# MATEMATIKA EKONOMI

Presented by :

M Anang Firmansyah

# MATEMATIKA

## ASAL KATA

Asal kata : MATHEIN artinya mempelajari atau belajar. Dengan mempelajari mate- matika, seseorang akan terbiasa mengatur jalan pemikirannya dgn sistematis.

## Berpikir matematis:

Seseorang yg hendak menem-puh jarak 2 mil akan MEMILIH naik mobil dari pada jalan kaki, kecuali jika waktunya banyak terluang atau sedang berolah raga.

Berpikir matematis:

Untuk dapat mengenderai mobil, harus belajar menyupir. Untuk dapat supir mobil yang baik, dia perlu pengetahuan matematika.

Matematika, merupakan sarana = pendekatan untuk suatu analisa.

Dengan mempelajari matematika, membawa sese-orang kepada kesimpulan dalam waktu yang singkat.

## Ekonomi dan Matematika Ekonomi

Analisis ekonomi tidak berbeda jika menggunakan pendekatan matematis dibanding dengan tanpa pendekatan matematis. Bedanya/keuntungannya:

a. Dengan pendekatan matematis, persoalan atau pokok bahasan menjadi sederhana.

b. Dengan pendekatan matematis, berarti mengaktif-kan logika dengan asumsi-asumsinya.

c. Dapat memakai sebanyak n variabel dalam meng-gambarkan sesuatu (hubungan antar variabel)

   Mis $Q_d = f(Pr, Inc, Pi, \ldots)$, Pr = harga komoditi ybs Inc = pendapatan, Pi = harga kom. substitusi

Kelemahannya pendekatan matematis:

a. Bahasa matematis tidak selalu mudah dimengerti oleh ahli ekonomi sehingga sering menimbulkan kesukaran.

Contoh Y = f(X), dalam ilmu ekonomi bagaimana mengartikan persamaan matematis tersebut, mis dalam: permintaan, produksi, pendapatan nas, dll. sehingga ahli ekonomi sulit memetik keuntungan dari matematika.

b. Seorang ahli ekonomi yang memiliki pengetahuan dasar matematika, ada kecenderungan:

(1) membatasi diri dengan hanya memecahkan persoalan secara matematis

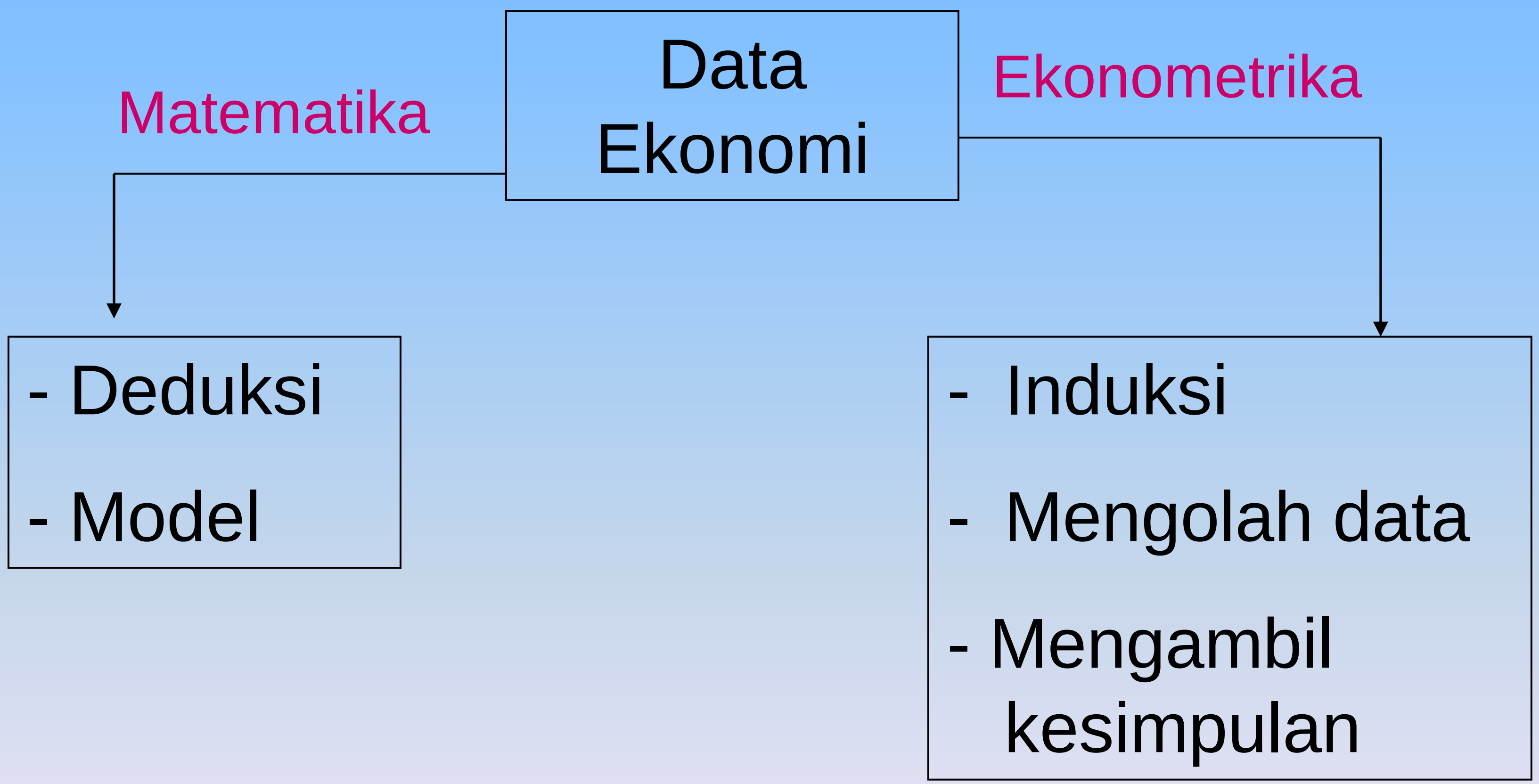
(2) membuat beberapa asumsi yang kurang tepat demi memudahkan pendekatan matematis atau statistis. Artinya, lebih banyak berbicara matematika dan statistika dari pada prinsip/ teori ekonomi.

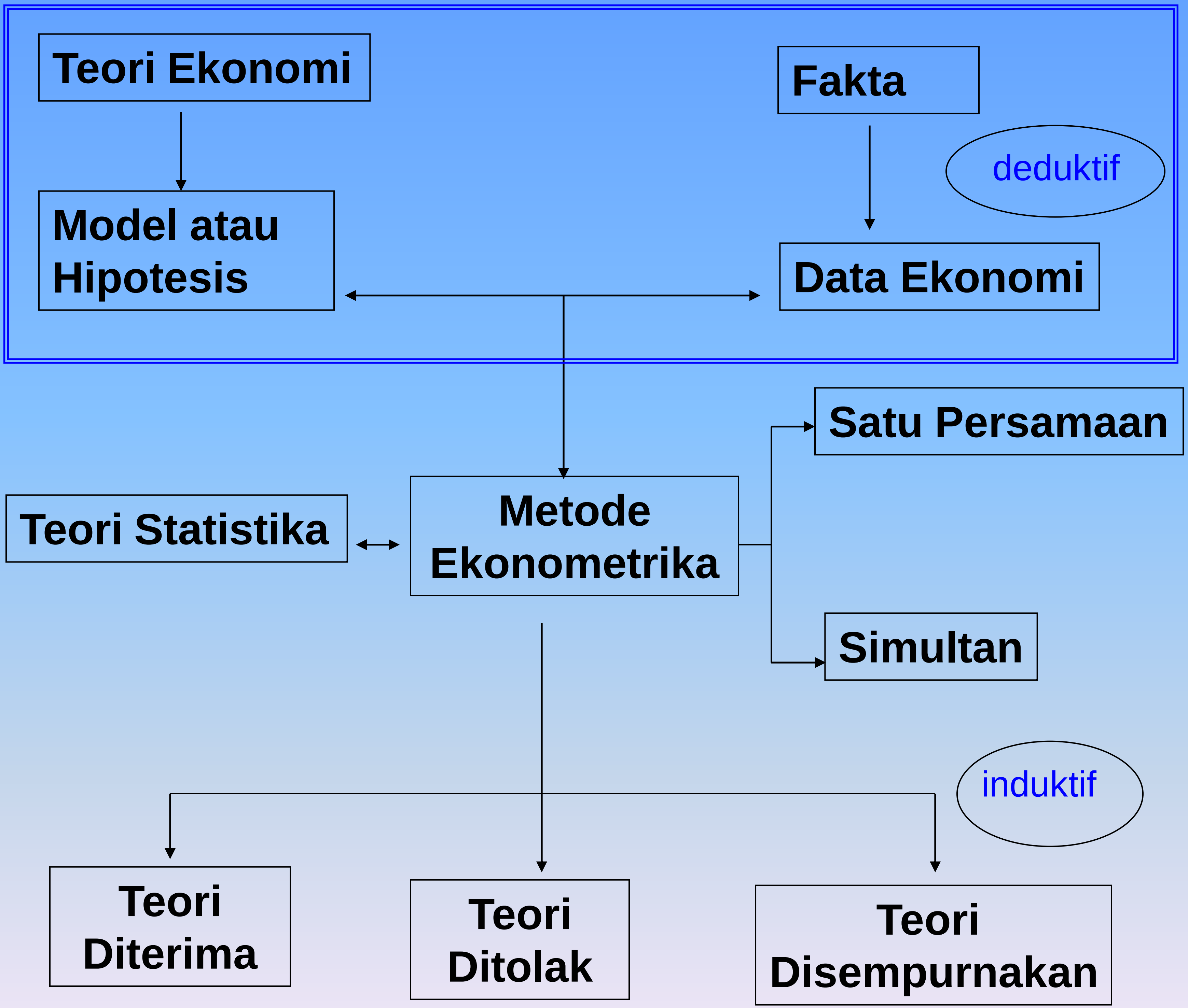
Kesimpulan dari bahasa adalah:

1. Matematika merupakan pendekatan bagi ilmu ekonomi.
2. Pendekatan matematis merupakan “ mode of transportation” yaitu membawa pemikiran kepada kesimpulan dengan singkat (model)

# Matematika Ekonomi dan Ekonometrika

Ekonometrika adalah pengetahuan yang berkaitan dengan penerapan statistika untuk menganalisa data ekonomi.




Teori Ekonomi
Fakta
deduktif
Model atau Hipotesis
Data Ekonomi
Satu Persamaan
Teori Statistika
Metode Ekonometrika
Simultan
induktif
Teori Diterima
Teori Ditolak
Teori Disempurnakan

Bidang Matematika Ekonomi yang dibahas:
Menurut “Social Science Research Council, seorang ahli ekonomi harus mengerti matematika : Himpunan (gugus), hubungan dan fungsi, teori matriks, kalkulus (limit fungsi, diferensial, persamaan diferensi, partial differentiation,  integrasi multipel).

# HIMPUNAN = GUGUS

## 1. Definisi, pencatatan dan himpunan khas

Himpunan adalah kumpulan dari obyek-obyek yg memiliki sifat tertentu. Sifat ini menjadi penciri yg membuat obyek/unsur itu termasuk dalam himpunan yang sedang dibicarakan.

Himpunan dilambangkan : A, B, X, …, Z (kapital)

Obyek atau unsur atau elemen dilambang-kan a,b,c, …   atau 1, 2, 3, …

Perhatikan (… tiga titik)  dibaca dan sete-rusnya.

## Dua cara pencatatan suatu himpunan

a. Cara pendaftaran: P = { 2, 3, 4 }

P = nama himpunan/gugus

tanda kurawal buka dan kurawal tutup “{” dan “}” menyatakan himpunan

2, 3, 4 = obyek/unsur/elemen

Artinya, himpunan P beranggotakan bilangan bulat positip: 2, 3, dan 4.

b. Pendefinisian sifat: X = { x / x bil. genap} X = nama himpunan

x = obyek/unsur/elemen

tanda “/” dibaca dengan syarat

x bil genap = sifat atau ciri

Cara pendefinisian sifat yang lain:

J = { x / 2  < x < 5 }

x merupakan unsur

Sifat: bilangan nyata 2 < x < 5, baca himpunan semua *bilangan nyata* lebih besar dari 2 dan lebih kecil dari 5

## Himpunan khas:

a. Himpunan Semesta (S) atau Universum (U)

Merupakan himpunan keseluruhan obyek yang sedang dibicarakan

S = { x / x bilangan ganjil }, berarti semua bil ganjil

b. Himpunan kosong (emty set)

E = {     }  himpunan kosong atau dicatat dengan "ø"

Perhatikan: P = { 2, 3, 4 }

Untuk menyetakan keanggotaan dicatat dengan “€”

Jadi: 2 € P

3 € P

4 € P.

Tanda € baca “unsur” atau “elemen” atau “didalam”

Sebaliknya, 5, 6 tidak termasuk unsur P

dicatat

5 ~~€~~ P

6 ~~€~~ P

Tanda ~~€~~ dibaca “bukan unsur” atau “bukan elemen” atau “diluar”.

# 2. Himpunan bagian

Suatu himpunan A merupakan himpunan bagian dari himpunan B, jika dan hanya jika setiap unsur A juga merupakan unsur himpunan B.

A = { 2, 4, 6 };

B = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 }

Dicatat : A $\subset$ B,

baca A himp. bagian B atau A anak gugus dari B

Sebaliknya dicatat: B $\supset$ A, baca B mencakup A

Tanda $\not\subset$ dibaca bukan himpunan bagian dan

tanda $\not\supset$ dibaca tidak/bukan mencakup

Perhatikan: himp. bagian terjadi apabila dari suatu himp dibentuk himp lain dengan memilih unsur himp itu sebagai unsurnya.

Contoh: $X = \{ 1, 2, 3, 4 \}$

Himpunan bagiannya:

a. Memilih semua unsur: $X_4 = \{ 1, 2, 3, 4 \}$

b. Memilih tiga unsur $X_{31} = \{ 1, 2, 3 \}$

$X_{32} = \{ 1, 2, 4 \}$

$X_{33} = \{ 1, 3, 4 \}$

$X_{34} = \{ 2, 3, 4 \}$

c. Memilih dua unsur $X_{21} = \{ 1, 2 \}$; $X_{22} = \{ 1, 3 \}$

$X_{23} = \{ 1, 4 \}$; $X_{24} = \{ 2, 3 \}$

$X_{25} = \{ 2, 4 \}$; $X_{26} = \{ 3, 4 \}$

d. Memilih 1 unsur: $X_{11} = \{ 1 \}$; $X_{12} = \{ 2 \}$
$X_{13} = \{ 3 \}$; $X_{14} = \{ 4 \}$

e. Tanpa memilih $X_0 = \{ \quad \}$

Jumlah himpunan bagian dari 1 himp. = $2^n$

| | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 elemen: | | | | | | 1 | | | | | → | 2 himp bag |
| 2 elemen: | | | | | 1 | | 2 | | 1 | | → | 4 himp bag |
| 3 elemen: | | 1 | | | | 3 | | 3 | | 1 | → | 8 himp bag |
| 4 elemen: | | 1 | | 4 | | 6 | | 4 | | 1 | → | 16 himp bag |
| 5 elemen: | 1 | | 5 | | 10 | | 10 | | 5 | 1 | → | 32 himp bag |

Disebut segitiga Pascal = bilangan Binom Newton

# 3. Pengolahan (operasi) Himpunan

Operasi matematis: penjumlahan, penggandaan, pembagian. Operasi himpunan: gabungan (union), potongan (irisan) dan komplemen.

**Operasi Gabungan ( U )**

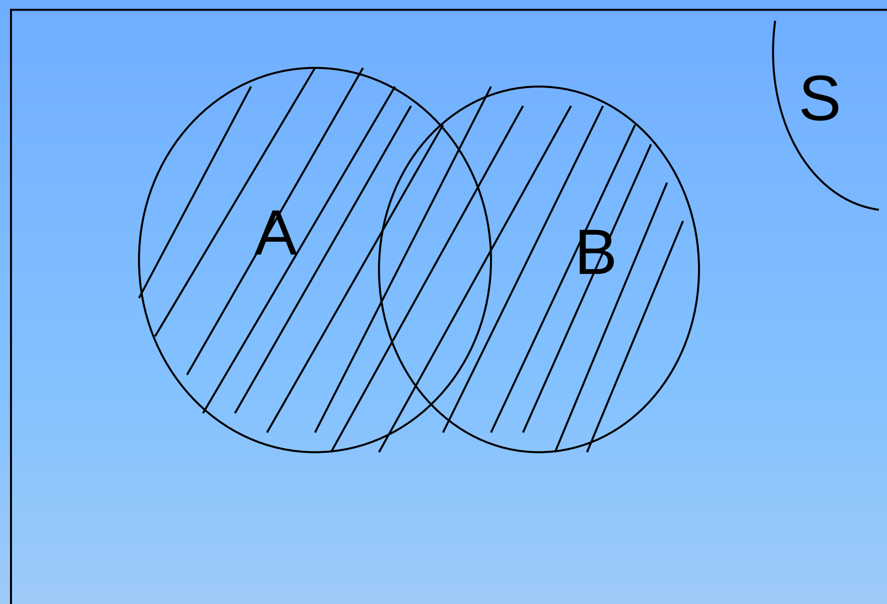
A U B = { x / x ε A **atau** x ε B }

A U B baca: A union B; A gabung B; A atau B.

Jika A = { 3, 5, 7 ); B = { 2, 3, 4, 8 }

A U B = { 3, 5, 7, 2, 4, 8 } **atau** { 2, 3, 4, 5, 7, 8 }

Dalam diagram Venn, A U B adalah daerah diarsir




Sifat-sifat gabungan

a. A U B = B U A → Hukum komutasi

b. A ⊂ (A U B) dan B ⊂ (A U B)

**Operasi potongan (irisan) = ∩**

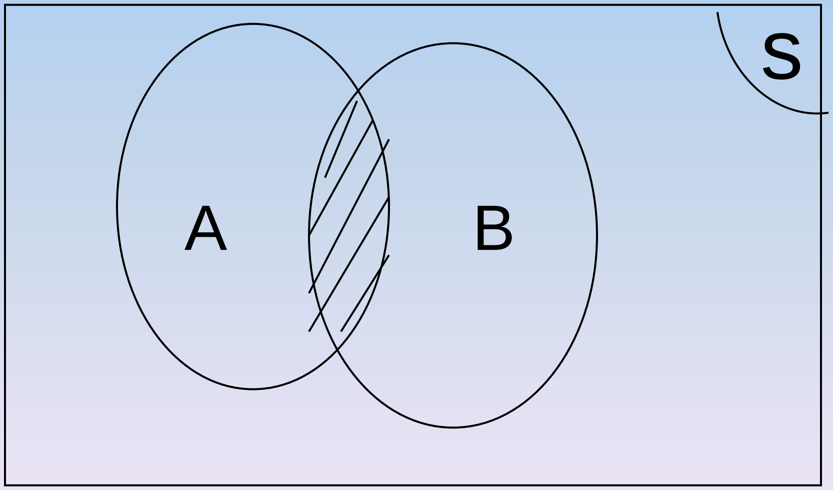
$A \cap B = \{ x / x \varepsilon A$ **dan** $x \varepsilon B \}$

$A \cap B$, baca A **irisan** B;  atau A **dan** B

Misal: $A = \{ 0, 5, 10, 15 \}$ dan $B = \{ 1, 5, 8, 15, 17 \}$

$$A \cap B = \{ 5, 15 \}$$

Dalam diagram Venn, $A \cap B$ adalah daerah diarsir:



Sifat : a. $A \cap B = B \cap A$ (hukum komutasi)

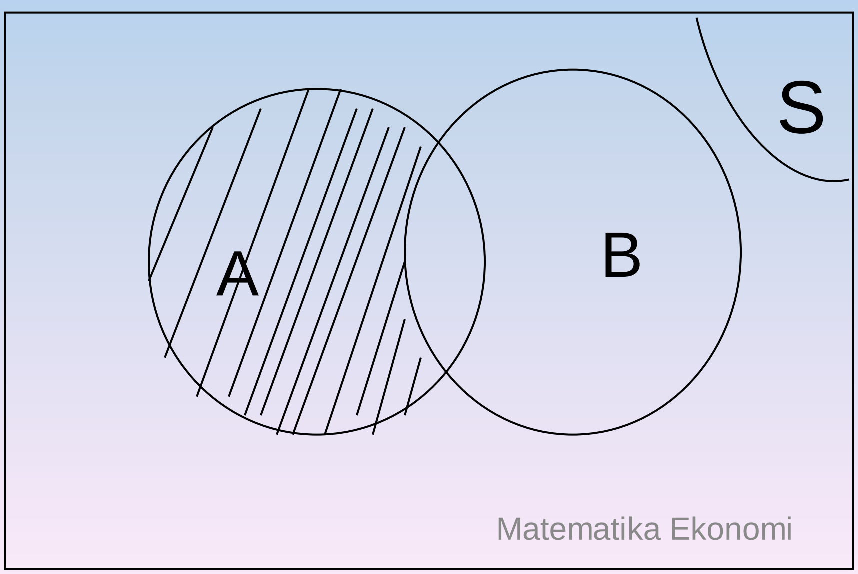
b. $(A \cap B) \subset A$ dan $(A \cap B) \subset B$

## Operasi selisih

Selisih himpunan A dan B, dicatat dengan A – B

A – B = { x / x € A, tetapi x ~~€~~ B }

Diagram Venn A – B sebagai berikut:



Misal: $A = \{ a, b, c, d \}$; $B = \{ f, b\ d, g \}$

$A – B = \{ a, c \}$ serta $B – A = \{ f, g \}$

A – B sering dibaca "A bukan B".

Sifat: a $(A – B) \subseteq A$; $(B – A) \subseteq B$

b $(A – B)$; dan $(B – A)$ adalah saling asing atau terputus

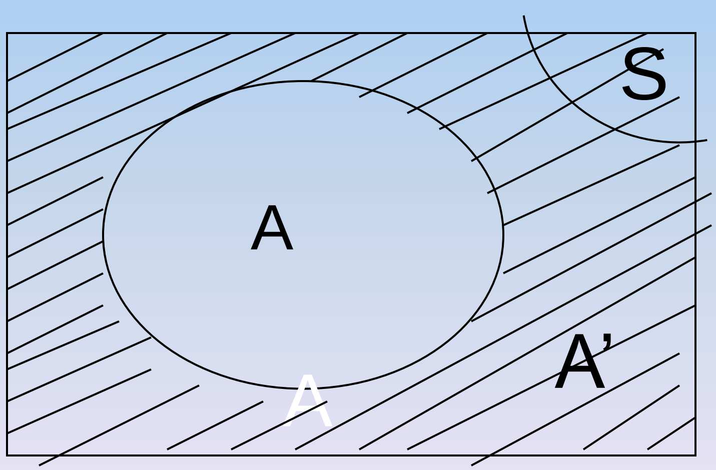
**Komplemen**

A’ = { x / x € S, tetapi x ∉ A }  A’
baca “komplemen A” atau “bukan A”

Misal: S = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, … } himp.bil bulat positip

A = { 1, 3, 5, 7, 9, . . . } bil. bulat positip ganjil
A’ = { 2, 4, 6, 8, 10. . . } bil. bulat positip genap

Diagram Venn untuk komplemen sbb: (diarsir)



Sifat: a. $A \cup A' = S$

b. $A \cap A' = \emptyset$

c. $(A')' = A$

**Latihan 1**

Gambarkan sebuah diagram venn untuk menunjukkan himpunan universal S dan himpunan-himpunan bagian A serta B jika:

$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

$A = \{2, 3, 5, 7\}$

$B = \{1, 3, 4, 7, 8\}$

Kemudian selesaikan :

a). $A - B$ b). $B - A$ c) $A \cap B$

d). $A \cup B$ e) $A \cap B'$ f) $B \cap \mathbf{A'}$

g). $(A \cup B)'$ h) $(A \cap B)'$

## Latihan 2

Isilah cell dibawah ini dengan tanda keanggotaan himpunan: € atau €

| A | B | A∩B | AUB | (A∩B)’ | (AUB)’ |
|---|---|---|---|---|---|
| € | € | | | | |
| € | ~~€~~ | | | | |
| ~~€~~ | € | | | | |
| ~~€~~ | ~~€~~ | | | | |

# Hubungan

## Himpunan Hasil kali Cartesius

Apabila ada dua himpunan X dan Y masing-masing $x \varepsilon X$ dan $y \varepsilon Y$, maka dari dua himpunan terserbut dapat disusun himpunan yang beranggotakan pasangan urut atau pasangan tersusun (x, y).

Contoh sederhana, misalkan nilai ujian mate-matika diberi dari angka 1 hingga 4, sedang-kan pekerjaan rumah diberi angka 1 hingga 3.

Jadi : $X = \{1, 2, 3, 4\}$ sedangkan

$Y = \{1, 2, 3\}$

Himpunan hasil kali Cartesius adalah:

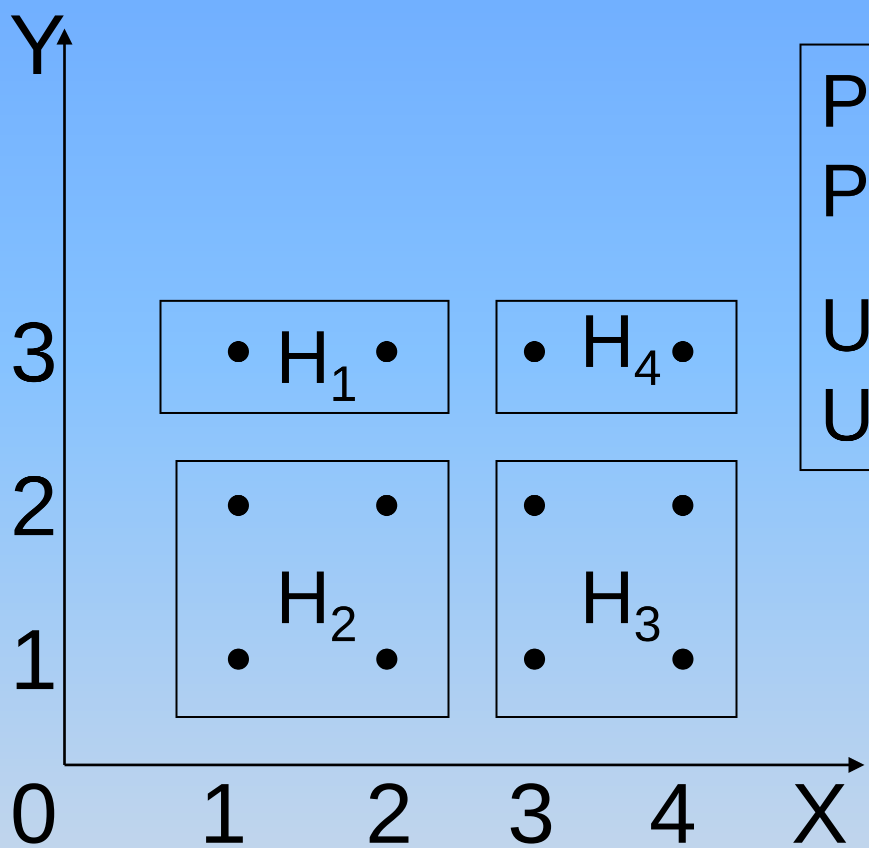
$X \times Y = \{(x, y) / x \varepsilon X, y \varepsilon Y\}$

# Cara mendapatkan himpunan X x Y tsb:

| X | Y | | |
|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 |
| 1 | (1, 1) | (1, 2) | (1, 3) |
| 2 | (2, 1) | (2, 2) | (2, 3) |
| 3 | (3, 1) | (3, 2) | (3, 3) |
| 4 | (4, 1) | (4, 2) | (4, 3) |

X x Y = {(1,1), (1,2), (1,3), (2,1), (2,2), (2,3), (3,1),
(3,2), (3,3), (4,1), (4,2), (4,3)}

Himpunan hasil kali Cartesius dapat digambarkan dalam sistem koordinat cartesius berikut:




Gbr: Hubungan nilai ujian dan nilai pekerjaan rumah

PR = {1, 2} malas
PR = {3, 4} rajin

U = {1, 2} kurang mengerti
U = {3} pintar

Terdapat 4 himp bag

$H_1$ = {malas ttp pintar}
$H_2$ = {malas dan krg mengerti}
$H_3$ = {rajin ttp krg ngerti}
$H_4$ = {rajin dan pintar}

**Daerah dan Wilayah (Range) hubungan**

- Perhatikan kembali Himpunan hasil kali Cartesius: H = {(1,1), (1,2), (1,3), (2,1), (2,2), (2,3), (3,1), (3,2), (3,3), (4,1), (4,2), (4,3)} Himpunan unsur-unsur pertama pasangan urut, disebut dengan Daerah hubungan
- $D_h = \{1, 2, 3, 4\}$

  Himpunan unsur-unsur kedua pasangan urut, disebut dengan Wilayah hubungan:
- $W_h = \{1, 2, 3\}$

Kesimpulan:

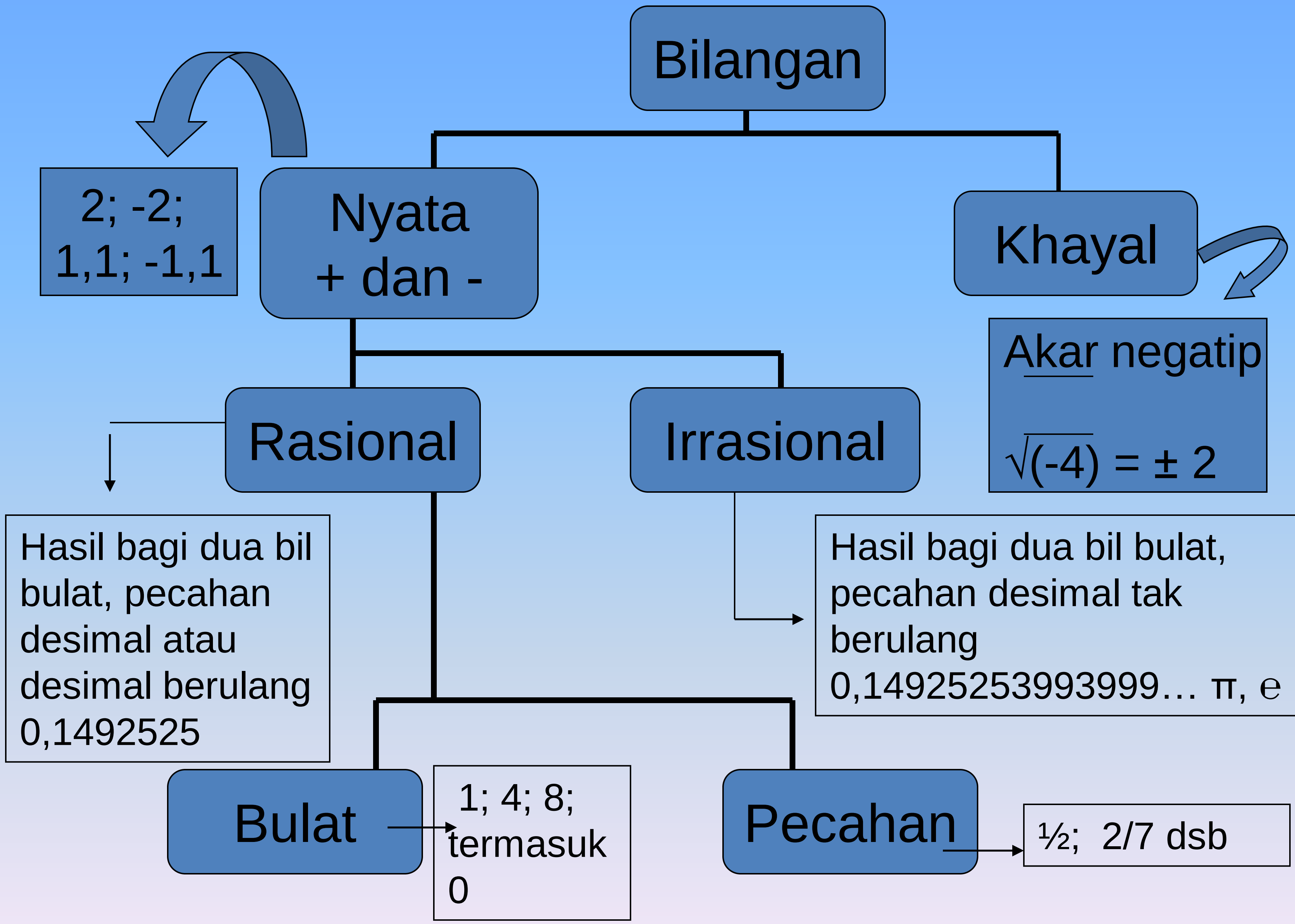
- Himpunan hasil kali Cartesius adalah himpunan pasangan urut atau tersusun dari (x, y) dimana setiap unsur x € X dipasangkan dengan setiap unsur y € Y.
- X x Y = { (x, y) / x € X, y € Y }
- Daerah hubungan

  $D_h$ = { x / x € X}
- Daerah hubungan:

  $W_h$ = { y / y € Y}

# SISTEM BILANGAN

## 1. Pembagian bilangan



## 2. Tanda pertidaksamaan

- Tanda < melambangkan “lebih kecil dari”
- Tanda > melambangkan “lebih besar dari”
- Tanda ≤ “lebih kecil dari atau sama dengan”
- Tanda ≥ “lebih besar dari atau sama dengan”

## 3. Sifat

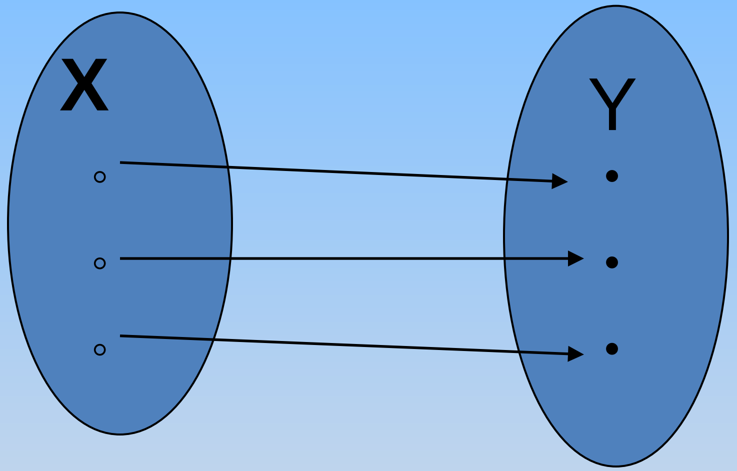
- Jika $a \leq b$, maka $–a \geq -b$
- Jika $a \leq b$ dan $x \geq 0$, maka $x.a \leq x.b$
- Jika $a \leq b$ dan $x \leq 0$, maka $x.a \geq x.b$
- Jika $a \leq b$ dan $c \leq d$, maka $a + c \leq b+ d$

# FUNGSI

## Pengertian

Himpunan hasil kali Cartesius ini dikenal dgn hubungan. Tetapi ada hubungan dimana satu unsur X dihubungkan dengan satu unsur Y. (tidak setiap unsur X dihubungkan dengan setiap unsut Y)

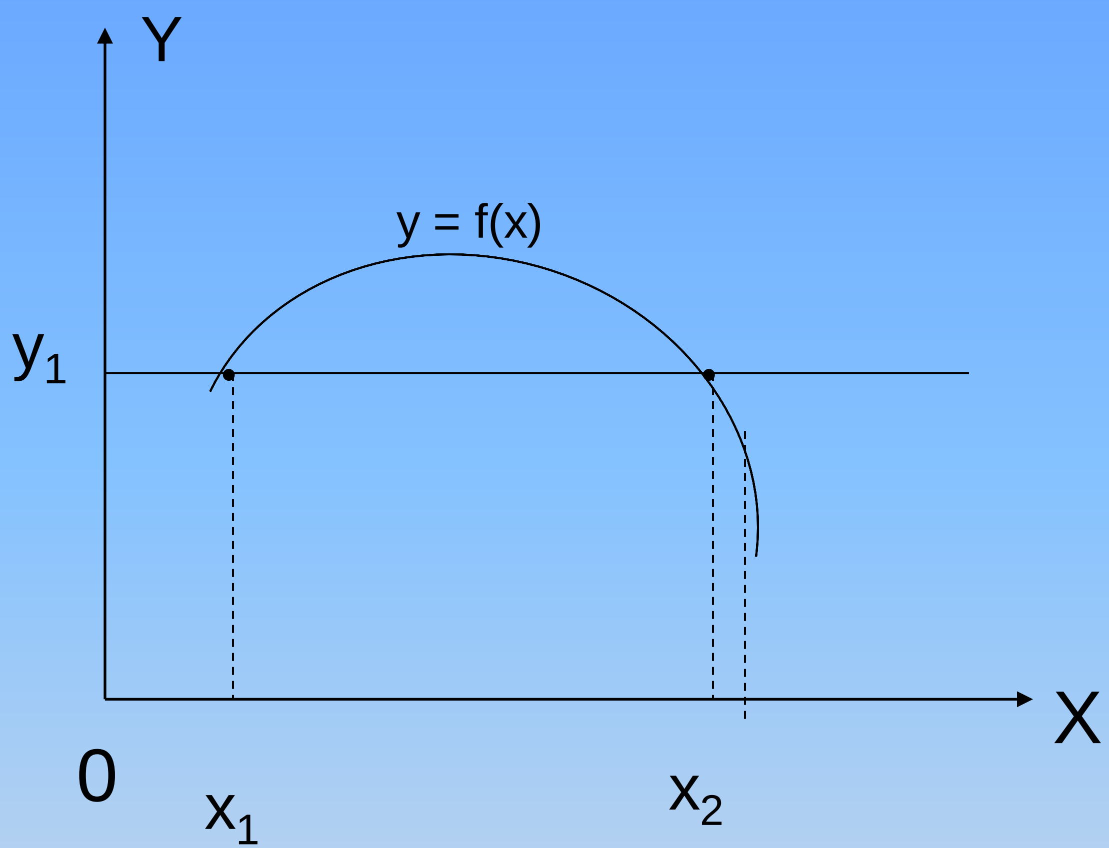
Dengan denah Venn sbb:

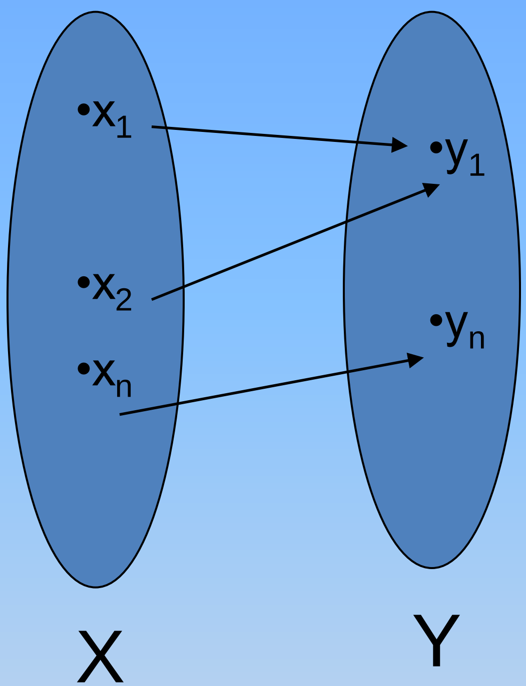



Hubungan 1 - 1

Hubungan dengan kasus diatas, bahwa untuk setiap nilai x dihubungkan (hanya terdapat satu) nilai y yang sesuai, disebut dengan *bentuk hubungan atau fungsi.* Jelasnya *fungsi LINEAR*

Perhatikan juga contoh berikut:




Gambar di atas, nilai $x_1$ dan $x_2$ dalam X, dihubung-kan dengan nilai $y_1$ dalam Y, dengan bentuk y = f(x)

Fungsi disebut juga TRANSFORMASI, jadi x di transformasikan di dalam himpunan y.

Transformasi mengandung pengertian yang luas:

a. x menentukan besarnya nilai y
b. x mempengaruhi nilai y
c. Dll.

Pernyataan $y = f(x)$
dibaca: y merupakan fungsi dari x
atau
dicatat : $f : x \rightarrow y$

aturan

ditransformasi

simbol “f” diartikan sebagai “aturan” transformasi unsur himp. X kedalam himpunan Y

*Lebih spesifik*: Fungsi: suatu bentuk hubungan matematis yang menyatakan hubungan ketergan-tungan (hub fungsional antara satu variabel dengan variabel lain

Perhatikan: $y = f(x)$

x merupakan sebab (variabel bebas)

y akibat dari fungsi (variabel terikat)

Himpunan semua nilai-nilai x, disebut sebagai Domain atau Daerah fungsi ($D_f$) dan nilai y disebut dengan Range atau Wilayah fungsi ($R_f = W_f$).

$D_f = \{ x / x \varepsilon X \}$

$W_f = \{ y / y \varepsilon Y \}$

Misal: Biaya total C dari suatu perusahaan setiap hari merupakan fungsi dari output Q tiap hari: $C = 150 + 7Q$. Perusahaan memiliki kapasitas limit sebesar 100 unit per hari.Berapa Daerah dan Range dari fungsi biaya?

Jawaban:

$D_f = \{ Q / 0 \leq Q \leq 100 \}$

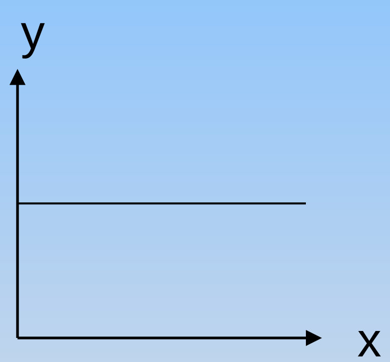
$R_f = \{ C / 150 \leq C \leq 850 \}$ → Dapat Anda jelaskan ?

# Macam-macam fungsi

a. Fungsi Polinomial

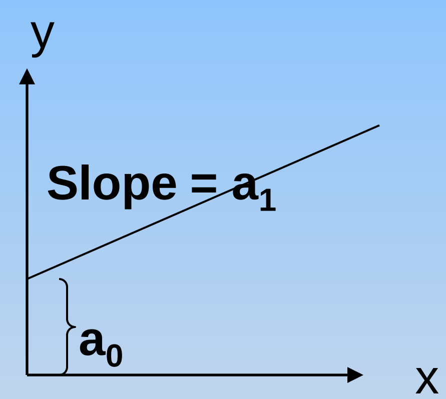
Bentuk umumnya :

$$y = a + bx + cx^2 + \ldots + px^n$$



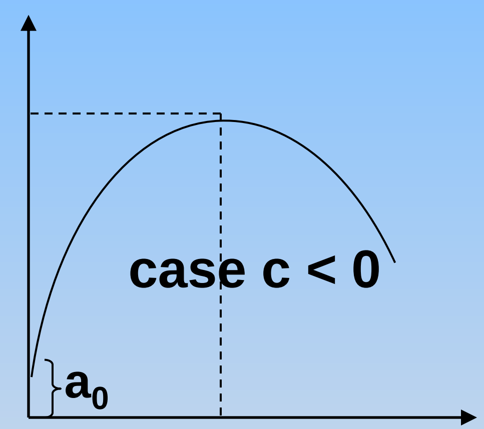

**Konstan, jika n = 0**

**y = a**



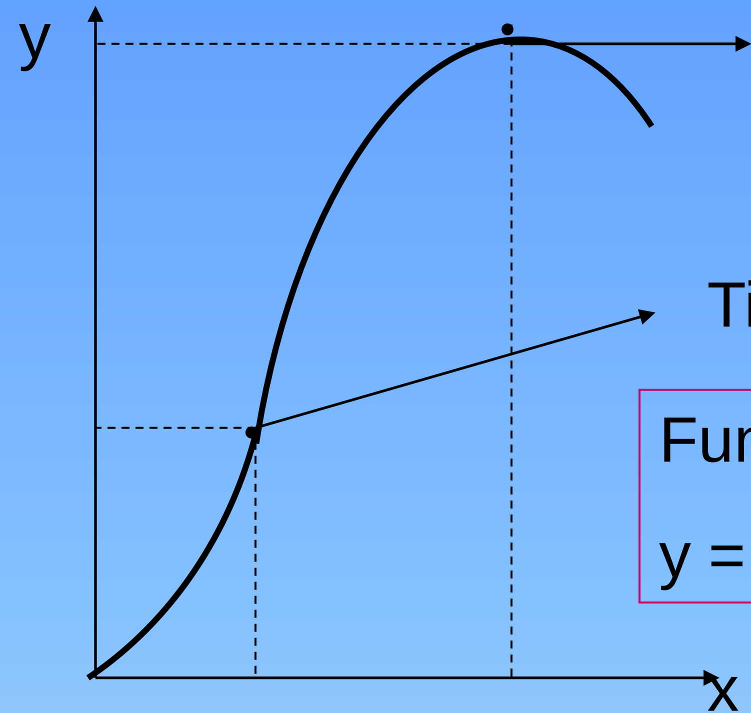

**Linear, jika n = 1**

**y = a + bx**



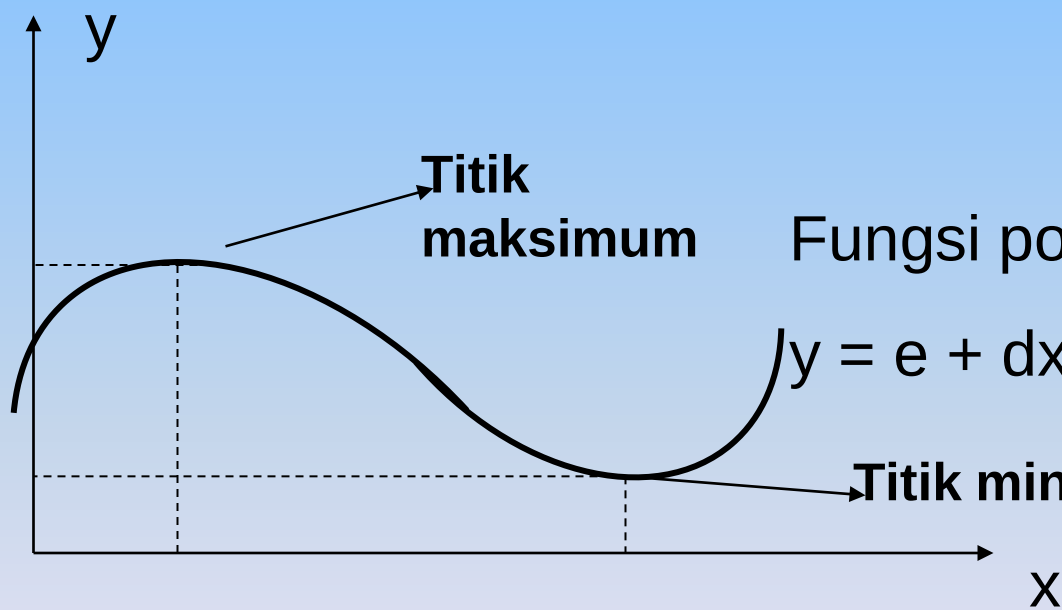

**Kuadratik, jika n = 2**

**$Y = c + bx + ax^2$**




Fungsi kubik

$y = d + cx + bx^2 + ax^3$

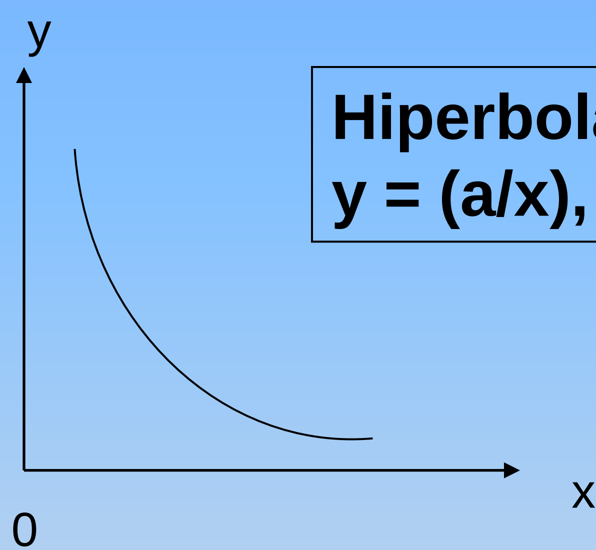



Fungsi polinom derajad 4

$y = e + dx + cx^2 + bx^3 + ax^4$

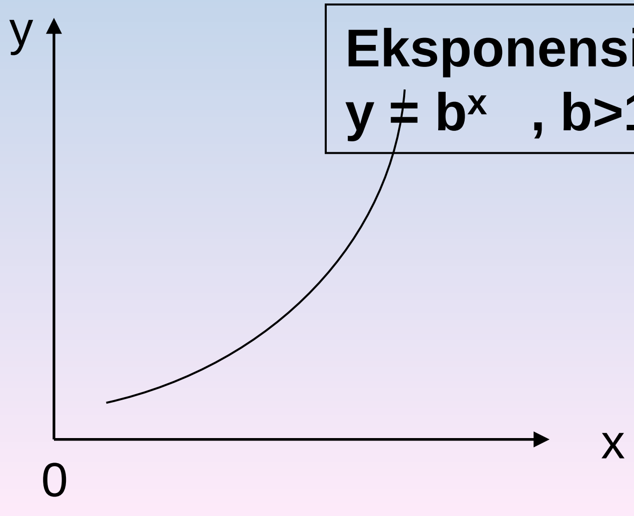
## b. Fungsi Rasional

Fungsi ini, dengan y dinyatakan sebagai rasio dua polinomial dengan variabel x atau juga berupa fungsi hiperbola.

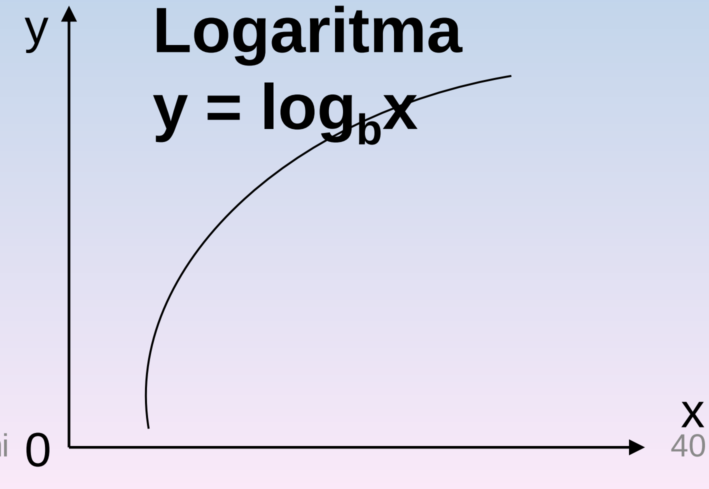



**Hiperbola:**
**$y = (a/x)$, $a > 0$**

## c. Fungsi eksponensial dan logaritma




**Eksponensial**
**$y = b^x$ , $b>1$**




**Logaritma**
**$y = \log_b x$**

## Fungsi linear

- Fungsi linear merupakan bentuk yang paling dasar dan sering digunakan dalam analisa ekonomi
- Fungsi linear merupakan hubungan sebab-akibat dalam analisa ekonomi – misalnya:

  - antara permintaan dan harga

  - invests dan tingkat bunga

  - konsumsi dan pendapatan nasional, dll
- Fungsi linear adalah fungsi polinom, tetapi n = 1 atau fungsi polinom derajad-1.

- **Bentuk umum**
- Diturunkan dari fungsi polinom:

$$\mathbf{y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n}$$

- Disebut fungsi linear jika n = 1 yaitu

**$y = a + bx$ → bentuk umum**

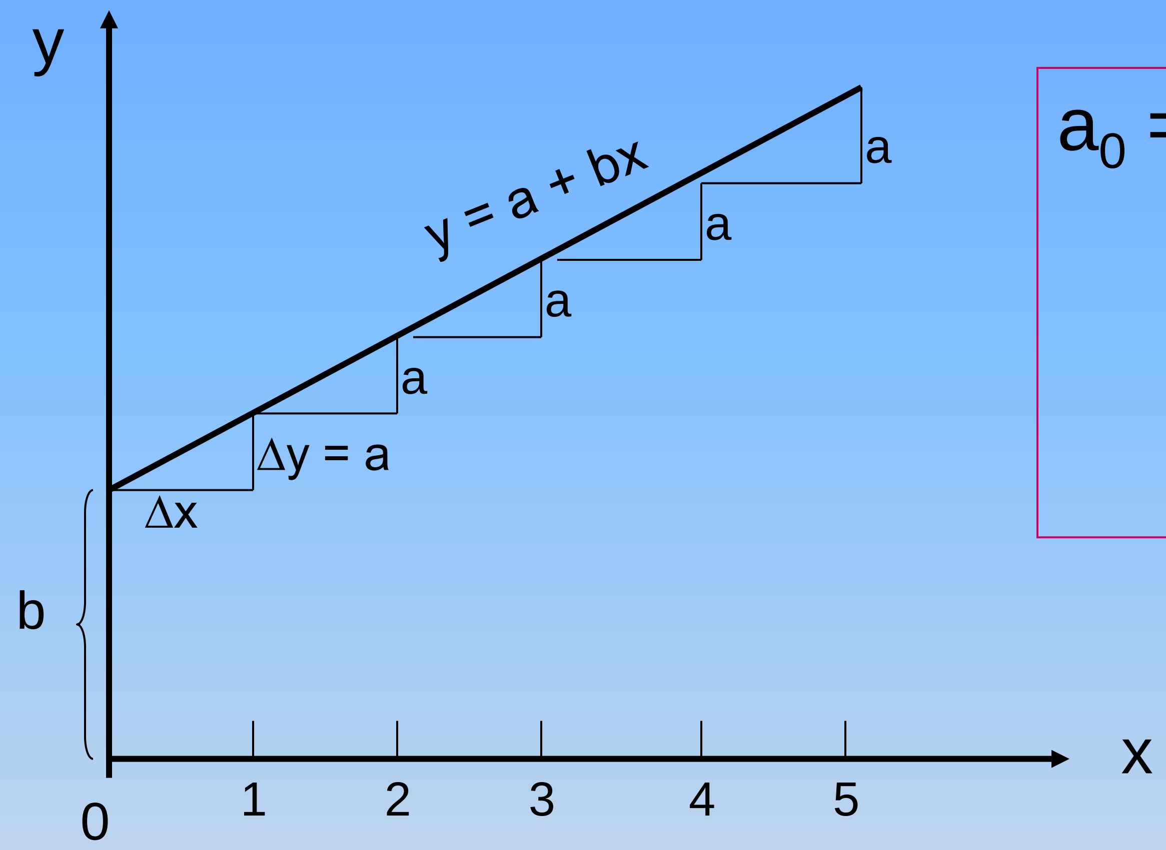
Contoh:

$y = 4 + 2x$ → $a = 4$

$b = 2$

Pengertian: $a = 4$ = penggal garis pada sumbu vertikal y

$b = 2$, adalah koefisien arah atau lereng atau slope garis.




$a_0 =$ penggal garis
y = ax + b,
pada sumbu y
yaitu nilai y
saat x = 0

a = lereng garis atau $\Delta y/\Delta x$

pada x = 0, $\Delta y/\Delta x = a$; pada x = 1, $\Delta y/\Delta x = a$

- Perhatikan bahwa lereng fungsi linear selalu konstan.
- **Latihan-1** $\boxed{y = 4 + 2x}$

Penggan garis pada sumbu y = …………..

Lereng garis :

| x | y | Δx | Δy | Δy/Δx = a |
|---|---|---|---|---|
| 0 | | - | - | - |
| 1 | | | | |
| 2 | | | | |
| 3 | | | | |
| 4 | | | | |

Mendapatkan penggal garis pada sumbu y ketika x = 0

Lengkapi tabel berikut dari garis: $y = 4 + 2x$

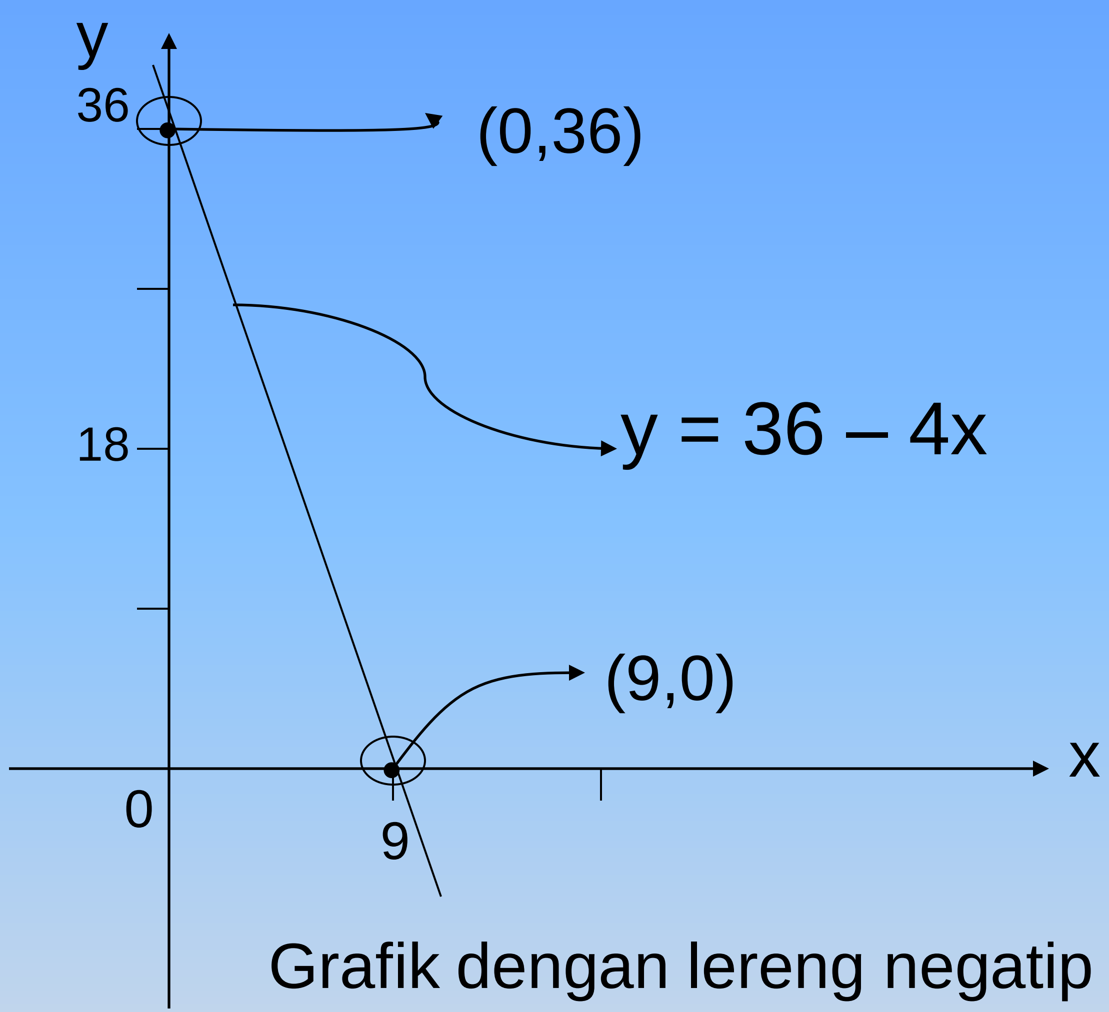
| $x$ | $y$ | $\Delta x$ | $\Delta y$ | $\Delta y/\Delta x = a$ |
|---|---|---|---|---|
| -3 | | | | |
| -2 | | | | |
| -1 | | | | |
| 0 | | | | |
| 1 | | | | |
| 2 | | | | |
| 3 | | | | |
| 4 | | | | |

Mendapatkan penggal garis pada sumbu x ketika $y = 0$

Kurva (grafik) fungsi

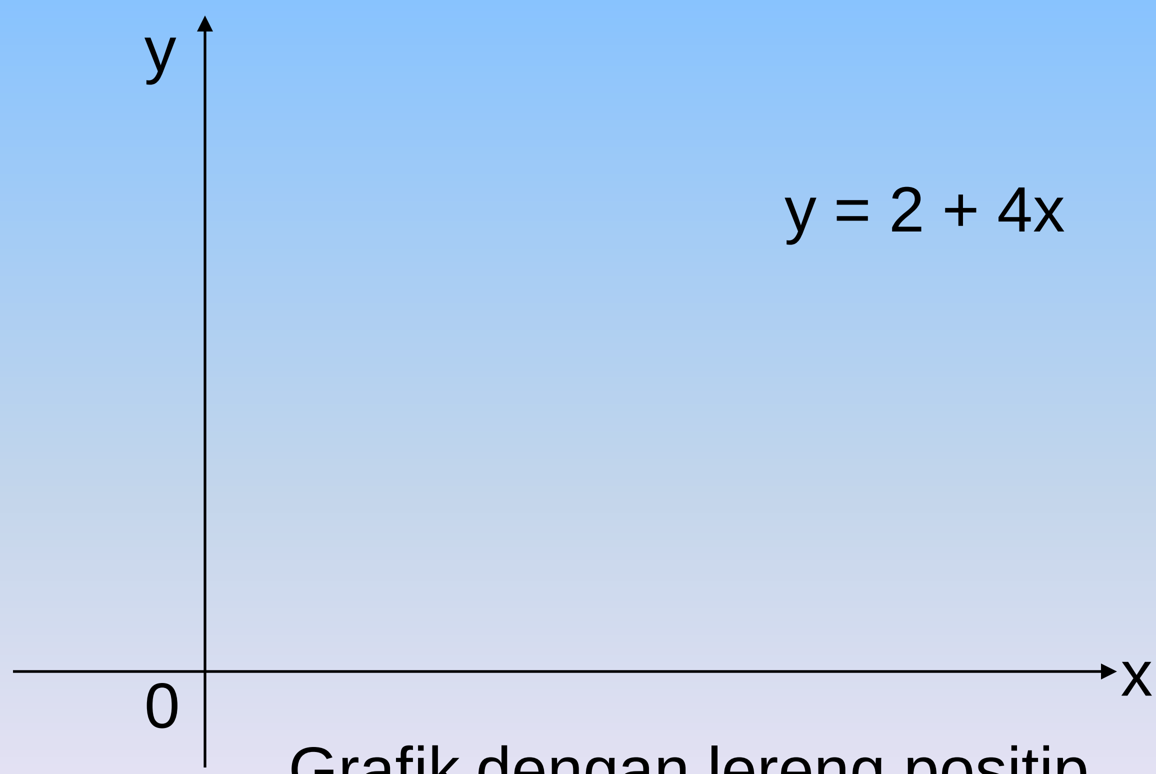
- Fungsi Linear, kurvanya garis lurus karena lerengnya sama.
- Misalkan $y = 36 - 4x$ maka
  $a = -4 \rightarrow (\Delta y/\Delta x)$
  $b = 36$
- Menggambarkan kurvanya cukup mencari titik potong (penggal) dengan:
  sumbu x dan penggal dengan sumbu y
- Hubungkan kedua titik penggal tersebut
- Titik penggal pada sb x, → y = .., x = … atau titik (…, …)
  Titik penggal pada sb y, → x = .., y = … atau titik (…, …)

# Grafik:




Grafik dengan lereng negatip

- Gambarkan grafik fungsi:
- $y = 2 + 4x$
- Titik penggal dg sb x → $y = 0$, $x = -1/2$, $(-1/2, 0)$
  Titik penggal dg sb y → $x = 0$, $y = 2$, $(0,2)$
- Gambarkan :




Grafik dengan lereng positip

**Fungsi non linear (kuadratik)**

- Fungsi non linear juga merupakan bentuk yang sering digunakan dalam analisa ekonomi
- Sebagaimana fungsi linear, fungsi non linear juga merupakan hubungan sebab-akibat
- Fungsi linear adalah fungsi polinom, tetapi n = 2 atau fungsi polinom derajad-2.

- **Bentuk umum**
- Diturunkan dari fungsi polinom:

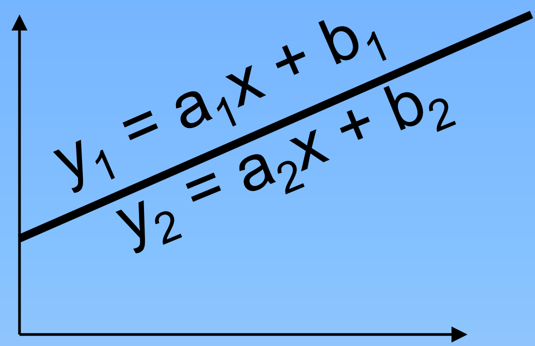
  $\mathbf{y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + . . . + a_nx^n}$
- Disebut fungsi kuadratik jika n = 2 dan $a_2 \pm 0$, yaitu $y = a_0 + a_1x + a_2x^2$

  atau sering ditulis: $\mathbf{y = ax^2 + bx + c}$

- **Hubungan dua garis**

  Dua buah garis dengan fungsi linier dapat:

  a. berimpit

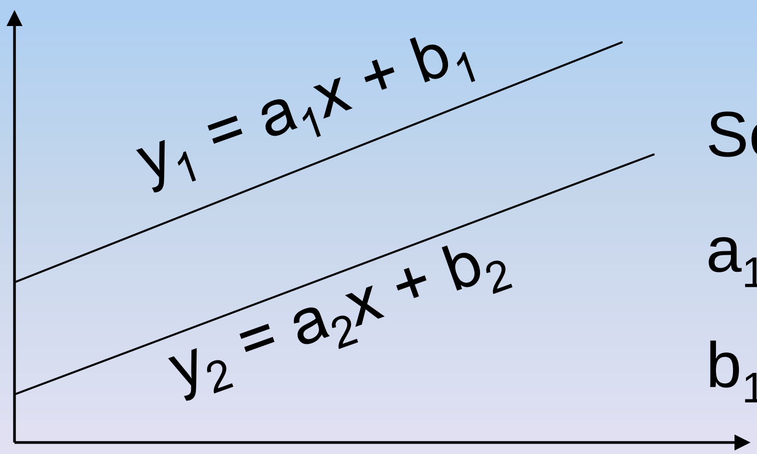



Berimpit: Jika dan hanya jika

$a_1 = a_2$

$b_1 = b_2$

b. Sejajar

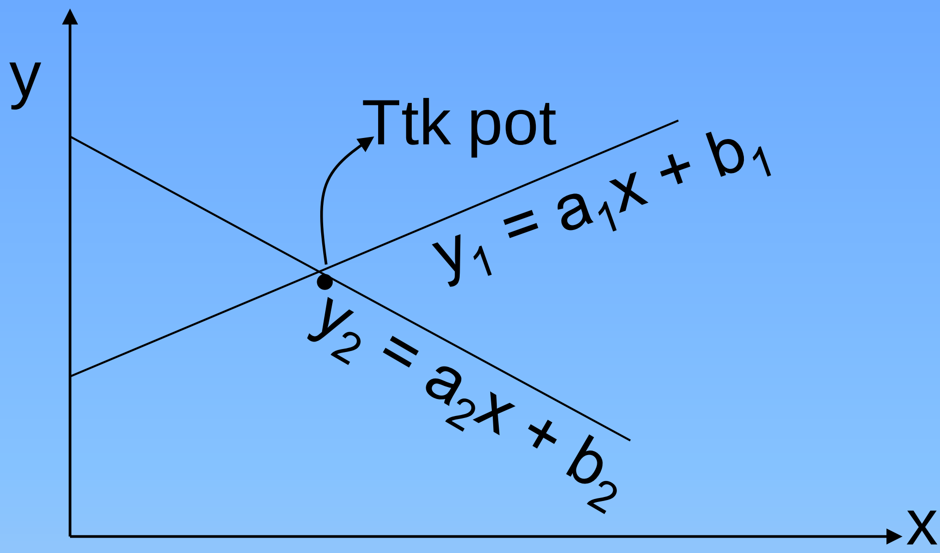



Sejajar: Jika dan hanya jika

$a_1 = a_2$

$b_1 \pm b_2$

# Berpotongan

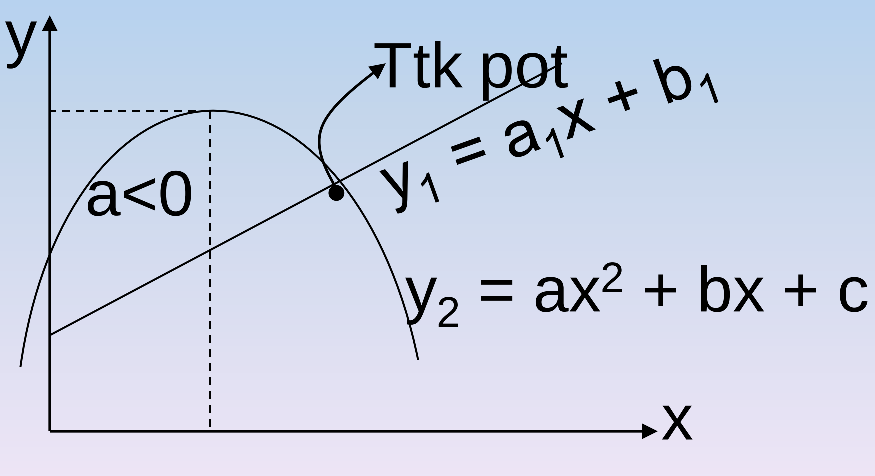


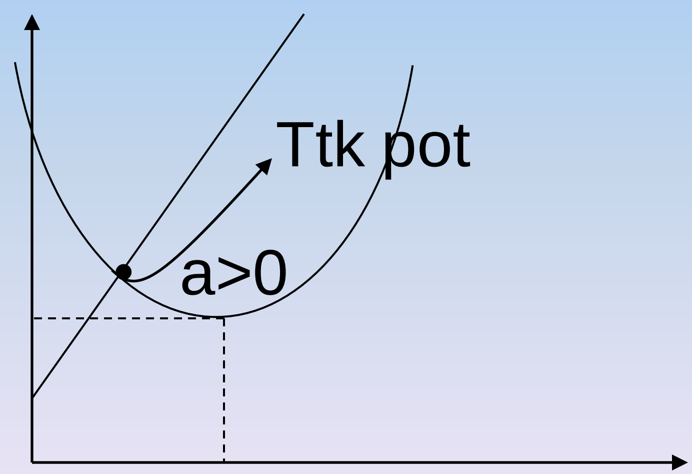

Berpotongan: jika dan hanya jika

$a_1 \pm a_2$

$b_1 \pm b_2$

Dua garis *fungsi linear* dan *fungsi non linear* hanya dapat berpotongan.



- **Mencari titik potong dua garis/persamaan**
- Pada saat dua fungsi berpotongan, maka nilai x dan y sama pada perpotongan tersebut
- Caranya:
  (1) Bentuk fungsi harus $y = f(x)$
  (2) samakan kedua fungsi untuk mendapat titik potong
- Cari titik potong fungsi $x = 15 – 2y$ dan $3y = x + 3$

$x = 15 – 2y \rightarrow y = -(1/2)x + 15/2$

$3y = x + 3 \rightarrow y = (1/3)x + 1$

$-(1/2)x + 15/2 = (1/3)x + 1$

$-(1/2)x – (1/3)x = 1 – 15/2$

$x = 78/10$

- Untuk mendapatkan y, substitusi $x = 78/10$ pada salah satu fungsi:

  $y = (1/3)x + 1$,

  untuk $x = 78/10$; $y = (1/3)(78/10) + 1$

  $y = 26/10$

Titik potong fungsi $(x, y) = (78/10, 26/10)$

- Mencari titik potong dua garis/persamaan

  (1) $2x + 3y = 21$ dan (2) $x + 4y = 23$

  Pada saat dua fungsi berpotongan, maka nilai x dan y sama pada saat perpotongan tersebut.

- Ubah persamaan di atas menjadi bentuk $y = f(x)$

  (1) $2x + 3y = 21 \rightarrow 3y = 21 - 2x$

  atau $y = 7 - (2/3)x$

  (2) $x + 4y = 23 \rightarrow 4y = 23 - x$

  atau $y = (23/4) - (1/4)x$

  Titik potong kedua garis:

  $7 - (2/3)x = (23/4) - (1/4)x$

  $7 - (23/4) = (2/3)x - (1/4)x$

  $5 = (5/12)x$

  $x = 12. \rightarrow y = 11/4 \rightarrow (12, 11/4)$

## Penggunaan Fungsi dalam ekonomi

**Analisa keseimbangan pasar**

Keseimbangan pasar – Model linear

Asumsi-1: Keseimbangan pasar terjadi jika "ekses demand" = 0 atau ($Q_d$ – $Q_s$ = 0)

Asumsi-2: $Q_d$ = jumlah permintaan adalah fungsi linear P (harga). Jika harga naik, maka $Q_d$ turun.

Asumsi-3: $Q_s$ = jumlah penawaran adalah fungsi linear P. Jika harga naik, maka $Q_s$ juga naik, dengan syarat tidak ada jlh yang ditawarkan sebelum harga lebih tinggi dari nol.

Persoalan, bagaimana menentukan nilai keseimbangan ?

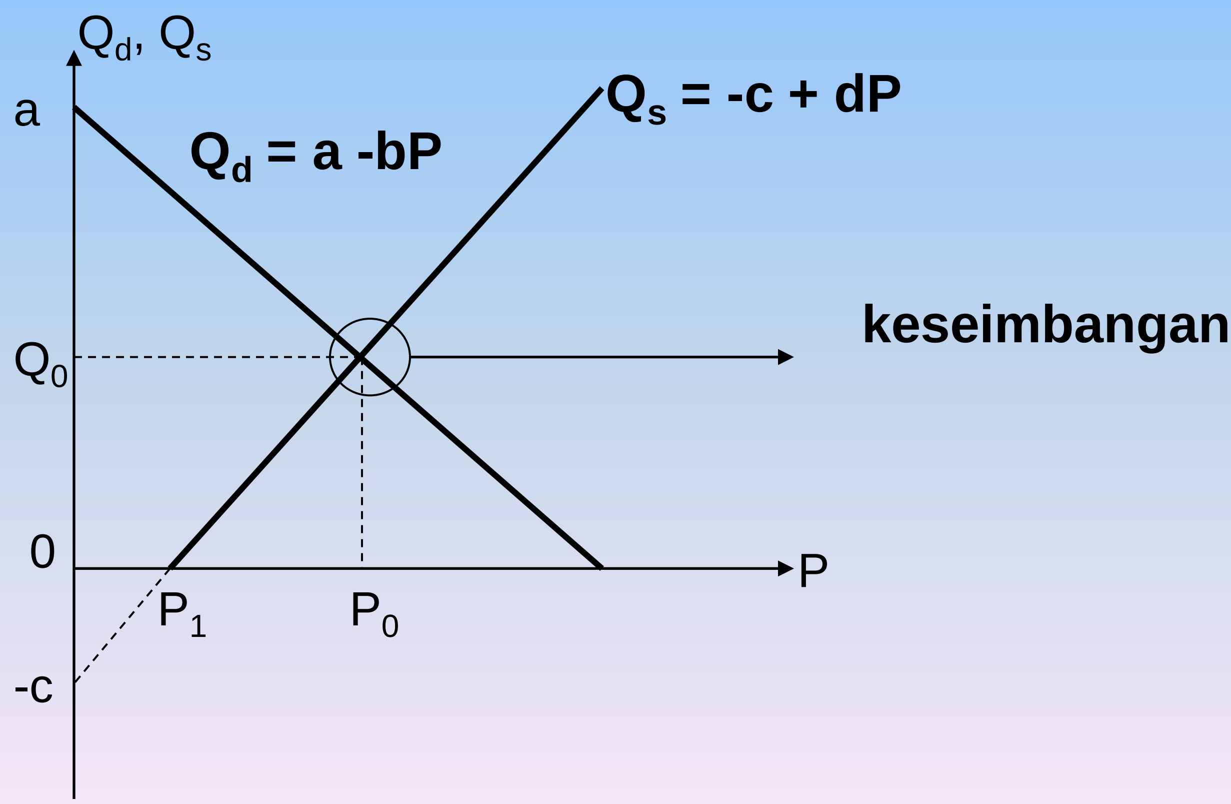
Dalam pernyataan matematis, keseimbangan terjadi pada saat:

$$Q_d = Q_s$$

$Q_d = a - bP$, slope (-) (1)

$Q_s = -c + dP$, slope (+) (2)

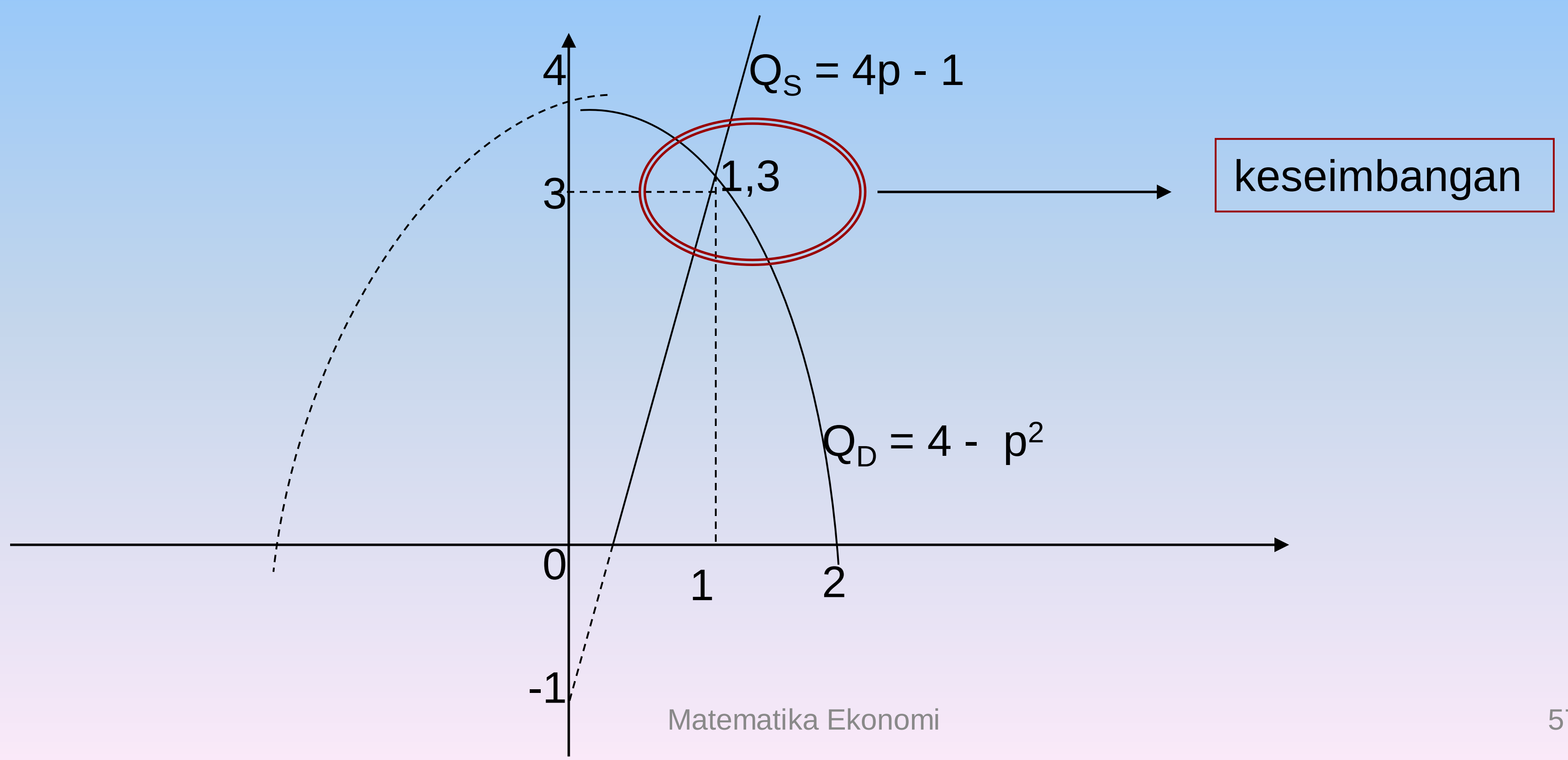
Gambarnya sbb:



Kasus lain, keseimbangan dapat dilihat sbb:

$Q_s = 4 – p^2$ dan $Q_d = 4P – 1$

Jika tidak ada pembatasan misalnya, berlaku dalam ekonomi, maka titik potong pada (1, 3), dan (-5, -21) tetapi karena batasan hanya pada kuadran I (daerah positip) maka keseimbangan pada (1, 3)}



## Keseimbangan pasar (lanjutan)

Pada nilai Q dan p berapa terjadi keseimbang-an permintaan dan penawaran dari suatu komoditi tertentu jika:

$Q_d = 16 – P^2$ , (Permintaan)

$Q_S = 2p^2 – 4p$ (penawaran)

Gambarkan grafiknya

Apa yang terjadi jika p = 3.5 dan p = 2.5

Penjelasan

Pada saat keseimbangan maka $Q_d = Q_s$

$$16 - p^2 = 2p^2 - 4p$$

$$3p^2 - 4p - 16 = 0$$

Ingat fungsi polinom derajad 2 atau n = 2
dengan bentuk umum: $ax^2 + bx + c$

Koefisien a = 3, b = -4, dan c = -16

$$p = \frac{(-b) \pm (b^2 - 4ac)^{1/2}}{2a} = \frac{4 \pm (16 + 192)^{1/2}}{6} = 3.1 \ (+)$$

$$Q_d = 16 - p^2 = 16 - (3.1)^2 = 6.4$$

Jadi keseimbangan tercapai pada Jlh komoditas 6.4 dan harga 3.1. Atau (Q, p) = (6.4 , 3.1)

Grafik:

Fungsi Permintaan: $Q_d = 16 – p^2$

a. Titik potong dengan sb Q → p = 0; Q = 16, (16,0)
b. Titik potong dengan sb p → Q = 0; $16 – p^2 = 0$

(p – 4)(p + 4).→ p – 4 = 0, p = 4, ttk (0, 4)

p + 4 = 0, p = -4, ttk (0, -4)

c.Titik maks/min: (Q,p)

Q = (-b/2a) = 0/-2 = 0

$p = (b^2 – 4ac)/(-4a) = 0 – 4(-1)(16)/((-4)(-1)) = 16$

atau pada titik (0, 16)

Grafik:

Fungsi penawaran

$Q_s = 2p^2 - 4p$

a. Titik potong dengan sb Q → p = 0;   Q = 0,   (0,0)

b. Titik potong dengan sb p → Q = 0;   $2p^2 - 4p = 0$

Atau 2p(p – 2) = 0;  2p = 0;  p = 0;  ttk pot (0, 0)

(p – 2) = 0; p = 2;  ttk pot ( 0, 2)

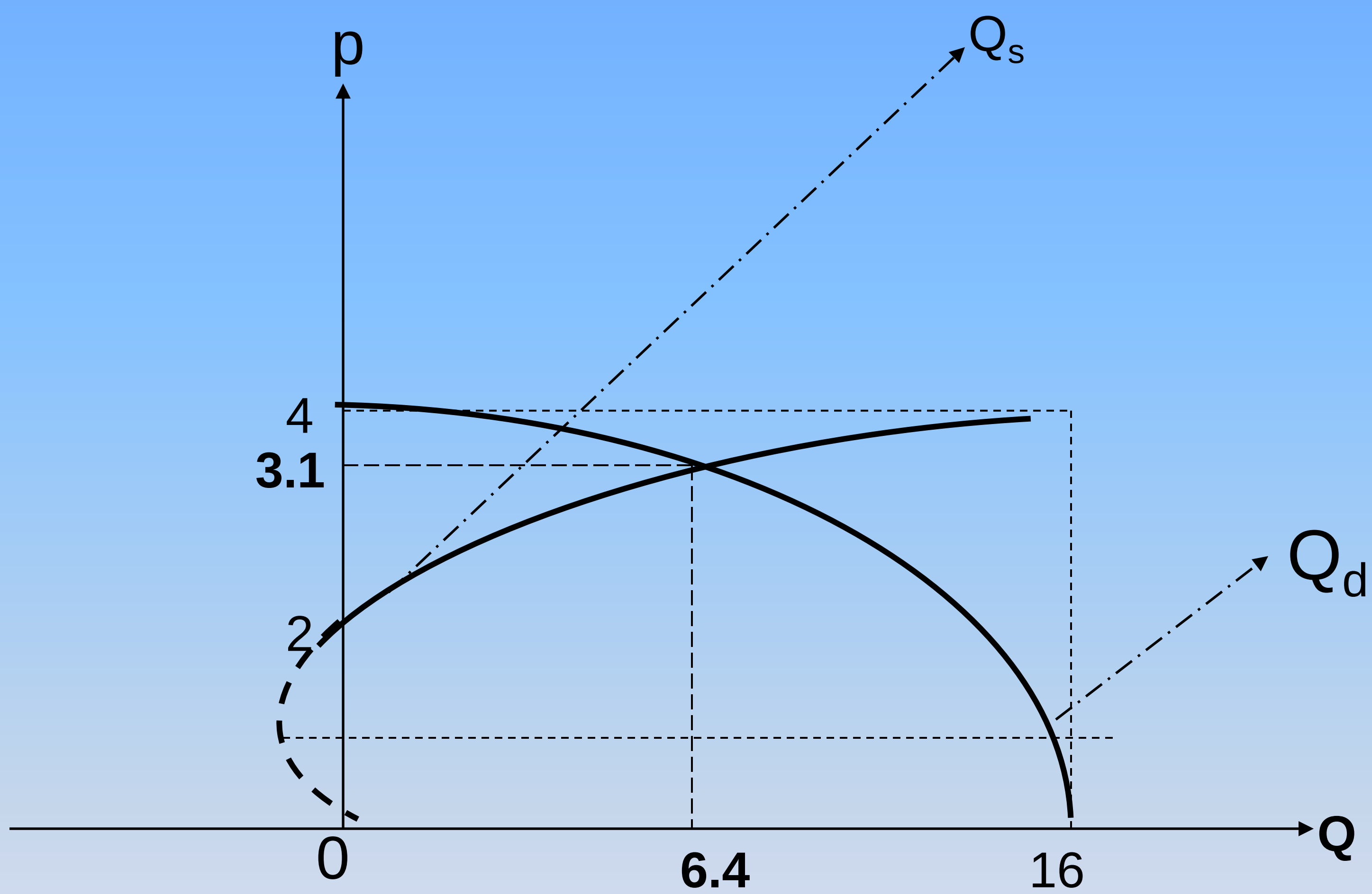
c. Titik maks/min: (Q,p)

$Q = (-b/2a) = 4/4 = 1$

$p = (b^2 - 4ac)/(-4a) = (-4)^2 - 4(2)(0)/(-4)(2) = 2$

atau pada titik (1, 2)

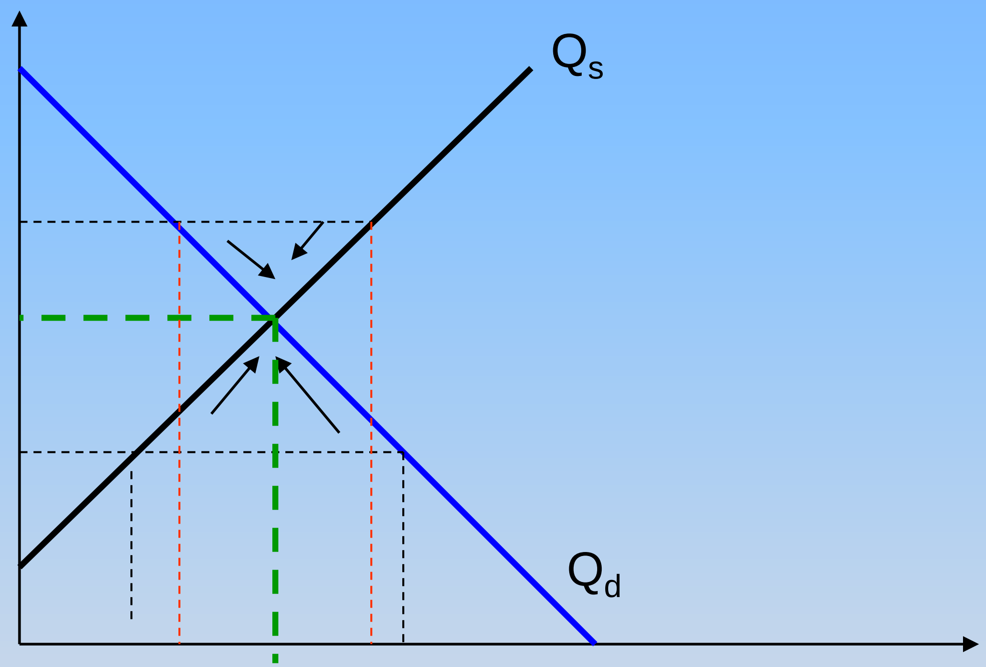
# Grafik:




Apa yang terjadi jika p = 3.5 dan p = 2.5

Untuk p = 3.5, terjadi ekses supply dan p = 2.5, terjadi ekses demand

# Penjelasan ekses suplai dan ekses demand




Ekses *demand* mendorong harga naik, dan ekses *supply* mendorong harga turun.

**Aplikasi dalam ekonomi**

1) Elastisitas permintaan

Elastisitas permintaan adalah persentase per-ubahan jumlah komoditi diminta apabila terdapat perubahan harga.

Jika $q$ = komoditi yg diminta,

$\Delta q$ = perubahannya

$p$ = harga komoditi;

$\Delta p$ = perubahannya

$$E_d = \frac{\Delta q/q}{\Delta p/p} = \lim_{\Delta p \to 0} \frac{\Delta q/q}{\Delta p/p} = \lim_{\Delta p \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta p} \frac{p}{q} = \frac{dq}{dp} \frac{p}{q}$$

Contoh: Umpamakan fungsi permintaan $q = 18 - 2p^2$ hitung elastisitas permintaan jika harga berkurang 5% (bukan mendekati nol) dari $p = 2$, $q = 10$. Bandingkan hasil kedua pendekatan: definisi dan derivatif.

Pendekatan definisi: $p = 2$; $\Delta p = 0.05$ berarti

$$p_1 = 2 - 2(0.05) = 1.9$$

Untuk $p_1 = 1.9$, $q = 18\text{-}2p^2 = 18 - 2(1.9)^2 = 10.78$

untuk $p = 2$, $q = 18\text{-}2p^2 = 18 - 2(2)^2 = 10.$

berarti $\Delta q = 10.78 - 10 = 0.78$

Jadi menurut pendekatan definisi

$$E_d = 7.8\%/-0.05\% = -\ 1.56$$

Dengan pendekatan derivatif:

$$E_d = (dq/dp)(p/q) = (-4p)(p/q) = -\ 4p^2/q$$

pada harga p = 2, dan q = 10

$$E_d = -4(2)^2/10 = -\ 1.60.$$

Perhatikan dengan derivatif, Δp mendekati nol, sementara menurut definisi, Δp = 0.05%, jadi hasilnya sedikit berbeda.

2) Total Cost, Average cost and marginal cost

$$TC = f(q),$$

merupakan fungsi biaya dimana TC = total cost, dan q = produk yang dihasilkan.

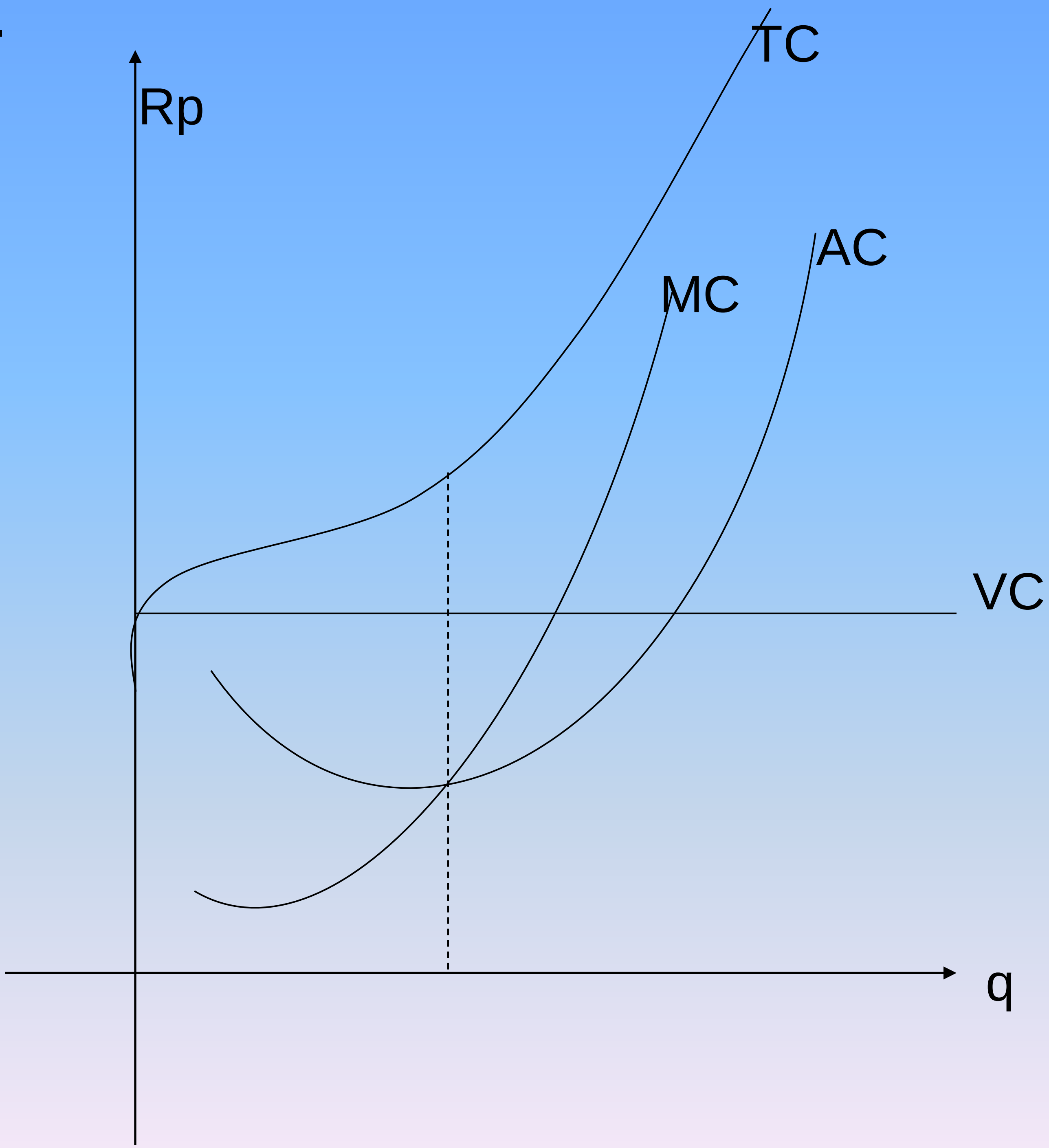
$$TC/q = f(q)/q$$

merupakan fungsi biaya rata-rata.

$$MC = dTC/dq$$

merupakan derivatif dari TC, sebagai biaya marginal. Biaya marginal adalah tambahan biaya yg dibutuhkan per satuan tambahan produk.

Hubungan TC, AC dan MC, seperti kurva dibawah ini.



Contoh dengan data diskrit

| q | FC | VC | TC | AC | MC |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 100 | 10 | 110 | 110.00 | - |
| 2 | 100 | 16 | 116 | 58.00 | 6.0 |
| 3 | 100 | 21 | 121 | 40.33 | 5.0 |
| 4 | 100 | 26 | 126 | 31.50 | 5.0 |
| 5 | 100 | 30 | 130 | 26.00 | 4.0 |
| 6 | 100 | 36 | 136 | 22.67 | 6.0 |
| 7 | 100 | 45.5 | 145.5 | 20.78 | 9.5 |
| 8 | 100 | 56 | 156 | 19.50 | 10.5 |
| 9 | 100 | 72 | 172 | 19.10 | 16 |

Contoh dengan fungsi biaya:

$TC = q^3 – 4q^2 + 10q + 75.$

FC = Fixed Cost = 75

VC = Variable cost = $q^3 – 4q^2 + 10q$

MC = dTC/dq = $3q^2 – 8q + 10$

AC = TC/q = $q^2 – 4q + 10 + 75/q$

3) Revenue and Marginal revenue

Apabila fungsi permintaan diketahui, maka Total Revenue (TR) adalah jumlah produk yang diminta dikali harga.

Jadi jika q = kuantitas diminta dan p = harga dengan q = f(p) maka:

$$TR = qp = f(p).p$$

Marginal Revenue (MR) = dTR/dq.

Contoh:

Fungsi Permintaan;
$3q + 2p = 9$;

$2p = 9 - 3q$ atau

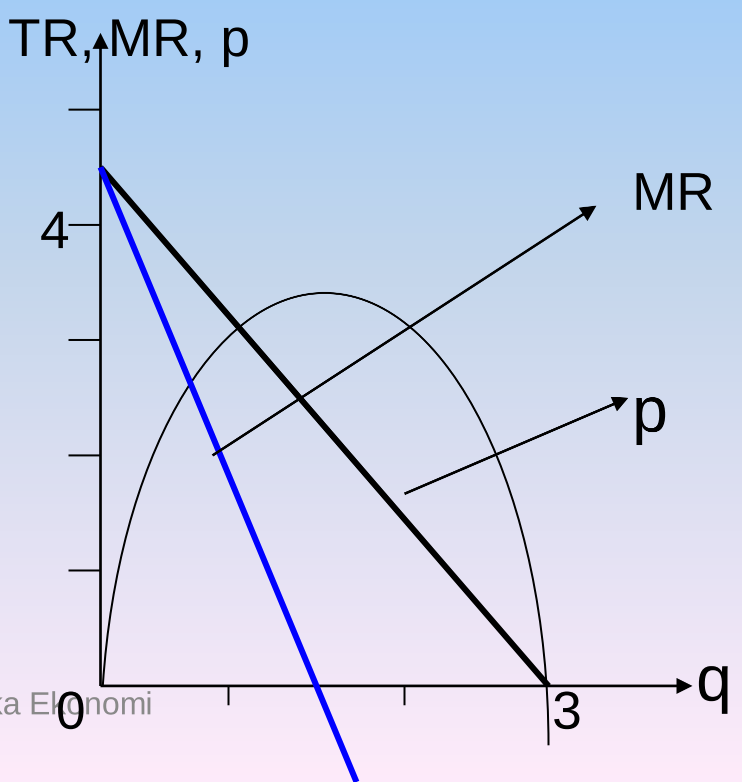
$p = 9/2 - (3/2)q$

$TR = p.q$ atau

$TR = (9/2)q - (3/2)q^2$

$MR = dTR/dq$

$= 9/2 - 3q$



4). Fungsi produksi

Seorang produsen dalam teori ekonomi paling tidak harus mengambil dua keputusan apabila dilandasi oleh suatu asumsi produsen berusa-ha memperoleh profit maksimum, adalah:

a. Jumlah produk yang yang akan diproduksi
b. Menentukan kombinasi input-input yang digunakan dan jumlah tiap input tsb.

Landasan teknis dari produsen dalam teori ekonomi disebut dengan FUNGSI PRODUKSI.

Fungsi produksi = persamaan yang menunjukkan hubungan antara tingkat penggunaan input-input dengan tingkat output.

Fungsi produksi, secara umum dicatat:

$$Q = f(x_1, x_2, x_3, \dots , x_n)$$

Q = output

$x_i$ = input-input yang digunakan, i = 1, 2, 3, … , n

Apabila dalam proses produksi:

$$Q = f(x_1/x_2, x_3, \dots , x_n)$$

input $x_l$ ditambah terus menerus, sedangkan input lain tetap, maka fungsi produksi itu tunduk pada hukum : *The law of diminishing returns*

*"bila satu macam input, terus ditambah penggunaannya sedang penggunaan input lain tidak berubah, maka tam-bahan output yg dihasilkan dari setiap tambahan input, mulai-mula meningkat, kemudian menurun, dan akhirnya negatip".*

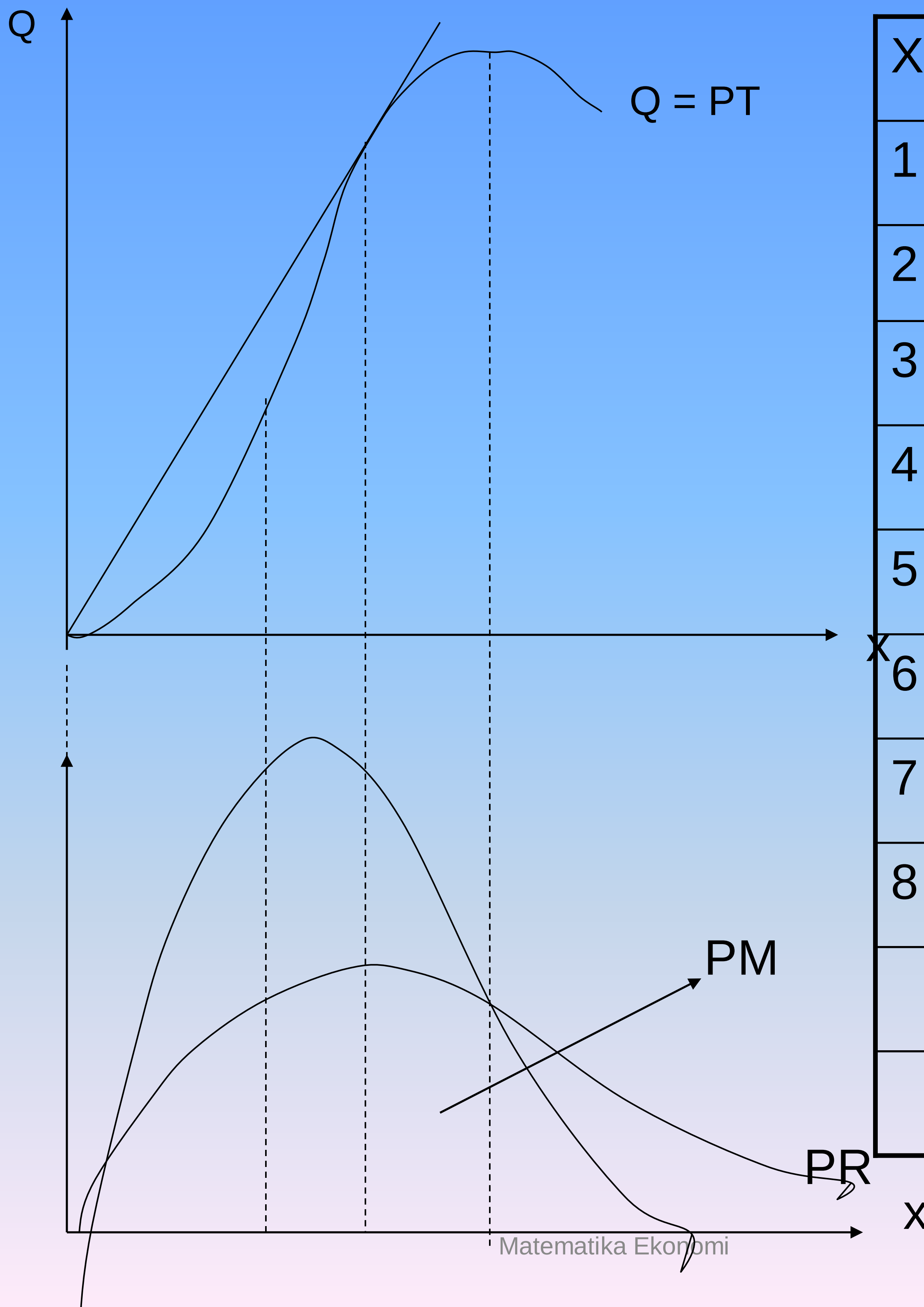
Tambahan output yg didapat karena adanya tam-bahan satu unit input dinamakan Produk Fisik Marginal (Produk Marginal = PM).

$$PM = \partial Q/\partial x_i, \quad i = 1, 2, 3, \dots, n$$

Selain produk marginal, fungsi lain yang dapat di-turunkan dari fungsi produksi adalah fungsi Produk Rata-rata (PR).

$$PR = Q/x = f(x)/x$$

Jadi ada hubungan antara Q atau produk total (PT) dengan PM dan PR.Hubungan tersebut di-tunjukkan oleh kurva berikut ini.




| $X_1$ | Q | PM | PR |
|---|---|---|---|
| 1 | 10 | - | 10 |
| 2 | 24 | 14 | 12 |
| 3 | 39 | 15 | 13 |
| 4 | 52 | 13 | 13 |
| 5 | 61 | 9 | **12.2** |
| 6 | 66 | 5 | 11 |
| 7 | 66 | 0 | 9.4 |
| 8 | 64 | -2 | 8 |
| | | | |
| | | | |

Ciri-ciri grafik fungsi produksi dicatat sbb:

a. Pada saat PT maks, maka PM = 0

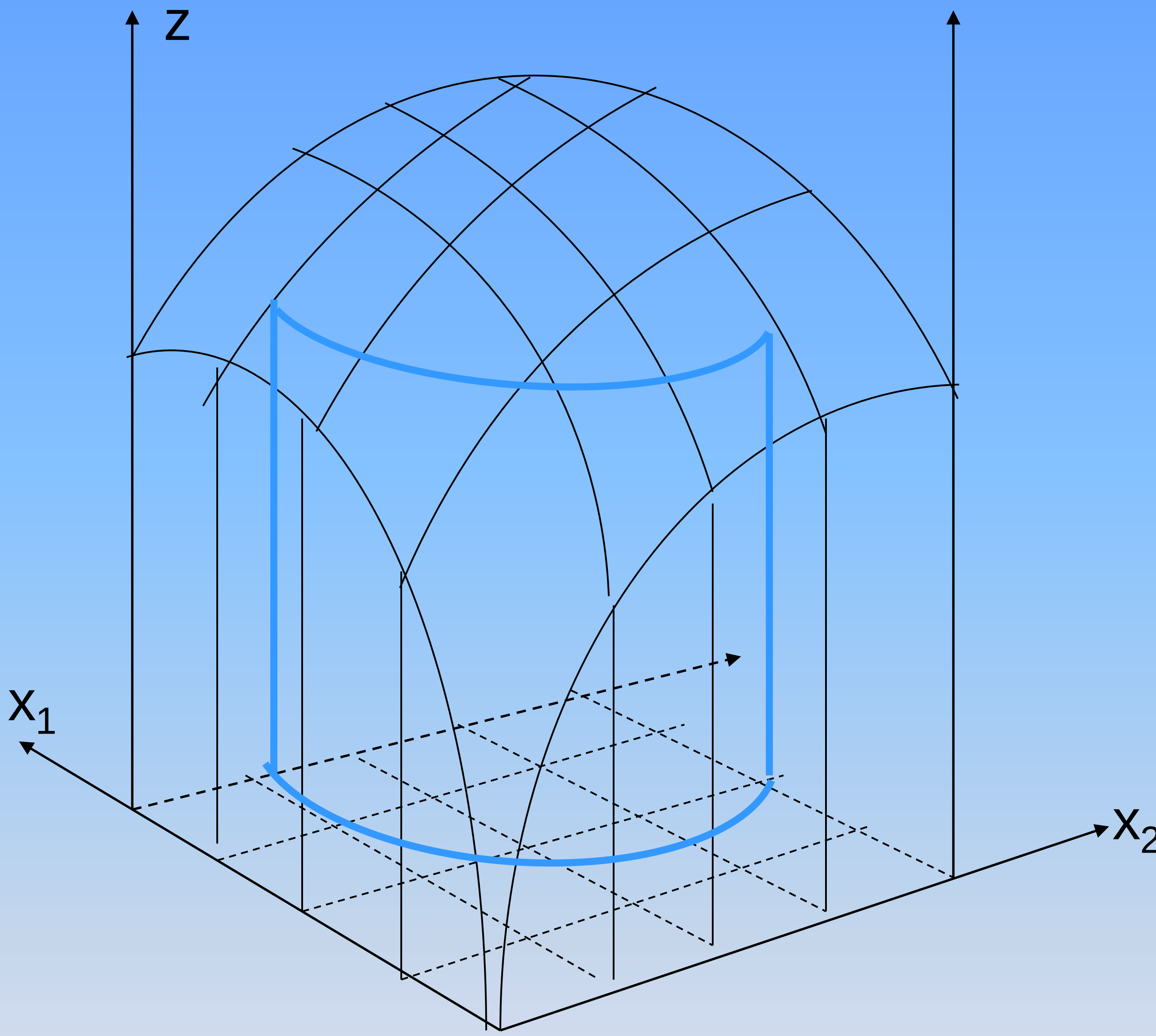
b. Pada saat PR maks, maka PM = PR

c. PR maks pada saat grs lurus dari titik nol (origin) menyinggung kurva PT.

Kurva produksi yang dijelaskan di atas, hanya jika input variabel terdiri atas satu input. Untuk

$$Q = f(x_1, x_2)/x_3, \ldots , x_N)$$

atau dua input variabel, maka kurvanya dalam ruang spt berikut:


z
$x_1$
$x_2$

# MATRIKS

Matriks artinya sesuatu yang membungkus, yang dibungkus adalah data kuantitatif yang disusun dalam bentuk “baris” dan “lajur”.

Contoh: Harga gula pasir di 3 kota selama 3 bulan (rata-rata)

| Kota / Bulan | A | B | C |
|---|---|---|---|
| J | 4000 | 4500 | 4200 |
| F | 4200 | 4600 | 4500 |
| M | 4200 | 4700 | 4500 |

Dengan catatan matriks ditulis:

$$A = \begin{pmatrix} 4000 & 4500 & 4200 \\ 4200 & 4600 & 4500 \\ 4200 & 4700 & 450 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 6 & 7 \\ 9 & 8 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Bentuk umum sbb:

Notasi matriks

$$\underset{m \times n}{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ : & : & & : \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Untuk menyederhanakan dicatat:

$$\underset{m \times n}{A} = (a_{ij})_{mxn}$$

m = jlh baris; n = jlh lajur

**Vektor.**

Kumpulan data/angka yang terdiri atas satu baris disebut: VEKTOR BARIS, jika satu lajur disebur dengan VEKTOR LAJUR. Dengan demikian, dpt disebut bahwa matriks terdiri atas beberapa vektor baris dan beberapa vektor lajur.

Vektor baris:

$a' = (4, 1, 3, 2)$

$x' = (x_1, x_2, \ldots\ x_n)$

Vektor lajur

$$b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix} \qquad u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$$

## Beberapa macam bentuk matriks

a. Matriks segi: $A = (a_{ij})_{m.n}$ dengan m = n

$$\underset{4\times 4}{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 4 \\ 4 & 1 & 7 & 7 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

b. Matriks setangkup: $B = (b_{ij})_{n.n}$, $b_{ij} = b_{ji}$

$$\underset{4\times 4}{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 & 7 \\ 0 & 5 & 4 & 3 \\ 7 & 4 & 2 & 5 \\ 7 & 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

c. Matriks diagonal

$D = (d_{ij})_{n.n}$, $d_{ij} = 0$ utk i±j

$$D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

d. Matriks identitas

$$I_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e. Matriks segitiga atas, jika semua unsur di-bawah diagonal uta-ma bernilai nol.

$$G = \begin{pmatrix} 9 & 9 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Diagonal utama

Jika semua unsur di-atas diagonal utama bernilai 0 = matriks segitiga bawah.

**Penggandaan matriks**

Matriks A = $(a_{ij})_{m.n}$ dapat digandakan dgn B = $(b_{ij})_{p.q}$ jika dan hanya jika lajur matriks A = baris matriks B atau n = p

Cara penggandaan adalah vektor baris x vektor lajur dimana setiap baris A digandakan dengan setiap lajur B seperti contoh berikut ini.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 & -1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$
\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} 8 & -1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix}
(1\ \ 1\ \ 0)\begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, & (1\ \ 1\ \ 0)\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\
(2\ \ 4\ \ 5)\begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, & (2\ \ 4\ \ 5)\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\
(6\ \ 7\ \ 8)\begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, & (6\ \ 7\ \ 8)\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}
\end{pmatrix}
=
$$

$$\begin{pmatrix} (1)(8) + (1)(1) + (0)(1), & (1)(-1) + (1)(1) + (0)(2) \\ (2)(8) + (4)(1) + (5)(1), & (2)(-1) + (4)(1) + (5)(2) \\ (6)(8) + (7)(1) + (8)(1), & (6)(-1) + (7)(1) + (8)(2) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 25 & 12 \\ 63 & 17 \end{pmatrix}$$

Contoh-2: $\begin{pmatrix} 3 & 6 & 0 \\ 4 & 2 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} =$

$$\begin{pmatrix} 3x + 6y \\ 4x + 2y - 7z \end{pmatrix}$$

**Putaran matriks**

Matriks $A = (a_{ij})_{m.n}$, putarannya adalah $A' = (a'_{ij})_{n.m}$, sedangkan $(a'_{ij}) = (a_{ji})$.

Contoh: $A = \begin{pmatrix} 3 & 8 & -9 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow A' = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 8 & 0 \\ -9 & 4 \end{pmatrix}$

$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 7 \\ 4 & 7 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow D' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 7 \\ 4 & 7 & 2 \end{pmatrix}$

# Determinan matriks segi

**Determinan suatu matriks segi adalah hasil per-kalian unsur-unsur yang tidak sebaris dan tidak selajur, dengan tanda tertentu. Determinan matriks A dicatat det (A) atau |A|**

Contoh: Hitung determinan matiks A = $\begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 4 & 9 \end{pmatrix}$

det A = (2)(9) – (4)(7) = - 10.   -   +

Contoh: Cari determinan matriks

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 8 & 2 & 5 \\ 6 & 9 & 3 \end{pmatrix}$$

Cara Sarrus, yaitu dengan menambahkan lajur 1 sebagai lajur 4 dan lajur 2 sebagai lajur 5 kemudian mengganda-kan angka yang tidak sebaris dan tidak selajur.

$$\det C = \begin{array}{ccccc} & & - & - & - \\ 1 & 4 & 7 & 1 & 4 \\ 8 & 2 & 5 & 8 & 2 \\ 6 & 9 & 3 & 6 & 9 \\ & & + & + & + \end{array}$$

$= (1)(2)(3) + (4)(5)(6) + (7)(8)(9)$

$-(7)(2)(6) - (1)(5)(9) – (4)(8)(3) = 405$

Untuk matriks dengan dimensi/ukuran 4 x 4, cara Sarrus tidak dapat digunakan melainkan dicari perkalian unsur yang tidak sebaris dan tidak selajur.

## Pangkat suatu matriks

Suatu matriks segi dengan *determinan* ± *0*, maka matriks itu disebut berpangkat penuh atau *matriks tak singular*.  Sebaliknya, disebut matriks berpangkat tak penuh atau dinamakan *matriks singular*.

Jika suatu matriks B berukuran nxn, maka pangkat matriks itu dicatat p(B) = n, jika matriknya berpangkat penuh.

Tetapi jika determinannya = 0, maka pangkat matriks B, lebih kecil dari n, yaitu dimensi salah satu anak matriksnya yang memiliki det ± 0.

Contoh $A_{3 \times 3} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, karena det A = 0, maka p(A) ± 3, dan kemungkinan p(A) = 2.

Untuk memeriksa, ambil salah satu anak matiksnya:

$A_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, det $A_{11}$ = - 3 ± 0. Berarti p(A) = 2

Dalam sistem persamaan linear, yang mencari nilai-nilai x dari sistem persamaan tersebut, maka matriks penyusun persamaan linear dimaksud harus ± 0 atau tak singular atau berpangkat penuh.

Misal:

$$\begin{aligned} 7x_1 - 3x_2 - 3x_3 &= 7 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 &= 0 \\ -2x_2 - x_3 &= 2 \end{aligned}$$

Setelah diubah dg perkalian matiks diperoleh

$$\begin{pmatrix} 7 & -3 & -3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Det. Matriks: $\begin{vmatrix} 7 & -3 & -3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \end{vmatrix} = -8 \pm 0$, berarti nilai-nilai x dari persamaan linear itu dpt dicari.

**Persamaan linear dan jawabannya.**

Persamaan linear adalah himpunan dari persamaan linear dengan beberapa nilai yang hendak dicari.

Contoh: $5x_1 + 3x_2 = 30$

$6x_1 - 2x_2 = 8$

$7x_1 - x_2 - x_3 = 0$

$10x_1 - 2x_2 + x_3 = 8$

$6x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 7$

Dari persamaan tersebut akan dihitung $x_1$ dan $x_2$

Dengan aturan Cramer, menggunakan cara determi-nan, sistem persamaan linear di atas dapat diselesai-kan dg cara sbb:

a. Buat persamaan linear menjadi dalam bentuk perkalian matriks.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}}_{\boxed{A}} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}}_{\boxed{x}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 30 \\ 8 \end{pmatrix}}_{\boxed{d}}$$

b. Cari nilai det (A);    det A = -28

c. Dapatkan matiks $A_1$ yaitu matriks A dengan mengganti lajur ke-1 dengan vektor d.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 30 & 3 \\ 8 & -2 \end{pmatrix}$$

d. Dapatkan matriks $A_2$ yaitu matriks A dengan mengganti lajur ke-2 dengan vektor d.

$$A_2 = \begin{pmatrix} 5 & 30 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$$

e. Cari det $A_1$ dan det $A_2$; det $A_1$ = -84; det $A_2$ = -140

f. Nilai $x_1$ = det $A_1$/det A, dan $x_2$ = det $A_2$/A.

$x_1$ = -84/-28 = 3; $x_2$ = -140/-28 = 5.

Contoh 2

$$\begin{pmatrix} 7 & -1 & -1 \\ 10 & -2 & 1 \\ 6 & 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{A} \quad \boxed{x} \quad \boxed{d}$$

a. Det A = -61

b. $\text{Det } A_1 = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 8 & -2 & 1 \\ 7 & 3 & -2 \end{vmatrix} = -61$; $\det A_2 = \begin{vmatrix} 7 & 0 & -1 \\ 10 & 8 & 1 \\ 6 & 7 & -2 \end{vmatrix} = -183$

$$\det A_3 = \begin{vmatrix} 7 & -1 & 0 \\ 10 & -2 & 8 \\ 6 & 3 & 7 \end{vmatrix} = -244$$