MATEMATIKA EKONOMI DAN BISNIS

CHAPTER 1
PENGENALAN MATEMATIKA EKONOMI DAN BISNIS

A. Sifat-sifat Matematika Ekonomi

1. Perbedaan Matematika vs. Nonmamatematika Ekonomi
   - Keuntungan pendekatan matematika dalam ilmu ekonomi
     - Ketepatan (Precise), Keringkasan (concise)
     - Memaksa pernyataan asumsi-asumsi dengan jelas
     - Menarik kesimpulan / dalil dari asumsi yang digunaka melalui Penalaran Deduksi
     - Memungkinkan pembahasan kasus n-variabel
   - Matematika sebagai Bahasa dari Logika
     - Memudahkan proses logika (deduksi/induksi)
     - Dengan matematika dapat memperluas Logika deduk
     - Mampu mengambil esensi dari realitas dengan alat matematika
   - Kekurangan : Terlalu kaku dan terlalu menyederhanakan re dengan teori. (Realitas → Teori)

2. Perbedaan Matematika Ekonomi vs. Ekonometrik
   - Deduksi vs. induksi
     - Deduksi: dari umum ke spesifik → Matematika Ekono
     - Induksi: dari spesifik ke umum → Ekonometrik
   - Kekurangan deduksi:
     - Tergantung ketepatan asumsi awalnya
   - Kekurangan induksi:
     - Kebenaran dari hasil akhirnya berupa probabilitas
   - Paradoks Hume:
     - Bukan deduksi atau induksi yang menuju Kebenaran
     - Maka gunakan keduanya: masing-masing digunakan bersama untuk saling mengkoreksi satu dengan yang

B. Model-model Ekonomi

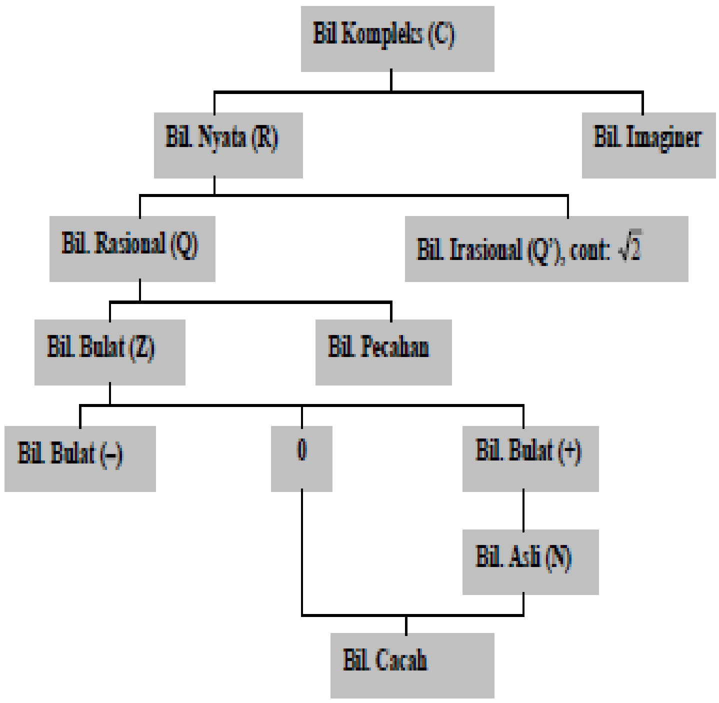
1. Unsur-unsur dalam Model Matematis

   - Variabel, Konstanta, Parameter dan Koefisien
   - Persamaan → identitas, kondisi ekuilibrium dan persamaan perilaku.
   - Contoh:

     - $\pi \equiv TR - TC$ (identitas atau definisi)
     - $Qd = Qs$ (Kondisi ekuilibrium)
     - $Y = 6 + b\,X0$ (Persamaan perilaku)
     - Y: variabel endogen → diperoleh dari dalam
     - X0: variabel eksogen → diperoleh dari luar
     - 6: Konstanta
     - b: Parameter dan koefisien dari variabel eksogen X0

B. Sistem Bilangan Real

- Bilangan real → digambarkan dengan **garis bilangan** yang mengandung bilangan +, -, dan 0, serta bersifat kontinu. Disimbolkan dengan **R**, dan terdiri dari:
  - Bilangan Rasional
    - Pecahan: dapat dinyatakan sebagai pembagian dua bilangan bulat
    - Bilangan Bulat: bilangan yang utuh
  - Bilangan Irasional
    - Bilangan yang tidak dapat dinyatakan sebagai pembagian dua bilangan bulat, contohnya akar 2, pi.
- Perkembangan sistem bilangan dimulai dari yang paling sederhana yaitu bilangan Asli sampai ke bilangan Imajiner, merupakan perkembangan dari pemikiran peradaban manusia itu sendiri. Sketsanya di bawah ini:



C. Konsep Himpunan
- Definisi Himpunan: Kumpulan dari sembarang objek yang didefinisikan.
  - Notasi Himpunan = huruf besar, ex; A, B, ...
  - Notasi Elemen / anggota = huruf kecil ex; a, b, ...
  - Notasi Keanggotaan $\in$
  - Contoh: Himpunan A= {i,...,n} maka elemen i $\in$ A

- Hubungan antar Himpunan-himpunan
  - Himpunan Bagian
    ⇨ A adalah himpunan bagian dari B, dinotasikan sebagai $A \subset B$ dan dinyatakan sebagai:
    $A \subset B = \{ x \,/\, \forall x \in A,\ x \in B \}$
    Contoh: A = { 1,2,3 } , B = { 3,2 } maka $B \subset A$
  - Jumlah Himpunan Bagian=2^N, N: jumlah anggota himpunan. Misalnya anggota himpunan A = 3, maka himpunan bagiannya = 2^3 = 8
  - Himpunan kosong :himpunan tanpa anggota.
    Notasi = { } atau ∅
  - Himpunan Semesta :himpunan dari semua anggota
    Notasi = S

- Operasi himpunan
  1. $A \cup B = \{ x \,/\, x \in A \text{ atau } x \in B \}$
  2. $A \cap B = \{ x \,/\, x \in A \text{ dan } x \in B \}$
  3. $A - B = \{ x \,/\, x \in A, \text{ tetapi } x \notin B \}$
  4. $A^c = \{ x \,/\, x \notin A, \text{ tetapi } x \in S \}$
  - Contoh :
    A = { 5,6,7 }
    B = { 1,2,3 }
    Maka A – B = { 5,6,7 }

- Dalil dalam Operasi himpunan
  1. Hukum Komutatif: $A \cup B = B \cup A$ dan $A \cap B = B \cap A$
  2. Hukum Assosiatif: $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
  3. Hukum Distributif: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ dan $A \cap (B \cup C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

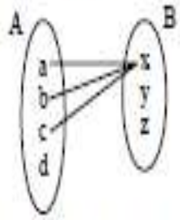
Contoh:
- Model Permintaan dan Penawaran (demand supply mo dapat disajikan dalam bentuk himpunan sebagai pasan berurut (ordered pair → definisi ini dilihat pada bagian

- $D = \{(P,Q) \mid Q = \alpha - \beta P\}$ → berupa garis lurus
- $S = \{(P,Q) \mid Q = \gamma + \delta P\}$ → berupa garis lurus
- $D \cap S = (\bar{P}, \bar{Q})$ → perpotongan berupa titik

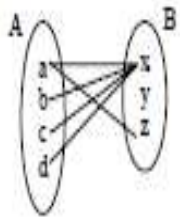
Keterangan notasi:
∃ : tidak ada
∃ : ada
∀ : untuk setiap

D. Himpunan dan Fungsi
- Pasangan berurut (ordered pairs): (a,b) ≠ (b,a)
  Hal ini berbeda dengan definisi himpunan di mana {a,b} = {b,a}
- Hasilkali Kartesian (Cartesian Product):
  $X \times Y = \{ (a,b)\ a \in X \text{ dan } b \in Y \}$
  Contoh: X = {1,2}; Y = {3,4} ;
  maka Hasilkali Kartesian X × Y = { (1,3) (1,4) (2,3) (2,4) }

- **Hubungan** (relation): pasangan berurut (x, y) yang bersifat sembarang nilai x dapat menentukan lebih dari satu nilai y
- **Fungsi** (function): pasangan berurut (x, y) yang bersifat sembarang nilai x dapat menentukan HANYA satu nilai y. Fungsi dinotasikan sebagai f: x → y
- Catatan: Hubungan belum tentu fungsi, fungsi pasti hubungan !
  Contoh yang **bukan** fungsi:



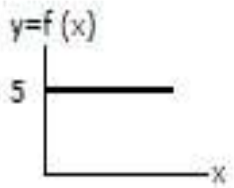
Fungsi: Sebelah kiri (domain) harus habis. Ini juga bukan Hubungan.



Fungsi: tidak boleh punya 2 pasangan. Ini merupakan Hubungan.

Penulisan Fungsi secara umum:
- $y = f(x)$
- y adalah variabel terikat (dependent variable) → gambaran (image) dari nilai x.
- Himpunan semua gambaran disebut kisaran (range), digambarkan sebagai sumbu vertikal.
- *f* adalah fungsi atau aturan pemetaan (mapping) nilai x menjadi hanya satu nilai y.
- x adalah variabel bebas (independent variable)
- Himpunan semua nilai x disebut daerah asal (domain), digambarkan sebagai sumbu horizontal.

E. Tipe-tipe Fungsi
- Fungsi Konstan: $y = f(x) = k,\ k \in R$
  Contoh : $y = f(x) = 5$

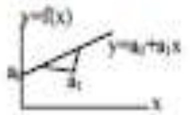


- Fungsi Polinom (suku banyak)

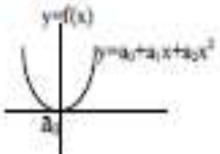
  Bentuk umum: $y = f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$

  $n = 0 \rightarrow y = f(x) = a_0 x^0 = a_0 \rightarrow$ fungsi konstan (berderajat

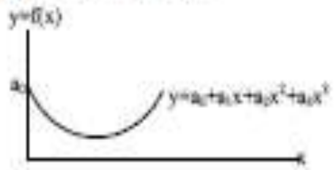
  $n = 1 \rightarrow y = f(x) = a_0 + a_1 x^1 \rightarrow$ f. linear (f. polinom berder



  $n = 2 \rightarrow y = f(x) = a_0 + a_1 + a_2 x^2$



  $n = 3 \rightarrow y = f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$



- Fungsi Rasional : pembagian fungsi polinom

  Contoh: $y = f(x) = \dfrac{x-1}{x^2+2x+1}$
- Fungsi Non-Aljabar (Fungsi transenden)
  - $y = a^x$ (fungsi ekspon
  - $y = \ln_b(x)$ (fungsi logaritr

Penyimpangan Eksponen

- **Dalil Eksponen:** $X^n = (X \times X \times X \times \ldots \times X)$ n kali
  1. Dalil I: $X^m \times X^n = X^{m+n}$
  2. Dalil II: $\dfrac{X_m}{X_n} = X^{m-n}$
  3. Dalil III: $X^{-n} = \dfrac{1}{X^n}$
  4. Dalil IV: $X^0 = 1$
  5. Dalil V: $X^{1/n} = \sqrt[n]{x}$
  6. Dalil VI: $(X^m)^n = X^{mn}$
  7. Dalil VII: $X^m \times Y^m = (XY)^m$

Sifat-sifat fungsi:

- Sebuah fungsi NAIK jika:

  $f(x_B) \geq f(x_A)$ untuk $x_B > x_A$
- Sebuah fungsi SELALU NAIK jika:

  $f(x_B) > f(x_A)$ untuk $x_B > x_A$
- Sebuah fungsi TURUN jika:

  $f(x_B) \leq f(x_A)$ untuk $x_B > x_A$
- Sebuah fungsi SELALU TURUN jika:

  $f(x_B) < f(x_A)$ untuk $x_B > x_A$

F. Fungsi dari Dua atau Lebih Variabel Bebas

- $y = f(x)$
- $y = f(x, z)$ → dua variabel bebas (3 dimensi)
- $y = f(w,x,z)$ → tiga variabel bebas (hypersurface)

G. Tingkat Generalitas

- Fungsi spesifik 1: bentuk spesifik dan parameter spesifik
  - $y = 10 - 5x$
- Fungsi spesifik 2: bentuk spesifik dan parameter umum
  - $y = a - bx$

- Fungsi umum: bentuk umum dan tanpa parameter
  - $y = f(x)$
  - f memetakan x ke hanya satu nilai y

LATIHAN:

1. Dalam teori perusahaan, para ekonom mempertimbangkan biaya total C sebagai fungsi dari tingkat output Q: $C=f(Q)$
   A. Menurut definisi fungsi, akah setiap angka biaya berkaitan dengan tingkat output yang unik?
   B. Apakah setiap tingkat output (Q) menentukan angka biaya yang unik?
   C. Jika $C=5+3Q$ di mana $\{Q|1 \leq Q \leq 9\}$, carilah range dari fungsi dan nyatakan dalam bentuk himpunan!

CHAPTER 2
ANALISIS KESEIMBANGAN STATIK DAN ARTI KESEIMBANGAN

A. Pengertian Ekuilibrium

- Ekuilibrium: kumpulan variable-variabel terpilih yang saling berhubungan satu dengan lainnya dalam model, yang berada dalam keadaan (state) tidak ada kecenderungan yang melekat untuk berubah.
- Ada 2 jenis: Ekuilibrium Tujuan (goal equilibrium) dan Ekuilibrium bukan Tujuan (nongoal equilibrium)

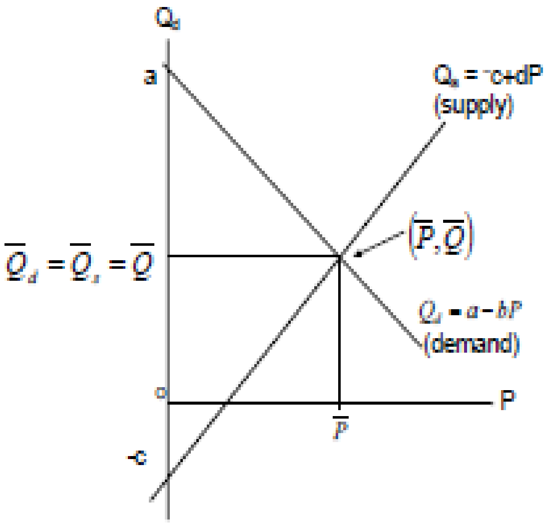
B. Ekuilibrium Pasar Parsial – Suatu Model Linear

1. Pembentukan Model Linear

Persoalan: Pandang satu komoditas, kemudian cari Harga ekuilibrium (Pe) Kuantitas ekuilibrium (Qe), jika

- Diberikan variabel:
  - Qd Kuantitas Permintaan (demand)
  - Qs Kuantitas Penawaran (supply)
  - P Harga, bedakan dengan Pe = Harga ekuilibri
- Dengan asumsi:
  - Qd = Qs
  - Qd Fungsi linier TURUN dari P
  - Qs Fungsi linier NAIK dari P
  - Pe > 0
- Kasus ini adalah satu persamaan ekuilibrium dan dua pe perilaku.
  - Model Permintaan-Penawaran
  - Qd = a - bP Persamaan Permintaan
  - Qs = -c + dP Persamaan Penawaran
  - Qd = Qs Kondisi ekuilibrium

Kasus ini, secara grafik dapat digambarkan sebagai:



2. Penyelesaian melalui Eliminansi Variabel

Model Ekuilibrium Pasar Parsial

- Qd = Qs = Qe Kondisi eku
- Qd = a - b(P) (a,b > 0) Permintaan
- Qs = -c + d(P) (c,d > 0) Penawaran

Penyelesaian:

a - bPe = -c + dPe
a + c = bPe + dPe
a + c = Pe(b+d)

- Pe = (a+c)/(b+d)
- Qd = Qe = a-bPe = a-b(a+c)/(b+d) = (ad-bc)/(b-

Contoh Soal:

Model Ekuilibrium Pasar Parsial

- Qd = Qs = Qe Kondisi ekuilibrium
- Qd = 51 - 3P = a - b(P)
- Qs = – 10 + 6P = -c + d(P)

Cari nilai Pe dan Qd?

Jawab:

Qd = Qs = Qe
Qd = 51 - 3P
Qs = 6P – 10

51 - 3Pe = 6Pe - 10
-9Pe = -61
Pe = 61/9=6 7/9

- Pe = 61/9 = 6 7/9
- Qd = 51 – 3 (61/9) = 459/9 – 183/9 = 276/9 = 30 2/3

Sehingga (Pe, Qe) = (6 7/9, 30 2/3)

C. Ekuilibrium Pasar Parsial – Suatu Model Nonlinear

1. Pembentukan Model Nonliner

Model Ekuilibrium Pasar Parsial

- Qd = Qs = Qe Kondisi ekuilibrium
- Qd = 4 – P^2 Permintaan
- Qs = 4P -1 Penawaran

Jawab:

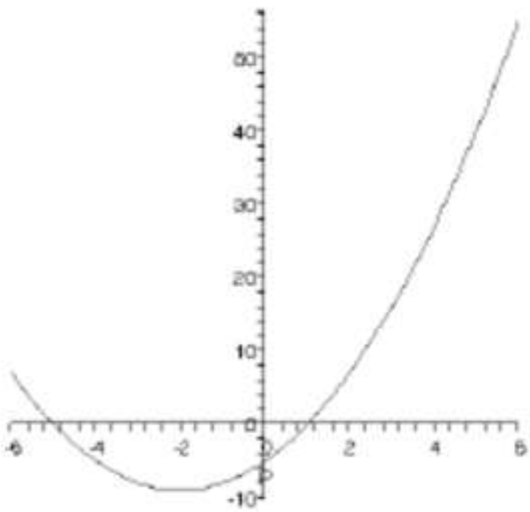
$4-P^2 = 4P - 1$
$P^2 + 4P - 5 = 0$

Bagaimana cara mencari nilai P?

- Secara grafik
- Memfaktorkan
- Rumus abc (akar persamaan kuadrat)

A. Secara grafik

Dengan memplot persamaan kuadrat di atas:



B. Memfaktorkan

$Qd=4-P^2$
$Qs=4P-1$
$Qd=Qs$

$4-P^2=4P-1$
$P^2+4P-5=0$
$(P+5)(P-1)=0$

- $P=\{-5, 1\}$
- $Qd=4-P2=\{-21,3\}$

C. Rumus abc

$ax^2 + bx + c = 0 \rightarrow P^2+4P-5=01$

$$\overline{P}_1, P_2 = \frac{-b \pm \sqrt{(b^2-4ac)}}{2a} = \frac{-4 \pm \sqrt{(16-(4)(1)(-5))}}{2 \cdot 1}$$

$$\overline{P}_1, P_2 = \frac{4 \pm (16+20)^{1/2}}{2} = \frac{4 \pm 6}{2} = \{1, -5\}$$

2. Penurunan Rumus abc dengan melengkapkan persamaan ku

- Persoalan: Persamaan kuadrat $ax^2 + bx + c = 0$, cari nilai dalam parameter a, b, c.

Penurunan Rumus abc:

- $x^2 + bx/a + c/a = 0$
- $x^2 + bx/a + b^2/4a^2 = b^2/4a^2 - c/a$
- $(x + b/2a)^2 = (b^2-4ac)/4a^2$
- $x + b/2a = \pm(b^2-4ac)^{1/2}/2a$

Sehingga: $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{(b^2-4ac)}}{2a}$

D. Ekuilibrium Pasar Umum

1. Model Pasar dengan Dua Barang

Kasus: Ada dua jenis komoditi yang saling berhubungan s dengan lainnya. Diasumsikan Persamaan Permintaan dan Penawaran Linear sbb:

$$Q_{d1} - Q_{s1} = 0$$
$$Q_{d1} = a_0 + a_1 P_1 + a_2 P_2$$
$$Q_{s1} = b_0 + b_1 P_1 + b_2 P_2$$
$$Q_{d2} - Q_{s2} = 0$$
$$Q_{d2} = \alpha_0 + \alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2$$
$$Q_{s2} = \beta_0 + \beta_1 P_1 + \beta_2 P_2$$

Kita dapat menyederhanakan sistem persamaan di atas d subtitusi menjadi dua persamaan dengan dua variabel, ya

$$(a_0 - b_0) + (a_1 - b_1)P_1 + (a_2 - b_2)P_2 = 0$$
$$(\alpha_0 - \beta_0) + (\alpha_1 - \beta_1)P_1 + (\alpha_2 - \beta_2)P_2 = 0$$

Definisikan :

$c_i = a_i - b_i$
$\theta_i = \alpha_i - \beta_i$

Didapat:

$c_0 + c_1 P_1 + c_2 P_2 = 0$
$\theta_0 + \theta_1 P_1 + \theta_2 P_2 = 0$

Terakhir diperoleh solusi, sbb :

$$P_1 = \frac{c_2\theta_0 - c_0\theta_2}{c_1\theta_2 - c_2\theta_1}$$

$$P_2 = \frac{c_0\theta_1 - c_1\theta_0}{c_1\theta_2 - c_2\theta_1}$$

2. Contoh dengan Angka

Diketahui:

- $Qd_i = Qs_i$
- $Qd_1 = 18-3P_1+P_2$
- $Qs_1 = -2+4P_1$
- $Qd_2 = 12+P_1-2P_2$
- $Qs_2 = -2+3P_2$

Cari nilai P_1, P_2

Jawab:

- $18-3P_1+P_2 = -2+4P_1$
- $P_2=4P_1+3P_1-2-18$
- $P_2 = 7P_1 -20$
- $12+P_1-2P_2 = -2+3P_2$
- $3P_2+2P_2= P_1 +14$
- $5P_2 = P_1 +14$

- $5(7P_1 -20) = P_1 +14$
- $35 P_1 -100 = P_1 +14$
- $34 P_1 = 114$
  - $P_1 = 114/34 = 3,35$
  - $P_2 =7P_1 -20 = 7\times114/34-20 = 3,47$

E. Ekuilibrium dalam Analisis Pendapatan Nasional

1. Model Pendapatan Nasional Keynes (tanpa Pajak):

- $Y= C + I_0 + G_0$ $(a>0, 0<b<1)$
- $C= a + b y$

Keterangan:

Variabel endogen= Y (pendapatan nasional), C (pengeluaran konsumsi)

Parameter = a, b

Variabel eksogen = I_0 (investasi), G_0(pengeluaran pemerintah)

Cari nilai ekuilibrium pendapatan nasional Ye dan ekuilibrium pengeluaran konsumsi (Ce)

Dengan mensubstitusi didapat:

$Y = a + bY + I_0 + G_0$
$Y(1-b) = a + I_0 + G_0$

$$Y_e = \frac{a + I_0 + G_0}{(1-b)}$$

$$C = a + bY$$
$$C = a + b\left(\frac{a + I_0 + G_0}{1 - b}\right)$$
$$= \frac{a - ab + ab + bI_0 + bG_0}{1 - b}$$

$$C_e = \frac{I_0 b + G_0 b + a}{1 - b}$$

2. Model Pendapatan Nasional Keynes (dengan Pajak):

- $Y = C + I_0 + G_0$ (1)
- $C = a + b(Y-T)$ (2)
- $T = d+tY$ (3)

Keterangan:
Variabel endogen= Y (pendapatan nasional), C (pengelua konsumsi), T (pajak)
Parameter = a, b, d, t
Variabel eksogen = I_0 (investasi),G_0 (pengeluaran pemerint

Cari nilai ekuilibrium pendapatan nasional (Ye), ekuilibrium (Te) dan ekuilibrium pengeluaran konsumsi (Ce)

Persoalan ini merupakan persoalan tiga persamaan linier de tiga variabel, yang akan mudah diselesaikan dengan konsep MATRIKS pada bab selanjutnya.

3. Contoh dengan Angka:
Diberikan Model Pendapatan Nasional Keynes (tanpa Pajak)
$Y = C + I_0 + G_0$
$C = 25 + 6Y^{.5}$
$I_0 = 16$
$G_0 = 14$
Cari nilai Ye dan Ce

Jawab:
$Y = C + 16 + 14$
$C = Y-30$
$Y-30 = 25 + 6Y^{.5}$

Misalkan: $W = Y^{.5}$
$W^2-30 = 25 + 6W$
$W^2-6W-55 = 0$
$(W-11)(W+5)$

W=11, -5 (ambil yang positif)
Ye = 121
Ce = 91

Latihan:

1. Pecahkan Model Pendapatan Nasional Keynes (dengan Paj atas dengan menggunakan metode substitusi atau eliminasi!

CHAPTER 3
MODEL-MODEL LINIER DAN ALJABAR MATRIKS (1)

Tujuan mempelajari Aljabar Matriks :

- Memberikan suatu cara penulisan sistem persamaan yang singkat walaupun persamaannya luas sekali
- Memberikan suatu cara pengujian suatu pemecahan dengan pendekatan determinan
- Mendapatkan cara pemecahan yang ringkas (jika solusinya ada)

A. Matriks dan Vektor

1. Matriks sebagai Susuan [Array]

- Asumsikan Model Ekonomi sebagai system persamaan linear , di mana:

  a_{ij} : parameter,

  dengan i = 1.. n baris, j = 1.. m kolom, dan nilai n=m,

  x_i : variabel endogen,

  d_i : variabel eksogen dan merupakan konstanta.

  Maka Model tersebut dapat dituliskan sebagai:

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & a_{1n}x_n = d_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & a_{2n}x_n = d_2 \\ \vdots & & \vdots & & & \vdots \quad \vdots \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \cdots & a_{nn}x_n = d_n \end{array}$$

- Kemudian definisikan : Matriks adalah suatu susunan segi empat dari bilangan, parameter dan variabel.

Bentuk umum dari matriks dinyatakan sebagai :

$A = [a_{ij}]$ i = 1, 2, ..., m = baris, j = 1, 2, ..., n = kolom

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

- Selanjutnya dengan penulisan matriks, maka sistem persar linear dapat dituliskan sebagai:

Ax = d dimana:

A = matriks dari parameter

x = vektor kolom dari variabel endogen

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

d = vektor kolom dari variabel eksogen dan berupa konstai

$$\mathbf{d} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_n \end{bmatrix}$$

Selanjutnya untuk memecahkan model ekonomi tersebut, k harus mencari nilai vektor **x**, sbb:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_n \end{bmatrix}$$

$$Ax = d$$

$$x^* = A^{-1}d$$

- Ilustrasi untuk Model dua persamaan dua variabel
  1) Qd=Qs
  2) Qd = a – bP (a,b >0)
  3) Qs = -c + dP (c,d >0)
- Selanjutnya atur sehingga menjadi bentuk di bawah ini
  4) 1Q + bP = a
  5) 1Q – dP = -c
- Selanjutnya ditulis dengan Aljabar Matriks sebagai:

$$\begin{bmatrix} 1 & b \\ 1 & -d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q \\ P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ -c \end{bmatrix}$$

$$Ax = d$$

- Solusi didapat dengan Invers Matriks (Pertemuan selan

$$\begin{bmatrix} Q^* \\ P^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & b \\ 1 & -d \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} a \\ -c \end{bmatrix}$$

$$x^* = A^{-1}d$$

2. Vektor sebagai Matriks Khusus

- VEKTOR dapat dianggap tipe khusus dari matriks, contohnya:
  - Vektor baris → matriks yang hanya memiliki 1 baris

    Contoh : R= [r_1, r_2, ...r_n]
  - Vektor kolom → matriks yang hanya memiliki 1 kolom

    Contoh : C= $\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_n \end{bmatrix}$

B. Operasi dengan Matriks

- Penjumlahan Matriks

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 11 \end{bmatrix}$$

Secara umum, aturannya: $[a_{ij}]+[b_{ij}]=[c_{ij}]$

- Pengurangan Matriks

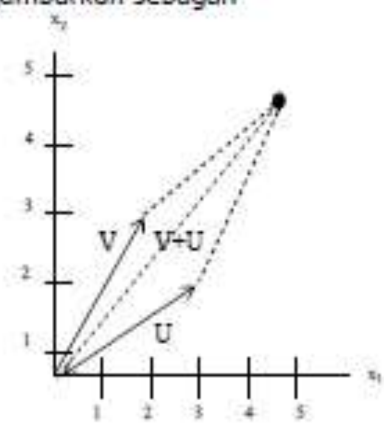
$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 9 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$$

Secara umum, aturannya: $[a_{ij}]+[b_{ij}]=[c_{ij}]$

Interpretasi geometrik dari Penjumlahan Vektor

Misalkan
- v = [2 3],
- u = [3 2], dan
- v+u = [5 5]

maka dapat digambarkan sebagai:



- Perkalian skalar

$$8\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 & 32 \\ 48 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{8}\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/4 & 1/2 \\ 3/4 & 1/8 \end{bmatrix}$$

Secara umum, aturannya: $a[b_{ij}] = [a\,b_{ij}]$ a=konstanta

- Perkalian skalar ini merupakan asal dari konsep keterg linear (linear dependence)
- Himpunan vektor saling tergantung linear (linearly dep jika sembarang dari anggotanya dapat dinyatakan seb kombinasi linear dari anggota-anggota yang lain.

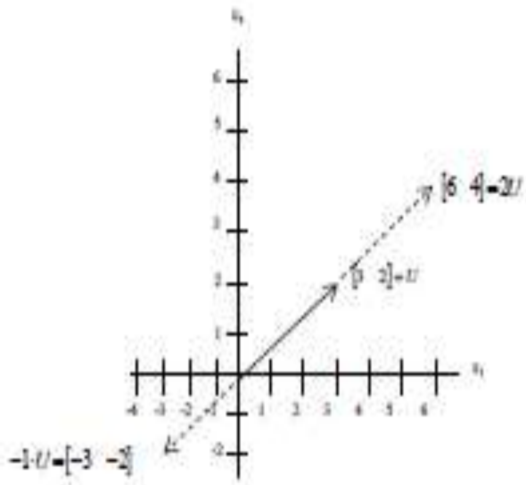
- Ketergantungan linear ini yang akan menyebabkan k dalam memecahkan sistem persamaan linear.
- Contoh:

$$v_1 = [2 \quad 7]$$
$$v_2 = [1 \quad 8]$$
$$v_3 = [4 \quad 5]$$

Maka vektor V_3 adalah bergantung linear, karena:

$$v_3 = 3v_1 - 2v_2$$
$$= [6 \quad 21] - [2 \quad 16]$$
$$= [4 \quad 5]$$
$$3v_1 - 2v_2 - v_3 = 0$$

Interpretasi geometrik dari Perkalian skalar



- Perkalian Vektor (hasilkali titik)

Jika c dan z adalah vektor baris berikut ini:

$$c = [c_1 \quad c_2 \quad c_3 \quad c_4]$$
$$z = [z_1 \quad z_2 \quad z_3 \quad z_4]$$

Maka **hasilkali titik** dari dua vektor tersebut adalah:

$$y = cz' = [c_1 \quad c_2 \quad c_3 \quad c_4]\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{bmatrix}$$
$$= c_1z_1 + c_2z_2 + c_3z_3 + c_4z_4$$

- Catatan pada Operasi Vektor

Sebuah vektor kolom u [m x 1] dan baris vektor v [1 x n] maka hasil kalinya uv mempunyai dimensi [m x n].

Contoh:

$$\underset{2\times1}{u} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad \underset{1\times3}{v} = [1 \quad 4 \quad 5]$$

$$\underset{2\times3}{uv} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}[1 \quad 4 \quad 5] = \begin{bmatrix} 3 & 12 & 15 \\ 2 & 8 & 10 \end{bmatrix}$$

- Perkalian Matriks

- Perkalian matriks membutuhkan Kondisi Kesesuaian **(conformability condition)**
- Kondisi Kesesuaian adalah bahwa untuk perkalian, dimensi kolom matriks dari matriks yang di awal (lead matrix) **A** harus sama dengan dimensi baris dari matriks yang di akhir (lag matrix) **B.**
- Jadi apabila A dan B adalah sembarang matriks dimana dimensi dari kedua matriks adalah A(mxn) dan B(pxq), perkalian matriks A dan B dapat dilakukan apabila **n = p** dan hasil dari perkalian tersebut adalah sebuah matriks yang berdimensi (mxq).
- Contoh:

$$AB = [a_{11} a_{12}]\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix}$$
$$= [a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} \quad a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \quad a_{11}b_{13} + a_{12}b_{23}]$$
$$= [c_{11} \quad c_{12} \quad c_{13}] = C$$

- Dimensi: A(1x2), B(2x3), maka C(1x3)

- Notasi Sigma Σ
- Simbol Yunani sigma yang digunakan untuk Penjumlahan adalah cara lain untuk menyajikan Perkalian Matriks.
- Dalam notasi ini digunakan, indeks penjumlahan biasanya disimbolkan i.
- Contoh:

Notasi untuk Hasilkali titik: $\sum_{i=1}^{3} a_i b_i = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$

C. Hukum Komutatif, Asosiatif dan Distributif

- Hukum Komutatif Penjumlahan Matriks: A + B = B + A

$$A + B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & b_{12}+a_{12} \\ a_{21}+a_{21} & b_{22}+a_{22} \end{bmatrix}$$

$$B + A = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11}+a_{11} & b_{12}+a_{12} \\ b_{21}+a_{21} & b_{22}+a_{22} \end{bmatrix}$$

- Perkalian Matriks, secara umum tidak bersifat komutatif. Sehingga, $AB \neq BA$, bahkan jika BA memenuhi kondisi kesesuaian.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix},\quad B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 1(0)+2(6) & 1(-1)+2(7) \\ 3(0)+4(6) & 3(-1)+4(7) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 13 \\ 24 & 25 \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} 0(1)+(-1)(3) & 0(2)+(-1)4 \\ 6(1)+7(3) & 6(2)+(7)4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -4 \\ 27 & 40 \end{bmatrix}$$

- Kekecualian: AB=BA jika dan hanya jika
  - B = sebuah skalar,
  - B = matriks identitas I, atau
  - B = invers dari matriks A, atau A^{-1}

D. Matriks Identitas dan Matriks Nol

- Matriks Bujursangkar

  Matriks segi adalah matriks yang memiliki jumlah ba

  jumlah kolom yang sama

  Contoh : $m_{2x2} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

- Matriks Identitas

Matriks identitas adalah matriks bujursangkar yang me

sama dengan 1 untuk diagonal utama dan nol untuk yang

Contoh : $I_{2x2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$I_{3x3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

- Matriks Nol

  Matriks Nol adalah matriks yang semua elemennya san nol.

  Contoh : $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

E. Matriks Transpos

- Transpos dari suatu matriks A= a_{ij} yang berukuran m x dinotasikan sebagai A^T yang berukuran n x m dimana s elemennya adalah $a^T_{ij} = a_{ji}$.

- Contoh:

$$A = \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix} \rightarrow A^T = \begin{bmatrix} p & r \\ q & s \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 8 & -9 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow A^T = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 8 & 0 \\ -9 & 4 \end{bmatrix}$$

- Sifat Matriks Transpos: $(A^T)^T = A$

F. Determinan dan Sifat Dasar Determinan

- Definisi: Determinan suatu matriks A dinotasikan sebagai $|A|$ adalah bilangan skalar yang dihubungkan secara tunggal dengan matriks tersebut.
- Contoh:

- Ordo 2 x 2

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \rightarrow |A| = ad - bc$$

- Ordo 3 x 3

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \rightarrow |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

- Secara umum dapat dihitung dengan **Ekspansi Laplace** dengan menggunakan Kofaktor:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Maka dengan Ekspansi Laplace didapat bahwa:

$$|A| = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} |C_{ij}| = skalar$$

Di mana:

$$|C_{ij}| \equiv (-1)^{i+j} |M_{ij}|$$

Dan matriks M_{ij} adalah matriks A tanpa baris ke-i dan kolom ke-j, yaitu:

$$|M_{11}| = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$|M_{12}| = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$|M_{13}| = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

- Contoh:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 6 \end{bmatrix}$$

$$|M_{11}| = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} = 3.6 - 4.1 = 14$$

$$|M_{12}| = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 1.6 - 4.2 = -2$$

$$|M_{13}| = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1.1 - 3.2 = -5$$

$$|A| = \sum_{j=1}^{n} a_{1j}(-1)^{i+j}|M_{ij}| = +2.14 - 5.(-2) + 1.(-5) = 28 + 10 - 5 = 33$$

- Sifat - sifat determinan

1. $|A^T| = |A|$
2. $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$
3. $|AB| = |A|\,|B|$

   Contoh :

   $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \longrightarrow |A| = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = 4.6 - 3.5 = 9$

   $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \longrightarrow |B| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 2.2 - 1.3 = 1$

   Maka: |A.B|=|A|.|B|=9.1=9

4. Apabila 1 baris atau 1 kolom matriks A dikalikan dengan s k, maka $|A^*| = k.|A|$, A^*=Matriks A yang 1 baris at kolomnya dikalikan dengan skalar k.

   Contoh :

   $$\begin{vmatrix} 15a & 7b \\ 12c & 2d \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 5a & 7b \\ 4c & 2d \end{vmatrix} = 3.2\begin{vmatrix} 5a & 7b \\ 2c & d \end{vmatrix} = 6(5ad - 14bc)$$

5. Pertambahan (pengurangan) dari suatu kelipatan baris man ke baris yang lain, TIDAK menyebabkan nilai deterr berubah.

   Contoh :

   $$\begin{vmatrix} a & b \\ c+ka & d+kb \end{vmatrix} = a(d+kb) - b(c+ka) = ad - bc = \begin{vmatrix} a \\ c \end{vmatrix}$$

G. Matriks Singular: Karakteristik dan Identifikasi

- Beberapa kasus, dimana suatu sistem persaman linear tidak mempunyai solusi:

1. Tidak konsisten dan tergantung linear (linear dependent)
   x + y = 8
   x + y = 9

   $$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 9 \end{bmatrix}$$

2. Tergantung linear (linear dependent)
   2x + y = 12
   4x + 2y= 24

   $$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 24 \end{bmatrix}$$

3. Terlalu banyak persamaan
   2x + 3y = 58
   3x + y = 18
   x + y = 20

   $$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 58 \\ 18 \\ 20 \end{bmatrix}$$

- Syarat suatu sistem persaman linear mempunyai solusi:

1. Matriks A bujur sangkar (nxn), sehingga: jumlah persamaan n = jumlah variable n.
2. Baris atau Kolom Matriks A bersifat saling bebas linear (linearly independent). Hal ini dipenuhi jika rank(A)=n (syarat cukup non-singular)
3. Jika syarat (1) dan (2) dipenuhi maka matriks A disebut **matriks nonsingular.**
   Jika tidak maka disebut sebagai **matriks singular**, yang mengakibatkan sistem persamaan linear tidak mempunyai solusi.

H. Tes Singularitas.

- Definisi: Misalkan diberikan matriks A berordo (nxn), matriks A dikatakan matriks singular, bila |A| = 0

- Identifikasi Matriks Singular

1. Tes Singularitas : Teknik Determinan

Contoh: Apakah matriks A singular?

$$A=\begin{bmatrix}7&5&3\\2&1&6\\4&2&12\end{bmatrix}$$

Jawab:

$$|A|=\begin{vmatrix}7&5&3\\2&1&6\\4&2&12\end{vmatrix}=7\begin{vmatrix}1&6\\2&12\end{vmatrix}-5\begin{vmatrix}2&6\\4&12\end{vmatrix}+3\begin{vmatrix}2&1\\4&2\end{vmatrix}$$

$$=7.(12-12)-5.(24-24)+3.(4-4)=0$$

Karena determinan matriks A sama dengan nol, maka matrik adalah matriks singular.

Sekarang perhatikan apa yang menyebabkan matriks A singu Pada matriks A, Baris ke-2 dan Baris ke-3 merupakan kelipat satu dengan yang lainnya. Oleh karena itu determinannya 0, berdasarkan sifat determinan ke-5.

2. Kebebasan linier (syarat cukup non-singular)

- Definisi : Kombinasi linier
  Suatu vektor w dikatakan kombinasi linier dari $V_1, V_2, V_3, \ldots$ Apabila w dapat diungkapkan sebagai berikut :

$$W = K_1V_1 + K_2V_2 + \ldots + KnVn = \Sigma\, KiVi$$

- Definisi : Kebebasan linier
  Misalkan V = { $V_1, V_2, V_3, \ldots, Vn$ } merupakan komponen ve dan K= { $K_1, K_2, K_3, \ldots, Kn$ } merupakan komponen parame skalar, maka perhatikan persamaan vektor dalam bentuk:

$$\Sigma\, K_iV_i = K_1V_1 + K_2V_2 + \ldots + KnVn = 0,$$

Persamaan ini akan mempunyai paling sedikit satu pemec trivial yaitu $K_1 = K_2 = K_3 = \ldots = Kn = 0$

➢ Jika $K_i = 0$, maka V_i adalah satu-satunya pemecahan m dikatakan bebas linier.Jika tidak, maka V bergantung li (singular)

- Contoh Tes Singularitas :

$B = \begin{bmatrix}3&2\\6&4\end{bmatrix}$, periksalah apakah B=non-singular ?

1. Gunakan teknik determinan:
   $|B| = 12\text{-}12 = 0 \rightarrow$ B singular

2. Gunakan teknik kebebasan linier
   Misalkan :
   V={ V_1, V_2 } adalah vektor-vektor kolom dari matriks B, s

$$V_1=\begin{bmatrix}3\\6\end{bmatrix} \quad dan \quad V_2=\begin{bmatrix}2\\4\end{bmatrix}$$

$$K_1V_1 + K_2V_2 = 0 \rightarrow K_1\begin{bmatrix}3\\6\end{bmatrix} + K_2\begin{bmatrix}2\\4\end{bmatrix} = 0$$

$3K_1 + 2K_2 = 0$
$6K_1 + 4K_2 = 0$
Dua Persamaan di atas identik, maka gunakan salah satu

Pilih Persamaan 1 :
$5\,K_1 + 2\,K_2 = 0$
$3\,K_1 = -2\,K_2$

Pemecahan ini menunjukkan adanya banyak solusi bagi persamaan $K_1V_1 + K_2V_2 = 0$. Contoh solusi selain $K_1 = K_2 = 0$, adalah $K_1 = -2$ dan $K_2 = 3$, sehingga V_1 dan V_2 tidak bebas linier (bergantung linier). Selanjutnya disimpulkan maka B adalah matriks singular.

- Latihan:

1. Periksa apakah matriks A berikut ini singular? $A=\begin{bmatrix}1&3&5\\7&2&1\\6&4&9\end{bmatrix}$

CHAPTER 4

MODEL-MODEL LINIER DAN ALJABAR MATRIKS (2)

A. Mencari Matriks Invers

- Suatu matriks A (nxn) mempunyai invers bila terdapat suatu matriks B, sehingga AB = BA = I. Matriks B disebut invers matriks A, ditulis A^{-1}, yang merupakan matriks bujur sangkar berdimensi n.
- Syarat keberadaan dari Matriks Invers adalah jika $|A| \neq 0$
- Kita tertarik untuk mencari invers, karena matriks invers dapat digunakan untuk memecahkan sistem persamaan linier Ax=d, yaitu: $x=A^{-1}d$

- Cara mencari Matriks Invers:

1. Mencari invers melalui transformasi elementer dengan reduksi Gauss (*Gaussian Reduction*). Prosedurnya adalah:
   a. Menggandengkan matriks A di depan matriks identitas: (A|I).
   b. Lakukan operasi baris elementer sehingga matriks A bertransformasi menjadi matriks identitas (I); di mana A^{-1} dapat dilihat di sebelah kanan garis vertikal.

Contoh:

$$A=\begin{pmatrix}3&7\\2&5\end{pmatrix}$$

$$(A\,|\,I)=\left(\begin{array}{cc|cc}3&7&1&0\\2&5&0&1\end{array}\right) \qquad \text{Kalikan baris pertama dengan 1/3}$$

$$(A|I)=\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 7/3 & 1/3 & 0\\ 2 & 5 & 0 & 1\end{array}\right)$$ Kalikan baris 1 dgn −2 dan tambahkan ke ba

$$(A|I)=\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 7/3 & 1/3 & 0\\ 0 & 1/3 & -2/3 & 1\end{array}\right)$$ Kalikan baris 2 dengan 3

$$(A|I)=\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 7/3 & 1/3 & 0\\ 0 & 1 & -2 & 3\end{array}\right)$$ Kalikan baris 2 dgn −7/3 dan tambahkan der baris pertama

$$(A|I)=\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 0 & 5 & -7\\ 0 & 1 & -2 & 3\end{array}\right)$$

2. Mencari Invers dengan Kofaktor. Prosedurnya adalah:

a. Tentukan matriks kofaktor A_c dari matriks A

$$A_c=\begin{bmatrix}|C_{11}| & |C_{12}| & \cdots & |C_{1n}|\\ |C_{21}| & |C_{22}| & \cdots & C_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ |C_{n1}| & |C_{n2}| & \cdots & |C_{nn}|\end{bmatrix}$$

Ingat kembali bahwa:

$$|C_{ij}|\equiv(-1)^{i+j}|M_{ij}|$$

Dan matriks M_{ij} adalah matriks A tanpa baris ke-i dan ko

b. Tentukan adjoint matriks A_j yang merupakan transpo: A_c, sehingga: $A_j = A_c^T$

c. Invers dari A diperoleh dengan mengalikan adjoint m: dengan determinan dari A, sehingga didapat:

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\,adjoint(A)$$

Contoh:

- Carilah Matriks Invers dari matriks A dengan metode kof

$$A=\begin{pmatrix}4 & 3\\ -2 & -1\end{pmatrix}$$

- Jika matriks A berukuran (nxn),maka M_{ij} merupakan sua cubmatriks dari A yang berukuran (n-1) x (n-1), di mana ke-i dan kolom ke-j (dari A) dihilangkan.

$$A=\begin{pmatrix}4 & 3\\ -2 & -1\end{pmatrix}\ maka\ \ M_{11}=-1;\ \ M_{12}=-2$$
$$M_{21}=3;\ \ M_{22}=4$$

- Minor dari suatu matriks A adalah $|M_{ij}|$ dan kofaktor dari adalah:

$$|C_{ij}|\equiv(-1)^{i+j}|M_{ij}|$$

Maka: $|C_{11}|\equiv(-1)^{1+1}|-1|=1.(-1)=-1$

$|C_{12}|\equiv(-1)^{1+2}|-2|=(-1).(-2)=2$

$|C_{21}|\equiv(-1)^{2+1}|3|=(-1).3=-3$

$|C_{22}|\equiv(-1)^{2+2}|4|=1.4=4$

- Maka:

$$A=\begin{pmatrix}4 & 3\\ -2 & -1\end{pmatrix}$$

Kofaktor $A_c=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ -3 & 4\end{pmatrix}$

Matriks Adjoint $A_j=A_c^T=\begin{pmatrix}-1 & -3\\ 2 & 4\end{pmatrix}$

Determinan $|A|=2$

Maka $A^{-1}=\dfrac{1}{\det(A)}A_j=\begin{pmatrix}-1/2 & -3/2\\ 1 & 2\end{pmatrix}$

B. Aturan Kramer (Cramer's Rule)

- Pendekatan lain untuk mencari solusi bagi **x** dari SPL **Ax = b** : ATURAN CRAMER.
- Misalkan sistem persamaan linear **Ax = b**, apabila diasumsikan |A|≠0, maka untuk mencari solusi digunakan metode determinan di mana:

$$x_j=\frac{|A_j|}{|A|}$$

Dimana $|A_j|$= determinan matriks A dengan kolom ke–j diganti vektor b.

- Contoh pecahkan sistem persamaan linear berikut ini:

$$3x_1+2x_2=80$$
$$2x_1+4x_2=80$$

$$\underset{A}{\begin{pmatrix}3 & 2\\ 2 & 4\end{pmatrix}}\ .\ \underset{x}{\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}}=\underset{b}{\begin{pmatrix}80\\ 80\end{pmatrix}}$$

Jawab:

$$x_1=\frac{\Delta 1}{\Delta}=\frac{\begin{vmatrix}80 & 2\\ 80 & 4\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}3 & 2\\ 2 & 4\end{vmatrix}}=20$$

$$x_2=\frac{\Delta 2}{\Delta}=\frac{\begin{vmatrix}3 & 80\\ 2 & 80\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}3 & 2\\ 2 & 4\end{vmatrix}}=10$$

C. Aplikasi pada Model Pasar dan Pendapatan Nasional

- Aplikasi dalam Model Pasar dan Pendapatan Nasional ak dipecahkan dengan mudah menggunakan aturan Crame matriks invers.
- Model Pasar (Market Model)
  Model dua komoditi dapat ditulis sebagai suatu sistem d persamaan linear, sbb:

$$c_1P_1 + c_2P_2 = -c_0$$
$$\gamma_1P_1 + \gamma_2P_2 = -\gamma_0$$

Akan dipecahkan dengan metode matriks Invers:

$$\begin{bmatrix} c_1 & c_2 \\ \gamma_1 & \gamma_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -c_0 \\ -\gamma_0 \end{bmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} c_1 & c_2 \\ \gamma_1 & \gamma_2 \end{vmatrix} = c_1\gamma_2 - c_2\gamma_1$$

$$A_c = \begin{bmatrix} \gamma_2 & -\gamma_1 \\ -c_2 & c_1 \end{bmatrix} \qquad adjA = \begin{bmatrix} \gamma_2 & -c_2 \\ -\gamma_1 & c_1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{c_1\gamma_2 - c_2\gamma_1}\begin{bmatrix} \gamma_2 & -c_2 \\ -\gamma_1 & c_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -c_0 \\ -\gamma_0 \end{bmatrix}$$

- Model Pendapatan Nasional
  $Y = C + I_0 + G_0$ $(a>0,\ 0<b<1)$
  $C = a + bY$
  Keterangan:

Variabel endogen= Y (pendapatan nasional), C (pengelua konsumsi)
Parameter = a, b
Variabel eksogen = I_0 (investasi),G_0(pengeluaran pemerin

Nilai ekuilibrium pendapatan nasional Ye dan eku pengeluaran konsumsi (Ce) akan dicari dengan Aturan Cr

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -b & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} Y \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_0 + G_0 \\ a \end{bmatrix}$$

Dengan Aturan Cramer:

$$Y_e = \frac{\begin{vmatrix} I_0 + G_0 & -1 \\ a & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -b & 1 \end{vmatrix}} = \frac{I_0 + G_0 + a}{1-b}$$

$$C_e = \frac{\begin{vmatrix} 1 & I_0 + G_0 \\ -b & a \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -b & 1 \end{vmatrix}} = \frac{a + b(I_0 + G_0)}{1-b}$$

Model Pendapatan Nasional dengan Pajak

- $Y=C+I_0+G$ $\quad 1Y - 1C - 1G = I_0$
- $C=a+b^*(Y-T_0)$ $\quad -bY + 1C + 0G = a-bT_0$
- $G=g^*Y$ $\quad -gY + 0C + 1G = 0$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -b & 1 & 0 \\ -g & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} Y \\ C \\ G \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_0 \\ a - bT_0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Carilah nilai Y, C, G dengan (a) Matriks Invers (b) Aturan Cramer

a. Dengan Matriks Matriks

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -b & 1 & 0 \\ -g & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -b & 1 & 0 \\ -g & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1-(b+g)$$

$$A_c = \begin{bmatrix} 1 & b & g \\ 1 & 1-g & g \\ 1 & b & 1-b \end{bmatrix} \qquad A_j = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b & 1-g & b \\ g & g & 1-b \end{bmatrix}$$

Maka:

$$\begin{bmatrix} Y \\ C \\ G \end{bmatrix} = \frac{1}{1-b-g}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b & 1-g & b \\ g & g & 1-b \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_0 \\ a - bT_0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Sehingga:

$$Y = \frac{I_0 + a - bT_0}{1-(b+g)}$$

$$C = \frac{bI_0 + (1-g)(a - bT_0)}{1-(b+g)}$$

$$G = \frac{g(I_0 + a - bT_0)}{1-(b+g)}$$

b. Dengan Aturan Cramer

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -b & 1 & 0 \\ -g & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1-(b+g)$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -b & 1 & 0 \\ -g & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1-(b+g)$$

$$|A_Y| = \begin{vmatrix} I_0 & -1 & -1 \\ a-bT_0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = I_0 + a - bT_0 \qquad Y^* = \frac{|A_Y|}{|A|} = \frac{I_0 + a - bT_0}{1-(b+g)}$$

$$|A_C| = \begin{vmatrix} 1 & I_0 & -1 \\ -b & a-bT_0 & 0 \\ -g & 0 & 1 \end{vmatrix} = bI_0 + (1-g)(a-bT_0) \qquad C^* = \frac{|A_C|}{|A|} = \frac{bI_0+(1-g)(a-}{1-(b+g)}$$

$$|A_G| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & I_0 \\ -b & 1 & a-bT_0 \\ -g & 0 & 0 \end{vmatrix} = g(a-bT_0+I_0) \qquad G^* = \frac{|A_G|}{|A|} = \frac{g(a-bT_0+I_0)}{1-(b+g)}$$

D. Aplikasi pada Model I-O

- Model Input-Output (I-O) menjawab pertanyaan: "Berapa tingkat output dari setiap industri n yang harus diproduksi c perekonomian, sehingga memenuhi total permintaan produ tersebut?"
- Susunan Model I-O adalah:

$$\begin{aligned} x_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots a_{1n}x_n + d_1 \\ x_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n + d_2 \\ &\vdots \\ x_n &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n + d_n \end{aligned}$$

Dengan:
x_i = tingkat output industri i
a_{ij} = input komoditi ke-i untuk menghasilkan output ke-j.
d_i = permintaan akhir untuk output ke-i

$$\begin{bmatrix} (1-a_{11}) & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ a_{21} & (1-a_{22}) & & -a_{2n} \\ a_{n1} & -a_{n2} & & -(1-a_{nn}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_n \end{bmatrix}$$

- Selanjutnya dapat diturunkan solusi untuk Model I-O denga Matriks invers sbb:

$$\begin{aligned} [A_0][x_i] + [d_i] &= [x_i] \\ [A_0][x_i] + [d_i] &= [I][x_i] \\ [d_i] &= [I][x_i] - [A_0][x_i] \\ [I][x_i] - [A_0][x_i] &= [d_i] \\ [I - A_0][x_i] &= [d_i] \end{aligned}$$

$$[x^*] = [I - A_0]^{-1}[d_i]$$

- Contoh Model I-O dalam numerik

Misal :

$$A = \begin{bmatrix} .15 & .25 \\ .20 & .05 \end{bmatrix}$$

Maka Model I-O menjadi:

$$\begin{bmatrix} .15 & .25 \\ .20 & .05 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} .15 & .25 \\ .20 & .05 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} .15 & .25 \\ .20 & .05 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} .15 & .25 \\ .20 & .05 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1-.15 & -.25 \\ -.20 & 1-.05 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} .85 & -.25 \\ -.20 & .95 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{.7575} \begin{bmatrix} .95 & .25 \\ .20 & .85 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 350 \\ 1700 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1000 \\ 2000 \end{bmatrix}$$

Latihan

1. Diberikan SPL sbb :
   $2X_1 + 3X_2 - X_3 = 0$
   $X_1 + X_2 + X_3 = 4$
   $3X_1 - 2X_2 + X_3 = 5$
   Tentukanlah solusi bagi X_1, X_2, X_3 dengan aturan cramer dan matriks invers

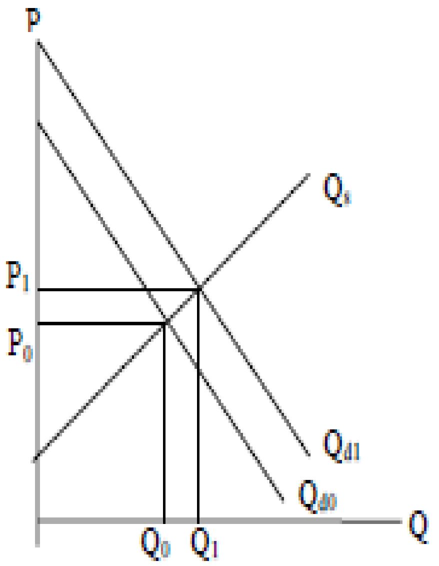
CHAPTER 6
ATURAN DERIVATIF, KONSEP DERIVATIF PARSIAL DAN APLIKASINYA PADA KOMPARATIF STATIK

A. Pengertian Komparatif Statik dan Konsep Derivatif

- Analisis Statis (ekuilibrium)yang dipelajari dalam bab yar mempunyai dua keterbatasan dalam:
  - Kasus pergeseran keadaan ekuilibrium
  - Kasus ekuilibrium tidak stabil (unstable equilibrium
- Kasus pergeseran keadaan ekuilibrium sebagai tanggapa terhadap perubahan variabel eksogen berkaitan dengan / Komparatif Statik.
- Dan pembahasan mengenai pencapaian dan kestabilan ekuilibrium terdapat dalam Analisis Dinamik.

- Di bab ini akan dibahas Komparatif Statik: studi dari kea ekuilibrium yang berbeda-beda dengan himpunan nilai parameter dan variabel eksogen yang berbeda-beda.
- Dimulai dengan mengasumsikan keadaan ekuilibrium aw
- Contoh:
  - Model Pasar Tertutup (P_0,Q_0) (terguncang)→ (P_1,Q_1
  - Model Pendapatan Nasional (Y_0, C_0) (terguncang)→

Contoh Diagram: Pergeseran pada Permintaan (demand)



- Perbedaan antara Analisis Ekuilibrium Statik dan Analisis Ekuilibrium Komparatif Statik:

1. Analisis Ekuilibrium Statik: $y^* = f(x)$
2. Analisis Ekuilibrium Komparatif Statik: $y_1^* - y_0^* = f(x_1) - f($ Di mana subskrip 0 menyatakan keadaan awal dan 1 meny keadaan selanjutnya.

- Misal $\Delta y = y_1 - y_0$ dan $\Delta x = x_1 - x_0$ atau $x_1 = x_0 + \Delta x$ Selanjutnya diketahui $y=f(x)$ maka: $\Delta y = f(x_1) - f(x_0)$ dan subtitusikan persaman x_1 didapat: $\Delta y = f(x0 + \Delta x) - f(x0)$

Bagi persamaan terakhir, kedua sisinya dengan Δx, maka akan didapat Hasil-Bagi Beda (difference quotient)

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Dan ambil limit Δx -> 0, maka akan didapat derivatif (derivative) dari fungsi $y=f(x)$:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 - \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

- Contoh:

Jika fungsi $y=3x^2-4$, maka cari Hasil-bagi Beda dan Derivatifnya:

a. $\frac{\Delta Y}{\Delta X} = \frac{f(X_0 + \Delta X) - f(X_0)}{\Delta X}$

$$f(x_0) = 3x_0^2 - 4$$

$$f(x_0 + \Delta x) = 3(x_0 + \Delta x)^2 - 4$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{3(x_0 + \Delta x)^2 - 4 - (3x_0^2 - 4)}{\Delta x}$$

$$= \frac{3x_0^2 + 6x_0 \Delta x + 3\Delta x^2 - 4 - 3x_0^2 + 4}{\Delta x}$$

$$= 6x_0 + 3\Delta x$$

b. $f'(X) = \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta Y}{\Delta X} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(X + \Delta X) - f(X)}{\Delta X}$

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 6x_0 + 3\Delta x$ maka $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 6x_0$

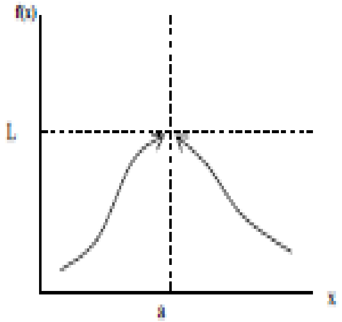
B. Derivatif dan Kemiringan (Slope) Kurva

- Intrepetasi geometric dari Hasil Bagi Beda (Difference Quotient)
- Apa yang terjadi bila kita mengubah besarnya $\Delta x = x_1 - x_0$? Bila diberikan kenaikan x yang kecil, maka y rata-rata akan diukur oleh kemiringan garis=Hasil Bagi Beda.
- Selanjutnya bila kenaikan x dikurangi terus-menerus akan diperoleh garis yang mendatar, sampai akhirnya dalam **limit $\Delta x \to 0$** akan diperoleh garis singgung fungsi y di x_0 (garis warna merah)

C. Konsep Limit dalam Kaitannya dengan Derivatif

- Konsep **Limit** fungsi (f(x), x→a) function menggambarkan bata nilai dari **f(x)** jika **x** mendekati a dari sebelah kanan dan sebel kiri. Nilai limit tersebut dapat berhingga (N), tak berhingga (infinite), tidak dapat didefinisikan (undefined)
- Notasi limit : $\lim_{x \to a} f(x) = L$

  Persamaan diatas dibaca : <u>limit dari fungsi f(x) untuk x mendel (dari arah kanan dan arah kiri) adalah L</u>
- Intrepetasi geometrik dari Konsep Limit:



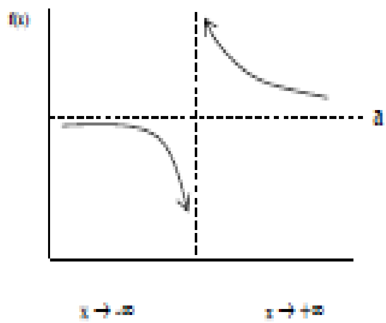
- **Horizontal Asymptote:** Garis y = a disebut asimptot horisc dari grafik f jika dan hanya jika :

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = a \qquad \text{atau} \qquad \lim_{x \to \infty} f(x) = a$$

  Di sini nilai x menuju Ketakhinggaan positif atau negative
- **Vertical Asymptote:** Garis x = a disebut asimptot vertikal c grafik f jika dan hanya jika :

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \infty \quad \lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty \quad \lim_{x \to a^-} f(x) = \infty \quad \lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty$$

- Interpretasi geometrik dari asimptot horisontal dan vertikal:



- Untuk menentukan limit dari suatu fungsi, kita dapat **mensubstitusikan** nilai x = a ke dalam fungsi f. Namun car tidak berlaku untuk semua jenis fungsi.
- Cara lain yang digunakan untuk menentukan limit dari fungs adalah dengan mengobservasi nilai dari a yang didekati dari yaitu :

$\lim_{x \to a^-} f(x) = L$ Menunjukkan bahwa limit f(x) ketika x mendekati a dari kiri

$\lim_{x \to a^+} f(x) = L$ Menunjukkan bahwa limit f(x) ketika x mendekati a dari kanan

Sehingga untuk menguji eksistensi dari limit ada, jika :

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = L \qquad \text{maka} \qquad \lim_{x \to a} f(x) = L$$

- **Contoh-contoh:**

1. $\lim_{x \to 2} x^3$

   $\lim_{x \to 2^-} x^3 = 8$ dan $\lim_{x \to 2^+} x^3 = 8$

   Maka: $\lim_{x \to 2} x^3 = 8$

2. $f(x) = \begin{cases} 2x & ; x \le 4 \\ 2x+3 & ; x > 4 \end{cases}$

   $\lim_{x \to 4^-} f(x) = 8$ dan $\lim_{x \to 4^+} f(x) = 11$

   karena $\lim_{x \to 4^-} f(x) = \lim_{x \to 4^+} f(x)$ maka $\lim_{x \to 4} f(x)$ *tidak ada*

3. $\lim_{v \to +\infty} g(v) = \lim_{v \to +\infty} \frac{2v+5}{v+1} = \lim_{v \to +\infty} 2 + \frac{3}{v+1}$

   $\lim_{v \to +\infty} g(v) = 2$

4. $\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = \frac{\cancel{(x-3)}(x+3)}{\cancel{(x-3)}} = x+3 = 3+3 = 6$

5. $f(x) = \begin{cases} 2x+2 & ; x \ge 2 \\ 6x-4 & ; x < 2 \end{cases}$

   Tentukan nilai $\lim_{x \to 2} f(x) = \ldots\ldots?$

   $\lim_{x \to 2^-} f(x) = 6(2) - 4$

   $\lim_{x \to 2^+} f(x) = 3(2) + 2$

   Jadi $\lim_{x \to 2} f(x) = 8$, karena limit kiri = limit kanan

SIFAT-SIFAT LIMIT

1. Jika $f(x) = c$ maka $\lim_{x \to a} (c) = c$
2. Jika $f(x) = x^n$ maka $\lim_{x \to a} x^n = a^n$
3. $\lim_{x \to a} c.f(x) = c.\lim_{x \to a} f(x)$

4. $\lim_{x \to a}[f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \to a}[f(x)] + \lim_{x \to a}[g(x)]$

5. $\lim_{x \to a}[f(x).g(x)] = \lim_{x \to a}[f(x)]\lim_{x \to a}[g(x)]$

6. $\lim_{x \to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)}$ dimana $\lim_{x \to a} g(x) \neq 0$

D. Fungsi kontinu dan Diferensiabel

- **KONTINUITAS PADA SUATU TITIK**
  Suatu fungsi f disebut kontinu pada x = a jika :
  1. Fungsi tersebut terdefinisi pada x = a
  2. Limit f(x) untuk x menuju a adalah f(a)

  Maka fungsi kontinu di titik x = a, jika:

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

- **KONTINUITAS SEPANJANG INTERVAL**
  Fungsi f kontinu sepanjang interval [a,b] jika kontinu pada set titik dalam interval [a,b].

- Contoh-contoh:

1. Periksalah Apakah f(x) = x^3 kontinu di x = 2 ?

   Jawab :

   1. f (2) = 8
   2. $\lim_{x \to 2^-} x^3 = 8$

      $\lim_{x \to 2^+} x^3 = 8$
   3. $\lim_{x \to 2} f(x) = f(2) = 8$

   Jadi f(x) kontinu di x=2

2. Periksa apakah fungsi q(v) di bawah ini kontinu di v=2 dan v=-

$$g(v) = \frac{v^3 + v^2 - 4v - 4}{v^2 - 4}$$

Fungsi rasional ini tidak dapat didefinisikan di v = 2 dan -2, meskipun terdapat limit ketika v → 2 atau -2. maka fungsi ini diskontinu di v = 2 dan -2.

- **Diferensiabel pada suatu titik**
  Suatu fungsi f disebut diferensiabel pada x = a jika :
  1. Hasil-Bagi Beda dari Fungsi f'(x)tersebut terdefinisi pada x =
  2. Limit Hasil-Bagi Beda untuk x menuju a adalah f'(a)

  Maka fungsi diferensiabel di titik x = a, jika:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

- Jika suatu fungsi diskontinu, maka fungsi tersebut tidak diferensiabel. **Tetapi Jika suatu fungsi tidak diferensiabel, maka fungsi tersebut <u>belum pasti</u> diskontinu.**
- Contoh:
  Periksa apakah fungsi y=f(x)=|x-2|+1 kontinu dan diferensiabel di x=2?

  a. Karena $\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^+} f(x) = 1 = f(1)$ maka y=f(x) kontinu

  b. Diferensiasi dari fungsi f(x)

$$\lim_{x \to 2}\frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \to 2}\frac{|x-2| + 1 - 1}{x - 2} = \lim_{x \to 2}\frac{|x-2|}{x - 2}$$

  Uji keberadaan limit:

$$\lim_{x \to 2^+}\frac{|x-2|}{x-2} = \lim_{x \to 2^+}\frac{x-2}{x-2} = \lim_{x \to 2^+} 1 = 1$$

$$\lim_{x \to 2^-}\frac{|x-2|}{x-2} = \lim_{x \to 2^-}\frac{-(x-2)}{x-2} = \lim_{x \to 2^-}(-1) = -1$$

  Karena $\lim_{x \to 2^-}\frac{|x-2|}{x-2} \neq \lim_{x \to 2^+}\frac{|x-2|}{x-2}$ maka fungsi f(x) tidak diferensiabel di x=2

Latihan:

1. $f(x) = \dfrac{x^2 - 9}{x - 3}$, periksalah apakah f(x) kontinu di x = 3?

2. $f(x) = \begin{cases} 2x + 2 & ; x \geq 2 \\ 6x - 4 & ; x < 2 \end{cases}$,periksalah apa f(x) diferensiabel di x = 2?

CHAPTER 5
ANALISIS KONMPARATIF STATIK DAN KONSEP DERIVATIF

REVIEW TURUNAN (DERIVATIVE)

- Diberikan fungsi y = f(x) maka turunan dari fungsi tersebut adalah

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

Dalam pertemuan sebelumnya, telah dipelajari cara menentuk turunan dengan pendekatan limit, sbb:
1. Tentukan difference quotient dari fungsi dengan menggunal persamaan :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

2. Tentukan limit dari difference quotient untuk $\Delta x \to 0$ denga menggunakan persamaan :

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

1. Dalam pertemuan ke-6 ini akan dipelajari aturan-aturan cara menentukan turunan (diferensiasi) **secara praktis.**

A. Aturan Diferensiasi untuk Fungsi dengan Satu Variabel

1. Fungsi Konstan

Jika f(x) = k maka f '(x) = $\frac{d}{dx}k = 0$

Bukti :

Jika $f(x) = k$, maka $f(N) = k$

$$f'(N) = \lim_{x \to N} \frac{f(x)-f(N)}{x-N} = \lim_{x \to N} \frac{k-k}{x-N} = 0$$

$f'(N) = 0$ maka $f'(x) = 0$

2. Fungsi Pangkat (Power Function)

Jika f(x) = x^n maka $\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$

Contoh :

Jika $y = x^4$, maka $\frac{dy}{dx} = 4x^3$

B. Aturan Diferensiasi yang Melibatkan Dua atau Lebih F dari variable yang Sama

3. Aturan Penambahan dan Pengurangan

Jika h(x) = f(x)±g(x) maka $\frac{d}{dx}[f(x) \pm g(x)] = f'(x) \pm g'(x)$

Contoh:

$C = Q^3 - 4Q^2 + 10Q + 75$

$$\frac{dC}{dQ} = \frac{d}{dQ}Q^3 - \frac{d}{dQ}4Q^2 + \frac{d}{dQ}10Q + \frac{d}{dQ}75$$

$$\frac{dC}{dQ} = 3Q^2 - 8Q + 10 + 0$$

4. Aturan Perkalian

Jika h(x) = f(x) g(x) maka $\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = g(x)f'(x) + f(x)g'(x)$

Contoh:

$R = PQ \qquad P = 15 - Q \qquad R = (15-Q)Q$

$$\frac{dR}{dQ} = Q\frac{d}{dQ}P + P\frac{d}{dQ}Q$$

$$= Q(-1) + (15-Q)(1) = 15 - 2Q$$

$R = 15Q - Q^2$

$$\frac{dR}{dQ} = 15 - 2Q$$

5. Jika f(x) = c.g(x) maka f '(x) = c. g'(x)

6. Aturan Pembagian

Jika h(x) = f(x)/g(x) maka $\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$

Contoh:

Hubungan antara Fungsi Biaya-Marjinal dan Biaya-Rata-rata

Cari Biaya Rata - rata minimum

$TC = C(Q)$	Biaya Total
$MC = C'(Q)$	Biaya Marjinal
$AC = C(Q)/Q$	Biaya Rata - rata

$$\frac{d}{dQ}\frac{C(Q)}{Q} = \frac{Q \cdot C'(Q) - C(Q) \cdot 1}{Q^2}$$

$$= \frac{1}{Q}\left[C'(Q) - \frac{C(Q)}{Q}\right] = \frac{1}{Q}[MC - AC]$$

jika $\frac{d}{dQ}\frac{C(Q)}{Q} = 0$, maka AC = MC

C. Aturan Diferensiasi yang Melibatkan Fungsi-fungsi dari Variabel yang Berbeda.

7. Aturan Rantai (Chain Rule)

Misalkan : $z = f(g(x))$, maka $\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx} = f'(y)g'(x)$

Contoh:
- Jika f(x) = $[u(x)]^n$ maka f'(x) = n.$[u(x)]^{n-1}$.u'(x)
- Jika f(x) = $e^{u(x)}$ maka f'(x) = u'(x)$e^{u(x)}$
- Jika f(x) = Ln[u(x)] maka f'(x)= u'(x)/u(x)

8. Aturan Rantai untuk multivariabel

Misalkan $z = f(g(x_1, \ldots, x_n))$, maka $\left.\frac{dz}{dx_i}\right|_{dx_{j \neq i}=0} = \frac{dz}{dy}\frac{\partial y}{\partial x_i}$

9. Aturan Fungsi Invers

Misal $y = f(x)$, dan $dy/dx = f'(x)$
dimana y adalah Fungsi Monoton Selalu Naik dari x
maka $x = f^{-1}(y)$ dan $dx/dy = f^{-1'}(y) = \frac{1}{dy/dx}$

Fungsi monoton adalah fungsi yang selalu dapat dicari fungsi inversny
karena untuk sembarang nilai x akan menghasilkan nilai y unik.

• Contoh :

$Q = f(P)$ $\qquad P = f^{-1}(Q)$

$Q_s = b_0 + b_1P$ $\qquad P = -b_0/b_1 + (1/b_1)Q_s$

(dimana $b_1 > 0$)

$dQ_s/dP = b_1$ $\qquad dP/dQ_s = 1/b_1 = \frac{1}{dQ_s/dP}$

- Sifat pemetaan satu-satu adalah unik untuk fungsi mon
- Definisi fungsi:
  fungsi: satu y untuk setiap x
  fungsi monoton: satu y untuk setiap x dan satu x
  setiap y (fungsi invers)
- Contoh:
  Jika x1 > x2 ⇒ f(x1) > f(x2) monoton naik
  Qs = b0 + b1P Fungsi Penawaran (diman
  P = -b0/b1 + (1/b1)Qs Invers Fungsi Penawaran

  Jika x1 > x2 ⇒ f(x1) < f(x2) monoton turun
  Qd = a0 - a1P Fungsi Permintaan (dimar
  P = a0/a1 - (1/a1)Qd Invers Fungsi Permintaan

D. Deferensiasi Parsial

- Misalkan fungsi z = f(x,y), turunan/diferensiasi parsial (
  terhadap x pada (x,y) adalah

$$f_x = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x}$$

- Turunan/diferensiasi parsial dari z terhadap y pada (x,y

$$f_y = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y}$$

- Interpretasi dari turunan/diferensiasi parsial

1. F_x menyatakan ekspresi dari KEMIRINGAN GARIS SING (tangent slope) yang parallel dengan bidang xz
2. F_y menyatakan ekspresi dari KEMIRINGAN GARIS SING (tangent slope) yang parallel dengan bidang yz

- Selanjutnya untuk fungsi multivariabel $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$

Maka turunan/diferensiasi parsial thd x_1 adalah:

$$\lim_{\Delta x_1 \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x_1} = \lim_{\Delta x_1 \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x_1, x_2, \ldots, x_n) - f(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\Delta x_1}$$

$$\equiv \frac{\partial y}{\partial x_1} \equiv f_1$$

Dan secara umum turunan parsial thd sembarang x_i adalah:

$$\lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x_i} \equiv \frac{\partial y}{\partial x_i} \equiv f_i, \quad i = 1 \ldots n$$

- Contoh:

1. Fungsi Produksi Cobb - Douglas

$(\alpha + \beta = 1)$ $\quad Q = 96K^{0.3}L^{0.7}$

$$MPP_K = \frac{dQ}{dK} = (0.3)96K^{-.7}L^{0.7} = 28.8K^{-.7}L^{0.7}$$

$$MPP_L = \frac{dQ}{dL} = (0.7)96K^{0.3}L^{-0.3} = 67.2K^{0.3}L^{-0.3}$$

2. $y = f(x_1, x_2) = 3x_1^2 + x_1x_2 + 4x_2^2$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = f_1 = 6x_1 + x_2$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = f_2 = 8x_2 + x_1$$

3. $y = f(u,v) = (u+v)\ (3u+2v) = (3u^2 + 5uv + 2v^2)$

$$\frac{\partial f}{\partial u} = 6u + 5v \qquad \frac{\partial f}{\partial v} = 5u + 4v$$

4. $y = f(x_1, x_2) = (2x_1 + x_2)^3 + (x_1 + 3x_2)^2$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 3(2x_1 + x_2)^2 .2 + 2(x_1 + 3x_2).1$$

$$= 6(2x_1 + x_2)^2 + 2(x_1 + 3x_2)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = 3(2x_1 + x_2)^2.1 + 2(x_1 + 3x_2).3$$

$$= 3(2x_1 + x_2)^2 + 6(x_1 + 3x_2)$$

E. Aplikasi pada Analisis Statis-Komparatif

Setelah memiliki pengetahuan mengenai aturan diferensiasi, selanjutnya akan diaplikasikan untuk menganalisis: Bagaiman ekuilibrium suatu variabel endogen akan berubah jika terjadi perubahan dalam setiap variabel eksogen atau parameter.

1. Model Pasar (Market Model)

Model Pasar sederhana dengan satu komoditi:

$$Q_d = a - bP \quad (a,b>0) \quad permintaan$$
$$Q_s = -c + dP \quad (c,d>0) \quad penawaran$$

Solusinya dengan metode matriks invers adalah:

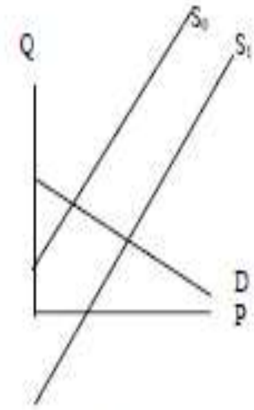
$$Q_d + bP = a$$
$$Q_s - dP = -C$$
$$\begin{bmatrix} 1 & b \\ 1 & -d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} Q \\ P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ -c \end{bmatrix}$$
$$\frac{1}{-(b+d)}\begin{bmatrix} -d & -b \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ -c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q^* \\ P^* \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} Q^* \\ P^* \end{bmatrix} = \frac{1}{-(b+d)}\begin{bmatrix} -d & -b \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ -c \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} Q^* \\ P^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{d}{(b+d)} & \frac{b}{(b+d)} \\ \frac{1}{(b+d)} & -\frac{1}{(b+d)} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ -c \end{bmatrix}$$

$$Q^* = \frac{ad-bc}{b+d} \quad P^* = \frac{a+c}{b+d}$$

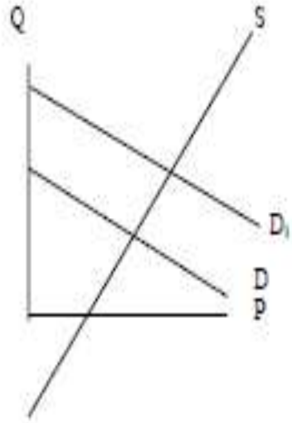
Untuk mencari bagaimana perubahan yang sangat kecil dalam parameter akan mempengaruhi nilai P* dan Q*, kita perlu mendiferensiasi secara parsial terhadap setiap parameter

$$\frac{\partial P^*}{\partial a} = \frac{1}{b+d} > 0 \qquad \frac{\partial Q^*}{\partial a} = \frac{d}{b+d} > 0$$
$$\frac{\partial P^*}{\partial c} = \frac{1}{b+d} > 0 \qquad \frac{\partial Q^*}{\partial c} = \frac{-b}{b+d} < 0$$
$$\frac{\partial P^*}{\partial b} = \frac{-(a+c)}{(b+d)^2} < 0 \qquad \frac{\partial Q^*}{\partial b} = \frac{-d(a+c)}{(b+d)^2} < 0$$
$$\frac{\partial P^*}{\partial d} = \frac{-(a+c)}{(b+d)^2} < 0 \qquad \frac{\partial Q^*}{\partial d} = \frac{b(a+c)}{(b+d)^2} > 0$$

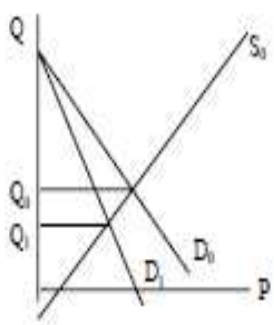
Interpretasi Geometrik dari derivatif parsial



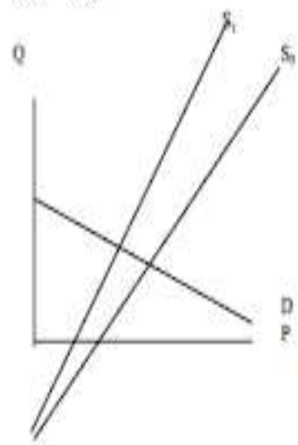
$$\frac{\partial Q}{\partial c} = \frac{-b}{b+d} < 0$$



$$\frac{\partial P}{\partial a} = \frac{1}{b+d} > 0$$



$$\frac{\partial Q}{\partial b} = \frac{-d(a+c)}{(b+d)^2} < 0$$



$$\frac{\partial P}{\partial d} = \frac{-(a+c)}{(b+d)^2} < 0$$

2. Model Pendapatan Nasional (National-income model)

Model Pendapatan Nasional dengan 3 variabel endoge, Y (Pendapatan Nasional), C (Konsumsi), dan T (Pajak):

$$Y = C + I_0 + G_0$$
$$C = a + b(Y-T); \quad b = MPC \quad (a>0; 0<b<1)$$
$$T = d + tY; \quad t = MPT \quad (d>0; 0<t<1)$$

Solusi sistem persamaan liniernya adalah:

$$Y^* = \frac{a - bd + I + G}{1-b+tb} \quad C^* = \frac{b(1-t)(I+G)+a-bd}{1-b+tb} \quad T^* = \frac{t(I+G)+ta+d(1-b)}{1-b+tb}$$

Dan diferensi parsial thd parameter G_0 adalah:

$$\frac{\partial Y^*}{\partial G_0} = \frac{1}{1-b+bt} > 0 \quad \frac{\partial C^*}{\partial G_0} = \frac{b(1-t)}{1-b+bt} > 0 \quad \frac{\partial T^*}{\partial G_0} = \frac{t}{1-b+bt} > 0$$

3. Model Input-Output

Penyelesaian atas model input-output terbuka muncul sebagai persamaan matriks $x=(I-A)^{-1}.d$ Misalnya matrik invers $(I-A)^{-1}$ maka penyelesaiannya dapat ditulis sebagai:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & {}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix}$$

Tingkat perubahan nilai x thd permintaan akhir eksogen d_1 da adalah:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11}d_1 + b_{12}d_1 \\ b_{21}d_2 + b_{22}d_2 \end{bmatrix}$$

jika $\partial x_1/\partial d_1 = b_{11}$, maka

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial x_1/\partial d_1 & \partial x_1/\partial d_2 \\ \partial x_2/\partial d_1 & \partial x_2/\partial d_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix}$$

Jadi $\partial x_j/\partial d_k = b_{jk} \quad j,k = 1,2$

F. Catatan atas Determinan Jacobian

- Gunakan Determinan Jacobian |J| untuk mengetest eksis dari ketergantungan fungsional antara fungsi-fungsi

$$|J| = \begin{vmatrix} \partial y_1/\partial x_1 & \partial y_1/\partial x_2 \\ \partial y_2/\partial x_1 & \partial y_2/\partial x_2 \end{vmatrix}$$

Dalam bentuk umumnya adalah:

$$|J| = \begin{vmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} & \cdots\cdots & \frac{\partial y_1}{\partial xn} \\ \frac{\partial y2}{\partial x2} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} & \cdots\cdots & \frac{\partial y_2}{\partial x_n} \\ \vdots & & \ddots & \\ \frac{\partial y_n}{\partial x_1} & \frac{\partial y_n}{\partial x_2} & \cdots\cdots & \frac{\partial y_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

- Penerapannya tidak terbata pada fungsi-fungsi linier
- Jika |J| = 0 maka fungsi nonlinier atau linier adalah salin tergantung (dependent) dan tidak ada solusi untuk sister persamaannya.

Contoh :

1. Periksalah apakah terdapat hubungan fungsional diantara fungsi-fungsi berikut :

$Y_1=2x_1+3x_2$

$Y_2=4x_1^2+12x_1x_2+9x_2^2$

$$|J| = \begin{vmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 8x_1+12x_2 & 18x_2+12x_1 \end{vmatrix}$$

$$= 24x_1+36x_2-(24x_1+36x_2) = 0$$

$\therefore y_1$ *dan* y_2 terdapat hubungan fungsional, secara tidak linier dalam hal ini $y_2 = y_1^2$

Latihan :

1. Periksalah apakah terdapat hubungan fungsional diantara fungsi-fungsi berikut :

$Y_1=3x_1^2+2x_2^2$

$Y_2=5x_1+1$

2. Periksalah apakah terdapat hubungan fungsional diantara fungsi-fungsi berikut :

$Y_1=3x_1^2+x_2$

$Y_2=9x_1^4+6x_1^2(x_2+4)+x_2(x_2+8)+12$

CHAPTER 7

KONSEP TOTAL DERIVATIF DAN APLIKASINYA PADA KOMPARATIF STATIK

A. Diferensial

- Masalah yang Dihadapi: Bagaimana analisis komparatif-statik jika tidak ada solusi bentuk-ringkas (reduced-form) dikarenakan oleh bentuk umum dari model?
- Contoh: Bagaimana menghitung $\partial Y / \partial T$ jika:

$$Y = C(Y, T_0) + I_0 + G_0$$

- Model ini mengandung fungsi umum, sehingga tidak bias diperoleh solusi bentuk ringkas yang **eksplisit.** Di sini T_0 dapat mempengaruhi C secara langsung atau secara tidak langsung melalui Y (artinya variabel dependen (yaitu Y dan T_0) dari fungsi C tidak bebas satu dengan yang lain). Hal ini melanggar asumsi derivatif parsial.

Solusi:
- Jawabannya adalah kembali ke konsep diferensiasi total. Berdasarkan proses diferensiasi total dapat membawa ke konse derivatif total.
- Oleh karena itu harus dipahami dahulu KONSEP DIFERENSIAL

- Simbol dy/dx yaitu simbol untuk derivatif dari fungsi y=f(x), seringkali dianggap sebagai entitas tunggal. Sekarang akan diinterpretasikan kembali sebagai suatu perbandingan dari 2 kuantitas dy dan dx. Simbol dy dan dx masing-masing disebut diferensial dari y dan x.

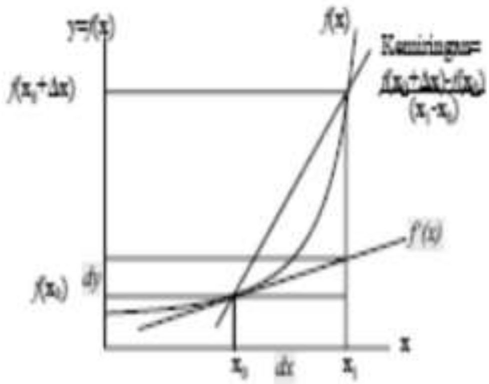
- Sebuah diferensial menggambarkan perubahan dalam y sebagai hasil dari perubahan dalam x dari sembarang nilai awal x dalam domain fungsi y = f(x).

- Berdasar definisi derivatif: $y = f(x) \quad \frac{dy}{dx} = \textit{kemiringan garis} = f'(x) = \lim$

Selanjutnya f'(x) dapat dipandang sebagai aproksimasi dari dy:

$$dy = f'(x)dx$$

Interpretasi Geometrik dari diferensial dy dan dx



- Istilah "diferensiasi" selanjutnya dapat berarti:
  - Proses mencari diferensial (dy)
    - (dy/dx) dipandang sebagai operator yang mengub menjadi (dy) ketika dx →0

$$dy = \left(\frac{dy}{dx}\right)dx$$

  - Proses mencari turunan/derivatif (dy/dx) atau
    - (dy/dx) dipandang sebagai diferensiasi terhadap x

$$\frac{(dy)}{(dx)} = \left(\frac{dy}{dx}\right)$$

Diferensial dan Elastisitas Titik
- Misal $Q_d = f(P)$ (fungsi permintaan)
- Elastisitas Permintaan terhadap Harga, didefinisikan sbg:

$$\varepsilon_d \equiv \frac{\%\Delta Q_d}{\%\Delta P} = \frac{(dQ_d)/Q_d}{(dP)/P} = \frac{\left(dQ_d/dP\right)}{Q_d/P} = \frac{\textit{Fungsi Maginal}}{\textit{Fungsi Rata-rata}}$$

$$\textit{elastik jika } |\varepsilon_d| > 1, \textit{ inelastik jika } |\varepsilon_d| < 1$$

Contoh:

1. Carilah elastisitas titik permintaan jika fungsi permintaan adalah Q=100-2P. Fungsi Marjinal dan fungsi rata-ratanya dari fungsi permintaan ini adalah : dQ/dP=-2 dan Q/P=(100-2P)/P, sehingga perbandingannya adalah: $\varepsilon_d \equiv \frac{\left(dQ_d/dP\right)}{Q_d/P} = \frac{-P}{50-P}$

B. Diferensial Total

- Konsep diferensial selanjutnya diperluas untuk fungsi dua atau lebih variabel bebas.
- Misal y = f (x1, x2), maka diferensial total dy adalah:

$$dy = \frac{\partial y}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial y}{\partial x_2}dx_2$$

Dengan notasi yang lain:

$$dy = f_1 dx_1 + f_2 dx_2$$

- Kasus yang lebih umum misalnya fungsi utilitas

$$U = U(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

- Diferensial total dari U adalah:

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial U}{\partial x_2}dx_2 + \cdots + \frac{\partial U}{\partial x_n}dx_n$$

- $\partial U/\partial x_i$ adalah utilitas marjinal dari barang x_i
- dx_i adalah perubahan dalam konsumsi dari barang x_i
- dU sama dengan jumlah dari perubahan marjinal dari setiap barang dalam fungsi konsumsi.

Contoh:

1. Carilah diferensial total dari fungsi $U(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^3 + x_1 x_2$

$$\frac{\partial U}{\partial x_1} = U_1 = 2x_1 + x_2 \qquad \frac{\partial U}{\partial x_2} = U_2 = 3x_2^2 + x_1$$

Dan

$$dU = (2x_1 + x_2)dx_1 + (3x_2^2 + x_1)dx_2$$

C. Aturan-aturan Diferensial

- Untuk mencari diferensial total dy, dari fungsi $y=f(x_1,x_2)$ car:
  1. Cari derivatif parsial f_1 dan f_2 terhadap x_1 dan x_2
  2. Substitusi f_1 dan f_2 dalam persamaan $dy = f_1.dx_1 + f_2.dx_2$

- Cara yang lain dengan menggunakan Aturan-aturan diferens
  Misal k adalah fungsi konstan; $u = u(x_1)$; $v = v(x_2)$
  1. $dk = 0$ (Aturan Fungsi Konstan)
  2. $d(c.u^n) = c.nu^{n-1}.du$ (Aturan Fungsi Pangkat)
  3. $d(u \pm v) = du \pm dv$ (Aturan Penambahan dan Pengura
  4. $d(uv) = v.du + u.dv$ (Aturan Perkalian)
  5. $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2}$ (Aturan Pembag

Contoh:

1. Cari diferensial total dari $z = \frac{x+y}{2x^2}$

a. $$dz = \frac{\partial z}{\partial y}dy + \frac{\partial z}{\partial x}dx$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{2x^2} + \frac{y}{2x^2}\right)$$
$$= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{2x^2}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{2x^2}\right) = \frac{1}{2x^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x+y}{x^2}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\frac{x^2\frac{\partial}{\partial x}(x+y) - (x+y)\frac{\partial}{\partial x}x^2}{((x)^2)^2}$$
$$= \frac{1}{2}\frac{x^2 - (x+y)2x}{x^4} = \frac{-(x+2y)}{2x^3}$$

Maka: $$dz = \frac{1}{2x^2}dy - \frac{x+2y}{2x^3}dx$$

b. Dengan Aturan diferensial:

$$d\left(\frac{x+y}{2x^2}\right) = \frac{1}{(2x^2)^2}\left[2x^2 d(x+y) - (x+y)d(2x^2)\right]$$
$$= \frac{1}{4x^4}\left[2x^2(dx+dy) - (x+y)4xdx\right]$$
$$= \frac{1}{4x^4}\left[2x^2dx + 2x^2dy - 4x^2dx - 4yxdx\right]$$
$$= \frac{1}{4x^4}\left[2x^2dy - 2x^2dx - 4yxdx\right]$$
$$= \frac{2x^2}{4x^4}dy - \frac{2x^2+4yx}{4x^4}dx$$
$$= \frac{1}{2x^2}dy - \frac{x+2y}{2x^3}dx$$

D. Derivatif Total

- Tidak seperti derivative parsial, derivative total tidak mensyaratkan fungsi eksplisit.
- Cara mencari derivatif total dari diferensial total adalah :
  - Diberikan fungsi $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$
  - Selanjutnya Diferensial Total dy adalah:

$$dy = \frac{\partial y}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial y}{\partial x_2}dx_2 + \cdots + \frac{\partial y}{\partial x_n}dx_n$$
$$dy = f_1dx_1 + f_2dx_2 + \ldots + f_ndx_n$$

  - Maka Derivatif Total dari y terhadap x_2 didapat dengan membagi kedua sisi dengan dx_2

$$\frac{dy}{dx_2} = f_1\frac{dx_1}{dx_2} + f_2 + \cdots + f_n\frac{dx_n}{dx_2}$$

- INGAT : Ada dua simbol yang mirip yang harus dibedakan, yaitu : derivatif total $\frac{dy}{dx_2}$ dan diferensial total $\frac{\partial y}{\partial x_2}$. Simbol yang terakhir hanya merupakan salah satu komponen dari simbol pertama.

- **Contoh:**

1. $y = f(x_1, x_2)$ $x_1 = 5u^2 + 3v$ $x_2 = u - 4v^3$
   Carilah dy/du dan dy/dv !

a. $dy = f_{x_1}dx_1 + f_{x_2}dx_2$

$$\frac{dy}{du} = f_{x_1}\frac{dx_1}{du} + f_{x_2}\frac{dx_2}{du}$$
$$= f_{x_1}.10u + f_{x_2}.1$$

b. $dy = f_{x_1}dx_1 + f_{x_2}dx_2$

$$\frac{dy}{dv} = f_{x_1}\frac{dx_1}{dv} + f_{x_2}\frac{dx_2}{dv}$$
$$= f_{x_1}.3 + f_{x_2}.(-12v^2)$$

2. $y = f(x, w) = 3x - w^2$ $x = g(w) = 2w^2 + w + 4$
   Carilah dy/dw !

$$dy = f_x dx + f_w dw$$

$$\frac{dy}{dw}=f_x\frac{dx}{dw}+f_w$$
$$=3.(4w+1)+(-2w)=10w+3$$

E. Derivatif dari Fungsi-fungsi Implisit

- Konsep diferensial total memungkinkan untuk mencari derivatif fungsi implisit.
- Fungsi eksplisit: $y = f(x)$ mudah diubah menjadi fungsi implicit $F(y, x)=0$ tetapi arah sebaliknya belum pasti.
- Contoh fungsi implisit $F(y,x)=y^2+x^2 -9 =0$ (Persamaan lingkaran
- Fungsi Implisit $F(y, x_1 \ldots, x_m) = 0$ dapat diubah menjadi Fungsi eksplisit: $y = f(x)$ bila memenuhi TEOREMA FUNGSI IMLISIT ber ini, yaitu :
  a) Jika F mempunyai derivative parsial kontinu $F_y, F_1, \ldots, F_m$ and $F_y \neq 0$
  b) Jika pada titik $(y_0, x1_0, \ldots, xm_0)$, dapat dikonstruksi lingkunga (neighborhood) N dari $(x_1 \ldots, x_m)$, contohnya dengan membatasi jangkauan (range) $y = f(x_1 \ldots, x_m)$, sehingga setiap vektor $(x_1 \ldots, x_m)$ dipetakan tepat satu nilai y.

  Maka:
  i) Terdapat fungsi y dalam bentuk $y = f(x_1 \ldots, x_m)$ dan
  ii) Masih memenuhi $F(y, x_1 \ldots, x_m)$ untuk setiap titik di N sedemil sehingga $F \equiv 0$

- Contoh aplikasi Teorema Fungsi Implisit:

1. Untuk $F(y,x)=y^2+x^2 -9 =0$ (Persamaan lingkaran),

$$y^2=9-x^2$$
$$y=\pm\sqrt{9-x^2}$$

Di sini dapat dibatasi jangkauan (range) y menjadi dua bagian agar fungsi diatas menjadi fungsi eksplisit, yaitu $(0,\infty)$ dan $(-\infty,0)$
Sehingga didapat :

$(0,\infty) \rightarrow y^+ = +\sqrt{9-x^2}$ dan
$(-\infty,0) \rightarrow y^- = -\sqrt{9-x^2}$

Derivatif dari Fungsi Implisit

Untuk mencari derivatif fungsi implisit dapat digunakan 2 cara :
1. Diubah dahulu menjadi fungsi eksplisit (kalau bisa) atau guna
2. Konsep diferensial total dalam bab sebelumnya

Contoh :
1. Carilah derivatif dy/dx dari fungsi $F(y,x)=y^2+x^2 -9 =0$

a. Diketahui fungsi eksplisitnya :
$(0,\infty) \rightarrow y^+ = +\sqrt{9-x^2}$

$$\frac{dy^+}{dx}=\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{9-x^2}}(-2x)=\frac{-x}{\sqrt{9-x^2}}=\frac{-x}{y^+}$$

dan
$(-\infty,0) \rightarrow y^- = -\sqrt{9-x^2}$

$$\frac{dy^-}{dx}=-\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{9-x^2}}(-2x)=\frac{x}{\sqrt{9-x^2}}=\frac{-x}{y^-}$$

b. Dengan diferensial total

$$dF = F_x dx + F_y dy$$
$$\frac{dF}{dx}=F_x+F_y\frac{dy}{dx}$$
$$0=F_x+F_y\frac{dy}{dx}$$
$$\frac{dy}{dx}=-\frac{F_x}{F_y}=-\frac{2x}{2y}=-\frac{x}{y}$$

2. Jika $F(z, x, y) = x^2z^2 + xy^2 - z^3 + 4yz = 0$, maka

$$\frac{dz}{dy}=-\frac{F_y}{F_z}=-\frac{2xy+4z}{2x^2z-3z^2+4y}$$

F. Statika Komparatif dari Model-model Fungsi Umum

1. Model Pasar (Market Model)

Misalkan fungsi permintaan dan penawaran dari sebuah komoditi adalah:

$$1)\ Q_d=D(P,Y_0) \qquad (D_p'<0;\ D_{Y_0}'>0)$$
$$2)\ Q_s=S(P,T_0) \qquad (S_p'>0;\ S_{T_0}'<0)$$

Di mana Y = Pendapatan, T_0 = pajak dan P = harga
Semua turunan bersifat kontinu.
Variabel Endogen : Q, P
Variabel Eksogen : Y_0, T_0

$$F_1(P,Q;Y_0,T_0)=D(\bar{P},Y_0)-\bar{Q}\equiv 0$$
$$F_2(P,Q;Y_0,T_0)=S(\bar{P},T_0)-\bar{Q}\equiv 0$$

Carilah $dQ^*/dY_0, dQ^*/dT_0, dP^*/dY_0, dP^*/dT_0$
Total derivatif nya :

$$D_p'd\bar{P}+D_{Y_0}'dY_0-d\bar{Q}=0$$
$$S_p'd\bar{P}+S_{T_0}'dT_0-d\bar{Q}=0$$

Atur sehingga :

$$D_p'd\bar{P}-d\bar{Q}=-D_{Y_0}'dY_0$$
$$S_p'd\bar{P}-d\bar{Q}=-S_{T_0}'dT_0$$

Ubah dalam bentuk matriks :

$$\begin{bmatrix} D_P' & -1 \\ S_P' & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} dP \\ dQ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -D_{Y_0}' & 0 \\ 0 & -S_{T0}' \end{bmatrix}\begin{bmatrix} dY_0 \\ dT_0 \end{bmatrix}$$

Hitung tanda dari Determinan Jacobiannya :

$$|J| = \begin{vmatrix} D_P' & -1 \\ S_P' & -1 \end{vmatrix} = S_P' - D_P' > 0$$

Hitunglah Persamaan derivatif total – parsial terhadap Y_0 dan T_0 matriks di atas:

$$\begin{bmatrix} D_P' & -1 \\ S_P' & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{dP}{dY_0} \\ \frac{dQ}{dY_0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -D_{Y_0}' \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} D_P' & -1 \\ S_P' & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{dP}{dT_0} \\ \frac{dQ}{dT_0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -S_{T_0}' \end{bmatrix}$$

Dapatkan solusinya dengan metode Matriks Invers :

a. $$\frac{1}{S_P' - D_P'}\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -S_P' & D_P' \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -D_{Y_0}' \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{dP}{dY_0} \\ \frac{dQ}{dY_0} \end{bmatrix}$$

Sehingga di dapat :

$$\frac{dP}{dY_0} = \frac{D_{Y_0}'}{S_P' - D_P'} > 0; \quad dan \quad \frac{dQ}{dY_0} = \frac{S_P' D_{Y_0}'}{S_P' - D_P'} > 0;;$$

b. $$\frac{1}{S_P' - D_P'}\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -S_P' & D_P' \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ -S_{T_0}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{dP}{dT_0} \\ \frac{dQ}{dT_0} \end{bmatrix}$$

Sehingga didapat :

$$\frac{dP}{dT_0} = \frac{-S_{T_0}'}{S_P' - D_P'} > 0; \quad dan \quad \frac{dQ}{dT_0} = \frac{-D_P' S_{T_0}'}{S_P' - D_P'} < 0$$

CHAPTER 8
OPTIMISASI TANPA KENDALA AN APLIKASINYA
(FUNGSI TANPA SATU VARIABEL)

A. Nilai Optimum dan Nilai Ekstrem

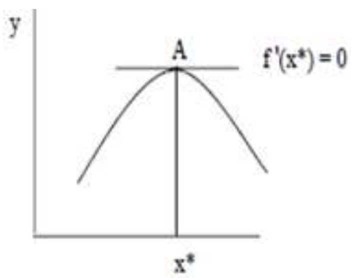
Ekuilibrium Tujuan vs. Ekuilibrium Non-Tujuan:

1. **Ekuilibrium Non-Tujuan**: Terjadi akibat keseimbangan impersonal antara kekuatan yang berlawanan dan tidak membutuhkan usaha siapun untuk mencapai keadaan ini.
2. **Ekuilibrium Tujuan**: Posisi optimum bagi unit ekonomi tertentu (contohnya pegawai atau perusahaan), di mana unit ekonomi tersebut akan berusaha keras mencapai keadaan ini → Optimasi

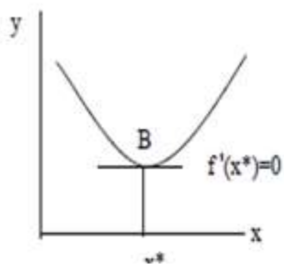
- Selanjutnya dalam proses Optimasi, perlu diidentifikasikan **Fungsi Objektif** yang akan dioptimumkan.
- Dalam fungsi objektif tersebut, variabel tak-bebas nya akan menjadi sasaran proses maksimasi atau minimasi
- Contoh: memaksimumkan Laba $\pi = R(Q) - C(Q)$, di sini kuantitas Q menjadi satu-satunya variabel bebas. Sehingga persoalan optimasinya adalah pemilihan tingkat Q yang akan memaksimumkan π

B. Maksimum dan Minimum Relatif : Uji Derivatif Pertama

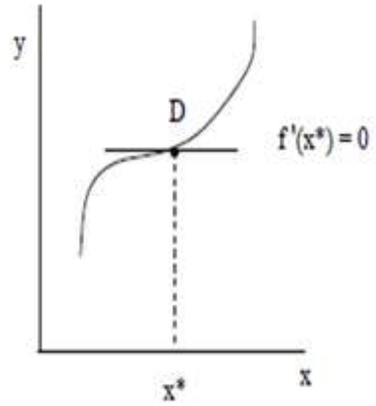
- Misal Fungsi Tujuan dalam bentuk umum: $y=f(x)$
- <u>Nilai kritis</u> dari x di x_0 adalah jika $f'(x_0) = 0$
- Dan <u>nilai stasioner</u> dari y adalah $f(x_0)$
- <u>Titik stasioner</u> adalah titik dengan koordinat x_0 dan $f(x_0)$
- Titik stasioner ini sebagai calon untuk titik ekstrem.
- **Uji derivatif pertama untuk ekstrem relatif** adalah $f'(x^*) = 0$ dan nilai dari $f(x^*)$ adalah:
  1. Maksimum relatif jika derivatif $f'(x)$ berubah tanda dari positif menjadi negatif dari sebelah kiri x^* ke sebelah kanannya.



  2. Minimum relatif jika $f'(x)$ berubah tanda dari negatif menjadi positif dari sebelah kiri x^* ke sebelah kanannya



3. Bukan maksimum relatif atau minimum relatif jika f '(x) mempunyai tanda yang sama baik di sebelah kiri maupun di sebelah kanan titik x*. (titik ini dikenal sebaga titik belok (*inflection point*)

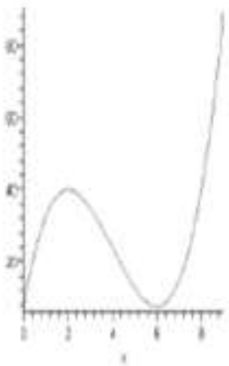


- Contoh: Carilah titik ekstrem dari: $y = f(x) = x^3 - 12x^2 +$

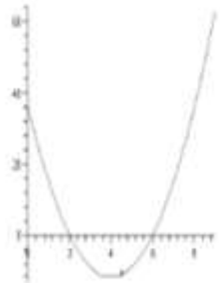
$$f'(x) = 3x^2 - 24x + 36 = 0 \qquad \textit{derivatif ke}-1$$
$$f'(x) = 3(x^2 - 8x + 12) = 0$$
$$(x-2)(x-6) = 0$$
$$x_1^* = 2; \qquad x_2^* = 6 \qquad \textit{titik}-\textit{titik ekstrem}$$

kiri	$y^* = f(x_i^*)$	*kanan*	
$f(1.5) = 38.375$	$f(2) = 40$	$f(2.5) = 38.625$	max
$f'(1.5) = 6.75$	$f'(2) = 0$	$f'(2.5) = -5.25$	$(+,-)$
$f(5.5) = 9.375$	$f(6) = 8$	$f(6.5) = 9.625$	min
$f'(5.5) = -5.25$	$f'(6) = 0$	$f'(6.5) = 6.75$	$(-,+)$

Grafik $y = x^3 - 12x^2 + 36x + 8$



Grafik Derivatif ke-1 nya: $f'(x) = 3x^2 - 24x + 36$



C. Derivatif Kedua dan Derivatif yang lebih tinggi

- Misal Fungsi Tujuan dalam bentuk umum: y=f(x)
- Derivatif ke-1 f '(x) atau dy/dx merupakan fungsi x. Selanjut jika fungsi ini kontinu dan mulus (smooth) maka ia akan dap didiferensiasi lebih lanjut.
- Hasil dari diferensiasi ini disebut sebagai derivatif ke-2 dari u f dan dinotasikan sebagai f ''(x) atau d^2y/dx^2.
- Derivatif ke-2 ini dapat didiferensiasi lebih lanjut terhadap x untuk menghasilkan derivatif ke-3, yaitu f '''(x) dan seterusn dengan proses ini didapat derivatif ke-n: $f^{(n)}(x)$ atau d^ny/dx^n
- Contoh : Carilah Derivatif ke-3 dari fungsi $R = 1200 - 2Q^2$

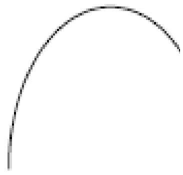
$$R = 1200 - 2Q^2 \qquad \text{fungsi asal}$$
$$\frac{dR}{dQ} = 1200 - 4Q \qquad \text{derivatif ke - 1}$$
$$\frac{d}{dQ}\frac{dR}{dQ} = \frac{d^2R}{dQ^2} = -4 \qquad \text{derivatif ke - 2}$$
$$\frac{d}{dQ}\frac{d^2R}{dQ^2} = \frac{d^3R}{dQ^3} = 0 \qquad \text{derivatif ke - 3}$$

- Contoh : Carilah Derivatif ke-5 dari fungsi $f(x) = 4x^4 - x^3 + 17x^2 + 3x - 1$

$$f(x) = 4x^4 - x^3 + 17x^2 + 3x - 1 \qquad \textit{fungsi fawal}$$
$$f'(x) = 16x^3 - 3x^2 + 34x + 3 \qquad \textit{derivatif ke}-1$$
$$f''(x) = 48x^2 - 6x + 34 \qquad \textit{derivatif ke}-2$$
$$f^{(3)}(x) = 96x - 6 \qquad \textit{derivatif ke}-3$$
$$f^{(4)}(x) = 96 \qquad \textit{derivatif ke}-4$$
$$f^{(5)}(x) \equiv 0 \qquad \textit{derivatif ke}-5$$

- *f* '(x) mengukur kecepatan perubahan dari fungsi f(x)
  - yang berarti kemiringan garis singgung (slope) baik meningkat (increasing) atau menurun (decreasing).
- *f* ''(x) mengukur kecepatan perubahan dari fungsi *f* '(x)
  - yang berarti kecekungan dari kurvanya.

Jika $f''(x^*) < 0$,
maka x^* adalah maksimum relatif



Jika $f''(x^*) > 0$,
maka x^* adalah minimum relatif

- Berdasar criteria di atas maka dalam contoh $R = 1200 - 2Q^2$ ekstremnya dapat dicari sbb:

$$
\begin{array}{ll}
R = 1200 - 2Q^2 & \textit{fungsi asal} \\
\frac{dR}{dQ} = 1200 - 4Q = 0 & \textit{derivatif ke}-1 \\
Q^* = 300 & \textit{titik ekstrem} \\
\frac{d}{dQ}\frac{dR}{dQ} = \frac{d^2R}{dQ^2} = -4 & \textit{derivatif ke}-2 \\
f''(Q) < 0 \quad \rightarrow & \text{maximum}
\end{array}
$$

D. Uji Derivatif Kedua

- **Uji derivatif kedua untuk ekstrem relatif** adalah f '(x*) = 0 dan nilai dari f(x*) adalah:
  1. Maksimum relatif jika nilai f ''(x*)<0
  2. Minimum relatif jika nilai f ''(x*)>0
  3. Tidak dapat disimpulkan jika nilai f ''(x*)=0

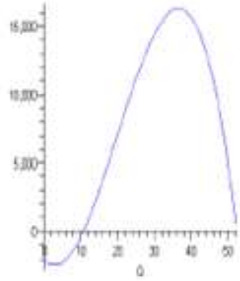
- Cembung Murni: jika diambil sembarang sepasang titik M pada kurvanya dan hubungkan keduanya dengan garis lu maka segmen garis MN harus terletak **dibawah** kurva ke pada titik MN.
- Uji: jika *f* ''(x) bernilai negatif untuk semua x, maka f(x) cembung murni.

- Contoh: Fungsi Laba π = R(Q) - C(Q),

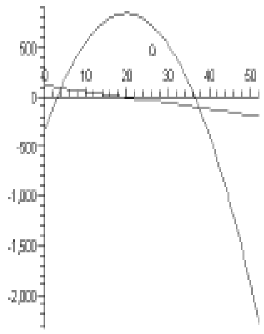
$$
\begin{array}{ll}
R = 1200Q - 2Q^2 & \textit{fungsi pendapatan} \\
C = Q^3 - 61.25Q^2 + 1528.5Q + 2000 & \textit{fungsi biaya} \\
\pi = R\text{-}C = 1200Q - 2Q^2 - \left(Q^3 - 61.25Q^2 + 1528.5Q + 2000\right) & \text{fungsi laba} \\
\textit{maka} & \\
\pi = -Q^3 + 59.25Q^2 - 328.5Q - 2000 & \\
\frac{d\pi}{dQ} = -3Q^2 + 118.5Q - 328.5 = 0 & \textit{derivatif ke-1}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lll}
Q_1^* = 3 & Q_2^* = 36.5 & \textit{titik ekstrem} \\
\frac{d^2\pi}{dQ^2} = -6Q + 118.5 & & \textit{derivatif ke-2} \\
\pi''(3) = 100.5 & \pi''(36.5) = -100.5 & \\
\pi''(Q_1^*) > 0 \rightarrow \min & \pi''(Q_2^*) < 0 \rightarrow \max & \textit{uji derivatif ke-2}
\end{array}
$$

Grafik fungsi laba $\pi = -Q^3 + 59.25Q^2 - 328.5Q - 200$



Grafik derivatif ke-1 dari fungsi laba : $\frac{d\pi}{dQ} = -3Q^2 + 118.5Q - 328.5$



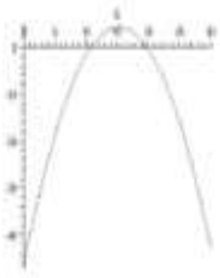
- Contoh: Kompetisi Tidak Sempurna

$$
\begin{array}{ll}
AR = 8000 - 23Q + 1.1Q^2 - 0.018Q^3 & \text{average rev. function} \\
R = AR * Q = \left(8000 - 23Q + 1.1Q^2 - 0.018Q^3\right)Q & \text{total revenue function} \\
MR = Qf'(Q) + f(Q) & \text{marginal rev function}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ll}
MR = Q\left(-23 + 2.2Q - .054Q^2\right) + \left(8000 - 23Q + 1.1Q^2 - 0.018Q^3\right)(1) & \\
\quad = 8000 - 46Q + 3.3Q^2 - 0.072Q^3 & \textit{derivatif ke}-1 \\
MR' = f'(Q) + Qf''(Q) + f'(Q) = 0 & \text{product rule} \\
MR' = -46 + 6.6Q - 0.216Q^2 = 0 & \textit{derivatif ke}-2 \\
Q_1^* = 10.76 \quad Q_2^* = 19.79 & \textit{titik ekstrem} \\
MR''(Q) = 6.6 - 0.432Q & \textit{derivatif ke}-3 \\
MR''(10.76) = 1.95 \quad MR''(19.79) = -1.94 & \\
MR''(Q_1^*) > 0 \rightarrow \min. \quad MR''(Q_2^*) < 0 \rightarrow \max. & \textit{uji kecembungan}
\end{array}
$$

total revenue function

derivatif ke



derivatif ke − 2

derivatif k

Latihan :

1. Carilah maksimum dan minimum relatif dengan uji derivatif

$$f(x) = \frac{2x}{1-2x} \quad x \neq 1/2$$

PERTEMUAN 9

OPTIMASI PERTUMBUHAN DAN APLIKASINYA

A. Fungsi Eksponensial

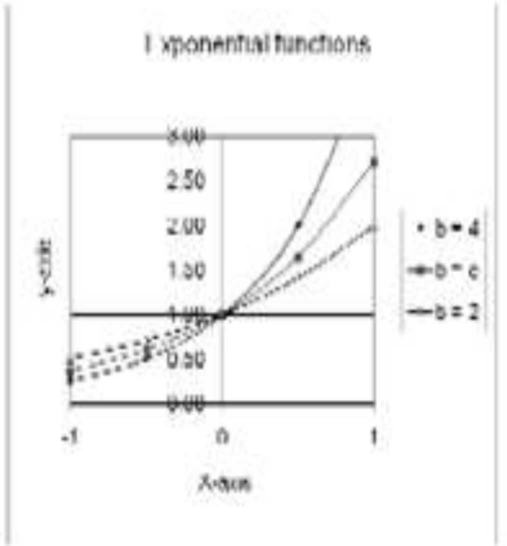
- Bentuk Fungsi Eksponesial: $y = f(x) = b^x$
  di mana basis $b > 1$, x adalah eksponen, $f(x) \in \Re$
  Note: Istilah eksponen (x) berarti pangkat terhadap sebu
  basis bilangan (b).

Batasan Nilai b:

- $b \neq 1$ dan $b \neq 0$, karena
  $f(x) = 1^x = 1$; $f(x) = 0^x = 0$, → konstan
- $0 < b < 1$ dikecualikan, karena dapat dinyatakan dalam eksponen negatif
- $b<0$ dikecualikan, karena berakibat banyak nilai $f(x)$ denga adalah bilangan real menjadi bilangan imajiner, contohnya
- Basis yang populer adalah: e dan 10
- Secara umum fungsi eksponensial dirumuskan dalam bentu
  y = variabe tak bebas
  b = basis
  t = variabel bebas
  a = faktor skala vertikal / aktor 'penekan'
  c = faktor skala horisontal / faktor 'pemerluas'

$$y = ab^{ct}$$

Grafiknya:



- e adalah basis yang disukai (preferred base)
  (e) = 2.71828..., merupakan bilangan irasional, yang mempunyai karakteristik sbb:

Derivatif dari $y = b^x$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{b^{x+\Delta x} - b^x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{b^x b^{\Delta x} - b^x}{\Delta x}$$

$$= b^x \lim_{\Delta x \to 0} \frac{b^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = b^x (?)$$

di $x = 0$, apa basis b yang mempunyai kemiringan $f'(0) = 1$ ketika $\Delta x \to 0$

Jawabnya:

$$f'(0) = b^0 \lim_{\Delta x \to 0} \frac{b^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = \ln b$$

Perhatikan tabel basis b, *mana* yang menghasilkan

$f'(0) = 1$ ketika $\Delta x \to 0$?

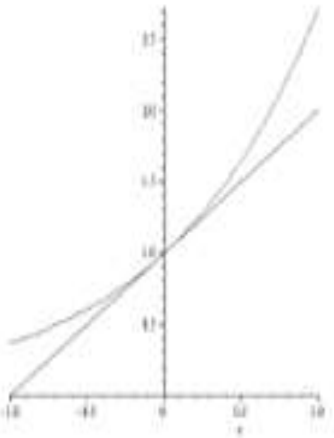
	base b			
Δx	2	2.718282	3	10
0.1	0.7177	1.0517	1.1612	2.5893
0.01	0.6956	1.0050	1.1047	2.3293
0.001	0.6934	1.0005	1.0992	2.3052
0.0001	0.6932	1.0001	1.0987	2.3029
0.00001	0.6931	1.0000	1.0986	2.3026

Jadi bilangan tersebut adalah (e) = 2.71828...

$$sehingga: \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{\Delta x}-1}{\Delta x} = 1$$

$$f'(x) = e^x \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{\Delta x}-1}{\Delta x} = e^x(1) = e^x$$

Grafik for $f(x)=e^x$



$f(x) = e^x$ *dimana* b = e
domain dari x : $(-\infty, \infty)$
jangkauan dari y : $(0, \infty)$
perpotongan sb - y : 1
perpotongan sb - x : *tidak ada*
asimptot horisontal : y = 0 ketika x
Pada (0,1), nilai dari $f'(0) = 1$

- Karakteristik fungsi eksponensial natural:

Derivatif dari $y = e^t$ adalah :

$$\frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}e^t = \frac{d(e^t)}{d(t)}\frac{d(t)}{dt} = (e^t)(1) = e^t = y$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d}{dt}e^t\right) = \frac{d}{dt}e^t = e^t$$

Sedang derivatif dari $V = Ae^{rt}$ (fungsi eksponen natural secara umum)

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dAe^{rt}}{dt} = \frac{d(Ae^{rt})}{d(rt)}\frac{d(rt)}{dt} = r(Ae^{rt}) = rV$$

B. Fungsi Eksponensial Natural dan Masalah Pertumbuha

Bilangan e mempunyai hubungan dengan fungsi f(x)=(1+1/m

$$\text{Basis } e \equiv \lim \left(1+\frac{1}{m}\right)^{m}$$

- Untuk mencari bilangan e dapat digunakan aproksimasi dengan deret maclaurin:

Deret maclaurin dari e^x ketika $x_0 = 0$:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + f''(x_0)/2!\,(x-x_0)^2 + \ldots + f^{(n)}(x_0)/n!\,(x-x_0)^n + R$$

diketahui : $e^x = f(x) = f'(x) = f''(x) \ldots$, maka :

$$f(x) = e^{x_0} + e^{x_0}(x) + \frac{e^{x_0}}{2!}(x)^2 + \ldots + \frac{e^{x_0}}{n!}(x)^n + R$$

karena $x_0 = 0 \rightarrow e^{x_0} = e^0 = 1$

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}(x)^2 + \frac{1}{6}(x)^3 + \ldots + R$$

pada x = 1 deret Maclaurin konvergen ke bilangan e

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \ldots = 2.71828\ldots$$

- Bunga majemuk dan Fungsi Ae^{rt}

Rumus bunga majemuk :

$$V(m) \equiv A\left(1+\frac{r}{m}\right)^{mt}$$

Dengan A=investasi awal, r=suku bunga nominal, m=jumlah pemajemukan dalam 1 tahun, dan t=jumlah tahun

Denga memanipulasi rumus bunga majemuk di atas sbb:

$$V(m) \equiv A\left[\left(1+\frac{r}{m}\right)^{m/r}\right]^{rt}$$

$$= A\left[\left(1+\frac{1}{w}\right)^{w}\right]^{rt} \qquad w \equiv \frac{m}{r}$$

Diketahui bahwa $\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^m = e$ maka proses pemajemukan kontinu adalah:

$$V(m) = \lim_{m\to\infty} A\left[\left(1+\frac{r}{m}\right)^{m/r}\right]^{rt} = Ae^{rt}$$

Jadi intrepretasi dari $y = Ae^{rt}$: adalah nilai dari sebuah investasi $A pada suku bunga nominal r, dan dimajemukkan secara kontinu dalam t kali atas periode investasi (# hari, bulan, atau tahun) (pertumbuhan dalam investasi)

- **Laju Pertumbuhan Sesaat**

Misal V adalah nilai di masa depan dari investasi awal (A) atas waktu (t) pada suku bunga (r) yang dimajemukkan secara kontinu, maka didapat :

$V = Ae^{rt}$	Future value (V)
$\frac{dV}{dt} = rAe^{rt} = rV$	Tingkat Perubahan V (dV/dt)
$r = \frac{dV/dt}{V}$	*Laju Pertumbuhan* (r)
$V = \frac{dV/dt}{r}$	Hubungan V dengan (dV/dt)

- **Pertumbuhan Kontinu vs. Pertumbuhan Diskrit**

Misal proses pemajemukan bunga diskrit sbb:
$A, A(1+i), A(1+i)^2, A(1+i)^3$ ...
Dengan A=investasi awal, i=suku bunga. Misalkan b=(1+i), maka secara umum dapat diringkas menjadi $A(b)^t$, dengan t=jumlah periode.

Selanjutnya dapat dicari bilangan r sehingga didapat:

$$(1+i)=b=e^r$$

Sehingga kita dapat mengubah bentuk diskrit dalam bentuk kontinu dengan fungsi eksponen natural :

$$A(1+i)^t = A(b)^t = A(e)^{rt}$$

Akibatnya kasus diskrit dapat dianalisis melalui kasus kontinu. Ini menjelaskan mengapa fungsi eksponensial natural digunakan secara luas dalam analisis ekonomi

- **Pendiskontoan dan Pertumbuhan Negatif**

Nilai masa depan (future) :
V=*f*(pemajemukan dari nilai sekarang (present) A)

$$V = Ae^{rt}$$

Nilai Sekarang (present)
A= *f*(pendiskontoan nilai masa depan (future) V)

$$A = Ve^{-rt}$$

Di sini e^{-rt} disebut faktor diskonto (discount factor) dan −r disebut faktor penuaan (rate of decay)

C. Logaritma

- **Arti Logaritma**

$$Y=b^t \Leftrightarrow t=\log_b(Y)$$

Contoh:

t	$y=10^t$
3	1000
2	100
1	10
0	1
-1	0.1
-2	0.01
-3	0.001

$Log_{10}1000 = 3$
$Log_{10}10 = 1$
$Log_{10}1 = 0$
$Log_{10}0.1 = -1$
$Log_{10}0.01 = -2$
$Log_{10}0.001 = -3$

- **Log Biasa dan Log Natural**

Eksponen biasa : $Y = b^t$ $\Leftrightarrow$ Log biasa : $t = \log_b Y$

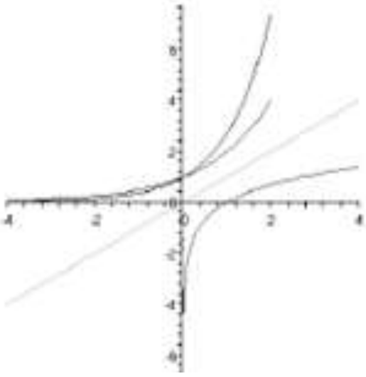
Eksponen natural : $Y = e^t$ $\Leftrightarrow$ Log biasa : $t = \log_e Y = \ln Y$

- **Aturan-aturan logaritma**
  - Hasil kali : $\ln(uv) = \ln u + \ln v$
  - Hasil Bagi : $\ln(u/v) = \ln u - \ln v$
  - Pangkat : $\ln u^a = a\ln(u)$
  - Pembalikan Basis (Base inversion) : $\log_b e = \frac{1}{\log_e b} = \frac{1}{\ln b}$
  - Konversi Basis (Base conversion) : $\log_b u = (\log_b e)(\log_e u) = \frac{\ln(u)}{\ln(b)}$

D. Fungsi Logaritma

$$Y = e^t \quad \Leftrightarrow \quad t = \log_e Y = \ln Y$$

- Karakteristik fungsi logaritma: Monoton Naik
  Jika ln y1 = ln y2, maka y1 = y2 dan
  Jika ln y1 > ln y2, maka y1 > y2
- **Bentuk Grafik :**
  Note : $y=e^t$ (biru), $y=2^t$ (merah-atas),
  y=ln(t) (merah), sudut 45^0 (hijau)



$$\text{misal } e^r = b^c$$

$$r \ln e = c \ln b$$

$$r = c \ln b = 2 \ln 1.025 \approx 4.94\%$$

$$y = e^{c \ln b(t)} = e^{2 \ln 1.025(1)} = 1.050625$$

- **Aplikasi**

Kegunaan utama dari transformasi logaritma dalam rise
ekonomi adalah ketika mengestimasi fungsi produksi ata
perkalian fungsi nonlinear lainnya. Transformasi fungsi p
ke dalam fungsi logaritma membuatnya dapat diestimas
metode regresi linier.

Misal Q = banyak output, L = pegawai (labor) dan K= ca
(capital inputs):

Fungsi Produksi $Q = AL^{\alpha}K^{\beta}$

Diambil transformasi logaritmanya menjadi:

$$\ln Q = \ln A + \alpha \ln L + \beta \ln K$$

Di sini nilai α dan β diestimasi dengan regresi linier.

E. Derivatif Fungsi Eksponensial dan Fungsi Logaritma

- **Aturan fungsi Log**

Derivatif dari fungsi log dengan basis e

Biasa: $$\frac{d \ln t}{dt} = \frac{1}{t}$$

Umum: $$\frac{d \ln f(t)}{dt} = \frac{f'(t)}{f(t)}$$

- **Aturan fungsi Eksponensial**

Derivatif dari fungsi eksponensial dengan basis e

Biasa: $$\frac{dy}{dt} = \frac{de^t}{dt} = e^t$$

Umum: $$\frac{dy}{dt} = \frac{de^t}{dt} = e^t$$

- **Konversi Basis**

Misal $e^r = b^c$
maka $\ln e^r = \ln b^c$
$r = \ln b^c = c \ln b$

sehingga: $e^r = e^{c \ln b}$ dan $y = Ab^{ct} = Ae^{(c \ln b)t} = Ae^{rt}$

- Contoh: Carilah pemajemukan kontinu dengan suku bunga nominal per tahun r yang ekuivalen dengan pemajemukan diskrit dengan suku bunga i=5% pertahun [dimajemukkan per setengah tahun (semiannually)]

$$y = ab^{ct} = ae^{rt} \text{ dimana } a = 1, i = .05,\ c = 2,\ t = 1,\ b = 1 + \frac{i}{c} = 1.025$$

- **Kasus untuk Basis b**

Derivatif dari fungsi transenden dalam basis b

Fungsi eksponensial:

$$\frac{db^t}{dt} = b^t \ln b$$

Fungsi Logaritma:

$$\frac{d \log_b t}{dt} = \frac{1}{t \ln b}$$

Derivatif dari fungsi transenden dalam basis e

Fungsi eksponensial:

$$\frac{de^t}{dt} = e^t$$

Fungsi Logaritma:

$$\frac{d \log_e t}{dt} = \frac{d \ln t}{dt} = \frac{1}{t}$$

- **Derivatif yang lebih tinggi**

Derivatif dari fungsi transenden dalam basis e

Eksponensial:	Logartma:
$\frac{de^t}{dt} = e^t$	$\frac{d \log_e t}{dt} = \frac{d(\ln t)}{dt} = \frac{1}{t}$
$\frac{d^2e^t}{dt^2} = e^t$	$\frac{d^2 \log_e t}{dt^2} = \frac{d(t^{-1})}{dt} = \frac{-1}{t^2}$
$\frac{d^3e^t}{dt^3} = e^t$	$\frac{d^3 \log_e t}{dt^3} = \frac{d(-t^{-2})}{dt} = \frac{2}{t^3}$
$\frac{d^4e^t}{dt^4} = e^t$	$\frac{d^4 \log_e t}{dt^4} = \frac{d(2t^{-3})}{dt} = \frac{-6}{t^4}$

- **Aplikasi**

Carilah diferensial total dari Fungsi Produksi Q dengan transformasi Logaritma:

$$Q = AK^{\alpha}L^{\beta}$$

$$\ln Q = \ln A + \alpha \ln K + \beta \ln L$$

$$d(\ln Q) = d(\ln A) + \alpha d(\ln K) + \beta d(\ln L)$$

$$\frac{dQ}{Q} = \frac{1}{A}dA + \frac{\alpha}{K}dK + \frac{\beta}{L}dL$$

$$dQ = Q\left(\frac{1}{A}dA + \frac{\alpha}{K}dK + \frac{\beta}{L}dL\right)$$

D. Optimasi Ketepatan Waktu (Timing)

- Masalah Penyimpanan Anggur

Nilai sekarang (Present value): $A(t) = Ve^{-rt}$ dan Pertumbuhan nilai (V) sebagai fungsi waktu:

$$V = ke^{\sqrt{t}}$$

Maka nilai sekarang dari V dapat dinyatakan sebaga

$$A(t) = ke^{\sqrt{t}}e^{-rt} = ke^{t^{\frac{1}{2}}-rt}$$

Transformasi Logaritmanya:

$$\ln A(t) = \ln k + \ln e^{t^{\frac{1}{2}}-rt}$$
$$= \ln k + \left(t^{\frac{1}{2}} - rt\right)\ln e$$
$$= \ln k + \left(t^{\frac{1}{2}} - rt\right)$$

Dengan mendiferensiasi ke dua sisi didapat:

$$\frac{dA}{dt}\frac{1}{A} = \frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}} - r$$

$$\frac{dA}{dt} = A\left(\frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}} - r\right)$$

Karena A≠0, kondisi dA/dt=0

$$\frac{dA}{dt} = A\left(\frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}} - r\right) = 0$$

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}} - r = 0$$

Dapat dipenuhi jika dan hanya jika :

$$\frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}} = r$$

$$t^* = \left(\frac{1}{2r}\right)^2$$

t* adalah waktu penyimpanan yang optimum

- Masalah penebangan kayu

Misal nilai kayu (yang telah ditanam pada suatu lah merupakan fungsi waktu:

$$V = 2^{\sqrt{t}} = 2^{t^{1/2}}$$

Kemudian V diubah menjadi nilai sekarangnya:

$$A(t) = Ve^{-rt}$$

Didapat:

$$A(t) = 2^{t^{1/2}}e^{-rt}$$

Transformasi Logaritmanya:

$$\ln A(t) = \ln(2)^{t^{1/2}} + \ln(e)^{-rt} = t^{1/2}\ln(2) - rt$$

Dengan mendiferensiasi ke dua sisi didapat:

$$\frac{d\ln A(t)}{dt} = \frac{1}{A}\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}t^{-1/2}\ln 2 - r$$

Karena A≠0, kondisi dA/dt=0

$$\frac{dA}{dt} = A\left(\frac{1}{2}t^{-1/2}\ln 2 - r\right) = 0 = \frac{1}{2}t^{-1/2}\ln 2 - r$$

Dapat dipenuhi jika dan hanya jika :

$$r = \frac{1}{2}t^{-1/2}\ln 2 \quad t^{-1/2} = \frac{2r}{\ln 2} \quad t^* = \left(\frac{\ln 2}{2r}\right)^2$$

t* adalah waktu penebangan yang optimum

Latihan :

1. Jika nilai anggur berkembang sesuai dengan fungsi $V = Ke^{2\sqrt{t}}$, berapa lama pembuat anggur akan menyimpan anggurnya?

BAB 10

OPTIMASI PERTUMBUHAN DAN APLIKASINYA

A. Versi Diferensial dari Syarat Optimasi

- Mengembangkan cara untuk mendapatkan nilai ekstrem dari suatu fungsi tujuan yang melibatkan dua atau lebih variabel pilihan.
- Bentuk Derivatif → bentuk diferensial
- Syarat Orde Pertama:

  Jika diketahui fungsi z=f(x), dalam bentuk diferensial adalah:

  $$dz = f'(x)\,dx$$

  Kondisi derivatif orde pertama: f'(x)=0 → menjadi,

  Kondisi diferensial orde pertama: dz=0 untuk sembarang nilai d yang tidak nol
- Syarat Orde Kedua:

  Jika diketahui fungsi z=f(x), orde kedua bentuk diferensial adalah:

$$d^2z = d(dz) = d[f'(x)\,dx] = [df'(x)]\,dx = [f''(x)\,dx$$
$$= f''(x)\,dx^2$$

Kondisi derivatif orde kedua:

- Untuk z yang maksimum: $f''(x) \le 0$
- Untuk z yang minimum: $f''(x) \ge 0$

Kondisi diferensial orde keduanya:

- Untuk z yang maksimum: $d^2z \le 0$
- Untuk z yang minimum: $d^2z \ge 0$

Untuk sembarang nilai dx yang tidak sama denga

B. Nilai Ekstrem dari Fungsi Dua Variabel

- Syarat Orde Pertama untuk fungsi $y = f(x_1, x_2)$

  Derivatif totalnya: $dy = f_{x_1}dx_1 + f_{x_2}dx_2$

  Agar memenuhi syarat: dz=0 untuk sembarang nilai tidak nol, maka

  $dy = f_{x_1}dx_1 + f_{x_2}dx_2 = 0$ maka $f_{x_1} = 0 \quad f_{x_2} = 0$
- Derivatif Parsial Orde Kedua

$$y = f(x_1, x_2)$$
$$f_{x_1} = \frac{\partial y}{\partial x_1} \qquad f_{x_2} = \frac{\partial y}{\partial x_2}$$

$$f_{x_1x_1} = \frac{\partial}{\partial x_1}(f_{x_1}) = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial y}{\partial x_1}\right) = \frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2}$$
$$f_{x_2x_1} = \frac{\partial}{\partial x_1}(f_{x_2}) = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial y}{\partial x_2}\right) = \frac{\partial^2 y}{\partial x_1 \partial x_2}$$

- Diferensial Total Orde Kedua

$$d^2y = d(dy) = \frac{\partial(dy)}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial(dy)}{\partial x_2}dx_2$$
$$= \frac{\partial(f_{x_1}dx_1 + f_{x_2}dx_2)}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial(f_{x_1}dx_1 + f_{x_2}dx_2)}{\partial x_2}dx_2$$
$$= f_{x_1x_1}dx_1^2 + f_{x_1x_2}dx_1dx_2 + f_{x_2x_1}dx_1dx_2 + f_{x_2x_2}dx_2^2$$
$$= f_{x_1x_1}dx_1^2 + 2f_{x_1x_2}dx_1dx_2 + f_{x_2x_2}dx_2^2$$

- Syarat Orde Kedua

  Kondisi diferensial orde keduanya:
  - Untuk y yang maksimum: $d^2y \le 0$
  - Untuk y yang minimum: $d^2y \ge 0$

  Untuk sembarang nilai dx yang tidak sama dengan no

Didapat Tabel Persyaratannya sbb:

Kondisi	Maksimum	Minimum	Titik Sadel
Syarat Perlu Orde Pertama	$f_{x_1} = 0$ $f_{x_2} = 0$	$f_{x_1} = 0$ $f_{x_2} = 0$	$f_{x_1} = 0$ $f_{x_2} = 0$
Syarat Perlu Orde Kedua	$f_{x_1x_1} < 0$ $f_{x_2x_2} < 0$	$f_{x_1x_1} > 0$ $f_{x_2x_2} > 0$	$f_{x_1x_1}$ *dan* $f_{x_2x_2}$ *beda tanda*
Syarat Cukup Orde kedua	$f_{x_1x_1} f_{x_2x_2} > f_{x_1x_2}^2$	$f_{x_1x_1} f_{x_2x_2} > f_{x_1x_2}^2$	$f_{x_1x_1} f_{x_2x_2} < f_{x_1x_2}^2$

- Contoh : Carilah nilai ekstrem dari fungsi $z = x^2 + xy + 2y^2 + 3$

$$dz = 2xdx + ydx + xdy + 4ydy$$
$$dz = (2x + y)dx + (x + 4y)dy$$

Kondisi Orde Pertama

$f_x = 2x + y = 0$	$y = -2x$
$f_y = x + 4y = 0$	$x = -4y$
$0 = 2(-4y) + y = -7y$	$y = 0$
$0 = x + 4(0)$	$x = 0$
$z = x^2 + xy + 2y^2 + 3$	$z = 3$

Kondisi Orde Kedua

$$d^2z = 2d^2x + 1dydx + 1dxdy + 4d^2y$$
$$d^2z = 2d^2x + 2dydx + 4d^2y$$
$$f_{xx} = 2 \quad f_{xy} = 1$$
$$f_{yx} = 1 \quad f_{yy} = 4$$

Karena f_{xx} & $f_{yy} > 0$ and $f_{xx} \cdot f_{yy} > f_{xy}^2$ $(8 > 1)$, maka d^2z minimum

Berarti $(x^*, y^*, z^*) = (0, 0, 3)$ titik minimum relatif

C. Bentuk Kuadrat - Suatu Ekskursi

- Diferensial Total Orde kedua sebagai Bentuk Kuadrat (quadratic form)

  Bentuk linier → 4x-9y+z

  Bentuk kuadrat → $x^2+2xy-yw+7w^2$

  Diferensial Total Orde Kedua → $d^2y = f_{x_1x_1}dx_1^2 + 2f_{x_1x_2}dx_1dx_2 + f_{x_2x_2}dx_2^2$

$$d^2y \begin{Bmatrix} \text{positive definite} \\ \text{positive semidefinite} \\ \text{negative semidefinite} \\ \text{negative definite} \end{Bmatrix} \text{if } d^2y \text{ is} \begin{Bmatrix} \text{positive} & (>0) \\ \text{nonnegative} & (\ge 0) \\ \text{nonpositive} & (\le 0) \\ \text{negative} & (<0) \end{Bmatrix}$$

- Derivatif kedua sebagai Determinan

$$d^2y = f_{x_1x_1}dx_1^2 + 2f_{x_1x_2}dx_1dx_2 + f_{x_2x_2}dx_2^2$$

$$d^2y = \begin{bmatrix} dx_1 & dx_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{x_1x_1} & f_{x_1x_2} \\ f_{x_2x_1} & f_{x_2x_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx_1 \\ dx_2 \end{bmatrix}$$

Jika : $|H| = \begin{vmatrix} f_{x_1x_1} & f_{x_1x_2} \\ f_{x_2x_1} & f_{x_2x_2} \end{vmatrix}$

$$d^2y \begin{Bmatrix} \text{positive definite} \\ \text{negative definite} \end{Bmatrix} \text{ if } \begin{Bmatrix} f_{x_1x_1} & > 0 \\ f_{x_1x_1} & < 0 \end{Bmatrix} \text{ and } \begin{vmatrix} f_{x_1x_1} & f_{x_1x_2} \\ f_{x_2x_1} & f_{x_2x_2} \end{vmatrix}$$

- Contoh: Cari nilai ekstrem dari fungsi Q= $4u^2$ + 4uv +3

f_u = 8u + 4v
f_v = 4u + 6v
f_{uu} = 8; f_{vv} = 6; f_{uv} = 4

$$d^2q = \begin{bmatrix} du & dv \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 & 4 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} du \\ dv \end{bmatrix}$$

f_{uu} = 8 > 0
|H|= 48 - 16 = 32 > 0;
maka (u*,v*,z*)=(0,0,0) adalah positive definite (minimun

- Bentuk Kuadrat Tiga Variabel

Contoh : Cari nilai ekstrem dari
fungsi w = x^2 + $3y^2$ − 3xy + 4yz + $6z^2$
dw = fxdx + fydy + fzdz = 0
fx = 2x − 3y + 0z = 0
fy = −3x + 6y + 4z = 0
fz = 0x + 4y + 12z = 0

Ubah dalam bentuk Ax = d

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 0 \\ -3 & 6 & 4 \\ 0 & 4 & 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Untuk mendapatkan calon titik-titik ekstrim, pecahkan persamaan matrik di atas.
Selanjutnya untuk mengujinya titik ekstrem tersebut:

d^2w = ∂(fxdx)dx/∂x + ∂(fydy)dy/∂y + ∂(fzdz)dz/∂z
fxx = 2; fxz = 0
fyx = -3; fyy = 6
fzy = 4; fzz = 12

$$|H| = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 0 \\ -3 & 6 & 4 \\ 0 & 4 & 12 \end{vmatrix}$$

Syarat perlu dan cukup untuk kedefinitan positif adalah minor utama dari |H| semuanya positif:

$$|H_1| = |2| = 2 > 0$$

$$|H_2| = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 6 \end{vmatrix} = 12 - 9 = 3 > 0$$

$$|H_3| = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 0 \\ -3 & 6 & 4 \\ 0 & 4 & 12 \end{vmatrix} = 144 - 32 - 108 = 4 > 0$$

Jadi d^2w>0 positive definite (minimum)

Note: Sedang Syarat perlu dan cukup untuk kedefinitan negatif adalah bahwa minor utama dari |H| tandanya berubah sbb:

$$|H_1| < 0$$
$$|H_2| > 0$$
$$|H_3| < 0$$
$$dst$$

Latihan:

1. Carilah nilai ekstrem dari fungsi berikut:

a. $f(u,v) = \begin{bmatrix} u & v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$

b. $f(u,v) = \begin{bmatrix} u & v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$

perhatikan kesimetrisan koefisien matriknys!

BAB 11

OPTIMASI TANPA KENDALA DAN APLIKASINYA

(FUNGSI DENGAN DUA VARIABEL ATAU LEBIH)

A. Fungsi Tujuan dengan Lebih dari Dua Variabel

- Bentuk Umum Fungsi 3 Variabel : z=f(x_1, x_2, x_3)

Diferensial Total Orde Satu:

$$dz = f_{x_1}dx_1 + f_{x_2}dx_2 + f_{x_3}dx_3$$

Diferensial Total Orde Dua:

$$d^2z = \begin{bmatrix} dx_1 & dx_2 & dx_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{x_1x_1} & f_{x_1x_2} & f_{x_1x_3} \\ f_{x_2x_1} & f_{x_2x_2} & f_{x_2x_3} \\ f_{x_3x_1} & f_{x_3x_2} & f_{x_3x_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ dx_3 \end{bmatrix}$$

- Diferensial Total Orde Dua menghasilkan determinan Hess yang simetris:

$$|H| = \begin{vmatrix} f_{x_1x_1} & f_{x_1x_2} & f_{x_1x_3} \\ f_{x_2x_1} & f_{x_2x_2} & f_{x_2x_3} \\ f_{x_3x_1} & f_{x_3x_2} & f_{x_3x_3} \end{vmatrix}$$

Yang minor utamanya adalah:

$$|H_1| = |f_{x_1x_1}| \qquad |H_2| = \begin{vmatrix} f_{x_1x_1} & f_{x_1x_2} \\ f_{x_2x_1} & f_{x_2x_2} \end{vmatrix} \qquad |H_3| = |H$$

Sehingga syarat cukup orde kedua untuk titik ekstrem dar adalah:

- d^2z definit negatif (maksimum) bila :
  $|H_1| < 0 \quad |H_2| > 0 \quad |H_3| < 0$
- d^2z definit positif (minimum) bila :
  $|H_1| > 0 \quad |H_2| > 0 \quad |H_3| > 0$
- semua minor utama diuji pada titik stasioner diman
  $f_{x_1} = 0 \quad f_{x_2} = 0 \quad f_{x_3} = 0$

B. Penerapan Ekonomi

- Permasalahan Perusahaan Multiproduk

- Contoh 1: Asumsikan suatu perusahaan dengan dua pro berada pada keadaan Persaingan sempurna.
  Karena berada dalam persaingan sempurna, harga-harg komoditi dianggap eksogen. Misalkan harga tersebut din dengan P_{10} *dan* P_{20}

Jika $P_{10} = 12$ dan $P_{20} = 18$, Berapa kuantitas Q_1^*, Q_2^* yang memaksimal jumlah Laba π^*nya.

Fungsi pendapatan perusahaan: $R = P_{10}Q_1 + P_{20}Q_2$,

Dimana Q_1 *dan* Q_2, adalah tingkat output produk 1 dan pro

Fungsi biaya perusahaan: $C = 2Q_1^2 + Q_1Q_2 + 2Q_2^2$

Maka fungsi Labanya: $\pi = R - C = P_{10}Q_1 + P_{20}Q_2 - (2Q_1^2 + Q_1Q_2 + 2$

Derivatif orde pertamanya:

$$\frac{\partial\pi}{\partial Q_1} = P_{10} - 4Q_1 - Q_2 = 0, \qquad \frac{\partial\pi}{\partial Q_1} = P_{20} - Q_1 - 4Q_2 = 0$$

Dalam bentuk matriks didapat:

$$\begin{bmatrix} -4 & -1 \\ -1 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -P_{10} \\ -P_{20} \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{15}\begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -P_{10} \\ -P_{20} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix}$$

Didapat:

$$Q_1^* = \frac{4P_{10} - P_{20}}{15}, \qquad Q_2^* = \frac{4P_{20} - P_{10}}{15}$$

Sehingga:

$$Q_1^* = \frac{4(12) - 18}{15} = 2, \qquad Q_2^* = \frac{4(18) - 12}{15} = 4$$

$$\pi = R - C = P_{10}Q_1 + P_{20}Q_2 - (2Q_1^2 + Q_1Q_2 + 2Q_2^2)$$

$$\pi^* = 12(2) + 18(4) - 2(2)^2 - (2)4 - 2(4)^2 = 24 + 72 - 8 - 8 - 32 = 48$$

Pengujian titik ekstrem: Matriks Hessian $H = \begin{bmatrix} -4 & -1 \\ -1 & -4 \end{bmatrix}$

$$|H| = \begin{vmatrix} -4 & -1 \\ -1 & -4 \end{vmatrix} = 15 \quad |H_1| = -4 \qquad \text{negative definite}, \rightarrow \text{max.}$$

- Contoh 2: Asumsikan suatu perusahaan dengan dua produk berada pada keadaan Persaingan sempurna.
  Karena berada dalam persaingan sempurna, harga-harga kedua komoditi dianggap eksogen. Misalkan harga tersebut dinotasikan dengan P_{10} *dan* P_{20} . Dengan :

$$R = P_{10}Q_1 + P_{20}Q_2, \qquad C = 2Q_1^2 + 2Q_2^2$$

$$\pi = R - C = P_{10}Q_1 + P_{20}Q_2 - (2Q_1^2 + 2Q_2^2)$$

Derivatif orde pertamanya:

$$\frac{\partial\pi}{\partial Q_1} = P_{10} - 4Q_1 = 0, \quad \frac{\partial\pi}{\partial Q_1} = P_{20} - 4Q_2 = 0$$

$$Q_1^* = \frac{P_{10}}{4}, \qquad Q_2^* = \frac{P_{20}}{4}$$

$$\pi^* = P_{10}\frac{P_{10}}{4} + P_{20}\frac{P_{20}}{4} - \left(2\left(\frac{P_{10}}{4}\right)^2 + 2\left(\frac{P_{20}}{4}\right)^2\right)$$

$$\pi^* = \frac{2(P_{10})^2}{8} + \frac{2(P_{20})^2}{8} - \frac{(P_{10})^2}{8} - \frac{(P_{20})^2}{8} = \frac{1}{8}(P_{10}^2 + P_{20}^2)$$

Pengujian titik ekstrem:

$$\frac{\partial^2 \pi}{\partial Q_1^2} = -4, \qquad \frac{\partial^2 \pi}{\partial Q_2^2} = -4 \qquad \frac{\partial^2 \pi}{\partial Q_1 \partial Q_2} = 0$$

$$|H| = \begin{vmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} = 16 \quad |H_1| = -4 \quad \text{negative definite,} \rightarrow \text{maximum}$$

- Diskriminasi Harga

Jika perusahaan monopolistic menjual satu jenis produkn dalam dua atau lebih pasar yang terpisah, maka harus ditentukan jumlah output Q yang ditawarkan ke masing-r pasar agar Laba menjadi maksimum.

Pada umumnya, setiap pasar mempunyai kondisi permint yang berbeda, dan bila elastisitas permintaan berbeda da berbagai pasar, maksimasi Laba memerlukan praktik Diskriminasi Harga.

Contoh 1: Suatu perusahaan monopoli yang memproduksi macam produk mempunyai fungsi permintaan untuk masi masing produk sebagai berikut:

$$D_1: \quad p_1 = 36 - 3q_1$$

$$D_2: \quad p_2 = 40 - 5q_2$$

Fungsi biaya totalnya: $C = q_1^2 + 2q_1q_2 + 3q_2^2$

Tentukan kuantitas dan harga dari masing-masing produk memaksimumkan laba untuk monopolis tersebut dan hitur berapa laba maksimumnya?

Jawab:

* π = TR − TC = $(p_1q_1 + p_2q_2) - C$
  $= 36q_1 - 4q_1^2 + 40q_2 - 8q_2^2 - 2q_1q_2$

Turunan pertama:

$\pi_{q1} = 18 - 4q_1 - q_2 = 0$

$\pi_{q2} = 20 - 8q_2 - q_1 = 0$

Diperoleh $q_1 = 4$ dan $q_2 = 2$

Untuk menentukan maksimum atau minimum, gunakan kedua. $\pi_{q1q1} = -8$, $\pi_{q1q2} = -2$, $\pi_{q2q2} = -16$;

$\pi_{q1q1} \cdot \pi_{q1q2} - \pi^2_{q1q2} = 124$

Karena $\pi_{q1q1} < 0$, $\pi_{q2q2} < 0$, dan $\pi_{q1q1} \cdot \pi_{q1q2} - \pi^2_{q1q2} > 0$, maka terbukti bahwa produksi $q_1 = 4$ unit dan $q_2 = 2$ unit menghasilkan keuntungan maksimum bagi perusahaan.

* $p_1 = 24$ dan $p_2 = 30$

Harga produk 1 = 24 dan Harga produk 2 = 30.

* π maksimum = 112.

Contoh 2: Misalkan perusahaan monopolistik mempunyai fungsi pendapatan rata-rata pada 3 pasar yang berbeda sbb:

Harga (P) sebagai fungsi dari kuantitas (Q)

$$P_1 = 63 - 4Q_1 \quad P_2 = 105 - 5Q_2 \quad P_3 = 75 - 6Q_3$$

Fungsi pendapatan sebagai perkalian Harga (P) dengan Kuantitas (Q), didapat :

$$R_1 = P_1 Q_1 = 63Q_1 - 4Q_1^2,$$

$$R_2 = P_2 Q_2 = 105Q_2 - 5Q_2^2,$$

$$R_3 = P_3 Q_3 = 75Q_3 - 6Q_3^2$$

Dan Fungsi biaya totalnya :

$$C = 20 + 15Q, \quad Q = Q_1 + Q_2 + Q_3,$$

Fungsi profit :

$$\pi = R_1(Q_1) + R_2(Q_2) + R_3(Q_3) - C(Q)$$

$$\pi_1 = \partial\pi/\partial Q_1 = 63 - 8Q_1 - 15 = 48 - 8Q_1 = 0 \quad Q_1^* = 6, P_1^* = 39$$

$$\pi_2 = \partial\pi/\partial Q_2 = 105 - 10Q_2 - 15 = 90 - 10Q_2 = 0 \quad Q_2^* = 9, P_2^* = 60$$

$$\pi_3 = \partial\pi/\partial Q_3 = 75 - 12Q_3 - 15 = 60 - 12Q_3 = 0 \quad Q_3^* = 5, P_3^* = 45$$

Jadi didapat $Q^* = 20$ dan Laba maksimum adalah:

$R_1^* = 234 \quad R_2^* = 540 \quad R_3^* = 245$

$R^* = 1019 \quad C^* = 340 \quad \pi^* = 679$

Untuk melihat implikasi dari kondisi ini berkaitan dengan diskriminasi harga, dihitung pendapatan marjinal sbb :

$$R_i = P_i Q_i$$

$$MR_i = \frac{dR_i}{dQ_i} = P_i \frac{dQ_i}{dQ_i} + \frac{dP_i}{dQ_i} Q_i = P_i\left(1 + \frac{dP_i}{dQ_i}\frac{Q_i}{P_i}\right) = P_i\left(1 + \frac{1}{\varepsilon_d}\right)$$

Di mana ε_d : nilai elastisitas permintaan dalam pasar ke-I (biasanya negatif). Untuk kasus di atas :

$$\frac{dP_1}{dQ_1} = -4 \qquad \frac{dP_1}{dQ_1} = -5 \qquad \frac{dP_1}{dQ_1} = -6$$

$$|\varepsilon_{d1}| = \frac{39}{6}\left(\frac{1}{4}\right) = 1.625,\ |\varepsilon_{d2}| = \frac{60}{9}\left(\frac{1}{5}\right) = 1.33,\ |\varepsilon_{d3}| = \frac{45}{5}\left(\frac{1}{6}\right) = 1.$$

Syarat Orde pertama $\pi_1 = \pi_2 = \pi_3 = 0 \rightarrow MC = MR_1 = MR_2 =$

Karena :

$$MR_i = P_i\left(1+\frac{1}{\varepsilon_d}\right) = P_i\left(1-\frac{1}{|\varepsilon_d|}\right)$$

Maka syarat orde pertama menjadi :

$$P_1\left(1-\frac{1}{|\varepsilon_{d1}|}\right) = P_2\left(1-\frac{1}{|\varepsilon_{d2}|}\right) = P_3\left(1-\frac{1}{|\varepsilon_{d3}|}\right)$$

$$39\left(1-\frac{1}{|1.625|}\right) = 60\left(1-\frac{1}{|1.33|}\right) = 45\left(1-\frac{1}{|1.5|}\right) = 15$$

Pengujian titik ekstrem

$$\pi_1 = 48 - 8Q_1 = 0$$
$$\pi_2 = 90 - 10Q_2 = 0$$
$$\pi_3 = 60 - 12Q_3 = 0$$
$$\pi_{11} = -8$$
$$\pi_{22} = -10$$
$$\pi_{33} = -12$$
$$\pi_{12} = \pi_{21} = \pi_{13} = \pi_{31} = \pi_{23} = \pi_{32} = 0$$
$$|H| = \begin{vmatrix} -8 & 0 & 0 \\ 0 & -10 & 0 \\ 0 & 0 & -12 \end{vmatrix} < 0,$$
$$|H_2| > 0, |H_1| < 0, \text{negative definite}, \rightarrow \text{max}$$

- **Keputusan Input dalam Perusahaan**

  Variabel pilihan dari perusahaan juga bisa timbul dalam bent tingkat input, selain tingkat output Q_i

  Asumsikan

  1. Dua input a dan b digunakan dalam produksi produk Q
  2. Harga dari output P dan harga-harga input P_a dan P_b
  3. Proses produksi membutuhkan t tahun untuk selesai , sehingga pendapatan (future) harus didiskontokan sebelum dapat dibandingkan dengan biaya sekarang (present)
  4. Tingkat diskonto adalah i_0

  Fungsi Biaya C dan fungsi pendapatan R:

$$C = aP_{a0} + bP_{b0} \qquad\qquad R = P_0Q(a,b)e^{-rt}$$

  Jadi Fungsi Labanya:

$$\pi = R - C = P_0Q(a,b)e^{-rt} - aP_{a0} - bP_{b0}$$

Ambil derivatif parsialnya :

$$\pi_a = P_0Q_ae^{-rt} - P_{a0} = 0 \qquad P_0Q_ae^{-rt} = P_{a0} \qquad \textit{dengan} \quad Q_a > 0$$
$$\pi_b = P_0Q_be^{-rt} - P_{b0} = 0 \qquad P_0Q_be^{-rt} = P_{b0} \qquad \textit{dengan} \quad Q_b > 0$$

Fungsi Produksi : $Q = Q(a,b)$

Ambil derivatif totalnya, maka isokuannya adalah:

$$dQ = Q_a da + Q_b db = 0$$
$$\frac{db}{da} = \frac{-Q_a}{Q_b} = \frac{-MPP_a}{MPP_b}$$

Note: MPP = Marginal Physical Product / Produk Fisik Marjinal

Untuk mendapatkan $Q_a \& Q_b > 0$, maka membatasi input pilihan hanya pada bagian dengan kemiringan negatif pada isokuan tersebut sehingga tiap isokuan dapat dianggap sebagai fungsi $b = \phi(a)$

Syarat Orde Kedua untuk Laba maksimum:

$$|H| = \begin{vmatrix} P_0Q_{aa}e^{-rt} & P_0Q_{ab}e^{-rt} \\ P_0Q_{ab}e^{-rt} & P_0Q_{bb}e^{-rt} \end{vmatrix} > 0 \text{ dan}$$
$$|H_1| = P_0Q_{aa}e^{-rt} < 0$$

Maka syarat tersebut terpenuhi jika:

$$Q_{aa} < 0 \text{ dan}$$
$$Q_{aa}Q_{bb} > Q_{ab}Q_{ab}$$

Note: Q_{aa} adalah laju perubahan dari Q_a dimana Q_b konstan

C. Aspek Statis Komparatif dari Optimasi

- Ide utama: untuk mengetahui 'bagaimana perubahan pada sembarang parameter akan mempengaruhi posisi ekuilibrium pada model, yang berkaitan dengan nilai optimal dari variabel pilihan'

- Pemecahan Bentuk Ringkas (reduced-form)

  Pada Permasalahan Perusahaan Multiproduk Contoh 1,

  P_{10} dan P_{20} : harga-harga kedua komoditi bersifat eksogen.

  Tingkat output optimal dinyatakan dalam parameter eksogen tersebut:

$$Q_1^* = \frac{4P_{10} - P_{20}}{15}, \qquad Q_2^* = \frac{4P_{20} - P_{10}}{15}$$

Diferensiasi parsial dari solusi optimal tersebut akan memberikan sifat-sifat statis komparatif dari model tersebut:

$$\frac{\partial Q_1^*}{\partial P_{10}} = \frac{4}{15}, \quad \frac{\partial Q_1^*}{\partial P_{20}} = -\frac{1}{15}, \quad \frac{\partial Q_2^*}{\partial P_{10}} = -\frac{1}{15}, \quad \frac{\partial Q_2^*}{\partial P_{20}} = \frac{4}{15}$$

JADI dapat disimpulkan: untuk memaksimalkan laba, setiap produk sebaiknya diproduksi dalam jumlah besar jika harga naik atau bila harga pasar produk lain turun.

- Model Fungsi Umum (general-function models)
  Pada Keputusan Input dalam Perusahaan , asumsikan Q_{ab}>
  Berapa banyak parameter pada model tersebut?

Fungsi Labanya:

$$\pi = R - C = P_0 Q(a,b) e^{-it} - aP_{a0} - bP_{b0}$$

Derivatif parsialnya :

$$\pi_a = P_0 Q_a e^{-it} - P_{a0} = 0 \qquad P_0 Q_a e^{-it} = P_{a0} \qquad dengan \quad Q_a > 0$$

$$\pi_b = P_0 Q_b e^{-it} - P_{b0} = 0 \qquad P_0 Q_b e^{-it} = P_{b0} \qquad dengan \quad Q_b > 0$$

Dalam model diskrit: $e^{-it} = (1 + i_0)^{-1}$

Sehingga:
$F_1(a, b; P_0, Pa_0, Pb_0, i_0) = P_0Qa(a, b)(1 + i_0)-1 - Pa_0 = 0$
$F_2(a, b; P_0, Pa_0, Pb_0, i_0) = P_0Qb(a, b)(1 + i_0)-1 - Pb_0 = 0$

Jadi terdapat empat parameter (P_0, Pa_0, Pb_0, i_0)

Selanjutnya cari ($\partial a^*/\partial i_0$) and ($\partial b^*/\partial i_0$), dan apa interpreta
ekonominya?

$$a^* = a^*(P_0, P_{a0}, P_{b0}, i)$$
$$b^* = b^*(P_0, P_{a0}, P_{b0}, i)$$
$$P_0 Q_a(a^*, b^*)(1+i)^{-1} - P_{a0} \equiv 0$$
$$P_0 Q_b(a^*, b^*)(1+i)^{-1} - P_{b0} \equiv 0$$

Derivatif orde keduanya:

$$P_0Q_{aa}(1+i)^{-1}da^* + P_0Q_{ab}(1+i)^{-1}db^* = -Q_a(1+i)^{-1}dP_0 + dP_{a0} + P_0Q_a(1+i)^{-2}$$
$$P_0Q_{ab}(1+i)^{-1}da^* + P_0Q_{bb}(1+i)^{-1}db^* = -Q_b(1+i)^{-1}dP_0 + dP_{b0} + P_0Q_b(1+i)^{-2}$$

Dalam bentuk matriks:

$$\begin{bmatrix} P_0Q_{aa}(1+i)^{-1} & P_0Q_{ab}(1+i)^{-1} \\ P_0Q_{ab}(1+i)^{-1} & P_0Q_{bb}(1+i)^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} da^* \\ db^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -Q_a(1+i)^{-1}dP_0 + dP_{a0} + P_0Q_a(1+i)^{-} \\ -Q_b(1+i)^{-1}dP_0 + dP_{b0} + P_0Q_b(1+i)^{-} \end{bmatrix}$$

Misalkan hanya variabel eksogen I saja yang bervariasi maka

$$\begin{bmatrix} P_0Q_{aa}(1+i)^{-1} & P_0Q_{ab}(1+i)^{-1} \\ P_0Q_{ab}(1+i)^{-1} & P_0Q_{bb}(1+i)^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial a^* \\ \partial b^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_0Q_a(1+i)^{-2}\partial i_0 \\ P_0Q_b(1+i)^{-2}\partial i_0 \end{bmatrix}$$

Jika $\partial i_0 = 0$

$$\begin{bmatrix} P_0Q_{aa}(1+i)^{-1} & P_0Q_{ab}(1+i)^{-1} \\ P_0Q_{ab}(1+i)^{-1} & P_0Q_{bb}(1+i)^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial a^*/\partial i_0 \\ \partial b^*/\partial i_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_0Q_a(1+i)^{-2} \\ P_0Q_b(1+i)^{-2} \end{bmatrix}$$

Dengan aturan Cramer:

$$|J_a| = \begin{vmatrix} P_0Q_a(1+i)^{-2} & P_0Q_{ab}(1+i)^{-1} \\ P_0Q_b(1+i)^{-2} & P_0Q_{bb}(1+i)^{-1} \end{vmatrix}$$

$$|J| = \begin{vmatrix} P_0Q_{aa}(1+i)^{-1} & P_0Q_{ab}(1+i)^{-1} \\ P_0Q_{ab}(1+i)^{-1} & P_0Q_{bb}(1+i)^{-1} \end{vmatrix}$$

$$\left(\frac{\partial a^*}{\partial i_0}\right) = \frac{(Q_aQ_{bb} - Q_bQ_{ab})P_0^2(1+i)^{-3}}{|J|} < 0$$

$$\text{Jika } Q_{ab} > 0, \text{ maka } \frac{\partial a^*}{\partial i_0} < 0$$

Interpretasi: kuantitas dari input akan menurun ketika tingkat diskonto (i_0) meningkat. Selanjutnya ketika tingkat diskonto (i_0) meningkat, nilai uang sekarang (present) dari output P_0 menurun, yang mengurangi permintaan implisit (MVP) untuk input a dan b.

Latihan:
1. Suatu peusahaan dengan dua produk menghadapi fungsi permintaan dan biaya sbb:
Q1 = 40 – 2 P1– P2
Q2 = 35 – P1 – P2
C = $Q1^2 + 2\ Q2^2 + 10$
A. Carilah tingkat output yang memenuhi syarat cukup orde pertama untuk laba maksimum ?
B. Periksa syarat cukup orde kedua. Dapatkah anda memutuskan bahwa persoalan ini memiliki maksimum mutlak yang unik?
C. Berapakah Laba maksimumnya?

BAB 12

OPTIMASI DENGAN KENDALA PERSAMAAN DAN APLIKASINYA

A. Efek dari Satu Kendala

- Tujuan utama digunakannya sebuah kendala adalah memberi tanggung jawab kepada faktor-faktor pembatas (constrains) tertentu dalam masalah optimasi.
- Misalkan Fungsi Utilitas sederhana : $U = x_1x_2 + 2x_1$
  Jika konsumen ingin membelanjakan 60 dollar, dan harga barang P_1=4 dan P_2=2, maka terdapat kendala anggaran (budget constrain):

$$60 = 4x_1 + 2x_2$$

Kendala ini menyebabkan pilihan x_1* dan x_2* menjadi sali tergantung.

Untuk melihat efek kendala ini, dapat dilakukan substitusi

$$x_2 = 30 - 2x_1$$
$$U = x_1(30 - 2x_1) + 2x_1$$

Ambil derivatifnya :

$$\frac{du}{dx_1} = 32 - 4x_1 = 0$$

Hasilnya adalah :

$$x_1 = 8,\ x_2 = 14, \qquad U = 128$$

Uji derivatif orde kedua:

$$\frac{d^2u}{dx_1^2} = -4 \qquad (\max)$$

B. Pencarian Nilai-nilai Stasioner

- Bagaiman jika kasusnya:
  - Bentuk fungsional kendala kompleks
  - Terdapat banyak kendala
- Maka dapat digunakan Metode Pengali-Lagrange
  - Inti dari metode pengali-Lagrange adalah mengubah persoalan titik ekstrem terkendala menjadi persoalai ekstrem bebas kendala.
- Kondisi Orde Pertama: $L_\lambda = 0$ menjamin kendala akan di
- $L_\lambda = 0$, mentransformasikan fungsi U terkendala dengan variabel menjadi Fungs L tanpa kendala dengan n + 1 var

- Fungsi Lagrange : $L = f(x, y) + \lambda[c - g(x, y)]$;
  dengan f(x,y)=fungsi objektif ; g(x,y)=fungsi kendala ; d
  λ=pengali Lagrange
- Contoh: Fungsi Utilitas $U(x_1, x_2) = x_1x_2 + 2x_1$
  Kendala anggaran : $C = 60 - 4x_1 - 2x_2 = 0$
  Fungsi Lagrange: $L = x_1x_2 + 2x_1 + \lambda(60 - 4x_1 - 2x_2)$

- Metode pengali-Lagrange membuat pendekatan fungsi tar Kendala yang sudah dibahas sebelumnya dapat digunakar Kondisi orde pertama untuk L, adalah:

$$L_\lambda = L_{x1} = L_{x2} = 0$$

- Jika Kondisi Orde Pertama: $L_\lambda = 0$ dipenuhi, maka kenda dipenuhi:

$$L_\lambda = 60 - 4x_1 - 2x_2 = 0 \quad \text{dan} \quad L = U$$

- Selanjutnya didapat:

$$L_{x_1} = x_2 + 2 - \lambda 4 = 0$$
$$L_{x_2} = x_1 - \lambda 2 = 0$$

- Atur dalam bentuk matriks:

$$\begin{bmatrix} 0 & -4 & -2 \\ -4 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -60 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \text{bentuk matriks } Ax = d$$

Kemudian pecahkan untuk λ, x_1, x_2 dengan Aturan Cramer

$$|J| = \begin{vmatrix} L_{\lambda\lambda} & L_{\lambda x_1} & L_{\lambda x_2} \\ L_{x_1\lambda} & L_{x_1x_1} & L_{x_1x_2} \\ L_{x_2\lambda} & L_{x_2x_1} & L_{x_2x_2} \end{vmatrix} \qquad \text{Jacobian matrix}$$

$$|J| = \begin{vmatrix} 0 & -4 & -2 \\ -4 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 8 + 8 = 16$$

$$|J_\lambda| = \begin{vmatrix} -60 & -4 & -2 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 4 + 60 = 64$$

$$|J_{x_1}| = \begin{vmatrix} 0 & -60 & -2 \\ -4 & -2 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 120 + 8 = 128$$

$$|J_{x_2}| = \begin{vmatrix} 0 & -4 & -60 \\ -4 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -16 + 240 = 224$$

$$\lambda^* = 64/16 = 4 \quad x_1^* = 128/16 = 8 \quad x_2^* = 224/16 = 14$$
$$U^* = x_1^*x_2^* + 2x_1^* = (8)14 + (2)8 = 128$$

- Nilai Stasioner U* di atas perlu diuji lagi dengan Syarat Orde Kedua sebelum diketahui maksimum atau minimum atau bukan keduanya.
- Pendekatan Diferensial Total

  Diferensial dari L=f(x,y) : $dL = f_x dx + f_y dy = 0$
  Diferensial dari g=g(x,y) : $dg = g_x dx + g_y dy = 0$
  dimana dx dan dy bergantung satu dengan yang lain

  Gradien dari kurva isokuan : $dy/dx = -f_x/f_y$
  Gradien dari kurva kendala : $dy/dx = -g_x/g_y$

Maka didapat persamaan : $-g_x / g_y = -f_x / f_y$

Apakah pendekatan diferensial total menghasilkan kondisi c
pertama yang sama dengan metode pengali Lagrange?
Dari metode Pengali Lagrange didapat:

$$f_x / g_x = f_y / g_y = \lambda$$

Hal ini menghasilkan informasi yang tepat sama dengan ha
pendekatan diferensial total. Selanjutnya λ dapat
diintrepretasikan tersendiri.

- Intrepetasi dari Pengali Lagrange

λ adalah ukuran sensitivitas dari L terhadap perubahan dari
kendala c
λ, x dan y : bersifat endogen, dan c : bersifat eksogen

- F(λ, x, y; c) = 0

Diferensial total dari fungsi implisit adalah:

$$dL/dc = \lambda.$$

sehingga λ dapat diintrepetasikan sebagai ukuran pengaruh
suatu perubahan di dalam kendala melalui parameter c terh
perubahan nilai optimal dari fungsi objektifnya

C. Syarat Orde Kedua

- Pengali Lagrange λ tidak mempunyai efek pada nilai stasion
karena kendala sama dengan nol, tetapi mengakibatkan Sya
Orde Kedua yang baru diperlukan untuk menguji nilai stasio
Z*
- Adanya kendala mengubah kondisi untuk maksimum relatif
minimum relatif.

Maka didapat persamaan : $-g_x / g_y = -f_x / f_y$

Apakah pendekatan diferensial total menghasilkan kondisi
pertama yang sama dengan metode pengali Lagrange?
Dari metode Pengali Lagrange didapat:

$$f_x / g_x = f_y / g_y = \lambda$$

Hal ini menghasilkan informasi yang tepat sama dengan h
pendekatan diferensial total. Selanjutnya λ dapat
diintrepretasikan tersendiri.

- Intrepetasi dari Pengali Lagrange

λ adalah ukuran sensitivitas dari L terhadap perubahan da
kendala c
λ, x dan y : bersifat endogen, dan c : bersifat eksogen

- F(λ, x, y; c) = 0

Diferensial total dari fungsi implisit adalah:

$$dL/dc = \lambda.$$

Ilustrasi:

I. Kasus tanpa kendala $z = z(x, y)$

Diferensial Orde Pertama : $dz = z_x dx + z_y dy$

Diferensial Orde Kedua : $d^2 z = z_{xx} dx^2 + z_{xy} dxdy + z_{yx} dxdy + z_{yy} dy^2$

dalam bentuk matriks : $d^2 z = \begin{bmatrix} dx & dy \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_{xx} & z_{xy} \\ z_{yx} & z_{yy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx \\ dy \end{bmatrix}$

Maka uji Hessian untuk kasus tanpa kendala (Free Extremum
Hessian tests) :

1. z adalah maksimum relatif
   - jika d^2z adalah definit negatif, yaitu jika :
     |H1| < 0, |H2| > 0, |H3| < 0, ...
2. z adalah minimum relatif
   - jika d^2z adalah definit positif, yaitu jika :
     |H1| > 0, |H2| > 0, |H3| > 0, ...

II. Kasus dengan kendala

$$z = ax^2 + 2hxy + by^2 \quad \textit{kendala :} \ \alpha x + \beta y = 0$$

pecahkan kendala untuk y: $y = -\dfrac{\alpha}{\beta} x$

substitusikan ke fungsi objektif:

$$z = ax^2 + 2hx\left(-\frac{\alpha}{\beta} x\right) + b\left(-\frac{\alpha}{\beta} x\right)^2$$

$$z = \left(a\beta^2 - 2\alpha\beta h + b\alpha^2\right)\left(\frac{x}{\beta}\right)^2$$

$$z > 0 \ \ \text{jika } a\beta^2 - 2\alpha\beta h + b\alpha^2 > 0$$

Sedangkan $H = \begin{vmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ \alpha & a & h \\ \beta & h & b \end{vmatrix} = -a\beta^2 + 2\alpha\beta h - b\alpha^2$

Maka z definit positif → minimum relatif jika

$$H = \begin{vmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ \alpha & a & h \\ \beta & h & b \end{vmatrix} < 0$$

Maka uji Hessian Terbatas untuk kasus dengan kendala
(Bordered Hessian tests) :

1. z adalah maksimum relatif
   - jika d^2z adalah definit negatif (dg = 0), yaitu jika :
     |H| > 0

2. z adalah minimum relatif
    - jika d^2z adalah definit positif (dg = 0), yaitu jika :

$$|H| < 0$$

Uji Hessian Terbatas

Jika z = f(x,y)   dengan kendala   g(x,y) = k

Fungsi Langrangenya: $L(x,y,\lambda) = f(x,y) - \lambda\,[g(x,y) - k]$

Untuk membuktikan apakah titik ekstrim yang ditemukan merupakan titik maksimum atau minimum, yang merupak syarat cukup untuk titik ekstrim relatif, maka dicari MATRI HESSIAN TERBATAS (*BORDERED HESSIAN MATRIX*) sebag berikut:

$$H = \begin{bmatrix} 0 & g_x & g_y \\ g_x & L_{xx} & L_{xy} \\ g_y & L_{yx} & L_{yy} \end{bmatrix}$$

di mana: g_x = turunan pertama kendala terhadap x.
g_y = turunan pertama kendala terhadap y.
L_{xx} = turunan dari L_x terhadap x.
L_{xy} = turunan dari L_x terhadap y.
L_{yy} = turunan dari L_y terhadap y.
L_{yx} = turunan dari L_y terhadap x.

- Bila |H| > 0 maka fungsi tersebut mempunyai titi maksimum relatif.
- Bila |H| < 0 maka fungsi tersebut mempunyai titi minimum relatif.

Kasusn n-Variabel

Jika fungsi objektifnya mempunyai bentuk :

$z=f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ dengan syarat $g(x_1,x_2,\ldots,x_n)=c$

Fungsi Langrangenya:

$L(x_1,x_2,\ldots,x_n,\lambda) = f(x_1,x_2,\ldots,x_n) - \lambda\,[g(x_1,x_2,\ldots,x_n) - $

MATRIKS HESSIAN TERBATAS (*BORDERED HESSIAN MATR* sebagai berikut:

$$H = \begin{bmatrix} 0 & g_1 & g_2 & \cdots & g_n \\ g_1 & L_{11} & L_{12} & \cdots & L_{1n} \\ g_2 & L_{21} & L_{22} & \cdots & L_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ g_n & L_{n1} & L_{n2} & \cdots & L_{nn} \end{bmatrix}$$

Maka uji Hessian Terbatas untuk kasus dengan kendala (Bordered Hessian tests) :

1. z adalah maksimum relatif
    - jika d^2z adalah definit negatif (dg = 0), yaitu jika : minor utama |H2| > 0, |H3| < 0, |H4| > 0 ...
2. z adalah minimum relatif
    - jika d^2z adalah definit positif (dg = 0), yaitu jika : minor utama |H2| < 0, |H3| < 0, |H4| < 0 ...

Contoh:

Fungsi Utilitas $U(x_1,x_2) = x_1x_2 + 2x_1$

Kendala anggaran : $C = 60 - 4x_1 - 2x_2 = 0 \rightarrow g(x_1,x_2) = 4x_1 + 2x_2 = 60$

Fungsi Lagrange: $L = x_1x_2 + 2x_1 + \lambda(60 - 4x_1 - 2x_2)$

Dalam bagian sebelumnya telah didapatkan nilai stasioner contoh ini sbb:

$$\lambda^* = 64/16 = 4 \quad x_1^* = 128/16 = 8 \quad x_2^* = 224/16 = 14$$

$$U^* = x_1^*x_2^* + 2x_1^* = (8)14 + (2)8 = 128$$

Uji Hessian Terbatas :

$$|H| = \begin{vmatrix} 0 & g_1 & g_2 \\ g_1 & L_{11} & L_{12} \\ g_2 & L_{21} & L_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 16 > 0$$

Yang memastikan nilai U* sebagai suatu maksimum relatif.

Note: Seperti anda lihat elemen-elemen matriks Hessian hampir sama dengan matriks Jacobian, kecuali bagian g_1 dan g_2 berlawanan tanda antara matriks Hessian dan matriks Jacobian. Walaupun begitu perhitungan Determinannya mempunyai nilai yang sama.

D. Aplikasi dari Optimasi dengan Kendala Persamaan

- Memaksimumkan Utilitas dan Permintaan Konsumen

Misalkan terdapat pilihan dua barang saja, dimana keduanya mempunyai fungsi utilitas marginal postif ($U_x, U_y > 0$) dan kontinu. Harga kedua barang ditentukan oleh pasar sehingga bersifat eksogen. Jika daya beli konsumen adalah B, maka persoalannya adalah pemaksimuman fungsi utilitas : U=U(x,y) dengan syarat:

$$xP_x + yP_y = B$$

Fungsi Lagrangenya:

$$Z = U(x,y) + \lambda(B - xP_x - yP_y)$$

Syarat Orde Pertama:

$$Z_\lambda = B - xP_x - yP_y = 0$$

$$Z_x = U_x - \lambda P_x = 0$$

$$Z_y = U_y - \lambda P_y = 0$$

Diferensial Fungsi Implisitnya:

$$-P_x d\bar{x} - P_y d\bar{y} = \bar{x}dP_x + \bar{y}dP_y - dB$$
$$-P_x d\bar{\lambda} + U_{xx}d\bar{x} + U_{xy}d\bar{y} = \bar{\lambda}dP_x$$
$$-P_y d\bar{\lambda} + U_{yx}d\bar{x} + U_{yy}d\bar{y} = \bar{\lambda}dP_y$$

Dalam bentuk matriks:

$$\begin{bmatrix} 0 & -P_x & -P_y \\ -P_x & U_{xx} & U_{xy} \\ -P_y & U_{yx} & U_{yy} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} d\bar{\lambda} \\ d\bar{x} \\ d\bar{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{x}dP_x & \bar{y}dP_y & -dB \\ \bar{\lambda}\,dP_x & 0 & 0 \\ 0 & \bar{\lambda}\,dP_y & 0 \end{bmatrix}$$

Syarat Orde Pertama

Syarat orde pertama ekuivalen dengan persamaan berikut:

$$\frac{U_x}{P_x} = \frac{U_y}{P_y} = \lambda = \frac{\partial U^*}{\partial B}, \qquad \frac{P_x}{P_y} = \frac{U_x}{U_y}$$

Kurva Utilitas indiferens

$$U = U(x,y)$$
$$dU = U_x dx + U_y dy = 0$$

Dengan implikasi

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-U_x}{U_x} = \textit{negatif dr rasio utilitas marjinal } \frac{U_x}{U_y}$$

Untuk Garis anggaran, dapat ditulis sebagai:

$$B = xP_x + yP_y$$
$$y = \frac{B}{P_y} - \frac{P_x}{P_y}x, \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{-P_x}{P_y} = \frac{-U_y}{U_x}$$

Bentuk yang baru ini dapat diinterpretasikan sbb: dalam memaksimumkan utilitas, konsumen harus mengalokasik anggaran sehingga kemiringan/lereng garis anggaran sar dengan kemiringan kurva indiferens.

Syarat Orde Kedua

Jika Hessian Terbatas nya adalah positif maka:

$$|\bar{H}| = \begin{vmatrix} 0 & -P_x & -P_y \\ -P_x & U_{xx} & U_{xy} \\ -P_y & U_{yx} & U_{yy} \end{vmatrix} > 0$$

$$= -P_x^2 U_{yy} + 2P_xP_yU_{xy} - P_y^2 U_{xx} > 0$$

$$|\bar{H}| : \text{definit negatif} \quad \rightarrow \max$$

Di sini nilai stasioner U* dipastikan maksimum.

I. Kemiringan kurva indiferen telah dijamin oleh

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-U_x}{U_y} = \textit{negatif dr rasio utilitas marjinal } \frac{U_x}{U_y},$$

Sedangkan kecembungan sempurna dijamin oleh $\frac{d^2y}{dx^2} > 0$

Untuk mendapatkan $\frac{d^2y}{dx^2}$, dapat didiferensiasikan $\frac{dy}{dx} = \frac{-U_x}{U_y}$, sbb:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{-U_x}{U_y}\right) = -\frac{1}{U_y^2}\left(U_y(dU_x/dx) - U_x(dU_y/dx)\right)$$

$$\frac{dU_x}{dx} = U_{xx}\,dx/dx + U_{xy}\,dy/dx = U_{xx} + U_{xy}\,dy/dx$$

$$\frac{dU_y}{dx} = U_{yx}\,dx/dx + U_{yy}\,dy/dx = U_{yx} + U_{yy}\,dy/dx$$

Sehingga di dapat:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{U_y^2}\left(U_y(U_{xx} + U_{xy}\,dy/dx) - U_x(U_{yx} + U_{yy}\,dy/dx)\right)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{U_y^2}\left(U_y\left(U_{xx} - U_{xy}\frac{P_x}{P_y}\right) - U_x\left(U_{xy} - U_{yy}\frac{P_x}{P_y}\right)\right)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{U_y^2}\left(U_yU_{xx} - U_y\frac{P_x}{P_y}U_{xy} - U_y\frac{P_x}{P_y}U_{xy} + U_y\frac{P_x}{P_y}\frac{P_x}{P_y}U_{yy}\right), \qquad \text{subtitusi } U_x = U_y\frac{P_x}{P_y}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{U_y^2}\left(U_yU_{xx} - 2U_y\frac{P_x}{P_y}U_{xy} + U_y\frac{P_x^2}{P_y^2}U_{yy}\right), \qquad \textit{penyederhanaan}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{U_yP_y^2}\left(P_y^2U_{xx} - 2P_yP_xU_{xy} + P_x^2U_{yy}\right)$$

Kurvatur dari fungsi utilitas indiferens adalah :

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2P_xP_yU_{xy} - P_y^2U_{xx} - P_x^2U_{yy}}{U_yP_y^2} = \frac{|\bar{H}|}{U_yP_y^2}$$

$$\textit{dengan } \frac{1}{U_yP_y^2} > 0$$

$$|\overline{H}| = \begin{vmatrix} 0 & -P_x & -P_y \\ -P_x & U_{xx} & U_{xy} \\ -P_y & U_{yx} & U_{yy} \end{vmatrix} = 2P_xP_yU_{xy} - P_y^2U_{xx} - P_x^2U_{yy} > 0$$

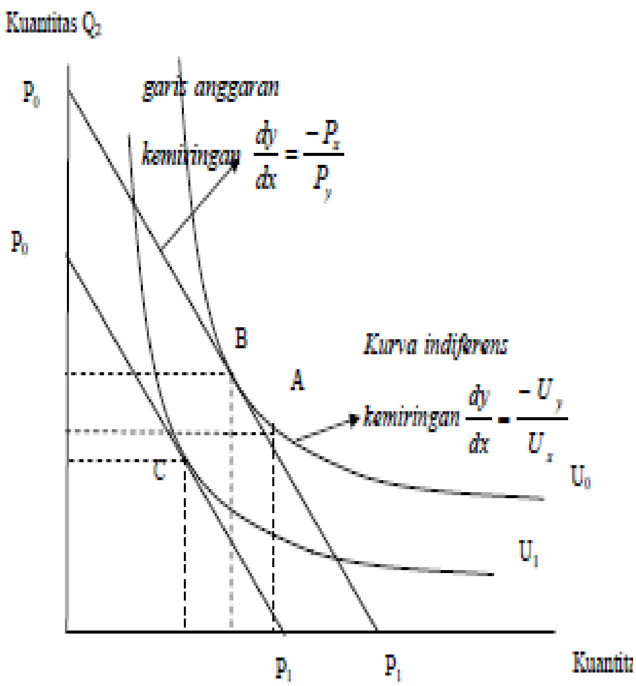
$|\overline{H}| > 0$, positif (definit negatif) sehingga U maksimum,

Shg di dapat :

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2P_xP_yU_{xy} - P_y^2U_{xx} - P_x^2U_{yy}}{U_yP_y^2} = \frac{|\overline{H}|}{U_yP_y^2} > 0$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} > 0, \text{ positif,}$$

Interpretasi dari $\frac{d^2y}{dx^2} > 0$ adalah : Kurva Utilitas Indiferen:
Cembung sempurna pada titik singgungnya.



Latihan

1. Diketahui fungsi kepuasan (*utility*) seorang konsumen ya mengkonsumsi barang X dan Y adalah U = x^2y, dan fungsi anggaran dari konsumen itu adalah $p_xx + p_yy$ = I, dimana: dan y = jumlah barang X dan Y yang dikonsumsi (dalam un
P_x = harga barang x = \$3.
P_y = harga barang y = \$6.
I = *income konsumen* = \$18.
Berapa unit x dan y yang harus dikonsumsi konsumen itu a kepuasannya maksimum? Berapa kepuasan maksimumnya?

BAB 13

ANALISIS DINAMIK DAN INTEGRAL (BAG.I)

A. Dinamika dan Integrasi

- Model Statis : mencari nilai variabel endogen yang memenuhi kondisi ekuilibrium tertentu.
- Model Optimasi : mencari nilai variabel pilihan yang mengoptimasi fungsi tujuan tertentu.
- Model Dinamik : membuat sketsa jalur waktu dari beberapa variabel berdasarkan pola perubahan yang telah diketahui.
- Contoh model dinamik : Misalkan jumlah populasi H diketahui berubah sepanjang waktu dengan pola :

$$\frac{dH}{dt} = t^{-1/2}$$

Permasalahannya : bagaimana jalur waktu dari populasi H=H(t) dapat menghasilkan tingkat perubahan di atas.

- JADI dalam model dinamik permasalahannya adalah kebalikan dari proses diferensiasi, yaitu : mencari fungsi asal dari suatu fungsi derivatif tertentu → Kalkulus Integrasi
- Solusi : $H(t) = 2t^{1/2} + c$, dengan c=konstan. Adanya c ini menyebabkan tidak ada jalur waktu yang unik, sehingga untuk menyelesaikannya perlu informasi tambahan, yaitu : Kondisi Awal atau Kondisi Batas
- Jika Kondisi Awal : nilai H pada saat t=0, H(0)=100 maka konstanta c dapat dihitung :

$$H(0) = 2(0^{1/2}) + c = 100$$

$$c = 100$$

Sehingga solusi uniknya adalah:

$$H(t) = 2t^{1/2} + 100$$

B. Integral Tak Tentu (Indefinit)

- Sifat Integral

Notasi : F(x) = fungsi asal, f (x) = F'(x) = derivatif dari fungsi asal
Untuk mencari F(x) dari f(x) maka dilakukan Integrasi fungsi f(x) terhadap x, yang dinotasikan sbb:

$$\int f(x)\,dx = f(x) + c$$

Sehingga dapat diartikan sebagai pembalikan proses diferensiasi atau anti-derivatif:

$$\frac{d}{dx}F(x) = f(x) \Rightarrow \int f(x)\,dx = f(x) + c$$

- Aturan Dasar Integrasi

a. Aturan Pangkat

$$\boxed{\int x^n\,dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + c}\qquad \text{untuk } n \neq -1$$

Contoh :

1. $\int x^5\,dx = \frac{1}{6}x^6 + c$

2. $\int x^{3/2}\,dx = \frac{2}{5}x^{5/2} + c$

b. Aturan Eksponensial

$$\boxed{\int f'(x).e^{f(x)}\,dx = e^{f(x)} + c}$$

Bentuk khusus : $\int e^x.dx = e^x + c$

Contoh :

1. $\int 2.e^{2x}\,dx = e^{2x} + c$

2. $\int e^{2/3x}\,dx = \int\left(\frac{3}{2}\right)\frac{2}{3}\left(e^{2/3x}\right)dx = \frac{3}{2}e^{2/3x} + c$

3. $\int \frac{1}{5}e^{1/3x}\,dx = \int(3)\frac{1}{5}\left(\frac{1}{3}e^{1/3x}\right)dx = \frac{3}{5}e^{1/3x} + c$

c. Aturan Logaritma

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \text{Ln } f(x) + c \quad \text{untuk } f(x) > 0$$

$$\text{atau } \int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \text{Ln}|f(x)| + c \quad \text{untuk } f(x) \neq 0$$

Bentuk khusus :

$$\int \frac{1}{x}dx = \text{Ln } x + c \quad \text{untuk } x > 0$$

$$\text{atau } \int \frac{1}{x}dx = \text{Ln}|x| + c \quad \text{untuk } x \neq 0$$

Contoh :

1. $\int \frac{2}{2x+5}dx = \text{Ln}|2x+5| + c$ untuk $x \neq -5/2$

Note: $f(x)=2x+5 \Rightarrow f'(x)=2$

2. $\int \frac{(x+1)}{x^2+2x+5}dx = \frac{1}{2}\int\frac{2(x+1)}{x^2+2x+5}dx = \frac{1}{2}\ln|x^2+2x+5| + C$

Note: $f(x)=x^2+2x+5 \Rightarrow f'(x)=2x+2=2(x+1)$

3. $\int\left[2e^{2x} + \frac{14x}{7x^2+5} + x^{\frac{1}{3}}\right]dx = \int 2e^{2x}dx + \int x^{\frac{1}{3}}dx + \int\frac{14x}{7x^2+5}dx$

(Gunakan aturan Penjumlahan Integral)

$$= e^{2x} + c_1 + \frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} + c_2 + \text{Ln}|7x^2+5| + c_3$$

$$= e^{2x} + \frac{3}{4}x^{4/3} + \text{Ln}|7x^2+5| + c$$

d. Aturan Substitusi

$$\boxed{\int\left[f(u).\frac{du}{dx}\right]dx = \int f(u).du = F(u) + c}$$

Contoh :

1. $\int 2x(x^2+1)dx$

Misalkan : $u = x^2+1$

$$\frac{du}{dx} = 2x \Rightarrow 2x.dx = du$$

$$\int 2x(x^2+1)\,dx = \int(x^2+1)(2x\,dx) = \int u\,du$$

$$= \frac{1}{2}u^2 + c = \frac{1}{2}(x^2+1)^2 + c$$

2. $\int 6x^2(x^3+2)^{99}\,dx$

Misalkan : $u = x^3+2$

$$\frac{du}{dx} = 3x^2 \Rightarrow 3x^2\,dx = du$$

$$\int 6x^2(x^3+2)^{99}\,dx = \int 2(x^3+2)^{99}(3x^2dx) = \int 2u^{99}\,du$$

$$= \frac{2}{100}u^{100} + c = \frac{2}{100}(x^3+2)^{100} + c$$

e. Integral Parsial

$$\boxed{\int v\,du = uv - \int u.du}$$

Contoh :

1. $\int x(x+1)^{1/2}\,dx$

Misalkan:

- $v = x \Rightarrow dv = dx$ dan
- $du = (x+1)^{1/2}\,dx \Rightarrow u = \int du = \int (x+1)^{1/2}\,dx = \frac{2}{3}(x+$

Sehingga :

$$\int (x+1)^{1/2} = uv - \int u\,dv$$

$$= \frac{2}{3}(x+1)^{3/2}(x) - \int \frac{2}{3}(x+1)^{3/2}\,dx$$

$$= \frac{2}{3}x(x+1)^{3/2} - \frac{4}{15}(x+1)^{5/2} + c$$

C. Integral Tentu (Definit)

- Arti Integral Tentu

Teorema Fundamental Kalkulus

Jika fungsi $f(x)$ kontinu pada interval $a \le x \le b$, maka

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

dimana $F(x)$ adalah anti-derivatif dari $f(x)$ pada $a \le x \le$

Contoh :

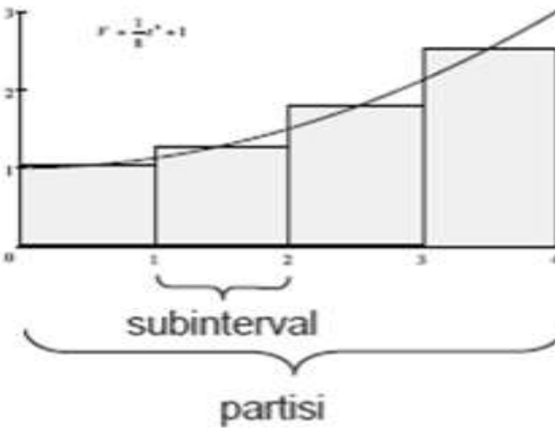
1. $\int_2^1 (x^3+3x)dx = \left[\frac{x^4}{4} + \frac{3x^2}{2}\right]_2^1$

$$= \left(\frac{1}{4}+\frac{3}{2}\right) - (4+6) = -8\frac{1}{4}$$

2. $\int_1^2 (3x^2+2x+1)dx = \left[x^3+x^2+x\right]_1^2$

$$= 14-13 = 11$$

- Integral Tentu sebagai Luas di bawah Kurv

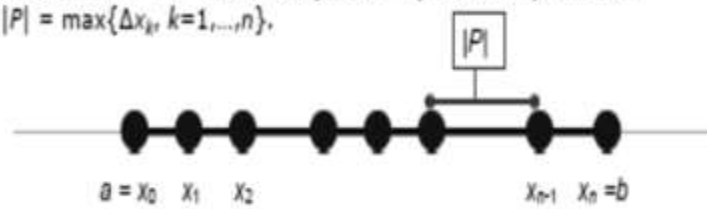


Jika kita menghitung Luas dibawah kurva dengan menambahkan persegipanjang seperti gambar di atas, hasilnya adalah **Jumlah Riemann** (*Riemann sum*). Lebar dari persegipanjang disebut **subinterval.** Subinterval ini tidak harus mempunyai ukuran yang sama. Dan keseluruhan interval disebut sebagai **partisi.**

Secara formal definisi subinterval, sbb:
Himpunan berurut titik-titik $P=(x_0,x_1,\ldots,x_n)$ dari interval tertutup $I = [a,b]$, yang memenuhi $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$ merupakan sebuah partisi dari interval $[a,b]$ ke dalam subinterval $I_k=[x_{k-1},x_k]$.

Selanjutnya jika partisi tersebut dinotasikan sebagai P, maka panjang dari subinterval terpanjang disebut sebagai **norm** dari P dan dinotasikan sebagai $|P|$

Secara formal definisi norm dari P, sbb:
Misalkan $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ Untuk partisi $P=(x_0,x_1,\ldots,x_n)$, misalkan $|P| = \max\{\Delta x_k, k=1,\ldots,n\}$.



Pilih titik sample x_i^* dalam subinterval $[x_{k-1},x_k]$.
Jumlah Riemann yang berkaitan dengan partisi P dan fungsi f didefinisikan sebagai:

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x_i = f(x_1^*)\Delta x_1 + f(x_2^*)\Delta x_2 + \ldots + f(x_n^*)\Delta x_n}$$

Jika kita mengambil |P| makin kecil, maka aproksimasi Luas di bawah kurva dengan menggunakan Jumlah Riemann semakin tepat. Sehingga bila $|P| \to 0$ didapat:

$$\boxed{Luas = \lim_{|P|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x_i}$$

Definisi Integral Tentu sebagai Luas di bawah Kurva
Jika f adalah fungsi yang didefiniskan pada interval [a, b], maka **integral** tentu dari f dari a sampai dengan b adalah:

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = \lim_{|P|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x_i}$$

Jika limit tersebut ada, maka dikatakan f terintegrasi pada [a,b].

- Sifat Integral Tentu

Sifat I: Pertukaran limit integrasi mengubah tanda integral tentu:

$$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$$

Sifat II: Integral tentu mempunyai nilai no; bila dua limit integrasi identik:

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0$$

Sifat III: Integral tentu dapat diekspresikan sebagai penjumlahan bilangan terbatas dari subintegral tentu sbb

$$\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$$

Sifat IV: $\int_a^b -f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$

Sifat V: $\int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$

Sifat VI: $\int_a^b [f(x)+g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$

Sifat VII: Integrasi Parsial
Jika diketahui u(x) dan v(x) maka:

$$\int_{x=a}^{x=b} v\,du = uv\Big|_{x=a}^{x=b} - \int_{x=a}^{x=b} u\,dv$$

Contoh:

1. Cari Luas di bawah kurva berikut: $\int_1^3 (x^2+1)\,dx$

$$A = \left|\int_1^3 (x^2+1)\,dx\right| = \left|\left[\frac{x^3}{3}+x\right]_1^3\right|$$

$$= \left|(9-3)-\left(\frac{1}{3}+1\right)\right| = \left|12-\frac{4}{3}\right| = 10.67$$

Latihan

1. Cari Luas daerah R di antara kurva $y = 4x$ dan $y = x^3 + 3x^2$
2. Cari Luas daerah R di antara kurva $y = x^3$ dan $y = x^2$
   Langkah pertama adalah mencari perpotongan ke dua kurv tersebut :

$$x^3 = x^2 \Rightarrow x^2(x-1) = 0 \Rightarrow x=1 \text{ or } x=0$$

$$A = \left|\int_0^1 (x^3 - x^2)\,dx\right| = \left|\left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1\right|$$

$$= \left|\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3}\right)\right| = \left|-\frac{1}{12}\right| = \frac{1}{12}$$

PERTEMUAN 14

ANALISIS DINAMIK DAN INTEGRAL (BAG. II)

A. Integral Tak Wajar (Improper Integral)

- **Integrasi dengan Limit Tak Hingga**

  Bentuk integral tak wajar jenis ini sbb:

$$\int_a^\infty f(x)\,dx \text{ dan } \int_{-\infty}^b f(x)\,dx$$

  Oleh karena ∞ bukan angka, maka integral di atas didefinisikan sebagai:

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)\,dx$$

  Bila limit ini ada, integral tak wajar tersebut dikatakan Konvergen. Dan bila limitnya tidak ada, disebut Divergen.

- Contoh:

  Hitung $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx$

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{b\to\infty}\left[\frac{-1}{x}\right]_1^b = \lim_{b\to\infty}\left[\frac{-1}{b}+1\right] = 1$$

  Jadi limitnya ada dan intregral tak wajar tersebut konvergen, dan mempunyai nilai 1

- **Integran Tak Terhingga**

  Bila integran menjadi tak terhingga dalam interval integrasi [a,b] maka disebut integral tak wajar juga.

- Contoh:

Hitung $\int_0^1 \frac{1}{x} dx$

integran tak terhingga pada limit bawah dari integrasi (bila x maka 1/x → ∞)

Langkah pertama cari integral:

$$\int_a^1 \frac{1}{x} dx = [\ln x]_a^1 = \ln 1 - \ln a = -\ln a$$

Kemudian dihitung :

$$\int_0^1 \frac{1}{x} dx = \lim_{a \to 0^+} \int_a^1 \frac{1}{x} dx = \lim_{a \to 0^+} (-\ln a)$$

Karena limit ini tidak ada (bila a→0⁺ maka ln a → ∞), int wajar ini divergen.

B. Aplikasi Integral dalam Ekonomi

- Dari Fungsi Marginal ke Fungsi Total
- Contoh:

(1) Diketahui MC (*Maginal Cost*) dari suatu per adalah: $MC = C' = 2e^{0,2Q}$ dan bila *fixed cost*, FC= 90 Tentukan fungsi biaya total (TC)?

Jawab

$$TC(Q) = \int 2e^{0,2Q}\, dQ$$
$$= 10\int e^{0,2Q}\,(0,2\, dQ)$$
$$= 10e^{0,2Q} + c$$
$$Q = 0 \Rightarrow TC(0) = FC = 90$$
$$TC(0) = 10e^{0,2.0} + C$$
$$90 = 10 + C$$
$$C = 80$$
$$\Downarrow$$
$$TC(Q) = 10e^{0,2Q} + 80$$

(2) Diketahui fungsi MPS (*Marginal Propensity to Save*) masyarakat adalah : MPS= $S'(Y) = 0,5 - 0,2Y^{-1/2}$. diketahui pula, ketika income (Y) masyarakat ha sebesar 25 terjadi dissaving sebesar 3,5 tentukan fu tabungan masyarakat S(Y) ?

Jawab

$$S(y) = \int MPS\, dY$$
$$= \int (0,5 - 0,2Y^{-1/2})\, dY$$
$$= 0,5Y - 0,4Y^{1/2} + c$$

Dissaving ⇒ S = 63,5 maka ⇒ Y= 25

$\Rightarrow -3,5 = 0,5(25) - 0,4\sqrt{25} + C$

Didapat C=-14

∴ $S(Y) = 0,5 - 0,4Y^{1/2} - 14$

(3) Tentukan fungsi total penerimaan (TR), bila diketahui bahwa *marginal revenue* $MR(Q) = 60 - 2Q - 2Q^2$

Jawab

$$TR(Q) = \int MR(Q)\, dQ$$
$$= \int (60 - 2Q - 2Q^2)\, dQ$$
$$= 60Q - Q^2 - \frac{2}{3}Q^3 + C$$

Diketahui bahwa pada saat Q=0 → TR=0 (tidak ada barang, maka tidak ada pendapatan). Selanjutnya:

$$TR(0) = 60.0 - 0^2 - \frac{2}{3}0^3 + C$$

Sehingga didapat C=0

∴ $TR(Q) = 60Q - Q^2 - \frac{2}{3}Q^3$

- Investasi dan Pembentukan Modal

Proses pembentukan modal adalah proses penjumlahan persediaan atau stok modal. Dengan mengasumsikan proses kontinu, maka dapat dinyatakan sebagai fungsi waktu.

Didefinisikan : K(t) = stok modal pada saat t

K'(t) = *rate of capital formation* pada saat t

I (t) = *net investment flow* pada saat t

Persediaan modal K(t) dan Investasi Netto I(t) dihubungkan d

K' (t) = I (t)

K (t) = ∫ [(I (t)] dt

Untuk mengetahui akumulasi kapital pada interval [a,b], dila integrasi tentu:

$$\int_a^b I(t)\,dt = K(t)$$

- Contoh :

1. Diketahui bahwa net investment, $I(t) = 3t^{1/2}$ dollar per tahun
   Berapakah *capital formation* dari interval tertutup [1,4].

$$K(t) = \int_1^4 3t^{1/2}\,dt = \left[2t^{3/2}\right]_1^4$$

$$= 2(4)^{3/2} - 2(1)^{3/2}$$

$$= 16 - 2$$

$$= 14$$

- **Nilai Sekarang dari Arus Kas**

Misalkan kita mendapatkan arus kas masa depan (yaitu serangkaian pendapatan piutang pada berbagai waktu atau pengeluaran biaya hutang pada berbagai waktu). Bagaimana kita menghitung nilai sekarang dari seluruh arus kas tersebut?

Contoh dalam kasus aliran kas kontinu di sini adalah Wine Storage Problem:

Definisikan :

C = *Purchase cost* / biaya pembelian wine

V(t) = *Future sale value*

N(t) = *Net Present value*

S(t) = *Storage cost* per unit waktu

Tujuan : Maksimalkan *net present value*

a. Nilai penjualan (masa mendatang) bervariasi menurut waktu dan nilai sekarang nya menjadi $V(t)\,e^{-rt}$

b. Storage cost = S(t) = $\int_0^t \frac{s}{e^{rt}}\,dt = \frac{s}{r}(1 - e^{-rt})$

   dengan r=tingkat diskonto per tahun

c. Jadi nilai sekarang netto N(t) adalah:

$$N(t) = V(t)e^{-rt} - \frac{s}{r}(1 - e^{-rt}) - C = \left[V(t) + \frac{s}{r}\right]e^{-rt} - C$$

Untuk memaksimumkan N(t), nilai t harus dipilih sedemikian rupa sehingga N'(t)=0 :

$$N'(t) = V'(t)e^{-rt} - r\left[V(t) + \frac{s}{r}\right]e^{-rt} = \left[V'(t) - rV(t) - s\right]e^{-rt}$$

dan akan menjadi nol jika dan hanya jika :

$$V'(t) = rV(t) + s$$

Persamaan inilah yang menjadi kondisi optimasi yang diperlukan untuk pemilihan waktu penjualan t*.

Nilai Sekarang dari Arus Perpetual

Jika arus kas berlangsung selamanya - contohnya bunga atas obligasi perpetual- nilai sekarang dari arus kas menjadi:

$$\Pi = \int_0^\infty \frac{R(t)}{e^{rt}}\,dt$$

yang merupakan integral tak wajar.

Contoh:

Carilah nilai sekarang dari aliran pendapatan perpetual yang mengalir pada tingkat yang seragam sebesar D dollar per tahun, bila tingkat diskonto kontinu adalah r maka:

$$\Pi = \int_0^\infty \frac{D}{e^{rt}}\,dt = \lim_{b\to\infty}\int_0^b \frac{D}{e^{rt}}\,dt = \lim_{b\to\infty}\frac{D}{r}(1 - r^{-rb}) = \frac{D}{r}$$

Perhatikan parameter b telah hilang dari jawaban akhir.

Latihan:

1. Bila diketahui fungsi pendapatan marjinal berikut:
   a. $R'(Q) = 28Q - e^{0.3Q}$
   b. $R'(Q) = 10(1+Q)^{-2}$

   cari fungsi total pendapatan R(Q). Kondisi awal apakah yang dapat diperkenalkan untuk menentukan konstanta integrasi ?

UTS SEMESTER GASAL 2006/2007

MATEMATIKA EKONOMI DAN BISNIS

150 menit (Closed Book)

SOAL 1 (Bobot 30%)

1. Diketahui bahwa fungsi permintaan dari sebuah komoditi energi adalah sebagai berikut :
$Q^D = a - bp + cy$ dengan a,b,c,y>0
Dimana Q^D adalah jumlah yang diminta ,P adalah harga dan y adalah *aggregate consumers income.*
Sedangkan fungsi penawarannya adalah :
$Q^S = \alpha + \beta P$ dengan $\alpha < 0$ dan $\beta > 0$
Serta ada kondisi yang harus dipenuhi ,yaitu :
$\frac{-\alpha}{\beta} < \frac{a+cy}{b}$, dimana Q^S adaah jumlah yang ditawarkan

a. Tentukan solusi P* pada saat keseimbangan dan tentukan arah dari dp*/dy
b. Apabila a = 5, c=0,2 ,y=50. b=1, a =-6,dan β=2 ,serta peemritnah kemudian menetapkan subsidi sebesar 1,5 atas setiap unit barang yang diproduksi. Hitunglah harga dan kuantitas barang sebelum dan sesudah subsidi !
c. Buatlah grafik dari hasil yang anda perolhe dari jawaban b diatas (gambarkan P dan Q pada saat keseimbangan ,baik sebelum subsidi maupun setelah subsidi] !

SOAL 2 (Bobot 25%)

Diberikan suatu model pendapatan nasional sebagai berikut :

$$Y = C + I_0$$
$$C = C_0 + bY_d$$
$$Y_d = Y - T$$

Dengan menggantikan nilai C_0 =100, b=0,6 , =40 ,dan T=50.
a. Susunlah permasalahan di atas dalam bentuk matriks Ax=b [petunjuk : tentukanlah terlebih dahulu variabel endogen dalam model dan ordo dari matriks A yang sangat tergantung dari jumlah variabel endogen tersebut]
b. Tentukanlah nilai keseimbangan dari Y,C,dan Yd dengan menggunakan teknik matriks Invers !

SOAL 3 [Bobot 25%]

Diberikan model pendapatan Nasional sebagai berikut

$$Y = C(Y) + I(r) + G_0$$
$$kY + L(r) = M_0^s$$
dengan $0 < C_Y < 1;\ I_r < 0;\ k \in \Re, k > 0$ dan $L_r < 0$

Dimana :
C adalah konsumsi, Y adalah pendapatan nasional , I adalah Investasi, r adalah suku bunga , G_0 adalah konsumsi (pengeluaran) pemerintah , adalah permintaan uang, dan M_0^S adalah penawaran uang

Berdasarkan model di atas :

Dengan melakukan analisa perbandingan statis, tentukanlah dampak perubahan penawaran uang (kebijakan moneter) terhadap suku Bunga dan perubahan pengeluaran pemerintah (kebijakan fiscal) terhadap pendapatan nasional

Soal 4. [Bobot 20]

4A. Diketahui fungsi kepuasan seorang pekerja dari mengkonsumsi dua komoditi adalah sebagai berikut $U = U(x_1, x_2) = (x_1+2)^2(x_2+3)^3$.
Berdasarkan fungsi kepuasan tersebut, tentukanlah fungsi kepuasan marjinal untuk kedua komoditi ($\frac{\partial U}{\partial x_1}$ dan $\frac{\partial U}{\partial x_2}$)?

4B. Apabila $S = R^{\beta}$, $R = 1 + \alpha L^{\theta}$ dan $L = Ay^{\rho} + B$, tentukanlah bentuk dari $\frac{dS}{dy}$?

UTS SEMESTER GASAL 2007/2008

MATEMATIKA EKONOMI DAN BISNIS

150 menit (Closed Book)

Soal Pertama [Bobot 20]

1A. Apabila $S = R^{\beta}$, $R = 1 + \alpha L^{\theta}$ dan $L = Ay^{\rho} + B$, tentukanlah $\frac{dS}{dy}$?

1B. Berdasarkan fungsi permintaan $Qd_1 = 35 - 3P_1 + P_2$ Tentukanlah:
(i) Berapakah elastisitas permintaan terhadap harga barang itu sendiri dan barang yang lainnya, apabila diketahui bahwa $Qd_1 = 4$, $P_1 = 2$ dan $P_2 = 3$?
(ii) Apakah hubungan antara barang 1 dengan barang 2?

Soal Kedua [Bobot 25]

PT NOKIHA PHONE memproduksi dua jenis produk unggulan dengan struktur fungsi biaya sebagai berikut: $C(Q_1,Q_2) = 3Q_1 + Q_1Q_2 - 2Q_2 + 100$ dengan fungsi-fungsi permintaan $Q_1 = 1000/(p_1p_2)$ dan $Q_2 = 150 - p_1 - 2p_2$. Variabel Q_1 dan Q_2 masing-masing menyatakan jumlah handphone yang diproduksi; sedangkan p_1 dan p_2 masing-masing menyatakan harga per handphone.
(i) Tentukan *marginal cost* nya terhadap harga produk 1 (atau $\partial C/\partial p_1$)?
(ii) Hitung besaran *marginal cost* nya bila p_1 = 3,5 juta rupiah dan p_2 =2,5 juta rupiah?
(iii) Interpretasikan jawaban Saudara?

Soal Ketiga [Bobot 30]

Model Pendapatan Nasional dinyatakan dalam sistem persamaan berikut:

$Y = C + I_0 + G_0$; $C = \alpha + \beta(Y - T)$; $(\alpha > 0;\ 0 < \beta < 1)$; $T = \gamma + \delta Y$; $(\gamma > 0;\ 0 < \delta < 1)$; Y, C da T: variabel endo; I_0 dan G_0 variabel exo

a. Cari solusi Y, C dan T dengan Metode Crammer

b. Bila pengeluaran pemerintah (G_0) meningkat, bagaimana denga keseimbangan Y, C dan T yang baru? Rincikan jawaban Saudar menggunakan turunan parsial.

c. Bagaimana kalau pajak pendapatan, δ, naik, apakah Y akan naik? Rincika jawaban Saudara menggunakan turunan parsial.

d. Bagaimana kalau pajak bukan pendapatan, γ, naik, apakah Y akan nail Rincikan jawaban Saudara menggunakan turunan parsial.

Soal Keempat [Bobot 25]

Misalkan fungsi permintaan pasar untuk suatu produk adalah $Q_d = 20 - 2P$, da fungsi penawarannya adalah $Q_s = -15 + 3P$. Diasumsikan satuan harga adala rupiah dan satuan kuantitas adalah unit.

Pertanyaan:

a. Berapakah harga dan kuantitas produk tersebut dala keseimbangan?

b. Jika untuk produk tersebut dikenakan pajak spesifik sebesar Rp 2, per unit produk, berapa harga dan kuantitas dalam keseimbang yang baru? Berapa beban pajak yang ditanggung produsen d konsumen? Gambarkan grafiknya!

Soal Keempat [Bobot 20]

Sebuah perekonomian tertutup dimodelkan sebagai berikut:

Y = C + Io + Go
C = a + bYd
Yd = Y – T
T = Tx - Tr

dimana:

Y = Pendapatan Nasional; C = Konsumsi Rumah Tangga;
Io = Investasi Swasta (Autonomus); Go = Pengeluaran Pemerintah (Autonomus)
Yd = Disposable Income; Tx = Pajak (Autonomus);
Tr = Transfer Payment (Autonomus)

Berdasarkan informasi tersebut:

a. Carilah Pendapatan Nasional (Y) dalam keseimbangan dengan menggunakan Aljabar Biasa

b. Carilah Y keseimbangan dengan menggunakan Aljabar Matriks (Aljabar Linier)

Soal Kelima [Bobot 20]

Pecahkan soal-soal berikut ini!

- Jika $\frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{x}$, maka dengan aturan rantai, tentukanlah bentuk dari $\frac{d}{dx}\ln(x^2 + 3x) = ?$
- Apakah fungsi $y = f(x) = \frac{x^2 - 9x + 20}{x - 5}$ kontinyu pada x= 5? Mengapa? Jelaskan

UTS SEMESTER GASAL 2008/2009

MATEMATIKA EKONOMI DAN BISNIS

150 menit (Closed Book)

Soal Pertama [Bobot 15]

Uang beredar dirumuskan sebagai $M = C + D$, dengan C dan D masing-masing adalah uang kartal dan uang giral. Uang kartal (C) diasumsikan adalah proporsi tetap dari uang giral (D), atau $C = c.D, 0 < c < 1$. Di lain pihak, uang primer (H) didefinisikan sebagai jumlah dari uang kartal (C) dan cadangan (atau *reserve*= R) yang dimiliki perbankan. Seperti halnya uang kartal, cadangan perbankan ini juga diasumsikan merupakan proporsi tetap dari uang giral, yakni $R = r.D, 0 < r < 1$. Sehingga dengan demikian, secara eksplisit uang beredar dapat dinyatakan sebagai bentuk $M = f(H, c, r) = H\frac{(1+c)}{(c+r)}$. Berdasarkan informasi tersebut, jawablah pertanyaan berikut:

a. Seandainya rasio cadangan perbankan r mengalami kenaikan, apa yang akan terjadi pada uang beredar M, meningkatkah atau menurun?

b. Bagaimana pula jika rasio uang kartal-giral c yang mengalami kenaikan, apa dampaknya terhadap uang beredar?

Soal Kedua [Bobot 25]

Permintaan luar negeri untuk ekspor Indonesia (X) dipengaruhi oleh pendapatan lu negeri (Y_f) dan harga barang ekspor (P). Bila diketahui bahwa persamaan permintaa ekspor adalah $X = Y_f^{1/2} - P^2$.

a. Formulasikan elastisitas harga barang barang ekspor terhadap permintaan ekspo (η_p) dan elastisitas pendapatan luar negeri terhadap permintaan ekspor (η_{Yf}).

b. Tentukan η_p dan η_{Yf} pada P = 10 dan Y=100.

c. Jelaskan arti dari η_p dan η_{Yf}.

d. Dengan membandingkan hasil kalkulasi elastisitas pada butir (b) di atas, apa yar dapat anda sarankan untuk mendorong ekspor Indonesia?

Soal Ketiga [Bobot 20]

Perusahaan kopi SEDAP MANTAP mengestimasi permintaan akan produknya adalah sebagai berikut: $Q_x = 20.000 - 3P_x + 2P_y$; dimana

Qx : Jumlah penjualan kopi SEDAP MANTAP (dalam Ton per bulan)
Px : Harga kopi SEDAP MANTAP (Rp/Kg)
Py : Harga kopi perusahaan pesaing (Rp/Kg)

Jika pada bulan Oktober 2008 ini, harga kopi SEDAP MANTAP adalah Rp 10.000,- sedangkan harga kopi pesaingnya adalah Rp 9.000,-, maka jawablah beberapa pertanya berikut:

a. hitung tingkat penjualan bulan Oktober 2008?

b. hitung elastisitas penjualan terhadap harga barang itu sendiri (ε_x) dan harga pesaingnya (ε_y), dan jelaskan arti dari nilai tersebut?

SEMESTER GASAL 2009/2010 *MATEMATIKA EKONOMI DAN BISNIS*

150 menit (Closed Book)

Soal Pertama [Bobot 25]

Apabila diketahui fungsi permintaan suatu produk adalah $Q_D = 200 - 2P$ dan fungsi penawarannya adalah $Q_S = 2P - 40$, maka tentukanlah:

(a) Berapakah nilai P dan Q yang terbentuk pada kondisi keseimbangan?

(b) Jika produk tersebut dikenakan pajak sebesar Rp. 40 per unit penjualan, berapakah P dan Q pada kondisi keseimbangan yang baru?

(c) Gambarkan keseimbangan yang terbentuk antara sebelum (a) dan sesudah (b) dikenakan pajak dengan menggunakan grafik.

Soal Kedua [Bobot 25]

Sebuah KUD melayani 3 desa untuk menjamin ketersediaan 3 jenis komoditi, yaitu pupuk "sangat manjur", pestisida "mematikan", dan kompos "murah meriah" dan masing-masing secara berturut-turut dinotasikan dengan x_1, x_2, dan x_3 (masing-masing dalam satuan kotak). Penyediaan 3 komoditi tersebut di setiap desa dilakukan secara bervariasi dengan berbagai kombinasi, dimana hal itu dilakukan untuk menjaga keseimbangan antara permintaan dan penawaran yang harus memenuhi aturan sebagai berikut: (i) pada desa pertama 2 kali jumlah pupuk "sangat manjur" ditambah 4 kali jumlah pestisida "mematikan" dan dikurangi jumlah kompos "murah meriah" harus sama dengan 52 kotak; (ii) pada desa kedua 5 kali jumlah pestisida "mematikan" ditambah 3 kali jumlah kompos "murah meriah" dan dikurangi jumlah pupuk "sangat manjur" harus sama dengan 72 kotak; dan (iii) pada desa ketiga 3 kali jumlah pupuk "sangat manjur" ditambah 2 kali jumlah kompos "murah meriah" dan dikurangi 7 kali jumlah pestisida "mematikan" harus sama dengan 10 kotak. Berdasarkan informasi tersebut buatlah persamaan yang menggambarkan 3 keseimbangan di atas dan tentukan besarnya jumlah masing-masing komoditi yang memenuhi keseimbangan pada 3 pasar tersebut dengan menggunakan **aturan Cramer** atau **aturan Matriks Invers.**

Soal Ketiga [Bobot 25]

Dalam perekonomian tertutup sederhana, model pendapatan nasional diberikan seperti di bawah ini :

$$Y = C + I_0 + G_0 \qquad I_0, G_0 = exsogenous\ variable$$

$$C = \alpha + \beta(Y - T) \qquad (\alpha > 0;\ 0 < \beta < 1)$$

$$T = \gamma + \delta Y \qquad (\gamma > 0;\ 0 < \delta < 1)$$

dimana :

Y = Pendapatan Nasional ; C = konsumsi nasional ; G_0 = pengeluaran pamerintah ; I_0 = investasi; α = konsumsi nasional yang harus ada; β = marginal propensity to consume ; T = pajak ; γ = lumpsum tax ; δ = proporsional tax

Berdasarkan informasi di atas, tentukanlah :

a. Pengganda pengeluaran pemerintah (*government expenditure multiplier*) ?

b. Apa yang akan terjadi pada pendapatan nasional ketika investasi meningkat?

c. Apa yang akan terjadi pada pendapatan nasional apabila pemerintah berencana meningkatkan *lumpsum tax*?

SOAL PILIHAN

Soal Keempat [Bobot 25]

Dalam perekonomian tertutup tanpa pajak, pasar barang dan pasar uang saling berkait dan masing-masing berada dalam kondisi keseimbangan. Keseimbangan di pasar barar dan pasar uang masing-masing dinyatakan dalam persamaan-persamaan berikut:

Keseimbangan di pasar barang:	Keseimbangan di pasar uang:
$Y - C(Y) - I(r) = G_0$	$L(Y,r) = Ms_0$
dimana $0 < C_y < 1$	dimana $L_y > 0$;
$I_r < 0$	$L_r < 0$

[Y = pendapatan nasional; C = konsumsi masyarakat; I = investasi; G_0 = pengeluaran pemerintah; Ms_0 = jumlah uang beredar; dan L = permintaan uang]

a. Buatlah total diferensial untuk kedua persamaan (keseimbangan pasar) di atas.

b. Dengan menempatkan perubahan Y dan r sebagai variabel endogen, susunla kedua persamaan yang diperoleh pada point a di atas ke dalam bentuk matriks.

c. Dengan menggunakan Cramer's Rule, tentukanlah dampak kebijakan fiskal (G_0

   a. Terhadap keseimbangan pendapatan (Y).

   b. Terhadap keseimbangan suku bunga (r).

d. Dengan menggunakan Cramer's Rule, tentukanlah dampak kebijakan monet (M_{S0}):

   a. Terhadap keseimbangan pendapatan (Y).

   b. Terhadap keseimbangan suku bunga (r).

UTS SEMESTER GASAL 2011/2012

MATEMATIKA EKONOMI DAN BISNIS

150 menit (Closed Book)

1. Fungsi permintaan dan penawaran sayuran bayam diwakili oleh dua persamaan berikut :

Qd=17200-5p Qs=4P-800

Dimana Q adalah kuantitas bayam P adalah harga rupiah bayam per ikat,serta D dan S masing-masing menunjukkan permintaan dan penawaran

a. Hitung kuantitas dan harga keseimbangan di pasar bayam

b. Untuk meningkatkan konsumsi bayam,pemerintah mematok harga bayam 10% di bawah harga keseimbangan. Tunjukkan dan jelaskan apa yang terjadi di apsar bayam melalui perangkat grafik dan perhitungan matematis !

c. Bila pemerintah memutuskan memberi insentif subsidi sebesar Rp180 per ikat bayam kepada petani (terlepas dari kebijakan harga dasar di soal (b)), tunjukkan dan jelaskan apa yang terjadi di pasar bayam melalui perangkat grafik dan perhitungan matematis !

2. Diketahui model keseimbangan [endapatan nasional sebagai berikut :

Y=C+I0 + G0   C=C0+c(Y-T); [0<c<J]
T=T0+tY ; [0<t<1]

Dimana Y,C,T adalah tingkat pendapatan nasional,konsumsi rumah tangga,dan pajak. Pengeluaran autonomous dicerminkan oleh variabel I0, G0,C0,T0 yang berturut-turut adalah tingkat investasi ,pengeluaran pemerintah, konsumsi minimum rumah tangga,dan pajak dasar. Parameter c dan t masing-masing menunjukkan marginal propensity to consume dan tarif pajak penghasilan

a. susunlah persamaan-persamaan di atas ke dalam bentuk persamaan matriks dan indentifikasi apakah matriks koefisiennya singular atau non singular!

b. Carilah kondisi keseimbangan untuk pendapatan nasional (Y*) ,konsumsi (C*) ,dan Pajak (T*) dengan menggunakan pendekatan Cramer!

c. Berdasarkan hasil yang anda peroleh di poin (a) dan (b) di atas,tentukan nilai Y*,C*,dan T* jika diketahui informasi sebagai berikut :

C0 = 30, I0 =60 , G0= 5,T0=20 , c=0,75, t=20%

3. a Diketahui fungsi permintaan suatu barang adalah Q=100-2P dan biaya per unit untuk pembuatan barang tersebut adalah $AC = Q^2 - 40{,}5Q + 100 + (\frac{200}{Q})$

-tentukan fungsi total penerimaan (TR), total biaya (TC),profit (∏) ,penerimaan marginal (MR),dan biaya marjinal (MC) dari informasi diatas !

-gambarkan kurva penerimaan rata-rata (AR) dan penerimaan marjinal (MR) dalam satu diagram ! Apa yang anda bisa simpulkan mengenai slope relatif dari kedua kurva tersebut ?

b. diketahui fungsi utilitas dari seorang konsumen yang sedang mengkonsumsi barang x dan y adalag sebagai berikut : $U(x, y) = \frac{2x - 3y}{x^2 + 2y}$. Tentukan elastisitas marjinal dari masing-masing barang yang dikonsumsi !

4. Fungsi permintaan dan penawaran di sebuah pasar adalah sebagai berikut :

$$Qd = a - bP\ ; (a > 0\ , 0 < b < 1)$$

$$Qs = -c + dP\ (c > 0\ , 0 < d < 1)$$

Qd dan Qs masing-masing adalah kuantitas barang yang diminta dan ditawarkan ,parameter a dan c masing-masing adalah faktor-faktor eksogen non-harga yang mempengaruhi besarnya permintaan dan penawaran. Sementara itu b dan d masing-masing menunjukkan mmarginal propensity to demand dan marginal proepnsity to supply

a. tentukan tingkat keseimbangan harga (P*) dan kuantitas (Q*) dalam bentuk reduced-form equations !

b. Berdasarkan persamaan yang dihasilkan pada poin a,tentukan apa yang terjadi pada keseimbangan kuantitas barang (Q*) di pasar apabila terjadi kenaikan pada :

-salah satu faktor,eksogen fungsi permintaan

-marginal propensity to supply

c. ilustrasikandan jelaskna apa yang terjadi pada poin (b) dalam diagram kurva permintaan-penawaran dengan kuantitas barang (Q) pada sumbu vertikal dan tingkat harga (P) pada sumbu horizontal !

5.a Diketahui suatu fungsi produksi sebagai berikut f(p,q,r) = 6p+2q+r dengan fungsi input produksi masing-masing adalah =

$$p = 3x^2 + 2y\,;\, q = 5x + 6y^2; dan\ r = 10x - 8y$$

Dengan pendekatan total derivatif ,tentukan nilai marginal productivity dari x (yaitu df/dx) dan marginal productivty dari y yaitu df/dy) apabila diketahui nilai x=2 dan y=4 !

$$F\ (x, y, z) = 3x^2 + 10y^3 + 6z^4 - xyz - 4 = 0$$

b. Jika diketahui fungsi implisit sebagai berikut :

carilah nilai dy/dz dan dx/dz seandainya x,y,dan z masing-masing bernilai 2

UTS SEMESTER GASAL 2012/2013

MATEMATIKA EKONOMI DAN BISNIS

150 menit (Closed Book)

1. Suatu produk memiliki fungsi permintaan dan penawaran sebagai berikut:

   $Q_D = 100 - P$

   $Q_S = -80 + 4P$

Dimana Qadalah kuantitas barang (dalam juta unit) dan P adalah harga (dalam USD).

   a. Tentukan keseimbangan hargadankuantitasdariproduk tersebut(P*,Q*) di pasar!Apabila pemerintah menetapkan pajak sebesar USD10 per unit barang yang terjual, berapakah keseimbangan harga dan kuantitas yang baru di pasar tersebut? [7poin] *(Tambahkanjuta di hasil akhir perhitungan saja)*

   b. Jika untuk melindungi konsumen, Setelah pengenaan pajak tersebut pemerintah jugamenetapkan kebijakan harga plafon (*ceiling price)* pada level USD40, berapakah kelebihan permintaan atau penawaran yang terjadi?Tunjukkan dan jelaskan apa yang terjadi pada (a) dan (b) melalui perangkat kurva permintaan dan penawaran![8 poin]

   c. Berapakah total penerimaanpajak yang diterima pemerintah dengan dan tanpa kebijakan hargaplafon? Tunjukkanpula area yang menunjukkanpenerimaanpajak di dua kondisi tersebut melalui diagram yang sudah anda gambarkan di bagian (b)![5poin]

2. Diketahui model keseimbangan pendapatan nasional sebagai berikut:

   $Y = C + I_0 + G_0$

   $C = \alpha + \beta Y_d \qquad [\alpha > 0\,; 0 < \beta < 1]$

   $Y_d = Y - T_0$

   dimana Y dan C adalah pendapatan nasional dan konsumsi rumah tangga. Sementara itu, $I_0, G_0,$ dan T_0 menunjukkan investasiswasta, pengeluaran pemerintah dan pajak. Parameterα dan βadalah tingkat konsumsi autonomous dan *marginal propensity to consume*

   a. Susunlah persamaan-persamaan di atas ke dalam bentuk persamaan matriks, lalu identifikasi ada tidaknya solusi unik dari model persamaan tersebut melalui pengujian kondisi non-singularitas! [5 poin]

   b. Carilah kondisi keseimbangan untuk pendapatan nasional (Y*) dan konsumsi (C*) dengan menggunakan pendekatan matrix inverse dan aturan Cramer![10 poin]

   c. Jika diketahui bahwa $\alpha = 100$, $\beta = 0.75,\ I_0 = 60,\ G_0 = 10,\ T_0 = 50,$ tentukanlah nilai ekuilibriumpendapatan nasional dan konsumsi rumahtangga![5 poin]

3. a. Dengan fungsi biaya $C = 3Q^2 + 7Q$, tentukan fungsi biaya rata-rata (AC) and biaya marginal (MC) lalu gambarkan keduanya dalam satu diagram! Dengan Membandingkan fungsi biaya marginal dan biaya rata-rata, apa yang bisa anda simpulkan mengenai kemiringan (*slope*) kedua fungsi tersebut secara relatif?[10 poin]

   b. Dengan produksi(Q)adalah fungsi dari jumlah tenaga kerja(L) saja, produksi rata-rata per labor dinyatakan sebagai $AP_L = \frac{Q(L)}{L}$. Kemiringan kurva AP_Ljelas memperlihatkan kecenderungan nilai (naik atau turun) dari AP_L mengikuti kenaikan pada L. Tunjukkan bahwa secara matematis ketika AP_L lebih besar dari

MP_L, AP_L akan turun, dan sebaliknya ketika AP_Llebih kecil dari MP_L, AP_L akan naik![10 poin]

4. Negara Cinta Damai merupakan sebuah negara dengan perekonomian yang sederhana dan tertutup.Model pendapatan nasional negara tersebut dinyatakan sebagai berikut:

   $Y = C + I + G_0$

   $C = \alpha + \beta(Y - T_0)$

   $I = I_0 + kY - li$

   [definisi variable sama dengan di soal no.2, kecuali untuk I_0 yang merupakan investasi autonomous, dan beberapa parameter dalam fungsi investasi yang diwakili oleh k and l]

   a. Nyatakan ekuilibrium pendapatan nasional perekonomian negara CintaDamai dalam bentuk *reduced form*, lalu nyatakan pula dalam bentuk fungsi implicit!
   [5 poin]

   b. Jika diketahui G_0= 400, T_0= 500, i= 6%, $\propto = 700, \beta = 0.8, I_0 = 500, k = 0.1$, and$l =$ 2.000,berapakah keseimbangan pendapatan nasional?[5 poin]

   c. Dengan menggunakan turunan parsial dan aturan turunan fungsi implisit,tentukan dampak terhadap keseimbangan pendapatan nasional:[10 poin]

      1) jika pemerintah meningkatkan belanjanya;
      2) jika*marginal propensity to consume* (β)turun.

5. Jika diketahui fungsi produksiadalah $Q = Q(A, K, L) = AK^{\alpha}L^{\beta}$, di mana Qadalah total output, A adalah faktor teknologi,, serta K dan Lmasing-masing adalah modal dan tenaga kerja:

   a. Tentukan diferensial total dari fungsi produksi di atas![6 poin]

   b. Jika$A = A(t)$ merupakan fungsi positif terhadap waktu,t, begitu pula K dan L yang dinyatakan dengan $K = a + pt$dan $L = b + qt$, tentukan total derivative Q terhadap$t$,$\frac{dQ}{dt}$![8 poin]

   c. Berdasarkanhasil yang diperoleh di bagian (b) dan dengan memisalkan bahwa $\theta_A = \frac{A\prime(t)}{A}$, $\theta_K = \frac{\alpha p}{K}$, dan$\theta_L = \frac{\beta q}{L}$, buktikan bahwa$\frac{dQ}{dt} = (\theta_A + \theta_K + \theta_L)Q$![7 poin]

JAWABAN

1. a. Ekuilibrium sebelum pajak:

100 – P = -80 + 4P
5P = 100 + 80
P* = USD36
Q* = 100 – P = 64 juta unit

Ekuilibrium setelah pajak:

Q_S = -80 + 4P

4P = Q_S + 80

P = ¼ Q_S + 20

Terdapat pajak per-komoditi sebesar USD10:

P^t = ¼ Q_S + 20 + 10 sehingga Q_S^t = $4P^t$ – 120
Q_D = Q_S^t
100 – P = 4P – 120
5P = 220
P^{t*} = USD44
Sehingga Q^{t*}= 100 – 44 = 56 juta unit

b. *Ceiling price* pada USD40: Qd = 100 – 40 = 60 juta unit, Qs^t = 4(40) – 120 = 40 juta unit
Excess demand = (60 – 40) juta = 20 juta unit
Gambar: Kurva supply geser ke atas. Ada tiga harga yang harus ditunjukkan: P*, P^{t*}, dan P^c beserta kuantitas pada masing-masing harga.

c. Besar total penerimaan pajak yang diterima pemerintah sebelum *ceiling price policy*:
T = USD10 x 56 juta= USD560 juta (luas persegi panjang: tax x Q^{t*})

Setelah ceiling price policy:

T = USD10 x 40 = USD400 (luas persegi panjang: tax x Qs[t])

2. a. $Ax = d$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -\beta & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} Y \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_0 + G_0 \\ \alpha - \beta T_0 \end{bmatrix}$$

Determinant matrix koefisien

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -\beta & 1 \end{vmatrix} = 1 - \beta \neq$$

$0\ since\ 0 < \beta < 1$ sehingga matrix koefisiennya non singular

b. $x^* = A^{-1}d$

$$x^* = \frac{1}{|A|} Adj\ A.d$$

$$x^* = \frac{1}{1-\beta}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \beta & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_0 + G_0 \\ \alpha - \beta T_0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} Y^* \\ C^* \end{bmatrix} = \frac{1}{1-\beta}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \beta & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_0 + G_0 \\ \alpha - \beta T_0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} Y^* \\ C^* \end{bmatrix} = \frac{1}{1-\beta}\begin{bmatrix} I_0 + G_0 + \alpha - \beta T_0 \\ \beta(I_0 + G_0 - T_0) + \alpha \end{bmatrix}$$

$$Y^* = \frac{I_0 + G_0 + \alpha - \beta T_0}{1-\beta} = \frac{\begin{vmatrix} I_0 + G_0 & 1 \\ \alpha - \beta T_0 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \beta & 1 \end{vmatrix}}$$

$$C^* = \frac{\beta(I_0 + G_0 - T_0) + \alpha}{1-\beta} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & I_0 + G_0 \\ \beta & 1\alpha - \beta T_0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \beta & 1 \end{vmatrix}}$$

c. Y* = 530 dan C* = 460

3. a. MC = 6Q + 7, AC = 3Q + 7. Kedua kurva linier dan berasal dari titik nol. Slop dari MC ua kali slope dari AC

b. $\frac{dAP_L}{dL} = \frac{d\left(\frac{Q(L)}{L}\right)}{dL} = \frac{MPL-APL}{L} \gtreqless 0 : APL \uparrow, \overline{APL},\ APL \downarrow$

4. a. $Y^* = \frac{\alpha - \beta T_0 + I_0 - li + G_0}{1-\beta-k}$, implicit function: $F = (1 - \beta - k)Y^* - \alpha + \beta T_0 - I_0 + li - G_0 = 0$

b. $Y^* = \frac{700 - 0.8(500) + 500 - 2000(6\%) + 400}{1 - 0.8 - 0.1} = \frac{1080}{0.1} = 10.800$

c. 1) $\frac{\partial Y^*}{\partial G_0} = -\frac{F_{G_0}}{F_{Y^*}} = \frac{1}{1-\beta-k} > 0$: higher G : higher Y*

2) $\frac{\partial Y^*}{\partial \beta} = -\frac{F_\beta}{F_{Y^*}} = \frac{Y^* - T_0}{1-\beta-k} > 0$: lower MPC : lower Y*

5. a. $dQ = K^\alpha L^\beta dA + \frac{\propto}{K} AK^\alpha L^\beta dK + \frac{\beta}{L} AK^\alpha L^\beta dL$

b. $\frac{dQ}{dt} = K^\alpha L^\beta A'(t) + \frac{\propto p}{K} AK^\alpha L^\beta + \frac{\beta q}{L} AK^\alpha L^\beta$

c. $\frac{dQ}{dt} = K^\alpha L^\beta A'(t)\frac{A}{A} + \frac{\propto p}{K} AK^\alpha L^\beta + \frac{\beta q}{L} AK^\alpha L^\beta$

$$= \left(\frac{A'(t)}{A} + \frac{\alpha p}{K} + \frac{\beta q}{L}\right)(AK^\alpha L^\beta)$$

$$= (\theta_A + \theta_K + \theta_L)Q$$

UTS SEMESTER GASAL 2013/2014

MATEMATIKA EKONOMI DAN BISNIS

150 menit (Closed Book)

1. Diketahui fungsi permintaan dan penawaran di pasar dinyatakan sebagai berikut:

$$Q_S = 2P - 50, \quad Q_D = 100 - P$$

a. Jika pemerintah menerapkan pajak sebesar \$30 per unit komoditas yang dijual, berapakah jumlah barang yang akan terjual di pasar? Berapa pulakah harga yang akan diterima oleh produsen dan konsumen di pasar setelah adanya pajak tersebut? [7 poin]
b. Gambarkan kondisi sebelum dan sesudah diterapkannya pajak di pasar! [6 poin]
c. Jika sebelum diterapkan pajak pemerintah bermaksud melindungi konsumen dengan menetapkan kebijakan harga maksimum (atau *ceiling price*) pada tingkat harga sebesar \$60, efektifkah kebijakan pemerintah tersebut? Gambarkan dan jelaskan jawaban anda! [7 poin]

2. Keseimbangan dalam model keseimbangan pendapatan IS-LM ditentukan oleh keseimbangan di pasar barang dan pasar uang. Keseimbangan pasar barang ditentukan persamaan-persamaan berikut:

$$Y = C + I + G$$

(menunjukkan keseimbangan di pasar barang)

$C = b(Y - T_0)$ $\quad (0 < b < 1)$

$I = I_0 - ar$ $\quad$ (di mana r adalah suku bunga real, dan $a > 0$)

$$G = G_0$$

(Y:output nasional, C: konsumsi privat, I:investasi, G:pengeluaran pemerintah,I_0: *autonomous investment*,T_0:*lump-sum tax*, G_0: *exogenous government spending*, a, b:parameter, t:*tax rate*)

Sementara itu keseimbangan di pasar uang ditentukan dari model berikut:

Permintaan uang (M^d) : $M^d = mY - hr$ $\quad (0 < m < 1, h > 0)$
Penawaran uang(M^s) : $M^s = M_0$
Kondisi keseimbangan : $M^s = M^d$

(m, h:parameter, M_0:*exogenous money supply*)

a. Susunlah sistem persamaan matriks dari model IS-LM di atas dengan Ydan$r$sebagai variabel endogen! [5 poin]
b. Tentukan determinan matriks koefisien di poin (a) untuk menentukan kondisi singularitas matriks tersebut! [5 poin]
c. Gunakan Aturan Cramer untuk menentukan keseimbangan output nasional (Y^*)dan suku bunga riil (r)! [5 poin]
d. Dengan $b = 0.5$, $a = 10$, $m = 0.1$, dan $h = 10$, ubahlah matriks koefisien di poin (a) menjadi matriks identitas dengan menggunakan metode *echelon matrix* (atau *Gauss elimination process*)! Apa yang dapat anda simpulkan mengenai rank matriks tersebut? [5 poin]

3. a. Sebuah perusahaan roti menghadapi fungsi permintaan dan fungsi biaya total berikut:

$Q = 10 - P$ $\qquad C = 3Q^2 + 7Q + 12$

(1) Hitung *average revenue, average cost, total revenue, profit, marginal cost* dan *marginal revenue* dari kedua fungsi di atas. [5 poin]
(2) Bagaimana hubungan antara *marginal revenue* dengan *average revenue* secara grafis dan matematis? Jelaskan! [5 poin]

b. Fungsi permintaan dari sebuah pasar dinyatakan sebagai $Q = 100 - 2P + 0.02Y$, dimana Q adalah tingkat permintaan, P adalah tingkat harga, dan Y adalah tingkat pendapatan. Dengan $P = 20$ dan $Y = 5{,}000$, hitunglah (1) elastisitas harga terhadap permintaan [5 poin] dan (2) elastisitas pendapatan terhadap permintaan [5 poin]!

4. Model keseimbangan pendapatan nasional dinyatakan sebagai berikut:

$Y = C + I_0 + G$
$C = \alpha + \beta(Y - T_0)$ $\quad (\alpha > 0, 0 < \beta < 1)$
$G = \gamma + \delta Y$ $\quad (\gamma > 0,\ \beta + \delta < 1)$

di mana Y: *national income; C: private consumption; I_0: autonomous investment; G: government spending;* danT_0*: lump-sum tax.*

a. Buat *reduced-form* keseimbangan pendapatan nasional (Y^*) dari model di atas! [3 poin]
b. Bagaimana dampak dari kenaikan pada *lump-sum tax*(T_0) terhadap keseimbangan pendapatan nasional (Y^*)? Hitung dan interpretasikan hasilnya! [5 poin]
c. Bagaimana dampak dari kenaikan pada β (atau *marginal propensity to consume*) terhadap keseimbangan pendapatan nasional (Y^*)? Hitung dan interpretasikan hasilnya! [7 poin]
d. Transformasikan *reduced-form* keseimbangan pendapatan nasional di poin (a) ke dalam bentuk fungsi implisit! Hitung kembali dampak dari kenaikan pada β terhadap keseimbangan pendapatan nasional (Y^*) namun dengan aturan fungsi implisit! Apakah hasil anda ini konsisten dengan jawaban di poin (c)? [5 poin]

5. Diketahui suatu perusahaan yang kompetitif memiliki fungsi keuntungan berikut:

$$\pi = PQ - wL - rK$$

di manaπ = profit, *P* = harga, *Q* = output, *L* = tenaga kerja, *K* = kapital dan *w*, *r* = harga input masing-masing untuk *L* dan *K*. Karena perusahaan beroperasi dalam suatu pasar kompetitif, *P*, *w* dan *r* menjadi variabel-variabel eksogen, sementara *K*, *L* dan *Q* merupakan variabel endogen. Lebih lanjut lagi, output *Q* adalah fungsi dari *K* dan *L* yang dinyatakan dalam fungsi produksi berikut:

$$Q = Q(K, L) = L^{\alpha} K^{\beta}$$

a. Gambarlah suatu peta jalur (*channel map*) yang menunjukkan bagaimana ketiga variabel endogen di atas mempengaruhi profit! [3 poin]
b. Tentukan diferensial total dari keuntungan, π ! [5 poin]

c. Tentukan laju perubahan keuntungan, π, terhadap tenaga kerja, L! [6 poin]
d. Tentukan laju perubahan keuntungan, π, terhadap kapital, K! [6 poin]

SOAL KUIS ASISTENSI

MATEMATIKA EKONOMI DAN BISNIS

1. Jika diketahui :
Fungsi permintaan $3p + Q^2 + 5Q - 102 = 0$
Fungsi Penawaran $P - 2Q^2 + 3Q + 71 = 0$
Hitunglah P* dan Q* equilibrium

2. Diketahui pada kurva IS-LM
Fungsi IS : 0,3 Y + 100 i – 252 = 0
Fungsi LM : 0,25 Y – 200 i – 176 = 0
Carilah Y* dan i* (pendapatan nasional dan tingkat bunga)

3. Jika diketahui :

$$Y = C + I_0 + G_0$$
$$C = C_0 + bY_d$$
$$Y_d = Y - T$$
$$T = T_0 + tY$$

Carilah dampak perubahan :
a. G_0 (Pengeluaran pemerintah)
b. T_0 (lumpsum tax)
c. t (tingkat pajak proporsional)

4. A firm of bread faces the following demand and cost functions:

Q = 10 – P

C = $3Q^2$ + 7Q + 12

(1) Find average revenue, average cost, total revenue, profit, marginal cost and marginal revenue from the functions given above
(2) Find the relation between marginal revenue and average revenue graphically and mathematically!

5. The national income model given below:

Y = C + Io +Go

C = α + β(Y – To) ; (α >0, 0<β < 1)

G = γ + δY ; (γ >0, β+δ < 1)

Where Y: national income; C: private consumption; Io= autonomous investment; G= government spending; and To: lump sum tax.

a. Find the reduced form for national income equilibrium (Y*)
b. What is the impact of an increase in lump sum tax (To) on national income equilibrium (Y*)? Calculate and interpret your results
c. What is the impact of an increase in β (i.e. the marginal propensity to consume) on national income equilibrium (Y*)? Calculate it and interpret your result
d. Transform the reduced form of national income equilibrium in point (a) into the implicit function form! Find again the impact of an increase in β on national equilibrium (Y*) use implicit function rule! Does the result conform with your answer in point (c)?

UAS SEMESTER GASAL 2007/2008

MATEMATIKA EKONOMI DAN BISNIS

150 menit (Closed Book)

SOAL PERTAMA
Sebuah perusahaan yang ingin berkembang memiliki fungsi biaya total dan fungsi permintaan sebagai berikut :
C (Q) = Q^2 – 61,25 Q^2 + 1528,5 Q + 2000 dan Q = 600 – 0,5 P

Berdasarkan informasi tersebut di atas :
a. Formulasikan fungsi keuntungan total (profit function)
b. Hitung tingkat output dan profit saat profit maksimum
c. Perlihatkan syarat kecukupan (SOSC) bagi perosalan di atas terpenuhi
d. Buktikan bahwa pada saat profit maksimum,penerimaan marginal (MR) sama dengan biaya marginal (MC)

SOAL KEDUA
Seorang pengusaha memiliki lahan yang ditanami pohon untuk diambil kayunya. Kayu tersebut tumbuh dengan pola : $V(t) = 3^{2\sqrt{t}}$ (tiga pangkat dua akar t) , dimana V (t) adalah nilai kayu pada waktu ke-t dan t adalah waktu (tahun) . Dengan asumsi bahwa pemilik pohon tersebut bertujuan untuk memaksimumkan present value dari kayu yang ditanamkan dan suku bunga deposito sebagai proksi discount factor adalah 20%.
Hitunglah berapa lama waktu yang optimal untuk menebang atau menjual pohon yang ditanamnya tersebut ? dan perlihatkan bahwa syarat cukup (kondisi turunan kedua) bagi persoalan di atas terpenuhi.

SOAL KETIGA
Terdapat sebuah perusahaan yang berbentuk monopoli ,dimana perusahaan tersebut melakukan diskriminasi harga pada 3(tiga) pasar (Pasar 1, pasar 2, dan pasar 3). Produk yang dijual pada ketiga pasar tersebut adalah sama. Apabila diketahui fungsi permintaan pada pasar 1 adalag $Q1 = 15\,\frac{2}{4} - \frac{1}{4}P1$ sedangkanpada pasar 2 adala Q2 = 21 – $Q2 = 21 - \frac{1}{5}$ P2 dan pada pasar 3 adalah $Q3 = 12\frac{1}{2} - \frac{1}{6}P3$ dengan fungsi biaya perusahaan tersebut adalah C = 20 + 15Q, dimana Q = Q1 + Q2 + Q3, Berdasarkan informasi tersebut di atas tentukanlah :
a. Berapa banyak Q1 , Q2,dan Q3 yang dapat memaksimumkan profit perusahaan tersebut ?
b. Perlihatkan bahwa syarat kecukupan (SOSC) terpenuhi !

SOAL KEEMPAT

Mashallian Demand Function adalah fungsi permintaan yang menunjukkan banyaknya jumlah barang dan jasa yang dibeli konsumen pada harga – harga dan pendapatan tertentu. Apabila dikethaui seorang konsumen memiliki utility function dan budget contraint adalah sebagai berikut :
U = U (x,y) = 9x + xy + 6y dan $P_x x + P_y Y = M$

Apabila konsumen tersebut memiliki tujuan memaksimumkan utility (kepuasan) dengan kendala budget constraint (pada itngkat pendapatan dan harga tertentu) yang ada, maka berdasarkan informasi tersebut :
a. Tuliskan persamaan Langrangiannya
b. Carilah persamaan Mashallian Deman untuk barang x dan barang y (berapa tingkat x dan y yang memaksimalkan kepuasan ,dimana keduanya merupakan fungsi dari Px , Py , M)
c. Dengan menggunakan Bordered Hessian,periksalah apakah program maksimisasi ini memenuhi syarat.
d. Jika diketahui M = 100 , Px=4 , Py=2, berapakah jumlah barang X,Y yang dibeli dan berapakah utility yang terjadi !

UAS SEMESTER GASAL 2008/2009

MATEMATIKA EKONOMI DAN BISNIS

150 menit (Closed Book)

Soal Pertama
Sebuah perusahaan diketahui memiliki fungsi penerimaan total dengan bentuk fungsi yaitu : TR = 4350 Q – 13 Q^2 dan fungsi biaya total yakni TC = Q^3 – 5,5 Q^2 – 150 Q + 675
Berdasarkan Informasi tersebut . Tentukanlah :
a. Nilai Q yang membuat profit maksimum !
b. Perlihatkanlah kondisi tunrunan kedua bahwa Q adalah memaksimumkian profit !

Soal Kedua
Seorang pengusaha memiliki lahan yang ditanami pohon untuk diambil kayunya. Kayu tersebut tumbuh dengan pola : $V(t) = 3^{2\sqrt{t}}$ (tiga pangkat dua akar t) , dimana V (t) adalah nilai kayu pada waktu ke-t dan t adalah waktu (tahun) . Dengan asumsi bahwa pemilik pohon tersebut bertujuan untuk memaksimumkan present value dari kayu yang ditanamkan dan suku bunga deposito sebagai proksi discount factor adalah 10%.
Hitunglah berapa lama waktu yang optimal untuk menebang atau menjual pohon yang ditanamnya tersebut ? dan perlihatkan bahwa syarat cukup (kondisi turunan kedua) bagi persoalan di atas terpenuhi.

Soal Ketiga
Suatu perusahaan yang bergeak di pasar kompetitif mempunyai dua produk (Q1 dan Q2) . Di samping itu, perusahaan ini menghadapi fungsi permintaan dan biaya sebagai berikut :

Q1 = 40 – 2 P_1 – P_2 dan C = $Q_1^2 + 2Q_2^2 + 10$

Berdasarkan informasi di atas :

a. Carilah tingkat output yang memenuhi kondisi turunan pertama agar keuntungan maksimum
b. Berapa keuntungan maksimumnya

Soal Keempat
Marshallian Demand Function adalah fungsi permintaan yang menunjukkan banyaknya jumlah barang atau jasa yang dibeli konsumen pada arga-harga dan pendapatan tertentu. Apabila diketahui seseorang konsumen memiliki utility function adalah sebagai berikut :
U (X,Y) = XY

Konsumen ini memiliki pendapatan sebesar 100 dan diketahui bahwa harga barang x (Px) adalah 2 dan harga barang y (Py) adalah 5. Apabila konsumen tersebut memiliki tujuan memaksimumkan utility (kepuasan) dengan kendala budget constraint (pada tingkat pendapatan dan harga tertentu) yang ada,maka berdasarkan informasi tersebut :
a. Tuliskan persamaan langrangiannya
b. Berapa tingkat x dan y yang memaksimumkan utility
c. Dengan menggunakan Bordered Hessian, periksalah apakah program maksimisasi ini memenui syarat

Soal Kelima
a. Diketahui baha bnetuk fungsi dari marginal proensity to save (MPS) adalah dS/dY = S' (y) = 0,5 – 0,2 $^{-1/2}$. Diketahui pula bahwa ketika pendapatan (y) bernilai 25 terjadi *dissaving* sebesar 3,5. Tentukanlah bentuk dari fungsi tabungan tersebut !

UAS SEMESTER GASAL 2009/2010

MATEMATIKA EKONOMI DAN BISNIS

150 menit (Closed Book)

Soal Pertama (Bobot 15)
Sebuah perusahaan yang ingin berkembang memiliki fungsi biaya total dan fungsi permintaan sebagai berikut :

C (Q) = Q^3 – 61,25Q^2 + 1528,5 Q + 2000 dan Q=600-0,5P

Berdasarkan informasi tersebut diatas :
a. Formulasikan fungsi keuntungan total (profit function)
b. Hitung tingkat output saat profit maksimum
c. Perlihatkan syarat kecukupan (SOSC) bagi persoalan di atas terpenuhi

Soal Kedua (Bobot 15)
Sebidang tanah dibeli dengan tujuan spekulasi memiliki niali yang mengikuti formula sebagai berikut :

$$V = 1000e^{t^{1/3}}$$

V sama dengan seribu kalo e pangkat t pangkat sepertiga
Dimana t menyatakan waktu dalam tahun. Jika faktor diskonto adalah 9%.

a. Berapa tahun waktu yang optimal tanah tersebut harus ditahan utnuk kemudian dijual (asumsikan tidak ada biaya perawatan)
b. Dalam masalah optimal timing ,mengapa kita perlu menghitung nilai sekarang (present value) ?

Soal Kedua (Bobot 25)
Seorang mahasiswa FEUi ingin mengasah kemampuan wirausahanya. Dia memulai suatu usaha sederhana dengan menjual makanan ringan (Q1) dan minuman hasil racikannya (Q2). Dia menghadapi inverse demand function untuk makanan dan minuman ringan masing-masing sebagai berikut :
P1 = 120 -3 Q1 + 4 Q2
P2 = 70 + 2 Q1 – 3Q2
TC = $2Q_1 + Q_2^2 + 12$

a. Carilah jumlah Q1 dan Q2 yang dapat memaksimumkan keuntungan ()
b. Tentukan pula berapa harga makanan (P1) dan minuman (P2).
c. Apakah ∏ maksimum tercapai (perlihatkan syarat turunan kedua). Berapa ∏ maksimum ?

Soal Keempat (Bobot 25)
Seorang mahasiswa FEUI ingin mengkonsumsi dua jenis barang yaitu pangan (x) dan sandang (y). Mahasiswa ini sadar bahwa dengan mengkonsumsi dua barang tersebut ia memiliki fungsi utilitas sebagai berikut :

$$U = f\ (x,y) = \ 10x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}}$$

Dengan kendala jumlah anggaran yang ia miliki adalah sebesar 4x + 6y = 72
Tentukan :
1. Fungsi Lagrangian dari permasalahan di atas !
2. Berapa nilai x dan y yang memaksimumkan U (FONC)
3. Dengan menggunakan matriks Bordered hessian, periksalah apakah tujuan memaksimumkan utilitas tercapai (SOSC)

Soal Kelima (Bobot 20)
5A. Diketahui fungsi permintaan P= $-Q^2 - 4Q + 6$ dan fungsi penawaran P=Q^2+2Q+12. Dengan mengasumsikan bahwa pasarnya adalah pasar persaingan sempurna, hitunglah :
a. Surplus konsumen
b. Surplus produsen

5B. Diketahui bahwa bentuk fungsi dari marginal propensity to consume (MPC) adalah

$$\frac{dc}{dy} = C'(y) = \ 0{,}6 + \ \frac{0{,}1}{\sqrt[3]{y}}$$

Diketahu pula bahwa ketika pendapatan (Y) bernilai o terjadi konsumsi sebesar 40. Tentukan bentuk dari fungsi konsumsi tersebut !

FINAL EXAM ODD SEMESTER 2010/2011
MATHEMATICS FOR ECONOMICS AND BUSINESS

QUESTION 1
A Firm Produces number of output Q to maximize profit . The firm's total revenue function is TR = 1400 Q – 6 Q^2 and the firm's total cost fnction is TC = $Q^3 - 6 Q^2 + 140\ Q + 750$. In light of the information :
a. Specify the firm's profit function !
b. Find Q that yields an extreme value (Q*) !
c. Check the second order condition (SOC) adnd determine the shape of the profit finction's curve (wheterh it is convex or concave) to get the maximizing profit output !
d. Show that at Q* profit is maximum by finding the values of the immediate neighbourhood of Q* (i,e ,when Q<Q* and Q*<Q) !
e. Find the maximum profit !

QUESTION 2
Suppose the value of timber already planted is the following increasing function of time : $V\ (t) = \ 3^{\sqrt{t}}$ (V is in hundred thousand of rupiah). There is no upkeeping cost of the timber.
a. Specify the present value of the timber ,A !
b. Assuming a discount rate of r (on the continuous basis) is 5% ,what is the optimal time (t*) to cut the timber for the sale ? Find the present value pf the timber at time t* (A*) !
c. Verify that the second order sufficient condition is satisfied !

QUESTION 3
Perusahaan Lilin Negara as a monopolist has divided markets into three different categories . Demand functions for each category are given as follows :
a. Category I : Big Industry : X = 90 – 0,50 Px
b. Category II : Small industry : Y = 35 – 0,25 Py
c. Category III : Household : = 30 – 0,20 Pz

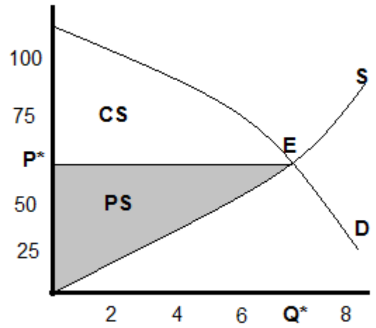
With the cost function TC = 25 + 20 (X + Y + Z) , answer the following question :
a. In order to maximize profit ,how many output of X,Y,and Z should be produced ?
Determine also the price evels should be charged in each category (Px,Py,and Pz)

b. Check he hessian and verify that the prfit is maximized !
c. Calculate the prce elasticity of demand in market category I, II,and III.
Is it correct to say that the monopolist should charge higher price to customers whose demand is less elastic ?

QUESTION 4
A monopolist firm has the following demand functions for goods x and y
X = 72 – 0,5 Px
Y = 120 – Py
With the cost function C = f(x,y) = $x^2+xy+y^2 + 35$ and the maximum production constraint x+y = 40 :
a. Specify the langrangian function for the problem above !
b. Determine x and y that could maximize the firm's profit !
c. Verify that the second order condition is satisfied !

QUESTION 5
Corn market in Indonesia is perfectly competitive, The inverse supply and demand fnctions of the corn market are Ps = $(Q+1)^2$ and Pd = 113-Q^2 respectively.

Ps is supply price, Pd is demand price ,and Q is quantity.
a. Find the equilibrium quantity and price in the corn market !
b. How much is the consumer surplus (CS) ?
c How much is the producer surplus (PS) ?
Hints : Use the diagram below to calculate both CS and PS !



UAS SEMESTER GASAL 2011/2012

MATEMATIKA EKONOMI DAN BISNIS

150 menit (Closed Book)

1. Sejumlah pohon jati ditanam di kawasan hutan industri untuk tumbuh dan kelak dipotong dan diambil kayunya. Jika nilai kayu jati tumbuh seiring dengan waktu mengikuti fungsi berikut :

$$V(t) = 3^{4\sqrt{t}}$$

Dimana V adalah nilai kayu dalam juta rupiah dan t adalah waktu dalam satuan bulan. Dengan asumsi discount rate sebesar r (dalam bentuk continuous) dan tidak ad biaya untuk merawat hutan jati tersebut.
a. Tentukan fungsi present value dari nilai kayu jati !
b. Transfromasikan fungsi present value dari nilai kayu jati pada poin (a) menjadi berbentuk fungsi logaritman natural !
c. Cari nilai t yang memaksimalkan nilai kayu jati tersebut ! (Keterangan : biarkan nilai t yang memaksimumkan nilai kayu jati dalam bentuk fungsi dari r)
d. Hitung nilai t* jika r=0,1 dan r=0,2. Apa yang dapat anda simpulkan dari kedua nilai tersebut (keterangan ln3 =1,1)

2. Sebuah perusahaan multiproduk yang beroperasi di pasar output persaingan sempurna menghasilkan tiga produk berbeda. Dalam pasar persaingan sempurna,perusahaan tidak bisa mempengaruhi tingkat harga barang yang dijualnya. Jika diasumsikan bahwa fungsi total biaya adalah

$$C = 2Q_1^2 + Q_1Q_3 + Q_2^2 + Q_2Q_3 + Q_3^2$$

dan harga berturut-turut adalah 5,3,dan 4 untuk produk 1,2,dan 3 ,maka :
a. Tentukan tingkat output masing-masing produk yang dapat memaksimalkan profit perusahaan (gunakan pecahan ,jangan desimal dalam perhitungan)
b. Uji second order sufficient condition dari masalah optimisasi di atas dan inerpestasikan hasl pengujian anda !
c. Berapakah profit maksimum bagi perusahaan

3. Sebuah perusahaan monopolis menghasilkan output Q dengan harga P. Perusahaan monopolis ini menghadapi tiga permintaan berbeda untuk outputnya yang berasal dari tiga kelompok konsumen (1,2,dan 3) sebagai berikut :
Q1= 24 – P1
Q2 = 24 – 2P2
Q3 = 24 – 3P3

Fungsi biaya dari perusahaan monopolis ini dinyatakan dengan C=6Q+10
a. Untuk memaksimalkan profit ,berapakah tingkat output dan harga yang harus ditetapkan untuk setiap kelompok konsumen
b. Buktikan bahwa tingkat output dan tingkat harga yang anda dapatkan memaksimalkan profit perusahaan monopolis tersebut !
c. Tentukan tingkat output dan harga yang akan memaksimalkan profit perusahaan monopolis seandainya ia tidak bisa melakukan diskriminasi harga! (Hint : Q= Q1 + Q2 + Q3). Bandingkan besarnya profit yang dihasilkan dari perhitungan di poin (a) dan (c) ! Apa yang anda bisa simpulkan mengenai total output yang harus di produksi perusahaan di kedua kasus tersebut

4. Sebuah perusahaan memiliki fungsi produksi

$$Q = 100\,k^{0,5}L^{0,5}$$

Dimana Q adalah0 jumlah barang yang di produksi , K adalah jumlah input modal,dan L adalah jumlah input tenaga kerja. Perusahaan akan memproduksi 1000 unit barang sesuai dengan pesanan pelanggan. Diketahui pula bahwa upah tenaga kerja adalah 10 satuan per unit,sedangkan biaya modal adalah 40 satuan per unit
a. Tentukan fungsi objektif,fungsi kendala,dan fungsi Lagrange ,jika perusahaan ingin meminimumkan total biaya produksi !
b. Cari kombinasi input tenaga kerja dan modal yang meminimalkan total biaya produksi !
c. Tunjukkan apakah kombinasi tersebut memenuhi syarat SOC untuk minimisasi total baiay produksi !
d. Hitung total biaya minimum dari perusahaan tersebut !

5. a. Dari fungsi-fungsi produksi di bawah ini, tentukanlah derajat homogenitas dari masing-masing fungsi produksi dan tentukan fungsi yang mana yang mengalamai kondisi increasing return to scale ! Jelaskan !
1.) Q=24K + 3L
2.) Q= 5K$^{1/3}$ L$^{2/3}$
3.) $Q = 2K^2 + \frac{L^3}{K}$
b. setelah pensiun dari pekerjaannya ,Oki ditawari dua alternatif investasi.
1) investasi obligasi (perpetuity bond) yang menwarkan pendapatan tetap sebesar Rp 40 juta per tahun selamanya dengan harga obligasi Rp 350 juta yang harus dibayarkan saat ia memutuskan membeli obligasi tersebut
2) terjun ke proses produksi sebuah komoditi selama 10 tahun. Di sini, Oki diharuskan menanggung seluruh biaya produksi dan membayarnya di muka sebelum proses produksi pertama dimulai. Biaya marginal dan

baiay tetap dari proses produksi,dalam juta rupiah,diketahui adalah :

$MC = 15e^{0,2Q}$ dan FC =100

Dimana Q adalah jumlah output yang dihasilkan,dalam jutaan unit . Sebagai balasannya,setelah menghasilkan 1 Juta output (atau Q=1) dalam 10 tahun, Oki dijanjikan akan menadapatkan Rp 400 Juta.

Hitunglah present value dari net returns kedua alternatif inestasi,lalu tentukan alternatif mana yang lebih baik bagi Oki !
(tambahan informasi : r=10% ,$e^{-1} = 0,4$ dan $e^{0,2} = 1,2$)

Hint : Tentukan expected return dan biaya investasi dari masing-masing alternatif investasi untuk mendapatkan net return dan pastikan bahwa anda mampu mengidentifikasi kapan pembayaran diterima atau dibayarkan sehingga anda tahu apakah pembayaran tersebut perlu didiskontoan atau tidak.

UAS SEMESTER GASAL 2012/2013

MATEMATIKA EKONOMI DAN BISNIS

150 menit (Closed Book)

1. Mr. Woody menanam kayu di lahan pertaniannya yang luas. Ia membeli kayu tersebut seharga Rp 1000 juta (satu milyar rupiah). Nilai kayu (dalam jutaan rupiah) diketahui meningkat mengkikuti pola waktu sebagai berikut $V = 15e^{2\sqrt{t}}$
a. tanpa biaya pemeliharaan,sau-satunya biaya yang harus dikeluarkan Mr.Woody adalah biaya pembelian kayu. Jika Mr.Woody ingin memaksimalkan nilai penjualan bersih kayunya,nyatakan fungsi bjektifnya dalam present value ! (nilai saat ini di kasus ini merujuk pada waktu saat kayu pertama kali dibeli oleh Mr.Woody)
b. Dengan suku bunga kontinyu sebesar r=20%,menurut anda ,berapa lamakah waktu optimal bagi Mr.Woody untuk memotong dan menjual kayu-kayunya ?
c. Apakah saran anda di atas bena-benar akan memaksimalkan present value dari penjualan bersih kayu Mr.Woody ?
d. Jika Mr.Woody membeli kayu shearga 3,5 milyar rupiah,bukannya 1 miliar rupiah,apakah anda tetap menyarankan waktu optimal yang sama ? Jelaskan !

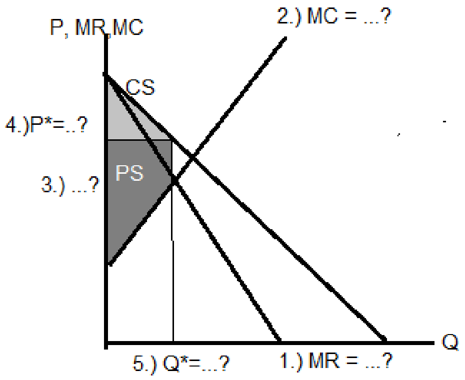
2. Toko roti empuk renyah memproduksi tiga jenis roti : roti tawar (Q1) ,roti manis (Q2) dan roti asin (Q3). Permintaan dari masing-masing jenis roti tersebut mengikuti inverse demand function sebagai berikut :
$P1 = 180 - 3Q_1 - Q_2 - 2Q_3$
$P2 = 200 - Q1 - 4Q_2$
$P3 = 150 - Q_2 - 3Q_3$
$TC - Q_1^2 + Q_1Q_2 + Q_2^2 + Q_2Q_3 + Q_3^2$
a. Nyatakan fungsi objektif dari toko Roti empuk renyah jika toko tersebut bermaksud untuk memaksimalkan profitnya !
b. Berapakah jumlah roti tawar (Q1) ,roti manis (Q2), dan roti asin (Q3) yang harus di produksi oleh toko roti empuk renyah agar keuntungan yang diperoleh maksimum ?

3. Affif adalah seorang penjual HP. Ia hanya menjual satu jenis HP di tiga lokasi yang berbeda, Margonda,Lenteng Agung,dan Kampus UI. Fungsi permintaan dari HP (dalam USD) yang dijual Affif di ketiga lokasi tersebut adalah sebagai berikut :
Di margonda : $\mathrm{QM} = 30 - \frac{1}{3}\mathrm{PM}$
Di Lenteng Agung : QL = 90 – PL
Di kampus UI : QU$= 45 - \frac{1}{2}\mathrm{PU}$
Karena afif hanya penjual,bukan produsen HP,biaya yang dikeluarkannya (dalam USD) dinyatakan secara sederhana dalam fungsi TC = 30Q (dimana Q= QM + QL + QU)
a. Jika afif bermaksud menetapkan satu harga yang sama di seluruh lokasi penjualan Hpnya,nyatakan fungsi maksimalisasi profit afif lalu bantu dia mencari tingkat harga dan jumlah HP yang paling optimal untuk dijual di setiap lokasi ! (Hints : Temukan terlebih dahulu jumlah total HP yang paling optimal sebelum menghitung hal lainnya !
b. Apakah akan lebih menguntungkan bagi afif untuk menetapkan harga bebreda di setiap penjualan Hpnya Jeolaskan !
c.. Hitung elastisitas harga terhadap permintaan HP Affif di setiap lokasi pada tingkat harga dan kuantitas optomalnya ! Apa implikasi dari perhitungan angka elastisitas tersebut menurut anda ?

4. Misalkan utilitas cemong hanya ditentukan oleh konsumsi cemong akan kopi dan singkong goreng. X menunjukan konsumsi kopi dimana 1 unit x adalah 1 cangkir kopi,sedangkan Y menunjukkan konsumsi singkong goreng dimana 1 unit Y adalah 1 porsi singkong goreng. Cemong tidak pernah membuat kopi maupun singkong goreng tersebut sendiri. Ia selalu membelinya di warung depan rumahnya. Harga sau cangkir kopi di warung tersebut adalah Px ,sedangkan harga satu porsi singkong goreng adalah Py. Selain itu, cemong hanya punya anggaran per minggu sebesar Buntuk membeli kopi dan singkong goreng. Dengan menngunakan informasi ini,jawablah pertanyaan-pertanyaan berikut !
a. Fungsi utilitas cemong adalah : U = (X+4)(Y+2). Jika cemong ingi memaksimalkan utilitasnya ,tunjukkan fngsi objektif,fingsi kendala,serta fungsi lagrange untuk kasus cemong ini !
b. Tentukan tingkat konsumsi kopi dan singkong goreng yang memaksimalkan utilitas cemong ! (Catatan : Berikan solusi dalam variabel Px, Py ,dan B)
c. Cek apakah second order condition dari solusi maksimum dapat terpenuhi !
d. Jika anggaran cemong per minggu adalah sebesar 10$,sedangkan harga secangkir kopi dan satu porsi singkong goreng sama-sama sebesar 1$,berapa cangkir kopi dan porsi singkong goreng yang cemong konsumsi per minggu agar utilitasnya maksimum ?

5. a. Jika diketahui fungsi MPC (marginal propensity to consume) adalah $C'(Y) = 0,2 + 0,2Y^{-1/2}$ dan knsumsi minimum adalah C(0) = 20,carilah fungsi konsumsi !
b. Diketahui,aliran investasi bersih adalah fungsi dari waktu yang dinyatakan berikut : $I(t) - 6t^{1/2}$.semetara itu stok modal awal saat t=0 adalah 10. Carilah time path daristokmodal,K(t).Setelah lima tahun berapakah total akumulasi modal ?

c. Dalam pasar monopli,jumlah dan harga barang yang dijual ditentukan oleh permintaan di pasar. Diketahui ,fungsi permintaan yang dihadapi monopolis adalah = 30-2p sedangkan fungsi biayanya adalah TC = 3Q + Q^2+2



1.) isi lima titik –titik (dengan tanda tanya) dalam diagram dengan fungsi dan angka yang spesifik ! Lengkapi pula jawaban anda dengan perhitungan!
2.) Hitunglah surplus konsumen (CS) di dalam diagram dengan menggunakan formula integral dan formula luas segitiga ! Apakah hasilnya sama ? kemudian hitung pula besarnya surplus produsen (PS) !

UAS SEMESTER GASAL 2013/2014

MATEMATIKA EKONOMI DAN BISNIS

150 menit (Closed Book)

1. A land owner decded to plant timber on forest area. The value of the timber planted is an increasing function V(t) =$3^{2\sqrt{t}}$. V (t) is the value of the timber at time t in thousand dollar units. Assume the owner is maximizing the present value of timber, A(t) and the continues interest rate is 20%
a. what is the optimal time to cut the timber (ln 3 = 1,1)
b. Show that the sufficient condition for your answer at point (a) is satisfied
c. what is impact of a reductio in interest rate in the optimal time to cut the timber and the present value of the timber

2. A furniture company in Solo produces chair (Q1) and desk (Q2) for elementary school. Cost function of the company is
$C = 2Q_1^2 + Q_1Q_2 + Q_2^2 - 10$
a. Suppose that the furniture company is facing pure competition in the goods market. Price of chair is P1 = 100 while the price of desk is P2 = 60. Find the optimal numbers of chair and desk it should produce t maximize its profit
b. If the furniture company is now facing a monopolistic competition with following demand functions :
Q1 = 40 – 2P1 – P2
Q2 = 35 – P1 – P2
(P1 = chair , P2 = desk) , how many chair and desk should the company produce to maximize the profit ?
c. Show that in both pure and monopolistic competition cases,the profits are maximized !

3. Gozali, an alayst from airline "elang indonesia" is evauating two pricing options for the Jakarta-yogyakarta routes in his company. First,his company may opt to set different flight fares,since under economy class,there are three sub-classes (economy flexible economy affordable,and economy value) with distinct demand functions as follows :
Economy Flexible (X) X = 150 – 0,8 Px
Economy Affordable (Y) Y = 110 – 0,5 Py
Economy Value (Z) = 80 – 0,4 Pz
Second, his company may apply the same flight fare for all sub classes . With the company's cost functions is given by TC = 75 + 40 Q (million rupiah) :
a. under the price disrimination policy ,calculate the maximum profit that can be earned by the company
b. If the company applies the same flight fare for all sub-classes,how much will be the maximum profit . Which profit is higher, with or without price discrimination (Hints : remember, totoal demand for the airline's jakarta – Yogyakarta route is Q = X + Y + Z
c. Prove that all the results a point a and b are profit maximizing

4. Dina is a young executive who wants to optimize her consumption on two goods ,she prefers the most. The tow goods are shoes and bag For her, money is not a problem. She can buy as many shoes and bag as she wants. However, in her house, she can only store at most 24 units of the two goods combined together. Dina's utility function is given by U = ¾ lnS + ¼ lnB , where S and B are unit of shoes and bag,respectively
a. How many shoes and bag dina should byu to maximize her utility ? (hint : remember the chain rule when doing the partial differentiation)
b. Calculate the maximum level of utility that dina could obtain from consuming the two good,and then prove that it is indeed the maximum,not the minimum level of utility !
c. If in her house now Dina can store the combination of shoes and bag up to 100 additional units, what will be her new maximum level of utility ?
Notes : ln3 = 1,09 . ln2 = 0,69

5. A firm's capital stock (in unit of capital) is a result of real investment it has made during four years investment period . The real investment is a nonconstant flow expressed as function of time :
L(t) = 3/2 $t^{1/2}$. Suppose that every year firm A's production function is givn by Q = 5 $K^{2/3}L^{1/2}$, where Q, K,and L respectively are number of output,capital ,and labor
a. If fimr A empliy 100 workers with investment it has made,calculate its produciton capacity (i.e number of output the firms can produce)
b. Find whether the firm A exhibit constant,decreasing, or increasing returns to scale. Explain your answer !
c. Suppose that during five years production, firm A cn always sell all of its output at constant price of USD 1.000 Therefore Firm A generates constant rate of revenue per yer, R, equals to 1000 Q. What is the present value of the firm A's continuous evenue flow lasting for five years and discounted at the rate of 10% ?
(Hints : Find Q from question a , and let $(1 - e^{-0,5}) = 0,4$)

UAS SEMESTER GASAL 2014/2015

MATEMATIKA EKONOMI DAN BISNIS

150 menit (Closed Book)

1. In the city of Gemar Bersepeda there are three bicycle manufacturers,namely Sepeda Wim (SW) , MultiGon (MG) and UnitedCycle(UC). The total revenue and total cost functions f each companies are as follows :
SW : TR = 1400 Q - Q^2 dan TC = 1500+80Q
MG TR = 4350 Q – 13 Q^2 dan TC = Q^3 = 5,5 TQ^2 + 150 Q + 675
UC : TR = 5900 Q – 10 Q^2 dan TC = $2Q^3$ – $4Q^2$ + 140 Q + 845

Based on condition above :
a. determine the profit function of each bicycle manufacturer
b. how many bikes must be produced by each company SW,MG,and UC in orded t get maximum profits ?
c. Prove that the number of bikes that you get in point b,really maximize the profit of each company's
d. calculate the maximum profit of the three companies . which company has the greatest profit and which company has the smallest profits

2. A mnonopolist who produces a type of prodcut has two different types of customers. The company produces Q1 unit to the first customer and the demand for customer 1 is 8 – P1. While the cmpany produces Q2 for rhe second customerswith its demand function is : 10 – P2. If the producers faces 10 +Q^2 as its production cost to produce goods for the two types of the customers :
a. How many goods must be produced by the company for each customer to maximize its profits . What is the price for each customer and How much profit did the company generate?
b. Prove that the cimpany's profit in point (b) is maximized (hint : use second derivative or second order condition to check the maximization)
c. How much is the profit if the company does not discriminate on the price?

3. If the population of indonusa grow according to the function H=Ho $(3)^{bt}$ And its househoold consumption is shown by C = Co.e^{at} ,then :
a. Find the rates of growth of population and the rates of consumption
b. Find the rates of growth of consumption per capita
c. If population in many developing countries is known growing at 3.5 %. Calculate the population 15 years from now fr country indonusa with 10.000.000 people . use natural log !

4. Ali is father with two children, Fabian , a boy,and sarah , a gril. Fabian is very happy when his father took him to the car repair shop,and his utility finction of is Uf = 12,5 ln $(4+4Tp)^2$
While sarah is very happy if accompanied by her dad to the mall , and her utility function are as follows :
Uw = 50 + 50 $Tw^{1/2}$
Where : Tf = ali spend time with fabian
Tw = Ali spend time with sarah

Deep down in his heart, ali is more concern about sarah rather than his son with the current social life condition. But ali has decide to sepnd 178 hours a month for his children,with a fair proportion, ali's puprose is to satisfyhistwochildrenwith a sense of fairness, based on the time he has and utility function of his tow chiildren. Answer the following question !
a. formulate the proble by maing the objective function and constraint function
b. create lagrnge function based on point a
c. find the amount of time the father has to allocate for each of his children in one month
d. by using the utility function,could the father's concern (that he is unfair) resolved ? Use comparative static analysis

5. In a market ,a consumer faces demand function as follow
Q= 10 – $2p^{1/2}$,find :
a. consumer surplus at price 1
b. consumer surplus at price 4
c. Change in consumer surplus when price change from 1 to 8 and give the graph illustration

while for a profit maximizing ,perfectly competitive firms faces its marginal function as follows
MC (q) = q^2+3 ,find the following :
d. producer surplus at price = 7
e. producer surplus at price = 12
f. change in producer surplus when price changes from 7 to 12 and give the graph illustration

UAS 2007-2008

Soal pertama

$C(Q) = Q^3 - 61{,}25\,Q^2 + 1528{,}5\,Q + 2000$

$Q = 600 - 0{,}5P$

$0{,}5P = 600 - Q$

$P = 1200 - 2Q$

a. Profit Function

$\pi = TR - TC$

$= (1200 - 2Q)Q - (Q^3 - 61{,}25\,Q^2 + 1528{,}5\,Q + 2000)$

$= 1200Q - 2Q^2 - Q^3 + 61{,}25\,Q^2 - 1528{,}5\,Q - 2000$

$= -328{,}5\,Q + 59{,}25\,Q^2 - Q^3 - 2000$

b. Tentukan Q dan π saat π max.

Q saat π max :

First order Condition

$\pi = -Q^3 + 59{,}25\,Q^2 - 328{,}5\,Q - 2000$

$\pi' = \underset{a}{-3Q^2} + \underset{b}{118{,}5\,Q} - \underset{c}{328{,}5}$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$Q_{1,2} = \frac{-118{,}5 \pm \sqrt{118{,}5^2 - 4(-3)(-328{,}5)}}{2(-3)}$$

$Q_1^{(+)} = 3$

$Q_2^{(-)} = 36{,}5 \rightarrow Q^*$

π saat π max :

Second order Sufficient Condition

$\pi' = -3Q^2 + 118{,}5\,Q - 328{,}5$

$\pi'' = -6Q + 118{,}5$

$f(Q_1) = 3 \longrightarrow \pi'' = 100{,}5$

$f(Q_2) = 36{,}5 \longrightarrow \pi'' = -100{,}5 \rightarrow \pi$ max

c. Uji derivatif kedua untuk ekstrem relatif adalah $f'(x^*) = 0$, nilai dari $f(x^*)$ adalah:

1.) Maksimum relatif jika nilai $f''(x^*) < 0$

2.) Minimum relatif jika nilai $f''(x^*) > 0$

3.) Tidak dapat disimpulkan jika nilai $f''(x^*) = 0$.

Syarat kecukupan SOSC terpenuhi karena

$f(Q_2^*) = 36{,}5 \rightarrow \pi'' = -100{,}5 < 0$

Sesuai syarat no. 1.

d. Bukti bahwa $MR = MC \rightarrow \pi$ max.

First order Condition :

$\pi = TR - TC$ $\qquad$ π max $= \pi'$

$\pi' = TR' - TC'$

$\pi' = MR - MC = 0$

$MR = MC$

Soal Kedua

$V(t) = 3^{2\sqrt{t}}$

$r = 20\% = 0{,}2$

$\boxed{A = Ve^{-rt}}$

$= (3^{2\sqrt{t}}) \cdot e^{-0{,}2t}$

$\ln A = \ln 3^{2\sqrt{t}} \cdot \ln e^{-0{,}2t}$

$= 2\sqrt{t} \cdot \ln 3 - 0{,}2t$

$= 2\sqrt{t} \cdot 1{,}09 - 0{,}2t$

$\ln A = 2{,}18\sqrt{t} - 0{,}2t$

$= 2{,}18\,t^{1/2} - 0{,}2t$

First order Condition

$\frac{d \ln A}{dt} = 1{,}09\,t^{-1/2} - 0{,}2 = 0$

$\frac{1}{A}\frac{dA}{dt} =$

$\frac{dA}{dt} = A(1{,}09\,t^{-1/2} - 0{,}2) = 0$

$A \neq 0 \longrightarrow 1{,}09\,t^{-1/2} - 0{,}2 = 0$

$1{,}09\,t^{-1/2} = 0{,}2$

$t^{-1/2} = 0{,}18$

$t = (0{,}18)^{-2} = 30{,}86$ thn

Bukti SOC terpenuhi :

$\frac{d^2 I_{rA}}{dt^2} = \frac{-1}{2} \cdot 1{,}09 t^{-3/2}$

$= -0{,}55\, t^{-3/2}$

$= -0{,}55\, (7064)^{-3/2}$

$= -0{,}55 \times 0{,}00589$

$= -0{,}0324 < 0$

Terbukti Maximum.

Soal Ketiga

- $Q_1 = \frac{63}{4} - \frac{1}{4} P_1$

$4Q_1 = 63 - P_1$

$P_1 = 63 - 4Q_1$ .... (1)

- $Q_2 = 21 - \frac{1}{5} P_2$

$5Q_2 = 105 - P_2$

$P_2 = 105 - 5Q_2$ ...... (2)

- $Q_3 = \frac{75}{2} - \frac{1}{6} P_3$

$6Q_3 = 75 - P_3$

$P_3 = 75 - 6Q_3$ .... (3)

$C = 20 + 15Q \; ; \; Q = Q_1 + Q_2 + Q_3$

$\pi = TR_1 + TR_2 + TR_3 - TC$

$= (63Q_1 - 4Q_1^2 + 105Q_2 - 5Q_2^2 + 75Q_3 - 6Q_3^2) - (20 + 15Q_1 + 15Q_2 + 15Q_3)$

$= 48Q_1 - 4Q_1^2 + 90Q_2 - 5Q_2^2 + 60 - 6Q_3^2 - 20$

a) $Q_1, Q_2, Q_3 \rightarrow$ Max π

First order condition

$\pi_1' = 48 - 8Q_1 = 0$
$Q_1 = 6$

$\pi_2' = 90 - 10Q_2 = 0$
$Q_2 = 9$

$\pi_3' = 60 - 12Q_3 = 0$
$Q_3 = 5$

b) Bukti SOSC terpenuhi :

$\pi_{11}'' = -8 \quad \pi_{12}'' = 0 \quad \pi_{13}'' = 0$

$\pi_{21}'' = 0 \quad \pi_{22}'' = -10 \quad \pi_{23}'' = 0$

$\pi_{31}'' = 0 \quad \pi_{32}'' = 0 \quad \pi_{33}'' = 12$

$H = \begin{vmatrix} -8 & 0 & 0 \\ 0 & -10 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{vmatrix} \begin{matrix} -8 & 0 \\ 0 & -10 \\ 0 & 0 \end{matrix}$

$\left.\begin{matrix} H_1 = -8 < 0 \\ H_2 = 80 > 0 \\ H_3 = -96 > 0 \end{matrix}\right\}$ terbukti maksimum

Soal keempat

$U = U(x,y) = 9x + xy + 6y$ utility function

$P_x X + P_y Y = M$ budget constraint

a) Persamaan Lagrange

$\mathcal{L} = 9x + xy + 6y + \lambda(M - P_x X - P_y Y)$

b) Persamaan Marshall demand dan tiap x, y

First order condition

$\mathcal{L}_x = 9 + y - \lambda P_x = 0$

$\lambda = \frac{9 + y}{P_x}$

$\mathcal{L}_y = x + 6 - \lambda P_y = 0$

$\lambda = \frac{x + 6}{P_y}$

$\mathcal{L}_\lambda = M - P_x X - P_y Y = 0$

$\lambda = \lambda$

$\frac{9 + y}{P_x} = \frac{x + 6}{P_y}$

$9P_y + P_y y = P_x x + 6P_x$

$y = \frac{P_x x + 6P_x - 9P_y}{P_y}$

$M - P_x X - P_y Y = 0$

$M - P_x X - P_y \left(\frac{P_x X + 6P_x - 9P_y}{P_y} \right) = 0$

$M - 2P_x X - 6P_x + 9P_y = 0$

$2P_x X = M - 6P_x + 9P_y$

$X = \frac{M - 6P_x + 9P_y}{2P_x}$

$Y = \frac{P_x X + 6P_x - 9P_y}{P_y}$

$Y = \frac{P_x \left(\frac{M - 6P_x + 9P_y}{2P_x} \right) + 6P_x - 9P_y}{P_y}$

$Y = \frac{0{,}5M - 3P_x + 4{,}5Y + 6P_x - 9P_y}{P_y}$

$Y = \frac{0{,}5M + 3P_x - 4{,}5P_y}{P_y}$ → Persamaan Marshallian Demand

c.) Buktikan memenuhi SOC :

$$|H| = \begin{vmatrix} L_{\lambda\lambda} & L_{\lambda x} & L_{\lambda y} \\ L_{x\lambda} & L_{xx} & L_{xy} \\ L_{y\lambda} & L_{yx} & L_{yy} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & -P_x & -P_y \\ -P_x & 0 & 1 \\ -P_y & 1 & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} -P_x & -P_y \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{matrix}$$

$$\left.\begin{aligned} |H_1| &= 0 \\ |H_2| &= -P_x^2 < 0 \\ |H_3| &= 2P_x P_y > 0 \end{aligned}\right\} \text{Terbukti max.}$$

d.) $M = 100$, $P_x = 4$, $P_y = 2$:

jumlah barang x, y, utility :

$X = \frac{M - 6P_x + 9P_y}{2P_x} = \frac{100 - 6(4) + 9(2)}{2(4)} = 11{,}75$

$Y = \frac{0{,}5M + 3P_x - 4{,}5P_y}{P_y} = \frac{0{,}5(100) + 3(4) - 4{,}5(2)}{2}$

$= 26{,}5$

$U = 9X + XY + 6Y$

$= 9(11{,}75) + (11{,}75)(26{,}5) + 6(26{,}5)$

$= 105{,}75 + 311{,}375 + 159$

$= 576{,}125$

UAS 2008-2009

Soal pertama

$TR = 4350Q - 13Q^2$

$TC = Q^3 - 5{,}5Q^2 - 150Q + 675$

a.) Nilai Q agar π max

$\pi = TR - TC$

$= 4350Q - 13Q^2 - Q^3 + 5{,}5Q^2 + 150Q - 675$

$= 4200Q - 7{,}5Q^2 - Q^3 - 675$

First order Condition

$\pi' = 4200 - 15Q - 3Q^2 = 0$

$Q_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$Q_{1,2} = \frac{-(-15) \pm \sqrt{(-15)^2 - 4(-3)(4200)}}{2(-3)}$

$Q_1 = -40$

$Q_2 = 35$ → Q agar π max

b.) Bukti kepenuhinya Second order Condition

$\pi'' = -15 - 6Q$

$$\left.\begin{aligned} Q_1 &= -40 \rightarrow \pi'' = 225 > 0 \\ Q_2 &= 35 \rightarrow \pi'' = -225 < 0 \end{aligned}\right\} \text{Terbukti}$$

Soal Kedua

$V(t) = 3^{2\sqrt{t}}$

$r = 10\% = 0{,}1$

$A = V_t e^{-rt}$

$A = (3^{2\sqrt{t}})\, e^{-0{,}1t}$

$\ln A = \ln 3^{2\sqrt{t}} + \ln e^{-0{,}1t}$

$= 2\sqrt{t}\,.\ln 3 - 0{,}1t$

$= 2\sqrt{t}\,.\,1{,}09 - 0{,}1t$

$= 2{,}18\sqrt{t} - 0{,}1t$

$= 2{,}18\,t^{\frac{1}{2}} - 0{,}1t$

First order Condition

$\frac{d\ln A}{dt} = 1{,}09\,t^{-\frac{1}{2}} - 0{,}1 = 0$

$\frac{1}{A}\frac{dA}{dt} = A\,(1{,}09\,t^{-\frac{1}{2}} - 0{,}1) = 0$

$A \neq 0 \rightarrow 1{,}09\,t^{-\frac{1}{2}} - 0{,}1 = 0$

$1{,}09\,t^{-\frac{1}{2}} = 0{,}1$

$t^{-\frac{1}{2}} = 0{,}092^{-\frac{2}{1}}$

$t = 0{,}092$

$t = 118{,}15$ tahun

Second order Condition

$\frac{d^2\ln A}{dt^2} = -\frac{1}{2}\,.\,1{,}09\,t^{-3/2}$

$= -0{,}55\,t^{-3/2}$

$= -0{,}55\,(118{,}15)^{-3/2}$

$= -0{,}55\,.\,0{,}000779$

$= 0{,}00043 < 0$ (Terbukti)

Soal Ketiga

$Q_1 = 40 - 2P_1 - P_2$

$2P_1 + P_2 = 40 - Q_1$

$Q_2 = 35 - P_1 - P_2$

$P_1 + P_2 = 35 - Q_2$

• $C = Q_1^2 + 2Q_2^2 + 10$

a.) Tingkat output Q agar π max

Karena P terdiferensiasi, maka digunakan Cramer's rule:

$2P_1 + P_2 = 40 - Q_1$

$P_1 + P_2 = 35 - Q_2$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 40 - Q_1 \\ 35 - Q_2 \end{bmatrix}$$

$$P_1 = \frac{|P_1|}{|P|} = \frac{\begin{vmatrix} 40-Q_1 & 1 \\ 35-Q_2 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}$$

$$P_1 = \frac{40 - Q_1 - 35 + Q_2}{1}$$

$= 5 - Q_1 + Q_2$

$$P_2 = \frac{|P_2|}{|P|} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 40-Q_1 \\ 1 & 35-Q_2 \end{vmatrix}}{1}$$

$P_2 = -2Q_2 + 70 - 40 + Q_1$

$= 30 - 2Q_2 + Q_1$

$= 30 + Q_1 - 2Q_2$

$\pi = TR_1 + TR_2 - TC$

$= 5Q_1 - Q_1^2 + Q_1Q_2 + 30Q_2 + Q_1Q_2 - 2Q_2^2 - Q_1^2 - 2Q_2^2 - 10$

$= 5Q_1 - 2Q_1^2 + 2Q_1Q_2 + 30Q_2 - 4Q_2^2 - 10$

First order Condition:

$\pi_1' = 5 - 4Q_1 + 2Q_2 = 0$

$4Q_1 - 2Q_2 = 5$

$\pi_2' = 2Q_1 + 30 - 8Q_2 = 0$

$-2Q_1 + 8Q_2 = 30$

Eliminasi:

$$\begin{array}{l|l} 4Q_1 - 2Q_2 = 5 & \times 1 \\ -2Q_1 + 8Q_2 = 30 & \times -2 \end{array}$$

$4Q_1 - 2Q_2 = 5$

$4Q_1 - 16Q_2 = -60$ −

$14Q_2 = 65$

$Q_2 = 3{,}61$

$\bar{Q}_1 = 2Q_1 + 8Q_2 = 30$

$2Q_1 + 8(3,61) = 30$

$Q_1 = 0.56$

Soal Keempat

$U(X,Y) = XY$ Fungsi objektif

$I = P_X X + P_Y Y$ Fungsi kendala

$100 = 2X + 5Y$ (Budget Constraint)

a.) Persamaan Lagrange

$\mathcal{L} = XY + \lambda(100 - 2X - 5Y)$

$\lambda = \lambda$

$\frac{y}{2} = \frac{x}{5}$

$\boxed{2Y = 5X}$

b.) $X, Y \rightarrow U\ max$

First order Condition

$\frac{\partial L}{\partial X} = y - 2\lambda = 0 \rightarrow 2\lambda = y$, $\lambda = y/2$

$\frac{\partial L}{\partial Y} = x - 5\lambda = 0 \rightarrow 5\lambda = x$, $\lambda = x/5$

$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 100 - 2X - 5Y = 0$

$100 - 2X - 2X = 0$

$100 - 4X = 0$

$100 = 4X$

$X^* = 25$

$Y^* = \frac{2}{5}X = \frac{2}{5}(25) = 10$

c) Second order Condition

$$|\bar{H}| = \begin{vmatrix} L_{\lambda\lambda} & L_{\lambda x} & L_{\lambda y} \\ L_{x\lambda} & L_{xx} & L_{xy} \\ L_{y\lambda} & L_{yx} & L_{yy} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & -2 & -5 \\ -2 & 0 & 1 \\ -5 & 1 & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \\ -5 & 1 \end{matrix}$$

$|\bar{H}| = 20 > 0$ } maksimum

Soal Kelima

a.) $MPS = \frac{dS}{dY} = S'(Y) = 0,5 - 0,2Y^{-\frac{1}{2}}$

$S(25) = -35$

$S \rightarrow \int (0,5 - 0,2Y^{-\frac{1}{2}})$

$= 0,5Y + 0,4Y^{\frac{1}{2}}$

b.) Asumsikan tingkat investasi digambarkan dengan fungsi berbentuk $I(t) = 36t^{4/5}$ Dan diketahui bahwa $K(0) = 700$. Tentukan time path dari modal K (fungsi modal) atau $K(t)$

UAS 2009 - 2010

Soal Pertama

$C(Q) = Q^3 - 61,25Q^2 + 1528,5Q + 2000$

$Q = 600 - 0,5P$

$0,5P = 600 - Q$

$P = 1200 - 2Q$

a.) Fungsi Laba total

$\pi = TR - TC$

$= 1200Q - 2Q^2 - Q^3 + 61,25Q^2 - 1528,5Q - 2000$

$= -328,5Q + 59,25Q^2 - Q^3 - 2000$

b.) Q saat π max

First order Condition

$\pi' = \overset{c}{-328,5} + \overset{b}{118,5Q} \overset{a}{- 3Q^2}$

$Q_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$Q_{1,2} = \frac{-118,5 \pm \sqrt{(-118,5)^2 - 4(-3)(-328,5)}}{2(-3)}$

$Q_1 = 3$

$Q_2 = 36,5 \rightarrow$ Q saat π max

Second order condition

$\pi' = -328{,}5 + 118{,}5Q - 3Q^2 = 0$

$\pi'' = 118{,}5 - 6Q = 0$

$Q_1 = 3 \rightarrow \pi'' = 100{,}5 > 0$
$Q_2 = 36{,}5 \rightarrow \pi'' = -100{,}5 < 0$ } $tabula$

Soal kedua

$V = 1000\, e^{t^{1/3}}$

$r = 9\% = 0{,}09$

$A = V e^{-rt}$

$= (1000\, e^{t^{1/3}})\, e^{-0{,}09t}$

$= 1000\, e^{t^{1/3} - 0{,}09t}$

$\ln A = \ln 1000\, e^{t^{1/3} - 0{,}09t}$

$\ln A = \ln 1000 + \ln e^{t^{1/3} - 0{,}09t}$

$\ln A = 6{,}9 + t^{1/3} - 0{,}09t$

First order condition

$\frac{d \ln A}{dt} = \frac{1}{3} t^{-2/3} - 0{,}09$

$\frac{1}{A}\frac{dA}{dt} = A\left(\frac{1}{3} t^{-2/3} - 0{,}09\right) = 0$

$A \neq 0 \rightarrow \frac{1}{3} t^{-2/3} - 0{,}09 = 0$

$\frac{1}{3} t^{-2/3} = 0{,}09$

$t^{-2/3} = 0{,}27$

$t = 0{,}27^{-3/2}$

$t = 7{,}1278$ tahun

Soal ketiga

$P_1 = 120 - 3Q_1 + 4Q_2$

$P_2 = 70 + 2Q_1 - 3Q_2$

$TC = 2Q_1^2 + Q_2^2 + 12$

a) Q agar π max

$\hookrightarrow$

$\pi = TR_1 + TR_2 - TC$

$= 120Q_1 - 3Q_1^2 + 4Q_1Q_2 + 70Q_2$

$+ 2Q_1Q_2 - 3Q_2^2 - 2Q_1^2 - Q_2^2 - 12$

$= 120Q_1 - 5Q_1^2 + 6Q_1Q_2 + 70Q_2 - 4Q_2^2$

First order condition

$\pi_1' = 120 - 10Q_1 + 6Q_2 = 0$

$\pi_2' = 6Q_1 + 70 - 8Q_2 = 0$

Eliminasikan:

$-10Q_1 + 6Q_2 = -120 \;|\times 6|\; -60Q_1 + 36Q_2 = -720$

$6Q_1 - 8Q_2 = -70 \;|\times 10|\; 60Q_1 - 80Q_2 = -700$ +

$-44Q_2 = -1420$

$Q_2 = 32{,}273$

$Q_1 \rightarrow 6Q_1 - 8Q_2 = -70$

$6Q_1 - 8(32{,}273) = -70$

$6Q_1 - 258{,}184 = -70$

$6Q_1 = 188{,}184$

$Q_1 = 31{,}364$

b) $P_1 = 120 - 3Q_1 + 4Q_2$

$= 120 - 3(31{,}364) + 4(32{,}273)$

$= 155$

$P_2 = 70 + 2Q_1 - 3Q_2$

$= 70 + 2(31{,}364) - 3(32{,}273)$

$= 35{,}90$

c) Second order condition

$\pi_{11}'' = -10 \qquad \pi_{21}'' = 6$

$\pi_{12}'' = 6 \qquad \pi_{22}'' = -8$

$|H| = \begin{vmatrix} -10 & 6 \\ 6 & -8 \end{vmatrix}$

$|H_1| = -10 < 0$
$|H_2| = 80 - 36 = 44 > 0$ } Terpenuhi syarat maximum

$\pi_{max} = 120Q_1 - 5Q_1^2 + 6Q_1Q_2 + 70Q_2 - 4Q_2^2$

$= 120(31{,}364) - 5(31{,}364)^2 + 6(31{,}364)(32{,}273)$

$+ 70(32{,}273) - 4(32{,}273)^2$

$= 2.999{,}3$

Profit maximum

Soal Keempat

$U = f(x,y) = 10x^{1/3}y^{2/3}$ ... utility function

$4x + 6y = 72$ ... Budget Constraint

a.) Lagrange function

$L = 10x^{1/3}y^{2/3} + \lambda(72 - 4x - 6y)$

b.) x, y agar U max

First order Condition

$\frac{\partial L}{\partial x} = \frac{10}{3}x^{-2/3}y^{2/3} - 4\lambda = 0 \qquad \lambda = \frac{10}{12}x^{-2/3}y^{2/3}$

$\frac{\partial L}{\partial y} = \frac{20}{3}x^{1/3}y^{-1/3} - 6\lambda = 0 \qquad \lambda = \frac{20}{18}x^{1/3}y^{-1/3}$

$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 72 - 4x - 6y$

$\lambda = \lambda$

$\frac{10}{12}x^{-2/3}y^{2/3} = \frac{20}{18}x^{1/3}y^{-1/3}$

$\frac{x^{-2/3}y^{2/3}}{x^{1/3}y^{-1/3}} = \frac{20}{18} \times \frac{12}{10}$

$x^{-1}y = \frac{4}{3}$

$\frac{y}{x} = \frac{4}{3}$

$4x = 3y$

$x = \frac{3}{4}y$

$4x + 6y = 72$

$4(\frac{3}{4}y) + 6y = 72$

$3y + 6y = 72$

$9y = 72$

$y^* = 8$

$x^* = \frac{3}{4}(8)$

$x^* = 6$

Soal Kelima

$P_d = -Q^2 - 4Q + 68$ → Fungsi Demand

$P_s = Q^2 + 2Q + 12$ → Fungsi Supply

a.) Surplus Konsumen

$P_d = P_s$

$-Q^2 - 4Q + 68 = Q^2 + 2Q + 12$

$2Q^2 + 6Q - 56 = 0$

$Q^2 + 3Q - 28 = 0$

$(Q + 7)(Q - 4) = 0$

$Q = -7 \quad Q^* = 4$

Substitusikan ke Pd atau Ps

$P_s = Q^2 + 2Q + 12$

$P^* = (4)^2 + 2(4) + 12 = 36$

$CS = \int_0^Q Q_d - (P^*Q^*)$

$= \left[\int_0^4 (-Q^2 - 4Q + 68)\right] - (36 \cdot 4)$

$= -\frac{1}{3}Q^3 - 2Q^2 + 68Q \Big|_0^4 - (144)$

$= -\frac{1}{3}(4)^3 - 2(4)^2 + 68(4) - (0) - 144$

$= 74,67$

b.) Surplus Produsen

$PS = P^*Q^* - \int_0^4 Q_s$

$= 144 - \left[\int_0^4 (Q^2 + 2Q + 12)\right]$

$= 144 - \left(\frac{1}{3}Q^3 + Q^2 + 12Q \Big|_0^4\right)$

$= 144 - \frac{1}{3}(4)^3 + (4)^2 + 12(4)$

$= 58,67$

45) $MPC = \frac{dc}{dy} = c'(y) = 0.6 + \frac{0.1}{\sqrt[3]{y}}$

$C(1) = 40 \Rightarrow c$

Fungsi konsumsi

$C = \int 0.6 + \frac{0.1}{y^{1/3}} + c$

$= \int 0.6 + 0.1 y^{-1/3} + 40$

$= 0.6y + 0.15 y^{2/3} + 40$

$= 0.6y + 0.15\sqrt[3]{y^2} + 40$

UAS 2010 - 2011

Question 1

$TR = 1400Q - 6Q^2$

$TC = Q^3 - 6Q^2 + 140Q + 750$

a.) Profit Function

$\pi = TR - TC$

$= 1400Q - 6Q^2 - Q^3 + 6Q^2 - 140Q - 750$

$= 1260Q - Q^3 - 750$

b.) Q that gives extreme value (Q^*)

First order condition

$\pi' = 1260 - 3Q^2 = 0$

$-3Q^2 = -1260$

$Q^2 = 420$

$Q = 20.4939 \approx 20.5$

c.) Second order condition checking

$\pi'' = -6Q = -6(20.5) = -123 < 0$

maximum! (Concave) ∩

d.) Immediate neighborhood of $Q = 20.5$

$\Rightarrow 20 < Q < 21$

$Q < Q^* \rightarrow 20$

$\pi = 1260Q - Q^3 - 750$

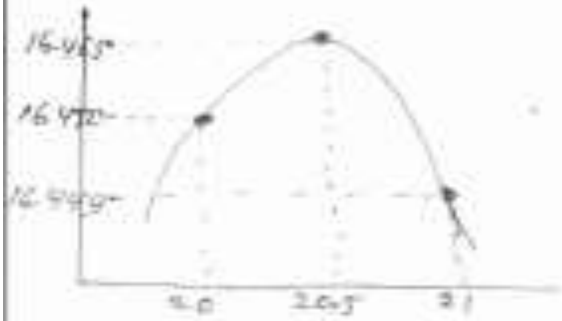
$= 1260(20) - (20)^3 - 750$

$= 16.4$

$Q > Q^* \rightarrow 21$

$\pi = 1260(21) - (21)^3 - 750$

$= 16.4$



e.) $\pi_{max} \rightarrow Q = 20.5$

$\pi = 1260(20.5) - (20.5)^3 - 750$

$= 16.455$

Question 2

$V = 3^{\sqrt{t}}$

a.) $A = Ve^{-rt}$

$A = 3^{\sqrt{t}} \cdot e^{-rt}$

b.) $r = 5\%$, $t^* = ?$ $A^* = ?$

$\ln A = \ln 3^{\sqrt{t}} \cdot \ln e^{-rt}$

$= \sqrt{t} \cdot \ln 3 \cdot e^{-0.05t}$

$= 1.09 t^{1/2} - 0.05t$

First order condition

$\frac{d \ln A}{dt} = 0.55 t^{-1/2} - 0.05 = 0$

$\frac{1}{A} \frac{dA}{dt} = 0.55 t^{-1/2} - 0.05 = 0$

$\frac{dA}{dt} = A(0.55 t^{-1/2} - 0.05) = 0$

$0.55 t^{-1/2} - 0.05 = 0$

$0.55 t^{-1/2} = 0.05$

$t^{-1/2} = 0.091$

$t = 0.091^{-2}$

$t = 120.76$ tahun

c.) Second order Condition

$$\frac{d^2 I_{PA}}{dt^2} = -\frac{1}{2} \cdot 0{,}55\, t^{-3/2}$$

$= -0{,}275\, t^{-3/2}$

$= -0{,}275 \cdot (120{,}76)^{-3/2}$

$= -0{,}275 \cdot 0{,}00075$

$= 0{,}00021 < 0$

Proven maximum !

QUESTION 3

$X = 90 - 0{,}5\, P_x$

$0{,}5\, P_x = 90 - X$

$P_x = 180 - 2X$

$Y = 35 - 0{,}25\, P_y$

$0{,}25\, P_y = 35 - Y$

$P_y = 140 - 4Y$

$Z = 30 - 0{,}2\, P_z$

$0{,}2\, P_z = 30 - Z$

$P_z = 150 - 5Z$

$TC = 25 + 20\,(X + Y + Z)$

$\pi = TR - TC$

$= TR_x + TR_y + TR_z - TC$

$= 180X - 2X^2 + 140Y - 4Y^2 + 150Z - 5Z^2$
$- 25 - 20X - 20Y - 20Z$

$= 160X - 2X^2 + 120Y - 4Y^2 + 130Z - 5Z^2 - 25$

a) First order condition

$\pi'_x = 160 - 4X = 0$

$X = 40$

$\pi'_y = 120 - 8Y = 0$

$Y = 15$

$\pi'_z = 130 - 10Z = 0$

$Z = 13$

$P_x = 180 - 2X = 180 - (2)(40)$

$= 100$

$P_y = 140 - 4Y = 140 - 4(15)$

$= 80$

$P_z = 150 - 5Z = 150 - 5(13)$

$= 85$

b) Hessian check (maximization)

"Because the variable is only one, the hessian matrix isn't necessary"

Second order Condition

$\pi''_x = -4 < 0$
$\pi''_y = -8 < 0$
$\pi''_z = -10 < 0$

Max condition fulfilled

c) $E_{dx} = \frac{dx}{dp} \cdot \frac{P}{X} = -0{,}5 \cdot \frac{100}{40}$

$= |-1{,}25| = 1{,}25 > 0$

Elastic

$E_{dy} = \frac{dy}{dp} \cdot \frac{P}{Y} = -0{,}25 \cdot \frac{80}{15}$

$= |-1{,}33| = 1{,}33 > 0$

Elastic

$E_{dz} = \frac{dz}{dp} \cdot \frac{P}{Z} = -0{,}2 \cdot \frac{85}{13}$

$= |-1{,}30| = 1{,}3 > 0$

Elastic

QUESTION 4

$X = 72 - 0{,}5\, P_x \rightarrow P_x = 144 - 2X$

$Y = 120 - P_y \rightarrow P_y = 120 - Y$

$C = f(x, y) = X^2 + XY + Y^2 + 35$ Cost function

$X + Y = 40$ Budget constraint

a) Lagrange function :

$\pi = TR_x + TR_y - C$

$\pi = 144x - 2x^2 + 120y - y^2 - x^2 - xy - y^2 - 35$

$\pi = 144x - 3x^2 + 120y - 2y^2 - xy - 35$

$\mathcal{L} = 144x - 3x^2 + 120y - 2y^2 - xy - 35 + \lambda(40 - x - y)$

b.) $x, y \rightarrow \pi \max$

First order condition

$\frac{\partial L}{\partial x} = 144 - 6x - y - \lambda = 0$

$\lambda = 144 - 6x - y$

$\frac{\partial L}{\partial y} = 120 - 4y - x - \lambda = 0$

$\lambda = 120 - 4y - x$

$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 40 - x - y$

$\lambda = \lambda$

$144 - 6x - y = 120 - 4y - x$

$3y = -24 + 5x$

$y = \frac{-24 + 5x}{3}$

Subtitute y to $\frac{\partial L}{\partial \lambda}$

$40 - x - \left(\frac{-24 + 5x}{3}\right) = 0$

$120 - 3x + 24 - 5x = 0$

$144 - 8x = 0$

$x^* = 18$

$y^* = \frac{-24 + 5(18)}{3}$

$y^* = 22$

c) Second order Condition

$$|H| = \begin{vmatrix} L_{\lambda\lambda} & L_{\lambda x} & L_{\lambda y} \\ L_{x\lambda} & L_{xx} & L_{xy} \\ L_{y\lambda} & L_{yx} & L_{yy} \end{vmatrix}$$

$$|H| = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & -6 & -1 \\ -1 & -1 & -4 \end{vmatrix} \begin{matrix} 0 & -1 \\ -1 & -6 \\ -1 & -1 \end{matrix}$$

$|H| = 8 > 0$ max.

QUESTION 5

Demand Function $\rightarrow P_d = 113 - Q^2$

Supply Function $\rightarrow P_s = (Q+1)^2$

$= Q^2 + 2Q + 1$

a.) Equilibrium Q dan P:

$P_d = P_s$

$113 - Q^2 = Q^2 + 2Q + 1$

$2Q^2 + 2Q - 112 = 0$

$Q^2 + Q - 56 = 0$

$(Q + 8)(Q - 7) = 0$

$Q = -8$ $\quad Q^* = 7 \rightarrow$ max

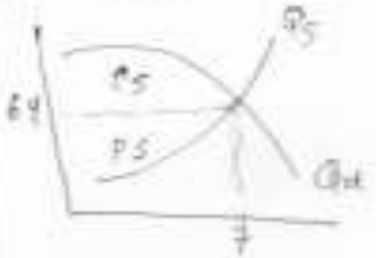
Subtitute Q^* to P_s or P_d

$P_d = 113 - Q^2$

$= 113 - 7^2$

$= 113 - 49$

$P^* = 64$



b.) $CS = \int Q_d - PQ$

$= \int_0^7 113 - Q^2 - (64 \cdot 7)$

$= 113Q - \frac{1}{3}Q^3 \Big|_0^7 - 448$

$= 113(7) - \frac{1}{3}(7)^3 - 0 - 448$

$= 228{,}67$

c.) $PS = P \cdot Q - \int Q_s$

$= (64 \cdot 7) - \int_0^7 Q^2 + 2Q + 1$

$= 448 - \left(\frac{1}{3}Q^3 + Q^2 + Q \Big|_0^7\right)$

$= 448 - \frac{1}{3}(7)^3 + (7)^2 + 7 - 0$

$= 277{,}67$

UAS 2011-2012

SOAL 1

$V(t) = 3^{4\sqrt{t}}$

$r = r$ (continuous)

a.) Fungsi present value

$A = Ve^{-rt}$
$= (3^{4\sqrt{t}})\, e^{-rt}$

b.) Bentuk logaritma natural

$\ln A = \ln 3^{4\sqrt{t}} . \ln e^{-rt}$

$\ln A = 4\sqrt{t} . 1,1 - rt$

$\ln A = 4,4\, t^{\frac{1}{2}} - rt$

c.) max t → max. $V(t)$.

First Order Condition

$\frac{d \ln A}{dt} = \frac{1}{2} . 4,4\, t^{-\frac{1}{2}} - r = 0$

$\frac{1}{A} \frac{dA}{dt} = 2,2\, t^{-\frac{1}{2}} - r = 0$

$\frac{dA}{dt} = A(2,2\, t^{-\frac{1}{2}} - r) = 0$

$A \neq 0 \rightarrow 2,2\, t^{-\frac{1}{2}} = r$

$\frac{2,2}{t^{\frac{1}{2}}} = r$

$\frac{2,2}{\sqrt{t}} = r$

$r\sqrt{t} = 2,2$

$\sqrt{t} = \frac{2,2}{r}$

$t = \left(\frac{2,2}{r}\right)^2$

d.) $r_1 = 0,1$, $r_2 = 0,2$. Bagaimana t?

$r_1 = 0,1 \rightarrow t = \left(\frac{2,2}{0,1}\right)^2 = 484$

$r_2 = 0,2 \rightarrow t = \left(\frac{2,2}{0,2}\right)^2 = 121$

Semakin besar r, semakin ↓ t

SOAL 2

$C = 2Q_1^2 + Q_1Q_3 + Q_2^2 + Q_2Q_3 + Q_3^2$

$P_1 = 5, P_2 = 3, P_3 = 4$.

a.) Q agar π max

$\pi = TR_1 + TR_2 + TR_3 - TC$
$= 5Q_1 + 3Q_2 + 4Q_3 - 2Q_1^2 - Q_1Q_3 - Q_2^2 - Q_2Q_3 - Q_3^2$

First order condition

$\pi_1' = 5 - 4Q_1 - Q_3 = 0 \rightarrow 4Q_1 + Q_3 = 5$

$\pi_2' = 3 - 2Q_2 - Q_3 = 0 \rightarrow 2Q_2 + Q_3 = 3$

$\pi_3' = 4 - Q_1 - Q_2 - 2Q_3 = 0$

$Q_1 + Q_2 + 2Q_3 = 4$

Menggunakan aturan Cramer:

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$Q_1 = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{10}{10} = 1$$

$$Q_2 = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 5 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{10}{10} = 1$$

$$Q_3 = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{10}{10} = 1$$

SOC:

$\pi_{11}'' = -4 \quad \pi_{12}'' = 0 \quad \pi_{13}'' = -1$

$\pi_{21}'' = 0 \quad \pi_{22}'' = -2 \quad \pi_{23}'' = -1$

$\pi_{31}'' = -1 \quad \pi_{32}'' = -1 \quad \pi_{33}'' = -2$

$$|H| = \begin{vmatrix} -4 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & -3 \\ -1 & -1 & -2 \end{vmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} |H_1| = -4 \\ |H_2| = 8 \\ |H_3| = -2 < 0 \end{array}\right\} \text{max.}$$

c.) Profit maksimum :

$\pi = 5Q_1 + 3Q_2 + 4Q_3 - 2Q_1^2 - Q_1Q_2 - Q_2^2$
$\quad - Q_2Q_3 - Q_3^2$
$= 5(1) + 3(1) + 4(1) - 2(1) - 1$
$\quad - 1 - 1 - 1$
$= -6$

SOAL 3

$Q_1 = 24 - P_1 \rightarrow P_1 = 24 - Q_1$
$Q_2 = 24 - 2P_2 \rightarrow P_2 = 12 - \frac{1}{2}Q_2$
$Q_3 = 24 - 3P_3 \rightarrow P_3 = 8 - \frac{1}{3}Q_3$
$C = 6Q + 10 \; , Q = Q_1 + Q_2 + Q_3$

a.) Q^*, P^*, agar π max

$\pi = TR_1 + TR_2 + TR_3 - TC$
$= 24Q_1 - Q_1^2 + 12Q_2 - \frac{1}{2}Q_2^2 + 8Q_3 - \frac{1}{3}Q_3^2$
$\quad - 6Q_1 - 6Q_2 - 6Q_3 - 10$

$\frac{\partial \pi}{\partial Q_1} = 24 - 2Q_1 - 6 = 0$
$\qquad Q_1^* = 9$

$\frac{\partial \pi}{\partial Q_2} = 12 - Q_2 - 6 = 0$
$\qquad Q_2^* = 6$

$\frac{\partial \pi}{\partial Q_3} = 8 - \frac{2}{3}Q_3 - 6 = 0$
$\qquad Q_3^* = 3$

$P_1^* = 24 - Q_1 = 24 - 9 = 15$
$P_2^* = 12 - \frac{1}{2}Q_2 = 12 - \frac{1}{2}(6) = 9$
$P_3^* = 8 - \frac{1}{3}Q_3 = 8 - \frac{1}{3}(3) = 7$

b.)
$$|H| = \begin{vmatrix} \pi_{11} & \pi_{12} & \pi_{13} \\ \pi_{21} & \pi_{22} & \pi_{23} \\ \pi_{31} & \pi_{32} & \pi_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{3} \end{vmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} |H_1| = -2 < 0 \\ |H_2| = 2 > 0 \\ |H_3| = -\frac{4}{3} < 0 \end{array}\right\} \text{max.}$$

c.) $Q = Q_1 + Q_2 + Q_3$
$P_1 = P_2 = P_3 = P \rightarrow$ tanpa diskriminasi harga
$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3$
$Q = 24 - P + 24 - P + 24 - 3P$
$Q = 72 - 6P$
$P = 12 - \frac{1}{6}Q$

$\pi = TR - TC$
$= 12Q - \frac{1}{6}Q^2 - 6Q - 10$
$= 6Q - \frac{1}{6}Q^2 - 10$

Kondisi π max :
First order condition
$\pi' = 6 - \frac{2}{6}Q = 0$
$\qquad Q^* = 18$
$\qquad P_1^* = 12 - \frac{1}{6}(18) = 9$

Profit dan total output poin a :
$\pi = (P_1Q_1 + P_2Q_2 + P_3Q_3) - (6Q + 10) =$
$= (15 \cdot 9) + (9 \cdot 6) + (7 \cdot 3) - 6(9) - 6(6) - 6(3) - 10$
$= 92$
$Q = 18$

Profit dan total output poin c :
$\pi = PQ - (6Q + 10)$
$= 162 - 6(18) + 10$
$= 64$
$Q = 18$

dari perhitungan diketahui output pada (A) dan (C) sama yaitu 1[illegible] Tetapi profit pada (A) > profit pada (C) karena diskriminasi harga memiliki kelebihan bargaining power ke segmen konsumen tertentu.

SOAL 4

$Q = 100 K^{0.5} L^{0.5}$ Fungsi Constraint

$C = 40K + 10L$ Fungsi objektif

$Q = 1000$

$1000 = 100 K^{0.5} L^{0.5}$

$10 = K^{0.5} L^{0.5}$

a.) Fungsi langrange

$$\mathcal{L} = 40K + 10L + \lambda(10 - K^{0.5}L^{0.5})$$

b.) Kondisi harga minimum

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial K} = 40 - 0{,}5\lambda K^{-0.5} L^{0.5} = 0 \quad \ldots (1)$$

$$\lambda = \frac{40}{0{,}5 K^{-0.5} L^{0.5}}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial L} = 10 - 0{,}5\lambda K^{0.5} L^{-0.5} = 0 \quad \ldots (2)$$

$$\lambda = \frac{20}{0{,}5 K^{0.5} L^{-0.5}}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = 10 - K^{0.5} L^{0.5} = 0$$

$$K^{0.5} L^{0.5} = 10 \quad \ldots (3)$$

$$\lambda = \lambda$$

$$\frac{80}{0{,}5 K^{-0.5} L^{0.5}} = \frac{20}{0{,}5 K^{0.5} L^{-0.5}}$$

$$\frac{80 K^{0.5}}{0{,}5 L^{0.5}} = \frac{20 L^{0.5}}{0{,}5 K^{0.5}}$$

$$4K = L$$

Subtitusi $L = 4K$ ke persamaan (3)

$K^{0.5}(4K)^{0.5} = 10$

$K^{0.5} \cdot 2K^{0.5} = 10$

$2K = 10$

$K^* = 5$

$L^* = 4K = 4(5) = 20$

c) Second order Condition

$$|\bar{H}| = \begin{vmatrix} \mathcal{L}_{\lambda\lambda} & \mathcal{L}_{\lambda K} & \mathcal{L}_{\lambda L} \\ \mathcal{L}_{K\lambda} & \mathcal{L}_{KK} & \mathcal{L}_{KL} \\ \mathcal{L}_{L\lambda} & \mathcal{L}_{LK} & \mathcal{L}_{LL} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & -0{,}5K^{-0.5}L^{0.5} & -0{,}5K^{0.5}L^{-0.5} \\ -0{,}5K^{-0.5}L^{0.5} & -0{,}25\lambda K^{-1.5}L^{0.5} & -0{,}25\lambda K^{-0.5}L^{-0.5} \\ -0{,}5K^{0.5}L^{-0.5} & -0{,}25\lambda K^{-0.5}L^{-0.5} & -0{,}25\lambda K^{0.5}L^{-1.5} \end{vmatrix}$$

$K = 5, \; L = 20, \; \lambda = 40$

$$|\bar{H}| = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -0{,}25 \\ -1 & -4 & -2 \\ -0{,}25 & -2 & -0{,}25 \end{vmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} |\bar{H}_1| &= 0 \\ |\bar{H}_2| &= -1 < 0 \\ |\bar{H}_3| &= -0{,}6 < 0 \end{aligned}\right\} \text{min.}$$

SOAL 5

c. Menentukan derajat homogenitas

1.) $Q = 24K + 3L$

$Q(jK, jL) = 24jK + 3jL$

$j(24K + 3L) = jQ$

2.) $Q = 5K^{1/3} L^{2/3}$

$Q(jK, jL) = 5jK^{1/3} jL^{2/3}$

$j(5K^{1/3}L^{2/3}) = jQ$

3.) $Q = K^2 + \dfrac{L^3}{K}$

$Q(jK, jL) = 2jK^2 + \dfrac{(jL)^3}{jK}$

$j^2\left(2K^2 + \dfrac{L^3}{K}\right) = j^2 Q$

- Increasing return to scale ⇒ (3)
  Karena input-input (K dan L) digandakan sebesar j kali, output (Q) berganda sebesar j^2, sehingga lebih besar dari penggandaan input.

- Constant return to scale ⇒ (1) dan (2)
  Karena pangkatnya 1, maka saat digandakan j kali, output (Q) berganda sebesar j.

- Jika pangkat < 1, maka akan terjadi decreasing return to scale.

b.) Alternatif 1

$$PV \text{ expected return} = \frac{40\text{ jt}}{r} = \frac{40\text{ jt}}{10\%} = 400\text{ jt}$$

PV biaya investasi = 350 jt

PV net return = 400 jt − 350 jt = 50 jt

Alternatif 2

Return diterima setelah 10 tahun

$$PV \text{ expected return} = 400\,e^{-rt}$$
$$= 400\,e^{-10\% \cdot 10}$$
$$= 400 \cdot 0{,}36$$
$$= 147{,}15 \text{ jt}$$

Biaya produksi dibayar dimuka (sekarang).

$$PV \text{ biaya investasi} = \int MC\, dQ$$
$$= \int 15e^{0{,}2Q}\, dQ$$
$$= 75e^{0{,}2 \times 9} - 100$$
$$= 191{,}6$$

PV net return = 191,6 jt − 147,15 jt
= 44,45 jt

ALTERNATIF 1 LEBIH MENGUNTUNGKAN !!!

CHAPTER 1

KEYNES AND THE CLASSIC