MateMatika Diskrit

Logika (*logic*)

STMIK "Parna Raya" Manado

Ir. Hasanuddin Sirait, M.T

Logika

- Logika merupakan dasar dari semua penalaran (*reasoning*).
- Penalaran didasarkan pada hubungan antara pernyataan (*statements*).

Proposisi

- Pernyataan atau kalimat deklaratif yang bernilai benar (*true*) atau salah (*false*), tetapi tidak keduanya.

Permainan

"Gajah lebih besar daripada tikus."

Apakah ini sebuah pernyataan?	YA
Apakah ini sebuah proposisi?	YA
Apakah nilai kebenaran dari proposisi ini?	BENAR

Permainan

“$520 < 111$”

Apakah ini sebuah pernyataan?	YA
Apakah ini sebuah proposisi?	YA
Apakah nilai kebenaran dari proposisi ini?	SALAH

Permainan

"y > 5"

Apakah ini sebuah pernyataan? YA

Apakah ini sebuah proposisi? TIDAK

Nilai kebenaran dari pernyataan tersebut bergantung pada y, tapi nilainya belum ditentukan.

Pernyataan jenis ini kita sebut sebagai **fungsi proposisi** atau **kalimat terbuka**.

Permainan

“Sekarang tahun 2003 dan 99 < 5.”

Apakah ini sebuah pernyataan? YA

Apakah ini sebuah proposisi? YA

Apakah nilai kebenaran dari proposisi ini? SALAH

Permainan

"Tolong untuk tidak tidur selama kuliah"

Apakah ini sebuah pernyataan? TIDAK

Ini adalah sebuah permintaan.

Apakah ini sebuah proposisi? TIDAK

Hanya pernyataanlah yang bisa menjadi proposisi.

Permainan

“x < y jika dan hanya jika y > x.”

Apakah ini pernyataan ? YA

Apakah ini proposisi ? YA

… karena nilai kebenarannya tidak bergantung harga spesifik x maupun y.

Apakah nilai kebenaran dari proposisi ini ? BENAR

Contoh 1. Semua pernyataan di bawah ini adalah proposisi:

(a) 13 adalah bilangan ganjil

(b) Soekarno adalah alumnus UGM.

(c) $1 + 1 = 2$

(d) $8 \geq$ akar kuadrat dari $8 + 8$

(e) Ada monyet di bulan

(f) Hari ini adalah hari Rabu

(g) Untuk sembarang bilangan bulat $n \geq 0$, maka $2n$ adalah bilangan genap

(h) $x + y = y + x$ untuk setiap x dan y bilangan riil ■

Contoh 2. Semua pernyataan di bawah ini bukan proposisi

(a) Jam berapa kereta api Argo Bromo tiba di Gambir?

(b) Isilah gelas tersebut dengan air!

(c) $x + 3 = 8$

(d) $x > 3$ ■

Kesimpulan: Proposisi adalah kalimat berita

Proposisi dilambangkan dengan huruf kecil p, q, r, ….

Contoh:

p : 13 adalah bilangan ganjil.

q : Soekarno adalah alumnus UGM.

r : $2 + 2 = 4$

Mengkombinasikan Proposisi

- Misalkan p dan q adalah proposisi.

  1. **Konjungsi** (*conjunction*): p dan q

     Notasi $p \wedge q$,

  2. **Disjungsi** (*disjunction*): p atau q

     Notasi: $p \vee q$

  3. **Ingkaran** (*negation*) dari p: tidak p

     Notasi: $\sim p$

- p dan q disebut **proposisi atomik**
- Kombinasi p dengan q menghasilkan **proposisi majemuk** (*compound proposition*

Contoh 3. Diketahui proposisi-proposisi berikut:

p : Hari ini hujan
q : Murid-murid diliburkan dari sekolah

$p \wedge q$: Hari ini hujan dan murid-murid diliburkan dari sekolah

$p \vee q$: Hari ini hujan atau murid-murid diliburkan dari sekolah

$\sim p$: Tidak benar hari ini hujan (atau: Hari ini *tidak* hujan) ■

Contoh 4. Diketahui proposisi-proposisi berikut:

p : Pemuda itu tinggi
q : Pemuda itu tampan

Nyatakan dalam bentuk simbolik:

(a) Pemuda itu tinggi dan tampan
(b) Pemuda itu tinggi tapi tidak tampan
(c) Pemuda itu tidak tinggi maupun tampan
(d) Tidak benar bahwa pemuda itu pendek atau tidak tampan
(e) Pemuda itu tinggi, atau pendek dan tampan
(f) Tidak benar bahwa pemuda itu pendek maupun tampan

Penyelesaian:

(a) $p \wedge q$
(b) $p \wedge \sim q$
(c) $\sim p \wedge \sim q$
(d) $\sim(\sim p \vee \sim q)$
(e) $p \vee (\sim p \wedge q)$
(f) $\sim(\sim p \wedge \sim q)$

Tabel Kebenaran

p	q	$p \wedge q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

p	q	$p \vee q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

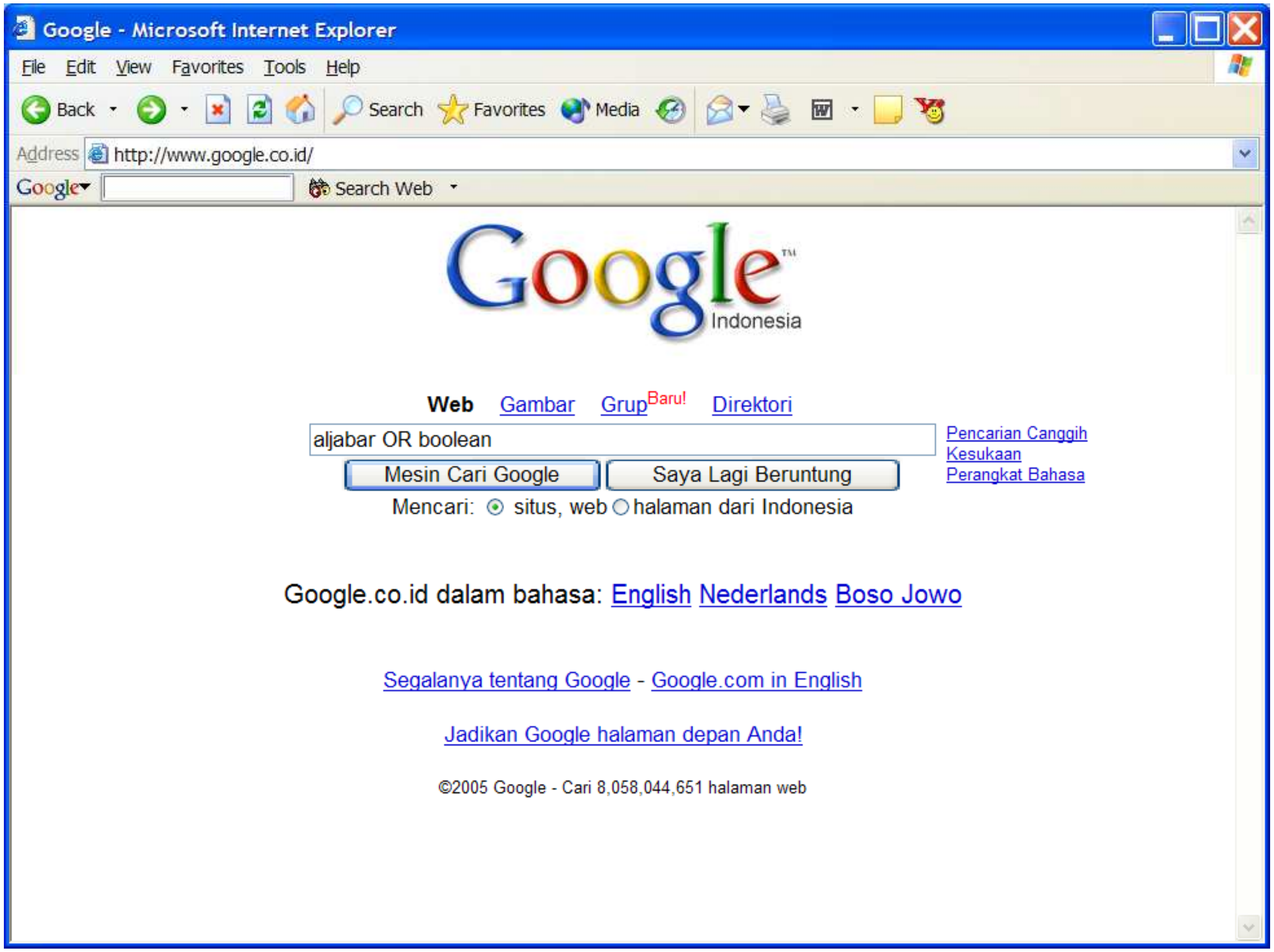
p	$\sim q$
T	F
F	T

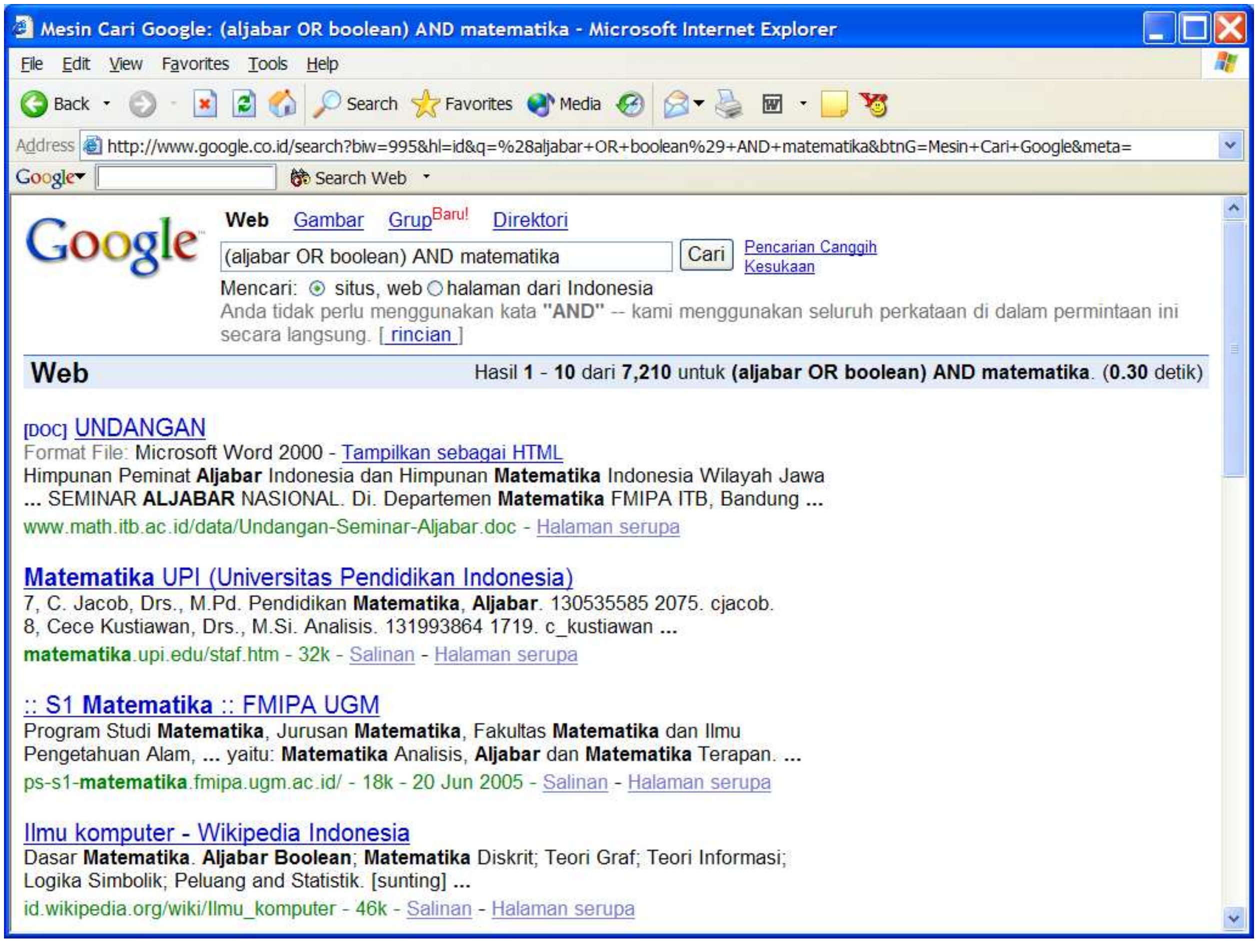
Contoh 5. Misalkan

p : 17 adalah bilangan prima (benar)
q : bilangan prima selalu ganjil (salah)

$p \wedge q$: 17 adalah bilangan prima dan bilangan prima selalu ganjil (salah)

- Operator proposisi di dalam *Google*




Mesin Cari Google: (aljabar OR boolean) AND matematika - Microsoft Internet Explorer
File Edit View Favorites Tools Help
Back Search Favorites Media
Address http://www.google.co.id/search?biw=995&hl=id&q=%28aljabar+OR+boolean%29+AND+matematika&btnG=Mesin+Cari+Google&meta=
Google Search Web
Web Gambar Grup Baru! Direktori
(aljabar OR boolean) AND matematika
Cari
Pencarian Canggih
Kesukaan
Mencari: situs, web halaman dari Indonesia
Anda tidak perlu menggunakan kata "AND" -- kami menggunakan seluruh perkataan di dalam permintaan ini secara langsung. [rincian]
Web
Hasil 1 - 10 dari 7,210 untuk (aljabar OR boolean) AND matematika. (0.30 detik)
[DOC] UNDANGAN
Format File: Microsoft Word 2000 - Tampilkan sebagai HTML
Himpunan Peminat Aljabar Indonesia dan Himpunan Matematika Indonesia Wilayah Jawa ... SEMINAR ALJABAR NASIONAL. Di. Departemen Matematika FMIPA ITB, Bandung ...
www.math.itb.ac.id/data/Undangan-Seminar-Aljabar.doc - Halaman serupa
Matematika UPI (Universitas Pendidikan Indonesia)
7, C. Jacob, Drs., M.Pd. Pendidikan Matematika, Aljabar. 130535585 2075. cjacob.
8, Cece Kustiawan, Drs., M.Si. Analisis. 131993864 1719. c_kustiawan ...
matematika.upi.edu/staf.htm - 32k - Salinan - Halaman serupa
:: S1 Matematika :: FMIPA UGM
Program Studi Matematika, Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, ... yaitu: Matematika Analisis, Aljabar dan Matematika Terapan. ...
ps-s1-matematika.fmipa.ugm.ac.id/ - 18k - 20 Jun 2005 - Salinan - Halaman serupa
Ilmu komputer - Wikipedia Indonesia
Dasar Matematika. Aljabar Boolean; Matematika Diskrit; Teori Graf; Teori Informasi; Logika Simbolik; Peluang and Statistik. [sunting] ...
id.wikipedia.org/wiki/Ilmu_komputer - 46k - Salinan - Halaman serupa

Contoh 6. Bentuklah tabel kebenaran dari proposisi majemuk $(p \wedge q) \vee (\sim q \wedge r)$.

p	q	r	$p \wedge q$	$\sim q$	$\sim q \wedge r$	$(p \wedge q) \vee (\sim q \wedge r)$
T	T	T	T	F	F	T
T	T	F	T	F	F	T
T	F	T	F	T	T	T
T	F	F	F	T	F	F
F	T	T	F	F	F	F
F	T	F	F	F	F	F
F	F	T	F	T	T	T
F	F	F	F	T	F	F

- Proposisi majemuk disebut **tautologi** jika ia benar untuk semua kasus

- Proposisi majemuk disebut **kontradiksi** jika ia salah untuk semua kasus.

Contoh 7. $p \vee \sim(p \wedge q)$ adalah sebuah tautologi

p	q	$p \wedge q$	$\sim(p \wedge q)$	$p \vee \sim(p \wedge q)$
T	T	T	F	T
T	F	F	T	T
F	T	F	T	T
F	F	F	T	T

Contoh 8. $(p \wedge q) \wedge \sim(p \vee q)$ adalah sebuah kontradiksi

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$\sim(p \vee q)$	$(p \wedge q) \wedge \sim(p \vee q)$
T	T	T	F	F	F
T	F	F	T	F	F
F	T	F	T	F	F
F	F	F	F	T	F

Dua buah proposisi majemuk, $P(p, q, ..)$ dan $Q(p, q, ..)$ disebut **ekivalen** secara logika jika keduanya mempunyai tabel kebenaran yang identik.

Notasi: $P(p, q, \ldots) \Leftrightarrow Q(p, q, \ldots)$

Contoh 9. Hukum De Morgan: $\sim(p \wedge q) \Leftrightarrow \sim p \vee \sim q$.

p	q	$p \wedge q$	$\sim (p \wedge q)$	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \vee \sim q$
T	T	T	F	F	F	F
T	F	F	T	F	T	T
F	T	F	T	T	F	T
F	F	F	T	T	T	T

Hukum-hukum Logika

Disebut juga **hukum-hukum aljabar proposisi**.

1. Hukum identitas: – $p \vee \mathbf{F} \Leftrightarrow p$ – $p \wedge \mathbf{T} \Leftrightarrow p$	2. Hukum *null*/dominasi: – $p \wedge \mathbf{F} \Leftrightarrow \mathbf{F}$ – $p \vee \mathbf{T} \Leftrightarrow \mathbf{T}$
3. Hukum negasi: – $p \vee {\sim}p \Leftrightarrow \mathbf{T}$ – $p \wedge {\sim}p \Leftrightarrow \mathbf{F}$	4. Hukum idempoten: – $p \vee p \Leftrightarrow p$ – $p \wedge p \Leftrightarrow p$
5. Hukum involusi (negasi ganda): – ${\sim}({\sim}\mathrm{p}) \Leftrightarrow p$	6. Hukum penyerapan (absorpsi): – $p \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow p$ – $p \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow p$

7. Hukum komutatif: – $p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$ – $p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$	8. Hukum asosiatif: – $p \vee (q \vee r) \Leftrightarrow (p \vee q) \vee r$ – $p \wedge (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \wedge r$
9. Hukum distributif: – $p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ – $p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	10. Hukum De Morgan: – $\sim(p \wedge q) \Leftrightarrow \sim p \vee \sim q$ – $\sim(p \vee q) \Leftrightarrow \sim p \wedge \sim q$

Contoh 10. Tunjukkan bahwa $p \vee \sim(p \vee q)$ dan $p \vee \sim q$ keduanya ekivalen secara logika.

Penyelesaian:

$p \vee \sim(p \vee q) \Leftrightarrow p \vee (\sim p \wedge \sim q)$	(Hukum De ogran)
$\Leftrightarrow (p \vee \sim p) \wedge (p \vee \sim q)$	(Hukum distributif)
$\Leftrightarrow \mathrm{T} \wedge (p \vee \sim q)$	(Hukum negasi)
$\Leftrightarrow p \vee \sim q$	(Hukum identitas)

Contoh 11. Buktikan hukum penyerapan: $p \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow p$

Penyelesaian:

$p \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow (p \vee \mathrm{F}) \wedge (p \vee q)$ (Hukum Identitas)

$\Leftrightarrow p \vee (\mathrm{F} \wedge q)$ (Hukum distributif)

$\Leftrightarrow p \vee \mathrm{F}$ (Hukum *Null*)

$\Leftrightarrow p$ (Hukum Identitas)

Soal Latihan 1

Diberikan pernyataan “Tidak benar bahwa dia belajar Algoritma tetapi tidak belajar Matematika”.

(a) Nyatakan pernyataan di atas dalam notasi simbolik (ekspresi logika)

(b) Berikan pernyataan yang ekivalen secara logika dengan pernyataan tsb (Petunjuk: gunakan hukum De Morgan)

Penyelesaian Soal Latihan 1

Misalkan

p : Dia belajar Algoritma

q : Dia belajar Matematika

maka,

(a) $\sim (p \wedge \sim q)$

(b) $\sim (p \wedge \sim q) \Leftrightarrow \sim p \vee q$ (Hukum De Morgan)

dengan kata lain: "Dia tidak belajar Algoritma atau belajar Matematika"

Disjungsi Eksklusif

Kata "atau" (*or*) dalam operasi logika digunakan dalam salah satu dari dua cara:

1. *Inclusive or*

   "atau" berarti "*p* atau *q* atau keduanya"

   Contoh: "Tenaga IT yang dibutuhkan menguasai Bahasa C++ atau Java".

2. *Exclusive or*

   "atau" berarti "*p* atau *q* tetapi bukan keduanya".

   Contoh: "Ia dihukum 5 tahun atau denda 10 juta".

Operator logika disjungsi eksklusif: *xor*
Notasi: $\oplus$

Tabel kebenaran:

p	q	$p \oplus q$
T	T	F
T	F	T
F	T	T
F	F	F

Proposisi Bersyarat (kondisional atau implikasi)

- Bentuk proposisi: “jika p, maka q”
- Notasi: $p \rightarrow q$
- Proposisi p disebut **hipotesis**, **antesenden**, **premis**, atau **kondisi**
- Proposisi q disebut **konklusi** (atau **konsekuen**).

Contoh 12.

a. Jika saya lulus ujian, maka saya mendapat hadiah dari ayah
b. Jika suhu mencapai 80°C, maka *alarm* akan berbunyi
c. Jika anda tidak mendaftar ulang, maka anda dianggap mengundurkan diri

Cara-cara mengekspresikan implikasi $p \rightarrow q$:

- Jika p, maka q
- Jika p, q
- p mengakibatkan q (*p implies q*)
- q jika p
- p hanya jika q
- p syarat cukup untuk q (hipotesis menyatakan **syarat cukup** (*sufficient condition*))
- q syarat perlu untuk p (konklusi menyatakan **syarat perlu** (*necessary condition*))
- q bilamana p (*q whenever p*)

Contoh 13. Proposisi-proposisi berikut adalah implikasi dalam berbagai bentuk:

1. Jika hari hujan, maka tanaman akan tumbuh subur.
2. Jika tekanan gas diperbesar, mobil melaju kencang.
3. Es yang mencair di kutub mengakibatkan permukaan air laut naik.
4. Orang itu mau berangkat jika ia diberi ongkos jalan.
5. Ahmad bisa mengambil matakuliah Teori Bahasa Formal hanya jika ia sudah lulus matakuliah Matematika Diskrit.
6. Syarat cukup agar pom bensin meledak adalah percikan api dari rokok.
7. Syarat perlu bagi Indonesia agar ikut Piala Dunia adalah dengan mengontrak pemain asing kenamaan.
8. Banjir bandang terjadi bilamana hutan ditebangi.

Contoh 14. Ubahlah proposisi c sampai h pada Contoh 13 di atas ke dalam bentuk proposisi "jika *p* maka *q*"

Penyelesaian:

1. Jika es mencair di kutub, maka permukaan air laut naik.
2. Jika orang itu diberi ongkos jalan, maka ia mau berangkat.
3. Jika Ahmad mengambil matakuliah Teori Bahasa Formal, maka ia sudah lulus matakuliah Matematika Diskrit.
4. Pernyataan yang diberikan ekivalen dengan "Percikan api dari rokok adalah syarat cukup untuk membuat pom bensin meledak" atau "Jika api memercik dari rokok maka pom bensin meledak"
5. Pernyataan yang diberikan ekivalen dengan *"Mengontrak pemain asing kenamaan adalah syarat perlu untuk Indonesia agar ikut Piala Dunia"* atau "Jika Indonesia ikut Piala Dunia maka Indonesia mengontrak pemain asing kenamaan".
6. Jika hutan-hutan ditebangi, maka banjir bandang terjadi.

Penjelasan

Ahmad bisa mengambil matakuliah Teori Bahasa Formal <u>hanya jika</u> ia sudah lulus matakuliah Matematika Diskrit.

Ingat: $p \rightarrow q$ **dapat dibaca** p <u>hanya jika</u> q

p : Ahmad bisa mengambil matakuliah Teori Bahasa Formal

q : Ahmad sudah lulus matakuliah Matematika Diskrit.

Notasi standard: Jika p, maka q

Jika Ahmad mengambil matakuliah Teori Bahasa Formal maka ia sudah lulus matakuliah Matematika Diskrit.

Penjelasan

Syarat perlu bagi Indonesia agar ikut Piala Dunia adalah dengan mengontrak pemain asing kenamaan.

Ingat: $p \rightarrow q$ **dapat dibaca** q <u>syarat perlu</u> untuk p

Susun sesuai format:

Mengontrak pemain asing kenamaan adalah <u>syarat perlu</u> bagi Indonesia agar ikut Piala Dunia

q: Indonesia mengontrak pemain asing kenamaan

p: Indonesia ikut Piala Dunia

Notasi standard: Jika p, maka q

Jika Indonesia ikut Piala Dunia, maka Indonesia mengontrak pemain asing kenaman.

Contoh 15. Misalkan

x : Anda berusia 17 tahun

y : Anda dapat memperoleh SIM

Nyatakan preposisi berikut ke dalam notasi implikasi:

(a) Hanya jika anda berusia 17 tahun maka anda dapat memperoleh SIM.

(b) Syarat cukup agar anda dapat memperoleh SIM adalah anda berusia 17 tahun.

(c) Syarat perlu agar anda dapat memperoleh SIM adalah anda berusia 17 tahun.

(d) Jika anda tidak dapat memperoleh SIM maka anda tidak berusia 17 tahun.

(e) Anda tidak dapat memperoleh SIM bilamana anda belum berusia 17 tahun.

Penyelesaian:

(a) Pernyataan yang ekivalen: "*Anda dapat memperoleh SIM hanya jika anda berusia 17 tahun*".
Ingat: $p \rightarrow q$ bisa dibaca "p hanya jika q".
Notasi simbolik: $y \rightarrow x$.

(b) Pernyataan yang ekivalen: "*Anda berusia 17 tahun adalah syarat cukup untuk dapat memperoleh SIM*".
Ingat: $p \rightarrow q$ bisa dibaca "p syarat cukup untuk q".
Notasi simbolik: $x \rightarrow y$.

(c) Pernyataan yang ekivalen: "*Anda berusia 17 tahun adalah syarat perlu untuk dapat memperoleh SIM*".
Ingat: $p \rightarrow q$ bisa dibaca "q syarat perlu untuk q".
Notasi simbolik: $y \rightarrow x$.

(d) $\sim y \rightarrow \sim x$

(e) Ingat: $p \rightarrow q$ bisa dibaca "q bilamana p".
Notasi simbolik: $\sim x \rightarrow \sim y$.

Tabel kebenaran implikasi

p	q	$p \rightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

Penjelasan (dengan contoh)

Dosen: “Jika nilai ujian akhir anda 80 atau lebih, maka anda akan mendapat nilai A untuk kuliah ini”.

Apakah dosen anda mengatakan kebenaran atau dia berbohong? Tinjau empat kasus berikut ini:

Kasus 1: Nilai ujian akhir anda di atas 80 (hipotesis benar) dan anda mendapat nilai A untuk kuliah tersebut(konklusi benar).

$\therefore$ pernyataan dosen benar.

Kasus 2: Nilai ujian akhir anda di atas 80 (hipotesis benar) tetapi anda tidak mendapat nilai A (konklusi salah).

$\therefore$ dosen berbohong (pernyataannya salah).

Kasus 3: Nilai ujian akhir anda di bawah 80 (hipotesis salah) dan anda mendapat nilai A (konklusi benar).

$\therefore$ dosen anda tidak dapat dikatakan salah (Mungkin ia melihat kemampuan anda secara rata-rata bagus sehingga ia tidak ragu memberi nilai A).

Kasus 4: Nilai ujian akhir anda di bawah 80 (hipotesis salah) dan anda tidak mendapat nilai A (konklusi salah).

$\therefore$ dosen anda benar.

- Perhatikan bahwa dalam implikasi yang dipentingkan nilai kebenaran premis dan konsekuen, bukan hubungan sebab dan akibat diantara keduanya.

- Beberapa implikasi di bawah ini valid meskipun secara bahasa tidak mempunyai makna:

  "Jika 1 + 1 = 2 maka Paris ibukota Perancis"

  "Jika *n* bilangan bulat maka hari ini hujan"

Contoh 16. Tunjukkan bahwa $p \rightarrow q$ ekivalen secara logika dengan $\sim p \vee q$.

Penyelesaian:

p	q	$\sim p$	$p \rightarrow q$	$\sim p \vee q$
T	T	F	T	T
T	F	F	F	F
F	T	T	T	T
F	F	T	T	T

$\therefore$ "Jika p, maka q" $\Leftrightarrow$ "Tidak p atau q".

Contoh 17. Tentukan ingkaran (negasi) dari $p \rightarrow q$.

Penyelesaian:

$$\sim(p \rightarrow q) \Leftrightarrow \sim(\sim p \vee q) \Leftrightarrow \sim(\sim p) \wedge \sim q \Leftrightarrow p \wedge \sim q$$

Contoh 18. Dua pedagang barang kelontong mengeluarkan moto jitu untuk menarik pembeli. Pedagang pertama mengumbar moto "Barang bagus tidak murah" sedangkan pedagang kedua mempunyai moto "Barang murah tidak bagus". Apakah kedua moto pedagang tersebut menyatakan hal yang sama?

Penyelesaian:

p : Barang itu bagus
q : Barang itu murah.

Moto pedagang pertama: "Jika barang itu bagus maka barang itu tidak murah" atau $p \to \sim q$

Moto pedagang kedua: "Jika barang itu murah maka barang itu tidak bagus" atau $q \to \sim p$.

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \to \sim q$	$q \to \sim p$
T	T	F	F	F	F
T	F	F	T	T	T
F	T	T	F	T	T
F	F	T	T	T	T

$\therefore$ $p \to \sim q \Leftrightarrow q \to \sim p$.

$\therefore$ Kedua moto tersebut menyatakan hal yang sama.

- Implikasi Dalam Bahasa Pemrograman

```
if c then S
```

`c`: ekspresi logika yang menyatakan syarat/kondisi
`S`: satu atau lebih pernyataan.

`S` dieksekusi jika `c` benar,
`S` tidak dieksekusi jika `c` salah.

- Struktur *if-then* pada bahasa pemrograman berbeda dengan implikasi *if-then* yang digunakan dalam logika.

- Pernyataan *if-then* dalam bahasa pemrograman bukan proposisi karena tidak ada korespondensi antara pernyataan tersebut dengan operator implikasi ($\rightarrow$).

- *Interpreter* atau *compiler* tidak melakukan penilaian kebenaran pernyataan *if-then* secara logika. *Interpreter* hanya memeriksa kebenaran kondisi `c`, jika `c` benar maka `S` dieksekusi, sebaliknya jika `c` salah maka `S` tidak dieksekusi.

Contoh 19. Misalkan di dalam sebuah program yang ditulis dalam Bahasa Pascal terdapat pernyataan berikut:

```
if x > y then y:=x+10;
```

Berapa nilai *y* setelah pelaksanaan eksekusi if-then jika:

(i) $x = 2$, $y = 1$

(ii) $x = 3$, $y = 5$?

<u>Penyelesaian</u>:

(i) `x = 2` dan `y = 1`

Ekspresi `x > y` bernilai benar

Pernyataan `y:=x+10` dilaksanakan

Nilai *y* sekarang menjadi $y = 2 + 10 = 12$.

(ii) `x = 3` dan `y = 5`

Ekspresi `x > y` bernilai salah

Pernyataan `y:=x+10` tidak dilakukan

Nilai `y` tetap seperti sebelumnya, yaitu 5.

Contoh 20

Untuk menerangkan mutu sebuah hotel, misalkan p : Pelayanannya baik, dan q : Tarif kamarnya murah, r : Hotelnya berbintang tiga. Terjemahkan proposisi-proposisi berikut dalam notasi simbolik (menggunakan p, q, r):

(a) Tarif kamarnya murah, tapi pelayanannya buruk.

(b) Tarif kamarnya mahal atau pelayanannya baik, namun tidak keduanya.

(c) Salah bahwa hotel berbintang tiga berarti tarif kamarnya murah dan pelayanannya buruk.

Penyelesaian:

(a) $q \wedge \sim p$

(b) $\sim q \oplus p$

(c) $\sim \left(r \rightarrow \left(q \wedge \sim p\right)\right)$ ■

Soal Latihan 2

Nyatakan pernyataan berikut:

"Anda tidak dapat terdaftar sebagai pemilih dalam Pemilu jika anda berusia di bawah 17 tahun kecuali kalau anda sudah menikah".

dalam notasi simbolik.

Penyelesaian Soal Latihan 2

Anda tidak dapat terdaftar sebagai pemilih dalam Pemilu <u>jika</u> anda berusia di bawah 17 tahun kecuali kalau anda sudah menikah".

Format: *q* jika *p*

Susun ulang ke bentuk standard: Jika *p*, maka *q*

Jika anda berusia di bawah 17 tahun, kecuali kalau anda sudah menikah, maka anda tidak dapat terdaftar sebagai pemilih dalam Pemilu

Jika anda berusia di bawah 17 tahun, kecuali kalau anda sudah menikah, maka anda tidak dapat terdaftar sebagai pemilih dalam Pemilu

m : Anda berusia di bawah 17 tahun.

n : Anda sudah menikah.

r : Anda dapat terdaftar sebagai pemilih dalam Pemilu.

maka pernyataan di atas dapat ditulis sebagai:

$$(m \wedge \sim n) \rightarrow \sim r$$

Latihan: Ubah kalimat ini ke dalam ekspresi logika (notasi simbolik)

1. Anda hanya dapat mengakses internet dari kampus hanya jika anda mahasiswa Informatika atau anda bukan seorang sarjana.

2. Anda tidak dapat menaiki *roller coaster* jika anda tingginya kurang dari 150 cm kecuali jika anda berusia lebih dari 16 tahun.

Varian Proposisi Bersyarat

Konvers (kebalikan): $q \rightarrow p$
Invers : $\sim p \rightarrow \sim q$
Kontraposisi : $\sim q \rightarrow \sim p$

p	q	$\sim p$	$\sim q$	Implikasi $p \rightarrow q$	Konvers $q \rightarrow p$	Invers $\sim p \rightarrow \sim q$	Kontraposisi $\sim q \rightarrow \sim p$
T	T	F	F	T	T	T	T
T	F	F	T	F	T	T	F
F	T	T	F	T	F	F	T
F	F	T	T	T	T	T	T

Contoh 21. Tentukan konvers, invers, dan kontraposisi dari:

"Jika Amir mempunyai mobil, maka ia orang kaya"

Penyelesaian:

Konvers : Jika Amir orang kaya, maka ia mempunyai mobil

Invers : Jika Amir tidak mempunyai mobil, maka ia bukan orang kaya

Kontraposisi: Jika Amir bukan orang kaya, maka ia tidak mempunyai mobil

Contoh 22. Tentukan kontraposisi dari pernyataan:
(a) Jika dia bersalah maka ia dimasukkan ke dalam penjara.
(b) Jika 6 lebih besar dari 0 maka 6 bukan bilangan negatif.
(c) Iwan lulus ujian hanya jika ia belajar.
(d) Hanya jika ia tdk terlambat maka ia akan mendapat pekerjaan.
(e) Perlu ada angin agar layang-layang bisa terbang.
(f) Cukup hari hujan agar hari ini dingin.

<u>Penyelesaian</u>:
(a) Jika ia tidak dimasukkan ke dalam penjara, maka ia tidak bersalah.
(b) Jika 6 bilangan negatif, maka 6 tidak lebih besar dari 0.
(c) "Jika Iwan lulus ujian maka ia sudah belajar".
Kontraposisi: "Jika Iwan tidak belajar maka ia tidak lulus ujian"
(d) "Jika ia mendapat pekerjaan maka ia tidak terlambat"
Kontraposisi: "Jika ia terlambat maka ia tidak akan mendapat pekerjaan itu"
(e) "Ada angin adalah syarat perlu agar layang-layang bisa terbang" ekivalen dengan "Jika layang-layang bisa terbang maka hari ada angin". Kontraposisi: "Jika hari tidak ada angin, maka layang-layang tidak bisa terbang".
(f) "Hari hujan adalah syarat cukup agar hari ini dingin",
Ekivalen dengan "Jika hari hujan maka hari ini dingin".
Kontraposisi: "Jika hari ini tidak dingin maka hari tidak hujan".

Bikondisional (Bi-implikasi)

- Bentuk proposisi: "*p* jika dan hanya jika *q*"
- Notasi: $p \leftrightarrow q$

p	q	$p \leftrightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

- $p \leftrightarrow q \Leftrightarrow (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$.

p	q	$p \leftrightarrow q$	$p \rightarrow q$	$q \rightarrow p$	$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$
T	T	T	T	T	T
T	F	F	F	T	F
F	T	F	T	F	F
F	F	T	T	T	T

- Dengan kata lain, pernyataan "*p* jika dan hanya jika *q*" dapat dibaca "Jika *p* maka *q* dan jika *q* maka *p*".

- Cara-cara menyatakan bikondisional $p \leftrightarrow q$:
  - (a) p jika dan hanya jika q.
  - (b) p adalah syarat perlu dan cukup untuk q.
  - (c) Jika p maka q, dan sebaliknya.
  - (d) p *iff* q

Contoh 22. Proposisi majemuk berikut adalah bi-implikasi:

(a) 1 + 1 = 2 jika dan hanya jika 2 + 2 = 4.

(b) Syarat cukup dan syarat perlu agar hari hujan adalah kelembaban udara tinggi.

(c) Jika anda orang kaya maka anda mempunyai banyak uang, dan sebaliknya.

(d) Bandung terletak di Jawa Barat *iff* Jawa Barat adalah sebuah propinsi di Indonesia.

Contoh 23. Tuliskan setiap proposisi berikut ke dalam bentuk "*p* jika dan hanya jika *q*":

(a) Jika udara di luar panas maka anda membeli es krim, dan jika anda membeli es krim maka udara di luar panas.
(b) Syarat cukup dan perlu agar anda memenangkan pertandingan adalah anda melakukan banyak latihan.
(c) Anda naik jabatan jika anda punya koneksi, dan anda punya koneksi jika anda naik jabatan.
(d) Jika anda lama menonton televisi maka mata anda lelah, begitu sebaliknya.
(e) Kereta api datang terlambat tepat pada hari-hari ketika saya membutuhkannya.

Penyelesaian:

(a) Anda membeli es krim jika dan hanya jika udara di luar panas.
(b) Aanda memenangkan pertandingan jika dan hanya jika anda melakukan banyak latihan.
(c) Anda naik jabatan jika dan hanya jika anda punya koneksi.
(d) Mata anda lelah jika dan hanya jika anda lama menonton televisi.
(e) Kereta api datang terlambat jika dan hanya jika saya membutuhkan kereta hari itu.

Contoh 24

Diberikan pernyataan "Perlu memiliki *password* yang sah agar anda bisa *log on* ke *server*"

(a) Nyatakan pernyataan di atas dalam bentuk proposisi "jika p, maka q".

(b) Tentukan ingkaran, konvers, invers, dan kontraposisi dari pernyataan tsb.

<u>Penyelesaian</u>:

Misalkan

p : Anda bisa *log on* ke *server*

q : Memiliki *password* yang sah

maka

(a) Jika anda bisa *log on* ke *server* maka anda memiliki *password* yang sah

(b) Ingkaran: "Anda bisa *log on* ke *server* dan anda tidak memiliki *password* yang sah"

Konvers: "Jika anda memiliki *password* yang sah maka anda bisa *log on* ke *server*"

Invers: "Jika anda tidak bisa *log on* ke *server* maka anda tidak memiliki *password* yang sah"

Kontraposisi: "Jika anda tidak memiliki *password* yang sah maka anda tidak bisa *log on* ke *server*"

- Bila dua proposisi majemuk yang ekivalen di-bikondisionalkan, maka hasilnya adalah tautologi.

Teorema:

- Dua buah proposisi majemuk, $P(p, q, ..)$ dan $Q(p, q, ..)$ disebut ekivalen secara logika, dilambangkan dengan $P(p, q, \ldots) \Leftrightarrow Q(p, q, \ldots)$, jika $P \leftrightarrow Q$ adalah tautologi.

Soal latihan 3

Sebagian besar orang percaya bahwa harimau Jawa sudah lama punah. Tetapi, pada suatu hari Amir membuat pernyataan-pernyataan kontroversial sebagai berikut:

(a) Saya melihat harimau di hutan.

(b) Jika saya melihat harimau di hutan, maka saya juga melihat srigala.

Misalkan kita diberitahu bahwa Amir kadang-kadang suka berbohong dan kadang-kadang jujur. Gunakan tabel kebenaran untuk memeriksa apakah Amir benar-benar melihat harimau di hutan?

Penyelesaian soal latihan 3

(a) Saya melihat harimau di hutan.

(b) Jika saya melihat harimau di hutan, maka saya juga melihat srigala.

Misalkan

p : Amir melihat harimau di hutan

q : Amir melihat srigala

Pernyataan untuk (a): p

Pernyataan untuk (b): $p \rightarrow q$

Tabel kebenaran p dan $p \rightarrow q$

p	q	$p \rightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

Kasus 1: Amir dianggap berbohong, maka apa yang dikatakan Amir itu keduanya salah (p salah, q salah)
Kasus 2: Amir dianggap jujur, maka apa yang dikatakan Amir itu keduanya benar (p benar, q benar).

Tabel menunjukkan bahwa mungkin bagi p dan $p \rightarrow q$ benar, tetapi tidak mungkin keduanya salah. Ini berarti Amir mengatakan yang sejujurnya, dan kita menyimpulkan bahwa Amir memang benar melihat harimau di hutan.

Soal latihan 4

[LIU85] Sebuah pulau didiami oleh dua suku asli. Penduduk suku pertama selalu mengatakan hal yang benar, sedangkan penduduk dari suku lain selalu mengatakan kebohongan. Anda tiba di pulau ini dan bertanya kepada seorang penduduk setempat apakah di pulau tersebut ada emas atau tidak. Ia menjawab, “Ada emas di pulau ini jika dan hanya jika saya selalu mengatakan kebenaran”. Apakah ada emas di pulau tersebut?

Penyelesaian soal latihan 4

Ada emas di pulau ini jika dan hanya jika saya selalu mengatakan kebenaran

Misalkan

p : saya selalu menyatakan kebenaran

q : ada emas di pulau ini

Ekspresi logika: $p \leftrightarrow q$

Tinjau dua kemungkinan kasus:

Kasus 1, orang yang memberi jawaban adalah orang dari suku yang selalu menyatakan hal yang benar.

Kasus 2, orang yang memberi jawaban adalah orang dari suku yang selalu menyatakan hal yang bohong.

Kasus 1: orang tersebut selalu menyatakan hal yang benar. Ini berarti p benar, dan jawabannya terhadap pertanyaan kita pasti juga benar, sehingga pernyataan bi-implikasi tersebut bernilai benar. Dari Tabel bi-implikasi kita melihat bahwa bila p benar dan $p \leftrightarrow q$ benar, maka q harus benar. Jadi, ada emas di pulau tersebut adalah benar.

Kasus 2: orang tersebut selalu menyatakan hal yang bohong. Ini berarti p salah, dan jawabannya terhadap pertanyaan kita pasti juga salah, sehingga pernyataan bi-implikasi tersebut salah. Dari Tabel bi-implikasi kita melihat bahwa bila p salah dan $p \leftrightarrow q$ salah, maka q harus benar. Jadi, ada emas di pulau tersebut adalah benar.

Dari kedua kasus, kita selalu berhasil menyimpulkan bahwa ada emas di pulau tersebut, meskipun kita tidak dapat memastikan dari suku mana orang tersebut. ■

Argumen

Argumen adalah suatu deret proposisi yang dituliskan sebagai

$$
\begin{array}{ll}
 & p_1 \\
 & p_2 \\
 & \vdots \\
 & p_n \\
\hline
\therefore & q
\end{array}
$$

yang dalam hal ini, p_1, p_2, …, p_n disebut hipotesis (atau premis), dan q disebut konklusi.

Argumen ada yang **sahih** (*valid*) dan **palsu** (*invalid*).

Definisi. Sebuah argumen dikatakan sahih jika konklusi benar bilamana semua hipotesisnya benar; sebaliknya argumen dikatakan palsu (*fallacy* atau *invalid*).

Jika argumen sahih, maka kadang-kadang kita mengatakan bahwa secara logika konklusi mengikuti hipotesis atau sama dengan memperlihatkan bahwa implikasi

$$(p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_n) \rightarrow q$$

adalah benar (yaitu, sebuah tautologi). Argumen yang palsu menunjukkan proses penalaran yang tidak benar.

Contoh 1

Perlihatkan bahwa argumen berikut:

> *Jika air laut surut setelah gempa di laut, maka tsunami datang. Air laut surut setelah gempa di laut. Karena itu tsunami datang.*

adalah sahih.

Penyelesaian:

Misalkan:

p : Air laut surut setelah gempa di laut

q : Tsunami datang:

Argumen:

$$\begin{array}{rl} & p \to q \\ & p \\ \hline \therefore & q \end{array}$$

Ada dua cara yang dapat digunakan untuk membuktikan kesahihan argumen ini.

Cara 1: Bentuklah tabel kebenaran untuk p, q, dan $p \to q$

p	q	$p \to q$	
T	**T**	**T**	(baris 1)
T	F	F	(baris 2)
F	T	T	(baris 3)
F	F	T	(baris 4)

Argumen dikatakan sahih jika semua hipotesisnya benar, maka konklusinya benar. Kita periksa apabila hipotesis p dan $p \to q$ benar, maka konklusi q juga benar sehingga argumen dikatakan benar. Periksa tabel, p dan $p \to q$ benar secara bersama-sama pada baris 1. Pada baris 1 ini q juga benar. Jadi, argumen di atas **sahih**.

Cara 2: Perlihatkan dengan tabel kebenaran apakah

$$[\, p \wedge (p \rightarrow q)\,] \rightarrow q$$

merupakan tautologi. Tabel 1.16 memperlihatkan bahwa $[\, p \wedge (p \rightarrow q)\,] \rightarrow q$ suatu tautologi, sehingga argumen dikatakan sahih.

Tabel 1.16 $[\, p \wedge (p \rightarrow q)\,] \rightarrow q$ adalah tautologi

p	q	$p \rightarrow q$	$p \wedge (p \rightarrow q)$	$[\, p \wedge (p \rightarrow q)\,] \rightarrow q$
T	T	T	T	T
T	F	F	F	T
F	T	T	F	T
F	F	T	F	T

Perhatikanlah bahwa penarikan kesimpulan di dalam argumen ini menggunakan modus ponen. Jadi, kita kita juga telah memperlihatkan bahwa modus ponen adalah argmen yang sahih. ■

Contoh 2:

Perlihatkan bahwa penalaran pada argumen berikut:

"Jika air laut surut setelah gempa di laut, maka tsunami datang. Tsunami datang. Jadi, air laut surut setelah gempa di laut"

tidak benar, dengan kata lain argumennya palsu.

Penyelesaian:

Argumen di atas berbentuk

$$\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ q \\ \hline \therefore p \end{array}$$

p	q	$p \rightarrow q$	
T	T	T	(baris 1)
T	F	F	(baris 2)
F	**T**	**T**	(baris 3)
F	F	T	(baris 4)

Dari tabel tampak bahwa hipotesis q dan $p \rightarrow q$ benar pada baris ke-3, tetapi pada baris 3 ini konklusi p salah. Jadi, argumen tersebut tidak sahih atau palsu, sehingga penalaran menjadi tidak benar.

Contoh 3:

Periksa kesahihan argumen berikut ini:

Jika 5 lebih kecil dari 4, maka 5 bukan bilangan prima.
5 tidak lebih kecil dari 4.

$\therefore$ 5 adalah bilangan prima

<u>Penyelesaian</u>:

Misalkan p : 5 lebih kecil dari 4

q: 5 adalah bilangan prima.

Argumen:

$$\begin{array}{ll} & p \rightarrow \sim q \\ & \sim p \\ \hline \therefore & q \end{array}$$

p	q	$\sim q$	$p \rightarrow \sim q$	$\sim p$
T	T	F	F	F
T	F	T	T	F
F	**T**	F	**T**	**T**
F	F	T	**T**	**T**

Tabel memperlihatkan tabel kebenaran untuk kedua hipotesis dan konklusi tersebut. Baris ke-3 dan ke-4 pada tabel tersebut adalah baris di mana $p \rightarrow \sim q$ dan $\sim p$ benar secara bersama-sama, tetapi pada baris ke-4 konklusi q salah (meskipun pada baris ke-3 konklusi q benar). Ini berarti argumen tersebut palsu.

- Perhatikanlah bahwa meskipun konklusi dari argumen tersebut kebetulan merupakan pernyataan yang benar ("5 adalah bilangan prima" adalah benar),

- tetapi konklusi dari argumen ini tidak sesuai dengan bukti bahwa argumen tersebut palsu. ■

Beberapa argumen yang sudah terbukti sahih

1. Modus ponen

$$p \rightarrow q$$

$$p$$

$$\therefore q$$

2. Modus tollen

$$p \to q$$

$$\sim q$$

$$\therefore \sim p$$

3. Silogisme disjungtif

$p \vee q$

$\sim p$

$\therefore\ q$

4. Simplifikasi

$$p \wedge q$$

$$\therefore p$$

5. Penjumlahan

$$p$$

$$\therefore p \vee q$$

6. Konjungsi

p

q

$\therefore p \wedge q$

Aksioma, Teorema, *Lemma*, *Corollary*

Aksioma adalah proposisi yang diasumsikan benar. Aksioma tidak memerlukan pembuktian kebenaran lagi.

Contoh-contoh aksioma:

(a) Untuk semua bilangan real x dan y, berlaku $x + y = y + x$ (hukum komutatif penjumlahan).
(b) Jika diberikan dua buah titik yang berbeda, maka hanya ada satu garis lurus yang melalui dua buah titik tersebut.

Teorema adalah proposisi yang sudah terbukti benar.

Bentuk khusus dari teorema adalah *lemma* dan *corolarry*.

Contoh-contoh teorema:

a. Jika dua sisi dari sebuah segitiga sama panjang, maka sudut yang berlawanan dengan sisi tersebut sama besar.
b. Untuk semua bilangan real x, y, dan z, jika $x \leq y$ dan $y \leq z$, maka $x \leq z$ (hukum transitif).

Contoh *corollary*:

Jika sebuah segitiga adalah sama sisi, maka segitiga tersebut sama sudut.
Corollary ini mengikuti teorema (a) di atas.

Contoh *lemma*:

Jika n adalah bilangan bulat positif, maka $n - 1$ bilangan positif atau $n - 1 = 0$.