0^{2\pi} d\varphi\cdot(-r\cos r|_\pi^{2\pi} + \int_\pi^{2\pi}\cos rdr) \\
&= \int_0^{2\pi} [-2\pi\cos 2\pi - (-\pi\cos\pi) + \sin r|_\pi 2\pi]d\varphi \\
&= (-2\pi-\pi)\int_0^{2\pi} d\varphi \\
&= -3\pi\cdot\varphi|_0^{2\pi} \\
&= -6\pi^2 \approx -59
\end{aligned}$$

Ispitni zadaci

1. Izračunajte
$$\int\int_D xydxdy$$
gdje je D područje omedjeno krivuljama zadanim jednadžbama $x^2 + y^2 = 4x$, $x^2 + y^2 = 8x$, koordinatnom osi $y = 0$, a za $y \geq 0$. Obavezno nacrtajte područje D.

2. Izračunati treba
$$\int\int_D \frac{dxdy}{\sqrt{16 - x^2 - y^2}},$$
gdje je D ograničeno sa $x^2 + y^2 = 16$, $y = x$ i $y = \sqrt{3}x$, za $y > 0$.

3. Izračunajte
$$\int_D\int \sqrt{x^2 + y^2} \cdot \cos^2 \sqrt{x^2 + y^2} \cdot dxdy$$
ako je D područje omedjeno krivuljama $x^2 + y^2 = \pi^2$ i $x^2 + y^2 = 4\pi^2$ i pravcima $y = x$ i $y = \sqrt{3}x$.

5.3 Primjene dvostrukih integrala

5.3.1 Izračunavanje površina ravninskih likova

Površina područja S u ravnini XOY računa se formulom
$$P = \int\int_S dxdy.$$
Koriste se do sada pokazane metode integriranja.

Zadatak 5.8 *Izračunajte površinu odredjenu jednadžbama:*
$$x^2 + y^2 \leq 4, \quad x \geq 1.$$

Nakon crtanja dijela ravnine čiju površinu treba izračunati, granice u polarnim koordinatama, podesnim za računanje su:

- granice za φ su
$$-\frac{\pi}{3} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{3},$$

- fiksira li se kut φ, manju vrijednost udaljenosti točaka iz područja dobivamo iz računa

$$\begin{aligned} x &= r\cos\varphi \\ 1 &= r\cos\varphi \\ \frac{1}{\cos\varphi} &= r, \end{aligned}$$

ž

dok je gornja granica za r očito 2,pa je

$$\frac{1}{\cos\varphi} \leq r \leq 2.$$

Sada slijedi:

$$\begin{aligned} P &= \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} d\varphi \int_{\frac{1}{\cos\varphi}}^{2} r dr \\ &= \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{r^2}{2}|_{\frac{1}{\cos\varphi}}^{2} \cdot d\varphi \\ &= \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} (4 - \frac{1}{\cos^2\varphi}) d\varphi \\ &= \frac{1}{2} \cdot (4\varphi - \tan\varphi)|_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \\ &= \frac{1}{2} \cdot (4 \cdot \frac{2\pi}{3} - \sqrt{3}) \\ &\approx 2.46 \end{aligned}$$

Zadatak 5.9 *Potrebno je naći veličinu površine ograničene parabolama:*

$$y^2 = 10x + 25; \quad y^2 = -6x + 9.$$

Nakon grafičkog prikaza parabola, površina se dobiva dvostrukim integralom:

$$\begin{aligned} P &= \int_{-\sqrt{15}}^{\sqrt{15}} dy \int_{\frac{y^2-25}{10}}^{\frac{9-y^2}{6}} dx \\ &= \int_{-\sqrt{15}} \sqrt{15}(\frac{9-y^2}{6} - \frac{y^2-25}{10}) dy \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= (\frac{3}{2}-\frac{5}{2})y|_{-\sqrt{15}}^{\sqrt{15}} - (\frac{1}{6}+\frac{1}{10})\frac{y^3}{3}|_{-\sqrt{15}}^{\sqrt{15}} \\
&= 8\sqrt{15}-\frac{8}{3}\sqrt{15} \\
&= \frac{16}{3}\sqrt{15} \\
&\approx 21
\end{aligned}
$$

Zadaci

1. Izračunajte površinu lika omedjenog krivuljama
   (a) $y^2 = 12x$, $x + y = 9$, $y = 0$, a za $y > 0$. (30)
   (b) $x^2 + y^2 = 2x$, $x^2 + y^2 = 4x$, pravcima $y = x$ i $y = 0$, a za $y > 0$. (3.856)

5.3.2 Izračunavanje volumena cilindričnih tijela

Cilindrično tijelo za bazu u XOY ravnini ima područje D, gornja ploha opisana je formulom

$$z = f(x, y),$$

dok su bočne plohe zadane jednadžbom $\varphi(x, y) = 0$ koja zadaje rub područja D. Volumen takvog tijela računa se dvostrukim integralom:

$$V = \int\int_D f(x, y)dxdy$$

Zadatak 5.10 *Izračunajte volumen tetraedra omeđenog ravninom* $y-x+z = 1$ *i koordinatnim ravninama.*

Nakon crtanja ravnine, napraviti crtež tlocrta, a zatim izračunati:

$$
\begin{aligned}
V &= \int\int_D (x-y+1)dxdy \\
&= \int_{-1}^{0} dx \int_0^{x+1} (x-y+1)dy \\
&\vdots \\
&= \frac{1}{6}
\end{aligned}
$$

Zadatak 5.11 *Odredite volumen tijela omeđenog rotacionim paraboloidom $z = x^2 + y^2$, cilindričnom plohom $y = x^2$ i ravninama $y = 1$, $x = 0$.*

Nakon crtanja, računanjem se dobiva:

$$\begin{aligned}
V &= \int\int_D (x^2+y^2)dxdy \\
&= \int_{-1}^{1} dx \int_{x^2}^{1} (x^2+y^2)dy \\
&= \int_{-1}^{1} [x^2 y + \frac{y^3}{3}]|_{x^2}^{1} dx \\
&= \int_{-1}^{1} (x^2 + \frac{1}{3} - x^4 - \frac{x^6}{3})dx \\
&= \frac{88}{105}
\end{aligned}$$

Zadatak 5.12 *Koliki je volumen cilindričnog tijela omeđenog plohom $x^2 + y^2 = 8$ i ravninama $x = 0, y = 0, z = 0, x + y + z = 4$.*

Nakon crtanja cilindra i ravnine, uočivši o kojem je tijelu riječ, imamo nakon prijelaza na polarne koordinate:

$$\begin{aligned}
V &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{2\sqrt{2}} (4 - r\cos\varphi - r\sin\varphi) r dr \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2r^2 - \frac{r^3}{3}(\cos\varphi + \sin\varphi)|_0^{2\sqrt{2}} d\varphi \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (16 - \frac{16\sqrt{2}}{3}(\cos\varphi + \sin\varphi)d\varphi \\
&= 8\pi + \frac{32\sqrt{2}}{3}
\end{aligned}$$

Zadatak 5.13 *Nađite volumen tijela omeđenog eliptičkim paraboloidom $z = 2x^2 + y^2 + 1$ ravninom $x + y = 1$ i koordinatnim osima.*

Nakon crtanja dobivamo:

$$\begin{aligned}
V &= \int_0^1 \int_0^{1-x} (2x^2 + y^2 + 1)dy \\
&\vdots \\
&= \frac{3}{4}
\end{aligned}$$

Zadatak 5.14 *Prijelazom na polarne koordinate izračunajte volumen prostora omeđenog plohama* $x^2 + y^2 + z^2 = 2Rz$ *i* $x^2 + y^2 = z^2$*, a u kojem se nalazi točka* $(0, 0, R)$*.*

Crtanjem sfere sa centrom u $(0, 0, R)$ i polumjera R, te stošca s vrhom u ishodištu i izvodnicama tipa $x = z, x = -z, y = z, y = -z$, konstruiramo integral:

5.3.3 Izračunavanje mase i koordinata težišta tijela

Element mase u pravokutnim kartezijevim koordinatama jednak je

$$dm = \rho(x, y)dxdy,$$

gdje je $\rho(x, y)$ formula koja računa **plošnu** gustoću ravninskog lika. U slučaju homogene ploče, gustoća je konstantna.

Masa ravninskog lika računa se po formuli:

$$M = \int\int_D \rho(x, y)dxdy.$$

Statički moment materijalne točke u ravnini okomitoj na gravitacijsko polje s obzirom na proizvoljni pravac jednak je

$$M_p = m \cdot d,$$

gdje je

- m masa točke
- d udaljenost točke do pravca

Statički momenti ravninskog lika obzirom na koordinatne osi u ravnini računaju se po formulama:

$$M_x = \int\int_D y \cdot \rho(x, y)dxdy$$

za os apscisa i

$$M_y = \int\int_D x \cdot \rho(x, y)dxdy$$

za moment oko osi ordinata.

Koordinate težišta ravninske ploče dobivanu se **neposredno** iz mase ploče i vrijednosti statičkog momenta:

$$(\bar{x}, \bar{y}) = \left(\frac{M_y}{M}, \frac{M_x}{M}\right).$$

Zadatak 5.15 *Naći koordinate težišta homogenog lika omeđenog krivuljom $y = \sin x$ i pravcem OA koji prolazi ishodištem koordinatnog sustava i tjemenom sinusoide $A(\frac{\pi}{2}, 1)$.*

Rješenje.

$$\begin{aligned}
M_x = \int\int_D ydxdy &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \int_{\frac{2}{\pi}}^{\sin x} ydy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \cdot \frac{y^2}{2}\Big|_{\frac{2}{\pi}}^{\sin x} \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sin^2 x}{2} - \frac{2x}{\pi^2}\right) dx \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1-\cos 2x}{4} - \frac{2x^2}{\pi^2}\right) dx \\
&= \frac{1}{4}x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{8}\sin 2x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{2}{\pi^2}\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \\
M_x &= \frac{\pi}{24} \\
M_y &= \int\int_D xdxdy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \cdot \int_{\frac{2x}{\pi}} xdy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} xdx \cdot \left(\sin x - \frac{2x}{\pi}\right) \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin xdx - \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2dx \\
&= /u = x, \quad du = dx, \qquad dv = \sin xdx, \quad v = -\cos x/ \\
&= -x\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{2}{\pi}\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \\
M_y &= \frac{12-\pi^2}{12} \\
M &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \int_0^{\frac{2x}{\pi}} dy \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin x - \frac{2x}{\pi}\right. \\
&= \frac{4-\pi}{4} \\
x_T &= \frac{M_y}{M} = \frac{\pi}{6(4-\pi)} \sim 0.60 \\
y_T &= \frac{M_y}{M} = \frac{12-\pi^2}{3(4-\pi)} \sim 0.82
\end{aligned}$$

5.4 Pojam trostrukog integrala i izračunavanje

Trostruki integral u pravokutnim koordinatama računa se preko tri jednostruka integrala:

$$\int\int\int_V f(x,y,z)dxdydz = \int\int_D \int_{z_c}^{z_g} f(x,y,z)dz$$

Primjer 5.1 *Izračunajte*

$$\int\int\int_V \frac{dxdydz}{(x+y+z+1)^3}$$

ako je V područje integracije omeđeno koordinatnim ravninama i ravninom $x+y+z=1$.

Rješenje. **Tlocrt** područja dobiva se presjekom s *podnom* ravninom $z=0$:

$$\int_0^1 dx \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} \frac{dz}{(x+y+z+1)^3} = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \left[-\frac{1}{2(x+y+z+1)^2}\right]\Big|_0^{1-x-y} dy.$$

6 Diferencijalne jednadžbe

Diferencijalne jednadžbe su jednadžbe u kojima su nepoznanice formule funkcija, a u jednadžbe ulaze derivacije nepoznatih funkcija.

Rješenje ili korjen diferencijalne jednadžbe je formula funkcije koja uvrštavanjem u jednadžbu, zajedno sa svojim derivacijama, jednadžbu prevodi u identitet.

Jednoznačnost rješenja postiže se zadavanjem **početnih uvjeta**

Primjer 6.1 *Odrediti diferencijalnu jednadžbu koja ima rješenje*

$$y = c_1(x-c_2)^2$$

.

Rješenje. Rješenje je dvoparametarska familija krivulja. Iz

$$\begin{aligned} y &= c_1(x-c_2)^2 \\ y' &= 2c_1(x-c_2)^2 \\ y'' &= 2c_1 \end{aligned}$$

izlazi

$$c_1 = \frac{y''}{2}, \quad \text{i} \quad x - c_2 = \frac{y'}{2c_1} \quad \Rightarrow \quad c_2 = x - \frac{y'}{y''}.$$

Dakle,

$$y = \frac{y''}{2}(x - x + \frac{y'}{y''})^2 \quad \Rightarrow \quad 2yy'' - y'^2 = 0.$$

Primjer 6.2 *Naći onu integralnu krivulju općeg rješenja*

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{-2x}$$

za koju je $y(0) = 1, y'(0) = 2.$

Rješenje. Uvrštavanje uvjeta u

$$\begin{aligned} y &= c_1 e^x + c_2 e^{-2x} \\ y' &= c_1 e^x + 2c_2 e^{-2x} \end{aligned}$$

daje sustav:

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 &= 1 \\ c_1 - 2c_2 &= 2 \end{aligned}$$

s rješenjima $c_2 = 1, c_1 = 0$, pa je partikularno rješenje dano formulom $y = e^{-2x}$.

Zadatak 6.1 *Pokazadi da je* $(x-y+1)y' = 1$ *diferencijalna jednadžba familije krivulja* $y = x + ce^y$.

Rješenje. Pretpostavka da je $y = y(x)$ daje ispravnom derivaciju formule familije krivulja po x:

$$y' = 1 + cy'e^y \quad \Rightarrow \quad ce^y = \frac{y'-1}{y'}$$

Slijedi:

$$\begin{aligned} y &= x + \frac{y'-1}{y'} \qquad | \cdot y' \\ y'y - y'x - y' &= -1 \quad \Rightarrow \quad y'(x - y + 1) = 1 \end{aligned}$$

6.1 Diferencijalne jednadžbe prvog reda

Formalni zapis diferencijalnih jednadžbi prvog reda je

$$F(x, y, y') = 0, \quad \Rightarrow \quad y = \varphi(x, c) \quad \text{ili} \quad \psi(x, y, c) = 0$$

su njezina rješenja.

Diferencijalne jednadžbe prvog reda sadrže oznaku za funkciju i za njenu prvu derivaciju.

Uobičajene su oznake:

$$\begin{aligned} y' &= \frac{dy}{dx} \\ x' &= \frac{dx}{dy} \end{aligned}$$

6.1.1 Egzaktne diferencijalne jednadžbe

Neka su

$$P, Q : \Omega \to \mathbf{R}$$

funkcije diferencijabilne na $\Omega \subset \mathbf{R}^2$. Diferencijalna jednadžba oblika

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$$

naziva se egzaktnom, ako postoji funkcija $g : \Omega \to \mathbf{R}$, takva da je

$$dg(x, y) = P(x, y)dx + Q(x, y)dy.$$

Po Schwartzovom teoremu g postoji ako je

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \qquad \left(\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} = \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \right).$$

Iz navedenog se zaključuje da su formule

$$P(x, y) = \frac{\partial g}{\partial x}; \qquad Q(x, y) = \frac{\partial g}{\partial y}. \tag{1}$$

Rješenje se dobiva u obliku $g(x, y) = c$. Potrebno je odrediti funkciju dvije varijable ako joj znamo prvi diferencijal. Integriranje po varijabli x lijeve jednakosti u (1)daje

$$g(x, y) = \int P(x, y)dx + \varphi(y) \tag{2}$$

koja se derivira parcijalno po y i daje

$$\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\int P(x,y)dx\right) + \varphi'(y) = Q(x,y)$$

odakle je

$$\varphi'(y) = Q(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int P(x,y)dx.$$

Integriranjem po y odredi se $\varphi(y)$ i uvrsti u (2).

Zadatak 6.2 *Riješite homogenu diferencijalnu jednadžbu*

$$(x+y)dx + (x+2y)dy = 0$$

Rješenje. Provjera:

$$\begin{array}{c} P(x,y) = x+y, \quad Q(x,y) = x+2y \\ \dfrac{\partial P}{\partial y} = 1; \quad \dfrac{\partial Q}{\partial x} = 1 \quad \Rightarrow \quad \text{egzaktna D.J.} \end{array}$$

Integriranje

$$\begin{aligned} g(x,y) &= \int P(x,y)dx + \varphi(y) \\ g(x,y) &= \int (x+y)dx + \varphi(y) = \frac{x^2}{2} + xy + \varphi(y) \qquad \Big| \frac{\partial}{\partial y} \end{aligned}$$

Provjereno je $\dfrac{\partial g}{\partial y} = Q$, pa onda

$$\begin{aligned} x + \varphi'(y) &= x + 2y \\ \varphi'(y) &= 2y \\ \varphi(y) &= \int 2y dy' + C \\ \varphi(y) &= y^2 + C, \end{aligned}$$

pa se konačno rješenje zbog $g(x,y) = \dfrac{x^2}{2} + xy + y^2 + C$ može zapisati u obliku

$$\frac{x^2}{2} + xy + y^2 = D.$$

Zadatak 6.3 *Odredite opće rješenje diferencijalne jednadžbe*

$$\frac{2x}{y^3}dx + \frac{y^2 - 3x^2}{y^4}dy = 0.$$

Rješenje. Provjera Schwartzova teorema:

$$\begin{aligned} P(x,y) &= \frac{2x}{y^3}, \qquad \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{6x}{y^4} \\ Q(x,y) &= \frac{y^2 - 3x^2}{y^4}, \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{-6x}{y^4} \end{aligned}$$

daje egzaktnost, pa slijedi:

$$\begin{aligned} g(x,y) &= \int \frac{2x}{y^3}dx + \varphi(y) \\ g(x,y) &= \frac{x^2}{y^3} + \varphi(y) \quad \Big| \frac{\partial}{\partial y} \\ Q(x,y) &= -\frac{3x^2}{y^4} + \varphi'(y) = \frac{y^2 - 3x^2}{y^4} \\ \varphi'(y) &= \frac{1}{y^2} \\ \varphi(y) &= -\frac{1}{y} + C \end{aligned}$$

i vodi na rješenje

$$\frac{x^2}{y^3} - \frac{1}{y} + C = 0 \Rightarrow \quad x^2 - y^2 + Cy^3 = 0.$$

Zadatak 6.4 *Riješiti jednadžbu*

$$xdx + ydy = \frac{xdy + ydx}{x^2 + y^2}.$$

Rješenje. Prije provjere egzaktnosti potrebno je presložiti jednadžbu:

$$\begin{aligned} (x^2 + y^2)xdx + (x^2 + y^2)ydy &= xdy + ydx \\ (x^3 + xy^2 - y)dx + (x^2y + y^3 - x)dy &= 0. \end{aligned}$$

Slijedi provjera:

$$P(x,y) = x^3 + xy^2 - y \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial P}{\partial y} = 2xy - 1$$
$$Q(x,y) = x^2y + y^3 - x \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 2xy - 1$$

nakon koje se integriranjem:

$$\begin{aligned}
g(x,y) &= \int P(x,y)dx + \varphi(y) \\
g(x,y) &= \frac{x^4}{4} + \frac{x^2y^2}{2} - xy + \varphi(y) \quad \Big| \frac{\partial}{\partial y} \\
Q(x,y) &= x^2y - x + \varphi'(y) = x^2y + y^3 - x \\
\varphi'(y) &= y^3 \\
\varphi(y) &= \frac{y^4}{4} + C
\end{aligned}$$

dolazi do rezultata

$$g(x,y) = \frac{x^4}{4} + \frac{x^2y^2}{2} + \frac{y^4}{4} + C,$$

odnosno

$$(x^2 + y^2)^2 + C = 0.$$

Zadatak 6.5 *Riješite* $\frac{y}{x}dx + (y^3 + \ln x)dy = 0.$

Provjeru

$$P(x,y) = \frac{y}{x}, \qquad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{1}{x}$$
$$Q(x,y) = y^3 + \ln x, \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{1}{x}$$

slijedi integriranje:

$$\begin{aligned}
g(x,y) = \int \frac{y}{x}dx + \varphi(y) &= y\ln x + \varphi(y) \quad \Big| \frac{\partial}{\partial y} \\
\ln x + \varphi'(y) &= y^3 + \ln x \\
\varphi'(y) &= y^3 \\
\varphi(y) &= \frac{y^4}{4} + C
\end{aligned}$$

i na poslijetku, zapis rezultata

$$y \ln x + \frac{y^4}{4} + C = 0.$$

6.1.2 Diferencijalne jednadžbe sa separiranim varijablama

Ako je u diferencijalnoj jednadžbi moguće na jednoj strani jednakosti postići prisutnost samo x-a, a na drugoj samo y, onda je riječ o diferencijalnoj jednadžbi kojoj se mogu separirati varijable:

$$X(x)dx = Y(y)dy. \tag{3}$$

Zbog očitog

$$X(x)dx - Y(y)dy = 0$$

radi se o egzaktnoj jednadžbi, pa se rješenje obično piše kao

$$\int X(x)dx - \int Y(y)dy = C$$

a rješavanje se izvodi integriranjem posebno lijeve i posebno desne strane jednakosti (3).

Zadatak 6.6 *Separirajte varijable i riješite*

$$y' = -\frac{y}{x}.$$

Rješenje. Uz dogovor $y' = \dfrac{dy}{dx}$, jednadžbu

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$$

formalnim množenjem i dijeljenjem svodimo na oblik

$$\frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x}$$

kojeg integriramo:

$$\begin{aligned}
\int \frac{dy}{y} &= \int -\frac{dx}{x} \\
\ln y &= -\ln x + C = \ln \frac{1}{x} + \ln C_1 \\
\ln y &= \ln \frac{C_1}{x} \\
y &= \frac{C_1}{x}
\end{aligned}$$

Uobičajeno je izostavljati indekse kod konstanti i poistovjećivati konstante koje se dobivaju jedne iz drugih:

$$y = \frac{C}{x}$$

Zadatak 6.7 *Riješite*

$$tgx \sin^2 y dx + \cos^2 x ctgy dy = 0.$$

Rješavanje. počinje dijeljenjem jednadžbe:

$$\begin{aligned}
tgx \sin^2 y dx + \cos^2 x ctgy dy &= 0 \quad | : (\sin^2 y \cdot \cos^2 x) && (4)\\
\frac{tgx}{\cos^2 x} dx + \frac{ctgy}{\sin^2 y} dy &= 0 \quad \Big| \int && (5)\\
\frac{tg^2 x}{2} + \frac{ctg^2}{2} &= C && (6)\\
tg^2 x + ctg^2 y &= C, && (7)
\end{aligned}$$

iako je konstanta u (7) dvostruko veća od one u (6), to se ignorira, osobito u tehničkim naukama.

Integriranje (5) izvodi se supstitucijama $t = tgx$, odnosno $s = ctgy$.

Zadatak 6.8 *Integrirajte jednadžbu*

$$xyy' = 1 - x^2.$$

Analogno zadatku 6.7, slijedi

$$\begin{aligned}
xy\frac{dy}{dx} &= 1 - x^2\\
ydy &= \frac{1 - x^2}{x} dx \quad \Big| \int\\
\frac{y^2}{2} &= \ln x - \frac{x^2}{2} + C\\
y^2 &= 2\ln x - x^2 + C
\end{aligned}$$

Zadatak 6.9 *Odredite partikularno rješenje jednadžbe*

$$(1 + e^x) yy' = e^x$$

koje zadovoljava početni uvjet $y(0) = 1$.

Rješenje. Najprije se odredi opće rješenje:

$$\begin{aligned} ydy &= \frac{e^x}{1+e^x}dx \quad \Big| \int \\ \frac{y^2}{2} &= \ln(1+e^x) + C. \end{aligned}$$

Početni uvjet služi sa odredjivanje konstante C:

$$\frac{1}{2} = C.$$

Traženo partikularno rješenje je:

$$e^{\frac{y^2}{2}} = \sqrt{e}(1+e^x).$$

Zadatak 6.10 *Diferencijalnoj jednadžbi odredite onaj integral, za koji vrijedi $y(0) = 1$, ako jednadžba glasi*

$$(xy^2 + x)dx + (x^2y - y)dy = 0.$$

Rješenje. Integral diferencijalne jednadžbe je sinonim za njeno rješenje:

$$\begin{aligned} x(1+y^2)dx + y(x^2-1)dy &= 0 \quad : (1+y^2)(x^2-1) \\ \frac{x}{x^2-1}dx + \frac{1}{1+y^2}dy &= 0 \quad \Big| \int \\ \int \frac{x}{x^2-1}dx + \int \frac{y}{y^2+1}dy &= C \\ \frac{1}{2}\ln(x^2-1) + \frac{1}{2}\ln(1+y^2) &= C \quad | \cdot 2 \\ \ln(1+y^2) &= -\ln(x^2-1) + \ln C \\ 1+y^2 &= \frac{C}{x^2-1} \end{aligned}$$

Uvrštavanje uvjeta daje konstantu: $1+1 = \dfrac{C}{-1}$ iz čega slijedi

$$1+y^2 = \frac{2}{x^2-1}.$$

6.1.3 Homogene diferencijalne jednadžbe

Definicija 6.1 *Funkcija $f(x, y)$ homogena je s obzirom na x i y ako je*

$$f(kx, ky) = k^n f(x, y).$$

Broj n naziva se stupnjem homogenosti.

Primjer 6.3 *Funkcija $f(x, y) = x^2 - xy + y^2$ homogena je stupnja 2.*

Primjer 6.4 *Funkcija $f(x, y) = g\left(\frac{y}{x}\right) = g\left(\frac{ky}{kx}\right)$ homogena je stupnja homogenosti 0.*

Diferencijalna jednadžba oblika

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

u kojoj su $M(x, y)$ i $N(x, y)$ homogene funkcije istog stupnja homogenosti zove se **homnogenom diferencijalnom jednadžbom**.

Homogena diferencijalna jednadžba prevodi se u diferencijalnu jednadžbu sa separiranim varijablama supstitucijom

$$\begin{aligned} z &= \frac{y}{x}, \quad z = z(x) \\ y &= zx \\ y' &= z'x + z, \quad \text{zbog} \quad z = z(x) \\ dy &= xdz + z \end{aligned}$$

Zadatak 6.11 (Knjiga) *Riješite homogenu jednadžbu*

$$(x - y)ydx - x^2dy = 0.$$

Rješenje. Homogenost stupnja 2 iskoristi se dijeljenjem, u ovom slučaju, sa x^2:

$$\begin{aligned} (x - y)ydx - x^2dy &= 0 \quad | : x^2dx \\ \left(1 - \frac{y}{x}\right)\frac{y}{x} - \frac{dy}{dx} &= 0 \\ \text{supstitucija} \quad z = \frac{y}{x}; \quad y = zx, & \qquad y' = z'x + z \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
(1-z)z-(z'x+z) &= 0\\
-z^2-\frac{dz}{dx}x &= 0\\
-\frac{dz}{z^2} &= \frac{dx}{x} \quad \Big|\int\\
\frac{1}{z} &= \ln x + C\\
\frac{1}{z} &= \ln Cx\\
y &= \frac{x}{\ln Cx}
\end{aligned}
$$

Zadatak 6.12 *Riješiti* $y' - \dfrac{y}{x} = e^{\frac{y}{x}}$

Rješenje. Supstitucija $\dfrac{y}{x} = z$ daje

$$
\begin{aligned}
z'x+z-z &= e^z\\
\frac{dz}{dx}x &= e^z\\
e^{-z}dz &= \frac{dx}{x} \quad \Big|\int\\
-e^{-z} &= \ln x + C\\
e^{-z} &= -\ln x - C\\
e^{-z} &= \ln\frac{1}{Cx}\\
-z &= \ln\ln\frac{1}{Cx}\\
y &= -x\ln\ln\frac{1}{Cx}
\end{aligned}
$$

Zadatak 6.13 *Integrirajte* $ydx + (2\sqrt{xy} - x)dy = 0.$

Rješenje. Stupanj homogenosti je 1. Postupak slijedi:

$$
\begin{aligned}
ydx + (2\sqrt{xy}-x)dy &= 0 \quad |:xdx\\
\frac{y}{x} + \left(2\sqrt{\frac{y}{x}} - 1\right)y' &= 0\\
z + (2\sqrt{z}-1)(z'x+z) &= 0
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
(2\sqrt{z}-1)\frac{dz}{dx}\cdot x &= -2z\sqrt{z} \\
\frac{1-2\sqrt{z}}{2z\sqrt{z}}dz &= \frac{dx}{x} \\
\frac{1}{2}\int z^{-\frac{3}{2}}dz - \int\frac{dz}{z} &= \int\frac{dx}{x}+C \\
-\frac{1}{\sqrt{z}} - \ln z &= \ln x + C \\
-\sqrt{\frac{x}{y}} - \ln y + \ln x &= \ln x + C \\
\ln|y| + \sqrt{\frac{x}{y}} &= C
\end{aligned}$$

Zadatak 6.14 *Nadjite partikularno rješenje jednadžbe*

$$(x^2-3y^2)dx + 2xydy = 0$$

ako se traži $y(2)=1$.

Rješenje. Homogenu jednadžbu stupnja homogenosti 2 rješavamo uobičajeno:

$$\begin{aligned}
(x^2-4y^2)dx + 2xydy &= 0 \quad | : x^2dx \\
1 - \frac{3y^2}{x^2} + 2\frac{y}{x}\frac{dy}{dx} &= 0 \\
1 - 3z^2 + 2z(z'x+z) &= 0 \\
1 - 3z^2 + 2zx\frac{dz}{dx} + 2z^2 &= 0 \\
2zdz\frac{x}{dz} &= z^2 - 1 \\
\frac{2zdz}{z^2-1} &= \frac{dx}{x} \quad \Big|\int \\
\ln|z^2-1| &= \ln|x| + C \\
|z^2-1| &= C|x| \\
z^2 - 1 &= Cx \\
\frac{y^2}{x^2} - 1 &= Cx \\
y^2 &= x^2 + Cx^3
\end{aligned}$$

Početni uvjet:

$$\begin{aligned} 1 &= 4+8C \\ C &= -\frac{3}{8} \end{aligned}$$

vodi na rješenje

$$y^2 = x^2 - \frac{3}{8}x^3.$$

6.1.4 Linearne diferencijalne jednadžbe

Jednadžbe oblika

$$y' + f(x)y = g(x). \tag{8}$$

Metoda varijacije konstante sastoji se iz dva koraka.

1^o korak predstavlja rješavanje homogene jednadžbe

$$y' + f(x)y = 0$$

separacijom varijabli, koja daje općenito

$$y = C \cdot e^{-\int f(x)dx} \tag{9}$$

rješenje s jednom konstantom.

2^o korak pretpostavi da je konstanta nepoznata funkcija varijable x:

$$C \to C(x).$$

Nakon toga derivira se formula za $y(x)$ iz (9) i uvrsti u (8).

Zadatak 6.15 *Riješite $y' - tgxy = \cos x$.*

Rješenje. Po danom receptu rješava se prvo homogena:

$$\begin{aligned} y' - tgxy &= 0 \\ \frac{dy}{y} &= tgxdx \quad \Big|\int \\ \ln y &= \int \frac{\sin x}{\cos x}dx + C \\ \ln y &= -\ln\cos x + \ln C \\ y &= \frac{C}{\cos x}. \end{aligned}$$

Varijacija konstante C i deriviranje:

$$\begin{aligned} y &= \frac{C(x)}{\cos x} \\ y' &= \frac{C'(x)\cos x + C(x)\sin x}{\cos^2 x}. \end{aligned}$$

Slijedi uvrštavanje u početnu jednadžbu i integriranje:

$$\begin{aligned} \frac{C'(x)\cos x + C(x)\sin x}{\cos^2 x} - \frac{\sin x}{\cos x}\cdot C(x) &= \cos x \\ C'(x) &= \cos^2 x \quad \Big| \int \\ C(x) &= \int \cos^2 x dx = \int \frac{1+\cos 2x}{2} dx = \\ &= \frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} + K. \end{aligned}$$

Slijedi uvrštavannje formule za $C(x)$ u y:

$$y = \frac{1}{\cos x}\left(\frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} + K\right) = \frac{K}{\cos x} + \frac{x}{2\cos x} + \frac{\sin x}{2} \qquad (10)$$

u kojem je prvi pribrojnik opće rješenje homogene jednadžbe, dok su ostala dva partikularno rješenje nehomogene jednadžbe.

Zadatak 6.16 *Riješite* $y' + \frac{y}{x} = \sin x$.

Rješenje. Homogena jednadžba:

$$\begin{aligned} y' + \frac{y}{x} &= 0 \\ \frac{dy}{y} + \frac{dx}{x} &= 0 \\ \ln y &= -\ln x + \ln C \\ y &= \frac{C}{x}. \end{aligned}$$

Varijacija konstante:

$$\begin{aligned} y &= \frac{C(x)}{x} \\ \frac{C'(x)\cdot x - C(x)}{x^2} + \frac{C(x)}{x^2} &= \sin x \end{aligned}$$

$$C'(x) = x\sin x \Rightarrow \quad C(x) = \int \sin x dx = -x\cos x + \sin x + K$$

i konačno

$$y = \frac{K}{x} - \cos x + \frac{\sin x}{x}.$$

Zadatak 6.17 *Odredite rješenje jednadžbe $xy' + y - e^x = 0$ koje zadovoljava početni uvjet $y(a) = b$.*

Rješenje. Homogeni dio

$$\begin{aligned}
x\frac{dy}{dx} + y &= 0 \\
\frac{dy}{y} + \frac{dx}{x} &= 0 \quad \Big| \int \\
\ln y + \ln x &= \ln C \\
y &= \frac{C}{x}.
\end{aligned}$$

Nakon rješenja varira se konstanta i uvrštava u početnu jednadžbu:

$$\begin{aligned}
y = \frac{C(x)}{x} \quad &\Rightarrow \quad y' = \frac{C'(x)\cdot x - C(x)}{x^2} \\
\frac{C'(x)\cdot x - C(x)}{x^2} + \frac{C(x)}{x} - e^x &= 0 \\
C'(x) &= e^x \\
C(x) &= e^x + K \Rightarrow y = \frac{K}{x} + \frac{e^x}{x}
\end{aligned}$$

Početni uvjet nakon uvrštavanja u posljednji izraz daje $K = ab - e^a$, pa je konačno rješenje:

$$y = \frac{e^x}{x} + \frac{ab - e^a}{x}.$$

Zadatak 6.18 *Riješite diferencijalnu jednadžbu*

$$(1 + y^2)dx = (\sqrt{1 + y^2}\sin y - xy)dy$$

Rješenje. Ponekad je mudro zamijeniti varijable, pa rješavati jednadžbu

$$x' + f(y)x = g(y) \tag{11}$$

i tražiti izraz $x = x(y)$ uz dogovorno $x' = \dfrac{dx}{dy}$. Ovo je dobar primjer za to.

Dakle, ponajprije valja doći do oblika (11)

$$\begin{aligned}
(1+y^2)dx &= (\sqrt{1+y^2}\sin y - xy)dy \quad | : y(1+y^2)dy \\
\frac{dx}{dy} &= \frac{\sqrt{1+y^2}\sin y - xy}{1+y^2} \\
\frac{dx}{dy} + \frac{y}{1+y^2}\cdot x &= \frac{\sin y}{\sqrt{1+y^2}} \qquad \text{(linearna u x(y))}
\end{aligned}$$

Navedenoj jednadžbi rješava se homogeni dio:

$$\begin{aligned}
\frac{dx}{x} + \frac{ydy}{1+y^2} &= 0 \quad \Big| \int \\
\ln x + \frac{1}{2}\ln(1+y^2) &= \ln C \\
x &= \frac{C}{\sqrt{1+y^2}}
\end{aligned}$$

Varijacija konstante daje

$$\begin{aligned}
x &= \frac{C(y)}{\sqrt{1+y^2}} \\
\frac{C'(y)\sqrt{1+y^2} - C(y)\cdot\frac{1}{2\sqrt{1+y^2}}\cdot 2y}{1+y^2} + \frac{y}{1+y^2}\cdot\frac{C(y)}{\sqrt{1+y^2}} &= \frac{\sin y}{\sqrt{1+y^2}} \\
C'(y) &= \sin y \\
C(y) &= -\cos y + K
\end{aligned}$$

Konačno rješenje sada glasi

$$x = \frac{K}{\sqrt{1+y^2}} - \frac{\cos y}{\sqrt{1+y^2}}.$$

Zadatak 6.19 *Integrirati linearnu diferencijalnu jednadžbu:*

$$y^2dx - (2xy+3)dy = 0$$

Rješenje. Dijeljenjem jednadžbe izrazom y^2dy daje prispodobu linearnoj jednadžbi:

$$\begin{aligned}
\frac{dx}{dy} - \left(\frac{2x}{y} + \frac{3}{y^2}\right) &= 0 \\
\frac{dx}{dy} - \frac{2}{y}x &= \frac{3}{y^2}
\end{aligned}$$

Prvi korak rješavanje je homogenog dijela:

$$\begin{aligned}
\frac{dx}{dy} - \frac{2}{y}x &= 0 \\
\frac{dx}{x} - \frac{2dy}{y} &= 0 \qquad \Big| \int \\
\ln x - 2\ln y &= \ln C \\
y &= Cy^2
\end{aligned}$$

Varijacija konstante daje

$$\begin{aligned}
x &= C(y) \cdot y^2 \\
C'(y)y^2 + C(y) \cdot 2y - \frac{2}{y}C(y) \cdot y^2 &= \frac{3}{y^2} \\
C'(y) &= \frac{3}{y^4} \qquad \Big| \int \\
C(y) &= -\frac{1}{y^3} + K
\end{aligned}$$

Konačno je

$$x = Ky^2 - \frac{1}{y}.$$

Zadatak 6.20 *Nadjite integral jedndadžbe*

$$y' - \frac{y}{1-x^2} - 1 - x = 0$$

uz zadani početni uvjet $y(0) = 0$.

Rješenje. Homogeni dio jednadžbe nakon razlučivanja rješava se na slijedeći način:

$$\begin{aligned}
y' - \frac{1}{1-x^2}y &= 0 \\
\frac{dy}{y} - \frac{dx}{1-x^2} &= 0 \\
\ln y &= \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x} + \ln C \\
y &= C\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}
\end{aligned}$$

Varijacija konstante daje nakon derivacije

$$C'(x)\cdot\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}+\frac{C(x)}{2\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}}\cdot\frac{1-x+1+x}{(1-x)^2}-\frac{1}{1-x^2}\cdot C(x)\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}-1-x \;=\; 0$$

$$C'(x)=\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}(1+x)=\sqrt{1-x^2}$$

$$C'(x)=\sqrt{1-x^2}$$

$$C(x)=\int\sqrt{1-x^2}dx$$

Posljednji integral rješava se egzotičnom trigonometrijskom supstitucijom

$$\begin{aligned} C(x) &= \int\sqrt{1-x^2}dx=\left\{\begin{array}{c} x=\sin t \\ dx=\cos t dt\end{array}\right\}=\int\cos^2 t dt=\int\frac{1+\cos 2t}{2}dt \\ &= \frac{1}{2}t+\frac{\sin 2t}{4}=\frac{1}{2}\arcsin x+\frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}+K\end{aligned}$$

Nakon ovog rješavanja, moguće je napisati opće rješenje

$$y=\frac{1}{2}(\arcsin x+x\sqrt{1-x^2}+K)\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$$

i uvrštavanjem početnog uvjeta $y(0)=0$ dobiti $K=0$:

$$y=\frac{1}{2}(\arcsin x+x\sqrt{1-x^2})\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$$

Zadatak 6.21 *Riješite* $2x(x^2+y)dx=dy$.

Rješenje. Nakon dijeljenja s dx:

$$\begin{aligned} 2x^3+2xy &= \frac{dy}{dx} \\ \frac{dy}{dx}-2xy &= 2x^3\end{aligned}$$

Prvo se riješi homogena jednadžba:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx}-2xy &= 0 \\ \frac{dy}{y} &= 2xdx \\ \ln y &= x^2+C \\ y &= Ce^{x^2}\end{aligned}$$

Varijacija konstante:

$$
\begin{aligned}
C'(x)e^{x^2} + 2xC(x)e^{x^2} - 2xC(x)e^{x^2} &= 2x^3 \\
C'(x) &= 2x^3e^{-x^2} \\
C(x) &= 2\int x^3 e^{-x^2}dx = \left\{ \begin{array}{c} x^2 = u \\ xe^{-x^2}dx = dv \\ -\frac{1}{2}e^{-x^2} = v \\ 2xdx = du \end{array} \right\} \\
&= 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}x^2e^{-x^2} + \int xe^{-x^2}dx \right) = \\
C(x) &= \left(x^2 - \frac{1}{2} \right) e^{-x^2} + K
\end{aligned}
$$

Dakle, konačno je rješenje

$$
y = Ke^{-x^2} + \left(x^2 + \frac{1}{2} \right) e^{-2x^2}.
$$

6.2 Diferencijalne jednadžbe višeg reda

U diferencijalnim jednadžbama višeg reda treba pronaći formulu funkcije kojoj se u jednadžbi javljaju osim prve, druga, treća i više derivacije. U iznimnim situacijama takvu je jednadžbu **moguće** riješiti, pa se ovdje prezentira rješavanje nekoliko tipova.

6.2.1 Snižavanje reda diferencijalnih jednadžbi

Višestruko sukcesivno integriranje metoda je koja mudro rješava jednadžbe oblika:

$$
y^{(n)} = f(x)
$$

ukoliko je moguće iznalaziti niz primitivnih formula:

$$
\begin{aligned}
y^{(n-1)} &= \int f(x)dx + C_1 \\
y^{(n-2)} &= \int (\int f(x)dx) + C_1 t + C_2 \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Zadatak 6.22 *Riješite jednadžbu*

$$y'' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

ako je za $x = \frac{\pi}{4}$, $y = \frac{\ln 2}{2}$, $y' = 1$.

Rješenje uzastopnim integriranjem izgleda ovako:

$$\begin{aligned}
y'' &= \frac{1}{\cos^2 x} \qquad \Big| \int \\
y' &= tgx + C \qquad \Rightarrow y'(\frac{\pi}{4} = 1 \Rightarrow C = 0 \\
y &= \int tgx dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx \\
y &= -\ln\cos x + C \qquad \Rightarrow y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\ln x}{2} \Rightarrow C = 0
\end{aligned}$$

i daje rješenje

$$y = -\ln\cos x.$$

Snižavanje reda u jednadžbama

$$F(x, y^{(p)}, y^{(p-1)} \ldots, y^{(n)}) = 0,$$

dakle kad nema y-a, a najniža derivacija funkcije y je p-ta, svodi se na supstituciju

$$p = y^{(p)}.$$

Konačno se rješenje dobiva višestrukim integriranjem kao u zadatku (6.22).

Zadatak 6.23 *Odredite opće rješenje diferencijalne jednadžbe drugog reda*

$$(1 + x^2)y'' + 2xy' = x^3.$$

Rješenje

Supstitucija $y' = p$ znači da je

$$y'' = p' = \frac{dp}{dx}$$

pa jednadžba glasi

$$(1+x^2)p' + 2xp = x^2$$

i linearna je diferencijalna jednadžba prvog reda, a traži se funkcija $p(x)$. Dijeljenjem jednadžbe faktorom $(1+x^2)$ jednadžba je spremna za integriranje:

$$p' + \frac{2x}{1+x^2}p = \frac{x^3}{1+x^2}$$

Homogeni dio rješava se separacijom varijabli:

$$\begin{aligned}
p' + \frac{2x}{1+x^2}p &= 0 \\
\frac{dp}{dx} &= -\frac{2x}{1+x^2}p \\
\frac{dp}{p} &= -\frac{2xdx}{1+x^2} \quad \Big| \int \\
\ln p &= -\ln(1+x^2) + C \\
p &= \frac{C}{1+x^2}.
\end{aligned}$$

Varijacija konstante daje derivaciju p':

$$p' = \frac{C'(1+x^2) - 2xC}{(1+x^2)^2}$$

uvrštava se u početnu, nehomogenu jednadžbu:

$$\begin{aligned}
(1+x^2)\cdot\frac{C'(1+x^2) - 2xC}{(1+x^2)^2} + 2x\cdot\frac{C}{1+x^2} &= x^3 \\
C' &= x^2 \\
C &= \frac{x^4}{4} + D
\end{aligned}$$

i dobiva se

$$p = \frac{\frac{x^4}{4} + D}{1+x^2}.$$

Budući je $y' = p$, to se konačno rješenje dobiva neposrednim integriranjem.

$$y' = \frac{x^4 + D}{4(1+x^2)} \quad \Big| \int$$

$$
\begin{aligned}
y &= \frac{1}{4}\int \frac{x^4+D}{4(1+x^2)}dx \\
dijeljenje &: \\
(x^4+D):(x^2+1) &= x^2-1+\frac{D+1}{x^2+1} \\
y &= \frac{1}{4}\int \left(x^2-1+\frac{D+1}{1+x^2}\right)dx \\
y &= \frac{1}{4}\left(\frac{x^3}{3}-x+(D+1)arctgx\right)+E
\end{aligned}
$$

Snižavanje reda moguće je provesti i kod jednadžbi oblika

$$F(y, y', y'', \ldots, y^{(n)})$$

supstitucijom $y = p'$, no u ovom slučaju

$$y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx} = p'p,$$

jer se na p u novonapisanoj jednadžbi gleda kao na $p = p(y)$.

Analogno bi bilo

$$y''' = \frac{d}{dx}(p' \cdot p) = \frac{d}{dy}(p'p) \cdot \frac{dy}{dx} = (p''p + (p')^2)p = p''p^2 + pp'^2$$

Rješenje se dobiva u obliku

$$p = \Phi(y)$$

pa se konačno rješenje zadane jednadžbe dobiva separacijom varijabli:

$$
\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \Phi(y) \\
\frac{dy}{Phi(y)} &= dx
\end{aligned}
$$

Zadatak 6.24 *Riješite jednadžbu*

$$y''y^3 = 1.$$

Rješenje. Supstitucijom $y' = p$, preko izvedenog $y'' = p'p$ dobivena je forma jednadžbe

$$p'py^3 = 1$$

koja se rješava separacijom varijabli:

$$\begin{aligned}
\frac{dp}{dy}y^3p &= 1\\
pdp &= \frac{dy}{y^3}\\
\frac{p^2}{2} &= \frac{y^{-2}}{-2} + C \quad | \cdot 2\\
p^2 &= -\frac{1}{y^2} + D\\
p &= \sqrt{D - \frac{1}{y^2}}\\
\frac{dy}{dx} &= \frac{\sqrt{Dy^2-1}}{y}\\
\frac{y}{\sqrt{Dy^2-1}}dy &= dx \quad \Big| \int\\
& \quad Dy^2 - 1 = t^2\\
& \quad 2Dydy = 2tdt\\
& \quad dy = \frac{tdt}{Dy}\\
\int \frac{y}{t} \cdot \frac{tdt}{Dy} &= x + E\\
\frac{1}{D} \cdot \sqrt{Dy^2-1} &= x + E \quad | \cdot D\\
\sqrt{Dy^2-1} = Dx + F.
\end{aligned}$$

I to je to.

6.2.2 Linearne diferencijalne jednadžbe n-tog reda

U jednadžbama se javljaju derivacije u osnovnom obliku, bez kvadrata, korjena ili slaganja s nekim drugim funkcijama. Jednadžbe se općenito rješavaju metodom **Varijacije konstanti** Potrebno je definirati vrlo važan pojam **linearno nezavisnog sustava** funkcija jedne varijable.

Definicija. Sustav funkcija

$$y_1(x), \ldots, y_n(x)$$

je linearno nezavisan ako se samo trivijalno poništava njegova linearna kombinacija:

$$\alpha_1 \cdot y_1(x) + \cdots \alpha_n \cdot y_n(x) = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0.$$

Karakterizaciju daje slijedeći

Teorem Sustav funkcija je linearno nezavisan ako i samo ako poništava determinantu Wronskog ili Wronskian

$$\mathcal{W} = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \cdots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \cdots & y_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{n-1}(x) & y_2^{n-1}(x) & \cdots & y_n^{n-1}(x) \end{vmatrix}$$

Općeniti oblik linearne diferencijalne jednadžbe izgleda

$$y^{(n)} + p_1(x) \cdot y^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1}(x) \cdot y'(x) + p_n(x) \cdot y = f(x)$$

HOMOGENE DIFERENCIJALNE JEDNADŽBE

Rješavanjem homogene jednadžbe za koju je $f(x) = 0$, dobiva se sustav od n linearno nezavisnih rješenja

$$y_1(x), \ldots y_n(x)$$

koji zadovoljavaju homogenu jednadžbu. Važno je da rješenja **mora** biti onoliko, koliki je red jednadžbe.

Opće rješenje homogene jednadžbe tako je linearna kombinacija rješenja zapisiva u obliku

$$y = C_1 y_1(x) + \cdots + C_n y_n(x)$$

Zadatak 6.25 *Riješiti homogenu diverencijalnu jednadžbu*

$$y^{IV} + 4y = 0 \tag{12}$$

Rješenje

Rješenje jednadžbe pretpostavlja se u obliku

$$y = e^{\lambda x},$$

gdje je λ nepoznata konstanta.

Derivacije pretpostavljene funkcije koje dolaze u jednadžbu su:

$$\begin{aligned} y' &= \lambda e^{\lambda x} \\ y'' &= \lambda^2 e^{\lambda x} \\ y''' &= \lambda^3 e^{\lambda x} \\ y^{IV} &= \lambda^4 e^{\lambda x} \end{aligned}$$

Jednadžba nakon uvrštavanja pretpostavljenog oblika i potrebne derivacije glasi:

$$\lambda^4 e^{\lambda x} + 4e^{\lambda x} = 0.$$

Dijeljenjem jednadžbe s $e^{\lambda x} \neq 0$ dobiva se takozvana **karakteristična jednadžba**:

$$\lambda^4 + 4 = 0$$

koja mora imati četiri rješenja:

$$\begin{aligned} \lambda^4 &= -4 \\ \lambda_1^2 = 2i, &\qquad \lambda_2^2 = -2i \\ \lambda^2 = 2i &\qquad \Rightarrow \quad |2i| = 2, \varphi = \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad 2i = 2(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} \\ \Rightarrow &\qquad \lambda_1 = \sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}) = \sqrt{2}(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}) = 1 + i \\ \lambda_2 &= -1 - i \\ \lambda_3 &= 1 - i \\ \lambda_4 &= -1 + i \end{aligned}$$

Rješenja su po parovima konjugirano kompleksni brojevi. Osnovna rješenja homogene diferencijalne jednadžbe su

$$\begin{aligned} y_1 = e^x \sin x &\qquad y_2 = e^x \cos x \\ y_3 = e^{-x} \sin x &\qquad y_4 = e^{-x} \cos x \end{aligned}$$

Opće rješenje homogene diferencijalne jednadžbe linearna je kombinacija osnovnih rješenja:

$$y = Ae^x \sin x + Be^x \cos x + Ce^{-x} \sin x + De^{-x} \cos x$$

Rješenje nehomogene jednadžbe dobiva se Lagrangeovim variranjem konstante:

- Konstante se proglase funkcijama od varijable x:

$$C_i = C_i(x)$$

i njihove se formule traže iz

- Sustava jednadžbi za njihove prve derivacije

$$\begin{aligned}
C_1'(x) \cdot y_1(x) + \cdots C_n'(x) \cdot y_n(x) &= 0 \\
C_1'(x) \cdot y_1'(x) + \cdots C_n'(x) \cdot y_n'(x) &= 0 \\
C_1'(x) \cdot y_1''(x) + \cdots C_n'(x) \cdot y_n''(x) &= 0 \\
&\vdots \\
C_1'(x) \cdot y_1^{(n-1)}(x) + \cdots C_n'(x) \cdot y_n^{(n-1)}(x) &= f(x) \qquad (13)
\end{aligned}$$

7 Linearne diferencijalne jednadžbe s konstantnim koeficijentema

Konstantni koeficijenti u linearnoj jednadžbi daju jednadžbi izgled:

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_n y = f(x),$$

s konstantama $a_i \in \mathcal{R}$ i **funkcijom smetnje** $f(x)$ u kojoj nema y-a.

Uobičajeno je rješavanje metodom varijacije konstanti teoretski objašnjeno sustavom (13).

Zadatak 7.1 *Riješite diferencijalnu jednadžbu*

$$y'' + 4y = \frac{1}{\sin^2 x}$$

Rješenje.

Homogeni dio najprije se rješava i to tako da se rješenje pretpostavi u obliku $y = e^{\lambda x}$. Tada je

$$\begin{aligned} y' = \lambda e^{\lambda x}, &\quad y'' = \lambda^2 e^{\lambda x} \\ \lambda^2 e^{\lambda x} + 4e^{\lambda x} &= 0 \\ \lambda^2 + 4 &= 0 \\ \lambda_1 = 2i, &\quad \lambda_2 = -2i \\ y &= A\sin 2x + B\cos 2x, \end{aligned}$$

gdje su $y_1 = \sin 2x$ i $y_2 = \cos 2x$ osnovna ili bazična rješenja homogenog dijela jednadžbe.

Varijacija konstanti sastoji se u tome da se konstante A i B proglase nepoznatim funkcijama u varijabli x i da se konačno rješenje traži preko pretpostavke

$$y = A(x)\sin 2x + B(x)\cos 2x$$

svodeći problem na otkrivanje formula za $A(x)$ i $B(x)$.

Nepoznate funkcije rješavaju se sustavom

$$\begin{aligned} A'\sin 2x + B'\cos 2x &= 0 \\ 2A'\cos 2x - 2B'\sin 2x &= \frac{1}{\sin^2 x} \end{aligned}$$

Množenjem prve jednadžbe sa $\sin 2x$, a druge sa $\cos 2x$ i naknadnim zbrajanjem, dobiva se formula prve derivacije

$$\begin{aligned} 2A' &= \frac{\cos^2 - \sin^2 x}{\sin^2 x} \\ A &= \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sin^2 x}dx - \frac{1}{2}x \\ A &= -\frac{1}{2}ctgx - \frac{1}{2}x + C \end{aligned}$$

Uvrštavanjem u prvu jednadžbu sistema

$$\frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{2\sin^2 x} \cdot \sin 2x + B'\cos 2x = 0$$

dobiva se formula za B':

$$\begin{aligned} B' &= -\frac{2\sin x\cos x}{2\sin^2 x} \\ B &= -\ln\sin x + D \end{aligned}$$

Konačno je rješenje sada

$$y = \left(-\frac{1}{2}ctgx - \frac{1}{2}x + C\right)\sin 2x + (-\ln\sin x + D)\cos 2x.$$

FUNKCIJA SMETNJE: $e^x, \sin x, \cos x$, *polinom* I NJIHOVI UMNOŠCI

Navedeni oblici funkcije smetnje vode k pogadjanju partikularnog rješenja nakon rješavanja homogenog dijela.

Zadatak 7.2 *Riješite jednadžbu*

$$y'' - y = e^{-x}$$

Rješenje.

Homogeni dio jednadžbe:

$$y'' - y = 0$$

rješava se pomoću takozvane karakteristične jednadžbe

$$\begin{aligned} \lambda^2 - 1 &= 0 \\ \lambda_1 = 1; &\qquad \lambda_2 = -1 \\ y_1 = e^x; &\qquad y_2 = e^{-x} \\ y_0 &= Ce^x + De^{-x} \end{aligned}$$

Partikularno rješenje pogadja se na osnovu izgleda funkcije smetnje $f(x) = e^x$ i glasilo bi $y_p = Ae^{-x}$ da e^{-x} nije jedno od osnovnih rješenja homogene jednadžbe.

Ako je u funkciji smetnje funkcija iz rješenja homogene jednadžbe, pretpostavka partikularnog rješenja množi se dodatnim faktorom x.

U ovom slučaju partikularno rješenje pretpostavlja se u obliku

$$y_p = Axe^{-x},$$

gdje je A nepoznata konstanta. Računanje konstante A zahtijeva supstituciju

$$\begin{aligned} y_p' &= Ae^{-x} - Axe^{-x} \\ y_p'' &= -Ae^{-x} - Ae^{-x} + Axe^{-x} \end{aligned}$$

u početnu jednadžbu:

$$\begin{aligned} -2Ae^{-x} + Axe^{-x} - Axe^{-x} &= e^{-x} \\ -2A &= 1 \\ A &= -\frac{1}{2} \quad \Rightarrow y_p = -\frac{x}{2}e^{-x} \end{aligned}$$

Konačno rješenje predstavlja zbroj općeg rješenja homogene i partikularnog rješenja nehomogene, zadane, jednadžbe:

$$y = De^{-x} + Ce^{x} - \frac{x}{2}e^{-x}.$$