MATEMATIKA EKONOMI

Penyusun :
Listiya Ike Purnomo, S.E., M.M.
Nisak Ruwah Ibnatur Husnul, S.Pd., M.Pd.
Eka Rima Prasetya, S.Pd., M.Pd.
Prima Sadewa, S.Pd., M.Pd.

UNPAM PRESS
Lembaga Penerbit & Publikasi
Jl. Surya Kencana No. 1 Pamulang
Gd. A, Ruang 211 Universitas Pamulang
Tangerang Selatan - Banten

MATEMATIKA EKONOMI

Penulis :
Listiya Ike Purnomo, S.E., M.M.
Nisak Ruwah Ibnatur Husnul, S.Pd., M.Pd.
Eka Rima Prasetya, S.Pd., M.Pd.
Prima Sadewa, S.Pd., M.Pd.

ISBN : 978-602-5867-65-1

Editor :
Shinta Ningtias Nazar

Penyunting:
Wahyu Nurul Hidayati

Desain Sampul:
Ubaid Al Faruq, M.Pd.

Tata Letak:
Aden, S.Si., M.Pd.

Penerbit:
Unpam Press

Redaksi:
Jl. Surya Kencana No. 1
R. 212, Gd. A Universitas Pamulang
Pamulang | Tangerang Selatan | Banten
Tlp/Fax: 021. 741 2566 – 7470 9855
Ext: 1073
Email: unpampress@unpam.ac.id

Cetakan pertama, 9 Desember 2019

Hak cipta dilindungi undang-undang
Dilarang memperbanyak karya tulis ini dalam bentuk dan dengan cara apapun tanpa izin penerbit.

LEMBAR IDENTITAS ARSIP

Data Publikasi Unpam Press
I Pusat Kajian Pembelajaran & E-learning Universitas Pamulang

Gedung A. R.211 Kampus 1 Universitas Pamulang
Jalan Surya Kencana No.1, Pamulang Barat, Tangerang Selatan, Banten.
Website : www.unpam.ac.id **I email** : unpampress@unpam.ac.id

Matematika Ekonomi / Listiya Ike Purnomo, S.E., M.M., Nisak Ruwah Ibnatur Husnul, S.Pd., M.Pd., Eka Rima Prasetya, S.Pd., M.Pd., Prima Sadewa, S.Pd., M.Pd.-1st ed.

ISBN 978-602-5867-73-6

1. Matematika Ekonomi I. Listiya Ike Purnomo, S.E., M.M. II. Nisak Ruwah Ibnatur Husnul, S.Pd., M.Pd. III. Eka Rima Prasetya, S.Pd., M.Pd. IV. Prima Sadewa, S.Pd., M.Pd.

M066-09122019-01

Ketua Unpam Press : Pranoto
Koordinator Editorial dan Produksi: Ubaid Al Faruq, Ali Madinsyah
Koordinator Bidang Hak Cipta : Susanto
Koordinator Publikasi dan Dokumentasi : Aden
Desain Cover : Ubaid Al Faruq

Cetakan pertama, 9 Desember 2019

Hak cipta dilindungi undang-undang. Dilarang menggandakan dan memperbanyak sebagian atau seluruh buku ini dalam bentuk dan dengan cara apapun tanpa ijin penerbit.

MODUL MATA KULIAH
RISET OPERASI

IDENTITAS MATA KULIAH

Program Studi	:	Matematika Ekonomi/ SAK0033
Sks	:	3 Sks
Prasyarat	:	-
Semester	:	IV
Deskripsi Mata Kuliah	:	Mata kuliah ini merupakan mata kuliah wajib program Studi Akuntansi S-1 yang membahas tentang penerapan fungsi linear dan non linera dalam ekonomi, matematika keuangan, program linear dan penerapannya dalam ekonomi, diferensial fungsi sederhana dan penerapannya dalam ekonomi, serta integral dan penerapannya dalam ekonomi.
Capaian Pembelajaran	:	Setelah menyelesaikan mata kuliah ini, mahasiswa mampu membuat keputusan dan memecahkan permasalahan di bidang ekonomi dan bisnis dengan tepat.
Penyusun	:	1. Listiya Ike Purnomo, S.E., M.M. 2. Nisak Ruwah Ibnatur Husnul, S.Pd., M.Pd. 3. Eka Rima Prasetya, S.Pd., M.Pd. 4. Prima Sadewa, S.Pd., M.Pd.

Tangerang Selatan, 9 Desember 2019

Ketua Program Studi Akuntansi S-1	Ketua Tim Penyusun
Effriyanti, S.E. Akt, M.Si.	Listiya Ike Purnomo, S.E., M.M
NIDN : 0003047701	NIDN. 0407058106

KATA PENGANTAR

Puji syukur kepada Allah SWT atas rahmat-Nya yang telah tercurah, sehingga penulis bisa menyelesaikan modul ini dengan baik.

Matematika ekonomi menjadi salah satu momok mahasiswa ketika terlintas mendengarnya. Matematika ekonomi menjadi salah satu mata kuliah yang ditakuti bagi sebagian mahasiswa, padahal sejatinya matematika ekonomi sangat mudah untuk diajak berteman.

Matematika ekonomi belum sepenuhnya disukai banyak orang. Pun, buku-buku referensi yang membahas matematika ekonomi ini belum lengkap. Padahal matematika ekonomi ini sangat penting untuk dipahami dan dikuasai oleh mahasiswa. Semua aktivitas sehari-hari selama ini, tidak lain adalah penerapan dari matematika ekonomi.

Oleh karena itu, penulis menyusun modul bahan ajar yang berjudul “Matematika Ekonomi” dengan bahasa dan kalimat yang mudah dipahami. Penulis berharap, modul ini dapat membuat pembaca menjadi lebih paham mengenai materi matematika ekonomi dan penerapannya dalam dunia bisnis.

Modul ini dapat tersusun dengan baik karena bantuan dari berbagai pihak. Oleh karena itu, penulis mengucapkan terima kasih yang amat dalam kepada keluarga besar Prodi Akuntansi Universitass Pamulang, sahabat, dan pihak-pihak lain yang tidak bisa penulis ucapkan satu persatu.

Penulis juga berharap kritik dan saran yang membangun untuk modul ini. Penulis sangat menyadari bahwa modul yang disusun ini masih jauh dari kesempurnaan. Semoga modul ini bermanfaat bagi kita semua, khususnya untuk Prodi Akuntansi S-1 Universitas Pamulang.

Tangerang Selatan, 9 Desember 2019

Tim Penyusun

DAFTAR ISI

MATEMATIKA EKONOMI ii
LEMBAR IDENTITAS ARSIP iii
IDENTITAS MATA KULIAH iv
KATA PENGANTAR v
DAFTAR ISI vi
PERTEMUAN 1 1
FUNGSI PERMINTAAN, PENAWARAN DAN KESEIMBANGAN PASAR (LINEAR) 1
A. Tujuan Pembelajaran 1
B. Uraian Materi 1
1. Fungsi Permintaan dan Penawaran 1
2. Keseimbangan Pasar 8
C. Soal Latihan/Tugas 12
D. Daftar Pustaka 14
PERTEMUAN 2 15
FUNGSI PERMINTAAN, PENAWARAN, DAN KESEIMBANGAN PASAR 15
(NONLINEAR) 15
A. Tujuan Pembelajaran 15
B. Uraian Materi 15
1. Grafik Keseimbangan Pasar 15
C. Soal Latihan/Tugas 28
D. Daftar Pustaka 29
PERTEMUAN 3 30
KESEIMBANGAN PASAR AKIBAT PAJAK PER UNIT DAN PAJAK PERSENTASE 30
A. Tujuan Pembelajaran 30
B. Uraian Materi 30
1. Keseimbangan Pasar Akibat Pajak Per Unit 30
2. Keseimbangan Pasar Akibat Pajak Persentase 37
C. Soal Latihan/Tugas 43

D. Daftar Pustaka 45
PERTEMUAN 4 46
KESEIMBANGAN PASAR AKIBAT SUBSIDI 46
A. Tujuan Pembelajaran 46
B. Uraian Materi 46
1. Keseimbangan Pasar Akibat Subsidi 46
2. Perhitungan Besarnya Subsidi 48
C. Soal Latihan/Tugas 59
D. Daftar Pustaka 60
PERTEMUAN 5 61
FUNGSI BIAYA, PENERIMAAN, DAN ANALISIS TITIK IMPAS 61
A. Tujuan Pembelajaran 61
B. Uraian Materi 61
1. Fungsi Biaya 61
2. Fungi Penerimaan 64
3. Analisis Titik Impas (Break Even Point = BEP) 66
C. Soal Latihan/Tugas 73
D. Daftar Pustaka 75
PERTEMUAN 6 76
FUNGSI KONSUMSI, FUNGSI TABUNGAN 76
DAN PENDAPATAN NASIONAL 76
A. Tujuan Pembelajaran 76
B. Uraian Materi 76
1. Fungsi Konsumsi dan Fungsi Tabungan 76
2. Fungsi Konsumsi 78
3. Tingkat Pendapatan BEP (Break Event Point) 79
4. Fungsi Tabungan 79
5. Fungsi Pendapatan Nasional 85
C. Soal Latihan/Tugas 89
D. Daftar Pustaka 90
PERTEMUAN 7 91
BUNGA SEDERHANA & BUNGA MAJEMUK 91

A. Tujuan Pembelajaran 91
B. Uraian Materi 91
1. Bunga Sederhana 91
2. Bunga Majemuk 95
3. Faktor yang Mempengaruhi Suku Bunga 103
C. Soal Latihan/Tugas 104
D. Daftar Pustaka 106
PERTEMUAN 8 107
ANUITAS 107
A. Tujuan Pembelajaran 107
B. Uraian Materi 107
1. Konsep Anuitas Nilai Sekarang 107
2. Konsep Anuitas Nilai Akan Datang 114
3. Jumlah Periode Tabungan 117
C. Soal Latihan/Tugas 120
D. Daftar Pustaka 123
PERTEMUAN 9 124
SISTEM PERTIDAKSAMAAN LINEAR DUA VARIABEL DAN PROGRAM LINEAR 124
A. Tujuan Pembelajaran 124
B. Uraian Materi 124
1. Grafik Himpunan Penyelesaian Pertidaksamaan Dua Variabel 124
2. Mengubah Kalimat Verbal Menjadi Model Matematika 128
3. Mencari Titik Ekstrim, Nilai Maksimum Atau Minimum 131
C. Soal Latihan/Tugas 136
D. Daftar Pustaka 139
PERTEMUAN 10 140
APLIKASI MATRIKS 140
A. Tujuan Pembelajaran 140
B. Uraian Materi 140
1. Definisi Matriks 140
2. Ordo Matriks 142
3. Jenis-Jenis Matriks 142

4. Kesamaan Dua Matriks 145
5. Transpose Matriks 145
6. Operasi Matriks 146
7. Determinan Matriks 151
8. INVERS MATRIKS 152
C. Soal Latihan/Tugas 157
D. Daftar Pustaka 158
PERTEMUAN 11 159
LIMIT FUNGSI 159
A. Tujuan Pembelajaran 159
B. Uraian Materi 159
1. Limit Fungsi Aljabar 159
2. Limit mendekati Nilai Tertentu 162
3. Limit Fungsi Mendekati Tak hingga 165
4. Teorema Limit 170
C. Soal Latihan/Tugas 172
D. Daftar Pustaka 173
PERTEMUAN 12 173
DIFERENSIAL FUNGSI SEDERHANA 174
A. Tujuan Pembelajaran 174
B. Uraian Materi 174
1. Diferensial Fungsi Sederhana 175
2. Kaidah Diferensial Fungsi Sederhana 177
3. Hakikat Derifativ Fungsi 184
C. Soal Latihan/Tugas 187
D. Daftar Pustaka 188
PERTEMUAN 13 189
HUBUNGAN FUNGSI DENGAN DERIVATIFNYA 189
A. Tujuan Pembelajaran 189
B. Uraian Materi 189
1. Derivatif dari Derivatif 189
2. Hubungan Fungsi Dengan Derifativnya 192

C. Soal Latihan/Tugas 202
D. Daftar Pustaka 203
PERTEMUAN 14 204
PENERAPAN DIFERENSIAL SEDERHANA DALAM EKONOMI 204
A. Tujuan Pembelajaran 204
B. Uraian Materi 204
1. Penerapan Diferensial Sederhana 204
2. Penerapan Diferensial Sederhana Dalam Ekonomi 204
C. Soal Latihan/Tugas 217
D. Daftar Pustaka 218
PERTEMUAN 15 219
INTEGRAL TAK TENTU 219
A. Tujuan Pembelajaran 219
B. Uraian Materi 219
1. Integral Tak Tentu 219
2. Kaidah-kaidah Integral Tak Tentu 221
C. Soal Latihan/Tugas 233
D. Daftar Pustaka 234
PERTEMUAN 16 235
PENERAPAN INTEGRAL TAK TENTU DALAM EKONOMI 235
A. Tujuan Pembelajaran 235
B. Uraian Materi 235
1. Penerapan Integral Tak Tentu dalam Bidang Ekonomi 235
C. Soal Latihan/Tugas 248
D. Daftar Pustaka 249
PERTEMUAN 17 250
INTEGRAL TERTENTU 250
A. Tujuan Pembelajaran 250
B. Uraian Materi 250
1. Pengertian Integral Tertentu 250
2. Sifat atau kaidah Integral Tentu 253
3. Penggunaan Integral Tertentu : 259

C. Soal Latihan/Tugas 263
D. Daftar Pustaka 264
PERTEMUAN 18 265
PENERAPAN INTEGRAL TERTENTU DALAM EKONOMI 265
A. Tujuan Pembelajaran 265
B. Uraian Materi 265
1. Penerapan Integral Tertentu dalam Ekonomi 265
C. Soal Latihan/Tugas 279
D. Daftar Pustaka 279

PERTEMUAN 1

FUNGSI PERMINTAAN, PENAWARAN DAN KESEIMBANGAN PASAR (LINEAR)

A. Tujuan Pembelajaran

Dalam ilmu ekonomi, sering digunakan alat bantu matematika untuk mempermudah. Yaitu menggunakan fungsi linear dan fungsi non linear. Dua variabel ekonomi atau lebih yang saling berhubungan, sering kali diterjemahkan ke dalam bentuk fungsi linear ataupun fungsi kuadrat.

Pada pertemuan ini akan menguraikan penerapan fungsi linear ke dalam ekonomi yang meliputi: fungsi permintaan, fungsi penawaran dan keseimbangan pasar. Setelah mempelajari materi pada pertemuan ini, mahasiswa mampu membentuk dan menggambarkan fungsi permintaan, fungsi penawaran dan kondisi keseimbangan pasar pada fungsi linier.

B. Uraian Materi

1. Fungsi Permintaan dan Penawaran

a. Fungsi Permintaan

Fungsi permintaan adalah suatu persamaan yang menunjukkan hubungan antara kuantitas produk yang diminta dengan faktor-faktor yang mempengaruhinya. Perilaku konsumen dan harga, dapat dianalisa dengan kajian matematis menggunakan fungsi permintaan. Fungsi permintaan ini menggunakan sudut pandang pembeli/konsumen.

Hukum permintaan adalah apabila harga produk naik maka jumlah produk yang dimintaakan turun dan sebaliknya. Jadi hubungan antara harga dengan kuantitas produk yang diminta merupakan hubungan berlawanan arah/terbalik, sehingga gradient/kemiringan dari fungsi permintaan (b) akan selalu negatif.

Faktor-faktor yang mempengaruhi permintaan adalah sebagai berikut :

1) Harga produk itu sendiri

Dalam penerapan fungsi linear ini berfokus pada hubungan kuantitas produk dengan harga produk itu sendiri. Faktor-faktor ekonomi yang lain dianggap konstan.

2) Pendapatan masyarakat

Peningkatan pendapatan masyarakat akan meningkatkan jumlah barang/jasa yang diminta untuk jenis barang standar. Namun untuk barang yang memiliki nilai rendah (misalnya: nasi jagung), peningkatan pendapatan justru akan mengurangi jumlah barang/jasa yang diminta.

3) Tingkat kebutuhan

Semakin tinggi kebutuhan terhadap barang/jasa seseorang, maka jumlah permintaan terhadap produk tersebut akan semakin meningkat. Misalnya permintaan payung dikala hujan leih tinggi dibandingkan saat tidak hujan.

4) Jumlah penduduk

Jumlah penduduk yang besar pada suatu negara, maka semakin besar permintaan terhadap suatu barang/asa.

5) Selera

Apabila kegemaran pada suatu jenis barang/jasa meningkat maka permintaan terhadap barang/jasa tersebut juga akan meningkat dibandingkan dengan jenis barang/jasa lainnya.

6) Barang pengganti

Tersedianya barang pengganti berpengaruh terhadap jumlah barang/jasa yang diminta.

Bentuk umum dari suatu fungsi permintaan linear adalah sebagai berikut ini :

$$Qd = a - bP$$

atau

$$P = -1/b\ (-a + Qd)$$

Dimana :

a dan b = konstanta, dimana b harus bernilai negatif

b = ΔQd / ΔPd

P = hargaproduk per unit

Q = kuantitas unit produk

Syarat, P ≥ 0, Q ≥ 0,

Contoh Soal 1 :

Pada saat harga Apel Rp. 5.000 perKg permintaan Apel sebanyak 1000 Kg, tetapi pada saat harga Apel meningkat menjadi Rp. 7.000 Per Kg permintaan akan Apel menurun menjadi 600 Kg, bentuklah fungsi permintaannya!

Penyelesaian :

Dari nilai yang diketahui di soal, untuk mencari fungsi permintaannya maka digunakan rumus persamaan garis melalui dua titik yaitu :

$$\frac{y - y1}{y2 - y1} = \frac{x - x\,1}{x2 - x1}$$

Dalam penerapan pada fungsi permintaan maka rumusnya:

$\frac{P - P1}{P2 - P1} = \frac{Q - Q1}{Q2 - Q1}$

$\frac{P - 5000}{7000 - 5000} = \frac{Q - 1000}{600 - 1000}$

(-400)P - 5.000 = 2.000 (Q - 1000)

-400P + 2.000.000 = 2000Q - 2.000.000

-2000Q = -2000.000 - 2.000.000 + 400P

-2000Q = -4.000.000 + 400P (:-2000)

Q = 2000 - 0,2P

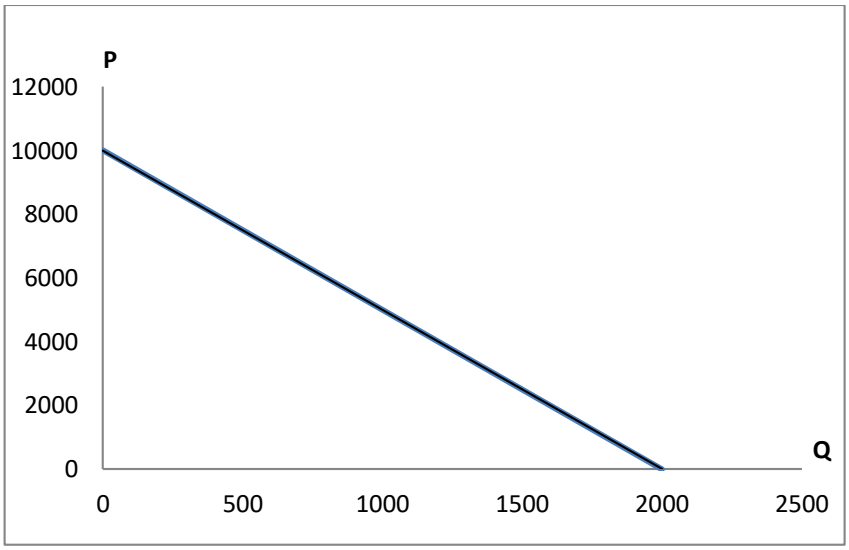
Jika dari bentuk fungsi permintaan di atas akan diubah menjadi bentuk P = f(Q), maka:

-0,2P = 2000 – Q

P = -10.000 + 5Q

Jadi diperoleh fungsi permintaan Qd = 2000 - 0,2P atau P = -10.000 + 5Q.

Grafiknya sebagai berikut:



Gambar 1.1 Grafik Fungsi Permintaan

Contoh Soal 2:

Diketahui koordinat titik A (0,8) dan titik B (12,0). Jika kedua titik tersebut dihubungkan akan terbentuk sebuah kurva Permintaan. Bentuklah fungsi permintaan dari koordinat titik tersebut!

Penyelesaian:

Q1 = 0,

P1 = 8,

Q2 = 12,

P2 = 0

$\frac{P-8}{0-8} = \frac{Q-0}{12-0}$

$\frac{P-8}{-8} = \frac{Q}{12}$

-8Q = 12(P – 8)

-8Q = 12P – 96

Q = -1,5P + 12

Atau

-12P = 8Q – 96

P = - 0,6Q + 8

b. Fungsi Penawaran

Fungsi penawaran yaitu fungsi yang menunjukkan hubungan harga produk dengan jumlah produk yang ditawarkan. Dalam fungsi penawaran menggunakan sudut pandang Penjual. Fungsi penawaran oleh produsen digunakan untuk menganalisa kemungkinan-kemungkinan kuantitas barang yang akan diproduksi. Sesuai hukum penawaran jika harga produk naik, dengan asumsi faktor-faktor lain dianggap konstan, maka jumlah produk yang ditawarkan akannaik, dan sebaliknya jika harga produk turun, jumlah produk yang ditawarkan juga turun.

Dalam fungsi penawaran terdapat hubungan positif antara harga produk dengan jumlah produk yang ditawarkan, maka gradien (b) dari fungsi penawaran selalu positif.

Faktor lain yang mempengaruhi permintaan selain harga itu sendiri adalah:

1) Biaya Produksii

   Kemampuan produksi akan mempengaruhi tinggi rendahnya biaya produksi dan harga jual, sehingga berpengaruh terhadap jumlah penawaran.

2) Teknologi

   Teknologi yang digunakan yang semakin mutakhir maka produksi semakin efisien sehingga jumlah yang ditawarkan dapat ditingkatkan.

3) Harapan akan harga masa yang akan datang

   Jika produsen memperkirakan harga akan naik di masa depan, maka penawaran saat iniakan dikurangi dan barang/jasad ditimbun untuk dijual di masa yang akan datang dengan harapan keuntungan yang diperoleh meningkat.

Bentuk umum dari fungsi penawaran adalah kebalikan dari fungsi permintaan, yaitu sebagai berikut :

$$\mathbf{Qs = -a + bPs}$$

Dimana :

a dan b = konstanta, dimana b harus bernilai positif

b = $\Delta Qs / \Delta Ps$

Ps = harga produk yang ditawarkan per unit

Qs = jumlah/kuantitas produk yang ditawarkan

Ps≥ 0, Qs≥ 0

Contoh Soal 3 :

Saat harga melon Rp.3.000 per buah Toko A hanya mampu menjual melon sebanyak 100 buah, dan saat harga melon Rp. 4.000 per buah, Toko A mampu menjual melon lebih banyak yaitu menjadi 200 buah. Bentuklah fungsi penawarannya!

Penyelesaian:

Masukkan data yang diketahui ke dalam rumus persamaan linear:

$\frac{P - P1}{P2 - P1} = \frac{Q - Q1}{Q2 - Q1}$

$\frac{P - 3000}{4000 - 3000} = \frac{Q - 100}{200 - 100}$

$\frac{P - 3000}{1000} = \frac{Q - 100}{100}$

(P - 3.000)(100) = (Q - 100) (1.000)

100P - 300.000 = 1.000Q - 100.000

-1.000Q = 300.000 - 100.000 - 100P

-1.000Q = 200.000 - 100P (: -1000)

Q = -200 + 0.1P

-0,1P = -200 – Q

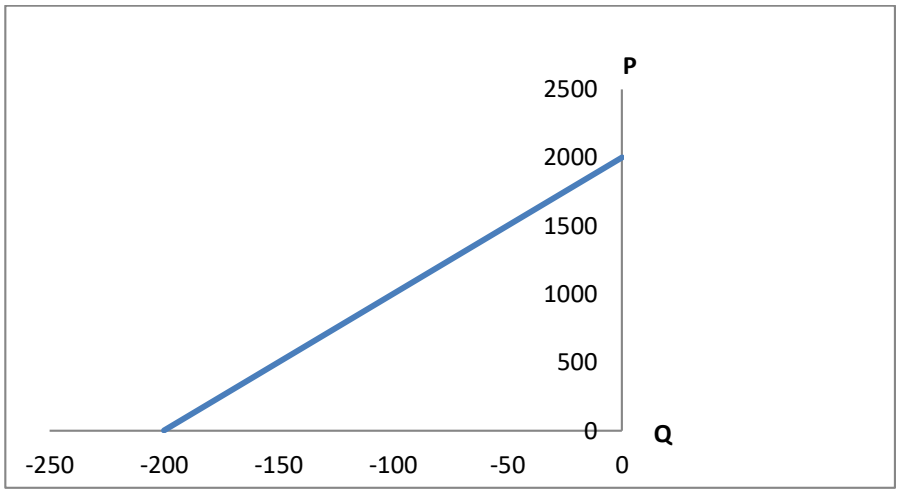
P = 2.000 + 10Q

Jadi diperoleh fungsi penawarannya :

Qs = -200 + 0,1P atau

P = 2.000 + 10Q

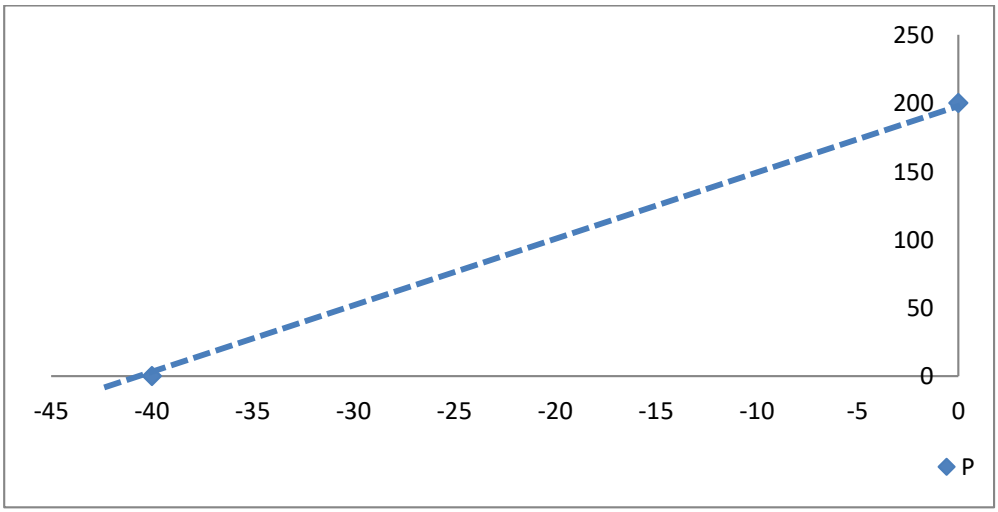
Grafiknya sebagai berikut:



Gambar 1.2 Grafik Fungsi Penawaran

Contoh Soal 4 :

Dari gambar grafik berikut ini, tentukan bentuk fungsi penawarannya!



Penyelesaian:

Q1 = 0,

P1 = 200,

Q2 = -40,

P2 = 0

$$\frac{P-200}{0-200} = \frac{Q-0}{-40-0}$$

$$\frac{P-200}{-200} = \frac{Q}{-40}$$

-200Q = -40(P - 200)

-200Q = -40P + 8.000

Q = 0,2P – 40

Atau

-0,2P = -40 – Q

P = 200 + 5Q

2. Keseimbangan Pasar

Keseimbangan pasar terjadi jika **Qd = Qs** atau **Pd = Ps**. Keseimbangan harga terjadi jika harga yang ditawarkan produsen sama dengan harga yang diminta konsumen di pasar. Keseimbangan kuantitas terjadi jika jumlah produk yang ditawarkan produsen sama dengan jumlah produk yang diminta oleh konsumen.

Cara Menghitung Keseimbangan Pasar ada 3 cara untuk memperoleh keseimbangan yaitu :

a. Dengan menyusun tabel,

Hal pertama yang dibutuhkan untuk menghitung keseimbangan dengan menggunakan tabel yaitu **menyusun dahulu tabelnya.**Tabel tersebut berisikan harga (P), jumlah yang diminta (Qd), dan jumlah yang ditawarkan (Qs).

Tabel 1.1 Penyusunan Tabel

P (harga) Dalam Rupiah	Qd (jumlah yang diminta) dalam unit	Qs (jumlah yang ditawarkan) dalam unit
500	70	30
1500	65	40
2000	50	50
3000	55	55
4000	40	60

Pada tabel di atas, diketahui harga yang sama antara jumlah produk yang diminta(Qd) dengan jumlah produk yang ditawarkan (Qs) yaitu pada harga Rp.3.000, jumlah produk yang diminta sama dengan jumlah produk yang di tawarkan. Sehingga

harga keseimbangan terjadi pada saat harga produk sebesar Rp.3.000. serta terjadi ketika produk 55 unit.

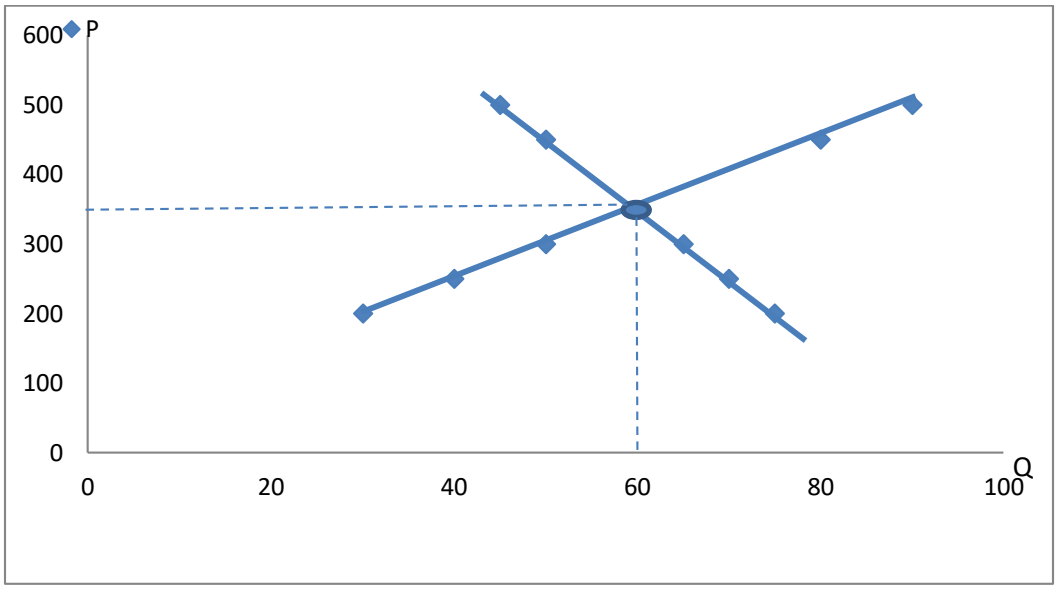
b. Dengan grafik/kurva,

Ada kalanya kita akan menjumpai tabel yang tidak memperlihatkan secara langsung akan adanya harga serta jumlah keseimbangan. Sebagai contoh perhatikan tabel berikut ini:

Tabel 1.2 Penyusunan Grafik

P (harga) Dalam Rupiah	Qd (Jumlah yang diminta) dalam unit	Qs (jumlah yang ditawarkan) dalam unit
200	75	30
250	70	40
300	65	50
450	50	80
500	45	90

Berdasarkan tabel di atas, dapat disusun pasangan titik-titik tersebut ke dalam diagram cartesius. Maka grafik fungsi permintaan dan penawarannya dapat dilihat sebagai berikut:



Gambar 1.3. Grafik permintaan dan penawaran

Jika diperhatikan grafik tersebut, terlihat adanya perpotongan garis fungsi permintaan dengan garis fungsi penawaran yang menunjukkan titik keseimbangan (E). Titik keseimbangan tersebut berada pada koordinat (60,350), itulah yang disebut keseimbangan pasar. Di mana harga keseimbangan yang terjadi sebesar Rp.350, serta jumlah keseimbangan yaitu 60 unit. Grafik diatas, titik koordinat akan terlihat jelas apabila grafik yang digambar menggunakan skala yang tepat.

c. Dengan pendekatan matematis.

Cara yang ketiga yaitu dengan pendekatan matematis. Di mana cara ini digunakan jika data yang dapat berbentuk fungsi permintaan dan penawaran yang setipe. Syarat keseimbangan pasar adalah:

Qd = Qs atauPd = Ps

Dimana :

Qd = Jumlah produk yang diminta

Qs = Jumlah produk yang ditawarkan

Pd = harga yang diminta

Ps = harga yang ditawarkan

ContohSoal 5 :

Permintaan ditunjukkan oleh fungsi Qd = 100 - 0,6Pddan fungsi penawaran Qs = -20 + 0,4Ps. Hitung keseimbangan pasar!

Penyelesaian:

Qd = Qs

100 - 0,6Pd = -20 + 0,4Ps

-0,6P - 0,4P = -20 - 100

P = 120

Selanjutnya substitusikan P yang sudah diketahui ke salah satu fungsi

Q = 100 - 0,6(120)

Q = 100 - 72

Q = 28.

Maka terbukti keseimbangan terjadi (P) =120 dan kuantitas (Q) = 28.

E (28, 120)

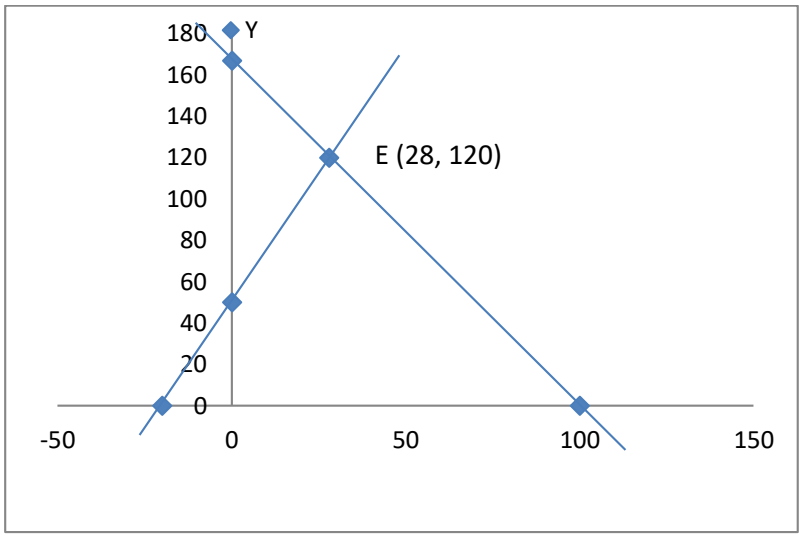
Titik Koordinatnya:

Qd = 100 - 0,6Pd

Q	P
0	166,7
100	0

Qs = -20 + 0,4Ps

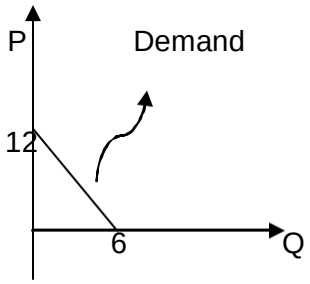
Q	P
0	50



Gambar 1.4 Grafik Keseimbangan pasar linear

C. Soal Latihan/Tugas

Kerjakan soal-soal di bawah ini dengan teliti dan benar!

1. Pada harga produkRp. 1200, banyaknya produk yang diminta 20 unit, tetapijikaharga naikmenjadiRp. 1500, maka banyaknya produk 15 unit. Buatlahfungsipermintaan dangambarkan grafiknya!
2. Fungsi permintaan P = 20 – 5Q, tentukan kuantitas yang diminta pada saatharga Rp 5, tentukanbesarnya harga jual jikajumlah yang dimintasebanyak 4 unit!
3. Diketahuifungsipermintaanadalah Q = 100 – 5P. berapa harga tertinggi yang dapat dbayaroleh konsumenatas produk tersebut? berapa unit jumlah yang dimintajika produktersebut gratis!
4. 

   Tentukan bentuk fungsi permintaan dari grafik yang diketahui di atas!

5. Diketahui fungsi penawaran P = 3Q + 4, Tentukan harga jual jikajumlah produk yang ditawarkan 2 unit, dan tentukan jumlah yang ditawarkan pada saat harga Rp 16.
6. Pada saat hargaRp 2000, maka jumlah produk yang ditawarkan 50 unit, tetapipada saat harga jualRp 1500, maka jumlah produk yang ditawarkan 30. Tentukan fungsi penawarannyadan gambarkan grafiknya!.
7. Diketahui fungsi permintaan adalah Q = 6 – 0,75P dan fungsi penawaran 4P = 2Q + 10. Tentukan keseimbangan pasardan gambarkan grafiknya! Apabila harga turun 1 satuan uang, berapa persen perubahan Q yang dimintadan Q yang ditawarkan?
8. Fungsi permintaan dtunjukkan oleh Qd = 19 - P, sedangkan penawarannya Q = -8 + 2P. Berapa keseimangan pasarnya?
9. Fungsi permintaan2P = 60 - Qdan fungsi penawaranQ = P - 5, Berdasar informasi tersebutcarilah keseimbangan pasarnya!
10. Diketahui:

P	Qd	Qs
30	300	250
25	250	200

Ditanyakan :

a. Tentukan bentuk fungsi permintaan dan penawarannya
b. Berapa kuantitas yang diminta (Qd) pada saat harganya (P) = 40?
c. Berapa kuantitas yang ditawarkan (Qs) pada saat harganya (P) = 10 ?
d. Tentukan keseimbangan pasarnya, kemudian Gambarkan kurvanya !

11. Pada saat hargaRp5000, maka jumlah produk yang ditawarkan100 unit, tetapipada saat harga jualRp 2500, maka jumlah produk yang ditawarkan 70. Tentukan fungsi penawarannyadan gambarkan grafiknya!.

D. Daftar Pustaka

Andi Wijaya dkk. (2014). *Matematika Ekonomi I*. Jakarta: Mitra Wacana Media

Josep B Kalangi. (2011). *Matematika Ekonomi dan Bisnis*. Jakarta: Salemba Empat.

Suprian Atmaja S.(2002). *Matematika Ekonomi I*. Bandung: Ghalia Indonesia.

PERTEMUAN 2

FUNGSI PERMINTAAN, PENAWARAN, DAN KESEIMBANGAN PASAR (NONLINEAR)

A. Tujuan Pembelajaran

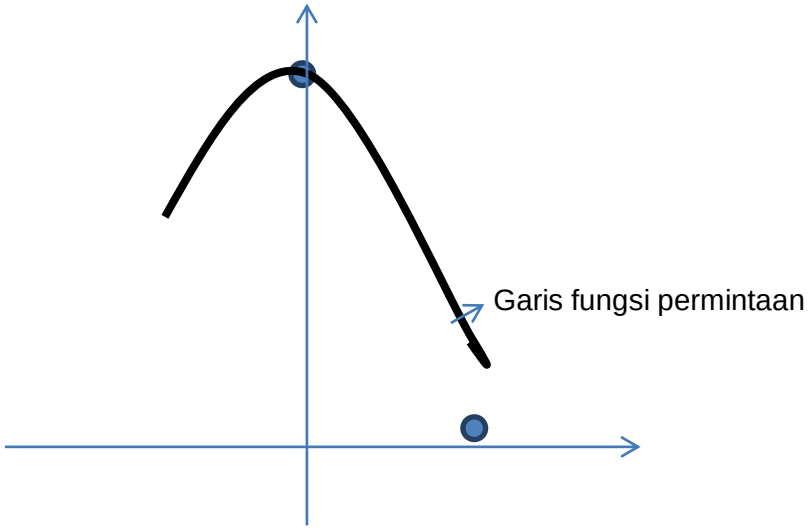
Hubungan fungsi antara variabel-variabel ekonomi tidak selalu berbentuk linear, tetapi juga berbentuk nonlinear. Hal tersebut dikarenakan adanya perubahan variabel terikat akibat perubahan variabel bebas yang tidak tetap. Dalam pertemuan 2, akan dibahas mengenai penerapan fungsi non linear berupa fungsi kuadrat dalam ekonomi, yaitu dalam fungsi permintaan, penawaran dan keseimbangan pasar. Setelah mempelajari materi pada pertemuan ini, mahasiswa mampu menggambarkan fungsi permintaan, penawaran dan keseimbangan pasar non linear.

B. Uraian Materi

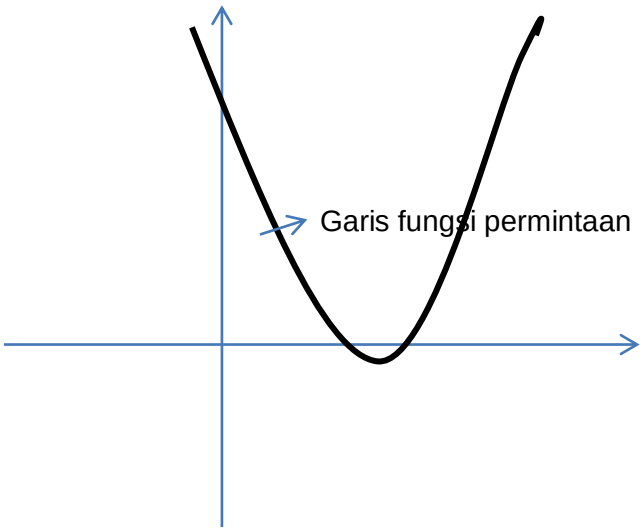
1. Grafik Keseimbangan Pasar

Fungsi kuadrat disebut juga fungsi parabolik atau fungsi dengan derajat dua. Bentuk umum fungsi kudrat adalah y = ax2 + bx + c. Pada grafik cartesius, sumbu X menunjukkan jumlah/kuantitas produk dengan simbol Q, sedangkan sumbu Y menunukkan harga produk dengan simbol P. Sesuai dengan bentuk fungsi dan kesamaan posisi pada simbolnya, maka bentuk fungsi permintaan atau penawaran dalam fungsi kuadrat seharusnya P = f(Q), tetapi jika ditinjau dari hubungan harga dengan kuantitas, maka bentuk fungsi permintaan dan penawaran kuadrat juga dapat berbentuk Q = f(P).

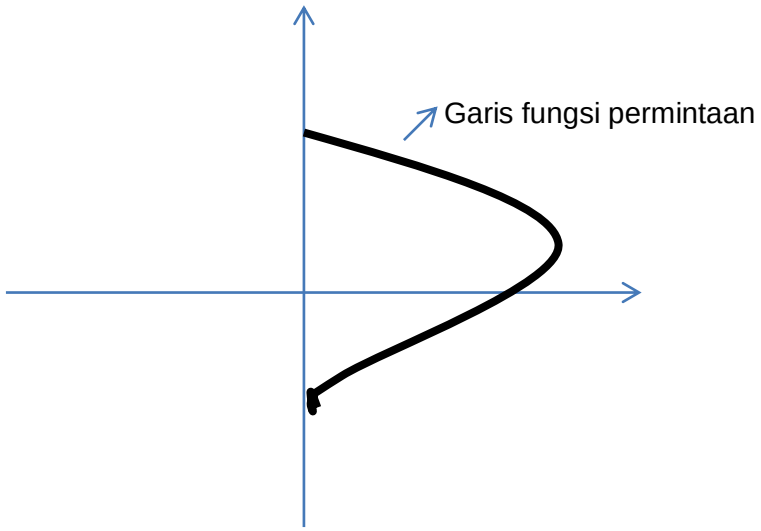
Bentuk grafik fungsi permintaan kuadrat yang mungkin terjadi adalah sebagai berikut:



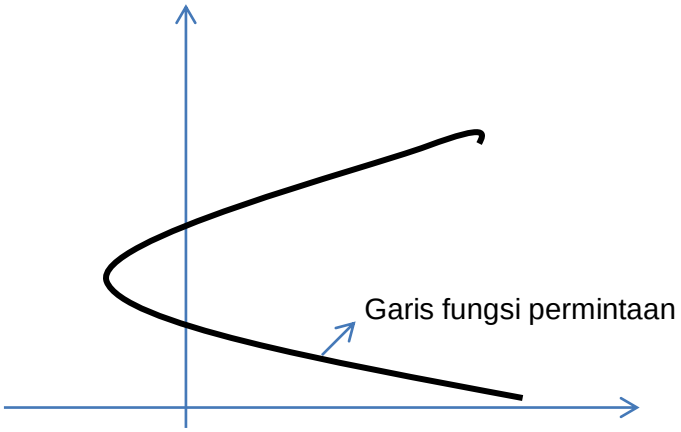
Gambar 2.1. Grafik Parabola terbuka ke bawah



Gambar 2.2. Grafik Parabola terbuka ke atas



Gambar 2.3 Grafik Parabola terbuka ke kiri



Gambar 2.4. Grafik Parabola terbuka ke kanan

Contoh Soal 1 :

Gambarkan grafik fungsi permintaan $Q = P^2 – 7P + 12$.

Penyelesaian:

Titik potong terhadap sumbu Q, jika P = 0

Q = $P^2 – 7P + 12$

Q = $0^2 – 7(0) + 12 = 12$

Jadi titik koordinatnya adalah (12,0)

Titik potong pada sumbu P, jika Q = 0

0 = $P^2 – 7P + 12$

(P – 3) (P – 4) = 0

P1 = 3

P2 = 4

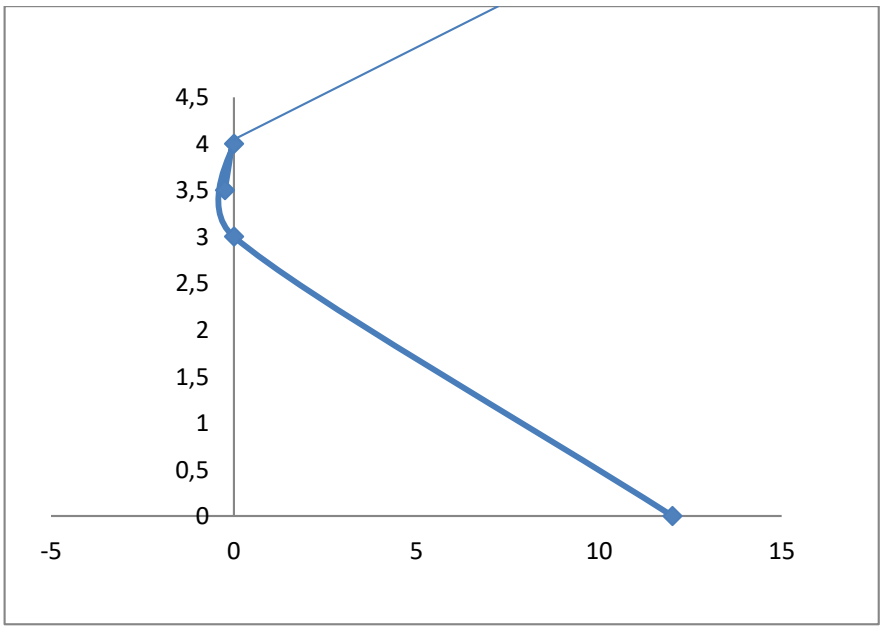
Jadi titik koordinatnya adalah (0, 3) dan (0, 4)

Titik balik:

Q = $\frac{-(-7^2 - 4(1)(12)}{4\ (1)}$ = -¼

P = $\frac{-(-7)}{2\ (1)}$ = 3½

(-¼ , 3½)



Gambar 2.5 Grafik Q = $P^2 – 7P + 12$

Keterangan :

Fungsi kuadrat adalah fungsi berpangkat dua dengan bentuk umum fungsi kuadrat adalah $\mathbf{y = ax^2 + bx + c}$, maka jika diubah dalam bentuk umum fungsi permintaan kuadrat dengan P = f(Q) menjadi $\mathbf{P = c + bQ - aQ^2}$**.** Dimana:

P = harga produk

Q = jumlah produk yang diminta

a,b,c = konstanta dimana a < 0

Bentuk umum yang ditranform ke bentuk fungsi penawaran kuadrat, ternyata dari contoh soal 1 di atas, bentuk asal fungsinya adalah Q = f(P), sehingga pada saat mencari titik ektrim dari parabola tersebut adalah menggunakan rumus titik ektrim dari fungsi kuadrat tetapi ditukar pengaplikasiannya. Rumus titik ektrim fungsi kuadrat yaitu :

x = -b/2a ;

y = -(b2 -4ac)/4a

Jika bentuk fungsi permintaan P = f(Q) maka rumus untuk titik ektrim sama dengan rumus titik ektrim fungsi kuadrat. Tetapi jika bentuk fungsi permintaan kuadrat adalah **Q = f(P)** maka rumus titik ektrim menjadi :

$\mathbf{Q = -(b^2 -4ac)/4a}$, **P = -b/2a**

ContohSoal 2 :

Gambarkan grafik fungsi permintaan: $P= Q^2 – 11Q + 30$

Penyelesaian:

Memotong sumbu P, jika Q = 0

P = 0 – 11(0) + 30 = 30

Koordinatnya (0,30)

Memotong sumbu Q, jika P = 0

$0 = Q^2 – 11Q + 30$

(Q – 6) Q – 5) = 0

Q1 = 6 dan Q2 = 5

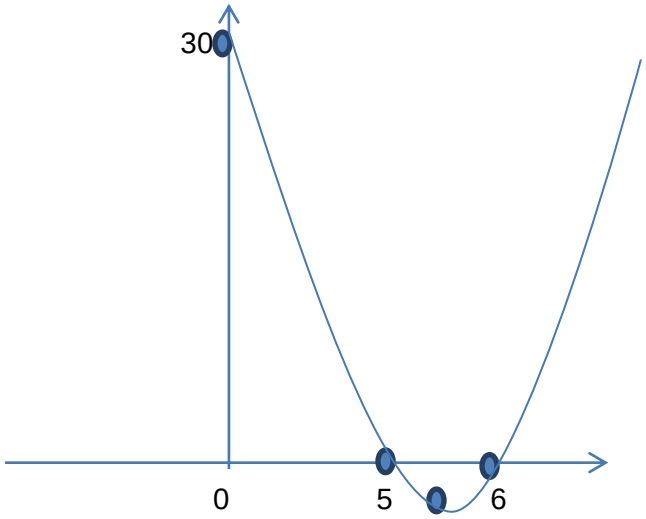
Koordinat (6,0) dan (5,0)

Titik ektrim parabola:

Q = - (-11)/2 = 5,5

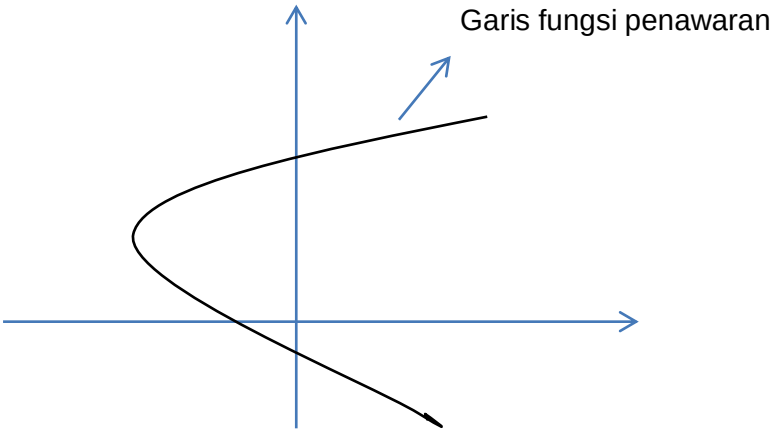
P = - (-11^2 – 4.1.30)4.1 = -1/4 = -0,25

Koordinatnya (5,5 ; -0,25)

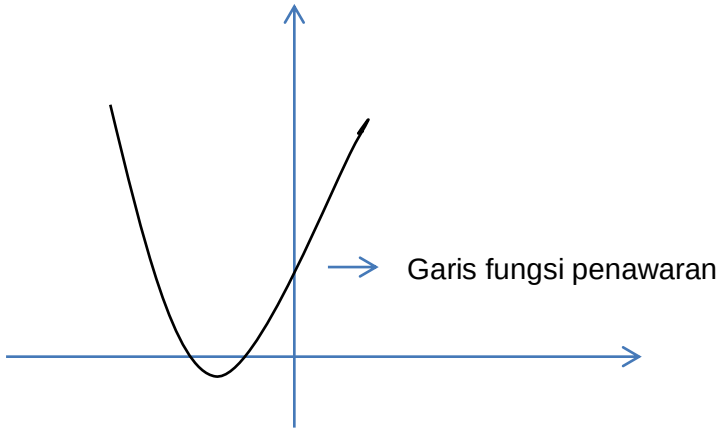


Gambar 2.6 Grafik fungsi permintaan P= Q^2 – 11Q + 30

Bentuk grafik fungsi penawaran kuadrat yang mungkin terjadi adalah sebagai berikut ini:



Gambar 2.7 Grafik Parabola terbuka ke kanan



Gambar 2.8 Grafik Parabola terbuka ke atas

Contoh Soal 3 :

Gambarkan grafik fungsi penawaran $Q = P^2 + P – 2$

Penyelesaian:

Titik potong pada sumbu Q, jika P = 0

$Q = P^2 + P – 2$

$Q = 0^2 + 0 – 2 = -2$

Jadi titik koordinat (-2, 0)

Titik potong pada sumbu P, jika Q = 0

$Q = P^2 + P – 2 = 0$

$(P + 2) (P – 1) = 0$

P1 = -2 (tidak memenuhi syarat jika harga negatif)

P2 = 1

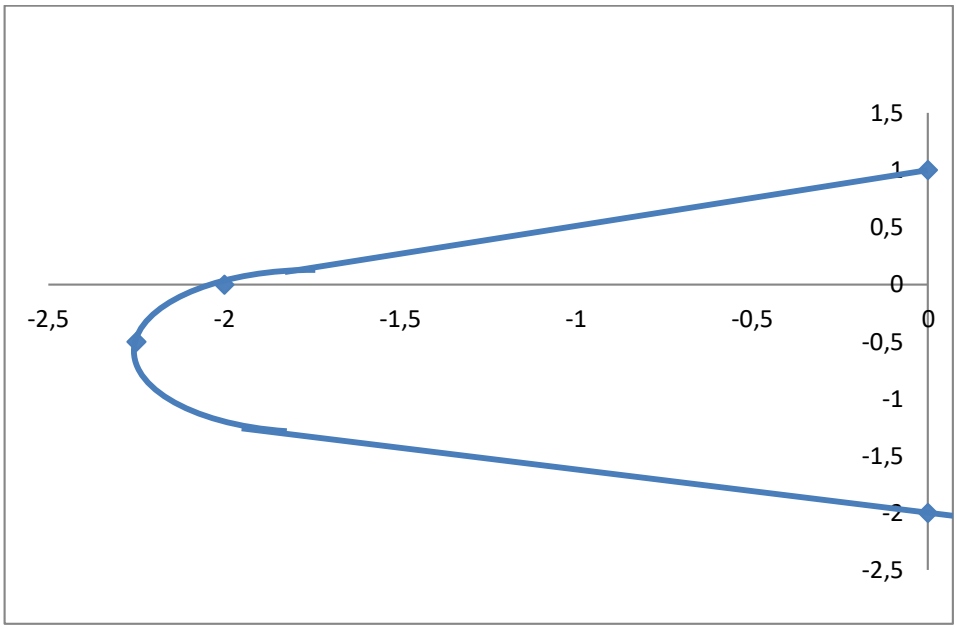
(0, -2) dan (0, 1)

Titik balik:

$Q = \frac{-(1^2 - (4)(1)(-2))}{4(1)} = -2\frac{1}{4}$

$P = \frac{-1}{2(1)} = -\frac{1}{2}$

$(-2\frac{1}{4}, -\frac{1}{2})$



Gambar 2.9 Grafik Q = P^2 + P – 2

Contoh Soal 4 :

Gambarkan grafik fungsi penawaran P = Q^2 + 3Q + 2

Penyelesaian:

Memotong sumbu P, jika Q = 0

P = 0 + 3.0 + 2 = 2

Koordinatnya (0,2)

Memotong sumbu Q, jika P = 0

0 = Q^2 + 3Q + 2

Q1,2 = $\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ = $\frac{-3\pm\sqrt{3^2-4.1.2}}{2.1}$ = $\frac{-3\pm\sqrt{1}}{2}$

Q1 = $\frac{-3+1}{2}$ = -1

Q2 = $\frac{-3-1}{2}$ = -2

Koordinatnya (-1; 0) dan (-2,0)

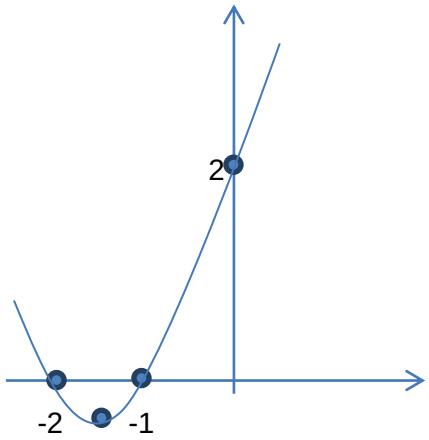
Titik ektrim parabola

Q = -3/2.1 = -1,5

P = -(3^2 – 4.1.2)/4.1 = -1/4 = -0,25

Koordinat titik ektrim parabola adalah (-1,5 ; -0,25)

Grafiknya sebagai berikut:



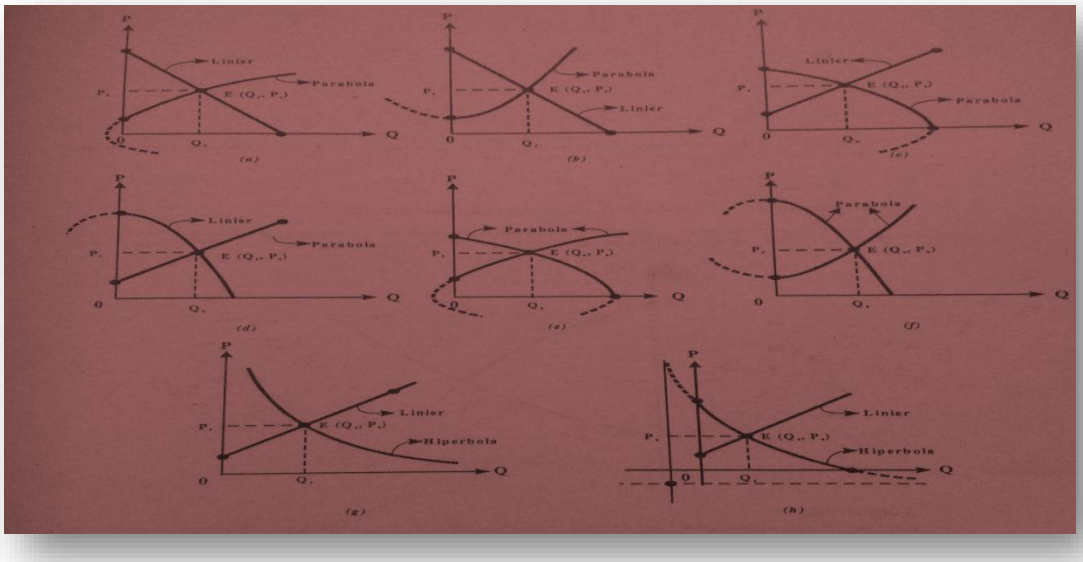
Gambar 2.10 Grafik $P = Q^2 + 3Q + 2$

Seperti yang sudah dibahas pada bab sebelumnya, untuk mencari keseimbangan pasar dapat diperoleh dengan geometri yaitu menggambarkan grafik fungsi permintaan dan penawaran dalam satu diagram, selain itu juga dapat dilakukan dengan cara aljabar yaitu dengan memecahkan permintaan dan penawaran menggunakan metode eliminasi atau substitusi. Menghitung titik potong kurva permintaan dan penawaran dapat dilakukan dengan mudah jika kemudian hanya timbul persamaan/fungsi derajat dua.

Fungsi ini timbul karena:

1. Salah satu merupakan fungsi linear dan yang lain adalah fungsi derajat dua;
2. Harga (P) merupakan fungsi derajat dua dari jumlah yang berbentuk parabola, baik untuk fungsi penawaran maupun untuk fungsipermintaan.
3. Jumlah barang baik yang diminta maupun yang ditawarkan merupakan fungsi kuadrat dariharga.

Kombinasi perpotongan fungsi permintaan dan penawaran memiliki 8 gambar grafik keseimbangan pasar kuadrat.



Gambar 2.11 Delapan kombinasi keseimbangan pasar

Contoh Soal 5 :

Diketahui fungsi permintaan: Q = -2P + 8 dan fungsi penawaran: Q = P^2 + P – 2. Tentukan harga dan jumlah keseimbangan pasar dan gambar grafiknya!

Penyelesaian:

Keseimbangan pasar terjadi apabila D = S

-2P + 8 = P^2 + P – 2

0 = P^2 + P + 2P -2 – 8

0 = P^2 + 3P – 10

0 = (P + 5) (P – 2)

P1 = -5 (tidak memenuhi syarat karena negative)

P2 = 2

Q = -2P + 8

Q = -2(2) + 8 = 4

Jadi keseimbangan pasar pada titik E (4, 2)

Grafik pada titik :

Q = -2P + 8

Q	P
0	4
8	0

$Q = P^2 + P – 2$

Titik yang memotong sumbu Q, jika P = 0, maka :

$Q = 0^2 + 0 – 2 = -2$

Jadi koordinatnya di titik (-2,0)

Titik yang memotong sumbu P, Jika Q = 0

$P^2 + P – 2 = 0$

(P + 2) (P - 1) = 0

P1 = -2 dan P2 = 1

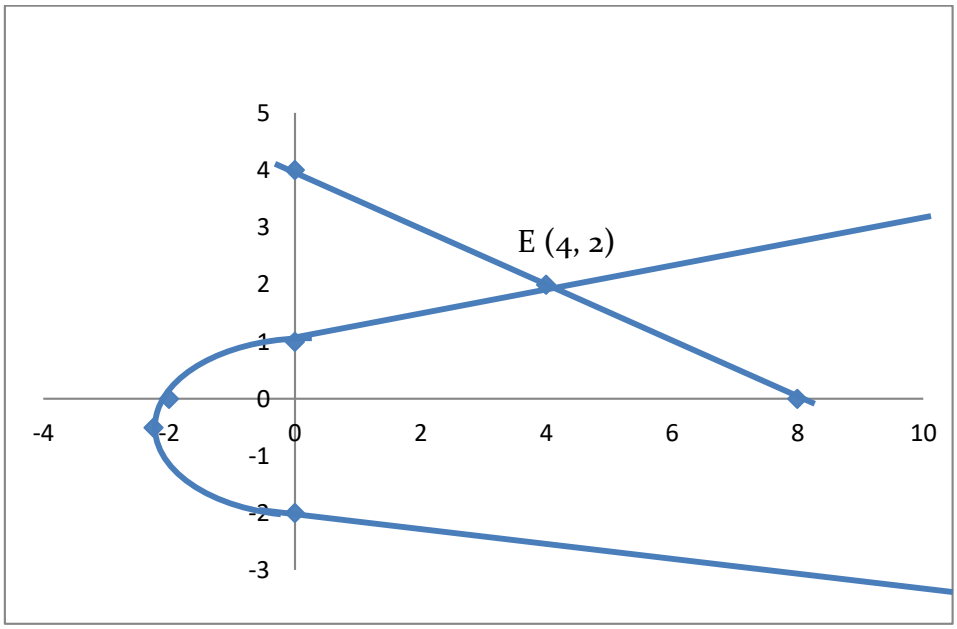
Sehingga koordinatnya di titik (0, -2) dan (0, 1)

Titik balik:

$Q = \frac{-(1^2 - (4)(1)(-2))}{4(1)} = -2\frac{1}{4}$

$P = \frac{-1}{2(1)} = -\frac{1}{2}$

$(-2\frac{1}{4}, -\frac{1}{2})$



Gambar 2.12 Grafik Keseimbangan Pasar

Contoh Soal 6 :

Carilah keseimbangan pasar secara aljabar dan secara geometri untuk fungsi berikut:

$Pd = 24 – 3Q^2$

$Ps = Q^2 + 2Q + 4$

Penyelesaian:

Keseimbangan teradi jika Pd = Ps

$24 – 3Q^2 = Q^2 + 2Q + 4$

$-3Q^2 – Q^2 – 2Q + 24 -4 = 0$

$-4Q^2 – 2Q + 20 = 0$

$2Q^2 + Q - 10 = 0$

$Q1,2 = \frac{-1\pm\sqrt{1^2-4.2.-10}}{2.2} = \frac{-1\pm\sqrt{81}}{4}$

$Q1 = \frac{-1+9}{4} = 2$

$Q2 = \frac{-1-9}{4} = -2,5$

Keseimbangan pasar yang mungkin adalah dengan nilai positif, yaitu pada Q = 2.

Untuk Q=2, maka P menjadi :

$P = 24 – 3(2^2) = 24 -12 = 12$

Jadi keseimbangan pasar adalah **E (2, 12)**

Gambar grafik contoh soal 6 adalah sebagai berikut:

Pd $= 24 – 3Q^2$

Jika Q = 0, P = 24 **(0,24)**

Jika P = 0, $24 - 3Q^2 = 0$

$24 = 3Q^2$

$Q^2 = 8$

$Q = \sqrt{8} = 2,8$ dan -2,8

Sehingga titik koordinatnya menjadi **(2,8 ;0)** dan **(-2,8; 0)**

Titik ekstrim parabola:

Q = -0/2.-3 = 0

P = -(0 – 4.-3.24)/4.-3 = -288/-12 =24

Sehingga titik ekstrimnya adalah **(0,24)**

Ps $= Q^2 + 2Q + 4$

Jika Q = 0, P = 4>>>>**(0,4)**

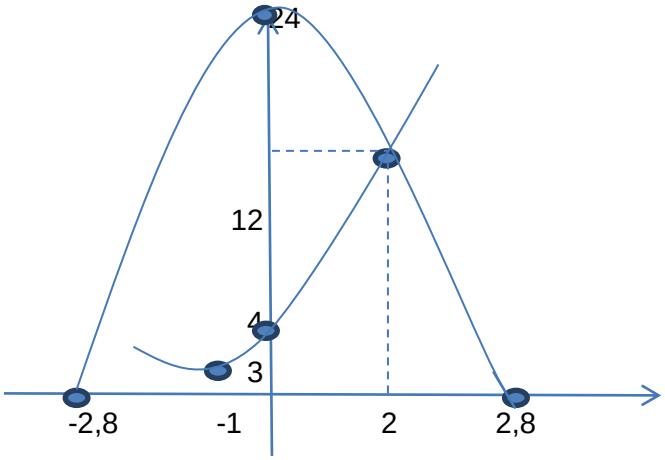
Jika P = 0, Q tidak teridentifikasi (parabola menggantung = tidak menyentuh sumbu Q)

Titik ekstrim parabola:

Q = -2/2.1 = -1

P = -(4 – 4.1.4)/4 = 3

Sehingga titik esktrimnya adalah **(-1,3)**



Gambar 2.13 Grafik Keseimbangan Pasar

C. Soal Latihan/Tugas

Kerjakan soal berikut dengan teliti dan benar!

1. Diketahui fungsi Permintaan P_D = 200 - $2Q^2$ sedangkan fungsi penawaran P_S = 75 + $3Q^2$, hitung keseimbangan pasar!
2. Tentukan keseimbangan pasar dari fungsi permintaan P = 39 – 3Q², dan fungsi penawaran P = 9Q + 12!
3. Diketahui fungsi permintaan Qd = 64 – P^2
   Fungsi penawaran: Qs = 8P – 20
   Tentukan keseimbangan pasar dan gambarkan grafiknya!
4. Diketahui fungsi permintaan:P = 49 – Q^2
   Fungsi penawaran : P = 4Q + 4
   Tentukan keseimbangan pasar dan gambarkan grafiknya!
5. Fungsi permintaan akan suatu barang ditunjukan oleh persamaan Q_d = 19 – P^2 , sedangkan fungsi penawarannya adalah Q_s = –8 + $2P^2$. Berapakah harga dan jumlah keseimbangan yang tercipta di pasar?
6. Jika fungsi permintaan adalah P = 16 - Q², gambarkanlah fungsi permintaan tersebut dalam suatu diagram!
7. Apabila fungsi permintaan suatu produk adalah (Q + 2)(P + 3) = 18, gambarlah grafiknya!
8. Jika fungsi penawaran ditunjukkan oleh P = 2Q² + 4Q + 6, gambarkanlah fungsi penawarannya!
9. Hitunglah harga dan jumlah keseimbangan pasar dari suatu barang yang permintaan dan penawarannya masing-masing ditunjukkan oleh persamaan Qd=40 –P^2 dan Qs = -60+3 P^2.
10. Hitunglah harga dan jumlah keseimbangan pasar dari suatu barang yang permintaan dan penawarannya masing-masing ditunjukkan oleh persamaan Qd=20– P^2 dan Qs=-28+ 3 P^2.

D. Daftar Pustaka

Andi Wijaya dkk. (2014). *Matematika Ekonomi I*. Jakarta: Mitra Wacana Media.

Josep B Kalangi. (2011). *Matematika Ekonomi dan Bisnis*. Jakarta: Salemba Empat

Suprian Atmaja S. (2002). *Matematika Ekonomi I*. Bandung: Ghalia Indonesia.

PERTEMUAN 3

KESEIMBANGAN PASAR AKIBAT PAJAK PER UNIT DAN PAJAK PERSENTASE

A. Tujuan Pembelajaran

Pada materi pertemuan 3 ini, mahasiswa akan dijelaskan mengenai penerapan fungsi dalam ekonomi yaitu keseimbangan pasar setelah ada pengaruh pajak per unit maupun pajak dalam bentuk persentase. Setelah mempelajari materi pada pertemuan ini, mahasiswa mampu menentukan keseimbangan pasar akibat pajak per unit dan mampu menentukan keseimbangan pasar akibat pajak persentase

B. Uraian Materi

1. Keseimbangan Pasar Akibat Pajak Per Unit

Pajak merupakan bagian penerimaan pemerintah yang dibebankan kepada produsen dan konsumen. Akibat adanya pajak, maka harga jual produk akan meningkat. Sesuai dengan hukum permintaan, apabila harga naik maka jumlah produk yang diminta akan menurun. Dasar pengenaan pajak yang dibebankan dapat ditetapkan per unit barang (t) atau berdasarkan persentase/proporsi yang dikenakan terhadap harga jual (r).

Efek diberlakukannya pajak per unit produk adalah adanya perubahan pada beberapa hal berikut :

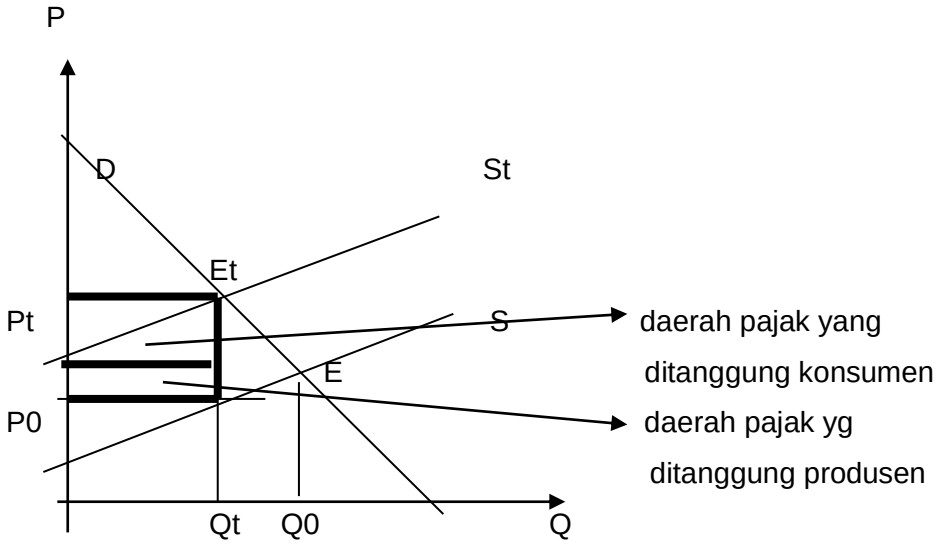
a. Menggeser kurva penawaran sejajar ke kiri atas
b. Membentuk harga dan kuantitas keseimbangan pasar yang baru (dimana harga setelah pajak akan meningkat dan kuantitas/jumlah produk menurun)
c. Terdapat sejumlah penerimaan pemerintah dari pajak
d. Terdapat sejumlah pengeluaran produsen dan konsumen.

Pengenaan pajak per unit barang akan **merubah fungsi penawaran** sementara fungsi permintaan tetap. Perubahan fungsi penawaran setelah pajak adalah sebagai berikut:

Tabel 3.1 Perubahan Fungsi Penawaran Setelah Pajak per unit

Supply sebelum pajak(S0)	**P = f(Q)** **Contoh: P = 8 + 2Q**	**Q = f(P)** **Contoh: Q = ½P – 4**
Supply setelah pajak (St)	P = f(Q) + t Contoh: jika t = 2 per unit Pt = 8 + 2Q + 2 Pt = 10 + 2Q	Q = f(P - t) Contoh: jika t = 2 per unit Qt = ½(P – 2) – 4 Qt = ½P – 1 – 4 Qt = ½P – 5

Grafik keseimbangan pasar setelah adanya pajak per unit, penjabarannya seperti di bawah ini :



Gambar 3.1 Grafik Keseimbangan Pasar Akibat Pajak per unit

Keterangan:

D = Kurva permintaan

S = Kurva penawaran

P0 = Harga keseimbangan sebelum pajak

Qo = Kuantitas keseimbangan sebelum pajak

E = Titik keseimbangan pasar

Pt = Harga keseimbangan setelah pajak

Qt = Kuantitas keseimbangan setelah pajak

Et = Ekulibrium setelah pajak

St = Penawaran setelah pajak

Tabel 3.2 Perhitungan Pajak

	Pajak Per Unit	**Pajak Total**
Pajak yang ditanggung konsumen	tk = Pt – Po	Tk = tk.Qt
Pajak yang ditanggung produsen	tp = t – (Pt – P0)	Tp = tp.Qt
Pajak yang diterima pemerintah	t = tk + tp	T = Tk + Tp T = t x Qt

Contoh Soal 1 :

Fungsi permintaan akan suatu barang ditunjukkan oleh persamaan Q = 13 – P, sedangkan fungsi penawarannya: P = 3 + Q. Terhadap barang tersebut dikenakan pajak sebesar 2 per unit.

Pertanyaan:

a. Tentukan harga dan jumlah keseimbangan sebelum pajak
b. Tentukan harga dan jumlah keseimbangan sesudah pajak
c. Berapa pajak total yang diterima pemerintah
d. Berapa pajak per unit dan total yang ditanggung oleh konsumen
e. Berapa pajak per unit dan total yang ditanggung oleh produsen
f. Gambarkan grafiknya!

Penyelesaian :

a. Keseimbangan pasar sebelum pajak adalah :

Fungsi permintaan: Q = 13 – P

P = 13 – Q

D = S

13 – Q = 3 + Q

13 – 3 = Q + Q

10 = 2Q

Q = 5

P = 13 – Q

= 13 – 5

= 8

Jadi keseimbangan pasar sebelum pajak E (5, 8)

b. Keseimbangan pasar setelah pajak: jika t = 2

Maka fungsi penawaran setelah pajak Pt = 3 + Q + 2 » Pt = 5 + Q

D = St

13 – Q = 5 + Q

13 – 5 = Q + Q

8 = 2Q

Q = 4

P = 5 + Q

= 5 + 4

= 9

Jadi keseimbangan pasar setelah pajak Et (4, 9)

c. Pajak total yang diterima pemerintah: **T = t x Qt**

T = 2 x 4 = 8

d. Pajak per unit (tk) dan total (Tk) yang ditanggung oleh konsumen :

tk = Pt – P0

= 9 – 8

= 1

Tk = (Pt – Po) x Qt

= (9 – 8) x 4

= 4

e. Pajak per unit (tp) dan total (Tp) yang ditanggung oleh produsen :

tp = t – (Pt – Po)

= 2 – (9 – 8)

= 1

Tp = t – (Pt – Po) x Qt

= 2 – (9 – 8) x 4

= 4

f. Titik-titik potong grafik:

D: P = 13 – Q

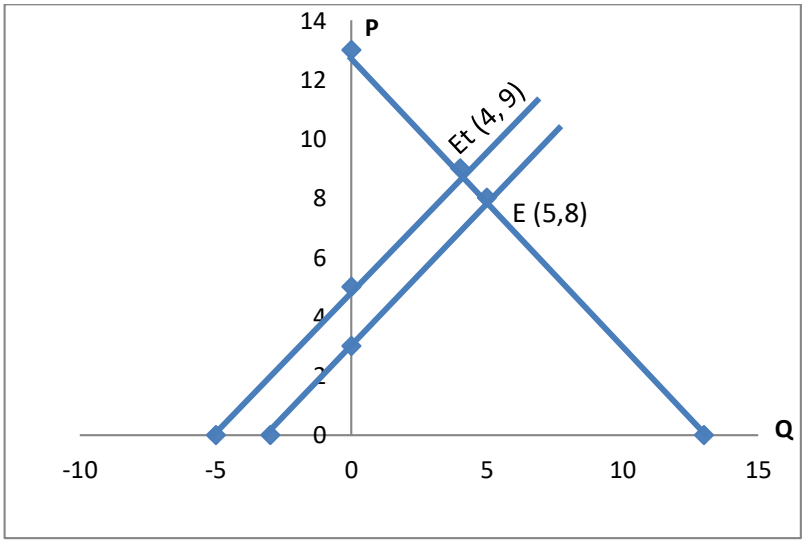
Q	P
0	13
13	0

S : P = 3 + Q

Q	P
0	3
-3	0

St: Pt = 5 + Q

Q	P
0	5
-5	0



Gambar 3.2. Grafik Keseimbangan Pasar Sebelum dan Setelah Pajak per unit

Contoh Soal 2 :

Diketahui fungsi permintaan : $P = -Q^2 – 3Q + 108$ dan fungsi penawaran : $P = 5Q + 24$. Pertanyaannya adalah :

a. Tentukan keseimbangan pasar sebelum pajak
b. Tentukan kseeimbangan pasar jika dikenai pajak 19 per unit barang
c. Gambarkan grafiknya!

Penyelesaian :

a. Keseimbangan pasar:

$D = S$

$-Q^2 – 3Q + 108 = 5Q + 24$

$0 = Q^2 + 3Q + 5Q + 24 – 108$

$0 = Q^2 + 8Q – 84$

$(Q + 14)(Q – 6) = 0$

Q1 = -14 (tidak memenuhi syarat karena negatif)

Q2 = 6

Jika Q = 6, maka persamaannya menjadi :

$P = 5Q + 24$

$= 5(6) + 24$

$= 54$

Jadi keseimbangan pasar E (6, 54)

b. Keseimbangan pasar setelah pajak jika t = 19

St: $Pt = 5Q + 24 + 19 = 5Q + 43$

$D = St$

$-Q^2 – 3Q + 108 = 5Q + 43$

$0 = Q^2 + 3Q + 5Q + 43 – 108$

$0 = Q^2 + 8Q – 65$

$(Q - 5)(Q + 13) = 0$

Q1 = 5

Q2 = -13 (tidak memenuhi syarat karena negatif)

Jika Q = 5, maka persamaannya menjadi :

$P = 5Q + 43$

= 5(5) + 43

= 68

Jadi keseimbangan pasar setelah pajak Et (5,68)

c. Titik-titik koordinat untuk fungsi:

D: $P = -Q^2 – 3Q + 108$

Titik memotong sumbu P, jika Q = 0

P $= -0^2 – 3(0) + 108$

= 108

Jadi titik koordinatnya adalah (0, 108)

Titik memotong sumbu Q, jika P = 0

$-Q^2 – 3Q + 108 = 0$

(-Q - 12) (Q - 9) = 0

Q1 = -12 dan Q2 = 9

Sehingga titik koordinatnya adalah (-12,0) dan (9,0)

Titik balik/puncak parabola:

Q = -(-3)/2(-1) = -1,5

P $= -(-3^2 – 4.-1.108)/4.-1 = 110,25$

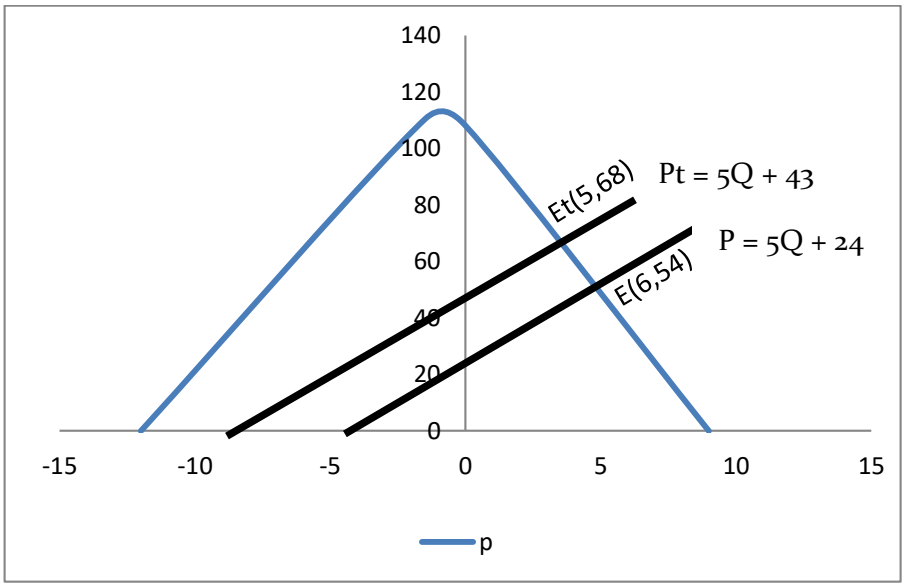
Sehingga titik puncaknya adalah (-1,5 ; 110,25)

Titik koordinat S: P = 5Q + 24

Q	P
0	24
-4,8	0

Titik koordinat St: Pt = 5Q + 43

Q	P
0	43
-8,6	0



Gambar 3.3 Grafik Fungsi Kuadrat Keseimbangan Sebelum & Setelah Pajak per unit

2. Keseimbangan Pasar Akibat Pajak Persentase

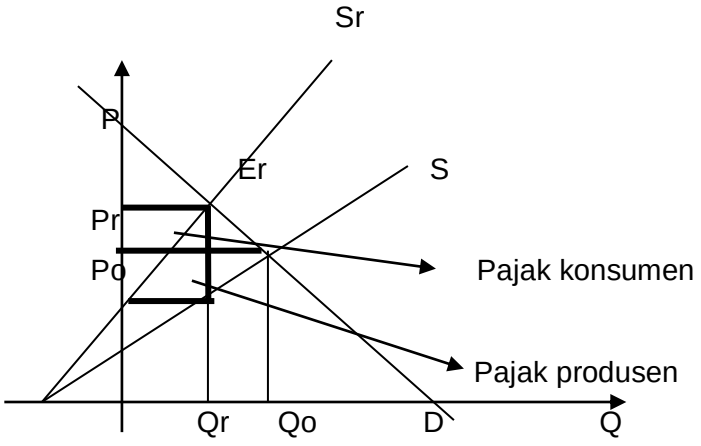
Pajak persentase merupakan pajak yang dikenakan terhadap suatu barang tertentu di mana dasar pengenaannya adalah persentase (%). Meskipun pengaruh pajak ini serupa dengan pengaruh pajak per unit, yaitu menaikkan harga keseimbangan dan mengurangi kuantitas keseimbangan, namun proses analisisnya terhadap kurva penawarannya berbeda. Efek dari pajak persentase ini mengakibatkan kurva penawaran setelah pajak persentase memiliki **koefisien** yang lebih besar daripada kurva penawaran sebelum pajak persentase.

Pengenaan pajak perentase akan merubah fungsi penawaran setelah pajak dan fungsi permintaannya diasumsikan tetap.

Tabel 3.3 Perubahan Fungsi Penawaran Setelah Pajak Persentase

Sebelum pajak (S0)	**P = f(Q)** **Contoh : P = 8 + 2Q**	**Q = f(P)** **Contoh: Q = ½P – 4**
Setelah pajak (Sr)	P = f(Q) + r.f(Q) Pr = f(Q) (1 + r) Contoh: Jika r = 10% = 0,1 Pr = (8+2Q)(1+0,1) Pr = 8,8 + 2,2Q	Qr = $f\left(\frac{P}{1+r}\right)$ Contoh: Jika r = 10% = 0,1 Qr = ½$\left(\frac{P}{1+0,1}\right)$ – 4 Qr = $\frac{P}{2,2}$ – 4 = 0,45P – 4

Grafik keseimbangan pasar setelah pajak persentase bisa dilihat dari grafik berikut ini :



Gambar 3.4 Grafik Keseimbangan Pasar Setelah Pajak Persentase

Untuk mencari besarnya pajak yang diterima oleh pemerintah, pajak yang dianggung konsumen dan produsen, harus dicari terlebih dulu nilai pajak per unit (t) yang diterima oleh pemerintah. Pajak per unit didapat dengan menggunakan rumus: t = Pr – Px atau t = r.Px.

Keterangan:

Pr = harga jual setelah pajak persentase

Px = nilai P yang diperoleh dengan mensubstitusikan Qr pada fungsi So.

Contoh Soal 3 :

Diketahui fungsi permintaan suatu barang Q = 15 – P dan fungsi penawaran adalah Q = 2P – 6 dan terhadap barang tersebut dikenakan pajak sebesar 25%.

Pertanyaan:

a. Tentukan keseimbangan pasar sebelum dan setelah pajak
b. Tentukan nilai pajak per unit
c. Besarnya pajak per unit dan pajak total yang ditanggung oleh konsumen
d. Besarnya pajak per unit dan pajak total yang ditanggung oleh produsen
e. Besarnya total pajak yang diterima pemerintah
f. Gambarkan grafiknya!

Penyelesaian :

a. Keseimbangan pasar sebelum pajak:

D = S

15 – P = 2P – 6

15 + 6 = 2P + P

21 = 3P

P = 7

Q = 15 – P

= 15 – 7

= 8

Jadi keseimbangan pasar adalah (8, 7)

Fungsi penawaran sesudah pajak:

Qr = $2\left(\frac{P}{(1+0,25)}\right)$ - 6

= 2P/1,25 - 6

Qr = 1,6P – 6

Keseimbangan pasar setelah pajak: D = Sr

15 – P = 1,6P – 6

15 + 6 = 1,6P + P

21 = 2,6P

Pr = 8,08

Qr = 15 – P

= 15 – 8,08

= 6,92

Jadi Er (6,92 ; 8,08)

b. Pajak per unit

Mencari nilai Px

Q = 2P – 6

-2P = -Q – 6

P = 0,5Q + 3

Px = 0,5(6,92) + 3

Px = 6,46

Pajak per unit:

t = Pr – Px

= 8,08 – 6,46

= 1,62

c. Pajak yang ditanggung konsumen:

tk = (Pr – Po)

= 8,08 – 7

= 1,08

Tk = (Pr – Po) x Qr

= (8,08 – 7)6,92

= 1,08 x 6,92

= 7,47

d. Pajak yang ditanggung produsen:

tp = t – (Pr – Po)

= 1,62 – (8,08 – 7)

= 0,54

Tp = (t – (Pr – Po))Qr

= (1,62 – (8,08 - 7))6,92

= 0,54 x 6,92

= 3,74

e. Pajak total yang diterima pemerintah:

T = t x Qr

= 1,62 x 6,92

= 11,21 atau

T = Tk + Tp

= 7,47 + 3,74

= 11,21

f. Titik koordinat fungsi:

D: Q = 15 – P

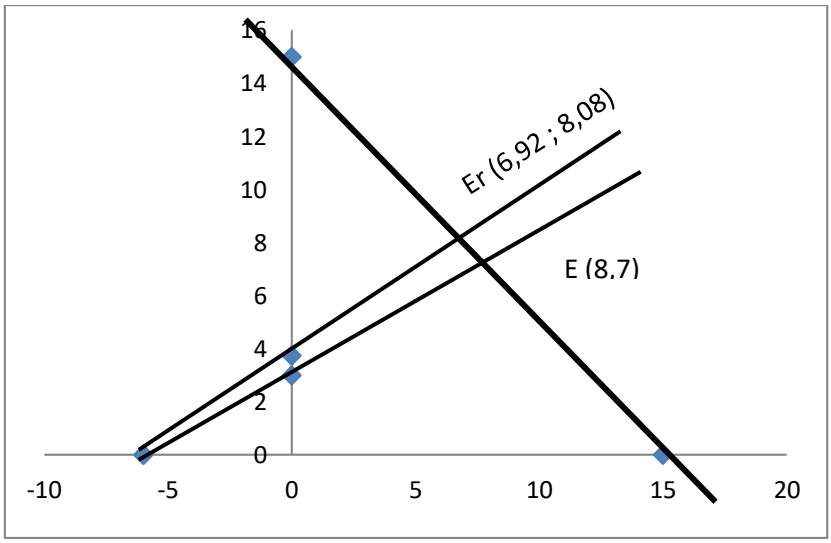
Q	P
0	15
15	0

S: Q = 2P – 6

Q	P
0	3
-6	0

Sr: Qr = 1,6P – 6

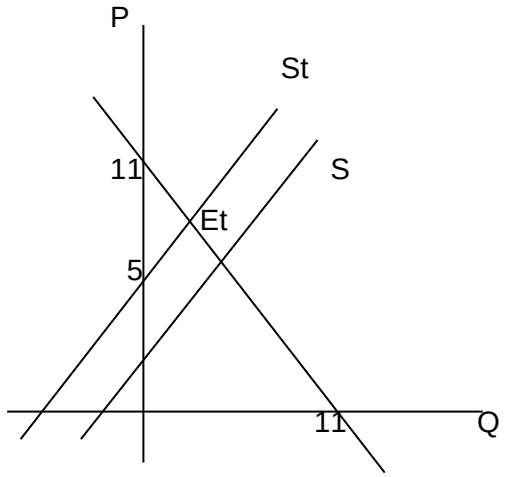
Q	P
0	3,75
-6	0



Gambar 3.5 Grafik Fungsi Linear Keseimbangan Pasar Sebelum dan Sesudah Pajak Persentase

Contoh Soal 4 :

Jika diketahui grafik seperti di bawah ini :



Jika diketahui gambar tersebut mempunyai keseimbangan pasar setelah pajak Et (4 ; 7) dan besarnya pajak per unit yang dibebankan adalah Rp 3,- per unit.

a. Tentukan fungsi permintaan, fungsi penawaran, dan fungsi penawaran setelah pajak
b. Tentukan keseimbangan pasar sebelum pajak

Penyelesaian:

a. Koordinat garis fungsi permintaan (0,11) dan 11,0)

   Maka fungsi permintaan sebelum pajak adalah:

   $\frac{P - P1}{P2 - P1} = \frac{Q - Q1}{Q2 - Q1}$

   $\frac{P - 11}{0 - 11} = \frac{Q - 0}{11 - 0}$

   $\frac{P - 11}{-11} = \frac{Q}{11}$

   11(P – 11) = -11Q

   11P – 121 = -11Q

   11P = -11Q + 121

   P = -Q + 11

   Koordinat titik yang melalui garis fungsi penawaran setelah pajak adalah(0,5) dan (4,7), maka fungsi penawaran setelah pajak adalah:

$\frac{P - P1}{P2 - P1} = \frac{Q - Q1}{Q2 - Q1}$

$\frac{P - 5}{7 - 5} = \frac{Q - 0}{4 - 0}$

$\frac{P - 5}{2} = \frac{Q}{4}$

4(P – 5) = 2Q

4P – 20 = 2Q

4P = 2Q + 20

P = 0,5Q + 5

Jika t = 3

Maka fungsi penawaran sebelum pajak rumusnya adalah Pt – t, sehingga menjadi seperti :

P = 0,5Q + 5 – 3

P = 0,5Q + 2

b. Keseimbangan pasar sebelum pajak adalah

Pd = Ps

-Q + 11 = 0,5Q + 2

-Q – 0,5Q = 2 – 11

-1,5Q = -9

Q = -9/-1.5

= 6

Jika Q = 6, maka nilai P di dapat dengan :

P = -6 + 11

= 5

Sehingga keseimbangan pasar adalah **E (6,5)**

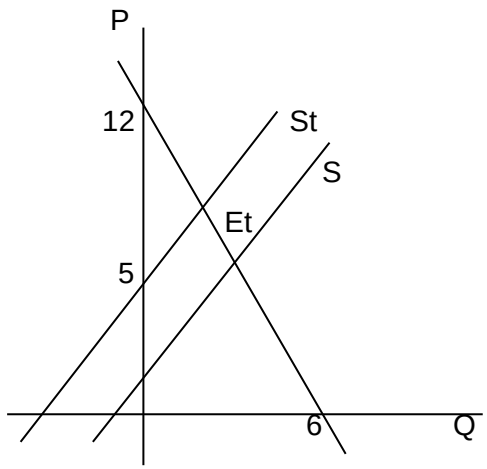
C. Soal Latihan/Tugas

1. Diketahui fungsi permintaan suatu barang adalah P = Q^2 - 11Q + 30 dan fungsi penawarannya Q = $\sqrt{(P-1)}$, jika terhadap barang tersebut dikenakan pajak sebesar Rp 3 per unit. Tentukan keseimbangan pasar sebelum dan sesudah pajak.
2. Diketahui fungsi permintaan P_D = 50 – 5Q - Q^2

   Fungsi penawaran P_S = 2Q + 6

   a. Hitung keseimbangan pasar

b. Hitung keseimbangan pasar jika di kenai pajak sebesar 14 per unit terhadap barang yang dijua



3. Jika diketahui gambar tersebut mempunyai keseimbangan pasar setelah pajak Et (2,3 ; 7,3) dan besarnya pajak per unit yang dibebankan adalah Rp 2,- per unit.
   a. Tentukan fungsi permintaan, fungsi penawaran, dan fungsi penawaran setelah pajak
   b. Tentukan keseimbangan pasar sebelum pajak
4. Diketahui fungsi permintaan $P = Q^2 - 15Q + 56$ dan fungsi penawaran $Q^2 = P – 5$ .Terhadap barang tersebut dikenakan pajak sebesar 25%. Tentukan keseimbangan pasar setelah pajak persentase.
5. Diketahui fungsi permintaan $P = 9 – 2/3Q$ dan fungsi penawaran $P = 1,5 + 1/3Q$. Jika terhadap barang yang dijual dikenakan pajak 20%, tentukan keseimbangan pasar setelah pajak.
6. Diketahui Fungsi permintaan: $P_D = - 0,07Q + 65$
   Fungsi penawaran: $P_S = 0,08Q + 50$
   Diminta:Tentukan Keseimbangan Pasar
   Tentukan keseimbangan pasar jika terhadap barang yang dijual dikenakan pajak sebesar 10%.

D. Daftar Pustaka

Andi Wijaya dkk. (2014). *Matematika Ekonomi I*. Jakarta: Mitra Wacana Media.

Josep B Kalangi. (2011). *Matematika Ekonomi dan Bisnis*. Jakarta: Salemba Empat

Suprian Atmaja S. (2002). *Matematika Ekonomi I*. Bandung: Ghalia Indonesia.

PERTEMUAN 4

KESEIMBANGAN PASAR AKIBAT SUBSIDI

A. Tujuan Pembelajaran

Pada materi pertemuan 4 ini, mahasiswa akan dijelaskan mengenai penerapan fungsi dalam ekonomi, berkaitan dengan keseimbangan pasar akibat adanya subsidi dari pemerintah, produsen dan konsume. Setelah mempelajari materi ini, mahasiswa mampu mencari keseimbangan pasar setelah subsidi dan mampu membuat grafiknya.

B. Uraian Materi

1. Keseimbangan Pasar Akibat Subsidi

Subsidi merupakan bagian dari pengeluaran pemerintah yang diberikan kepada produsen dan konsumen. Dengan adanya subsidi maka harga jual barang akan menurun. Keseimbangan pasar setelah subsidi akan bergerak ke kiri bawah. Pengaruh subsidi terhadap keseimbangan pasar berbanding terbalik dengan pengaruh pajak terhadap keseimbangan. Efek adanya subsidi adalah sebagai berikut :

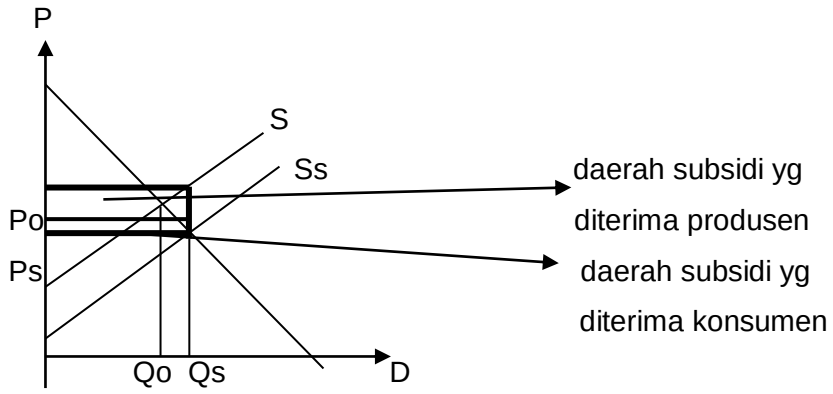
a. Menggeser kurva penawaran ke kanan bawah
b. Membentuk harga dan kuantitas keseimbangan yang baru dimana harga setelah subsidi menurun dan kuantitas setelah subsid meningkat.
c. Terdapat pengeluaran pemerintah
d. Terdapat penerimaan produsen dan konsumen dari subsidi.

Berkenaan dengan subsidi akan merubah **fungsi penawaran**, sementara fungsi permintaan tetap. Perubahan fungsi penawaran setelah subsidi adalah sebagai berikut:

Tabel 4.1 Perubahan Fungsi Penawaran Setelah Subsidi

Sebelum subsidi (So)	**P = f(Q) Contoh: P = 2Q + 3**	**Q = f(P) Contoh: Q = ½P – 3/2**
Setelah subsidi (Ss)	P = f(Q) – s Contoh: Jika s = 2 per unit Ps = 2Q + 3 – 2 Ps = 2Q + 1	Q = f(P + s) Contoh: jika s = 2 per unit Qs = ½(P + 2) – 3/2 Qs = ½P + 1 – 1½ Qs = ½P - ½

Untuk keseimbangan pasar setelah subsidi dapat dilihat dari perbedaan grafik berikut ini :



Gambar 4.1 Grafik Keseimbangan Pasar Setelah Subsidi

Keterangan:

D = Kurva permintaan

S = Kurva penawaran

Po = Harga keseimbangan sebelum subsidi

Qo = Kuantitas keseimbangan sebelum subsidi

E = Titik keseimbangan pasar

Ps = Harga keseimbangan setelah subsidi

Qs = Kuantitas keseimbangan setelah subsidi

Es = Titik keseimbanga setelah subsidi

Ss = Penawaran setelah subsidi

2. Perhitungan Besarnya Subsidi

Perhitungan subsidi per unit dan subsidi total yang diterima konsumen dan produsen serta subsidi yang diberikan pemerintah adalah sebagai berikut:

Tabel 4.2 Perhitungan Besarnya Subsidi

	Subsidi Per Unit	Subsidi total
Subsidi yang diterima konsumen	sk = P0 - Ps	Sk = sk x Qs
Subsidi yang diterima produsen	sp = s – (P0 – Ps)	Sp = sp x Qs
Subsidi yang diberikan pemerintah	s = sk + sp	S = Sk + Sp

Contoh Soal 1 :

Diketahui fungsi permintaan: P = 10 – 0,5Q, fungsi penawaran: P = 0,5Q + 4. Besarnya subsidi per unit yang diberikan pemerintah adalah 2 satuan uang.

Pertanyaan:

a. Tentukan harga dan kuantitas keseimbangan pasar sebelum dan sesudah subsidi.
b. Besarnya subsidi per unit dan total yang diterima konsumen
c. Besarnya subsidi per unit dan total yang diterima produsen
d. Besarnya subsidi total yang diberikan pemerintah
e. Gambarkan grafiknya

Penyelesaian L

a. Keseimbangan pasar sebelum subsidi dengan persamaan :

D = S
10 – 0,5Q = 0,5Q + 4
10 – 4 = 0,5Q + 0,5Q
6 = Q0
P0 = 0,5Q + 4
= 0,5(6) + 4
= 7

Jadi keseimbangan pasar menjadi E (6, 7)

Keseimbangan pasar setelah subsidi jika s = 2

Ps = 0,5Q + 4 – 2

= 0,5Q + 2

D = Ss

10 – 0,5Q = 0,5Q + 2

10 – 2 = 0,5Q + 0,5Q

8 = Qs

Ps = 0,5Q + 2

= 0,5(8) + 2

= 6

Jadi keseimbangan pasar menjadi Es (8,6)

b. Subsidi yang diterima konsumen:

Subsidi per unit adalah :

sk = P0 – Ps

= 7 – 6

= 1

Subsidi total adalah :

Sk = (P0 – Ps)

Qs = (7 – 6) 8

= 8

c. Subsidi yang diterima produsen:

Subsidi per unit:

sp = s – (P0 – Ps)

= 2 – (7 – 6)

= 1

Subsidi total:

Sp = (s – (P0 – Ps)

Qs = (2 – (7 – 6))8

= 8

d. Subsidi total yang diberikan pemerintah:

S = s x Qs

= 2 x 8

= 16,

atau

S = Sk + Sp

= 8 + 8

= 16.

e. Titik koordinat fungsi:

D : P = 10 – 0,5Q

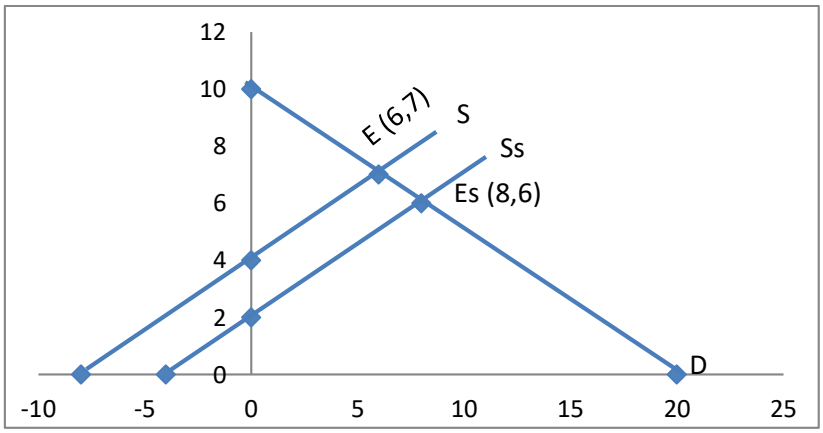
Q	P
0	10
20	0

S0 : P = 0,5Q + 4

Q	P
0	4
-8	0

Ss : P = 0,5Q + 2

Q	P
0	2
-4	0



Gambar 4.2. Grafik Keseimbangan Pasar Sebelum dan Sesudah Subsidi

Contoh Soal 2 :

Diketahui fungsi permintaan : $P = -Q^2 – 3Q + 108$ dan fungsi penawaran : $P = 5Q + 24$. Tentukan keseimbangan pasar sebelum subsidi dan keseimbangan pasar jika diberikan subsidi 21 per unit barang. Gambarkan grafiknya!

Penyelesaian:

Keseimbangan sebelum subsidi:

$D = S$

$-Q^2 – 3Q + 108 = 5Q + 24$

$0 = Q^2 + 3Q + 5Q + 24 – 108$

$0 = Q^2 + 8Q – 84$

$(Q + 14)(Q – 6) = 0$

$Q1 = -14$ (tidak memenuhi syarat karena negatif)

$Q2 = 6$

Jika Q = 6, maka persamaan menjadi :

$P = 5Q + 24$

$= 5(6) + 24$

$= 54$

Jadi keseimbangan pasar E (6, 54)

Fungsi penawaran setelah subsidi, menjadi :

$Ps = 5Q + 24 – 21$

$= 5Q + 3$

Keseimbangan setelah subsidi:

$D = Ss$

$-Q^2 – 3Q + 108 = 5Q + 3$

$0 = Q^2 + 5Q + 3Q + 3 – 108$

$0 = Q^2 + 8Q – 105$

$(Q + 15)(Q – 7) = 0$

$Q_1 = -15$ (tidak memenuhi syarat)

$Q_2 = 7$

Jika Q = 7, maka persamaan menjadi :

$P = 5Q + 3$

$= 5(7) + 3$

= 38

Jadi keseimbangan pasar setelah subsidi Es(7, 38)

Titik-titik koordinat untuk fungsi:

D: $P = -Q^2 – 3Q + 108$

Titik memotong sumbu P, jika Q = 0

$P = -0^2 – 3(0) + 108$

= 108

Jadi koordinat titiknya adalah (0, 108)

Titik memotong sumbu Q, jika P = 0

$-Q^2 – 3Q + 108 = 0$

(-Q - 12) (Q - 9) = 0

Q1 = -12 dan Q2 = 9

Jadi koordinat titiknya adalah (-12, 0) dan (9, 0)

Titik balik/puncak parabola:

Q = -(-3)/2(-1)

= -1,5

$P = -(-3^2 – 4.-1.108)/4.-1$

= 110,25

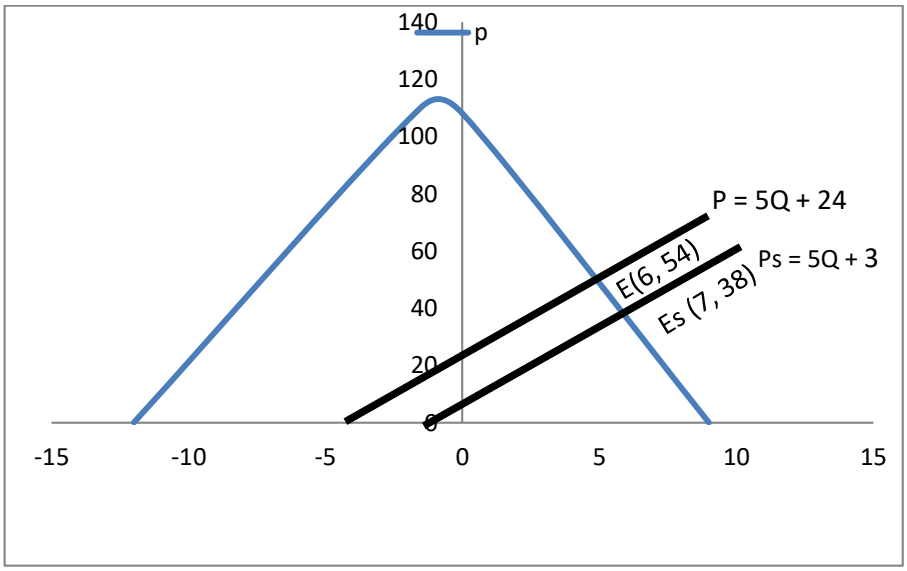
Jadi titik puncaknya adalah (-1,5 ; 110,25)

Titik koordinat S: P = 5Q + 24

Q	**P**
0	24
-4,8	0

Titik koordinat Ss: Ps = 5Q + 3

Q	**P**
0	3
-0,6	0



Gambar 4.3. Grafik Fungsi Kuadrat keseimbangan Pasar Karena Subsidi

Contoh Soal 3 :

Fungsi permintaan akan suatu barang ditunjukkan oleh persamaan Pd = 21 – Q, sedangkan penawarannya Ps = 6 + 2Q. Pemerintah memberikan subsidi sebesar 3 atas setiap unit barang yang di produksi. Tentukan:

a. Keseimbangan pasar sebelum subsidi
b. Keseimbangan pasar sesudah subsidi
c. Bagian subsidi yang dinikmati oleh konsumen (sk)
d. Bagian subsidi yang dinikmati oleh produsen (sp)
e. Jumlah subsidi yang dibayarkan oleh pemerintah (S)

Penyelesaian :

a. Permintaan tanpa subsidi

   Pd = 21-Q, maka Qd = 21-P

   Penawaran tanpa subsidi

   Ps = 6+2Q, maka Qs = -3+0,5P

   Qd = Qs

   21-P = -3+0,5P

   21+3 = 0,5P+P

   24 = 1,5P

   P = 16

Pe = 16

Subtitusi ke persamaan Qd, sehingga menjadi :

Qd = 21-P

Qd = 21-16

Qd = 5

Qe = 5

Jadi, keseimbangan pasar sebelum subsidi (E) adalah (Qe,Pe) = (5,16).

b. Permintaan dengan subsidi

Pd = 21-Q, maka Qd = 21-P

Penawaran dengan subsidi

Ps = 6+2Q-3, maka Qs = -1,5+0,5P

Qd = Qs

21-P = -1,5+0.5P

21+1,5 = P+0.5P

22,5 = 1.5P

P = 15

P'e = 15

Substitusi ke persamaan Qd, sehingga menjadi :

Qd = 21-P

Qd = 21-15

Qd = 6

Q'e = 6

Jadi, keseimbangan pasar sesudah subsidi (E') adalah (Q'e,P'e) = (6,15)

c. sk = Pe-P'e

sk = 16-15

sk = 1

Jadi, bagian subsidi yang dinikmati konsumen sebesar 1, atau 33% dari subsidi per unit barang.

d. sp = s-sk

sp = 3-1

sp = 2

Jadi, bagian subsidi yang dinikmati oleh produsen sebesar 2, atau 67% dari subsidi per unit barang.

e. S = Q'e x s

S = 6 x 3

S = 18

Jadi, jumlah subsidi yang dibayarkan oleh pemerintah sebesar 18.

Contoh Soal 4 :

Fungsi permintan akan suatu barang di tunjukan oleh persamaan P=60-2Q, sedangkan penawarannya P=40+2Q, pemerintah memberikan subsidi sebesar 50% atas setiap unit barang yang di produksi. Tentukan :

a. Keseimbangan pasar sebelum subsidi
b. Keseimbangan pasar sesudah subsidi
c. Bagian subsidi yang dinikmati oleh konsumen (sk)
d. Bagian subsidi yang dinikmati oleh produsen (sp)
e. Jumlah subsidi yang dibayarkan oleh pemerintah (S)

Penyelesaian :

a. Permintaan tanpa subsidi

Pd = 60-2Q, maka Qd = 30-0,5P

Penawaran tanpa subsidi

Ps = 40+2Q, maka Qs = -20+0,5P

Qd = Qs

30-0,5P = -20+0,5P

P = 50

Pe = 50

Subtisusi ke persamaan Qd, sehingga menjadi :

Qd = 30 – 0,5P

Qd = 30 – 0,5(50)

Qd = 5

Qe = 5

Jadi, keseimbangan pasar sebelum subsidi (E) adalah (Qe,Pe) = (5,50)

b. Pemerintah memberikan subsidi dalam bentuk persen, yaitu 50%. Pertama, nominal subsidi ini harus dikali dengan P, sehingga menjadi 0,5P.

Permintaan dengan subsidi

Pd =60-2Q , maka Qd = 30-0,5P

Penawaran dengan subsidi

Ps =40+2Q-0,5P, maka Qs = -20+0,75P

Qd = Qs

30-0,5P = -20+0,75P

1,25P = 50

P = 40

P'e = 40

Subtitusi ke persamaan Qd, sehingga menjadi :

Qd = 30-0,5P

Qd = 30-0,5(40)

Qd = 10

Q'e = 10

Jadi, keseimbangan pasar sesudah subsidi (E') adalah (Q'e,P'e) = (10,40)

Sebelum mencari subsidi yang diterima konsumen, produsen dan yang dibayarkan pemerintah kita harus mencari nominal subsidinya terlebih dahulu.

s = 0,5P'e

s = 0,5 (40)

s = 20

c. sk = Pe-P'e

sk = 50-40

sk = 10

Jadi, bagian subsidi yang dinikmati konsumen sebesar 10, atau 50% dari subsidi per unit barang.

d. sp = s – sk

sp = 20-10

sp = 10

Jadi, bagian subsidi yang dinikmati oleh produsen sebesar 10, atau 50% dari subsidi per unit barang.

e. S = Q'e x s

S = 10 x 20

S = 200

Jadi, jumlah subsidi yang dibayarkan oleh pemerintah sebesar 200

Contoh Soal 5 :

Diketahui fungsi permintaan Pd = 16-Q dan fungsi penawaran Ps = 4+0,5Q dimana P adalah harga perunit barang dan Q menyatakan jumlah barang. Apabila pemerintah memberikan subsidi sebesar 25% atas setiap unit barang, maka tentukan :

a. Keseimbangan pasar sebelum subsidi
b. Keseimbangan pasar sesudah subsidi
c. Bagian subsidi yang dinikmati oleh konsumen (sk)
d. Bagian subsidi yang dinikmati oleh produsen (sp)
e. Jumlah subsidi yang dibayarkan oleh pemerintah (S)

Penyelesaian :

a. Permintaan tanpa subsidi

   Pd = 16-Q, maka Qd = -P+16

   Penawaran tanpa subsidi

   Ps = 4+0,5Q, maka Qs = 2P-8

   Qd = Qs

   -P+16 = 2P-8

   3P = 24

   P = 8

   Pe = 8

   Subtisusi ke persamaan Qd, sehingga menjadi :

   Qd = -P+16

   Qd = -8+16

   Qd = 8

   Qe = 8

   Jadi, keseimbangan pasar sebelum subsidi (E) adalah (Qe,Pe) = (8,8)

b. Pemerintah memberikan subsidi dalam bentuk persen, yaitu 25%.

   Pertama, nominal subsidi ini harus dikali dengan P, sehingga menjadi 0,25P.

   Permintaan dengan subsidi

   P =16-Q , maka Qd = -P+16

   Penawaran dengan subsidi

P = 0,5Q+4-0,25P, maka Qs = -8+2,5P

Qd = Qs

-P+16 = -8+2,5P

3,5P = 24

P = 7

P'e = 7

Subtitusi ke persamaan Qd, sehingga menjadi :

Qd = -P+16

Qd = -7+16

Qd = 9

Q'e = 9

Jadi, keseimbangan pasar sesudah subsidi (E') adalah (Q'e,P'e) = (9,7)

Sebelum mencari subsidi yang diterima konsumen, produsen dan yang dibayarkan pemerintah kita harus mencari nominal subsidinya terlebih dahulu.

s = 0,5P'e

s = 0,5 x 7

s = 3,5

c. sk = Pe-P'e

sk = 8-7

sk = 1

Jadi, bagian subsidi yang dinikmati konsumen sebesar 1 atau 29% dari subsidi per unit barang.

d. sp = s-sk

sp = 3,5 – 1

sp = 2,5

Jadi, bagian subsidi yang dinikmati oleh produsen sebesar 2,5 atau 71% dari subsidi per unit barang.

e. S = Q'e x s

S = 9 x 3,5

S = 31,5

Jadi, jumlah subsidi yang dibayarkan oleh pemerintah sebesar 31,5

C. Soal Latihan/Tugas

Kerjakan soal berikut ini dengan teliti dan benar!

1. Diketahui fungsi permintaan 2Q = 10 – P dan fungsi penawaran 3Q = 2P – 2. Carilah keseimbangan pasar apabila pemerintah mengenakan pajak sebesar Rp 2 per unit. Dan tentukan keseimbangan pasar yang baru apabila pemerintah memberikan subsidi sebesar Rp 1 per unit.
2. Diketahui fungsi permintaan adalah P – 12 + 2Q = 0dan fungsi penawaran adalah 3 + Q – P = 0. Tentukan keseimbangan pasar sebelum dan sesudah subsidi, jika pemerintah memberikan subsidi sebesar Rp 1.
3. Diketahui fungsi permintaan P_D = 200 - $2Q^2$ sedangkan fungsi penawaran P_S = 75 + $3Q^2$, hitung keseimbangan pasar jika diberikan subsidi 55 per unit barang.
4. Diketahui fungsi permintaan P = 4 - $Q^{½}$ sedangkan fungsi penawaran P = $\sqrt{4+Q}$. Pemerintah memberikan subsidi sebesar Rp. 2 per unit. Tentukan keseimbangan pasar sebelum dan setelah subsidi!
5. Fungsi permintaan suatu barang ditunjukkan oleh persamaan P = 15 – Q, sedangkan penawaraannya P = 3 + 0.5 Q. Jika pemerintah memberikan subsidi sebesar 1.5 terhadap barang yang diproduksi, Tentukan harga keseimbangan setelah subsidi yang tercipta di pasar.
6. Jika diketahui fungsi permintaan dengan P_D = 40 - Q^2 sedangkan fungsi penawaran P_S = 70 + Q^2, hitung keseimbangan pasar jika subsidi dikenakan 15 per unit.
7. Diketahui fungsi permintaan P = 10 – 2Q dan fungsi penawaran 2P = 10Q – 2. Carilah keseimbangan pasar apabila pemerintah mengenakan pajak sebesar Rp 6 per unit. Dan tentukan keseimbangan pasar yang baru apabila pemerintah memberikan subsidi sebesar Rp 6 per unit.
8. Diketahui fungsi permintaan 2Q = 100 – 4P dan fungsi penawaran 3Q = 24P – 22. Carilah keseimbangan pasar apabila pemerintah mengenakan pajak sebesar Rp 12 per unit. Dan tentukan keseimbangan pasar yang baru apabila pemerintah memberikan subsidi sebesar Rp 10 per unit.

D. Daftar Pustaka

Andi Wijaya dkk. (2014). *Matematika Ekonomi I*. Jakarta: Mitra Wacana Media.

Josep B Kalangi. (2011). *Matematika Ekonomi dan Bisnis*. Jakarta: Salemba Empat.

Suprian Atmaja S.(2002). *Matematika Ekonomi I*. Bandung: Ghalia Indonesia.

PERTEMUAN 5
FUNGSI BIAYA, PENERIMAAN, DAN ANALISIS TITIK IMPAS

A. Tujuan Pembelajaran

Pada pertemuan 5 ini, mahasisawa akan dijelaskan mengenai penerapan fungsi dalam ekonomi yaitu fungsi biaya, penerimaan dan analisis titik impas. Setelah mempelajari bab ini, mahasiswa diharapkan mampu menghitung fungsi biaya, fungsi penerimaan dan titik impas (BEP).

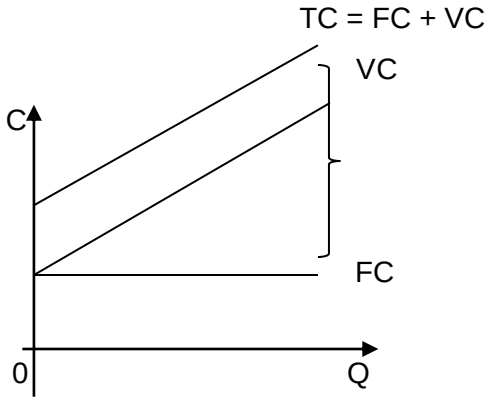
B. Uraian Materi

1. Fungsi Biaya

Pada fungsi biaya dalam bab ini merupakan biaya dan penerimaan yang akan dibahas berfokus pada jenis usaha yang memproduksi suatu produk. Biaya merupakan sejumlah dana yang dikeluarkan perusahaan dalam kegiatan produksinya. Keseluruhan biaya yang dikeluarkan perusahaan untuk untuk kegiatan produksinya dinyatakan dalam biaya total/total cost (TC).

Unsur biaya total meliputi biaya tetap/fixed cost(FC) dan biaya variabel/variable cost(VC). Biaya tetap adalah biaya yang nilainya tetap konstan meskipun hasil produksi berubah-ubah. Contoh biaya tetap adalah penyusutan, bunga, asuransi, dan gaji karyawan. Biaya variabel adalah biaya yang nilainya berubah-ubah jika hasil produksi berubah. Contoh biaya variabel yaitu biaya bahan baku dan upah tenaga kerja langsung.

Berikut ini kurva fungsi biaya tetap dan biaya variabel dengan penjabaran berikut ini :



Gambar 5.1 Grafik Fungsi Biaya

Sumbu horizontal mencerminkan Q (kuantitas/jumlah) produk dalam unit tertentu, sedangkan sumbu vertikal mencerminkan biaya total (TC). Jika biaya total diaplikasikan sesuai model linear, maka besarnya biaya total adalah sebagai berikut :

$$\boxed{\mathbf{TC = FC + VC}}$$

TC dan VC merupakan fungsi dari kuantitas sehingga berbentuk TC = f(Q) dan VC = f(Q), artinya besar kecilnya TC dan VC sangat tergantung dari besar kecilnya kuantitas.

Besarnya biaya juga dapat dinyatakan dalam rata-rata, yaitu hasil bagi antara biaya total dengan kuantitas. Biaya variabel rata-rata yaitu biaya variabel total dibagi kuantitas dan biaya tetap yaitu biaya tetap dibagi dengan kuantitas. Kondisi tersebut dinyatakan dalam rumus yang dijabarkan berikut ini :

AC $= \frac{TC}{Q}$

AVC $= \frac{VC}{Q}$

AFC $= \frac{FC}{Q}$

Berarti:

AC = AFC + AVC

$= \frac{FC+VC}{Q}$

Keterangan:

AC = average cost/biaya rata-rata

AFC = average fixed cost/biaya tetap rata-rata

AVC = average variable cost/biaya variabel rata-rata

Contoh Soal 1:

PT ABG merupakan perusahaan yang memproduksi pena. Biaya tetap perusahaan sebesar Rp. 22.000.000, sedangkan untuk menghasilkan sebuah pena dibutuhkan biaya sebesar Rp. 5.000.

Pertanyaan:

a. Tentukan fungsi biaya
b. Berapa biaya total yang dikeluarkan perusahaan untuk memproduksi 3000 pena
c. Berapa unit yang diproduksi jika biaya total yang dikeluarkan sebesar Rp. 30.000.000

Penyelesaian :

FC = 22.000.000

VC per unit = 5.000

a. TC = FC + VC per unit x Q

   TC = 22.000.000 + 5.000Q

b. Jika Q = 3000

   TC = 22.000.000 + (5.000 x 3.000)

   TC =37.000.000

c. Jika TC = 30.000.000

   TC = FC + VC per unit x Q

   30.000.000 = 22.000.000 + 5.000Q

   8.000.000 = 5.000Q

   Q = 8.000.000 : 5.000

   Q = 1.600 pasang

Contoh Soal 2 :

Diketahui biaya yang dikeluarkan untuk membuat 1 unit microphone adalah 15.000, Sedangkan biaya tetapnya sebesar 15.000.000. Tentukan bentuk fungsi biaya total dan berapa jumlah biaya total jika unit yang diproduksi sebanyak 35!

Penyelesaian:

TC = 15.000.000 + 15.000Q

Jika Q = 35, maka biaya total adalah:

TC = 15.000.000 + 15.000(35)

= 15.000.000 + 525.000

= 15.525.000

2. Fungi Penerimaan

Pada bab ini fungsi biaya dan fungsi penerimaan yang dbahas berupa fungsi linear. Sedangkan untuk bentuk fungsi nonlinearnya akan dibahas pada bab yang lain.Penerimaan merupakan sejumlah uang yang diterima oleh produsen sehubungan dengan penjualan produknya. Semakin banyak unit produk yang terjual maka semakin banyak penerimaan total yang diperoleh dan sebaliknya. Penerimaan total merupakan fungsi dari kuantitas, maka bentuk fungsinya TR = f(Q). Penerimaan total/total revenue dinyatakan dengan rumus berikut ini :

$$\boxed{\mathbf{TR = P \times Q}}$$

Keterangan:

TR = penerimnaa total/total revenue

P = harga jual per unit/ bias berupa fungsi permintaan P = f(Q)

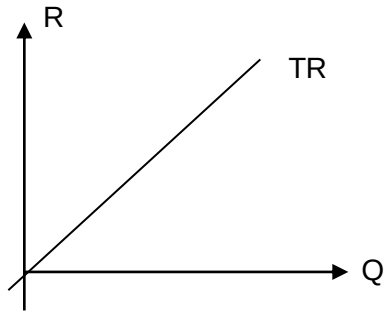
Q = banyaknya unit yang terjual

Besarnya penerimaan rata-rata (*average revenue*) adalah hasil bagi dari penerimaan total dengan kuantitas atau penerimaan rata-rata sama dengan harga jual. Berikut rumusannya menjadi :

AR = $\frac{TR}{Q}$

AR $= \frac{P \; x \; Q}{Q} = P$

Gambar grafik kasus di atas dari suatu fungsi penerimaan total di jabarkan seperti di bawah ini :



Gambar 5.2 Fungsi Penerimaan

Kondisi kurva di atas apabila pasar berbentuk persaingan sempurna. Jika berbentuk persaingan tidak sempurna, maka kurva penerimaan total berbentuk nonlinear. Jika penerimaan berbentuk non linear maka TR = Qd x Q atau TR = f(P) x Q

Contoh Soal 3 :

PT Maju Mundur merupakan perusahaan penghasil gelas plastik. Perusahaan menjual produknya dengan harga Rp. 5,000 per unit.

Pertanyaan:

a. Tentukan persamaan penerimaan total
b. Besarnya penerimaan total jika produk yang terjual sebanyak 1.000 unit
c. Besarnya unit yang terjual jika perusahaan menginginkan penerimaan total sebesar Rp. 20.000.000

Penyelesaian:

a. TR = P x Q
   =5.000Q

b. Jika Q = 1.000 unit
   TR = 5.000 x 1.000

= 5.000.000

c. Jika TR = 20.000.000
TR = 5.000Q
20.000.000 = 5.000Q
Q = 20.000.000 : 5.000
= 4.000 unit

Contoh Soal 4 :

Seorang pedagang tahu bulat menjual tahu bulatnya seharga Rp. 500 per butir. Dalam sehari, tahu bulatnya terjual sebanyak 1.000 butir. Tentukan bentuk fungsi penerimaannya dan hitung besarnya penerimaan pedagang tahu bulat tersebut dalam waktu 5 hari!

Penyelesaian:

TR = 500Q
TR = 500 x 1.000
= 500.000 per hari
Penerimaan dalam 5 hari = 500.000 x 5
= 2.500.000

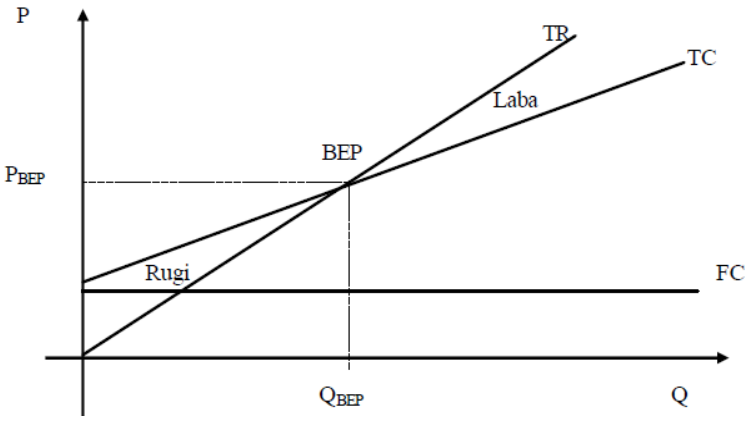
3. Analisis Titik Impas (Break Even Point = BEP)

Tujuan utama suatu perusahaan adalah meningkatkan laba usahanya. Untuk dapat meningkatkan laba, perusahaan dapat melakukan berbagai cara dan kebijakan. Salah satu cara manajemen laba adalah dengan melakukan perencanaan laba menggunakan analisis break even point/titik impas. Titik Impas/Break Even Point adalah suatu keadaan dimana perusahaan tidak mendapat untung maupun tidak rugi. Jadi, analisis titik impas/break even point merupakan konsep yang digunakan untuk menganalisis jumlah minimum produk yang harus dihasilkan atau terjual agar perusahaan tidak mengalami kerugian.

Laba (π) dihitung dari penerimaan total dikurangai biaya total. Dengan analisis *break event point* maka perusahaan dapat merencanakan akan memproduksi/menjual berapa unit agar memperoleh laba yang diharapkan. Untuk

menentukan titik impas dapat dilakukan dengan menggunakan dua pendekatan yaitu pendekatan grafik dan matematis. Secara matematis kondisi titik impas/*break even point* terjadi jika **TR = TC.**

Secara grafik kondisi *break event point* dapat digambarkan sebagai berikut ini :



Gambar 5.3 Grafik Titik Impas (*Break Event Poin*)

Perhitungan analisis titik impas *(Break Event Point)* didasarkan oleh persamaan matematis sebagai berikut:

Penerimaan total = Total Biaya

TR = TC

P X Q = FC + (VC X Q)

π = TR – TC

Keterangan :

TR = *Total Revenue* (Pendapatan Total)

TC = *Total Cost* (Biaya Total)

FC = *Fixed Cost* (Biaya Tetap)

VC = *Variable Cost* (Biaya Variabel) per unit

Q = *Quantity* (jumlah produk penjualan)

P = *Price* (Harga jual barang) per unit

π = laba

Contoh Soal 5 :

Seorang produsen menjual produknya seharga Rp 5.000,00 per unit. Biaya Tetap per bulan Rp 3.000.000,00 dan biaya variabel sebesar 40% dari harga jual. Tentukan :

a. Titik impas baik dalam unit maupun dalam rupiah.
b. Gambarkan diagram impasnya.
c. Jika terjual 1.500 satuan, maka hitunglah labanya.
d. Jika produsen tersebut menginginkan laba sebesar Rp 3.000.000,00 tentukan berapa banyak produknya harus terjual.

Penyelesaian:

a. TR = 5.000Q

Harga jual Rp. 5.000

VC per unit = 40% x Rp. 5.000

= Rp. 2.000

TC = FC + VC(Q)

TC = 3.000.000 + 2.000Q

BEP jika TR = TC

5000Q = 3.000.000 + 2.000Q

5.000Q – 2.000Q = 3.000.000

3.000Q = 3.000.000

Q = 1.000

Jika Q = 1.000, maka :

TR = 5.000Q

= 5.000 x 1.000

= 5.000.000

Jadi titik impas/*break event pont* adalah BEP (1.000, 5.000.000)

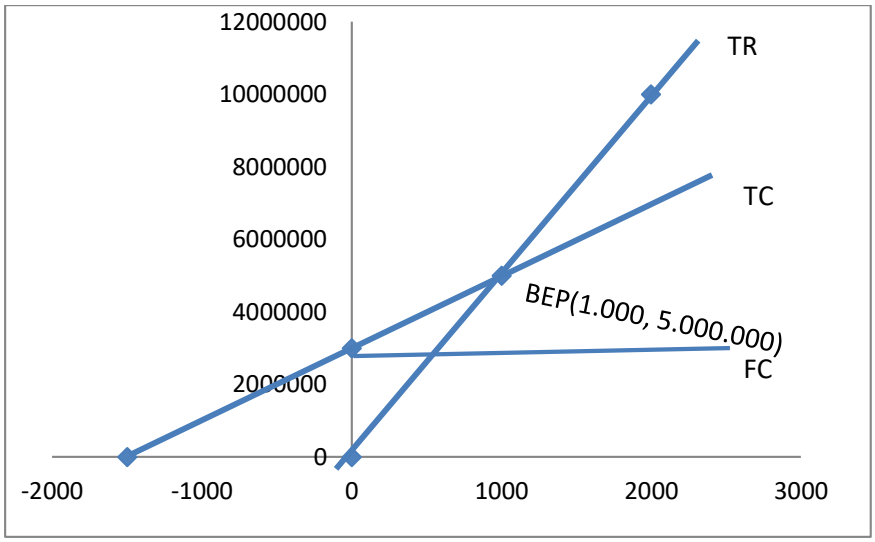
b. Titik koordinat fungsi:

TC = 3.000.000 + 2.000Q

Q	TC
0	3.000.000
-1.500	0

TR = 5.000Q

Q	TR
0	0
1.000	5.000.000
2.000	10.000.000



Gambar 5.4 Grafik Kondisi Break Even Point

c. Jika Q = 1.500 unit

TR = 5.000 x 1.500

= 7.500.000

TC = 3.000.000 + (2.000 x 1.500)

= 6.000.000

Laba = TR – TC

Laba = 7.500.000 – 6.000.000

= 1.500.000

d. Laba 3.000.000

5.000Q – (3.000.000 + 2.000Q) = 3.000.000

5.000Q – 2.000Q = 3.000.000 + 3.000.000

3.000Q = 6.000.000

Q = 2.000 unit

Contoh Soal 6 :

Diketahui fungsi berikut:

Fungsi Permintaan: Pd = 60 – 3Q

Fungsi Biaya Total : TC = 195 + 6Q

Tentukan:

a. Fungsi TR dan keuntungan
b. BEP

Penyelesaian:

a. TR = P x Q

TR = (60 – 3Q) x Q

= **$60Q - 3Q^2$**

π = TR – TC

π = $60Q - 3Q^2 - (195 + 6Q)$

π = $60Q - 3Q^2 - 195 - 6Q$

π = $-3Q^2 + 54Q - 195$

b. BEP jika TR = TC

$60Q - 3Q^2 = 195 + 6Q$

$60Q - 3Q^2 - 195 - 6Q = 0$

$-3Q^2 + 54Q - 195 = 0$

Fungsi di atas disederhanakan dengan dibagi -3, menjadi:

$Q^2 - 18Q + 65 = 0$

$(Q - 13)(Q - 5) = 0$

Q1 = 13 dan Q2 = 5

Jika Q = 13, maka TC= 195 + 6(13)

= 273

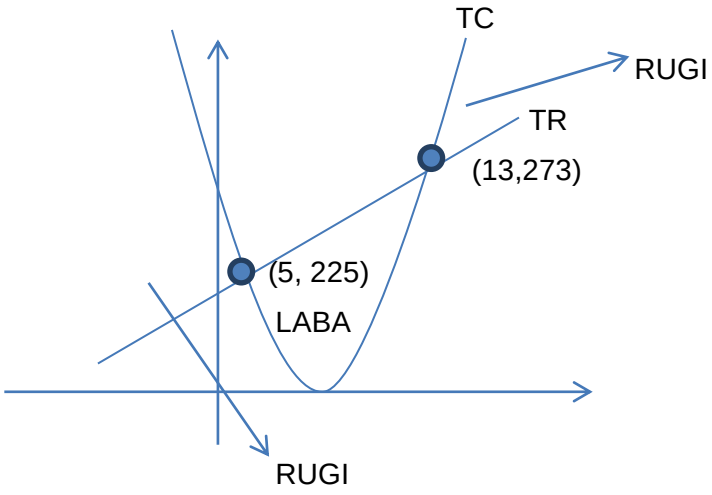
Jika Q = 5, maka TC = 195 + 6(5)

= 225

BEP (13, 273)

BEP (5, 225)

Dari data tersebut diketahui ada 2 nilai Q dan keduanya positif, sehingga nilai BEP juga positif untuk kedua nilai Q, untuk dapat menganalisis adanya dua koordinat untuk BEP, maka harus dilihat dari ilustrasi grafik berikut:



Gambar 5.5 Grafik tingkat BEP

Contoh Soal 7 :

Diketahui harga jual suatu produk adalah 50 dan biaya variabel rata-rata adalah 40% dari harga jual. Biaya totalnya sebesar 30.000.

a. Hitung unit BEP nya
b. Untung atau rugi jika yang terjual 1.500 unit
c. Hitung unit BEP baru jika harga jual naik 20%, (biaya pasti ada kenaikan juga)
d. Jika perusahaan mengharapkan laba sebesar 10.000, berapa unit produk harus terual jika disaat bersamaan terjadi kenaikan biaya total menjadi 40.000
e. Jika yang terjual 1.500 unit dan laba yang diharapkan 24.000, hitunglah harga jual yang diterapkan

Penyelesaian :

P = 50,

VC = 40% x 50

= 20,

TC = 30.000

a. TR = 50Q

TC = 30.000 + 20Q

BEP >>

TR = TC

50Q = 30.000 + 20Q

50Q-20Q = 30.000

30Q = 30.000

Q = 1.000

b. Jika Q = 1.500

TR = 50 x 1.500

= 75.000

TC = 30.000 + (20 x 1.500)

= 60.000

π = 75.000 – 60.000

= 15.000

$\mathrm{TR} > TC \quad = laba$

c. Jika P naik 20%

P = 120% x 50

= 60

VC = 40% x 60

= 24

TR = 60Q

TC = 30.000 + 24Q

BEP terjadi jika :

60Q = 30.000 + 24Q

60Q – 24Q = 30.000

36Q = 30.000

Q = 833

d. Jika π = 10.000

TC = 40.000 + 20Q

TR = 50Q

50Q – 40.000 + 20Q = 10.000

30Q = 50.000

Q = 1.667

e. Jika Q = 1.500

π = 24.000

TR = 1.500P

TC = 30.000 + 0,4Px1.500

= 30.000 + 600P

TR – TC = π

1.500P – (30.000 + 600P) = 24.000

900P = 54.000

P = 60

C. Soal Latihan/Tugas

Kerjakan soal-soal di bawah ini dengan teliti dan benar!

1. Sebuah perusahaan ingin menentukan titik impas untuk produk baru yang dihasilkan. Biaya tetap yang dikeluarkan sebesar Rp 4.000.000, biaya variable per unit Rp 3.500 dan harga jual barang per unit Rp. 6.000. Tentukan titik impas. Tentukan besarnya keuntungan jika ada, pada penjualan 2.000 unit.
2. Biaya tetap yang dikeluarkan untuk memproduksi suatu barang adalah Rp 45.000. Harga jual per unit Rp 1.500 dan biaya variable per unit adalah 60% dari harga jual per unit. Hitunglah titik impas dan gambarkan grafiknya!
3. Diketahui fungsi permintaan P = 50 – 0,2Q dan fungsi biaya total TC = 0,2Q² + 10Q + 360. Tentukan titik impas!.
4. Seorang pelatih sepak bola memperoleh gaji dari klub yang dilatihnya sebesar $ 200 per bulan dan setiap kali datang ke tempat latihan untuk melatih, dibayar sebesar $ 20.
   a. Buatlah fungsi total biaya per bulan
   b. Jika pelatih pada bulan ini datang 10 kali, berapa total biaya yang harus dikeluarkan klub?
   c. Jika total biaya yang harus dikeluarkan sebesar $ 600, berapa kali pelatih tsb datang ke klub untuk melatih.

5. Sebuah perusahaan yang memproduksi barang, mengeluarkan biaya tetap sebesar Rp. 600.000, dan biaya variabel per unit sebesar Rp. 2.500. Harga jual produk per unit Rp. Rp. 3.000. Tentukan fungsi total biaya dan fungsi penerimaannya! Hitung titik impas perusahaan tersebut (dalam unit maupun rupiah)!
6. Sebuah perusahaan menjual hasil produksinya dengan harga Rp 2000 per unit, biaya variabelnya 40% dari pendapatannya sedang biaya tetapnya Rp 6.000.000.
   a. Tentukan fungsi penerimaan, fungsi biaya variabel dan fungsi biaya total!
   b. BEP (dalam unit dan rupiah)
   c. Bila perusahaan menjual hasil produksinya 6000 unit, apa yang terjadi (laba/rugi) dan berapa besarnya?
7. Sebuah perusahaan ingin menentukan titik impas untuk produk baru yang dihasilkan. Biaya tetap yang dikeluarkan sebesar Rp 8.000.000, biaya variable per unit Rp 5.000 dan harga jual barang per unit Rp. 8.000. Tentukan titik impas. Tentukan besarnya keuntungan jika ada, pada penjualan 4.000 unit.
8. Sebuah perusahaan menjual hasil produksinya dengan harga Rp 4.000 per unit, biaya variabelnya 20% dari pendapatannya sedang biaya tetapnya Rp 8.000.000.
   a. Tentukan fungsi penerimaan, fungsi biaya variabel dan fungsi biaya total!
   b. BEP (dalam unit dan rupiah)
   c. Bila perusahaan menjual hasil produksinya 8000 unit, apa yang terjadi (laba/rugi) dan berapa besarnya?
9. Seorang pelatih sepak bola memperoleh gaji dari klub yang dilatihnya sebesar $ 800 per bulan dan setiap kali datang ke tempat latihan untuk melatih, dibayar sebesar $ 40.
   a. Buatlah fungsi total biaya per bulan
   b. Jika pelatih pada bulan ini datang 20 kali, berapa total biaya yang harus dikeluarkan klub?
   c. Jika total biaya yang harus dikeluarkan sebesar $ 800, berapa kali pelatih tsb datang ke klub untuk melatih.
10. Sebuah perusahaan yang memproduksi barang, mengeluarkan biaya tetap sebesar Rp. 800.000, dan biaya variabel per unit sebesar Rp. 5.500. Harga jual produk per unit Rp. Rp. 2.000. Tentukan fungsi total biaya dan fungsi

penerimaannya! Hitung titik impas perusahaan tersebut (dalam unit maupun rupiah)!

11. Sebuah perusahaan yang memproduksi barang, mengeluarkan biaya tetap sebesar Rp. 1.200.000, dan biaya variabel per unit sebesar Rp. 4.000. Harga jual produk per unit Rp. Rp. 7.000. Tentukan fungsi total biaya dan fungsi penerimaannya! Hitung titik impas perusahaan tersebut (dalam unit maupun rupiah)!

D. Daftar Pustaka

Andi Wijaya dkk. (2014). *Matematika Ekonomi I*. Jakarta: Mitra Wacana Media.

Josep B Kalangi. (2011). *Matematika Ekonomi dan Bisnis*. Jakarta: Salemba Empat

Suprian Atmaja S.(2002). *Matematika Ekonomi I*. Bandung: Ghalia Indonesia.

PERTEMUAN 6
FUNGSI KONSUMSI, FUNGSI TABUNGAN DAN PENDAPATAN NASIONAL

A. Tujuan Pembelajaran

Setelah mempelajari materi pertemuan 6, mahasiswa mampu menghitung bagaimana mencari solusi atas permasalahan dari fungsi konsumsi, tabungan dan pendapatan nasional serta grafik dari ketiga fungsi tersebut.

B. Uraian Materi

1. Fungsi Konsumsi dan Fungsi Tabungan

Menurut John Maynard Keynes, seorang ahli ekonomi mengatakan bahwa pengeluaran orang-orang di dunia ini untuk konsumsi dipengaruhi oleh pendapatan mereka dalam bekerja sehari-harinya. Banyaknya konsumsi masyarakan sangat erat hubungannya dengan pendapatan masyarakat di Negara itu sendiri. Pendapatan nasional dalam perekonomian apapun di Negara dapat dialokasikan ke dua kategori. Dua kategori tersebut tidak lain adalahsebagai keperluan konsumsi dan tabungan.

Pada materi ini, akan dibahas fungsi konsumsi dan tabungan. Tingkat pendapatan seseorang, baik besar ataupun kecil dipengaruhi oleh konsumsinya. Semakin tinggi pendapatan akan berdampak pada meingkatnya konsumsi tersebut. Konsumsi dengan pendapatan sangat erat hubungannya secara positif atau berbanding lurus. Secara matematis, suatu fungsi konsumsi dinotasikan dengan $C = f(Y)$. Y sebagai lambang dari suatu pendapatan, konsumsi dengan simbol C sedangkan tabungan dilambangkan dengan S.

Semakin tinggi pendapatan seseorang, karena sisa pendapatan yang tidak dikonsumsi, maka masyarakat tersebut akan ditabung pendapatannya. Dengan tinggi pula tabungan tersebut, sebagai bentuk persiapan untuk kematangan ekonomi di masa yang akan dating. Dapat disimpulkan bahwa kaitannya dari pendapatan dengan tabungan berdampak positif atau berbanding lurus. Secara matematis, fungsi tabungan bisa dinotasikan dengan $S = f(Y)$.

Hubungan fungsional antara konsumsi dengan pendapatan, dapat dirumuskan menjadi beberapa sisi, yaitu :

a. Dilihat dari perorangan

Y = C + S

b. Dilihat dari perusahaan

Y = C + I

Dimana :

Y = Pendapatan suatu negara

C = Konsumsi suatu negara

S = Tabungan suatu negara

I = Investasi suatu negara

Jika suatu pendapatan berubah, maka mengakibatkantabungan maupun konsumsi akan berubah pula. Perubahannya bisa ditentukan dari beberapa hal, diantaranya sebagai berikut:

a. MPC (*Marginal Propencity to Consume)*

MPC merupakansuatu perbandingan angka antara besarnya perubahan konsumsi dengan perubahan besarnya suatu pendapatan, yang dirumuskan:

$$\boldsymbol{MPC} = \frac{\Delta \boldsymbol{C}}{\Delta \boldsymbol{Y}} = \frac{\boldsymbol{C_i} - \boldsymbol{C_o}}{\boldsymbol{Y_i} - \boldsymbol{Y_o}}$$

Dimana :

$\Delta \boldsymbol{C}$ **=** perubahan konsumsi

$\boldsymbol{C_i}$ **=** konsumsi pada tahun ke-i

$\boldsymbol{C_o}$ **=** konsumsi pada tahun ke-0

$\Delta \boldsymbol{Y}$ **=** perubahan pendapatan

$\boldsymbol{Y_i}$ **=** pendapatan tahun ke-i

$\boldsymbol{Y_o}$ **=** pendapatan tahun ke-0

b. MPS (*Marginal Propencity to Save)*

MPS merupakan perbandingan antara perubahan tabungan dengan perubahan suatu pendapatan, MPS bisa dirumuskan menjadi:

$$\boldsymbol{MPS} = \frac{\Delta \boldsymbol{S}}{\Delta \boldsymbol{Y}}$$

Dimana :

$\Delta \boldsymbol{S}$ **=** perubahan suatu tabungan

$\boldsymbol{S_i}$ **=** tabungan tahun ke-i

$\boldsymbol{S_o}$ **=** tabungan tahun ke-0

2. Fungsi Konsumsi

Dalam analysis ekonomi jangka panjang maupun pendek, suatu Negara menjadi sangat penting jika dibahas mengenai konsumsi masyarakat. Konsumsi bisa diartikan menjadi penjumlahan dari semua pengeluaran rumah tangga dalam suatu perekeonomian Negara tersebut. Konsumsi merupakan suatu tindakan ekonomi yang dilakukan sekelompok orang ataupun individu, dengan menggunakan komodias yang berupa barang atau jasa dalam pemenuhan kebutuhan.

Ada beberapa masalah yang penting dalam perekonomian yang sering muncul, seperti masalah-masalah biaya, efisiensi penggunaan sumber daya, pemerataan pendapatan maupun lainnya dengan mengetahui total pengeluaran dalam suatu perekonomian. Artinya dalam hal ini dapat dianalisis dan ditentukanbahwa untuk memperbaiki kesejahteraan masyarakat dengan memberikan kebijaka ekonomi yang sesuai dengan kebutuhan masyarakat tersebut.

Adapun yang menjadi faktor-faktor dalam mempengaruhi fungsi konsumsi adalah pendapatan masayarakat, tingkatan harga dan selera masyarakat itu sendiri. Fungsi yang menunjukkan suatu hubungan antara konsumsi negera tersebut (C) dengan pendapatan sebagai (Y) disebut dengan fungsi konsumsi. Fungsi konsumsi mempunyai bentuk persamaan linier pada umumnya sebagai berikut :

$$\mathbf{C = a + bY}$$

Dimana :

a dan b > 0

C = tingkatan suatu konsumsi

a = besarnya pengeluaran untuk konsumsi saat pendapatan nol

b =tambahan pendapatan yang bisa digunakan untuk pengeluaran = MPC

Dalam mencari nilai a di atas, bisa menggunakan rumus sebagai berikut :

a = (APC – MPC) Y

Dimana APC (*Average Propencity to Consume)* adalah bagian rata-rata untuk konsumsi. APC merupakan perbandingan antara tingginya konsumsi pada tingkat pendapatan dengan besarnya tingkat pendapatan. APC dirumuskan dengan penjabaran berikut :

$$\boldsymbol{APC = \frac{C}{Y}}$$

3. Tingkat Pendapatan BEP (Break Event Point)

Dalam funsgi konsumsi sering mengenal mengenai tingkatan pendapatan titik impas atau *Break Event Point (***BEP).** Tingkat pendapatan yang besarnya sama antara pendapatan dengan pengeluaran untuk konsumsi disebut tingkat pendapatan BEP. Tingkat pendapatan sebuah BEP dapat dirumuskan menjadi :

Y = C atau S = 0

4. Fungsi Tabungan

Suatu fungsi yang menunjukkan hubungan antara tabungan dengan pendapatan sering kita kenal sebagai fungsi tabungan. Faktor-faktor yang mempengaruhi Tabungan (S), yaitu :

a. Tingkat suku bunga di suatu bank tertentu, artinya semakin banyak masyarakat untuk menabung maka semakin tinggi tingkat suku bunga simpanan tersebut.
b. Suatu pendapatan bisa diterima apabila semakin banyak pendapatan yang diterima beraeri pendapatan yang ditabung semakin banyak pula.

c. Hal ini dengan didorong agar keinginan individu atau kelompok dalam pengalokasian pendapatan untuk bisa ditabung karena pertimbangan keamanan jangka panjang dengan hasrat untuk menabung MPS (*Maginal Propensity to Save*).

Berdasarkan rumus konsumsi yang sudah dijabarkan di atas, fungsi tabungan bisa ditentukan dengan rumus :

Y = C + S
S = Y – C dimana C = a + bY, sehingga
S = Y – (a + bY)
S = Y – a – bY
S = -a + (1 – b) Y

Dari rumus di atas, maka suatu fungsi dari tabungan adalah **S = -a + (1-b) Y**
Dimana 1-b adalah $\boldsymbol{MPS} = \frac{\Delta \boldsymbol{S}}{\Delta \boldsymbol{Y}}$

Contoh **Soal 1:**
Diketahui data pendapatan, konsumsi dan tabungan suatu Negara adalah sebagai berikut :
a. Tingkat pendapatan tiap tahun adalah 1.000 miliar, sedangkan besarnya konsumsi nya adalah 950 miliar
b. Tingkat pendapatan tiap tahun 1.200 miliar, dan besarnya konsumsi tiap tahunnya adalah 1.100 miliar
Tentukan :
1) Bagaimana fungsi konsumsinya?
2) Bagaimana tingkat pendapatan BEPnya?
3) Dan bagaimana fungsi tabungannya?
Penyelesaian :
1) Untuk menyelesaikan kasus soal di atas, kita akan menggunakan rumus dari fungsi linier dua titik dengan mengacu pada fungsi konsumsi yaitu C = a + bY,

dengan merubah y menjadi C dan x menjadi Y, maka bisa diselesaikan dengan cara seperti berikut :

$$\frac{C - C_1}{C_2 - C_1} = \frac{Y - Y_1}{Y_2 - Y_1}$$

$$\frac{C - 950}{1.100 - 950} = \frac{Y - 1000}{1.200 - 1000}$$

$$\frac{C - 950}{150} = \frac{Y - 1000}{200}$$

200 C – 195000 = 150 Y – 150000

200 C = 150 Y – 150000 + 195000

200 C = 40000 + 150 Y

C = 200 + 0,75 Y

Jadi dapat digaris bawahi bahwa fungsi konsumsi yang didapatkan adalah **C = 200 + 0,75 Y**

2) Tingkat pendapatan BEP

BEP bisa terjadi ketika Y = C atau S = 0

maka :

Y	= C + 0
Y – C	= 0
Y – (200 + 0,75 Y)	= 0
Y – 0,75 Y – 200	= 0
0,25 Y – 200	= 0
0,25 Y	= 200
Y	= 800

Jadi tingkat pendapatan BEP terjadi ketika **Y = 800**

3) Fungsi konsumsi didapatkan menjadi C = 200 + 0,75 Y

dimana dari fungsi konsumsi di atas, diketahui a = 200 dan b = 0,75, maka :

S = -a + (1 – b) Y

S = -200 + (1 – 0,75) Y

S = -200 + 0,25 Y

Sehingga fungsi tabungan diperoleh **S = -200 + 0,25 Y**

Hubungan antara MPC dan MPS secara matematis dapat dijabarkan dengan rumus :

MPC + MPS = 1, dan atau

MPC = 1 – MPS, dan atau

MPS = 1 – MPC

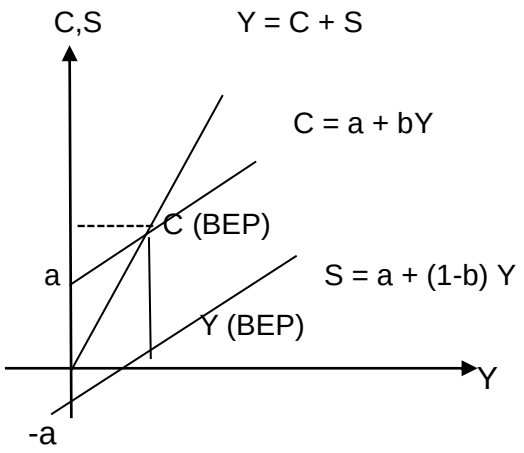
Dari contoh soal di atas, maka diperoleh :

MPC = 0,75

MPS = 0,25, maka :

0,75 + 0,25 = 1 (**terbukti bahwa MPC + MPS = 1**)

Adapun grafik fungsi konsumsi, tabungan dan BEP dari penyelesaian contoh soal di atas seperti berikut ini:



Gambar 6.1 Grafik fungsi konsumsi, tabungan dan BEP

Keterangan :

BEP = tingkat pendapatan BEP (Y = C)

C(BEP) = besarnya konsumsi pada saat BEP

Y(BEP) = besarnya pendapatan pada saat BEP

a = besarnya pengeluaran untuk konsumsi pada saat Y = 0

Hal-hal lain yang masih berhubungan pada fungsi konsumsi, dapat disimpulkan sebagai berikut :

a. Menentukan besarnya suatu perubahan atau kenaikan konsumsi

$$\Delta \boldsymbol{C} = \Delta \boldsymbol{Y}\ (\mathbf{1} - \boldsymbol{MPS})$$

b. Menentukan besarnya perubahan atau kenaikan suatu tabungan

$$\Delta \boldsymbol{S} = \Delta \boldsymbol{Y}\ (\mathbf{1} - \boldsymbol{MPC})$$

c. Menentukan besarnya perubahan atau kenaikan tabungan

$$\Delta \boldsymbol{Y} = \Delta \boldsymbol{S} : (\mathbf{1} - \boldsymbol{MPC})$$

d. Angka pengganda

Angka pengganda merupakan suatu rumusan yang menjelaskan besarnya tambahan suatu pendapatan nasional sebagai suatu akibat adanya perubahan variabel-variabel dalam perekonomian. Model umum perekonomian sederhana, pada angka pengganda dapat dirumuskan dengan :

$$\boldsymbol{k} = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{MPS}} = \frac{\mathbf{1}}{(\mathbf{1} - \boldsymbol{MPC})}$$

Contoh Soal 2 :

Jika diketahui besarnya suatu konsumsi masyarakat ditunjukkan oleh fungsi C = 20 + 0,8 Y, maka hitunglah beberapa hal berikut :

a. Fungsi tabungan
b. Besarnya konsumsi, jika pendapatan 50 M
c. Besarnya pendapatan BEP
d. Besarnya konsumsi, jika tabungan 30 M
e. Buatlah grafik dari permasalahan di atas.

Penyelesaian :

a. S = Y – C

S = Y – (20 + 0,8Y)

S = Y – 20 – 0,8Y

S = -20 + 0,2Y

Sehingga fungsi tabungan adalah **S = -20 + 0,2Y**

b. Jika Y = 50, maka :

C = 20 + 0,8 Y

C = 20 + 0,8 (50)

C = 60

Sehingga pendapatan menjadi **C = 60 M**

c. Tingkat BEP (Y = C atau S = 0)

Y = 20 + 0,8Y

Y – 0,8 Y = 20

0,2 Y = 20

Y = 100

Atau

S = 0

-20 + 0,2Y= 0

-20 = -0,2Y

Y = 100

Sehingga BEP terjadi apabila **Y = 100 M**

d. Jika S = 30, maka :

S = -20 + 0,2Y

30 = -20 + 0,2Y

30 + 20 = 0,2 Y

50 = 0,2 Y

Y = 250

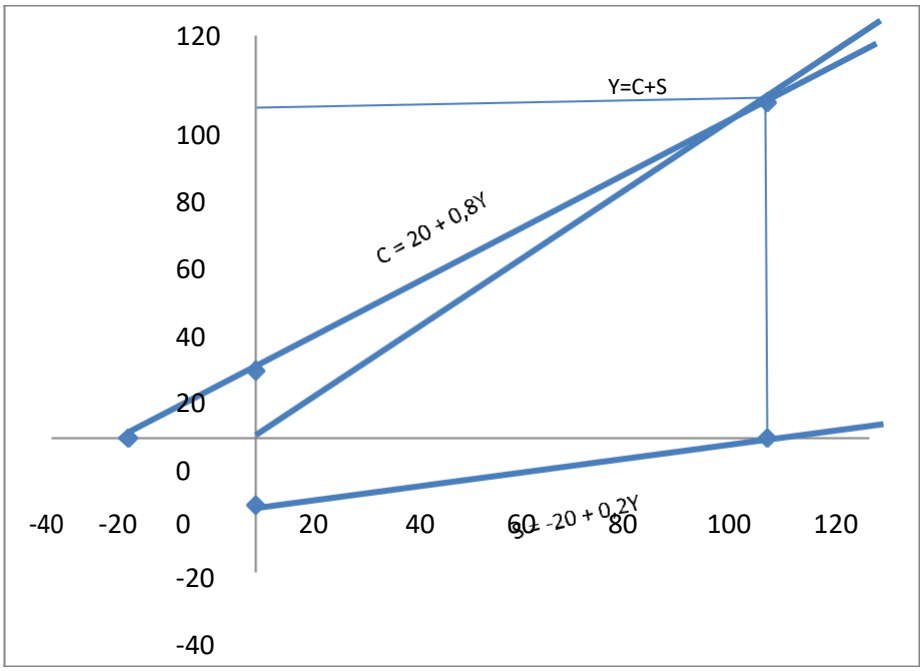
C = Y – S

C = 250 – 30

= 220

Sehingga konsumsi **C = 220 M**

e. Grafik



Gambar 6.2 Grafik aplikasi dari fungsi konsumsi, tabungan dan BEP

5. Fungsi Pendapatan Nasional

Suatu pendapatan nasional merupakan keseluruhan total dari barang maupun jasa selama jangka waktu tertentu yang bisa dihasilkan oleh Negara. Dalam hal adanya suatu pajak (Tx), tetapi tidak ada pembayaran alihan (Tr), maka fungsinya menjadi **Yd = Y – Tx.** Dalam hal adanya suatu pajak (Tx), tetapi ada pembayaran alihan (Tr), maka fungsinya berubah menjadi **Yd = Y + Tr.** Dalam hal ada suatu pajak maupun pembayaran alihan, maka **Yd = Y–Tx + Tr**. Dimana :

Yd merupakan pendapatan disposibel, artinya suatu pendapatan nasional yang secara nyata bisa dibelanjakan oleh masyarakat tertentu, dan tidak termasuk didalamnya pendapatan suatu pemerintah.Pendapatan nasional merupakan konsep keseimbangan nasional yang menyatakan bahwa besarnya pengeluaran

pemerintah agregat (*agregrat expenditur* = AE) sama atau seimbang dengan besarnya pendapatan nasional (Y).

Pendapatan nasional dapat dihitung berdasarkan sektor-sektor yang dimiliki oleh negara tersebut. Adapun pembagian sektor dapat berupa dua sektor, tiga sektor, maupun empat sektor. Yang pertama, untuk perekonomian dua sektor, pendapatan nasional didasarkan atas pengeluaran untuk konsumsi (C) dan investasi (I). Untuk perekonomian tiga sektor ditambah dengan pengeluaran pemerintah (G), dan untuk empat sektor ditambahkan kembali dengan net ekspor (X – M). Adapun rumus-rumus dari sektor yang adalah sebagai berikut :

Perekonomian dua sektor :**AE=C+I**

Perekonomian tiga sektor :**AE=C+I+G**

Perekonomian empat sektor :**AE=C+I+G+(X–M)**

Akibat terjadinya keseimbangan pendapatan nasional, dimana AE = Y, maka konsep rumus di atas bisa berubah menjadi berikut :

Perekonomian dua sektor :**Y =C+I**

Perekonomian tiga sektor :**Y =C+I+G**

Perekonomian empat sektor :**Y =C+I+G+(X–M)**

Dimana :

Y = pendapatan nasional

C = konsumsi, dengan dinyatakan dalam C = a+bY

I = sebuah investasi pemerintah

G = pengeluaran pemerintah

(X-M) = *net ekspor (*ekspor dikurangi impor)

Perekonomian suatu negara dikatakan dapat memiliki surplus anggaran jika besarnya penerimaan pemerintah dari pajak lebih besar dari pengeluaran pemerintah, yang disini harus dalam bentuk *transfer payment* dan *government expendture* (G). Dapat didefinikasikan bahwa :

SURPLUS terjadi apabila Tx > (Tr + G)
DEFISIT terjadi apabila Tx < (Tr + G)

Surplus neraca perdagangan bisa dilihat dari besarnya suatu ekspor (X) dan suatu impor (M) atau dengan kata lain dapat dilihat pada net ekspor. Jika net ekspor bernilai postif berarti terdapat suatu surplus neraca perdagangan dan sebaliknya. Artinya mengandung pengertian bahwa :

SURPLUS terjadi apabila X > M, dan
DEFISIT terjadi apabila X < M

Ada beberapa manfaat dari pendapatan nasional dapat dipaparkan sebagai berikut :

a. Mengetahui suatu perekonomian pada Negara tersebut
b. Mengetahui perkembangan Negara dalam hal perekonomian dari tahun ke tahun
c. Mengetahui perekonomian antar daerah
d. Membandingkan kemajuan ekonomi antar Negara
e. Menjadi sumber informasi bagi pemerintah di Negara tersebut.

Contoh Soal 1:

Suatu perekonomian tertentu memiliki data sebagai berikut (dalam satuan mata uangmiliar rupiah) :

Konsumsi	: C	= 150 + 0,6Yd
Investasi	: I	= 40
Pengeluaran pemerintah	: G	= 60
Pajak	: Tx	= 250 + 0,25Y
Transfer payment	: Tr	= 150
Ekspor	: X	= 50
Impor	: M	= 1-+0,15Y

Tentukan :

a. Tentukan besarnya keseimbangan pendapatan nasional jika negara menganut dua sektor, tiga sektor, dan empat sektor.
b. Berapa nilai konsumsi pada soal a, dan
c. Berapakah besarnya surplus/defisit anggaran dan neraca perdagangan untuk perekonomian empat sektor.

Penyelesaian :

a. Dua sektor Y = C + I, maka :

Y = 150 + 0,6Yd + 40

Y = 150 + 0,6(Y – (250 + 0,25Y) + 150) + 40

Y = 150 + 0,6(0,75Y – 100) + 40

Y = 150 + 0,45y – 60 + 40

Y = 130 + 0,45Y

Y – 0,45Y = 130

0,55Y = 130

Y = 236,4

Sehingga untuk dua sektor, didapat senilai **Y = 236,4 M**

Tiga sektor: Y = C + I + G, maka :

Y = 130 + 0,45Y + 60

Y = 190 + 0,45Y

Y – 0,45Y = 190

0,55Y = 190

Y = 345,5 M

Sehingga untuk tiga sektor, didapat senilai **Y = 345,5 M**

Empat sektor: Y = C + i + G + (X – M), maka :

Y = 190 + 0,45Y + (50 – 10 – 0,15Y0

Y = 190 + 0,45Y + 40 – 0,15Y

Y = 230 + 0,3Y

Y – 0,3Y = 230

0,7Y = 230

Y = 328,6 M

Sehingga untuk empat sektor, didapat senilai **Y = 328,6 M**

b. C = 150 + 0,6Yd, maka :

C = 150 + 0,6(Y – 250 – 0,25Y + 150)

C = 150 + 0,45Y – 60

C = 90 + 0,45Y

Dua sektor menjadi :

C = 90 + 0,45(236,4) = 196,4 M

Tiga sektor menjadi :

C = 90 + 0,45(345,5) = 245,5 M

Empat sektor menjadi :

C = 90 + 0,45(328,6) = 237,9 M

c. Pengeluaran pemerintah: G = 60

Pajak: Tx = 250 + 0,25Y

Transfer payment: Tr = 150

Tx = 250 + 0,25(328,6) = 332,15

Tr + g = 150 + 60 = 210

Karena Tx > (Tr + G) maka terjadi surplus anggaran sebesar 122,15 M

Ekspor = 50

Impor: M = 10 + 0,15Y = 10 + 0,15(328,6) = 59,3

Karena X < M maka terdapat defisit neraca perdagangan sebesar 9,3 M.

C. Soal Latihan/Tugas

1. Diketahui fungsi konsumsi C = 450 jt + 0,9Y jika besarnya pendapatan Rp 150 juta. Tentukan fungsi tabungannya dan besarnya konsumsi!
2. Jika suatu fungsi konsumsi sebagai C = 50 + 0,7Y .Tentukan berpakah fungsi tabungan dan tentukan nilai pendapatan pada tingkat BEP serta gambarkan grafiknya!
3. Diketahui suatu fungsi dalam bentuk C = 40 + 0,3Y. Tentukan fungsi tabungan itu dan besarnya pendapatan pada tingkat BEP!
4. Jika pada saat Negara tidak mempunyai pendapatan, besarnya konsumsi 80 M dan besarnya kecenderungan menabung (MPS) 0,4. Tentukan besarnya pendapatan pada tingkat BEP dan besarnya pendapatan saat tabungan 60 M!

5. Diketahui keseimbangan pendapatan terjadi pada saat Y = 500, dan pada saat Negara tidak mempunyai pendapatan besar konsumsinya adalah 80. Tentukan besarnya tabungan pada saat konsumsi sebesar 100!
6. Diketahui model pendapatan nasional suatu negara seperti tertera dibawahini (dalam miliar rupiah satuan mata uang):

Konsumsi	: C	= 20 + 0,75Yd
Investasi	:I	= 40
Pengeluaran pemerintah	: G	= 50
Ekspor	:X	=50
Impor	:M	= 40

   Tentukan besarnya keseimbangan pendapatan nasional negara tersebut menganut 2 sektor, 3 sektor, maupun 4 sektor!
7. Diketahui fungsi konsumsi C = 40 + 0,75Yd. Transfer pemenerintah (Tr) = 60 dan Pajak (Tx) = 40. Maka hitunglah :
   a. Fungsi konsumsi sebelum ada transfer tetapi sesudah pajak.
   b. Fungsi konsumsi sesudah transfer, sebelum pajak
   c. Fungsi konsumsi sesudah transfer dan sesudah pajak
8. Jika diketahui :

   Fungsi konsumsi C = 30 + 0,6Yd

   Pajak = 40

   Investasi = 50

   Pengeluaran pemerintah = 65

   Transfer pemerintah = 40

   Berdasarkan data tersebut, hitunglah pendapatan nasional 4 sektor dan besarnya konsumsi!

D. Daftar Pustaka

Andi Wijaya dkk. (2014). *Matematika Ekonomi I*. Jakarta: Mitra Wacana Media

Josep B Kalangi.(2011). *Matematika Ekonomi dan Bisnis*. Jakarta: Salemba Empat

Suprian Atmaja S. (2002). *MatematikaEkonomi I*. Bandung: Ghalia Indonesia.

PERTEMUAN 7
BUNGA SEDERHANA & BUNGA MAJEMUK

A. Tujuan Pembelajaran

Dalam pertemuan ini akan dibahas mengenai bunga tunggal dan bunga majemuk, serta diberikan cara perhitungan berdasarkan rumus aljabar yang sesuai dengan topik-topik bahasan pada setiap pokok bahasan.Setelah mempelajari materi pertemuan 7 ini, mahasiswa mampu menghitung konsep bunga sederhana dan bunga majemuk serta mampu membedakan fungsi dari bunga sederhana dan bunga majemuk.

B. Uraian Materi

1. Bunga Sederhana

Suatu konsep dasar mengenai bunga adalah bagaimana mengukur nilai waktu dari uang (*time value of mone).* Konsep ini berarti apabila seseorang memiliki sejumlah uang dan seseroang tersebut mengalokasikan kepada bank, maka jumlah uang yang dimiliki saat ini akan berbeda nilainya dengan uang yang akan dating (nilainya). Apabila seseorang melakukan suatu investasi, dan menerima bunga tiap tahun maka untuk tahun-tahun berikutnya, seseorang tersebut akan menerima sejumlag uang yang sama dari bunga yang diberikan tersebut. Hal ini terjadi karena sejumlah bunga yang diberikan oleh bank terhadap dana yang ditanamkan seseorang tersebut.

Beberapa orang berpendapat bahwa bunga dilihat dari satu sisi memang bisa menjadi pendapatan, tetapi di sisi lain bisa menjadi beban biaya seseorang. Sebagai bank, yang pihak meminjamkan, bunga menjadi pendapatan untuk mereka. Sedangkan sebagai pihak yang berhutang, bunga menjadi beban biaya bagi orang tersebut. Bisa disimpulkan bahwa bunga adalah suatu bentu balas jasa yang dibayarkan bila seseorang menggunakan sejumlah uang tertentu. Artinya jika seseorang meminjam uang di bank, maka seseorang harus membayar bunga kepada bank tersebut. Akan tetapi jika seseorang investasi uang baik berupa deposito atau tabungan di suatu bank, maka bank tersebut yang akan memberikan bunga kepada seseorang tersebut.

Penerapan konsep bunga sederhana disini adalah bentuk dari barisan dan deret aritmatika yang diterapkan dalam bidang ekonomi. Sebagai contoh, apabila ada seseorang menginvestasikan sejumlah uang P rupiah, dengan suku bunga i tahunan, maka pendapatan bunga pada akhir tahun ke-1 adalah Pi. Kemudian jika nilai akumulasi tahun ke-1 adalah senilai dengan P + Pi. Di akhir tahun ke-2, maka menjadi P + P (2i). Akhir tahun ke-3 menjadi P + P (3i), dan seterusnya sampai pada akhir tahun ke – n. Sehingga akumulasi pada akhir tahun ke-n menjadi **P + P (ni).** Dalam hal ini, jumlah uang yang dipinjamkan di bank tertentu, menjadi modal awal atau suatu pinjaman pokok seseorang.

Suatu pendapatan bunga sederhana sering disebut sebagai metode *simple interest.* Artinya bahwa suatu pendapatan didapatkan hanya sebagai modal awal saja, pada setiap akhir periode tertentu, dengan nilai dari pendapatan bunganya yaitu berjumlah tetap di tiap tahun. Suatu pendapatan bunga secara umum, dapat dirumuskan sebagai berikut :

$$\mathbf{I = P\,i\,n}$$

Di atas adalah rumus untuk mencari pendapatan suatu bunga dengan mengalikan jumlah pinjaman poko dengan suku bunga dan lamanya periode waktu tertentu. Kemudian untuk memperoleh modal awal yang di akumulasikan dengan nilai tertentu, di akhir tahun ke-n, dengan simbol (Fn), maka dapat dihitung dengan modal awap suatu pinjaman pokok yaitu (P) dijumlahkan dengan rumus (I) pada pendapatan bunga. Sehingga dapat dirumuskan menjadi berikut ini :

$$\mathbf{Fn = P + I}$$

atau

$$\mathbf{Fn = P + P\,i\,n}$$

$$\mathbf{Fn = P\,(1 + i\,n)}$$

Dimana:

I = Pendapatan bunga

P= Pinjaman pokok awal

i = Sukubunga dalam tahunan

n = waktu dan periode tertentu (tahun)

Fn = Nilai akumulasi (*future value*)

Apabila Fn sebagai nilai akumulasi sudah diketahui, dan tingkat bunga (i) sudah diketahui, serta nilai dari (n) waktu sudah ada, maka rumus P bisa digunakan dengan cara berikut ini :

$$\mathbf{P} = \frac{\mathbf{Fn}}{(\mathbf{1} + \boldsymbol{in})}$$

Dalam transaksi keuangan dan transaksi bisnis, seseorang harus memperkirakan nilai akumulasi sekarang dari suatu nilai yang akan datang dengan membuat strategi perhitung pada jumlah uang tertentu.

Contoh Soal :

a. Berapa nilai akumulasi dimasa yang akan datang dan pendapatan bunga sederhana jika pinjaman pokok awal sebesar Rp. 5.000.000, selama 5 tahun di simpan di sebuah bank dengan sukubunga 12 % tiap tahun!

Penyelesaian:

P = 5.000.000

n = 5 tahun

i = 12 % = 0,12

Ditanyakannilai I(Bunga) dan F_5!

I = P.i.n

I = 5.000.000 (5)(0,12)

= 3.000.000

Jadi pendapatan bunga tersebut adalah Rp 3.000.000

F_n = P + I

F_5 = 5.000.000 + 3.000.000

= 8.000.000

Sehingga dapat disimpulkan bahwa selama 5 tahun, akumulasinya adalah Rp 8.000.000

b. Ariel mempunyai hutang di bank yang setelah 8 bulan besarnya menjadi Rp. 2.280.000. Perhitungan beban bunga berdasarkan sistem bunga sederhana yaitu sebesar 21% per tahun. Tentukan besarnya nilai pokok pinjaman Ariel tersebut!

Penyelesaian:

$F_{2/3}$ = Rp. 2.280.000;

n = 8 bulan menjadi 2/3 tahun;

i = 0,21

Ditanyakan: nilai P!

$$P = \frac{\text{Rp.}2.280.000}{(1+0{,}21\left(\frac{2}{3}\right))}$$

= Rp. 2.000.000

Atau bisa dengan menggunakan kalkulator untuk perhitungan di atas yaitu dengan tekan 2280000

:	(	1	+	0	,	2	1	x	2	:	3	)	=	

c. Setelah 3 tahun, uang di bank menjadi Rp. 7.250.000. Modal awal dari jumlah Rp 5.000.000 yang disimpan si suatu bank ABC dengan suku bunga sederhana. Berapa persenkah besarnya bunga yang dikenakan terhadap modal tersebut?

Penyelesaian:

P = Rp. 5.000.000;

F_3 = Rp. 7.250.000;

N = 3

F_n = P (1 + i n)

6.000.000 = 5.000.000 (1 +3i)

$$1 + 3i = \frac{7.250.000}{5.000.000}$$

1 +3i = 1,45

3i = 1,45 – 1

3i = 0,45

i = 0,45 : 3
= 0,15
= 15%

Jadi bisa disimpulkan bahwa besarnya bunga adalah 15 %.

d. Jika modal awal sebesar Rp 2.000.000, ditabung di bank dengan suku bunga sederhana adalah 15 %. Setelah beberapa tahun, modal awal tersebut sudah mencapai Rp 5.000.000, berapa tahun lama nya modal tersebut mengendap di bank?

Penyelesaian:

P = 2.000.000;

I = 0,15;

F_n = 5.000.000

DItanyakan n ?

F_n = P (1 + i n)

5.000.000 = 2.000.000 (1 + 0,15n)

1 + 0,15n = $\frac{5.000.000}{2.000.000}$

1 + 0,15n = 2,5

0,15n = 2,5 – 1

0,15n = 1,5

n = 1,5 : 0,15

= 10

Jadi lamanya waktu menabung di bank adalah 10 tahun.

2. Bunga Majemuk

Selain model bunga sederhana yang sudah dipaparkan di atas, barisan deret dan aritmatika juga bisa diterapkan dalam bidang ekonomi pada bunga majemuk. Bunga majemuk sering disebut bunga yang berbunga lagi, artinya pada bunga majemuk, bunga yang dihitung akan di akumulasikan dengan bunga awal. Bunga majemuk ini dalam penerapannya bisa di ambil ataupun tidak. Apabila bunga majemuk ini tidak diambil, maka akan ditambahkan dengan modal awal tersebut.

Sehingga bunga awal akan menghasilkan bunga-bunga lainnya pada akhir jangka waktu tertentu.

Bunga majemuk sebenarnya mempunyai manfaat, tidak selalu bunga majemuk ini menjadi beban biaya yang berat untuk seseorang. Hal ini bisa dilihat dari hasil investasi yang dihitung dengan bunga majemuk, berarti seseorang bisa membuat penghasilan lebih besar dari yang diharapkan di awal. Dampak dari kebermanfaatan bunga majemuk ini membuat pihak bank dan lembaga keuangan sering menerapkan konsep bunga majemuk dalam pelayanan dan produk keuangan mereka. Karena keuntungan bunga majemuk ini akan terus meningkat dengan diakumulasikan pada periode-periode berikutnya. Bisa disimpulkan bahwa semakin cepat melakukan sebuah investasi, maka semakin besar pula penghasilan yang akan diperoleh.

Sebagai contoh suatu investasi dari sejumlah P rupiah, pada yingkat bunga i tertentu tiap tahun, maka jumlah pendapatan bunga pada awal tahun ke 1 adalah Pi. Selanjutnya nilai investasi pada akhir tahun pertama akan berubah menjadi rumus berikut ini :

$$\mathbf{P + Pi = P\,(1 + i)}$$

Dari rumus di atas, berlaku hasil perhitungan bahwa P (1 + i) dianggap sebagai suatu modal awal pada tahun kedua, dengan pendapatan bunga majemuk yang diperoleh adalah P (1 + i) i. Sehingga dapat disimpulkan bahwa hasil nilai investasi dari tahun akhir kedua adalah dirumuskan sebagai berikut :

$$\mathbf{P\,(1 + i) + P\,(1 + i)\,i = P + Pi + Pi + Pii = P\,(1 + 2i + i^2) = P\,(1 + i)^2}$$

Selanjutnya hasil dari $P(1+i)^2$ dianggap sebagai modal awal pada tahun ketiga dan pendapatan dari bunga akan diperoleh dengan $P(1+i)^2i$, sebagai akumulasi total investasi tahun ketiga adalah $\mathbf{P(1+ i)^2 + P(1+i)^2i = P(1+i)^2(1+i) = P(1+ i)^3}$, dan demikian seterusnya sampai pada tahun ke-n tertentu. Oleh karena itu, bunga majemuk bisa dirumuskan menjadi :

$$\boxed{F_n = P\,(1+i)^n}$$

Dimana :

F_n= Akumulasi nilai yang akan datang

P = Nilai saat ini

i = Suku bunga tiap tahun

n = Jumlah periode tertentu dalam tahun

Suatu pendapatan bunga dari konsep bunga majemuk adalah dengan meningkatknya jumlah bunga pada setiap periode, ini disebabkan peningkatan modal awal setiap periode awal. Artinya apabila ada suatu pendapatan bunga yang diinvestasikan di awal modal pada setiap awal periode dapat dikatakan sebagai bunga majemuk. Dalam dunia bisnis sehari-hari di lingkungan kita, sebagai contoh pada bank komersil, akan diberlakukan frekuensi pembayaran bunga kepada nasabah tidak hanya satu kali dalam setahun melainkan bisa lebih dari satu kali perlakuan.

Sebagai contoh,Ada pembayaran bunga majemuk yang tidak hanya sekali dipelakukan tiap tahun, melainkan bisa secara semesteran, kuartalan, bunganan bahkan harian. Pada frekuensi pembayaran bunga semacam di atas tersebut, akan disimbolkan dengan (m) kali dalam setahun. Simbol (m) dimaksud adalah jika diberlakukan semesteran, kuartalan, bulanan dan harian, tergantung kondisi yang terjadi dalam penerapannya. Oleh karena ini, maka jumlah akumulasi dalam bunga majemuk akan diberlakukan rumus menjadi :

$$\boxed{F_n = P.\left(1 + \frac{i}{m}\right)^{(n)\,(m)}}$$

Dimana :

F_n = Nilai akumulasi pada tahun ke - n

P = Nilai pokok pinjaman awal

i = Tingkat suku bunga dalam tahun

n = Jumlah tahun atau periode

m = Frekuensi bunga dalam tahun (semester, bulanan, kuartal maupun harian)

Contoh Soal :

1) Bapak Ichang mendepositokan di suatu bank dengan suku bungan 12 % pertahun. Total depositonya adalahRp. 5.000.000 dan bunga yang diterapkan adalah bunga majemuk. Berapa total deposito pada akhir tahun ke – 3 dari bapak Icang? Dan hitunglah pendapatan bunga nya?

   Penyelesaian :

   P = 5.000.000

   I = 12% = 0.12

   n =3 tahun

   Ditanyakan berapa nilai F_3 dan I (Bunga)?

   $F_n = P\ (1+i)^n$

   $F_3 = 5.000.000\ (1+0.12)^3$

   $= 5.000.000(1,12)^3$

   = 7.024.640

   Jadi total uang bapak Ichang senilai Rp. 7.024.640, 00

   Untuk mencari nilai I, maka :

   = 7.024.640 - 5.000.000

   = 2. 024.640

   Bisa disimpulkan bunganya sebesar Rp. 2.024.640, 00

2) Berapakah nilai uang nona Fika di masa yang datang setelah 5 tahun, jika uang yang ditabung senilai Rp 5.000.000, dikenakan tingkat bunga sebesar 12 % tiap tahun. Dan bunga tersebut dimajemukkan sebagai berikut:

   a) Secara semester (m = 2)
   b) Secara kuartal (m = 4)
   c) Secara bulan(m = 12)
   d) Secara harian (m = 365)

   Penyelesaian:

   P = 5.000.000

   i = 12 % = 0,12

   n = 5,

   a) Pembayaran bunga semesteran (m = 2)

   $F_5 = 5.000.000\ (1 + \frac{0,12}{2})^{(5)\ (2)}$

$= 5.000.000(1,06)^{10}$

$= 8.954.238,48$

Jadi uang Fika jika semesteran senilai Rp 8.954.238,48

b) Pembayaran bunga kuartalan (m = 4)

$F_5 = 5.000.000 \left(1 + \frac{0,12}{4} \right)^{(5)\,(4)}$

$= 5.000.000\ (1,03)^{20}$

$= 9.030.556,17$

Jadi uang Fika jika kuartalan senilai Rp 9.030.5556,17

c) Pembayaran bunga bulanan (m = 12)

$F_5 = 5.000.000\left(1 + \frac{0,12}{12} \right)^{(5)\,(12)}$

$= 5.000.000(1,01)^{60}$

$= 9.083.483,49$

Jadi uang Fika jika bulanan senilai Rp 9.083.483,49

d) Pembayaran bunga harian (m = 365)

$F_5 = 5.000.000\ \left(1 + \frac{0,12}{365} \right)^{(5)\,(365)}$

$= 9.109.695,66$

Jadi uang Fika jika harian senilai Rp 9.109.695,66

Untuk mengetahui jumlah uang (nilai uang)yang akan di investasikan pada sekarang ini, supaya mempunyai nilai tertentu dengan jumlah pada akhir tahun ke –n, maka dapat dirumuskan menjadi berikut ini :

$$\boxed{\mathbf{P} = \frac{\boldsymbol{Fn}}{(\mathbf{1}+\boldsymbol{i})^{\boldsymbol{n}}}}$$

Apabila pembayaran bunga majemuknya akandilakukan lebih dari sekali dalam satu tahun, maka untuk mencari pinjaman pokok awal dari nilai sekarang, dapat digunakan rumus sebagai berikut ini :

$$P = \frac{Fn}{(1+\frac{i}{m})^{(n).(m)}}$$

3) Nyonya Rahma merencanakan uang tabungannya di bank pada tahun ke lima dengan jumlah Rp 15.000.000, dan bentuk bunga yang dimajemukkan. Tingkat bunga ternyata berlaku 15% tiap tahun. Berapa nominal uang yang harus ditabungkan nyonya Rahma saat ini?

   Penyelesaian:

   F_3 = 15.000.000

   i = 15 % = 0,15

   n = 5 tahun

   P $= \frac{Fn}{(1+i)^n}$

   P $= \frac{Rp.15.000.000}{(1+0,15)^5}$

   = 7.457.651,03

   Jadi uang yang ditabung nyonya Rahma sebesar Rp. 7.457.651,03

   Cara lain dengan menggunakan kalkulator untuk perhitungan di atas dengan tekan 15000000 [:] [(] [1] [+] [0] [,] [1] [5] [)] [y^x] [5] [=]

4) Pak Rudy seorang pengusaha dalam 5 tahun ini akan mendapatkan dana sebesar Rp. 20.000.000. Apabila tingkat bunga yang dikenakanuntuk pak Rudi adalah 12% tiap tahun, bunga tersebut diterapkansecara kuartalan, berapa nomila dana yang harus ditabung bapak Rudy saat ini?

   Penyelesaian:

   F_5 = 20.000.000

   i = 12 % = 0,12

   n = 5

   m = 4

P $= \frac{Fn}{(1+\frac{i}{m})^{(n).(m)}}$

P $= \frac{\text{Rp.20.000.000}}{(1+\frac{0,12}{4})^{(5).(4)}}$

$= \frac{\text{Rp.20.000.000}}{(1,03)^{20}}$

= Rp. 11.073.515,08

Jadi uang pak Rudy adalah Rp. 11.073.515,08

Atau bisa cara menggunakan kalkulator untuk perhitungan di atas dengan tekan 20000000 [:] [(] [1] [+] [0] [,] [1] [2] [:] [4] [)] [y^x]

[2] [0] [=]

5) Modal senilaiRp 2.000.000 disimpan di bank ABC dengandikenakanbunga majemuk. Setelah 3 tahun, kemudian modal uang tersebut naik menjadi Rp. 2.809.856. Berapa persenkah besar bunga majemuk yang dikenakan terhadap modal tersebut?

Penyelesaian:

P = Rp. 2.000.000;

F_3 = Rp. 2.809.856;

n = 3

F_n = $P.(1+i)^n$

2.809.856 = $2.000.000 .(1 + i)^3$

$(1 + i)^3$ $= \frac{\text{Rp.2.809.856}}{\text{Rp.2.000.000}}$

$(1 + i)^3$ = 1,405

1 + i $= \sqrt[3]{1,405}$

1 + i = 1,12

I = 1,12 – 1

I = 0,12

= 12%

Jadi bunga majemuk yang dikenakan adalah 12 %.

Atau dengan cara menghitung $\sqrt[3]{1{,}405}$menggunakan kalkulator scientific:

- **Tekan 1,405** [shift] [√] [=]
- **1** [2ndf] [X^3] [=]

6) Modal uang senilaiRp 5.000.000 setelah ditabung dengan dikenakan tingkat bunga adalah 15% tiap tahun, dimajemukkan secara semesteran akan menjadi Rp. 21.239.255. Berapa tahun lama modal tersebut ditabungnya?

Penyelesaian:

P = 5.000.000

I = 15% = 0,15

F_n = Rp. 21.239.255

m =2

$F_n = P\left(1 + \frac{i}{m}\right)^{(n)(m)}$

$21.239.256 = 5.000.000\left(1 + \frac{0{,}15}{2}\right)^{2n}$

$\left(1 + \frac{0{,}15}{2}\right)^{2n} = \frac{\text{Rp.}21.239.255}{\text{Rp.}5.000.000}$

$\left(1 + \frac{0{,}15}{2}\right)^{2n} = 4{,}25$

$1{,}075^{2n} = 4{,}25$

$2n \cdot \log 1{,}075 = \log 4{,}25$

$2n = \frac{\log 4{,}25}{\log 1{,}075}$

$2n = \frac{0{,}63}{0{,}03}$

2n = 20

n = 10

Jadi modal tersebut ditabung selama 10 tahun.

3. Faktor yang Mempengaruhi Suku Bunga

Suatu keuntungan bisa menjadi hal yang menggairahkan, terlebih dalam keuntungan suku bunga. Keuntungan yang akan didapatkan oleh suatu bank bisa menjadi sangat maksimal apabila pihak manajemen bank pandai dalam menentukan kebijakan. Kebijakan yang dimaksud adalah dalam menentukan besar kecilnya dari komponen suku bunga yang akan diterapkan dalam perusahaan tersebut.

Jika seseorang ceroboh dan tidak berpikir panjang dalam menentukan kebijakan tersebut, maka bank tersebut tidak menutup kemungkinan akan merugi. Adapun hal-hal yang dapat mempengaruhi suku bunga, bisa dijabarkan sebagai berikut ini :

a. Kebutuhan Dana, artinya apabila suatu bank kekurangan dana, tetapi posisi lain permohonan pinjaman sedang meningkat, maka bank tersebut harus melakukan kenaikan pada suku bunga simpanan. Faktor kebutuhan dana demikian lebih dikhususkan pada simpanan dana untuk memenuhi seberapa besar kebutuhan dana yang diinginkan nasabah. Apabila dana yang tersimpan sangat banyak, dan permohonan pinjaman sedikit, maka demikian tersebut sebagai bunga pinjaman akan menjadi turun. Hal ini juga bergantung pada suku bunga pinjaman, yaitu dengan meningkatnya suku bunga pinjaman tersebut.
b. Target Laba, artinya target yang menekankan pada suku bunga pinjaman. Hal ini terjadi jika keuntungan yang diinginkan sangat besar, tetapi bunga pinjaman juga besar, ataupun sebaliknya. Target laba menjadi salah satu komponen yang bisa menentukan besar kecilnya suku pinjaman. Untuk menghadapi pesaing yang hebat, maka target laba dipangsa pasar, suku bunga dapat diturunkan seminimal mungkin.
c. Kualitas Jaminan, artinya disini berhubungan dengan bunga itu sendiri. Semakin mudah pinjaman di cairkan, maka akan semakin rendah bunga kredit yang akan dibebankan, berlaku sebaliknya.
d. Kebijakan Pemerintah, artinya untuk menentukan bunga simpanan atau bunga pinjaman, maka bank tidak boleh melebihi batasan, batasan disini adalah batasan yang ditetapkan oleh pemerintah terkait bunga. Dalam hal ini ada

beberapa batasan maksimal dan minimal dalam menentukan suku bunga, tujuannya adalah agar persaingan bank bisa berjalan dengan sehat.

e. Reputasi Perusahaan, artinya perusahaan juga harus menjaga nama baiknya dalam persaingan menentukan suku bunga. Perusahaan yang bonafit akan memperoleh kredit yang bisa menentukan suku bunga, karena biasanya jika perusahaan tersebut sudah bonafit akan meminimalisis resiko kredit macetnya, demikian berlaku diperusahaan pesaingnya.
f. Jangka Waktu, artinya dalam hal ini jangka waktu sangat berguna dalam menentukan bunga simpanan atau pinjaman. Jika jangka panjang waktu pinjaman berlaku, maka tingkat bunga yang tinggi akan mudah diperoleh.
g. Produk yang Kompetitif, artinya produk yang dipasarkan akan sangat laku dipasaran. Untuk produk yang kompetitif, bunga kredit yang diberikan akan lebih rendah dibandingkan dengan produk yang lain. Ini disebabkan karena perputaran produknya akan lebih tinggi, sehingga pembayaran suku bunga akan lancer dan meningkat.
h. Persaingan Kompetitor, artinya dalam kondisi tidak stabil maka kekurangan dana sementara dalam suatu bank, akan meningkatkan persaingan dalam merebutkan dana simpanan. Untuk mengantisipasinya, bank harus mampu bersaing ketat dalam merebutkan dana nasabah.
i. Hubungan yang Baik, artinya dalam hal ini bank bisa menggolongkan nasabahnya, dimana nasabah utama dan nasabah biasa dalam kebijakannya. Bunga pinjaman biasanya dikaitkan dengan factor kepercayaan dengan siapa yang meminjam, atau lembaga terpercaya mapun tidak.

C. Soal Latihan/Tugas

1. Pak Sofyan telah menyimpan uang deposito senilai Rp 9.700.000 di bank ABC. Suku bunga yang dikenakan adalah bunga sederhana, yaitu 12 % tiap tahun. Jatuh tempo simpanan uang tersebut adalah 8 bulan. Hitunglah besar uang pak Sofyan setelah jatuh tempo tersebut!
2. Modal untuk usaha senilai Rp 9.000.000, yang telah disimpan di bank, dikenakan bunga sederhana yaitu 10 % tiap tahun. Berapa tahun lamanya jika modal tersebut berubah menjadi Rp 12.500.000!

3. Seorang pengusaha membutuhkan modal tambahan, dia meminjam uang di bank sebesar Rp 10.000.000, dan harus lunas sampai 8 bulan dengan berubah menjadi Rp 18.275.000. Berapa suku bunga sederhana dari pinjaman pengusaha tersebut?
4. Hutang Ariel setelah 7 bulan naik menjadi Rp 2.500.000. Dengan suku bunga 10 % per tahun, maka hitunglah uang tunai dari nona Ariel tersebut!
5. Jika modal awal adalah Rp 300.000, kemudian akan dibayarkan selama 8 tahun, dengan bunga majemuk 4 % secara kuartalan, hitunglah nilai tunai modal tersebut di atas!
6. Rini meminjam uang di bank ABC selama 4 tahun dengan nilai Rp 4.000.000. Kemudian Rini mengembalikan uangnya dengan jumlah Rp 5.600.000, berapa persen suku bunga yang dibebankan pada Rini? Hitunglah!
7. Jika modal senilai Rp 2.000.000 ditabung di bank ABC selama 6 tahun, mendapatkan bunga majemuk 6 % tiap tahun. Berapakah akumulasi modal tersebut, jika suku bunga dimajemukkan secara semesteran dan kuartalan!
8. Dina telah mendepositkan uang dengan jumlah Rp 700.000 di bank ABC. Bank tersebut mengenakan bunga 15 % tiap tahun, dan akan dibayarkan tiap 6 bulan secara majemuk. Supaya Dina menerima uang Rp 1.200.000 di akhir jangka waktu tertentu, hitunglah harus berapa tahun Dina mendopositokan uangnya di bank ABC?
9. Sarah menerima uang dari bank sebesar Rp 50.000.000. Modal tersebut sudah ditabung selama 5 tahun. Jika suku bunga yang dikenakan adalah 12 % tiap tahun, dan sitem pembayaran dilakukan tiap 6 bulan sekali dengan bunga majemuk. Hitunglah besaran modal Sarah pada awal tahun?
10. Jika Rafael pada jangka tertentu menerima uang Rp 5.250.000. Rafael pada awal mempunyai modal Rp 2.000.000 yang ditabung di bank ABC dengan suku Bungan 10 % dikenakan secara majemuk kuartalan. Hitunglah selama berapa tahun Rafael mendepositokan uangnya selama ini!
11. Jika Gigih meminjam uang di bank ABC senilai Rp 2.000.000, dan setelah 4 tahun Gigih harus mengembalikkan dengan nilai Rp 3.000.0000, hitung berapa persen suku bunga majemuk yang dikenakan pada Gigih dalam peminjaman di bank ABC tersebut!

12. Jodi menerima uang dari bank sebesar Rp 60.000.000. Modal tersebut sudah ditabung selama 7 tahun. Jika suku bunga yang dikenakan adalah 10 % tiap tahun, dan sitem pembayaran dilakukan tiap 4 bulan sekali dengan bunga majemuk. Hitunglah besaran modal Jodi pada awal tahun?

D. Daftar Pustaka

Andi Wijaya dkk. (2014). *Matematika Ekonomi I*. Jakarta: Mitra Wacana Media.

Josep Bintang Kalangi. (2011). *Matematika Ekonomi dan Bisnis*. Jakarta: Salemba Empat.

PERTEMUAN 8
ANUITAS

A. Tujuan Pembelajaran

Pada materi pertemuan 8 ini, akan dijelaskan mengenai metode bunga anuitas *future value* dan anuitas *present value.* Setelah mempelajari materi ini, mahasiswa mampu menghitung dengan konsep Anuitas Nilai Sekarang dan konsep Anuitas Nilai Akan Datang.

B. Uraian Materi

Anuitas berasal dari kata *annuity* yang dapat didefinisikan sebagai suatu rangkaian pembayaran atau bisa dikatakan sebagai penerimaan tetap dalam jumlah tertentu, dalam hal ini dilakukan secara berkala dan dalam jangka waktu tertentu. *Annuity*awalnya berarti pembayaran *annual* (tahunan), tetapi dengan seiring berjalannya waktu, anuitas dianggap sebagai pembayaran yang akan dilakukan di interval waktu yang lain. Dalam hal ini adalah pembayaran bulanan, tiga bulan, enam bulan dan seterusnya.

Anuitas dalam hal ini bukan sesuatu yang baru lagi dalam dunia ekonomi di Negara ini. Sebagai contoh ada tetangga yang menyewa rumah, atau orang tua yang membelikan motor untuk anaknya secara kredit, atau jumlah tabungan kita di bank yang setiap bulan dikenakan bunga, maka hal demikian tersebut adalah contoh nyata dari penerapan anuitas itu sendiri.

1. Konsep Anuitas Nilai Sekarang

Banyak orang mengatakan bahwa jumlah uang saat ini akan lebih berharga dari pada besok dan masa yang akan datang. Hal ini dapat diartikan bahwa nilai uang yang dimiliki saat ini, nilainya akan berbeda dengan nilai yang akan datang atau beberapa tahun yang akan datang. Misalkan seseorang lebih memilih mendapatkan uang Rp 10.000.000 sekarang, dibanding uang yang sama dibeberpa tahun mendatang. Artinya nilai waktu uang menjadi sangat penting dalam materi yang akan kita bahas dalam bab ini.

Anuitas menjadi bagian penting dalam urusan ekonomi peminjaman atau penerimaan uang di bank. Anuitas perlu dipelajari sebagai bentuk pemahaman kita dalam menerapkan dunia investasi kepada seseorang. Anuitas sering kali kita lihat dalam lingkungan kita, tetapi masih ada beberapa orang yang tidak paham mengenai konsep tersebut. Oleh karena itu kita akan membahas konsep anuitas, perhitungannya dalam dunia bank pada pertemuan kali ini.

Konsep sentral dalam urusan keuangan menjadi terpusat pada nilai waktu uang. Banyak orang memperdebatkan mengenai keputusan nilai waktu uang, dalam hal ini pemahaman terkait hal tersebut menjadi sangat penting. Dalam memutuskan bisnis, dibutuhkan biaya modal yang dapat dianalisis dengan tepat dalam keputusan investasi masa depan. Alternatif-alternatif ini akan berkaitan dengan keputusan pengambilan modal dana maupun konsep keuangan lainnya, yang berkaitan dengan konsep nilai waktu dari dana tersebut.

Anuitas disini dipekenalkan sebagai rangkaian pembayaran atau penerimaan sejumlah nilai uang yang umumnya sama besar dari jangka watu yang sama pada setiap pembayaran atau penerimaan. Sebagai contoh, penerapan dalam pembayaran bunga pinjaman di bank, penggunaan bunga obligasi, bunga deposito, cicilan mobil, cicilan motor atau cicilan KPR rumah dan sebagainya. Anuitas ini adalah serapan dari konsep bunga majemuk yaitu konsep bunga yang berbunga lagi.

Persamaan umum dalam konsep anuitas, biasanya yang digunakan adalah dua macam, yaitu anuitas pada saat nilai sekarang PV (*present value)* dan FV (*future value)* konsep niai yang akan datang. PV berperan dalam besarnya jumlah nilai uang di awal periode tertentu dengan memperhitungkan suku bunga tertentu dari jumlah uang yang dibayarkan atau diterima pada periode tertentu. Untuk FV yaitu jumlah nilai yang terakumulasi dan akan diterima di masa yang akan datang, sebagai hasil investasi yang telah dilakukan pada masa saat ini. PV dan Fv adalah dua hal yang akan kita bahas mengenai penerapan rumusnya dalam pertemuan ini.

PV bisa digunakan dalam pembayaran cicilan KPR rumah, besar kecilnya sewa gedung untuk usaha, besar kecilnya suku bunga majemuk, dan lamanya periode waktu yang dibutuhkan dalam peminjaman uang, dan pokok nilai saat ini

sebagai rangkaian pembayaran di masa yang akan datang serta saldo pinjaman pada saat tertentu.

Sedangkan untuk FV sendiri adalah digunakan untuk mencari nilai akumulasi akhir dari suatu tabungan atau pinjaman di waktu terttentu. FV juga bisa digunakan dalam menentukan lamanya waktu yang diperlukan dalam mencapai jumlah tabungan yang kita ingingkan. Serta FV juga bisa digunakan untuk menentukan besarnya tabungan yang harus dilakukan pada tiap periode untuk bisa menghasilkan jumlah tertentu.

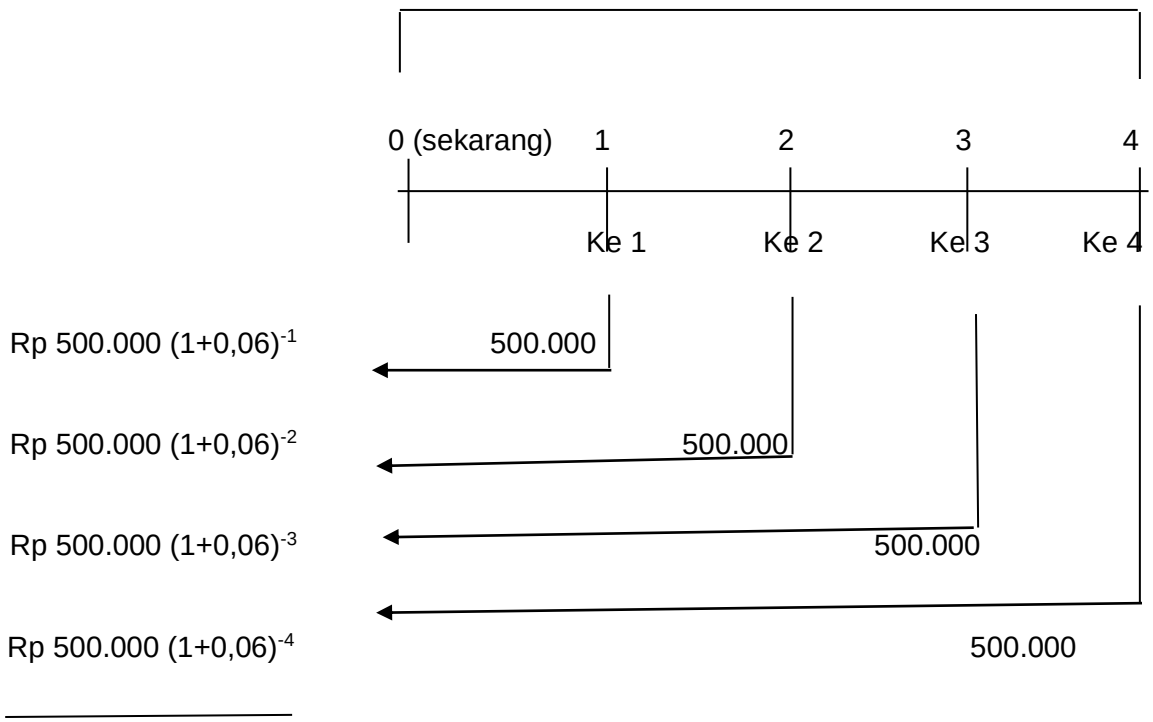
Konsep anuitas akan dijabarkan menjadi dua, yaitu PV dan FV yang akan dijelaskan berikut ini :

a. Present Value

Perhitungan PV atau nilai saat ini(present value) dimaksudkan untuk mengetahui nilai pada saat ini dari sejumlah uang yang dibayarkan atau diterima dalam interval tertentu selama periode waktu yang telah ditentukan. Perhatikan perhitungan berikut ini dalam menghitung nilai sekarang dengan menggunakan bunga majemuk yang telah dipelajari pada materi sebelumnya.

Perhatikan kasus berikut ini sebagai tahap awal penjabaran dari rumus PV yang akan menjadi focus kita untuk penerapan ke soal-soal yang lebih kompleks.

Berapakah PV dari sejumlah uang Rp 500.000, yang akan diterima setiap 3 bulan selama satu tahun dengan suku bunga sebesar 2% tiap bulan! Penyelesaiannya sebagai berikut :



Rp. 1.039.531,684

Berdasarkan kasus di atas, maka penerapannya rumus mengenai persamaan PV, bisa dijabarkan sebagai berikut :

$$\boldsymbol{PV = A.\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}}$$

Dimana :

PV = Nilai saat ini (*present value*)

i = Suku bunga dalam tahun

n = Jumlah periode dalam tahun

A = Anuitas atau pembayaran per periode

Contoh Soal :

1) Berapakan nilai dari PV jika uang senilai Rp 1.100.000, 00, diterima setiap tahun. Dan selama 5 tahun dikenakan tingkat bunga 15 % per tahun!

   Penyelesaian :

   i = 15 % = 0,15

   n = 5 tahun

   A = 1.100.000

   $$PV = \frac{(1 - (1 + 0{,}15)^{-5})}{0{,}15} \times 1.100.000$$

   PV = 3,352155098 X 1.100.000

   PV = 3.687.370

   Jadi PV dalam kasus di atas adalah Rp 3.687.370, 00.

2) Jika diketahui angsuran sebesar Rp 2.000.000,00, selama 2 tahun, dan dikenakan suku bunga 10 % tiap tahun, maka hitunglah nilai sekarang!

   Penyelesaian :

   A = 2.000.000

   n = 2 tahun

   i = 0,1

   $$PV = \frac{(1 - (1 + 0{,}1)^{-2})}{0{,}1} \times 2.000.000$$

   PV = 1,73553719X 2.000.000

   PV = 3.471.074,38

   Jadi nilai sekarang diperoleh sebesar Rp 3.471.074,38

b. Besar Cicilan (Anuitas)

Dari persamaan PV yang sudah dipaparkan di atas, maka nilai anuitas juga bisa dicari sebagai pembeyaran cicilan tertentu. Adapun rumus yang sudah diturunkan untuk mencari rumus angsuran atau cicilan adalah sebagai berikut:

$$A = \frac{PV}{\dfrac{1 - (1 + i)^{-n}}{i}}$$

Contoh Soal :

1) Ariel telah meminjam uang dengan nilai yang cukup besar yaitu Rp 20.000.000, 00, dan dikenakan suku bunga yang tinggi pula, yaitu 15 % per tahun. Jika pinjaman tersebut harus lunas dalam jangka 36 kali cicilan bulanan, berapakah besarnya cicilan yang harus dibayar setiap bulan oleh Ariel?

   Penyelesaian :

   PV = 20.000.000

   n = 36 bulan

   i = 15 % / 12 = 0,0125

$$A = \frac{PV}{\dfrac{1 - (1 + i)\ -n}{i}}$$

$$A = \frac{20.000.000}{\dfrac{1 - (1 + 0{,}0125)^{-36}}{0{,}0125}} = \frac{20.000.000}{28{,}84726737}$$

   A = 693.306,5702

   Jadi besarnya angsuran per bulan yang dibayarkan Ariel adalah Rp 693.306,5702

2) John akan mengangsur rumah seharga $220.000 selama 5 tahun dengan tingkat bunga majemuk yang berlaku adalah sebesar 10% tanpa uang muka. Berapakah angsuran per tahun yang harus dibayarkan John dan buatlah tabel angsurannya!

Penyelesaian :

PV = $220.000

N = 5

I = 10% = 0,1

$$A = \frac{220.000}{\dfrac{(1-(1+0,1)^{-5})}{0,1}} = \frac{220.000}{3,79}$$

A = 58.047

Jadi yang harus di angsur John adalah $ 58.047

Tabel 8.1: Tabel Angsuran

Tahun ke-a	Angsuran b	Bunga 10% C=10%.e	Cicilan Pokok d=b - c	Saldo Pokok
0	-	-	-	$ 220.000
1	$ 58.047	$ 22.000	$ 36.047	$ 183.953
2	$ 58.047	$ 18.395,3	$ 39.651,7	$ 144.301,3
3	$ 58.047	$ 14.430	$ 43.617	$ 100.683
4	$ 58.047	$ 10.068	$ 47.979	$ 52.704
5	$ 58.047	$ 5.270	$ 52.704	0

Di atas adalah contoh cara menghitung bunga anuitas. Sebelum menghitung semua, pastikan sudah menghitung besaran bunga seperti yang dipaparkan di atas. Selain itu pastikan akan jumlah angsuran selalu sama setiap tahunnya, sehingga terlihat pokok angsuran semakin membesar, sedangkan bunga pinjaman semakin mengecil tiap tahunnya.

3) Jika diketahui Natasha menabung selama 18 kali cicilan, dikenakan suku bunga 12 % tiap tahun, berapa cicilan Natasha dengan jumlah dana atau uang sebesar 500.000.000 untuk membeli rumah dengan uang muka 100.000.000?

Penyelesaian :

PV = 400.000.000

i = 12 % / 12 = 1%

n = 18 bulan

Ditanyakan A ?

$$A = \frac{PV}{\frac{(1 - (1 + i)^{-n})}{i}}$$

$$A = \frac{400.000.000}{\frac{1 - (1 + 0,01)^{-18})}{0,01}}$$

A = 24.392.819, 16

Jadi cicilan yang harus dibayarkan oleh Natasha adalah Rp. 24.392.819, 16

2. Konsep Anuitas Nilai Akan Datang

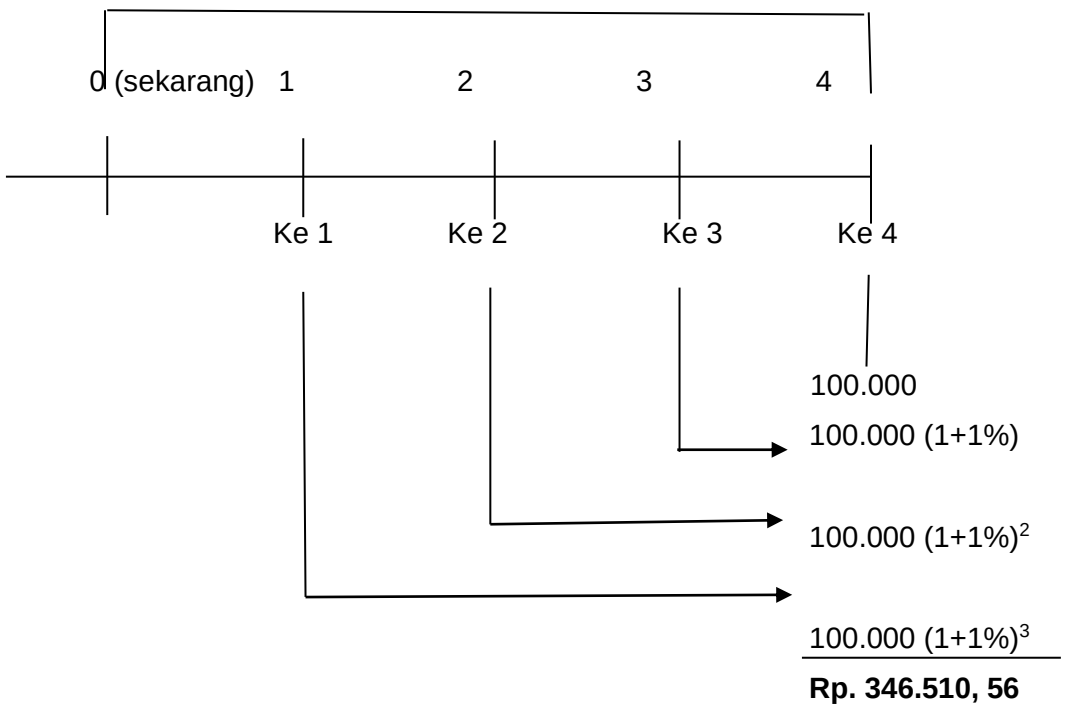
Nilai pada masa datang (*future value*) atau FV merupakan suatu nilai uang yang akan diterima oeh seseorang di masa yang datang, dengan jumlah modal dan suku bunga tertentu yang sudah ditanamkan pada masa saat ini. FV sangat berkaitan erat dengan PV yang sudah kita bahas sebelumnya. Fv ini dapat digunakan sebagai perhitungan nilai investasi pada masa datang, dengan didasarkan pada suku bunga tertentu, dan angsuran yang tetap selama periode waktu tertentu pula.

Fv ini bisa menjadi sebuah investasi bagi pengusana bisnis dalam menjalankan bisnisnya. Seorang pengusaha harus mampu memahami dan

mengetahu cara perhitungan dari FV itu sendiri, supaya dalam bersaing akan mendapatkan keuntungan yang lebih nantinya. Perhatikan contoh kasus berikut ini adalah penerapan dari konsep anuitas untuk nilai yang akan datang :

Jika pembayaran senilai Rp 100.000 tiap tiga bulan selama satu tahun, hitunglah nilai yang akan datang jika suku bunga adalah 4 % pertahun.

Penyelesaian :



Dari kasus di atas, maka untuk persamaan rumus FV dapat dijabarkan sebagai berikut :

$$FV = A. \frac{\{(1+i)^n - 1\}}{i}$$

Dimana :

FV = Nilai akumulasi yang akan datang

A = Anuitas

i = Tingkat bunga

n = Periode waktu tertentu dalam tahun

Contoh Soal :

1) Berapakah nilai FV dari tabungan yang bermula sebesar Rp 100.000,00, yang disetorkan setiap bulan selama 3 tahun, jika diketahui tingkat bunga adalah 12 % tiap tahun, dan dihitung per bulan!

   Penyelesaian :

   n = 3 X 12 = 36

   i = 12 % / 12 = 0,01

   A = 100.000

$$FV = A \frac{\{(1+i)^n - 1\}}{i}$$

$$FV = 100.000 \frac{\{(1+0,01)^{36} - 1\}}{0,01}$$

   FV = 43,0768783 X 100.000

   = 4.307.687,83

   Jadi FV per bulannya adalah Rp 4.307.687,83

2) Jika diketahui cicilan senilai Rp 4.000.000 setiap bulan, dengan tingkat bunga 10 % per tahun, dengan lamanya waktu 4 tahun, hitung nilai yang akan dating dari cicilan tersebut!

   Penyelesaian :

   A = 4.000.000

   n = 4 x 12 = 48

   i = 0,1

$$FV = A \frac{\{(1+i)^n - 1\}}{i}$$

$$FV = 4.000.000. \frac{\{(1+0,1)^{48} - 1\}}{0,1}$$

   FV = 4.000.000 x 960,1723378

FV = 3.840.689.351

Jadi nilai yang akan datang sebesar Rp 3.840.689.351

3. Jumlah Periode Tabungan

Berdasaekan rumus yang sudah dijabarkan di atas, maka jumlah periode tabungan juga bisa dijabarkan menjadi berikut ini :

$$FV = \frac{\{(1+i)^n - 1\}}{i} A$$

$$\frac{FV}{A} = \frac{\{(1+i)^n - 1\}}{i}$$

$$\frac{FV \cdot i}{A} = (1+i)^n - 1$$

$$1 + \frac{FV \cdot i}{A} = (1+i)^n$$

$$\log\left(1 + \frac{FV \cdot i}{A}\right) = n \log(1+i)$$

$$\mathbf{n = \frac{\log\left(1 + \frac{FV \cdot i}{A}\right)}{\log(1+i)}}$$

Contoh Soal :

1) Bung Slamet mempunyai rencana untuk menabungkan uangnya sebesar Rp 500.000,00, setiap bulan untuk dapat memperoleh uang sebesar Rp 20.000.000,-. Jika tingkat bunga tabungan adalah 12 % p.a dan dihitung bulanan, berapa lama dia harus menunggu?

   Penyelesaian :

   FV = 20.000.000

   A = 500.000

   i = 12%/12 = 0,01

$$n = \frac{\text{Log}\left(1 + \frac{FV.\ i}{A\ (1 + i)}\right)}{\text{Log}\ (1 + i)}$$

$$n = \frac{\text{Log}\left(1 + \frac{20.000.000 X\ 0.01}{500.000\ X\ 1,01}\right)}{\text{Log}\ (1 + 0,01)}$$

$$n = \frac{\text{Log}\left(1 + \frac{200.000}{505.000}\right)}{\text{Log}\ (1, 01)}$$

$$n = \frac{\text{Log}\ (1\ ,396039604)}{\text{Log}\ 1,01}$$

   n = 33,53

   n = 34

   Jadi pak Slamet menunggu dalam waktu 34 bulan.

2) Fika memerlukan uang sebesar Rp 25.000.000 untuk liburan, dia berencana menabung uangnya di bank ABC senilai Rp 2.000.000,00. Jika tingkat bunga yang dikenakan adalah 10 %, maka berapa bulan yang diperlukan Fika untuk liburannya?

Penyelesaian :

FV = 25.000.000

A = 2.000.000

i = 10 % / 12 = 0,83 %

Ditanyakan n ?

$$n = \frac{\text{Log}\left(1 + \frac{FV.\ i}{A\ (1 + i)}\right)}{\text{Log}\ (1 + i)}$$

$$n = \frac{\text{Log}\left(1 + \frac{25.000.000 \text{ X } 0.0083}{2.000.000 \text{ X } 1{,}0083}\right)}{\text{Log}\ (1 + 0{,}0083)}$$

$$n = \frac{\text{Log}\left(1 + \frac{207.500}{2.016.600}\right)}{\text{Log}\ (1{,}0083)}$$

$$n = \frac{\text{Log}\ (1{,}104125)}{\text{Log}\ 1{,}00083}$$

n = 11,94

n = 12

Jadi Fika menunggu dalam waktu 12 bulan.

Meski terkesan seperti bunga tetap, namun sebenarnya adalah bunga majemuk yaitu angsuran setiap bulan sama, bunga anuitas yang merupakan pengembangan dari bunga majemuk memiliki kelebihan dan kekurangan yang bakal diketahui kedua belah pihak dalam pinjam-meminjam, terutama nasabah.

Adapun beberapa kelebihan dari penerapan anuitasnya ini adalah sebagai berikut :

a. Cicilan untuk bulanan akan dibayarkan tetap, sehingga tidak mempengaruhi arus kas.
b. Bunga dihitung secara jelas yaitu dari sisa pokok yang belum dibayar.
c. Tidak merepotkan bagi peminjam yang harus terus menghitung sisa pokok pinjaman seperti dalam pinjaman dengan bunga majemuk.

Sedangkan kekurangan dari penerapan anuitas ini adalah :

a. Penghitungan rumit karena lebih sulit dihitung manual sehingga disarankan menggunakan *software*.
b. Walaupun jumlah cicilan sama setiap bulannya, yang kita bayarkan atau dilunasi lebih dulu adalah bunga pinjaman. Sehingga, pokok pinjaman yang dibayarkan semakin besar hingga akhir masa pengembalian pinjaman.

Jika ingin meminjam dan ditawarkan penggunaan bunga anuitas, sebaiknya pertimbangkan dua sisi yaitu kelebihan dan kekurangannya.

C. Soal Latihan/Tugas

1. Seseorang pengusaha kecil meminjam di bank dengan dikenakan bunga 18 % per tahun. Dan dia dapat melunasi hutang tersebut selama 12 kali cicilan, dengan masing-masing Rp 8.000.000 per tahun. Hitunglah berapa besarnya pinjaman awal pengusaha kecil tersebut?
2. Berapa penghasilan bu Aini yang diterima setiap tahun jika beliau menabung selama 20 tahun, dan dikenakan tingkat bunga 8 % setiap tahunnya. Bu Aii mendapatkan setiap tahunnya sebesar Rp 100.000.000.
3. Bapak Yusuf meminjam uang di bank ABC dengan nilai yang cukup besar yaitu Rp 10.000.000. Bapak Yusuf dikenakan bunga sebesar 12 % tiap tahun. Jika pinjaman

beliau akan dilunasi selama 24 kali cicilan setiap bulannya, maka berapakah cicilan dari bapak Yusuf tersebut?

4. Berapa nilai akumulasi dari jumlah uang Rp 500.000.000, dengan diinvestasikan tiap kuartal dalam setahun selama 6 tahun. Dengan suku bunga 6 % dimajemukkan!
5. Hitunglah FV jika Ariel menabung di awal dengan jumlah Rp 400.000.000, dengan suku bunga 12 & per tahun. Tabungan tersebut sudah berlangsung selama 5 tahun.
6. Katika ingin membeli sebuah laptop seharga Rp 15.000.000. Untuk membeli laptop tersebut ia harus memutuskan untuk menabung.Kartika hanya mampu mebnabung sebesar Rp 2.000.000, setiap bulannya. Jika tingkat suku bunga bank adalah 3,25% p.a. Berapa lama Kartika harus menabung sampai tabungannya cukup untuk membeli laptop tersebut?
7. Sepasang pengantin akan memberik KPR rumah dengan kredit. Harga rumah KPR tersebut adalah Rp 350.000.000. Uang muka sudah disetorkan dengan 10 % dari harga total tersebut. Jika pengantin baru tersebut dikenakan bungan 15 % untuk sisanya, dan ingin melunasi selama 60 bulan. Angsuran yang diterima oleh sepasang pengantin tersebut perbulannya dikenakan berapa rupiah?
8. Ibu Sindy dalam menyiapkan masa pensiunnya, beliau menyimpan uang per bulan di bank ABC selama 10 tahun. Dengan menabung per bulannya adalah Rp 500.000. Berapa nilai uang ibu Sindy di masa yang akan datang?
9. Bapak Budi akan menyiapkan uang kuliah untuk Dira anaknya selama 3 tahun mendatang. Dira ingin masuk ke perguruan tinggi favorit, oleh karenanya bapak Budi harus mempersiapkan secara matang. Setiap bulan beliau mampu menabung sebesar 10 % dari gajinya yaitu Rp 8.000.000. berapa uang yang akan diterima bapak Budi di 5 tahun mendatang?
10. Andi akan membeli rumah seharga Rp. 700.000.000 secara kredit. Andi akan mengangsur rumah tersebut selama 7 tahun. Apabila suku bunga KPR Bank adalah 18% per tahun dan Andi membayar DP sebesar 10% dari harga rumah tersebut, maka Berapakah angsuran per tahun dan buatlah tabel angsurannya!

Bahan Diskusi

1. Jika ada data seperti di bawah ini ! Sekarang coba kamu perhatikan kolom kedua dan ketiga di bawah ini yang bewarna biru. Apakah angka-angka yang tertera pada kolom yang bewarna biru ada hubungannya dengan angka pada anuitas?. Silahkan diskusikan dengan kelompok masing-masing, kemudian presentasikan hasil diskusikan kalian!.

Pinjaman awal periode ke		Anuitas = Rp 1.970.175,00		Sisa pinjaman
		Angsuran	Bunga 5 %	
1	10.000.000	1.470.175,00	500.000,00	8.529.825,00
2	8.529.825	1.543.683,75	426.491,25	6.986.141,25
3	6.986.141,25	1.620.867,94	349.307,06	5.365.373,31
4	5.365.373,31	1.701.911,34	268.263,66	3.663.361,97
5	3.663.361,97	1.787.006,91	183.168,09	1.876.355,06
6	1.876.355,06	1.876.357,25	93.871,76	1,19

2. Fardhan berencana membeli sepeda motor dengan merk Yamaha dengan model MIO 125di dealer sepeda motor seperti gambardiatas secara kredit. Fardhan kesulitan menghitung berapa cicilan yang harus dibayarkannya setiap bulan, dapatkah kamu membantu Fardhan untuk membuat daftar angsuran sepeda motor yang akan dibelinya?Jika harga sepeda motor Yamaha yang akan dibeli Fardhan adalah Rp 15.000.000,00, bunga cicilan 4 % per bulan dan lama angsuran 12 bulan!

D. Daftar Pustaka

Andi Wijaya dkk. (2014). *Matematika Ekonomi I*. Jakarta: Mitra Wacana Media.

Josep Bintang Kalangi. (2011). *Matematika Ekonomi dan Bisnis*. Jakarta: Salemba Empat.

PERTEMUAN 9
SISTEM PERTIDAKSAMAAN LINEAR DUA VARIABEL DAN PROGRAM LINEAR

A. Tujuan Pembelajaran

Pada bab ini akan dibahas mengenai pertidaksamaan linear. Pertidaksamaan linear adalah bentuk fungsi linear dengan menggunakan tanda >, ≥, <, dan ≤. Pasangan titik x dan y dalam pemenuhan pertidaksamaan linear tersebut disebut sebagai Himpunan Penyelesaian (HP). Jika digambarkan dalam diagram cartesius, daerah yang merupakan himpunan penyelesaian diberikan arsiran.

Setelah mempelajari pertemuan ini, mahasiswa mampu membuat grafik HP dari pertidaksamaan linear dua variabel tersebut, mengubah kalimat verbal menjadi model matematika dan mencari titik ekstrim yaitu nilai maksimum dan nilai minimum.

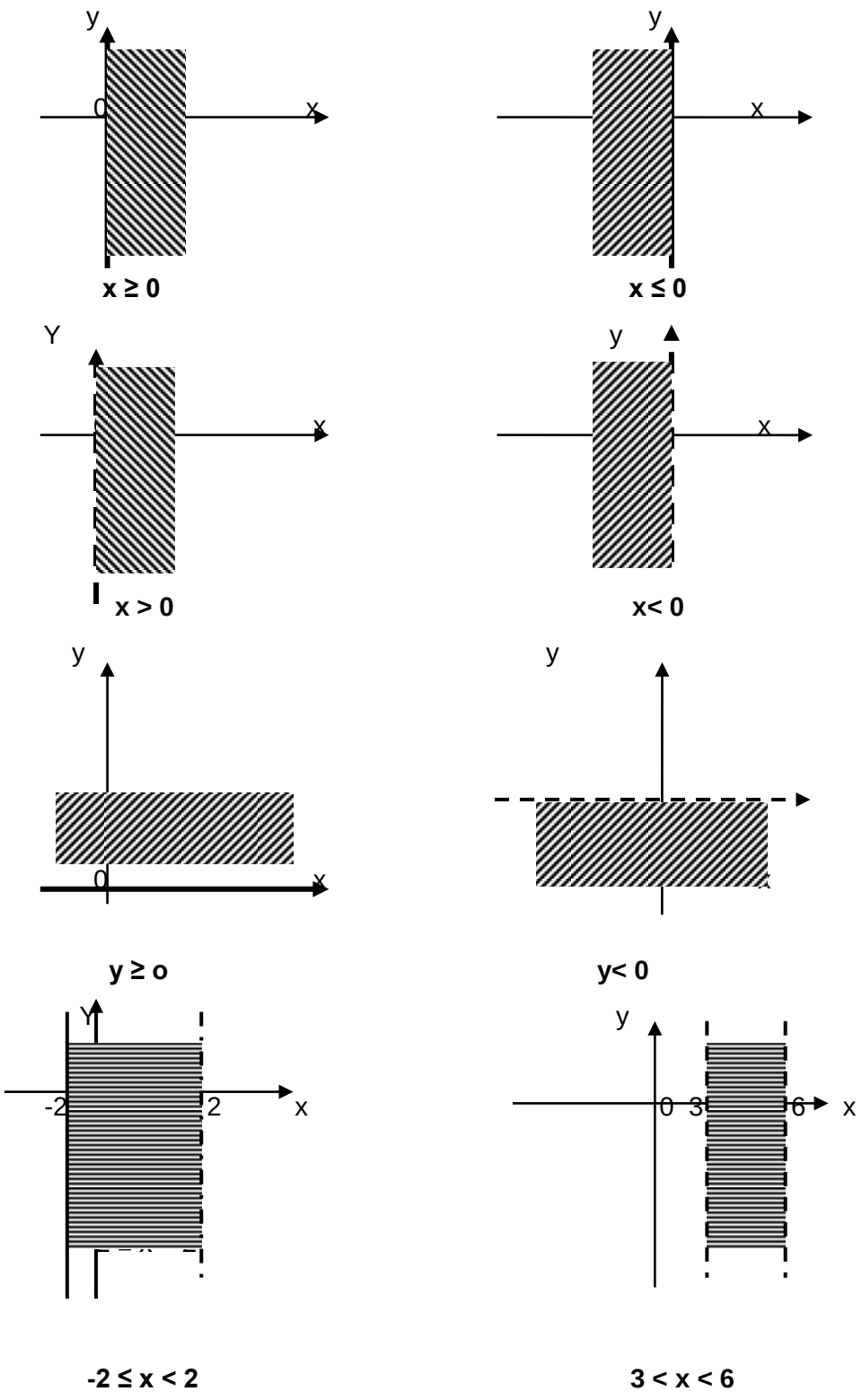
B. Uraian Materi

1. Grafik Himpunan Penyelesaian Pertidaksamaan Dua Variabel

Bentuk umum yang sudah tidak asing lagi mengenai pertidaksamaan linier adalah:

a. $ax + by \geq c$
b. $ax + by > c$
c. $ax + by \leq c$,
d. $ax + by < c$

keempat bentuk umum di atas adalah pertidaksamaan linear. Pasangan titik x dan y yang memenuhi suatu standar pertidaksamaan linear disebut himpunan penyelesaian. Himpunan penyelesaian terdiri dari pasangan berurutan (x, y), yang dapat digambarkan dalam diagram cartesius. Daerah yang diarsir dari suatu fungi linear adalah daerah himpunan penyelesaian. Berikut contoh menentukan daerah penyelesaian suatu pertidaksamaan:



Gambar 9.1 Grafik Pertidaksamaan Linear

Jadi bisa disimpulkan :
Jika $x \geq 0$ berarti $x = 0$ ikut menjadi himpunan penyelesaian.
Jika $x > 0$ berarti garis $x = 0$ (sumbu y) berupa garis putus-putus

Langkah menentukan himpunan penyelesaian satu pertidaksamaan adalah sebagai berikut :

a. Buat grafik persamaannya
b. Tentukan daerah penyelesaiannya(arsir) dengan menyelidiki titik yang terletak pada garis.

Sedangkan cara menggambar grafik pertidaksamaan linear dua variabel dicontohkan sebaai berikut:

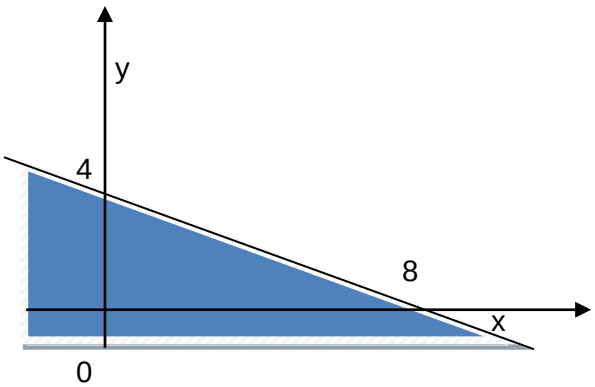
1. Tentukan daerah penyelesaian dari $x + 2y \leq 8$

Penyelesaian :

Buat pertidaksamaan tersebut disamadengankan nol terlebih dahulu, yaitu garis $x + 2y = 8$ dengan membuat titik potong pada sumbu x dan y, dengan disimpulkan pada table berikut ini :

	Y	**Titik Koordinat**
0	4	(0, 4)
8	0	(8, 0)

Kemudian digambarkan sebagai berikut :



Gambar 9.2 Grafik $x + 2y \leq 8$

Untuk menentukan himpunan penyelesian (HP), selidiki satu titik uji dimisalkan masukan nilai (0,0) kemudian di substitusikan pada pertidaksamaan $x + 2y \leq 8$ sehingga di dapat $0 + 2(0) \leq 8$ (benar) jadi daerah arsirnya mendekati titik 0.

2. Tentukan himpunan penyelesaian dari system pertidaksamaan berikut:

   $X \geq 0$

   $Y \geq 0$

   $X + y \leq 5$

   $X + 2y \leq 6$

   Penyelesaian :

   a. Garis $x + y = 5$

x	y	Titik Koordinat
0	5	(0, 5)
5	0	(5,0)

   b. Garis $x + 2y = 6$

x	y	Titik Koordinat
0	3	(0, 3)
6	0	(6,0)

   Maka titik potong didapatkanpada garis $x + y = 5$ dan pada garis $x + 2y = 6$:

   $x + y = 5$ $\qquad$ $x + y = 5$

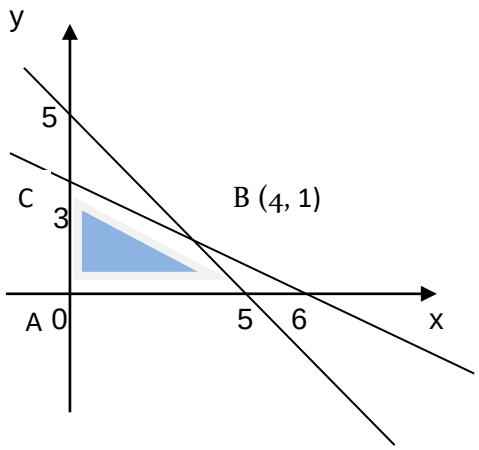
   $\underline{x + 2y = 6}$ – $\qquad$ $x + 1 = 5$

   $-y = -1$ $\qquad$ $x = 5 - 1$

   $Y = 1$ $\qquad$ $x = 4$

   Jadi koordinat titik potongnya adalah (4, 1)

Grafifknya sebagai berikut :



Gambar 9.3 Grafik x + y ≤ 5, x + 2y ≤ 6 dan x ≥ 0, y ≥ 0

TIPS:

a. Dalam menyelesaikan fungsi x ≥ 0 adalah derah sebelah kanan sumbu y yang diarsir
b. Dalam menyelesaikan fungsi y ≥ 0 adalah di atas sumbu x yang diarsir
c. Dalam menyelesaikan fungsi x + y ≤ 5 adalah di bawah atau dikiri garis x + y = 5
d. Dalam menyelesaikan fungsi x + 2y ≤ 6 adalah dibawah atau dikiri garis x + 2y = 6
e. Beri nama setiap titik sudut yang membatasi himpunan penyelesaan
f. Titik O, A, B, dan C disebut titik ekstrim atau vertek, dari contoh diatas diperoleh titik-titik disekitar HP adalah 0 (0,0), A (5,0), B (4,1) dan C (0,3).

2. Mengubah Kalimat Verbal Menjadi Model Matematika

Dalam aplikasi peryidaksamaan linier dua variabel bisa kita terapkan dalam fungsi ekonomi yaitu program linear. Program linier menjadi sebuah program pengembangan yang lebih lanjut dari beberapa konsep aljabar linear itu sendiri. Program linier merupakan salah satu cabang matematika yang bisa digunakan dalam menentukan nilai maksimum atau nilai minimum, tentunya meminta bantuan

fungsi linear. Aplikasi program linear dalam persoalan optimasi bisa digunakan untuk menentukan nilai maksimum atau minimum dalam bidang ekonomi. Misalnya dalam perusahaan, para manager produksi harus memperhitungkan bagaimana mengelola bahan mentah dan mesin yang terbatas agar diperoleh jumlah produksi maksimum sehingga diperoleh laba maksimum. Atau membuat perencanaan biaya produksi agar diperoleh biaya minimum.

Persoalan optimasi di dalam program linear, merupakan persoalan bagaimana menetukan nilai masing-masing variabel agar fungsi linearnya menjadi maksimum atau minimum, dengan mempertimbangkan batasan atau kendala yang ada. Fungsi yang digunakan berupa pertidaksamaan linear dengan 2 variabel. Oleh sebab itu sebelum menyelesaikan persoalan menggunakan program linear, sebelumnya kita harus mengenal pertidaksamaan linear 2 variabel.

Model matematika merupakan suatu bentuk aljabar yang diperoleh dengan cara merubah kalimat yang verbal menjadi kalimay matematika yang mudah dipahami berupa system pertidaksamaan linear dengan 2 variabel atau lebih. Program linear merupakan model optimasi dari suatu model matematika yang berhubungan pada kendala secara linier yang akan dihadapi. Permasalahan program linier merupakan permasalahan yang berhubungan dengan pencarian nilai maksimum dan minimum dalam fungsi linier itu sendiri.

Fungsi linier yang akan di carikan solusi dari nilai maksimum dan minimumnya adalah berbentuk sebuah persamaan sebagai suatu fungsi tujuan. Fungsi linier yang dimaksudkan adalah harus memenuhi kaidah dari fungsi tujuan tersebut. Fungsi kendala sering disebut sebagai bentuk fungsi tujuan dari pertidaksamaan linier tersebut. Beberapak persyaratan memang harus terpenuhi untuk solusi masalah dengan program linier, adapun persyaratan tersbeut akan dijabarkan dibawah ini :

a. Harus mampu dirubah bentuk masalah matematika kedalam bentuk model linier, baik persamaan ataupun bentuk pertidaksamaan. Karena jika tidak bisa dirubah, akan percuma kita tidak bisa mengerjakan model tersbut untuk diselesaikan permasalahannya.
b. Semua pertidaksamaan harus bisa di sesuaikan dengan satu kesatuan aktivitas, semisal $ax + by \leq k$, di mana x dan y adalah aktivitas.

c. Masing-masing perubahan tersebut harus dapat di kuantifikasikan sehingga aktivitas itu akan bernilai dan dapat dihitung dan diselesaikan permasalahannya.

Berdasarkan kriteria tersebut di atas, maka program linier harus ada rangkaian kendala, aktivitas dan tujuan.

Adapun langkah-langkah daam merumuskan aplikasi pertidaksamaan linier menjadi program linier, adalah sebagai berikut :

a. Harus mampu menentukan aktifitasnya seperti apa
b. Harus mampu menentukan sumber masukan-masukannya apa saja
c. Harus mampu menghitung jumlah input ataupun output dalam setiap aktifitas
d. Harus mampu menentukan kendala dalam fungsi tujuan aktifitas
e. Harus mampu merumuskan model dengan fungsi tujuan akhir

Contoh Soal :

Sebuah perusahaan furniture akan membuat desain yang terbuat dari meja dan kursi. Proses pembuatannya adalah dengan merakit dan memoles meja dan kursi tersbeut. Dengan fungsi merakit memiliki 60 jam kerja. Dan fungsi memoles dengan hanya 48 jam kerja. Untuk menghasilkan 1 meja dibutuhkan 4 jam merakit dan 2 jam kerja memoles. Untuk 1 kursi dibutuhkan 2 jam merakit dan 4 jam memoles. Keuntungan tiap sebuah meja Rp 80.000 dan sebuah kursi Rp 60.000. Tentukan model matematika dan fungsi tujuannya1

Penyelesaian:

Gunakan x untuk menyatakan jumlah meja dan y untuk menyatakan jumlah kursi. Informasi yang diperlukan untuk memecahkan persoalan diringkas dalam tabel berikut:

Tabel 9.1 Ringkasan Masalah 1

	Keluaran			Kendala masukan
Masukan		meja (x)	kursi (y)	
	perakitan	4	2	60
	pemolesan	2	4	48

Fungsi tujuan $Z = 80.000x + 60.000y$

Fungsi kendala $4x + 2y \leq 60$

$2x + 4y \leq 48$

$X \geq 0$

$Y \geq 0$

3. Mencari Titik Ekstrim, Nilai Maksimum Atau Minimum

Suatu nilai absolut maksimum pasti adalah suatu nilai maksimum yang relative dan atau salah satu titik akhir pada fungsi tertentu. Apabila nilai yang diketahui mengandung semua nilai maksimum relative, maka seharusnya yang dilakukan adalah memilih nilai maksmial dan dibandingkan pada titik akhir, untuk menentukan nilai maksimum absolut. Perhatikan contoh kasus berikut ini :

Contoh Soal :

1) Ibu Ariel yang memproduksi jenis kue A dan kue B, akan memperhitungkan penghasilan dalam penjualannya. Untuk membuat kue A, ibu Ariel memerlukan 400 gram pada tepung kueserta 50 gram pada mentega. Untuk membuat kue B dibutuhkan 200 gram untuk tepung dan 100 gram untuk mentega. Adapun tepung yang ada cuma 8 kg dan jumlah mentega hanya tersedia hanya 2,4 kg. Ditanyakan :
   a) Buatlah model matematikanya
   b) Tentukan HP dalam grafik
   c) Tentukan pula dimana titik-titik ektrim
   d) Bila harga kue A Rp 6.000 dan harga kue B Rp 10.000 per buah, tentukan fungsi tujuan
   e) Berapa penghasilan maksimum Ibu Ariel
   f) Berapa masing-masing kue harus dibuat agar penghasilannya maksimal

   Penyelesaian:

   a) Model matematika

      Misal kue A = x dan kue B = y, dapat disimpulkan dalam table berikut :

Tabel 9.2 Ringkasan Masalah 2

Kue	Tepung (gr)	Mentega (gr)
A	400	50
B	200	100
Tersedia	**8.000**	**2.400**

Sehingga model matematikanya disusun menjadi :

$400x + 200y \leq 8.000$

$50x + 100y \leq 2.400$

$X \geq 0$

$Y \geq 0$

b) Menentukan himpunan penyelesaian dengan gambar grafik

400x + 200y= 8.000 disederhanakan dengan dibagi 200, sehingga persamaannya menjadi :

$2x + y = 40$

x	y	Titik Koordinat
0	40	(0,40)
20	0	(20, 0)

50x + 100y = 2.400disederhanakan dengan dibagi 50, sehingga persamaannya menjadi :

$x + 2y = 48$

x	y	Titik Koordinat
0	24	(0,24)
48	0	(48, 0)

Di dapat titik potong pada garis 2x + y = 40 serta garis x + 2y = 48

$2x + y = 40 \quad x2 \qquad 4x + 2y = 80$

$x + 2y = 48 \quad x1 \qquad \underline{x + 2y = 48} -$

$3x = 32$

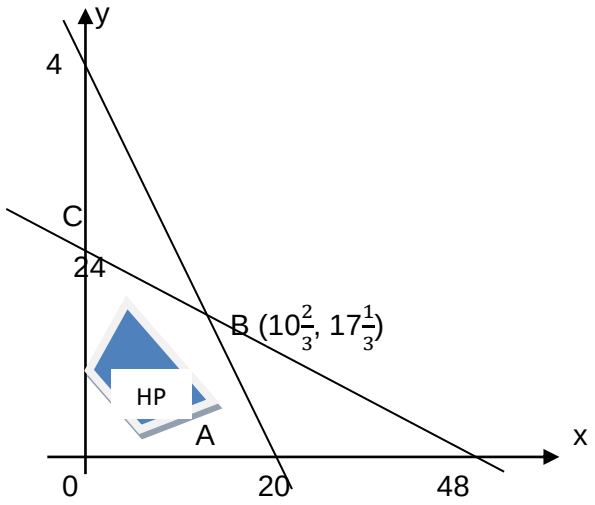
$x = 10\frac{2}{3}$, sehingga :

$x + 2y = 48$

$10\frac{2}{3} + 2y = 48$

$2y = 48 - 10\frac{2}{3}$

$2y = 17\frac{1}{3}$



Gambar 9.4 Grafik 400x + 200y ≤ 8.000; 50x + 100y ≤ 2.400; x≥ 0 dan y ≥ 0

Berdasarkan grafik dari perhitungan di atas, maka (HP) diapit oleh titik 0, A, B, dan C.

c) Menentukan titik-titik ektrim yang nerupakan titik batas yang akan digunakan menentukan nilai maksimum atau nilai minimum yaitu :

(1) O = (0, 0)

(2) A = (20,0)

(3) B = (10$\frac{2}{3}$, 17$\frac{1}{3}$)

(4) C = (0, 24)

d) Menentukan fungsi tujuan. Tujuan ibu Ariel adalah mendapatkan penghasilan sebanyak-banyaknya, maka fungsi nya sebagai berikut :

Z = 6000x + 10.000y

e) Untuk mendapatkan penghasilan maksimal, kita ujikan titik-titik ekstrim ke dalam fungsi tujuan di atas.

Titik ekstrim	Z = 6000x + 10.000y	Keterangan
(1) O (0,0)	Z = 0	tidak dipakai
(2) A (20,0)	Z = 6000(20) + 10.000(0) = 120.000	minimal
(3) B (11,17)	Z = 6000(11) + 10.000(17) = 236.000	maksimal
(4) C (0,24)	Z = 6.000(0) + 10.000(24) = 240.000	maksimal

Dari pengujian titik di atas, titik ekstrim B ($10\frac{2}{3}$, $17\frac{1}{3}$) dilakukan pembulatan menjadi (11,17),karena membicarakan banyaknya kue yang akan dijual, maka tidak mungkin dalam bentuk pecahan.

Ada dua pengujian dengan hasil maksimal, tetapi yang memenuhi syarat adalah titik (11,17) karena sesuai dengan permasalahan dimana ada 2 jenis kue yang akan dijual. Titik (0,24) tidak diambil sebagai jawaban meskipun perhitungan menunjukkan hasil keuntungan maksimal karena variasi untuk hasil x dan y tidak sesuai dengan keadaan dimana ada 2 jenis kue yang memang diproduksi.

Jadi kue masing-masing yang harus dibuat ibu Ariel agar penghasilan maksimum yaitu membuat 11 kue A dan 17 kue B. Penghasilan maksimal sebesar Rp 236.000.

Aplikasi program linear pada bidang ekonomi secara umum, sangatlah luas. Banyak variable yang mempengaruhi tercapainya nilai maksimum atau minimum, seringkali lebih dari 2 variabel. Aplikasi program linear pada bidang ekonomi kita contohkan yang sederhana yang hanya memuat 2 variabel.

2) Pengusaha buah-buahan akan memakai mobil guna menjual semangka atau jeruk. Dengan harga pembelian semangkaadalah Rp 1.400 per kg dan jeruk Rp 2.000 per kg. Modal yang dimiliki Rp 1.400.000, sedangkan mobil hanya bisa mengangkut tidak lebih dari 750 kg. Jika keuntungan dari per 1 kg semangka adalah Rp 600 dan keuntungan per 1 kg jeruk Rp 1.000, maka tentukan laba maksimum yang dapat dicapai. Berapa kilo semangka atau jeruk yang harus dibeli dan habis terjual agar keuntungan maksimum?

Penyelesaian:

Misalkan, x = banyak semangka dalam kg, dan

y = banyak jeruk dalam kg

Tabel 9.3 Ringkasan Masalah 3

Nama Buah	Harga per kg	Laba per kg
Semangka	1.400	600
Jeruk	2.000	1.000
Jumlah Uang	**1.400.000**	

Maka model matematikanya di dapat menjadi :

1400x + 2.00y ≤ 1.400.000

x + y ≤ 750

X ≥ 0

Y ≥ 0 {karena jumlahnya tidak mungkin negatif}

Fungsi tujuan dimisalkan laba L, maka menjadi :

L = 600x + 1.000y

Menggambar grafik himpunan penyelesaian:

1400x + 2.00y ≤ 1.400.000

1400x + 2.00y ≤ 1.400.000 disederhanakan dengan dibagi 200, menjadi :

7x + 10y = 7.000

X	Y	Titik Koordinat
0	700	(0,700)
1.000	0	(1.000, 0)

x + y = 750

x	Y	Titik Koordinat
0	750	(0,750)
750	0	(750, 0)

Mencari titik potong:

7x + 10y = 7.000 x1 7x + 10y = 7.000

x + y = 750 x10 10x + 10y = 7.500 –

-3x = -500

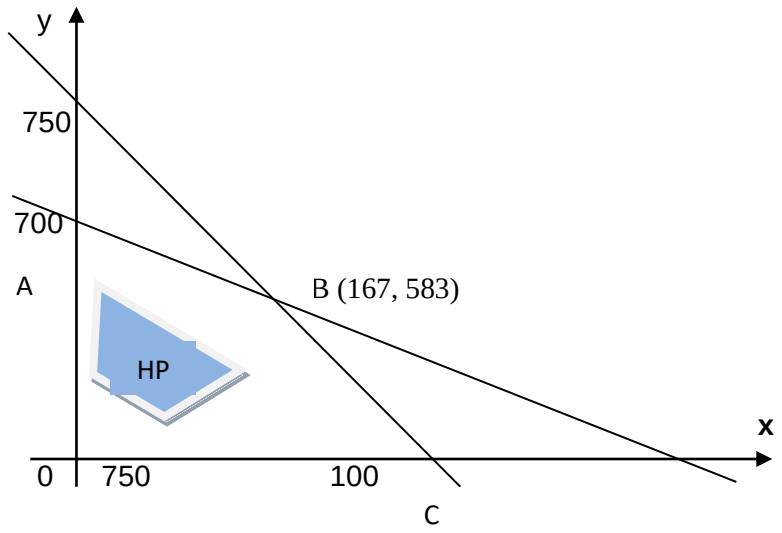
x = $166\frac{2}{3}$ dibulatkan menjadi 167

x + y = 750

167 + y = 750

y = 750 – 167

y = 583



Gambar 9.5 Grafik 1400x + 2.00y ≤ 1.400.000; x + y ≤ 750

Himpunan penyelesaian dibatasi oleh titik OABC

Menyelidiki titik ektrim untuk mencari nilai maksimum:

Titik ekstrim	L = 600x + 1.000y
a) O (0,0)	L = 0
b) A(0, 700)	L = 600(0) + 1.000(700) = 700.000
c) B(167, 583)	L = 600(167) + 1.000(583) = 610.889
d) C(750, 0)	L = 600(750) + 1.000(0) = 450.000

Dari perhitungan di atas, terlihat bahwa laba maksimum adalah Rp 700.000 dengan membeli jeruk saja 700kg. Untuk permasalahan tersebut dengan mengambil titik (0,700) masuk akal karena apabila pengusaha buah-buahan tersebut akan menjual jeruk saja dengan menggunakan mobil akan mendapat keuntungan yang maksimal meskipun hanya menjual 1 jenis buah.

C. Soal Latihan/Tugas

1. Lukis grafik himpunan penyelesaian pertidaksamaan berikut:
   a. $4x - 8x < 0$
   b. $X + 4y \geq 6$
   c. $1 \leq x \leq 4$
   d. $3x - y \leq 12$
   e. $4x - 3y < 24$

2. Lukis grafik himpunan penyelesaian system pertidaksamaan linear berikut:
   a. $2x + 4y > 16$
      $-x + 3y \geq 9$
   b. $3x – 6y \leq 18$
      $-3x + y \leq 4$
      $X \geq 0$
      $Y \geq 0$
   c. $2x + y \leq -24$
      $2x + 3y \leq 6$
      $X \geq 0$
      $Y \geq 0$
   d. $2x – 3y \geq -18$
      $3x – y \geq 2$
      $X \geq 0$
      $Y \geq 0$
3. Lukis grafik himpunan penyelesaian sistem pertidaksamaan berikut, kemudian tentukan nilai minimum dari 2x + 3y pada himpunan penyelesaian dan nilai-nilai x maupun ysaling berkaitan.
   $x + y \geq 3$
   $2x + 2y \geq 4$
   $X \geq 0$
   $Y \geq 0$
4. Grup kelompok sepak bola melakukan pertandingan ke kota lain terdiri dari 60 orang. Rombongn hendak menyewa kamar kelas ekonomi:
   a. Jumlah kamar yang ada 40 kamar terdiri dari kamar tipe A untuk 3 orang dengan sewa Rp. 75.000 perhari dan kamar tipe B untuk 1 orang dengan sewa Rp. 30.000 perhari
   b. Pihak hotel menetapkan paling sedikit harus menyewa 20 kamar. Buatlah model matematikanya jika x = jumlah kamar tipe A, dan y = jumlah kamar tipe B.
   c. Gambarkan HP dan titik-titik ektrimnya
   d. Tentukan fungsi tujuan
   e. Berapa kamar tipe A dan kamar tipe B yang akan disewa agar uang sewa seminimal mungkin

f. Berapa sewa minimal yang harus dikeluarkan.

5. Weni dan saudaranya, Deni membuat furniture pada waktu luang untuk menambah penghasilannya. Baru-baru ini mereka mengadakan kontrak kerja mensuplai furniture setengah jadi pada sebuah toko furniture local yang besar. Toko tersebut hanya mampu menyediakan papan sebesar 50 kaki seminggu untuk membuat meja dan kursi. Wendi bersaudara hanya mempunyai 52 jam kerja perminggu untuk melakukan pekerjaan tersebut. Untuk membuat 1 meja dibutuhkan papan 5 kaki dan selama 2 jam kerja. Bandingkan untuk membuat 1 meja dibutuhkan papan 2 kaki dan 4 jam kerja. Keuntungan per meja adalah Rp. 80.000 dan keuntungan per kursi adalah Rp. 40.000. Wardi berfikir sebaiknya membuat meja saja karena tingginya keuntungan per unit, sedangkan Harso menganggap lebih baik membuat kursi saja karena kebutuhan bahan bakunya lebih sedikit. Jika Anda sebagai konsultan yang diundang untuk mengatasi pertentangan tersebut. Dengan tujuan keuntungan maksimum, apa saran Anda?
6. Sebuah pabrik di Semarang, yaitu pabrik ban mobil. Pabrik tersebut akan memproduksi ban mobil luar dan dalam. Ban mobil luar akan diproses dalam 4 unit mesin A, dan ban dalam mobil hanya akan diproses dalam dua jenis mesin B. ban tersbeut yang luar akan diproses selama 4 menit dengan mesin A, dan 8 menit mesin B, dan 10 menit mesin C. Dan untuk ban mobil yang dalam akan diproses dalam waktu 4 menit di mesin A, dan 7 menit di mesin B. Keuntungan dari unit ban mobil dalam adalah Rp 6.000 dan ban mobil luar adalah Rp 5.000. Jika setiap ban mobil yang akan diproduksi dan laku terjual, berapa unit masing-masing ban mobil yang harus diproduksi pabrik tersebut agar mendapat laba maksimal. Diketahui kapasitas operasi dari mesin, masing-masing 900 menit perhari.
7. Sebuah colt bersama dengan truk akan digunakan dalam pengankutan 1000 m^3 pasir. Satu colt dalam satu tripbisa mengangkut sebanyak 2 m^3 pasir dan sebuah truk 5 m^3dalam pasir. Dalam pengangkutan pasir, kira-kira bisa mengakut trip colt dan trip truk paling sedikit 350. Jika biaya jasa angkut dalam colt pertrip Rp. 15.000 dan dalam truk pertrip Rp. 30.000, Tentukan biaya minimum untuk pengankutan pasir tersebut! Gambarkan grafiknya!.
8. Satu minggu untuk setiap orang akan butuh paling sedikit adalah 20 unit vitamin, 18 unit protein dan sisanya 16 unit karbohidrat. Satu kg makanan A mengandung 2vitamin unit, 10protein unit, dan sisanya 4 karbohidrat unit. Satu kg makanan B

tersebut ada kandungan 4vitamin unit, 2 protein unit dan sisanya 3 unit karbohidrat. Apabila harga 1 kg makanan A adalah Rp. 20.000 dan harga dari makanan B adalah Rp. 12.000. Untuk kebutuhan vitamin, protein dan karbohidrat supaya terpenuhi dengan biaya yang paling murah. Berapa banyaknya makanan A dan B yang harus dibeli setiap minggu, dan gambarkan grafiknya ?

D. Daftar Pustaka

Dumairy. (2012). *Matematika Terapan Untuk Bisnis dan Ekonomi*. Yogyakarta: BPFE

Haeussler, Paul, Wood. (2013). *Pengantar Matematika Ekonomi Untuk Analisis Bisnis dan Ilmu-ilmu Sosial*. Jakarta: Erlangga.

PERTEMUAN 10
APLIKASI MATRIKS

A. Tujuan Pembelajaran

Dalam materi matriks ini, akan mambahas mengenai jenis-jenis matriks, operasi-operasi apa saja dalam matriks, determinan matriks untuk ordo 2x2 dan 3x3, invers matriks pada ordo 2x2 dan 3x3, menyelesakan persamaan linear menggunakan matriks dan penerapan konsep matriks dalam ekonomi/bisnis. Setelah mempelajari pertemuan 10 ini, mahasiswa mampu untuk menggunakan konsep matriks dan determinan dalam bisnis dan ekonomi.

B. Uraian Materi

1. Definisi Matriks

Matriks merupakan susunan dari bilangan yang berbentuk persegi panjang yang terdiri dari baris dan kolom. Tanda atau simbol dalam matriks adalah bisa (), atau [ ] maupun juga ini || ||. Yang dimaksud dengan susunan baris adalah bilangan yang berbentuk horizontal. Untuk susunan yang vertical merupakan bilangan kolom. Adapun bentuk umum dari suatu matriks adalah dengan memperhatikan gambar berikut ini :

$$\begin{array}{cc} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ . & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} & \begin{array}{l} \rightarrow \text{baris} \\ \rightarrow \text{baris} \\ \\ \rightarrow \text{baris} \end{array} \\ \begin{array}{cccc} \downarrow & \downarrow & & \downarrow \\ \text{Kolom1} & \text{Kolom} & & \text{Kolomn} \end{array} & \end{array}$$

Dimana :

a $_{mn}$ adalah suatu elemen dari bagian inti matriks yang artinya (m) sebagai baris, dan (n) sebagai kolom.

Suatu matriks bercirikan dengan penggunaan huruf kapital pada penamaan matriks. Sebagai contoh adalah matriks A, B, G, N, D dan seterusnya. Kemudian dengan penamaan huruf kecil dalam komponen matriks adalah seagai indeks yang berarti kesesuaian terhadap letak masing-masing elemennya. Maksudnya adalah a_{11}, b_{12}, ..., dan seterusnya, oleh karena itu perhatikan contoh matriks berikut ini :

1) Diketahui matriks A = $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 6 & -3 & 8 \\ 2 & -5 & 9 & 12 & -4 \\ 3 & 0 & 7 & 5 & 10 \end{bmatrix}$

Tentukan :

a) banyak baris
b) banyak kolom
c) anggota dari kolom ke 1
d) anggota dari baris ke 1
e) $a_{3.4}$
f) $a_{1.3}$

Penyelesaian :

a) banyak baris = **3** buah
b) banyak kolom = **5** buah
c) anggota dari baris ke-1 = **1, 4, 6, -3, 8**
d) anggota dari kolom ke-3 = **6, 9, 7**
e) $a_{3.4}$ = anggota baris ke 3 dan kolom ke 4=**5**
f) $a_{1.3}$ = angggota baris ke 1 dan kolom ke 3 = **6**

2) Diketahui $A = \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ -2 & 5 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}$. Tentukan dimana letak dari anggota yang bernilai -2 dan 8 !

Penyelesaian :

elemen -2 = $\mathbf{a_{21}}$
elemen 8 = $\mathbf{a_{32}}$

2. Ordo Matriks

Yang dimaksud dengan ordo matriks adalah banyaknya jumlah baris dan jumlah kolom, yang dinyatakan pada matriks tersebut. Sebagai contoh A_{mxn}, artinya adalah matriks A dengan ordo m x n, nilainya adalah banyaknya jumlah baris dari (m) dan jumlah kolom (n) buah. Untuk lebih memahami pengertian ini, silahkan perhatikan contoh matriks berikut ini :

Diketahui $P = \begin{bmatrix} -1 & 3 & -6 & 4 \\ 5 & 0 & 2 & 8 \end{bmatrix} Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 4 \\ 9 & -3 \end{bmatrix}$

Tentukan ordo dari masing-masing matriks di atas!

Penyelesaian :

Jumlah ordo dari matriks P = 2 x 4 dengan kata lain adalah $P_{2\ x3}$

Jumlah ordo dari matriks Q = 3 x 2 dengan kata lain adalah $Q_{2\ x3}$

3. Jenis-Jenis Matriks

a. Matriks Nol

Arti dari matriks nol merupakan matriks yang setiap anggotanya semua bernilai nol.

Sebagai contoh : $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

b. Matriks Baris

Arti dari matriks baris merupakan suatu matriks yang hanya memiliki satu baris.

Sebagai contoh : $A = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -5 & 8 \end{bmatrix}$

c. Matriks Kolom

Arti dari matriks kolom yaitu kebalikannya dari matriks baris, matriks baris merupakan suatu matriks yang hanya mempunyai satu kolom.

Sebagai contoh : $P = \begin{bmatrix} 4 \\ -5 \\ 8 \end{bmatrix} Q = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 6 \\ 3 \end{bmatrix}$

d. Matriks Bujur sangkar/Matriks Persegi

Matriks persegi adalah matriks yang berbentuk persegi, arti persegi adalah semua sisinya sama, jadi jika diterapkan ke dalam matriks merupakan suatu matriks dimana jumlah baris dan jumlah kolomnya adalah sama. Penamaan ordo matriks persegi sering disebut n x n dan bisa disingkat dengan (n) saja.

Sebagai contoh : $K = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$, $L = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$, $M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 6 \\ 5 & 7 & -3 & 2 \\ 0 & 9 & 4 & 9 \\ -6 & 2 & 5 & 6 \end{bmatrix}$

e. Matriks Diagonal

Arti dari matriks diagonal merupakansuatu matriks yang persegi dimana semua anggotanya adalah nol, kecuali anggota diagonal utamanya.

Sebagai contoh : $E = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} F = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

f. Matriks Identitas (I)

Matriks identitas merupakan matriks persegi juga, dimana perbedaanya adalah semua anggota diagonal utamanya satu, dan anggota sisanya adalah nol.

Sebagai contoh : $I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ dan $I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ atau $I_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

g. Matriks Skalar

Matriks skalar merupakan matriks persegi dimana semua anggotanya di diagonal utamanya sama, tetapi bukan nol dan semua anggota selain diagonal lainnya bernilai nol.

Sebagai contoh : $A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} -9 & 0 & 0 \\ 0 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & -9 \end{bmatrix} C = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

h. Matriks Segitiga Atas

Yang dimaksud dengan matriks segitigas atas adalah matriks yang semua anggota di bawah diagonal utamanya adalah nol.

Sebagai contoh : $A = \begin{bmatrix} 7 & -8 & -3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} 5 & 7 & 9 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

i. Matriks Segitiga Bawah

Disini adalah kebalikan dari matriks segitiga atas, dimana matriks segitiga bawah merupakan matriks yang semua anggota di atas diagonal utamanya adalah bernilai nol.

Sebagai contoh : $K = \begin{bmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 0 \\ 1 & -3 & 2 \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 9 & 3 & 4 & 0 \\ 8 & 2 & 6 & 7 \end{bmatrix}$

j. Matriks Koefisien

Arti dari matriks koefisien merupakan matriks yang semua anggotanya adalah koefisien-keofisien dari sistem persamaan linear.

Sebagai contoh :

1) Sebuah matriks koefisien dari suatu sistem persamaan liniear seperti berikut :

   6x + 9y =-3

   -8x + 8y = 10, adalah menjadi : $\begin{bmatrix} 6 & 9 \\ -8 & 8 \end{bmatrix}$

2) Suatu matriks koefisien dengan suatu sistem persamaan liniear seperti berikut :

   9x + 4y- 9z = 18

   -7x + 8z = 8

9x + 4y - 4z = -7, adalah menjadi : $\begin{bmatrix} 9 & 4 & -9 \\ -7 & 0 & 8 \\ 9 & 4 & -4 \end{bmatrix}$

4. Kesamaan Dua Matriks

Artinya dalam kesamaan dua matriks, apabila kedua matriks tersebut memiliki kesamaan dengan ordo dan anggota-anggota yang sama letaknya. Sebagai contoh, perhatikan matriks berikut ini :

a. Jika diketahui matriks $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix}$

Penyelesaian :

Karena A = B maka nilai dari a=p, b=q, c=r dan d=s

b. Tentukan nilai dari x dan y matriks $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 8 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & x \\ 2y & -5 \end{bmatrix}$

Penyelesaian :

Jadi x = 1, dan 2y = 8 sehingga nilai dari y =4

5. Transpose Matriks

Yang dimaksud dengan transpos dari matriks A merupakan matriks yang diperoleh dari matriks A dengan menukarkan anggotanya pada baris menjadi kolom, ataupun penukaran kolom menjadi baris.Suatu transposdari matriks A dinyatakan dengan simbol A^T atau bisa juga A'. Sebagai contoh silahkan perhatikan matriks berikut :

Jika $P = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 7 & 3 & 9 \end{bmatrix}$ maka tentukan P^T (transpose dari matriks P) !

Penyelesaian :

$P^T = \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 2 & 3 \\ 4 & 9 \end{bmatrix}$

6. Operasi Matriks

a. Penjumlahan Matriks

Penjumlahan matriks terjadi apabila ada dua matriks yang mempunyai ordo sama, artinya baris dan kolom dua matriks tersebut berjumlah sama. Anggota-anggota yang dijumlahkan yaitu anggota yang letaknya sama. Perhatikan contoh matriks berikut ini :

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+p & b+q \\ c+r & d+s \end{bmatrix}$$

Sebagai contoh, perhatikan matriks berikut :

1) A = $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, B = $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$ Hitunglah matriks A + B !.

Penyelesaian :

Maka A + B = $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 1+2 & 2+1 \\ 3+(-2) & 4+(-1) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

2) Jika $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ dan $C = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$, tentukan nilai dari matriks !

a) matriks A + B

b) matriks B + C ,

c) matriks B + C

d) matriks dengan A + (B + C)

e) matriks A+B

f) matriks dengan (A +B) + C

Penyelesaian :

a) **A + B** = $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$$

b) **B + A** $= \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$$

c) **B + C** $= \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 8 & -1 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}$$

d) **A + (B + C)** $= \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 8 & -1 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 10 & -1 \\ 7 & 7 \end{bmatrix}$$

e) **(A + B)** $= \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$$

f) **(A + B)+C** $= \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 10 & -1 \\ 7 & 7 \end{bmatrix}$$

Berdasarkan contoh soal di atas, bisa disimpulkan bahwa sifat-sifat dari matriks penjumlahan adalah sebagai berikut :

a) A + B = B + A (penjumlahan bersifat komutatif)
b) A + (B + C) = (A + B) + C (penjumlahan juga bersifat asosiatif)
c) A + O = O + A = A (dimana O sebagai matriks identitas dari penjumlahan)
d) A + (-A) = (-A) + A = O (-A artinya matriks invers penjumlahan)

b. Pengurangan Matriks

Pengurangan matriks dapat diselesaikan jika ordonya berjumlah sama. Anggota yang dikurangi adalah angggota yang mempunyai letak yang sama.

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a-p & b-q \\ c-r & d-s \end{bmatrix}$$

Sebagai contoh, perhatikan matriks berikut ini :

Jika $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}$, tentukan nilai matriks dari:

1) hasil dari A – B
2) hasil dari B – A
3) hasil dari (A-B)-C
4) hasil dari A-(B-C)

Penyelesaian :

1) A – B $= \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ -4 & 9 \end{bmatrix}$

2) B – A $= \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 3 & -5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 4 & -9 \end{bmatrix}$

Berdasarkan pengurangan matriks di atas, maka sifat matriks dalam pengurangan adalah sebagai berikut :

a. A – B $\neq$ B – A (pengurangan tidak berlaku komutatif)
b. A – (B – C) = (A – B) – C (pengurangan berlaku asosiatif)

c. Perkalian Matriks

1) Perkalian Matriks Pada Bilangan Real (Skalar)

Hasil perkalian skalar k dengan sebuah matriks A yang berordo m x n adalah sebuah matriks yang berordo m x n dengan elemen-elemennya adalah hasil kali skalar k dengan setiap elemen matriks A. Sebagai contoh, perhatikan matriks berikut ini :

Jika $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}$ maka tentukan 2A!

Penyelesaian :

$$2A = 2\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 6 & -10 \end{bmatrix}$$

2) Perkalian Matriks Dan Matriks

Perkalian dua matriks dapat dikalikan apabila kedua matriks tersebut mempunyai jumlah kolom pada matriks pertama sama dengan jumlah baris pada matriks kedua.

Dari perkalian matriks, mempunyai ordo dengan matriks A_{mxn} dan B_{nxp}, sebagai contoh adalah matriks C yang akan berordo m dan p (seperti contoh berikut).

$$\boxed{A_{mxn} \,.\, B_{nxp} = C_{mxp}}$$

Operasi perkalian matriks adalah dua matriks tersebut dijumlahkan setiap perkalian pada anggota baris matriks A dengan anggota pada kolom matriks B, kemudian hasil perkalian yang dijumlahkan diletakkan sesuai dengan posisi baris dan kolom pada matriks C.

Sebagai contoh : $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} p & r & t \\ q & s & u \end{bmatrix}$ maka :

AB = $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p & r & t \\ q & s & u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ap+bq & ar+bs & at+bu \\ cp+dq & cr+ds & ct+du \end{bmatrix}$

Perhatikan contoh penerapan soal matriks berikut ini :

1. Jika diketahui $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 7 & 9 \end{bmatrix}$ dan $D = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$ Tentukan :

   a. A.B b. A.C c. A.D

   Penyelesaian :

   a. A.B = $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15+12 \\ 5+24 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 27 \\ 29 \end{bmatrix}$

   b. Untuk matriks dari A dan C tidak dapat dikerjakan karena banyaknya jumlah kolom dari matriks A tidak sama dengan banyaknya baris matriks C.

   c. AD = $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15+14 & 18+16 \\ 5+28 & 6+32 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 29 & 34 \\ 33 & 38 \end{bmatrix}$

2. Diketahui $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$ dan $C = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ Tentukan :

   a. matriks A.B

   b. matriks B.A

   c. matriks B.C

   d. matriks A.C

   e.matriks (A.B).C

   Penyelesaian :

   a. AB = $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4-4 & 0+10 \\ 0-6 & 0+15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 10 \\ -6 & 15 \end{bmatrix}$

   b. BA = $\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4+0 & 8+0 \\ -2+0 & -4+15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 8 \\ -2 & 11 \end{bmatrix}$

c. BC $= \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12+0 & -8+0 \\ -6+5 & 4+20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & -8 \\ -1 & 24 \end{bmatrix}$

d. AC $= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3+2 & -2+8 \\ 0+3 & 0+12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 3 & 12 \end{bmatrix}$

e. (AB)C = $\begin{bmatrix} 0 & 10 \\ -6 & 15 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0+10 & 0+40 \\ -18+15 & 12+60 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 40 \\ -3 & 72 \end{bmatrix}$

Berdasarkan perkalian matriks di atas, maka bisa disimpulkan bahwa sifat-sifat perkalian matriks adalah :

a. Umumnya matriks perkalian tidak bersifat komutatif (AB $\neq$ BA)
b. Matriks selalu bersifat asosiatif : jika (A.B).C = A.(B.C)
c. Perkalian pada distributif kiri yaitu A(B + C) = AB + AC
d. Perkalian pada distributif kanan yaitu (B + C)A = BA + CA
e. Matriks Identitas artinya adalah IA = AI = A
f. Apabila ada k(AB) maka (kA)B

7. Determinan Matriks

Setiap matriks bujursangkar, elemen-elemen matriksnya dapat dikombinasikan untuk menghitung nilai bilangan riil yang disebut determinan. Determinan merupakan konsep khusus untuk menyelesaikan sistem persamaan linear simultan. Lambang untuk determinan matriks A yaitu $|A|$.

a. Determinan matriks 1 x 1

   Determinan dari matriks 1 x 1 adalah nilai elemen itu sendiri.

   Sebagai contoh: A = [5], maka $|A| = 5$

b. Determinan matriks 2 x 2

   Jika A = $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, maka menjadi det A = $|A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$

   Sebagai contoh: A = $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 5 \end{bmatrix}$ maka $|A| = 1(5) - 3(5) = -10$

c. Determinan matriks 3 x 3

   Untuk matriks 3 x , cara yang dapat digunakan adalah *metode sarrus*.

Prosedur metode sarrus adalah:

a. Tambahkan dua kolom pertama ke matrik A disebelah kanan elemen-elemen matriks A
b. Tarik diagonal utama dari sebelah kiri atas ke sebelah kanan bawah, dimulai dari a_{11}, a_{12} dan a_{13} masing-masing anggota diagonal utama dikalikan kemudian dijumlahkan.
c. Tarik diagonal bantu dari kanan atas ke kiri bawah, dimulai dari a_{13}, a_{12} dan a_{11} masing-masing anggota diagonalbantu dikalikan kemudian dujumahkan.
d. Determinan matriks 3 x 3 didapat dari selisih antara penjumlahan diagonal utama dengan penjumlahan diagonal bantu.

Contoh: Hitunglah I A I ! jika diketahui matriks A sebagai berikut :

$$A = \begin{matrix} 4 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{matrix}$$

$$\text{Det } A = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 3 & 4 & 2 \\ 4 & 5 & 6 & 4 & 5 \\ 7 & 8 & 9 & 7 & 8 \end{vmatrix}$$

={(4)(5)(9) + (2)(6)(7) + (3)(4)(8)} – { (3)(5)(7) + (8)(6)(4) + (9)(4)(2)} = 360 – 369

= -9

8. INVERS MATRIKS

a. Invers Matriks Untuk Ordo 2 X 2

Apabila ada matriks dengan AB = BA = I , dimana I merupakan matriks identitasdengan $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ maka matriks A dan B dapat dikatakan saling invers. Oleh karena itu suatu invers matriks A dapat dinotasikan dengan A^{-1}. Sebagai contoh jika $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix}$ maka :

AB = I $\Rightarrow \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} ap+br & aq+bs \\ cp+dr & cq+ds \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Karena $B = A^{-1}$ = $\begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix}$ maka nilai dari $A^{-1} = \dfrac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

Fungsi dari ad – bc disebut dengan determinan (D) atau bisa dikatakan $|A|$ atau det(A).

Jadi jika ada $D = |A| = \det(A) = ad - bc$.

Apabila nilai D = 0, artinya sebuah matriks A tersebut tidak mempunyai invers dan matriks A, dalam hal ini dikatakan sebagai matriks Singular.

Jadi apabila **ad – bc** $\neq 0$ **maka dapat dikatakan bahwa matriks A merupakan matriks Non Singular.**

Sebagai contoh, perhatikan matriks berikut :

1) Tentukan determinan $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$

   Penyelesaian :

   $|A|$ = (2)(-1) – (-3)(5) = -2 + 15 = 13

2) Tentukan invers dari $P = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}$

   Penyelesaian :

   $P^{-1} =$ 1/(-5 +6) $\begin{bmatrix} 5 & -4 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$

   = -1$\begin{bmatrix} 5 & -4 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$

   = $\begin{bmatrix} -5 & 4 \\ 2 & -11 \end{bmatrix}$

3) Tentukan matriks X jika $X\begin{bmatrix}3 & 5\\4 & 7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 4\\2 & 5\end{bmatrix}$

Penyelesaian :

XA = B $\Rightarrow$ X = BA^{-1} = $\begin{bmatrix}1 & 4\\2 & 5\end{bmatrix}1/(21-20)\begin{bmatrix}7 & -5\\-4 & 3\end{bmatrix}$

X = $\begin{bmatrix}1 & 4\\2 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}7 & -5\\-4 & 3\end{bmatrix}$

= $\begin{bmatrix}7-16 & -5+12\\14-20 & -10+15\end{bmatrix}$

= $\begin{bmatrix}-9 & 7\\-6 & 5\end{bmatrix}$

Apabila ada dua persamaan matriks dengan fungsi sebagai berikut :

Jika AX = B maka nilai dari X $= A^{-1}B$

Jika XA = B maka nilai dari X = BA^{-1}

b. Invers Matriks Ordo 3 X 3

1) Determinan Matriks Untuk Ordo 3 X 3

Untuk menentukan determinan dari suatu matriks yang mempunyai ordo 3 x 3, cara penyelesainnya dengan menggunakan diagram SARRUS. Apa itu SARRUS? Penjelasannya adalah sebagi berikut :

a) Pertama adalah dengan menyalin dua kolom utama yaitu kolom pertama dan kolom kedua kemudian diletakan pada kolom keempat dan kelima secara berurutan.

b) Kedua, kemudian kurangi jumlah perkalian pada anggota di diagonal ke bawah dengan jumlah perkalian anggota pada diagonal ke atas.

$A=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\a_{21} & a_{22} & a_{23}\\a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{bmatrix}$ $\Rightarrow$ det (A) = $|A| = \begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\a_{21} & a_{22} & a_{23}\\a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}\begin{matrix}a_{11} & a_{12}\\a_{21} & a_{22}\\a_{31} & a_{32}\end{matrix}$

=((a11.a22.a33) + (a12.a23.a31) + (a13.a21.a32)) –
((a31.a22.a13)+ (a32.a23.a11) + (a33.a21.a12))

Contoh Soal :

Jika $B = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \\ -2 & 4 & 3 \end{bmatrix}$ maka tentukan $|P|$!

Penyelesaian :

$$|B| = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \\ -2 & 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$$

= {6 + 30 +0} – {-2 + 40 + 0}

= 36 – 38

= -2

2) Minor, Koofaktor Dan Adjoint

Istilah minor dapat diartikan sebagai sebuah determinan dimana dapat diperoleh dengan cara menghilangkan barisan pada ke-i dan kolom pada ke-j,kemudian ditulis dengan simbol M_{ij} . Untuk kofaktor dapat diperoleh dengan perkalian M_{ij} dengan $(-1)^{i+j}$ dan dapat ditulis dengan K_{ij} . Terakhir adalah adjoint yaitu suatu kofaktor yang ditransposkan kemudian ditulis dengan Adj(A).

Contoh : Jika diketahui matriks $B = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \\ -2 & 4 & 3 \end{bmatrix}$. Tentukan : Minor, Koofaktor, Adjoin

Jawab :

$M_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 20 = -17$ $K_{11} = (-1)^{1+1}(-17) = -17$

$M_{12} = \begin{vmatrix} 0 & 5 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 0 - (-10) = 10$ $K_{12} = (-1)^{1+2}\ (10) = -10$

$M_{13} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 0 - (-2) = 2$ $K_{13} = (-1)^{1+3}\ (2) = 2$

$M_{21} = \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = -9 - 4 = -13$ $K_{21} = (-1)^{2+1}\ (-13) = 13$

$M_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 6 - (-2) = 8$ $K_{22} = (-1)^{2+2}\ (8) = 8$

$M_{23} = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 8 - 6 = 2$ $K_{23} = (-1)^{2+3}\ (2) = -2$

$M_{31} = \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = -15 - 1 = -16$ $K_{31} = (-1)^{3+1}\ (-16) = -16$

$M_{32} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = 10 - 0 = 10$ $K_{32} = (-1)^{3+2}\ (10) = -10$

$M_{33} = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 0 = 2$ $K_{33} = (-1)^{3+3}\ (2) = 2$

$$M = \begin{bmatrix} -17 & 10 & 2 \\ -13 & 8 & 2 \\ -16 & 10 & 2 \end{bmatrix}$$

$$K = \begin{bmatrix} -17 & -10 & 2 \\ 13 & 8 & -2 \\ -16 & -10 & 2 \end{bmatrix}$$

Cara cepat mencari matriks Koofktor = $\begin{bmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{bmatrix}$ x hasil determinan (Minor)

$$\text{Adj } B = K^T = \begin{bmatrix} -17 & 13 & -16 \\ 10 & 8 & -10 \\ 2 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

3) Invers Matriks Untuk Ordo 3 X 3

Dalam menentukan suatu invers matriks A dengan ordo 3 x 3 adalah dengan menggunakan rumus yang dijabarkan berikut ini:

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{|A|} Adj(A)}$$

Contoh soal seperti contoh matriks B di atas,

Tentukan invers dari $B = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \\ -2 & 4 & 3 \end{bmatrix}$

B^{-1} = 1/-2 $\begin{bmatrix} -17 & 13 & -16 \\ 10 & 8 & -10 \\ 2 & -2 & 2 \end{bmatrix}$

C. Soal Latihan/Tugas

1. Tentukan determinannya !

   a. $A = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

   b. $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

2. Tentukan inversnya ! (jika ada)

   a. $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$

   b. $B = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}$

   c. $C = \begin{bmatrix} 4 & 8 \\ -3 & -6 \end{bmatrix}$

d. $D = \begin{bmatrix} 10 & -6 \\ 8 & -5 \end{bmatrix}$

3. Tentukan matriks X jika :

a. $X\begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 5 \\ 14 & 15 \end{bmatrix}$

b. $\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 28 \\ -14 \end{bmatrix}$

4. Diketahui $X = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -4 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$. Tentukan : Minor, Kofaktor, Adjoin, dan Invers!

D. Daftar Pustaka

Atmaja Saputra. (2002). *Matematika Ekonomi 1*. Bandung: Ghalia Indonesia.

Dumairy. (2012). *Matematika Terapan Untuk Bisnis Dan Ekonomi*. Yogyakarta: BPFE.

Haussler, Paul, Wood. (2010). *Pengantar Matematika Ekonomi Untuk Analisis Bisnis dan Ilmu-ilmu Ekonomi*. Jakarta: Erlangga.

Joseph B Kalangi. (2011). *Matematika Ekonomi Dan Bisnis*. Jakarta: Salemba Empat.

Nugroho, Yulianto dkk. (2014). *Matematika Ekonomi Dan Bisnis*. Jakarta: Rajawali Pers.

PERTEMUAN 11
LIMIT FUNGSI

A. Tujuan Pembelajaran

Dalam pertemuan 11 ini, mahasiswa akan mempelajari mengenai limit fungsi. Setelah mempelajarinya, mahasiswa mampu menjelaskan mengenai jenis dari limit fungsi, dan cara pengoperasiannya berdasarkan kaidah-kaidah yang menjadi syarat limit fungsi itu sendiri.

B. Uraian Materi

1. Limit Fungsi Aljabar

Limit merupakan suatu batas tertinggi dari suatu peubahxdalam suatu fungsi, dimana nilai xdikatakan mendekatia, yang batas limitnya bernilai lebih kecil daria. Limit menjadi gambaran untuk mengetahui seberapa jauh suatu fungsi akan meningkat jika variabel dalam suatu fungsi mendekati nilai tertentu. Notasi untuk limit fungsi dapat dijabarkan menjadi berikut ini :

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

Artinya bahwa suatu limit dalam fungsi f (x) dengan x mendekati ada adalah bernilai L. Jika dalam variable pada x terus meningkat, mendekati suatu bilangan tertentu dalam a, maka fungsi f(x) akan berkembang juga hingga mendekati hasil L. Pada notasi tersebut x → a akan di tafsirkan sebagai suatu x yang mendekati a, dan tidak berarti juga bahwa x sama dengan nilai a. Silahkan pahami fungsi limit berikut, untuk menambah pemahaman :

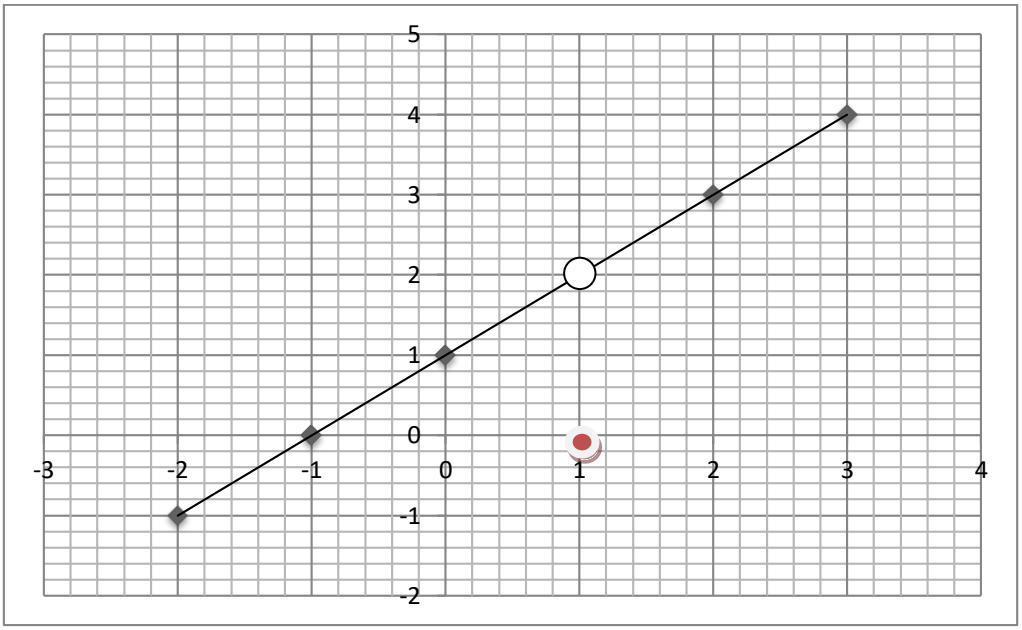
Jika suatu fungsi f dapat dijabarkandengan fungsi **f(x) =** $\frac{x^2 - 1}{x - 1}$

Maka solusi untuk gambar grafiknya, adalah dengan pasangan titik koordinat pada fungsi sebagai berikut:

Tabel 11.1 Fungsi Limit

x	Y
-2	-1
-1	0
0	1
1	Tidak terdefiisi
2	3
3	4

Untuk grafiknya, silahkan pahami seperti penyaksian berikut :



Gambar 11.1 Grafik Fungsi Limit

Berdasarkan perhitungan pasangan titik koordinat, pada saat x = 1, maka akan diperoleh y = 0/0 yang artinya nilai yang tidak terdefinisi. Sehingga gambar grafik fungsi pada titik x = 1 garis fungsinya *Asinambung*.

Jika fungsi pada contoh diubah menjadi bentuk limit: $\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$,maka dapat dibuktikan dengan menggunakan limit sebelah kiri dan limit sebelah kanan sebagai berikut:

Limit Sebelah Kiri	Limit Sebelah Kanan
Jika x = 0,9 Y = $\frac{0,9^2-1}{0,9-1}$ Y = 1,9 (mendekati 2)	Jika x = 1,1 Y = $\frac{1,1^2-1}{1,1-1}$ Y = 2,1 (mendekati 2)

Dari uraian table di atas, makabisa dikatakanapabila suatu fungsi f (x) = $\frac{x^2-1}{x-1}$: untuk x akan mendekati 1, maka y akan mendekati nilai 2, bisa dengan didekati dari ruas kiri dengan disebut limit kiri, maupun dengan limit kanan, yaitu sebelah kanan penyelesainnya. Dapat dituliskan kesimpulannya menjadi $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=2$.

Sebagai suatu fungsi f dapat didefinisikan dengan nilai f (x) = $\frac{x^2-x-2}{x-2}$, apabila variabel x dirubah dengan angka 2, jadi nilai dari f (x) = $\frac{0}{0}$ sehingga tidak ditemukan nilainya. Untuk itu perhatikan tabel berikut untuk membantu nilai tersebut :

x :	0	1.1	1.5	1.9	1.999	2.00	2.01	2.5	2.7
f(x) :	1	2.1	2.5	2.9	2.999	?	3.01	3.5	3.7

Berdasarkan table di atas, maka bisa digaris bawahi bahwa dalam fungsi f (x) = $\frac{x^2-x-2}{x-2}$, hasilnya akan mendekati hamper 3. Apabila nilai x mendekati dengan 2, maka bisa disusun dari ruas kanan maupun ruas kiri, hasilnya akan sama saja. Sehingga bisa disimpulkan bahwa $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-x-2}{x-2}=3$.

Dalam pembahasan limit disini, akan dibahas jenis dari limit yaitu pertama limit mendekati nilai tertentu dan limit mendekati tak terhingga.

2. Limit mendekati Nilai Tertentu

Dalam menyelesaikan persoalan limitsepertidiatas, adalah tidak efektif, dan akan memakan banyak waktu, satu soal bisa beberapa menit. Sebagai solusi dari permasalahan di atas, maka bisa menentukan nilai limit dari fungsi dengan beberapa cara, ada tiga cara untuk mengatasi limit dengan nilai tertentu :

a. Subtitusi

Substitusi yang dimaksud adalah, adanya limit dengan nilai tertentu, kemudian limit tersebut dimasukan kedalam persamaannya sesuai dengan angka yang mendekatinya tersebut. Perhatikanlah beberapa kasus berikut ini :

Contoh Soal 1 :

Tentukan nilai $\lim_{x \to 3} \left(x^2 - 11\right)$!

Penyelesaian :

Limit fungsi dari f(x) = x^2 – 11

Cara penyelesaiannya dengan mensubtitusikan x =3 dalam persamaan limit f(x) tersebut, yaitu menjadi :

$$\lim_{x \to 3} \left(x^2 - 11\right) = 3^2 - 11$$

= 9 – 11

= -2

Artinya jika x mendekati nilai 3 sehingga x^2 – 11 bernilai pada 3^2 – 11 = 9 –11= -2 . Dengan catatan menyesuaikan kaidah berikut ini :

1) Apabila ada f (a) = c, jadi rumusnya menjadi $\lim_{x \to a} f(x) = a$
2) Apabila ada f (a) = $\frac{c}{0}$ jadi rumusnya berubah menjadi $\lim_{x \to a} f(x) = \sim$
3) Apabila ada f (a) = $\frac{0}{c}$, jadi rumusnya menjadi $\lim_{x \to a} f(x) = 0$

b. Pemfaktoran

Pemfaktoran disini adalah cara kedua yang dilakukan apabila ketika limit tersebut dimasukan nilainya, dan hasilnya adalah $\frac{0}{0}$, maka tidak boleh berlaku

substitusi. Oleh karena itu, cara pemfaktoran harus digunakan. Alternatif pemfaktoran ini digunakan apabila fungsi bisa difaktorkan, sehingga limit tidak menghasilkan nilai yang tidak terdefinisi. Untuk lebih memahami materi, perhatikan contoh berikut ini :

Contoh Soal 2 :

Tentukan hasil dari $\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3}$!

Penyelesaian :

Apabila x = 3 kemudian disubtitusikan, sehingga fungsinya menjadi f (3) = $\frac{3^2 - 9}{3 - 3} = \frac{0}{0}$, tidak boleh dalam limit bernilai nol. Jika ada bilangan yang dibagi 0 maka hasilnya tidak terdefinisi, oleh karena itu dalam limit pun jika hasil substitusinya bernilai penyebut 0, maka jelas fungsi limit tersebut adalah diselesaikan dengan pemfaktoran. Sehingga, soal di atas dapat diselesaikan dengan cara berikut :

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = \lim_{x \to 3} \frac{(x+3)\cancel{(x-3)}}{\cancel{(x-3)}}$$

$$= \lim_{x \to 3} (x + 3)$$

$$= 3 + 3$$

$$= 6$$

Jadi hasil limit dari soal di atas adalah 6.

c. Merasionalkan Penyebut

Merasionalkan penyebut ini merupakan cara ketigayang bisa digunakan dengan catatan bahwa penyebutnya dalam bentuk akar yang perlu dirasionalkan terlebih dahulu. Hal ini berdampak untuk menolak bahwa tidak akan terjadi pembagian nilai 0 dengan 0. Perhatikan contoh berikut ini :

Contoh Soal 3 :

Hitunglan nilai dari $\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{\sqrt{x - 2}}$!

Penyelesaian:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-3x+2}{\sqrt{x-2}} = \lim_{x\to 2}\frac{x^2-3x+2}{\sqrt{x-2}}\cdot\frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x-2}}$$

$$= \lim_{x\to 2}\frac{\left(x^2-3x+2\right)\left(\sqrt{x-2}\right)}{\left(\sqrt{x-2}\right)^2}$$

$$= \lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x-1)\left(\sqrt{x-2}\right)}{(x-2)}$$

$$= \lim_{x\to 2}(x-1)\sqrt{x-2}$$

$$= (2-1).\sqrt{2-2}$$

= 1 . 0

= 0

d. Merasionalkan Pembilang

Merasionalkan pembilang merupakan kebalikan dari merasionalkan penyebut. Artinya apabila pembilang dalam bentuk akar, maka suatu limit bisa dikerjakan dengan merasionalkan pembilangnya. Perhatikan contoh aplikasinya berikut!

Contoh Soal 4 :

Hitunglah nilai dari $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{3x-2}-\sqrt{4x-3}}{x-1}$!

Penyelesaian:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{3x-2}-\sqrt{4x-3}}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{3x-2}-\sqrt{4x-3}}{x-1}\cdot\frac{\sqrt{3x-2}+\sqrt{4x-3}}{\sqrt{3x-2}+\sqrt{4x-3}}$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{\left(\sqrt{3x-2}\right)^2-\left(\sqrt{4x-3}\right)^2}{(x-1)\left(\sqrt{3x-2}+\sqrt{4x-3}\right)}$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{-x+1}{(x-1)\left(\sqrt{3x-2}+\sqrt{4x-3}\right)}$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{-1(x-1)}{(x-1)\left(\sqrt{3x-2}+\sqrt{4x-3}\right)}$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{-1}{\sqrt{3x-2}+\sqrt{4x-3}}$$

$$= \frac{-1}{\sqrt{3.1-2}+\sqrt{4.1-3}}$$

$$= \frac{-1}{\sqrt{1}+\sqrt{1}} = \frac{-1}{1+1} = -\frac{1}{2}$$

3. Limit Fungsi Mendekati Tak hingga

Dasar dari fungsi suatu limit dengan mendekati tah hingga adalah sebagai bentuk limit dengan variabel mendekati tak hingga,maka dapat dirumuskan sebagai berikut :

$$\lim_{x\to\sim}\frac{f(x)}{g(x)} \quad \textbf{dan} \quad \lim_{x\to\sim}\left[f(x)\pm g(x)\right]$$

Dalam fungsi suatu limit aljabar mendekati tak berhingga, kita harus mengenal nilai yang boleh atau tidak boleh berikut:

Nilai yang boleh (Nilai tentu):	Nilai yang tidak boleh (Nilai Tak Tentu):
$\frac{a}{b}$ = k $\frac{0}{k}$ = 0 $\frac{k}{0}$ = ∞ $\frac{k}{\infty}$ = 0 $\frac{\infty}{k}$ = ∞ k. ∞ = ∞	$\frac{0}{0}$ $\frac{\infty}{\infty}$ 0^0 ∞- ∞

Dalam menentukan nilai dari limit seperti bentuk yang dinyatakan di atas, maka bisa dilakukan solusi dalam menyelesaikan permasalahan, dengan cara :

a. Dengan Membagi Pangkat Tertinggi

Maksud dari metode ini adalah dengan mencari nilai $\lim_{x \to \sim} \frac{f(x)}{g(x)}$. Yaitu dengan fungsi tersebut membagi nilai dari f(x) maupun g(x), dengan catatan bahwa dalam pangkat yang tertinggi pada n pada fungsi f(x) maupun fungsi g (x). Perhatikan penerapan soal dalam pangkat tertinggi berikut :

Contoh Soal 5 :

Hitunglah nilai limit fungsi dari:

1) $\lim_{x \to \sim} \frac{6x-1}{2x+1}$

2) $\lim_{x \to \sim} \frac{4x+1}{x^2-x}$

3) $\lim_{x \to \infty} \frac{4x^5}{4x^3}$

Penyelesaian:

1) Untuk menentukan nilai dari $\lim_{x \to \sim} \frac{6x-1}{2x+1}$, maka cermati pangkat tertinggi x dari fungsi f (x) = 6x – 1 maupun dari fungsi g(x) = 2x + 1. Setelah dilihat, kita

bisa simpulkan bahwa pangkat tertinggi pada x, diantara keduanya adalah pangkat satu, maka dapat diselesaikan dengan cara :

$$\lim_{x \to \sim} \frac{6x-1}{2x+1} = \lim_{x \to \sim} \frac{\frac{6x}{x} - \frac{1}{x}}{\frac{2x}{x} + \frac{1}{x}}$$

$$= \lim_{x \to \sim} \frac{6 - \frac{1}{x}}{2 + \frac{1}{x}}$$

$$= \frac{6 - \frac{1}{\sim}}{2 + \frac{1}{\sim}}$$

$$= \frac{6-0}{2+0}$$

$$= \frac{6}{2}$$

$$= 3$$

2) Pahami fungsi dari h (x) = $\frac{4x+1}{x^2-2}$!

Dari soal di atas, kita bisa melihat bahwa pangkat x yang dimiliki dalam fungsi tersebut adalah pangkat tertinggi 2, yaitu fungsi penyebut dengan x^2 yang ada dalam fungsi $x^2 - 2$. Sehingga dalam menentukan limit dari $\lim_{x \to \sim} \frac{4x+1}{x^2-x}$, fungsi 4x + 1 maupun fungsi dari $x^2 - 2$ harus dibagi masing-masing dengan x^2.

$$\lim_{x\to\sim}\frac{4x+1}{x^2-x} = \lim_{x\to\sim}\frac{\frac{4x}{x^2}+\frac{1}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}-\frac{2}{x^2}}$$

$$= \lim_{x\to\sim}\frac{\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}}{1-\frac{2}{x^2}}$$

$$= \frac{\frac{4}{\sim}+\frac{1}{(\sim)^2}}{1-\frac{2}{(\sim)^2}}$$

$$= \frac{0+0}{1-0}$$

$$= \frac{0}{1}$$

$$= 0$$

3) $\lim_{x\to\infty}\frac{4x^5}{4x^3}$ dalam fungsi tersebut pangkat tertinggi adalah 5, maka pembilang dan penyebut dibagi dengan x^5.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{4x^5}{4x^3} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{4x^5}{x^5}}{\frac{4x^3}{x^5}}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{4}{\frac{4}{x^2}}$$

$$= \frac{4}{\frac{4}{\infty}}$$

$$= \frac{4}{0}$$

$$= \infty$$

b. Mengalikan dengan Faktor Lawan

Artinya adalah dengan menggunakan rumus kaidah ini, adalah jika diketahui $\lim_{x\to\sim}\left[f(x)\pm g(x)\right]$. Apabila yang dimita dalam menyelesaikan $\lim_{x\to\sim}\left[f(x)\pm g(x)\right]$ini, maka kita harus mengalikan suatu [f (x) + g (x)] terhadap fungsi $\frac{[\mathrm{f}\ (\mathrm{x})-\mathrm{g}\ (\mathrm{x})]}{[\mathrm{f}\ (\mathrm{x})-\mathrm{g}\ (\mathrm{x})]}$ maka di dapat sebuah bentuk fungsi sebagai berikut :

$$\lim_{x\to\sim}\left[f(x)\pm g(x)\right].\ \frac{[\mathrm{f}\ (\mathrm{x})-\mathrm{g}\ (\mathrm{x})]}{[\mathrm{f}\ (\mathrm{x})-\mathrm{g}\ (\mathrm{x})]} = \lim_{x\to\sim}\frac{\left\{[\mathrm{f}\ (\mathrm{x})]^2-[\mathrm{g}\ (\mathrm{x})]^2\right\}}{\mathrm{f}\ (\mathrm{x})-\mathrm{g}\ (\mathrm{x})}$$

ataupun sebaliknya.

Contoh Soal 6 :

Tentukan nilai dari $\lim_{x\to\sim}\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{x^2+x}$

Penyelesaian:

$$\lim_{x\to\sim}\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{x^2+x} = \lim_{x\to\sim}\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{x^2+x}\ .\ \frac{\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{x^2-x}}{\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{x^2-x}}$$

$$= \lim_{x\to\sim}\frac{\left(x^2+2\right)-\left(x^2+1\right)}{\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{x^2-x}}$$

$$= \lim_{x\to\sim}\frac{3x}{\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{x^2-x}}$$

$$= \lim_{x\to\sim}\frac{\frac{3x}{x}}{\sqrt{\frac{x^2}{x^2}+\frac{2x}{x^2}}+\sqrt{\frac{x^2}{x^2}-\frac{x}{x^2}}}$$

$$= \frac{3}{\sqrt{1+0}+\sqrt{1-0}}$$

$$= \frac{3}{2}$$

4. Teorema Limit

Dalam kaidah penyelesaian masalah limit, maka ada beberapa teorema yang harus diterapkan dalam konsep limit itu sendiri. Sebagai contoh n merupakan bilangan bulat positif, maka k adalah konstanta, sedangkan niai f maupun g merupakan fungsi dari limit di a, maka penyelelsaiannya adalah :

a. Dengan $\lim_{x \to a} k = k$

b. Jika $\lim_{x \to a} x = a$

c. Dengan $\lim_{x \to a} k$ f (x) maka k $\lim_{x \to a}$ f (x)

d. Dengan $\lim_{x \to a}$ [f (x) ± g (x)] maka $\lim_{x \to a}$ f (x) ± $\lim_{x \to a}$ g (x)

e. Dengan $\lim_{x \to a}$ v [f (x) . g (x)] maka menjadi $\lim_{x \to a}$ f (x) . $\lim_{x \to a}$ g (x)

f. Dengan fungsi $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)}$, dimana $\lim_{x \to a}$ g(x) ≠ 0

g. Dengan $\lim_{x \to a}$ [f (x)]^n = [$\lim_{x \to a}$ f (x)]^n

h. Dengan $\lim_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \to a} f(x)}$ dimana

$\lim_{x \to a}$ f (x) ≥ 0 jika*n*adalah bilangan genap

$\lim_{x \to a}$ f (x) ≤ 0 jika*n*adalah bilangan ganjil

Contoh Soal 7 :

Hitunglah :

a. Jika $\lim_{x \to 4} \left(3x^2 - x\right)$!

b. Jika $\lim_{x \to 3} \sqrt{\frac{x^2 + 9}{2x}}$

Penyelesaian :

a. $\lim_{x \to 4} \left(3x^2 - x\right) = \lim_{x \to 4} 3x^2 - \lim_{x \to 4} x$ (teori 4)

$= 3 \lim_{x \to 4} x^2 - \lim_{x \to 4} x$ (teori 3)

$= 3 \left[\lim_{x \to 4} x\right]^2 - \lim_{x \to 4} x$ (teori 7)

$= 3. (4)^2 - 4$ (teori 2)

$= 3. 16 - 4$

$= 44$

b. $\lim_{x \to 3} \sqrt{\frac{x^2 + 9}{2x}} = \frac{\lim_{x \to 3} \sqrt{x^2 + 9}}{\lim_{x \to 3} 2x}$ (teori 6)

$= \frac{\sqrt{\lim_{x \to 3} (x^2 + 9)}}{2 \lim_{x \to 3} x}$ (teori 8 & 3)

$= \frac{\sqrt{\lim_{x \to 3} x^2 + \lim_{x \to 3} 9}}{2 \lim_{x \to 3} x}$ (teori 4)

$$= \frac{\sqrt{(\lim_{x\to 3} x)^2 + \lim_{x\to 3} 9}}{2\lim_{x\to 3} x} \quad \text{(teori 7)}$$

$$= \frac{\sqrt{3^2+9}}{2.3} \quad \text{(teori 1 \& 2)}$$

$$= \frac{\sqrt{18}}{6}$$

$$= \frac{3}{6}\sqrt{2}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{2}$$

C. Soal Latihan/Tugas

Hitunglah limit ari fungsi berikut ini :

1. $\lim_{x\to 5}(5x^4 - 6x^2 + 4x + 5)$
2. $\lim_{x\to 4}(5x \quad - 6x)(x+1)$
3. $\lim_{x\to 5}\sqrt{x-1}$
4. $\lim_{x\to 5}\frac{x-1}{x-3}$
5. $\lim_{x\to 7}\frac{x^2-49}{x-7}$
6. $\lim_{x\to 6}\sqrt[3]{x^2-9}$
7. $\lim_{x\to 2} 5\ \frac{2x^3-x}{x^2-4}$
8. $\lim_{x\to\infty}\frac{4x^2+1}{x^2-1}$
9. $\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+4x^2+12}{4x^2+12x}$
10. $\lim_{x\to 3} 4x^{-3}$

D. Daftar Pustaka

Atmaja Saputra. (2002). *Matematika Ekonomi 1*. Bandung: Ghalia Indonesia.

Dumairy. (2012). Matematika Terapan Untuk Bisnis Dan Ekonomi. Yogyakarta: BPFE.

Nugroho, Yulianto dkk. (2014). *Matematika Ekonomi Dan Bisnis*. Jakarta: Rajawali Pers.

PERTEMUAN 12
DIFERENSIAL FUNGSI SEDERHANA

A. Tujuan Pembelajaran

Pada materi pertemuan 12 ini, mahasiswa akan dijelaskan mengenai konsep diferensial fungsi sederhana. Setelah menyelesaikan perkuliahan, mahasiswa diharapkan mampu memahami konsep diferensial fungsi sederhana dan mampu menghitung bagaimana diferensial fungsi sederhana itu dalam kaidah-kaidah diferensial fungsi.

B. Uraian Materi

Diferensial fungsi sederhana akan membahas mengenai tingkat perubahan pada fungsi tertentu dengan perubahan kecil. Dalam hal ini adalah variabel bebas mengenai fungsi-fungsi yang masih berkaitan. Suatu diferensial menjadi tempat kedudukan-kedudukan yang khusus dari fungsi-fungsi layaknya suatu titik maksimum, minimum dan titik belok, apabila memang ada. Konsep diferensial fungsi ini menjadi salah satu analsis dalam penerapan ekonomi dan bisnis dalam menentukan tingkat maksimum maupun minimum.

Suatu diferensial pada dasarnya adalah mengenai fungsi dalam variabel bebas dan bentuk persamaannya. Proses dari penurunan suatu fungsi merupakan penentuan dari limit suatu koefisien diferensiasi dengan menambahkan variabel bebas yang sangat kecil, bahkan mendekati nilai 0. Jadi bisa disimpulkan bahwa suatu diferensial adalah sebuah tingkatan perubahan pada fungsi tertentu karena adanya perubahan-perubahan pada variabel bebas dari suatu fungsi tersebut.

Contoh kasus yang nyata dalam penerapan diferensial fungsi adalah jika ada bukit es di gambar sebagai bentuk dua dimensi atau dua bidang, dengan sudut pandang tegak lurus ke depan, serta papa skri adalah sebagai garis lurusnya. Kemudian posisi tegak pemain ski terhadap papannya adalah bentuk garis yang normal, garis singgung tersebut tegak lurus dengan suatu garis normal. Maka persamaan garis singgung disini merupakan permasalahan mengenai diferensial.

Limit fungsi yang dipelajari pada bab sebelumnya, akan dikembangkan menjadi pembahasan diferensial fungsi.

1. Diferensial Fungsi Sederhana

Jika diketahui suatu fungsi y = f(x) kemudianada tambahan variabel bebas dengan x sebesar nilai Δx (baca: "delta x"), sehingga bentuk umum persamaannya dapat dituliskan menjadi:

$$\mathbf{y = f(x)}$$
$$\mathbf{y + \Delta y = f(x + \Delta x)}$$
$$\mathbf{\Delta y = f(x + \Delta x) - y}$$
$$\mathbf{\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)}$$

Penjelasannya adalah jika Δx adalah tambahan pada x, dan jika Δy merupakan tambahan pada y maka berkenaan tersebut berarti adanya tambahan pada variabel x. Apabila Δy timbul akibat adanya unsur Δx, maka solusi permaslaahannya adalah ruas kiri dan kanan dari persamaan terakhir di atas keduanya dibagi dengan Δx, sehingga diperoleh persamaan sebagai berikut:

$$\frac{\Delta \mathbf{y}}{\Delta \mathbf{x}} = \frac{\mathbf{f}\,(\mathbf{x} + \Delta \mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{x})}{\Delta \mathbf{x}}$$

Jika bentuk dari $\frac{\Delta \mathbf{y}}{\Delta \mathbf{x}}$ ini dinamakan dengan suatu hasil bagi pada perbedaan atau koefisien diferensi (*difference quotient*). Hal ini berarti menggantikan tingkat perubahan rata-rata pada variabel terikat pada y dengan variabel bebas pada x.

Contoh Soal 1 :

Hitunglah diferensial dari fungsi $y = 3x^2 + x$!

Penyelesaian :

$y = 3x^2 - x$

$y + \Delta y = 3(x + \Delta x)^2 - (x + \Delta x)$

$y + \Delta y = 3\{x^2 + 2x(\Delta x) + (\Delta x)^2\} - x - \Delta x$

$y + \Delta y = 3x^2 + 6x(\Delta x) + 3(\Delta x)^2 - x - \Delta x$

$\Delta y = 3x^2 + 6x(\Delta x) + 3(\Delta x)^2 - x - \Delta x - y$

$\Delta y = 3x^2 + 6x(\Delta x) + 3(\Delta x)^2 - x - \Delta x - 3x^2 - x$

$\Delta y = 6x(\Delta x) + 3(\Delta x)^2 - \Delta x$

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{6x(\Delta x) + 3(\Delta x)^2 - \Delta x}{\Delta x}$

$= 6x + 3\Delta x - 1$

Dalam penurunan sebuah fungsi, ada yang dinamakan dengan proses diferensial yang pada intinya adalah bagaimana menentukkan suatu limit tersebut. Pertambahan variabel sangat kecil atau mendekati nol dengan suatu koefisien diferensial. Biasanya dalam lingkungan kita, kita lebih mengenal kata turunan. Turunan adalah bentuk dari diferensial suatu fungsi sebagai hasil proses diferensiasi fungsi itu sendiri. Dengan demikian, apabila ada fungsi y = f(x),

Maka kuosien diferensinya menjadi : $\frac{\Delta \mathbf{y}}{\Delta \mathbf{x}} = \frac{\mathbf{f(x + \Delta x) - f(x)}}{\Delta \mathbf{x}}$

Sehingga turunan fungsinya $\lim_{\Delta x \to 0} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$

$$\lim_{\Delta x \to 0} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Contoh Soal 2 :

Apabila ada suatu persamaan y $= 3x^2 - x$

Maka penyelesaiannya adalah $\Delta y/\Delta x = 6x + 3\Delta x - 1$

(periksa kembali contoh kuosien diferensi sebelumnya)

$$\lim_{\Delta x \to 0} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$\lim_{\Delta x \to 0} = 6x + 3\Delta x - 1$

$= 6x + 3(0) - 1$

$= 6x - 1$

Sehingga dapat disimpulkan bahwa turunannya adalah 6x -1.

Dalam menuliskan suatu bentuk turunan, suatu fungsi bisa dilakukan dengan banyak macam lambing, simbol atau notasi tertentu. Apabila fungsi umum adalah jika y = f (x), maka dapat diturunkan menjadi notasi berikut :

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \equiv y' \equiv f'(x) \equiv y_x \equiv f_x(x) \equiv \frac{y}{x} \equiv \frac{df(x)}{\Delta x}$$

Dimana semua cara dalam penulisannya mempunyai makna yang sama, yaitu melambangkan suatu turnan dari fungsi utamanya adalah y = f (x) terhadap variabel x itu sendiri. Dengan nilai Δxyang sangat kecil.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \equiv y' \equiv f'(x) \equiv y_x \equiv f_x(x) \equiv \frac{y}{x} \equiv \frac{df(x)}{\Delta x} \equiv \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Dapat dikatakan bahwa suatu turunan sebuah fungsi saling berkaitan apabila kuosien difersinya sendiri. Apabila diferensialnya adalah $\frac{\Delta y}{\Delta x}$yang dengan kata lain adalah sebuah lereng dari suatu kurva garis berdasarkan y = f (x)

Berdasarkan berbagai jenis dari notasi suatu turunan fungsi tertentu, yang sering digunakan sevara umum adalah bentuk dari fungsi turunan $\frac{dy}{dx}$.

2. Kaidah Diferensial Fungsi Sederhana

Beberapa kaidah dalam diferensial fungsi sederhana ada beberapa macamnya, penjelasannya adalah sebagai berikut :

a. Diferensiasi Konstanta

Dalam kaidah ini diterapkan nilai apabila nilai y = k, dengan nilai k adalah konstanta, sehingganilai nya menjadi $\frac{dy}{dx} = 0$

Contoh Soal 3 :

Jika diketahui y = 5, maka :

$\frac{dy}{dx}$ = 0

b. Diferensiasi Fungsi Pangkat

Kaidah ini berbunyi apabila nilai $y = x^n$, yang mana n merupakan suatu konstanta, maka nilainya menjadi $\frac{dy}{dx} = nx^{n-1}$

Contoh Soal 4 :

Jika diketahui fungsi y $= x^3$, maka :

$\frac{dy}{dx} = 3x^{3-1}$

$= 3x^2$

c. Diferensasi Perkalian Konstanta Dengan Fungsi

Kaidah ini berbunyi apabila ada nilai y = kv, dimana v = h(x), maka nilainya menjadi $\frac{dy}{dx} = k\frac{dv}{dx}$.

Contoh Soal 5 :

Jika fungsi y $= 10\ x^4$, maka :

$\frac{dy}{dx} = 10\ (4x^3)$

$= 20\ x^3$

d. Diferensiasi Pembagian Konstanta Pada Fungsi

Kaidah ini berisikan apabilasuatu nilai $y = \frac{k}{v}$, dimana fungsi v = h(x), sehingga nilainya menjadi $\frac{dy}{dx} = -\frac{kdv/dv}{v^2}$

Contoh Soal 6 :

Jika y $= \frac{5}{x^3}$, maka :

$\frac{dy}{dx} = -\frac{5(3x^2)}{(x^3)^2}$

$= -\frac{15x^2}{x^6}$

e. Diferensiasi Penjumlahan atau Pengurangan Fungsi

Kaidah yang dimaksud disini adalah apabila fungsi y = u ± v , dimana fungsi u = g(x) dan nilai v = h(x), sehingganilainya menjadi $\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} \pm \frac{dv}{dx}$

Contoh Soal 7 :

Jika diketahui fungsi

Y $= 7x^2 + 2x^3$

Di misalkan:

u = $7x^2$

du/dx = 14x

v = $2x^3$

dv/dx = $6x^2$, sehingga fungsinya menjadi :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}$$

$$= 14x + 6x^2$$

f. Diferensiasi Perkalian Fungsi

Kaidah ini berbunyi apabila fungsi y = uv, dimana u = g(x) dan nilai dari v = h(x), sehingganilainya menjadi : $\mathbf{\frac{dy}{dx} = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}}$

Contoh Soal 8 :

Jika terdapat fungsi y $= (6x^2)(2x^3)$

$$\frac{dy}{dx} = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$$

$$= (6x^2)(6x^2) + (2x^3)(12x)$$

$$= 36x^4 + 24x^4$$

$$= 40x^4$$

g. Diferensiasi Pembagian Fungsi

Kaidah kali ini menerapkan permasalahan apabila suatu fungsi y = $\frac{u}{v}$, dimana nilai dari u = g(x) dan nilai dari v = h(x) , sehingga nilainya menjadi : $\mathbf{\frac{dy}{dx} = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2}}$

Contoh Soal 9 :

Jika diketahui fungsi

$$y = \frac{4x^2}{x^3}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2}$$

$$= \frac{(x^3)(8x) - (4x^2)(3x^2)}{(x^3)^2}$$

$$= \frac{8\,x^4 - 12x^4}{x^6}$$

$= \frac{-4}{x^2}$

$= -4\,x^{-2}$

h. Diferensiasi Fungsi Komposit

Kaidah kedelapan ini menerapkan suatu fungsi apabila fungsi y = f(u) dimana nilai u = g(x), sehingga bisa dikatakan bahwa y = f{g(x)}, maka $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{du}{dx}$

Contoh Soal 10 :

Jika diketahui fungsi Y $= (2x^3 + 3)^2$

misalkan u $= 2x^3 + 3$, sehingga

y $= u^2$

du/dx $= 6x^2$

dy/du $= 2u$

$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{du}{dx}$

$= 2u(6x^2)$

$= 2(2x^3 + 3)(6x^2)$

$= 24x^5 + 36x^2$

i. Diferensiasi Fungsi Berpangkat

Dalam kaidah ini, apabila nilai dari $y = u^n$, dimana fungsi menjadi u = g(x) dan n merupakan konstanta, sehingga nilainya menjadi fungsi $\frac{dy}{dx} = nu^{n-1} \cdot \frac{du}{dx}$

Contoh Soal 11 :

Jika diketahui y $= (8x^3 + 2)^2$

misalkan u $= 8x^3 + 2$ maka :

du/dx $= 24x^2$

$\frac{dy}{dx} = nu^{n-1} \cdot \frac{du}{dx}$

$= 2(8x^3 + 2)(24x^2)$

$= 384x^5 + 48x^2$

Untuk kaidah (i) disini memang mirip pada(h), dan memang merupakan beberapakasus dari kaidah (h). Dalam pedoman kaidah (i) ini ada pula suatu kasus dengan fungsi u = f(x) = x,

makamenjadi : y $= u^n = x^n$,

maka bentuk rumusnya : $\frac{dy}{dx} = nu^{n-1}$ (dengan kata lain kaidah (b).

j. Diferensial Fungsi Dari Logaritmik

Kaidah yang dimaksud adalah jika y = $a_{\log x}$ sehingga nilai $\frac{\mathbf{dy}}{\mathbf{dx}} = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{x\ ln\ a}}$

Contoh Soal 12 :

Jika diketahui

y = $7_{\log 4}$

$\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}} = \frac{1}{x\ ln\ a}$

$= \frac{1}{4\ ln\ 7}$

k. Diferensial Fungsi Komposit Logaritmik

Kaidah dari fungsi ini adalah jika y = $(a_{\log x})^n$ dimana :

u = g (x) , dimana n konstanta,

jadi persamaan menjadi : $\frac{\mathbf{dy}}{\mathbf{dx}} = \frac{\mathbf{dy}}{\mathbf{du}} \cdot \frac{a_{\log x}}{\mathbf{u}} \cdot \frac{\mathbf{du}}{\mathbf{dx}}$

Contoh Soal 13 :

Jika diketahui y = log $(\frac{x-3}{x+2})$

Dimisalkan u = $(\frac{x-3}{x+2})$

Maka $\frac{\mathbf{dy}}{\mathbf{dx}} = \frac{(x-3)-(x-3)}{(x+2)^2}$

$\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}} = \frac{a_{\log x}}{\mathbf{u}} \cdot \frac{\mathbf{du}}{\mathbf{dx}}$

$= \frac{\log e}{\frac{x-3}{x+2}} \cdot \frac{5}{(x+2)^2}$

$= \frac{5\ \log e}{(x+2)(x-3)}$

$= \frac{5\ \log e}{(x^2-x-6)}$

l. Diferensial Fungsi Komposit Logaritmik Berpangkat

Kaidah dalam fungsi ini adalah apabila y = $(a_{\log u})^n$

dengan u = g (x)

sehingga n konstanta, jadi fungsi $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{a_{\log x}}{u} \cdot \frac{du}{dx}$

Contoh Soal 14 :

Jika diketahui y = $(\log 5x^2)^3$

Dimisalkan u = $5\ x^2$

Maka : $\frac{dy}{dx} = 10\ x$

$\frac{dy}{dx} = 3\ (\log 5x^2)^2 \left(\frac{\log e}{5x^2}\right)(10x)$

$= \frac{30\ x\ (\log 5x2)2\ \log e}{5x^2}$

$= \frac{6}{x}\ (\log 5x^2)^2 \log e$

m. Diferensial Fungsi Logaritmik Napier

Kaidah dalam hal ini adalah apabila fungsi y = ln x, sehingga fungsi $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$

Contoh Soal 15 :

Jika diketahui y = ln 5

Maka nilai $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{5}$

Dalam kasus (m) ini merupakan kesamaan dari kaidah (j) yaitu dalam hal logaritma berbasis pada nilai e. Apabila ln ≡ $^e\log x$ sehingga nilai ln e ≡ $^e\log e$ = 1.

Apabila y = ln x = $^e\log x$ sehingga fungsi $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x \ln e} = \frac{1}{x}$

Pada aturan berikutnya masing-masing dari penerapan kasus kaidah (k) dan (l) dan untuk alasan yang sama pula.

n. Diferensial Fungsi Komposit Logaritmik Napier

Kaidah ini berbunyi apabila fungsi dar y = ln u, dan nilai dari u = g (x)

sehingga nilainya menjadi $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{u} = \frac{du}{dx}$

Contoh Soal 16 :

Jika diketahui y $= \ln\left(\frac{x-3}{x+2}\right)$

Misalkan u $= \frac{(x-3)}{(x+2)}$

Maka $y^1 = \frac{5}{(x+2)2}$

$y^1 = \frac{1}{u} \cdot \frac{du}{dx}$

$= \frac{(x-2)}{(x-2)} \cdot \frac{5}{(x+2)2}$

$= \frac{5}{(x2-x-6)}$

o. Diferensial Fungsi Komposit Logaritmik Napier Berpangkat

Dalam kaidah ini diterapkan jika fungsi $y = (\ln u)^n$, dan jika nilai u = g (x) dan n konstanta, sehingga fungsi dari nilai $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{1}{u} \cdot \frac{du}{dx}$

Contoh Soal 17 :

Jika diketahui y $= (\ln 5x^2)^3$

Misalkan u $= 5x^2$

Maka : $\frac{du}{dx} = 10x$

Sehingga $\frac{dy}{dx} = 3(\ln 5x^2)^3 \left(\frac{1}{5x2}\right)(10x)$

$= \frac{6}{x}(\ln 5x^2)^2$

p. Diferensial Fungsi Eksponensial

Kaidah dalam fungsi eksponensial ini adalah apabila fungsi y $= a^x$,

Dan nilai a adalah konstanta, jadi persamaan menjadi $\frac{dy}{dx} = a^x \ln a$

Contoh Soal 18 :

Jika y $= 7^x$

$\frac{dy}{dx} = a^x$

Ln a $= 7^x \ln 7$

Padahal $y = e^x$ dimana fungsi dari $\frac{dy}{dx} = e^x$ pula, karena ln e sama dengan 1.

q. Diferensial Fungsi Kompleks

Kaidah ini terjadi jika $y = u^v$, maka nilai u = g(x), nilai v = h(x)

sehingga $y^1 = v\ u^{v-1}.\ \frac{du}{dx} + u^n \cdot \ln u.\ \frac{dv}{dx}$

Dasar dari y^1 adalah $y = u^v$ bisa juga melalui mengalogaritmakan suatu fungsi dari persamaanya, kemudian di diferensialkan ruasnya masing-masing.

Perhatikan berikut ini :

$y = u^v$

$\ln y = v \ln u$

$\frac{1}{y}\ y^1 = v\ \frac{1}{u}\ \frac{du}{dx} + \ln u\ \frac{dv}{dx}$

$y^1 = (v\ \frac{1}{u}\ \frac{du}{dx} + \ln u\ \frac{dv}{dx})\ u^v$ menginat bahwa $y = u^v$

$\frac{du}{dx} = vu^{-1}\frac{du}{dx} + u^v.\ \ln u\ \frac{dv}{dx}$

Dari beberapa fungsi di atas yang sudah dijelaskan, akan menjadi lebih mudah dalam mendiferensialkannya.

Contoh Soal 19 :

Jika $y = 4x^{x3}$

Misalkan $u = 4x$

Maka $\frac{du}{dx} = 4$

$v = x^3$

Maka $\frac{dv}{dx} = 3x^2$

$y^1 = vu^{v-1}.\ \frac{du}{dx} + u^v.\ \ln u.\ \frac{dv}{dx}$

$= (x^3)\ 4x^{x3-1}\ (4) + 4x^{x3} \ln 4\ x\ (3x^2)$

$= 16x^{x3+2} + 12\ x^{x3+2}\ n\ 4x \ln 4x$

$= 4x^{x3+2} \cdot (4 + 3 \ln 4x)$

3. Hakikat Derifativ Fungsi

Suatu koefisien dari suatu diferensial fungsi merupakan bentuk dari kurva y = f (x). Untuk derifatif atau turunannya yaitu $\frac{dy}{dx}$ adalah lim dari $\frac{y}{x}$ untuk nilai x sendiri.

Apabila nilai x itu sangat kecil, maka limit $\frac{y}{x} = \frac{y}{x}$ sendiri. Bisa dikatakan bahwa suatu derifativ fungsi pada x akan berkaitan dengan koefisien diferensialnya yaitu $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$. Sehingga dalam nilai x mendekati sangat kecil, maka derifativnya juga sebagai cerminan dari kurva y = f (x).

Suatu diferensial fungsi semakin menjelaskan makna tentang derifativ, dengan menajamkan pemahaman dari 3 konsep yang berkaitan yaitu pertama koefisien diferensial, kedua suatu derifativ itu sendiri dan ketiga diferensial. Sebagai fungsi y = f (x) linier, apabila taksiran sama dengan sesungguhnya, terlebih berapa saja nilai x. Dapat dikatakan bahwa, suatu derifativ fungsi linier tidak lain merupakan koefisien diferensialnya, atau bisa disebutkan bahwa $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$. Artinya jika nilai dari x = dx maka selalu menjadi dy = y, diperoleh fungsi $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$.

Penerapan dari suatu diferensial fungsi menjadi bentuk turunan yang sering menjadi karakteristik sebagai berikut :

a. Kemonotonan

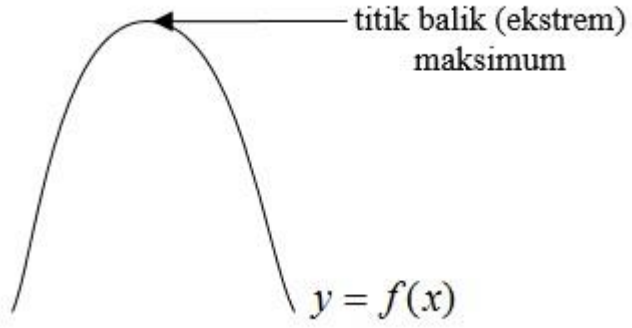
   Dalam fungsi kemonotonan ini berfungsi sebagai alat untuk mengidentifikasi dari grafik fungsi apakah bergerak dengan naik ke atas, atau bergerak dengan turun ke bawah.

b. Titik Ektrim

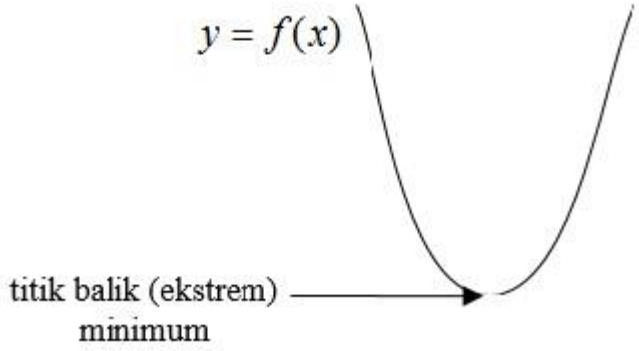
   Dalam titik ekstrim ini, akan mengidentifikasi suatu titik balik dari fungsi tersebut (bilamana ada).

c. Titik Belok

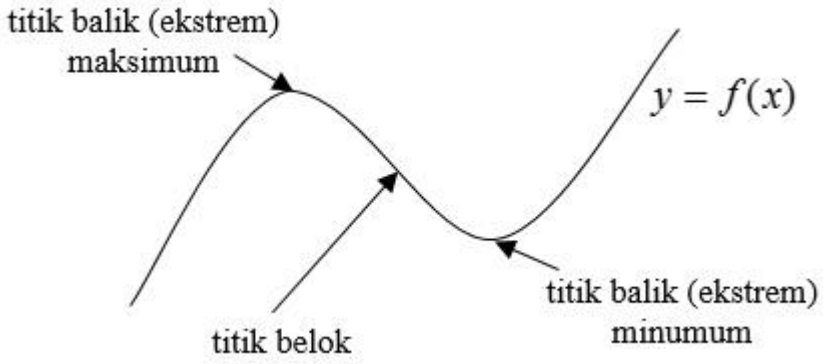
   Dalam kecekungan suatu fungsi, titik belok menjadi alat untuk mengidentifikasi apakah fungsi tersebut cekung ke bawah atau cekung ke atas. Sebagai contoh dari fungsi cekung ini, perhatikan gambar berikut :



Gambar 12.1 Kurva Fungsi Cekung Bawah



Gambar 12.2 Kurva Fungsi Cekung Atas



Gambar 12.3 Kurva Fungsi Titik Balik

C. Soal Latihan/Tugas

Tentukan $\frac{dy}{dx}$ dari fungsi berikut dengan teliti dan benar sesuai kaidah-kaidah diferensial fungsi di atas !

1. $y = 2x^2 - 4x^2 + 7x - 5$
2. $y = 9 - 3x^{-1} + 6x^{-2}$
3. $y = (x^2 - x)(2x - 6)$
4. $y = (3x^2 - x)(2 + x^{-1})$
5. $y = (x^{221} - 3x)(2 + x^{-1})$
6. $y = \frac{x^2 - 4}{2x - 6}$
7. $y = \frac{3x + 2}{4x - 5}$
8. $y = (x^2 + 3)^3$
9. $y = (3x^2 - x)\left(\frac{5x+2}{x}\right)$
10. $y = \left(\frac{5x+2}{x}\right)^2$
11. $y = 6\sqrt{x^2 + 4}$
12. $y = (3x^2 + 3)^3$
13. $y = \frac{5x + 2}{4x - 10}$
14. $y = 5\frac{3x + 2}{4x - 5}$
15. $y = (14x^2 + 6x)^3$
16. $y = -5x^{-1} + 6x^{-2}$
17. $y = 9 - 3x^{-1} + 6x^{-2}$

D. Daftar Pustaka

Dumairy. (2015). *Matematika Terapan Untuk Bisnis dan Ekonomi*. Yogyakarta. BPFE-Yogyakarta.

Nugroho, Yulianto dkk. (2014). *Matematika Ekonomi Dan Bisnis*. Jakarta: Rajawali Pers.

PERTEMUAN 13
HUBUNGAN FUNGSI DENGAN DERIVATIFNYA

A. Tujuan Pembelajaran

Pada pertemuan 13 ini, mahasiswa akan dijelaskan materi mengenai hubungan fungsi dengan derivatifnya. Setelah menyelesaikan perkuliahan, mahasiswa diharapkan mampu memahami pengertian derivatif dari derivative dan mampu untuk menentukan hubungan fungsi dengan derivatifnya.

B. Uraian Materi

1. Derivatif dari Derivatif

Derajat dari suatu fungsi berguna untuk mengetahui berapa kali fungsi tersebut dapat diturunkan. Haliniberarti suatu turunan dapat diturunkan lagi dan hasil dari turunanya masih bisa diturunkan lagi. Turunan pertama (*first derivative)* dari sebuah fungsi yakni turunan awal dari sebuah fungsi asli. Turunan kedua (*second derivative*) dari fungsi yakni turunan dari turunan pertama, kemudian trurunan ketiga (*third derivative*) dari sebuah fungsi yakni turunan dari turunan kedua dan seterusnya.

Diferensiasi adalah Proses penuruna sebuah fungsi dimana merupakan penentuan suatu limit dari koefisien diferensi dalam pertambahan variabel bebasnya yang mendekati nol atau sangat kecil. Berikut adalah hasil dari diferensiasi ($\frac{\Delta y}{\Delta x}\ atau\ \frac{dy}{dx}$).

Notasi turunan fungsi yang digunakan untuk menuliskan lambang turunan fungsi y = f(x) yaitu menjadi y' = f'(x). Notasi lain yang dapat digunakan adalah notasi Leibniz, yang menyatakan turunan fungsi y variabel x yaitu $\frac{dy}{dx}$.

Fungsi awal : y = f(x)

Turunan pertama y' ≡ f '(x) ≡ dy ≡ $\frac{dy}{dx}$ ≡ $\frac{df(x)}{dx}$

(tanda "≡" didefinisikan sebagai nama lain dari)

Turunan kedua : y" ≡ f" (x) ≡ $\boldsymbol{\frac{d^2y}{dx^2}}$≡ $\boldsymbol{\frac{d^2f(x)}{dx^2}}$

Turunan ketiga : y''' ≡ f''' (x) ≡ $\frac{d^3y}{dx^3}$ ≡ $\frac{d^3f(x)}{dx^3}$

Turunan ke-n : $y^n \equiv f^n$ ≡ $\frac{d^ny}{dx^n}$ ≡ $\frac{d^nf(x)}{dx^n}$

Contoh Soal 1 :

y = f(x) = $x^3 - 4x^2 + 5x - 7$

y' = $\frac{dy}{dx}$ = $3x^2 - 8x + 5$

y'' = $\frac{d^2y}{d^2x}$ = 6x – 8

y''' = $\frac{d^3y}{d^3x}$ = 6

y'''' = $\frac{d^4y}{d^4x}$ = 0

Derivatif yang diperoleh dari derivatif sebuah fungsi dinamakan derivatif berderajat lebih tinggi (*higher-order derivatives*). Derivatif pertama dan kedua sangat bermanfaat untuk menelaah fungsi yang bersangkutan. Pembahasan besar kecilnya harga atau nilai derivatif pertama dan kedua dapat digunakan untuk menentukan posisi-posisi khusus dari kurva fungsi (*non-linear*) yang bersangkutan.

a. Kaidah-Kaidah Derivatif

1) Kaidah Fungsi Konstan

   Derivatif atau turunan fungsi konstan adalah nol.

   Misalnya : Y = f(k)

   Y = 10

   = 0

2) Kaidah Fungsi Linier

   Turunan dari fungsi linier adalah koefisien dari variabel bebasnya

   Misalnya : Y = a + bx

   Y = b

3) Kaidah Fungsi Pangkat

   Turunan dari fungsi pangkat adalah eksponen (pangkat) dikali koefisien, dikali variabel dipangkat eksponen kurang satu.

   Misalnya : $Y = ax^n$

   $= a.n\ x^{n-1}$

Contoh : Y = 1/3 x^6

Y' = $2x^5$

4) Derivatif penjumlahan fungsi

Jika y = u ± v, dimana u = g(x) dan v = h(x), maka y' = u' ± v'

Contoh :

y = 3x2 + 8x, maka y' = 6x + 8

5) Derivatif perkalian fungsi

a) Perkalian fungsi dan konstanta

Jika y = k.u, dimana k adalah konstanta dan u = g(x), maka y' = k.u'

Contoh :

y = 3(5x2 – 4x + 1), maka nilai :

y' = 3(10x – 4) y'

= 30x – 12

b) Perkalian fungsi

Jika y = u.v, dimana u = g(x) dan v = h(x), maka y' = u'v + uv'

Contoh :

y = (2x5 – 7)(3x2 + 4),

u = (2x5 – 7) maka u' = 10x4

v = (3x 2 + 4) maka v' = 6x

y' = u'v + uv'

y' = (10x4)(3x2 + 4) + (2x5 – 7)(6x)

y' = 30x6 + 40x4 + 12x6 – 42x

y' = 42x6 + 40x4 – 42x

c) Derivatif hasilbagi fungsi

Jika y = $\frac{U}{V}$, dimana u = g(x) dan v = h(x) , maka y' = $\frac{U'V-UV'}{V^2}$

Contoh y = $\frac{(X^6+3X)}{4X^2}$maka,

u = (x6 + 3x) maka u' = $6x^5 + 3$

v = 4x2 maka v' = 8x

y'= $\frac{(6x^5+3)(4x^2)-)\ (x^6+3x)(8x)}{(4x^2)^2}$

$$y' = \frac{24x^7 + 12x^2 - 8x^7 - 24x^2}{16x^4}$$

$$y' = \frac{16x^7 - 12x^2}{16x^4}$$

$$y' = \frac{4x^5 - 3}{4x^2}$$

2. Hubungan Fungsi Dengan Derifativnya

Pendekatan kalkulus diferensial bermanfaat untuk melihat suatu bentuk gambar dari suatu fungsi non-linear. Dengan cara melihat nilai atau harga dari turunan pertama(*first derivative)* dan turunan kedua(*second derivative)* suatu fungsi maka akan dapat dilihat bentuk gambar dari fungsi tersebut. Pembahasan berikutnya yakni meliputi mengenai hubungan fungsi non-linear dengan *first derivative*guna mengetahui bentuk kurvanya naik atau turun pada kondisi tertentu; hubungan antara fungsi *parabolik* dan *derivatifnya*, guna melihat letak dan bentuk dari titik ekstrim (maksimum dan minimum) suatu kurva; serta hubungan fungsi kubik dengan *derivatifnya*, untuk mengetahui bentuk dan letak titik ekstrim serta titik belok suatu kurva.

Berdasarkan kaidah diferensiasi yang sudah dijelaskan diatas, maka dapat disimpulkan Turunan (*derivatif)* dari suatu fungsi berderajat “n” adalah sebuah fungsi berderajat “n-1”. Sehingga, turunan dari suatu fungsi berderajat 3 adalah sebuah fungsi berderajat 2; turunan dari suatu fungsi berderajat 2 adalah sebuah fungsi berderajat 1; turunan dari fungsi berderajat 1 adalah sebuah fungsi berderajat 0 alias sebuah konstanta; dan akhirnya, turunan dari sebuah konstanta adalah 0.

Perhatikan contoh berikut mengenai pengurangan derajat fungsi pada tiap turunannya.

$y = f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 4x^2 + 12x - 5$ .....fungsi kubik

$y' = \frac{dy}{dx} = x^2 - 8x + 12$.....fungsi kuadrat

$y'' = \frac{d^2y}{d^2x} = 2x - 8$.....fungsi linear

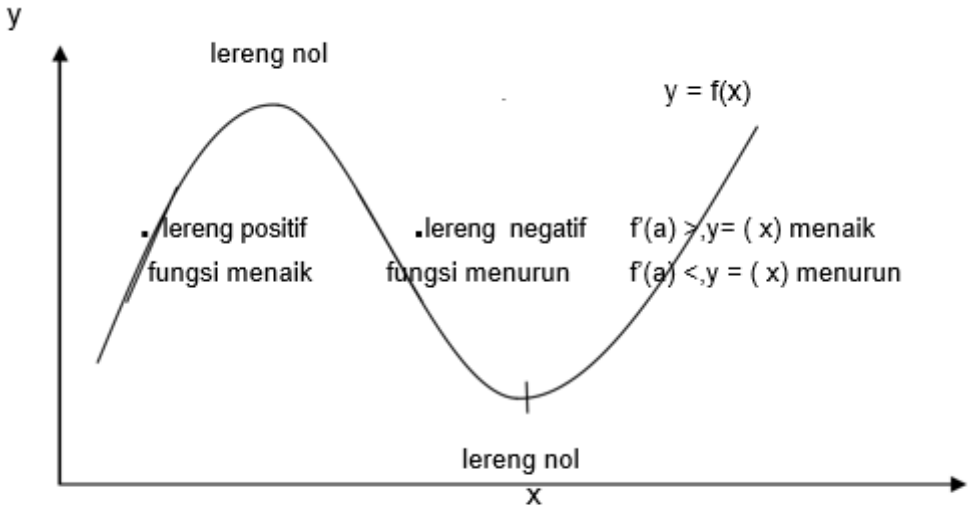
$y''' = \frac{d^3y}{d^3x} = 2$ .....konstanta

a. Fungsi Naik dan Fungsi Turun

Derivatif pertama dari sebuah fungsi non-linear dapat digunakan untuk menentukan apakah kurva dari fungsi yang bersangkutan menaik ataukah menurun pada kedudukan tertentu. Pada kasus khusus, derivatif pertama dapat pula menunjukkan titik ekstrim sebuah fungsi non-linear.

Derivatif pertama dari fungsi y = f(x), yakni f"(x), tak lain adalah lereng (taksiran) dari kurva yang mencerminkan fungsi y = f(x). Berarti untuk y = f(x) pada kedudukan tertentu x = a, f"(a) merupakan lereng kurva y = f(x) pada kedudukan x = a. Nilai positif/negatifnya dari f"(a) akan menentukan menaik atau menurunnya fungsi y = f(x) pada x = a.

Jika derivatif pertama f"(a) > 0 (lereng kurvanya positif pada x = a), maka y = f(x) merupakan fungsi naik manakala x bertambah sesudah x = a. Jika derivatif pertama f"(a) < 0 (lereng kurvanya negatif pada x = a), maka y = f(x) merupakan fungsi menurun pada kedudukan x = a; yakni y = f(x) menurun manakala x bertambah sesudah x = a.



Gambar 13.1 Grafik fungsi kubik

Uji Tanda. Apabila derivatif pertama f"(x) = 0, berarti y = f(x)berada di titik ekstrimnya. Guna menentukan apakah titik ekstrim tersebut merupakan titik maksimum atau titik minimum, perlu dilakukan uji tanda terhadap f"(a) = 0. Jika

f"(x) > 0 untuk x < a dan f"(x) < 0 untuk x > a maka titik ektrimnya adalah titik maksimum. Sedangkan jika f"(x) < 0 untuk x < a dan f"(x) > 0 untuk x > a, maka titik ektrimnya adalah titik minimum.

Contoh Soal 2 :

Tentukan apakah $y = f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 4x^2 + 12x - 5$ merupakan fungsi menaik ataukah fungsi menurun pada x = 5 dan x = 7. selidiki pula untuk x = 6.

Penyelesaian :

$y = f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 4x^2 + 12x - 5$

$f''(x) = x^2 - 8x + 12$

pada x = 5 maka $f''(5) = 5^2 - 8(5) + 12 = -3 < 0$,

berarti y = f(x) menurun pada x = 5

pada x = 7 maka $f''(7) = 7^2 - 8(7) + 12 = 5 > 0$,

berarti y = f(x) menaik pada x = 7

pada x = 6 maka $f''(6) = 6^2 - 8(6) + 12 = 0 = 0$, berarti y = f(x) berada di titik ekstrim pada x = 6; karena f"(x) < 0 untuk x < 6 dan f"(x) > 0 untuk x > 6, titik ekstrim pada x = 6 ini adalah titik minimum.

[Apabila diselidiki lebih lanjut, sesungguhnya f"(x) < 0 hanya berlaku untuk interval 2 < x < 6. pada kedudukan x = 2, y = f"(x) berada di titik ekstrim yang lain, yaitu titik maksimum. Buktikan !]

b. Titik Ekstrim Fungsi Parabolik

Yang digunakan adalah turunan pertama (y' = f(x)) dan turunan kedua (y" = f"(x)). Turunan pertama digunakan untuk menentukan letak titik eksrim. Jika f'(x) $= 0$ maka y =f(x) berada pada titik ekstrimnya. Turunan kedua digunakan untuk menentukan jenis titik ekstrimnya.

Jika f"(x) < 0 maka titik ektrimnya maksimum dan kurvanya berbentuk parabola terbuka ke bawah. Jika f"(x) > 0 maka titik ekstrimnya minimum dan kurvanya berbentuk parabola terbuka ke atas.

Pada y = f(x) adalah sebuah fungsi parabolik, derivatif pertama berguna untuk menentukan letak titik ekstrimnya, sedangkan derivatif kedua bermanfaat guna mengetahui jenis titik ekstrim yang bersangkutan. Perhatikan fungsi

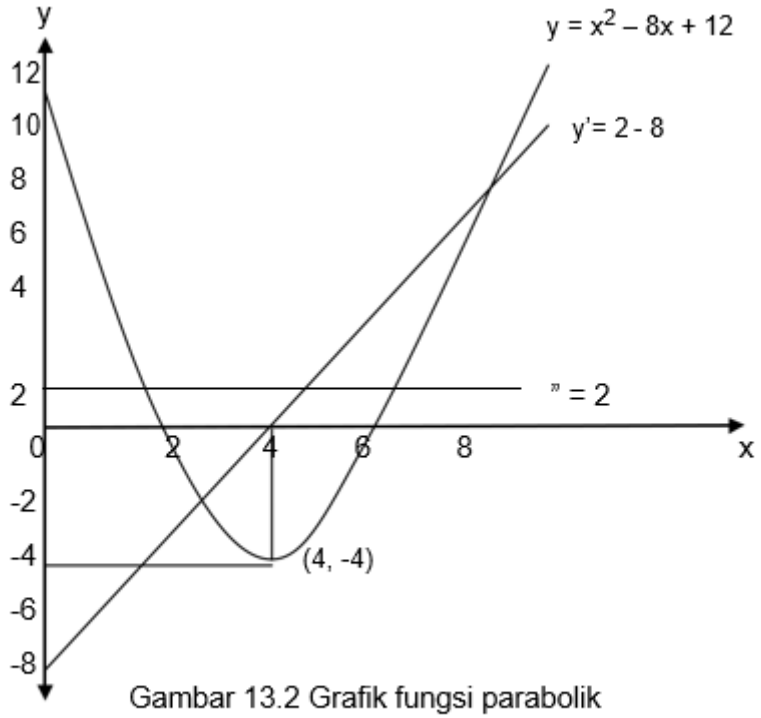
parabolik berikut dan turunan-turunannya, serta hubungan mereka secara grafik.

$y = f(x) = x^2 - 8x + 12$ . . . . . .fungsi parabolik

$y'' = f''(x) = \frac{dy}{dx} = 2x - 8$ . . . . . .fungsi linear

$y''' = f'''(x) = \frac{d^2y}{d^2x} = 2$ . . . . . konstanta

Parabola $y = x^2 - 8x + 12$ mencapai titik ekstrim, dalam hal ini titik minimum yaitu (4,-4) tepat pada saat turunan pertama dari fungsi parabolik tadi (yakni fungsi linear $y'' = 2x - 8$) sama dengan nol. Pada $y'' = 0$, nilai variabel bebas $x = 4$, dan parabola tersebut mencapai titik ekstrimnya yaitu pada kedudukan $x = 4$ dan $y = -4$. Nilai $y = -4$ untuk fungsi parabolik ini diperoleh melalui subtitusi $x = 4$ ke dalam persamaan parabolanya.



Gambar 13.2 Grafik fungsi parabolik

Berdasarkan percobaan di atas, maka selain dengan cara tradisional, penentuan titik ekstrim suatu fungsi parabolik dapat pula dilakukan dengan

pendekatan diferensial. Absis dari titik ekstrim fungsi parabolik y = f(x) adalah x pada y" = 0, sedangkan ordinatnya adalah y untuk x pada y" = 0. Kemudian untuk mengetahui apakah titik ekstrimnya berupa titik maksimum ataukah titik minimum, dengan kata lain untuk mengetahui apakah parabolanya terbuka ke bawah atau ke atas, dapat disidik melalui turunan kedua dari fungsi paraboliknya yaitu y"". Apabila y"" < 0, bentuk parabolanya terbuka ke bawah, titik ekstrimnya adalah titik minimum.

Sebaliknya jika y"" > 0, bentuk parabolanya terbuka ke atas, titik ekstrimnya adalah titik minimum. Jadi ringkasnya adalah :

Parabola y = f(x) mencapai titik ekstrim pada y" = 0.

⇨ Jika y" < 0 maka bentuk parabolanya terbuka ke bawah, titik ekstrimnya adalah titik maksimum.

⇨ Jika y" > 0 maka bentuk parabolanya terbuka ke atas, titik ekstrimnya adalah titik minimum.

Contoh Soal 3 :

Andaikan y = $-x^2 + 6x - 2$

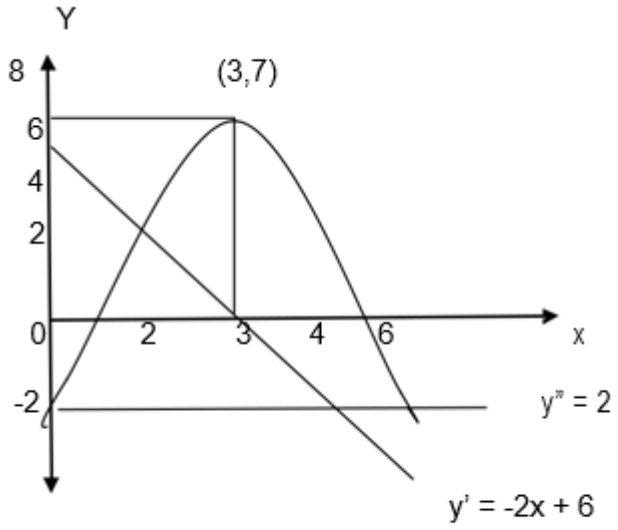
Maka y" = -2x + 6 dan y" = -2 < 0

Karena y" < 0 maka bentuk parabolanya terbuka ke bawah, titikekstrimnya adalah titik maksimum.

Koordinat titik maksimum:

Syarat y maksimum: y" = 0 maka -2x + 6 = 0, diperoleh x = 3

Untuk x = 3 maka y = $-(3)^2 + 6(3) - 2 = 7$, diperoleh titikmaksimum yaitu (3,7).



Gambar 13.3 Grafik $y = -x^2 + 6x - 2$

Contoh Soal 4 :

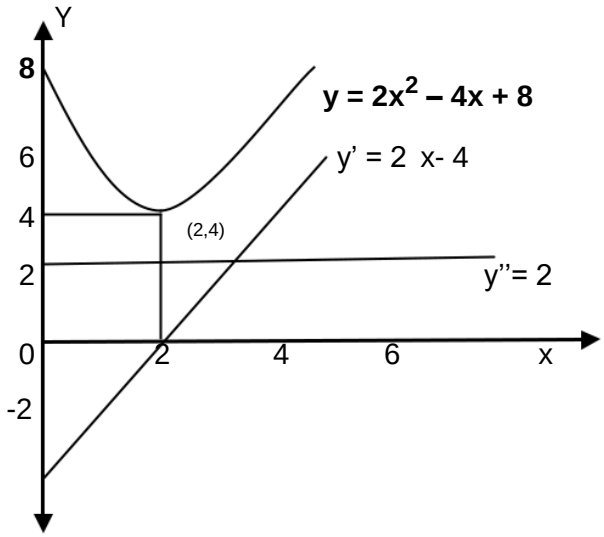
Andaikan $y = x^2 - 4x + 8$

Maka $y'' = 2x - 4$ dan $y'''' = 2 > 0$

Karena y”> 0 maka bentuk parabolanya terbuka ke atas, titik ekstrimnya adalah titik minimum. Koordinat titik minimum dengan ketentuan :

Syarat y minimum $y'' = 0$ maka $2x - 4 = 0$, diperoleh $x = 2$

Untuk $x = 2$ maka $y = 2^2 - 4(2) + 8 = 4$ sehingga diperoleh titik maksimum yaitu (2,4)



-4

Gambar 13.4 Grafik $y = x^2 – 4x + 8$

c. Titik Ekstrim Dan Titik Belok Fungsi Kubik

Titik maksimum dan titik minimum suatu fungsi kubik (jika ada), serta titik beloknya, dapat dicari melalui penelusuran terhadap derivatif pertama dan derivatif kedua dari fungsinya. Derivatif pertama berguna untuk menentukan letak titik ekstimnya, sedangkan derivatif kedua bermanfaat guna mengetahui jenis titik ekstrimnya yang bersangkutan dan menentukan letak titik baliknya.

Titik belok menggabarkan kondisi perubahan arah kecekungan fungsi suatu kurva. Apakah kurva fungsi cekung ke atas atau cekung ke bawah. Apabila kondisi kurva fungsi cekung ke atas, maka pada kondisi tersebut terjadi titik balik minimum. Sedangkan, apabila kondisi kurva fungsi cekung ke bawah, maka pada kondisi tersebut terjadi titik balik maksimum.

Perhatikan fungsi kubik berikut dan turunan-turunannya, serta hubungan mereka secara grafik.

$y = \frac{1}{3}x^3 – 3x^2 + 8x – 3$ . . . . . fungsi kubik

$y'' = x^2 – 6x + 8$ . . . . . fungsi kuadrat parabolik

$y' = 2x – 6$ . . . . . fungsi linear

Jika $y'' = 0$, $x^2 – 6x + 8$

$= 0$, $(x - 2)(x - 4) = 0$

maka $x_1 = 2$ dan $x_2 = 4$

untuk $x_1 = 2$

$y = 1/3(2)^3 – 3(2)^2 + 8(2) – 3$

$= 36,7$

[fungsi kubik $y = f(x)$ berada di titik ekstrim maksimum] $y' = 2(2) – 6 = -2 < 0$

[derivatif kedua negatif]

untuk $x_2 = 4$

y = $1/3(4)^3 – 3(4)^2 + 8(4) – 3$

= 2,33

[fungsi kubik y = f(x) berada di titik ekstrim minimum] y” = 2(4) – 6 = 2 > 0

[derivatif kedua positif] jika y” = 0 maka 2x – 6 = 0, diperoleh x = 3

y = $1/3(3)^3 – 3(3)^2 + 8(3) – 3$

= 3

[fungsi kubik y = f(x) berada di titik belok]

y" = $3^2 – 6(3) + 8 = -1$

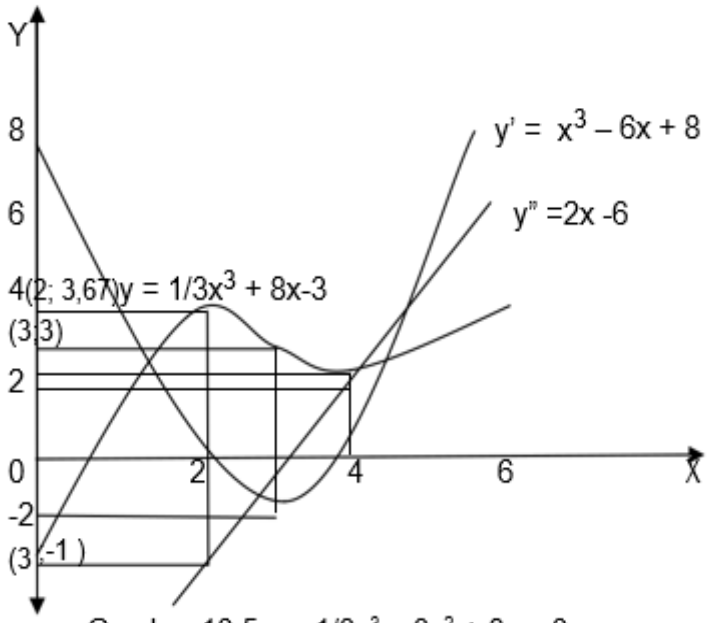
[derivatif pertama berada di titik ekstrim, dalam hal ini titik minimum]

Jadi fungsi kubik y = $1/3x^3 – 3x^2 + 8x – 3$ berada di:

Titik maksimum pada koordinat (2; 3,67)

Titik belok pada koordinat (3; 3)

Titik minimum pada koordinat (4; 2,33).



Gambar 13.5 y = $1/3x^3 – 3x^2 + 8x – 3$

Perhatikan gambar di atas. Fungsi kubik y = f(x) mencapai titik ekstrim maksimum ketika derivatif pertamanya y’ = f’(x) = 0 dan derivatif keduanya y” = f”(x) < 0, mencapai titik ekstrim minimum ketika y’ = y’(x) = 0 dan y” = f”(x) > 0, serta berada di titik belok ketika y”= f”(x) = 0.

Secara umum, meskipun tidak semua fungsi kubik mempunyai titik ekstrim, dapat disimpulkan bahwa:

1. Fungsi kubik y = f(x) mencapai titik ekstrim pada y' = 0
2. Jika y" > 0 pada y' = 0, maka titik ekstrimnya adalah titik minimum
3. Jika y" < 0 pada y' = 0, maka titik ekstrimnya adalah titik maksimum
4. Fungsi kubik y = f(x) berada di titik belok pada y" = 0

Contoh Soal 5 :

Tentukan titik ekstrim dan titik belok fungsi kubik $y = -x^3 + 15x^2 – 48x$

Penyelesaian :

$y = -x^3 + 15x^2 – 48x$ maka ,

$y' = -3x^2 + 30x – 48$ dan,

$y'' = -6x + 30$

syarat ekstrim: $y' = 0$ maka,

$-3x^2 + 30x – 48 = 0$ diperoleh $x_1 = 2$ dan $x_2 = 8$

Untuk $x_1 = 2$ maka,

$y = -8 + 60 – 96 = -44$ dan,

$y'' = -12 + 30$

$= 18 > 0$ Jadi titik minimum adalah (2, -44)

Untuk $x_2 = 8$ maka,

$y = -512 + 960 - 384$

$= 64$ dan,

$y'' = -48 + 30$

$= -18 < 0$ Jadi titik maksimum adalah (8, 64)

Syarat titik belok: $y'' = 0$ diperoleh $x = 5$

Untuk $x = 5$ maka,

$y = -125 + 375 -240$

$= 10$

Jadi titk belok (5, 10).

Contoh Soal 6 :

Diketahui fungsi y = x2 + 6x – 24. Tentukan apakah pada titik-titik dengan absis berikut maka fungsinya naik, turun, atau stasioner (Jika stasioner maka tentukan apakah minimum, maksimum, atau titik belok).

1) Jika x = 2
2) Jika x = –5
3) Jika x = –3

Penyelesaian :

y = x2 + 6x – 24 maka,

y' = f'(x) = 2x + 6

1) Jika x = 2

   f'(2) = 2(2) + 6

   f'(2) = 4 + 6

   f'(2) = 10

   Karena f'(2) > 0 maka pada x = 2 berupa fungsi naik

2) Jika x= –5

   f'(–5) = 2(–5) + 6

   f'(–5) = –10 + 6

   f'(–5) = –4

   karena, f'(–5) < 0 maka pada x = –5 berupa fungsi turun

3) Jika x = –3

   f'(–3) = 2(–3) + 6

   f'(–3) = –6 + 6

   f'(–3) = 0

   Karena f'(–3) = 0 maka pada x = –3 merupakan titik stasioner Karena berupa titik stasioner, maka perlu diselidiki apakah maksimum, minimum, atau titik belok.

   f'(x) = 2x + 6 maka

   f''(x) = 2 dan

   f''(–3) = 2

   Karena f''(–3) = 2 > 0 maka pada x = –3 merupakan titik stasioner yang minimum.

C. Soal Latihan/Tugas

Kerjakan soal di bawah ini dengan teliti dan benar !

1. Tentukan $\frac{d^2y}{d^2x}$ untuk:
   a. $y = 2x^3 – 4x^2 + 7x – 5$
   b. $y = 9 -3x^{-1} + 6x^{-2}$
   c. $y = (x^2 – 4)(2x -6)$
   d. $y = (3x^2 – x)(2 + x^{-1})$
2. Tentukan apakah $y = 2x^3 – 4x^2 + 7x – 5$ merupakan fungsi menaik ataukah fungsi menurun pada x = 3 atau x = 6.
3. Tentukan letak dan jenis titik ekstrim parabola:
   a. $y = 0,5x^2 – 4x + 15$
   b. $y = 3x^2 – 30x + 77$
   c. $y = -4x^2 + 32x -57$
   d. $y = -5x^2 + 30x -35$
4. Tentukan titik ekstrim dan titik belok fungsi kubik:
   a. $y = x^3 – 9x^2 + 15x + 40$
   b. $y = -2x^3 + 18x^2$ untuk $x \geq 0$
5. Tentukan titik ekstrim dan titik belok fungsi kubik $y = x^3 – 27x$. Kemudian jelaskan apakah fungsinya menaik ataukah menurun pada koordinat x = -4, x = -2, x = 2 dan x = 4.
6. Tentukan titik ekstrim dan titik belok fungsi kubik $y = x^3 – 64x$. Kemudian jelaskan apakah fungsinya menaik ataukah menurun pada koordinat x = 6, x = 3, x = -2 dan x = -4.
7. Tentukan titik ekstrim dan titik belok fungsi kubik $y = x^3 – 125x$. Kemudian jelaskan apakah fungsinya menaik ataukah menurun pada koordinat x = -4, x = -2, x = 2 dan x = 4.

D. Daftar Pustaka

Dumairy. (2015). *Matematika Terapan Untuk Bisnis dan Ekonomi*. Yogyakarta.BPFE-Yogyakarta.

PERTEMUAN 14
PENERAPAN DIFERENSIAL SEDERHANA DALAM EKONOMI

A. Tujuan Pembelajaran

Pada pertemuan 14 ini, mahasiswa akan dijelaskan mengenai penerapan diferensial sederhana dalam ekonomi. Setelah menyelesaikan perkuliahan, mahasiswa mampu menghitung dan menerapkan diferensial sederhana dalam ekonomi.

B. Uraian Materi

1. Penerapan Diferensial Sederhana

Teori diferensial amat lazim diterapkan dalam konsep elastisitas, konsep nilai marjinal dan konsep optimasi. Pada kaitannya dengan konsep elastisitas, pada pokok bahasan ini secara berurutan akan dibahas penerapan diferensial dalam penghitungan elastisitas berbagai variabel ekonomi. Sedangkan dalam kaitannya dengan konsep nilai marjinal dan konsep optimasi, akan dibahas penerapan diferensial dalam pembentukan fungsi atau penghitungan nilai marjinal dari berbagai variabel ekonomi, serta penentuan nilai optimum dari fungsi atau variabel yang bersangkutan. Selanjutnya akan dibahas pula hubungan antara nilai total, nilai marjinal dan nilai rata-rata dari fungsi biaya dan fungsi produksi.

2. Penerapan Diferensial Sederhana Dalam Ekonomi

a. Elastisitas

Elastisitas dari suatu fungsi y = f(x) berkenaan dengan x dapat didefinisikan sebagai:

$$\boldsymbol{\eta} = \frac{\boldsymbol{Ey}}{\boldsymbol{Ex}} = \mathbf{lim}_{\Delta \mathbf{x} \to \mathbf{0}} = \frac{(\Delta \mathbf{y}/\mathbf{y})}{(\Delta \mathbf{x}/\mathbf{x})} = \frac{\mathbf{dy}}{\mathbf{dx}} \cdot \frac{\mathbf{x}}{\mathbf{y}} \text{(tanda } \text{“}\eta\text{"} \; dibaca \text{ "}eta\text{")}$$

Hal ini berarti bahwa elastisitas y = f(x) merupakan limit dari rasio antara perubahan relatif dalam y terhadap perubahan relatif dalam x, untuk perubahan x yang sangat kecil atau mendekati nol. Dengan terminologi lain, elastisitas y

terhadap x dapat dikatakan sebagai rasio antara persentase perubahan y terhadap persentase perubahan x.

1) Elastisitas Permintaan

Elastisitas permintaan (istilah yang lengkap elastisitas harga-permintaan / *price elasticity of demand*) ialah suatu koefisien yang menjelaskan besarnya perubahan jumlah barang yang diminta akibat adanya perubahan harga. Jadi, merupakan rasio antara persentase perubahan jumlah barang. Jika fungsi permintaan dinyatakan dengan Qd = f(P), maka elastisitas permintaannya:

$$\boldsymbol{\eta_d} = \frac{\%\boldsymbol{\Delta Q_d}}{\%\boldsymbol{\Delta p}} = \frac{\boldsymbol{EQ_d}}{\boldsymbol{\Delta P}} = \boldsymbol{lim}_{\boldsymbol{\Delta P \to 0}} = \frac{(\Delta \mathbf{Q_d}/\mathbf{Q_d})}{(\Delta \mathbf{P}/\mathbf{P})} = \frac{\boldsymbol{dQ_d}}{\boldsymbol{dP}} \cdot \frac{\boldsymbol{P}}{\boldsymbol{Q_d}}$$

Dimana, $\frac{\mathrm{dQ_d}}{\mathrm{dP}}$ tak lain adalah Q'_d atau f'(P)

Permintaan akan suatu barang dikatakan berssifat elastik apabila $|\eta d| > 1$, elastik-uniter jika $|\eta d|$=1, dan inelastik bila $|\eta d| < 1$. Barang yang permintaannya elastis mengisyaratkan bahwa jika harga barang tersebut berubah sebesar persentase tertentu, maka permintaan terhadapnya akan berubah (secara berlawanan arah) dengan persentase yang lebih besar daripada persentase perubahan harganya.

Contoh Soal :

a) Fungsi permintaan suatu barang ditunjukan oleh suatu persamaan $Q_d = 25 - 3P^2$. Tentukan elastisitas permintaannya pada tingkat harga P=5.

Penyelesaian :

$Q_d = 25 - 3P^2$

$Q'_d = dQ_d = -6P$

$$\eta d = \frac{dQ_d}{dP} \cdot \frac{P}{Q_d} = -6P \cdot \frac{P}{25 - 3P^2}$$

$$= -6(5) \cdot \frac{5}{25 - 75}$$

$$= 3\ (Elastik)$$

ηd= 3 berarti bahwa apabila dari kedudukan P = 5, harga naik (turun) sebesar 1 persen maka jumlah barang yang diminta akan berkurang (bertambah) sebanyak 3 persen.

b) Permintaan suatu barang dicerminkan oleh D = 4 –P, dimana D melambangkan jumlah barang yang diminta dan P adalah harga per unit. Hitunglah elastisitas permintaannya pada tingkat harga P = 3 dan pada tingkat permintaan D = 3.

Penyelesaian :

D = 4 – P maka

D' =Dd/Dp = 1

Pada P = 3,

D $= 4 - 3$

Maka:

$$\eta d = \frac{dD}{dP} \cdot \frac{P}{D} = -1 \cdot \frac{3}{1} = -3 \ (\ Elastik\ )$$

Pada D = 3, P = 1

Maka :

$$\eta d = \frac{dD}{dP} \cdot \frac{P}{D} = -1 \cdot \frac{1}{3} = -\frac{1}{3} \ (\ Inelastik\ )$$

Catatan: Pada konsep elastisitas permintaan, yang dipentingkan adalahbesarnya angka hasil perhitungan; apakah angka tersebut lebih besar dari ataukah sama dengan atau lebih kecil dari satu; yakni untuk menentukan apakah sifat permintaannya elastik, elastik-uniter, atau inelastik. Sedangkan tanda di depan hasil perhitungan (seandainya negatif) dapat diabaikan, karena hal itu mencerminkan berlakunya hukum permintaan bahwa jumlah yang diminta bergerak berlawanan arah dengan harga.

2) Elastisitas Penawaran

Elastisitas penawaran (istilah yang lengkap: elastisitas harga penawaran / *price elasticity of supply*) ialah suatu koefisien yang menjelaskan besarnya perubahan jumlah barang yang ditawarkan berkenaan adanya perubahan harga. Jadi, merupakan rasio antara persentase perubahan

jumlah barang yang ditawarkan terhadap persentaseperubahan harga. Jika fungsi penawaran dinyatakan dengan = f(P), maka elastisitas penawarannya:

$$\boldsymbol{\eta_d} = \frac{\%\boldsymbol{\Delta Q_s}}{\%\boldsymbol{\Delta p}} = \frac{\boldsymbol{EQ_s}}{\boldsymbol{\Delta P}} = \boldsymbol{lim}_{\boldsymbol{\Delta P \to 0}} = \frac{(\Delta \mathbf{Q_s}/\mathbf{Q_s})}{(\Delta \mathbf{P}/\mathbf{P})} = \frac{\boldsymbol{dQ_{ds}}}{\boldsymbol{dP}} \cdot \frac{\boldsymbol{P}}{\boldsymbol{Q_s}}$$

Dimana, $\frac{\mathrm{dQ_S}}{\mathrm{dP}}$ tak lain adalah Q'_S atau f'(P)

Penawaran akan suatu barang dikatakan berssifat elastik apabila $\eta_s > 1$, elastik-uniter jika η_s =1, dan inelastik bila $\eta_s < 1$. Barang yang penawarannya inelastis mengisyaratkan bahwa jika harga barang tersebut berubah sebesar persentase tertentu, maka penawarannyaberubah (secara searah) dengan persentase yang lebih kecil daripada persentase perubahan harganya.

Contoh Soal :

Fungsi penawaran suatu barang dicerminkan oleh $Q_s = -200 + 7P^2$. Berapa elastisitas penawarannya pada tingkat harga P = 10 dan P = 15?

Penyelesaian :

$$\boldsymbol{Q_s = -200 + 7P^2}$$

$$\boldsymbol{\eta_s = \frac{dQ_s}{dP} \cdot \frac{P}{Q_S} = 14P \cdot \frac{P}{-200+7P^2}}$$

$$\boldsymbol{Q'_S = \frac{dQ_s}{dP} = 14P}$$

Pada P=10

$$\eta_s = 140 \cdot \frac{10}{-200 + 700} = 2{,}8$$

Pada P=15

$$\eta_s = 210 \cdot \frac{15}{-200 + 700} = 2{,}3$$

3) Elastisitas Produksi

Elastisitas produksi ialah suatu koefisien yang menjelaskan besarnya perubahan jumlah keluaran (*output*) yang dihasilkan akibat adanya perubahan jumlah masukan (*input*) yang digunakan. Jadi, merupakan rasio antara persentase perubahan jumlah keluaran terhadap persentase

perubahan jumlah masukan. Jika P melambangkan jumlah produk yang dihasilkan, sedangkan X melambangkan jumlah faktor produksi yang digunakan, dan fungsi produksi dinyatakan dengan P = f(X), maka elastisitas produksinya:

$$\boldsymbol{\eta_P} = \frac{\%\boldsymbol{\Delta P}}{\%\boldsymbol{\Delta X}} = \frac{\boldsymbol{EP}}{\boldsymbol{\Delta X}} = \boldsymbol{lim}_{\Delta \boldsymbol{X} \to \mathbf{0}} = \frac{(\Delta \mathbf{P}/\mathbf{P})}{(\Delta \mathbf{X}/\mathbf{X})} = \frac{\boldsymbol{dP}}{\boldsymbol{dX}} \cdot \frac{\boldsymbol{X}}{\boldsymbol{P}}$$

dimana $\frac{\mathrm{dP}}{\mathrm{dX}}$adalah produk marjinal dari X [P' atau f'(X)].

Contoh Soal :

Fungsi produksi suatu barang ditunjukkan oleh persamaan P = $6X^2 - X^3$. Hitunglah elastisitas produksinya pada tingkat penggunaan faktor produksi sebanyak 3 unit dan 7 unit.

Penyelesaian :

P = $6X^2 - X^3$, maka

P'= $\frac{dP}{dX} = 12X - 3X^2$

$\eta_P = \frac{dP}{dX} \cdot \frac{X}{P}$

= (12X - $3X^2$) . $\frac{\mathrm{X}}{(6\mathrm{X}^2 - \mathrm{X}^3)}$

Pada X = 3

$$\eta_{\mathrm{P}=(36-37).} \frac{3}{(54+27)} = 1$$

Pada X = 7

$$\eta_{\mathrm{P}=(84-147).} \frac{37}{(294-343)} = 9$$

b. Biaya Marjinal

Biaya marjinal (*Marginal Cost*, MC) ialah biaya tambahan yang dikeluarkan untuk menghasilkan satu unit tambahan produk. Secara matematik, fungsi biaya marjinal merupakan derivatif pertama dari fungsi biaya total. Jika fungsi biaya total dinyatakan dengan C = f(Q) di mana C adalah biaya total dan Q melambangkan jumlah produk, maka biaya marjinalnya:

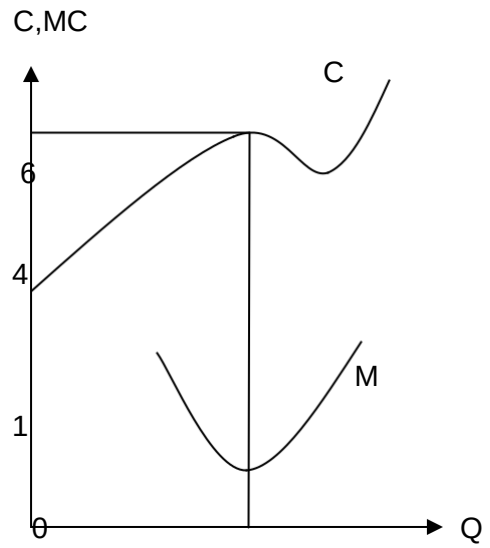
$$MC = C' = \frac{dC}{dQ}$$

Contoh Soal :

Biaya total : C = f(Q) = $Q^3 – 3Q^2 + 4Q + 4$

Biaya marjinal : MC = C' = dC/dQ = $3Q^2 – 6Q + 4$

Pada umumnya fungsi biaya total yang non-linear berbentuk fungsi kubik, sehingga fungsi biaya marjinalnya berbentuk fungsi kuadrat. Dalam hal demikian, kurva biaya marjinal (MC) selalu mencapai minimumnya tepat pada saat kurva biaya total (C) berada pada posisi titik beloknya. (Pelajari Titik Ekstrim dan Titik Belok Fungsi Kubik)



Gambar 14.1 Grafik fungsi MC =$3Q^2 – 6Q + 4$ dan C = $Q^3 – 3Q^2 + 4Q + 4$

c. Penerimaan Marjinal

Penerimaan marjinal (*Marginal Revenue*, MR) ialah penerimaan tambahan yang diperoleh berkenaan dengan bertambahnya satu unit keluaran yang diproduksi atau terjual. Secara matematik, fungsi penerimaan marjinal merupakan derivatif pertama dari fungsi penerimaan total. Jika fungsi penerimaan total dinyatakan dengan R = f(Q) di mana R melambangkan penerimaan total dan Q adalah jumlah keluaran, maka penerimaan marjinalnya:

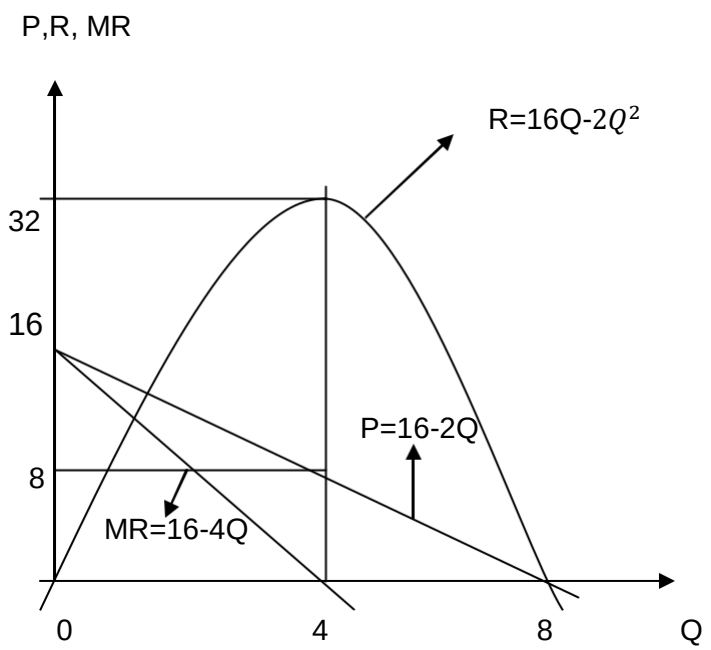
$$MR = R' = \frac{dR}{dQ}$$

Karena fungsi penerimaan total yang non-linear pada umumnya berbentuk fungsi kuadrat (parabolik), fungsi permintaan marjinalnya akan berbentuk fungsi linear. Kurva penerimaan marjinal (MR) selalu mencapai nol tepat pada saat kurva penerimaan total (R) berada pada posisi puncaknya. (Pelajari Titik Ekstrim Parabolik).

Contoh Soal :

Andaikan fungsi permintaan akan suatu barang ditunjukkan oleh P = 16 - 2Q. Tentukan besarnya penerimaan total maksimum!

Penyelesaian :



Gambar 14.2 Grafik fungsi MR = 16 – 4Q

Penerimaan total : R = P.Q = f(Q) = 16Q – $2Q^2$

Penerimaan marjinal : MR = R' = 16 – 4Q

Pada MR = 0, 16 – 4Q

= 0 diperoleh

Q = 4

R = 16(4) – 2(4)^2

= 32

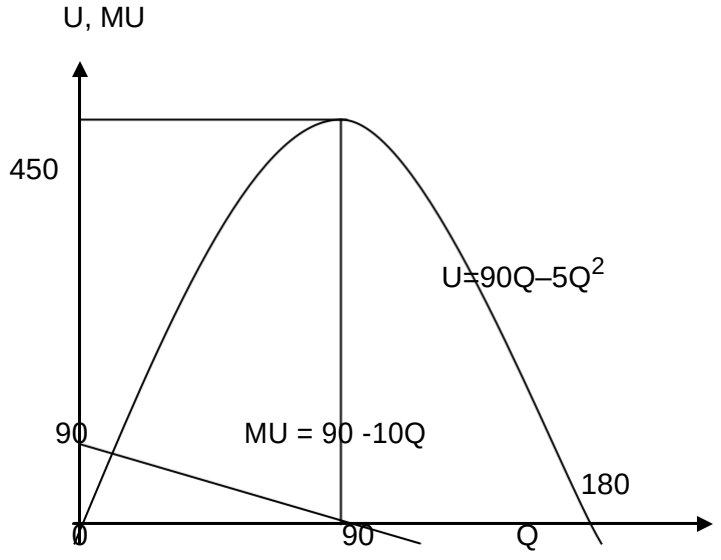
d. Utilitas Marjinal

Utilitas marjinal (*Marginal Utility*, MU) ialah utilitas tambahan yang diperoleh konsumen berkenaan satu unit tambahan barang yang dikonsumsinya. Secara matematik, fungsi utilitas marjinal merupakan derivatif pertama dari fungsi utilitas total. Jika fungsi utilitas total dinyatakan dengan U = f(Q) di mana U melambangkan utilitas total dan Q adalah jumlah barang yang dikonsumsi, maka utilitas marjinalnya:

$$MU = U' = \frac{dU}{dQ}$$

Karena fungsi utilitas total yang non-linear pada umumnya berbentuk fungsi kuadrat, fungsi utilitas marjinalnya akan berbentuk fungsi linear.Kurva utilitas marjinalnya (MU) selalu mencapai nol tepat pada saat kurva utilitas total (U) berada pada posisi puncaknya.

Contoh Soal :



Gambar 14.3 Grafik fungsi MU = 90 -10Q dan U = 90Q – $5Q^2$

U = f(Q)

= 90Q – $5Q^2$

MU = U'

= 90 – 10Q

U maksimum pada titik :

MU = 0, maka

Q = 9

= 90(9) – $5(9)^2$

= 810 – 405

= 405

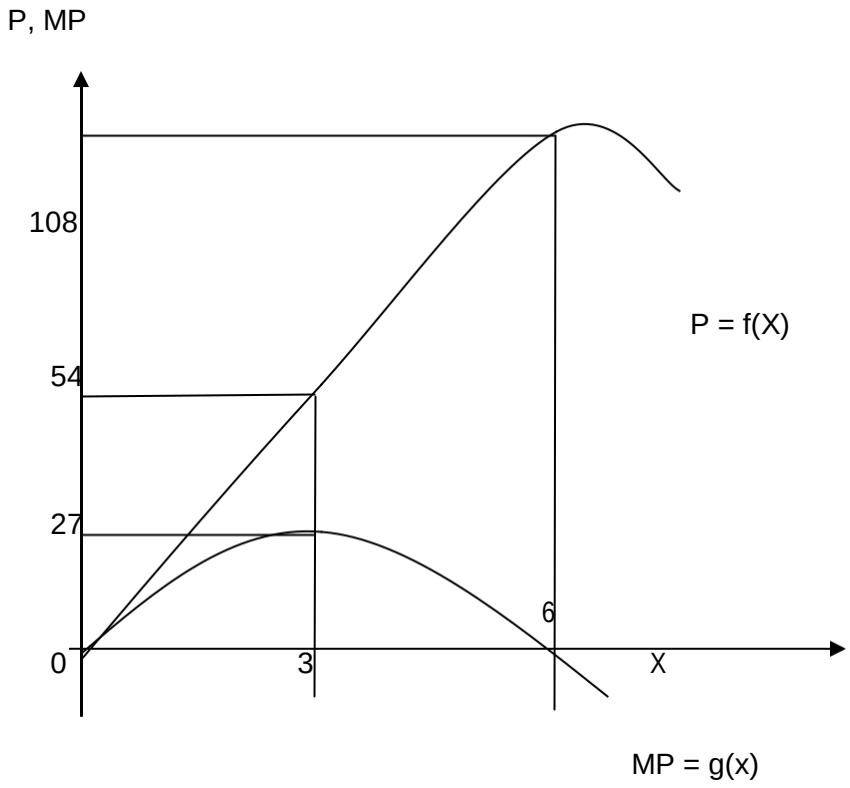
e. Produk Marjinal

Produk marjinal (*Marginal Product*, MP) ialah produk tambahan yang dihasilkan dari satu unit tambahan faktor produksi yang digunakan. Secara matematik, fungsi produk marjinal merupakan derivatif pertama dari fungsi produk total. Jika fungsi produk total dinyatakan dengan P = f(X) di mana P melambangkan jumlah produk total dan X adalah jumlah masukan, maka produk marjinalnya:

$$MP = P' = \frac{dP}{dX}$$

Karena fungsi produk total yang non-linear pada umumnya berbentuk fungsi kubik, fungsi produk marjinalnya akan berbentuk fungsi kuadrat (parabolik). Kurva produk marjinal (MP) selalu mencapai nilai ekstrimnya, dalam hal ini nilai maksimum, tepat pada saat kurva produk total (P) berada pada posisi titik beloknya; kedudukan ini mencerminkan berlakunya hukum tambahan hasil yang semakin berkurang (*the law of thediminishing return*). Produk total mencapai puncaknya ketika produkmarjinalnya nol. Sesudah kedudukan ini, produk total menurun bersamaan dengan produk marjinal menjadi negatif. Area di mana produk marjinal negatif menunjukkan bahwa penambahan pengguna masukkan yang bersangkutan justru akan mengurangi jumlah produk total, mengisyaratkan terjadinya disefisiensi dalam kegiatan produksi. Pada area ini,

jika produk total hendak ditingkatkan, jumlah masukkan yang digunakan harus dikurangi.



Gambar 14.4 Grafik fungsi MP = $18X – 13X^2$

Produksi total:

P = f(X)

= $9X^2 – X^3$

Produk Marjinal:

MP = P'

= $18X – 13X^2$

P maksimum pada P' = 0; yakni pada X = 6, dengan P maksimum = 108.

P berada di titik belok dan MP maksimum pada P'' = (MP)' = 0; yakni pada X = 3.

f. Analisis Keuntungan Maksimum

Tingkat produksi yang memberikan keuntungan maksimum, atau menimbulkan kerugian maksimum, dapat diselidiki dengan pendekatan diferensial. Karena baik penerimaan total (R) maupun biaya total (C) sama-sama merupakan fungsi dari jumlah keluaran yang dihasilkan/terjual (Q), maka dari sini dapat dibentuk suatu fungsi baru yaitu fungsi keuntungan (π). Nilai ekstrim atau nilai optimum π dapat ditentukan dengan cara menetapkan derivatif pertamanya sama dengan nol.

$R = r(Q)$ $\quad \pi = R - C = r(Q) - c(Q) = f(Q)$

$C = c(Q)$ $\quad \pi$ optimum jika $\pi' = 0$ $\quad$ maka $f'(Q) = d\pi/dQ = 0$

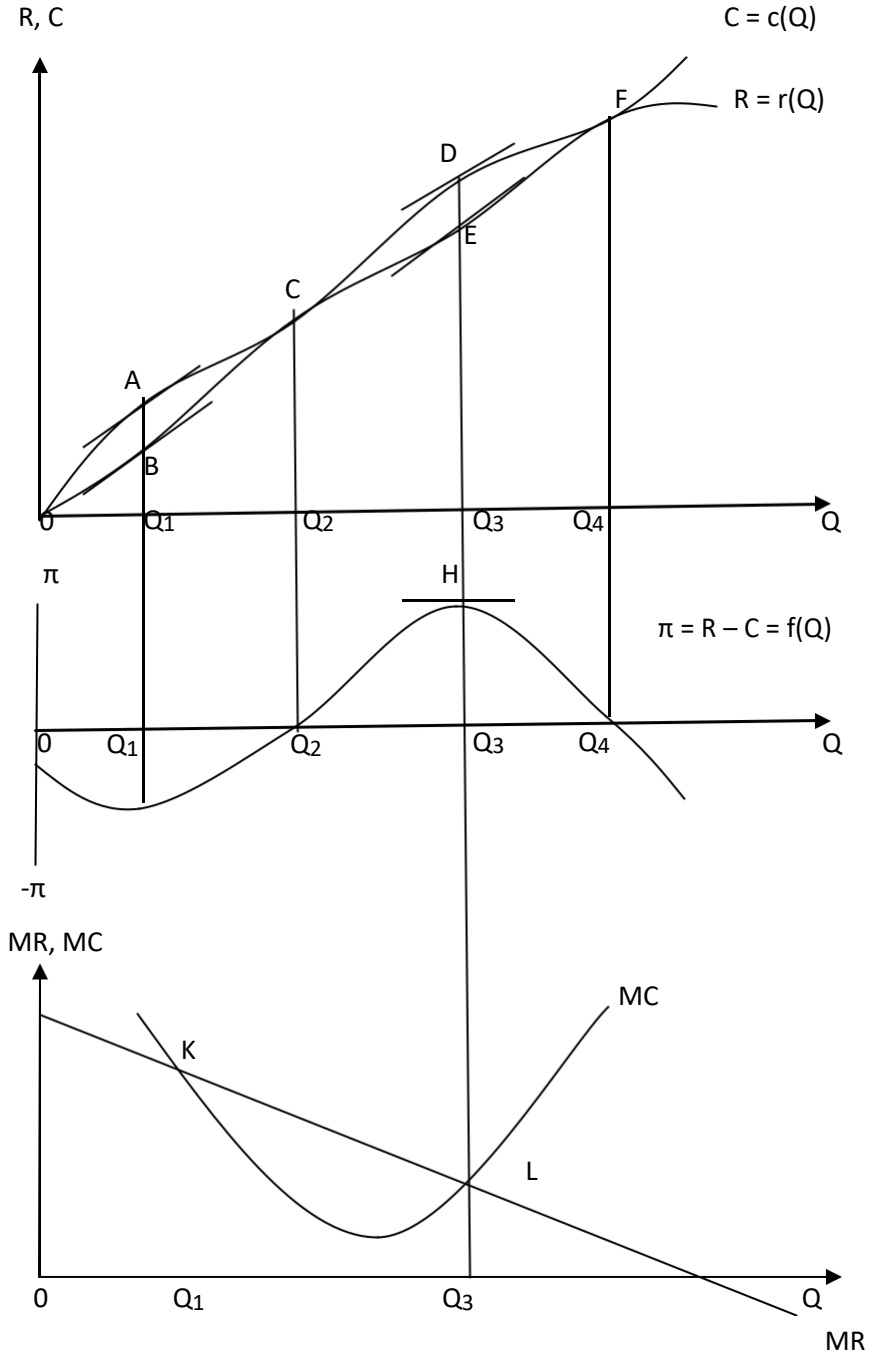
Karena $\pi = R - C$ $\quad$ berarti pada n optimum:

Maka $\pi' = R' - C' = MR - MC$ $\quad \pi' = 0$ maka $MR - MC = 0$

sehingga $MR = MC$

Secara grafik, kesamaan MR = MC atau kedudukan π' = 0 ditunjukkan oleh perpotongan antara kurva penerimaan marjinal (MR) dan kurva biaya marjinal (MC). Hal ini sekaligus mencerminkan jarak terlebar antara kurva penerimaan total (R) dan kurva biaya total (C). akan tetapi syarat MR = MC atau π' = 0 belumlah cukup untuk mengisyaratkan keuntungan maksimum, sebab jarak terlebar yang dicerminkan mungkin merupakan selisih positif "R-C"(berarti keuntungan) atau merupakan selisih negatif "R - C" (berarti kerugian).

Perhatikan gambar berikut ini !



Gambar 14.5 Fungsi Keuntungan

Untuk mengetahui apakah π' = 0 mencerminkan keuntungan maksimum ataukah justru kerugian maksimum, perlu diuji melalui derivatif kedua dari fungsi π.

$\pi = R - C = f(Q)$

π optimum apabila $\pi' = 0$ atau MR = MC

Jika $\pi'' < 0$ maka maksimum = keuntungan maksimum

Jika $\pi'' > 0$ maka minimum = kerugian maksimum

Pada gambar sebelumnya terlihat ada dua keadaan di mana $\pi' = 0$, (MR = MC), yakni pada tingkat produksi dan . Pada tingkat produksi jarak terlebar antara kurva penerimaan total (R) dan kurvabiaya total (C) mencerminkan selisih negatif terbesar. Hal ini berarti terjadi kerugian maksimum, sebagaimana tercermin oleh kurva π yang mencapai minimumnya di titik G.

Pada tingkat produksi , jarak terlebar antara kurva R dan kurva C mencerminkan selisish positif terbesar. Hal ini berarti terjadi keuntungan maksimum, sebagaimana tercermin oleh kurva n yang mencapai maksimumnya di titik H.Dengan demikian syarat agar diperoleh keuntungan maksimum adalah:

$\pi' = 0$ atau MR = MC

$\pi'' < 0$ atau $(MR)' < (MC)'$

Syarat, pertama disebut syarat yang diperlukan (*necessary* condition), sedangkan syarat kedua disebut syarat yang mencukupkan (*sufficientcondition*).

Contoh Soal :

Andaikan:

$R = r(Q) = -2Q^2 + 1000Q$

$C = c(Q) = Q^3 - 59Q^2 + 1315Q + 2000$

Tentukan besarnya keuntungan maksimum!

maka:

$\pi = R - C = -Q^3 + 57Q^2 - 315Q -$

2000 Agar keuntungan maksimum:

$\pi' = 0$

$-3Q^2 + 114Q - 315 = 0$

$-Q^2 + 38Q - 105 = 0$

$(-Q + 3)(Q - 35) = 0$, diperoleh $Q_1 = 3$ dan $Q_2 = 35$ $\pi'' = -6Q + 114$

Jika Q = 3, maka $\pi'' = -6(3) + 114 = 96 > 0$

Jika Q = 35 maka $\pi'' = -6(35) + 114 = -96 < 0$

Karena $\pi'' < 0$ untuk Q = 35, maka tingkat produksi yang menghasilkan keuntungan maksimal adalah Q = 35 unit. Adapun besarnya keuntungan maksimum tersebut:

$\pi = R - C$

$\pi = -Q^3 + 57Q^2 - 315Q - 2000$

$\pi = -(35)^3 + 57(35)^2 - 315(35) - 2000$

$\pi = 13.925$

C. Soal Latihan/Tugas

Kerjakan soal-soal di bawah ini dengan teliti dan benar !

1. Fungsi permintaan akan suatu barang ditunjukan oleh persamaan $Q_d = -8 + 4P^2$. tentukan elastisita permintaannya pada tingkat harga P=2 ?
2. Fungsi penawaran suatu barang dicerminkan oleh $\boldsymbol{Q_s = -400 + 8p^2}$. Berapa elastisitas penawarannya pada tingkat harga P=12 dan P=18 ?
3. Fungsi produksi suatu barang ditunjukkan oleh persamaan $P = 8X^2 - 2X^3$. Hitunglah elastisitas produksinya pada tingkat penggunaan faktor produksi sebanyak 2 unit dan 6 unit.
4. Diketahui fungsi permintaan suatu barang P = -2Q + 36, dimana P adalah harga jual dan Q adalah kuantitasyang diminta. Tentukan elastisitas permintaan pada saat P = 6!
5. Diketahui:
   penerimaan total: $R = r(Q) = -49Q^2 + 2000Q$
   biaya total: C = c(Q) = -Q3 + 62Q2 + 1155Q + 3000.
   Tentukan besarnya keuntungan maksimum!
6. Apabila diketahui fungsi penawaran P = 4Q + 4, di mana P adalah harga jual dan Q adalah kuantitas barang yang ditawarkan. Tentukan elastisitas penawaran pada Q = 2 unit.
7. Diketahui fungsi permintaan adalah Q = 15 – P. Tentukan fungsi pendapatan marginalnya!

8. Fungsi permintaan suatu produk adalah P = 12 – 4Q. Hitung penerimaan total maksimum!
9. Diketahui fungsi biaya total adalah $C = 4 + 2Q + Q^2$. Tentukan besarnya biaya minimum.
10. Penerimaan total produsen, ditunjukkan oleh persamaan $R = 100Q – 4Q^2$ dan biaya total C = 50 +20Q. Tentukan jumlah output yang harusdiproduksi agar memperoleh keuntungan maksimum dan berapa besarnya keuntungan maksimum tsb?

D. Daftar Pustaka

Andi Wijaya dkk. (2014). *Matematika Ekonomi I*. Jakarta: Mitra Wacana Media.

Dumairy. (2015). *Matematika Terapan Untuk Bisnis dan Ekonomi*. Yogyakarta. BPFE-Yogyakarta.

PERTEMUAN 15
INTEGRAL TAK TENTU

A. Tujuan Pembelajaran

Pada pertemuan 15 ini, mahasiswa akan dijelaskan mengenai konsep integral tak tentu. Setelah menyelesaikan perkuliahan, mahasiswa mampu menjelaskan pengertian integral tak tentu dan mampu memahami kaidah-kaidah integral tak tentu.

B. Uraian Materi

1. Integral Tak Tentu

Semua orang dalam kehidupan sehari-hari pasti melakukan banyak aktivitas. Dari aktivitas menghirup udara maupun melepaskan udara. Bentuk dari contoh tersebut adalah kiasan untuk integral, bahwa kebalikan dari menghirup udara adalah dengan melepas ke udara, atau dalam matematika sering kita sebut sebagai invers. Jadi invers adalah bentuk kebalikan dari sesuatu yang berkaitan dengan matematika.

Contoh lain dari invers adalah, adanya penjumlahan dengan pengurangan, adanya pembagian dengan perkalian, adanya perpangkatan dengan akar, ataupun yang lainnya. Dalam kaitannya dengan integral, merupakan bentuk invers dari turunan, yang sudah terlebih dahulu kita pelajari sebelumnya. Integral adalah suatu bentuk pada operasi matematika yang menjadi **kebalikan** atau biasa juga disebut sebagai **invers** dari operasi turunan. Serta limit dari jumlah maupun suatu luas daerah tertentu.

Dalam bentuk kalkulus, lebih khusus mengenai integral ini, kita mengenal dua macam, yaitu integral tak tentu dengan integral tertentu. Integral tak tentu adalah suatu invers dari turunan, bisa dikatakan bahwa konsep dengan penemuan fungsi asal jika turunannya sudah diketahui. Lebih lanjut mengenai integral tertentu adalah konsep integral tak tentu yang berhubungan dengan pencarian luas area tertentu pada batasan-batasan yang ada.

Pengintegralan suatu fungsi turunan f(x) merupakan pencarian dari suatu integral tertentu atau sering disebut dengan anti turunan dalam ha ini adalah f(x). Penjabaran dari bentuk umum integral dari f(x) adalah:

$$\int f(x)\,dx = F(x) + k$$

Dimana :

$\int$ =simbol integral

f(x)dx = diferensial dari F(x)

f(x) = integral

F(x) = integral partikular

k = konstanta pengintegralan

dx = diferensial

F(x) + k = fungsi asli atau fungsi asal

Suatu konstanta dengan k, merupakan nilai yang tidak tentu, artinya dalam rumus di atas, fungsi dari k itu sendiri adalah fungsi asli. Dalam proses pengintegralan suatu fungsi tertentu, sering kita sebut dengan istilah integrasi. Pada diferensial, jika kita menemukan fungsi dengan F (x) dan turunannya adalah f (x), maka penjabarannya adalah sebagai berikut :

Fungsi asal : f(x) = $x^2 + 5$

Fungsi turunannya : f(x) = $\frac{df(x)}{dx} = 2x$

Namun apabila prosesnya adalah fungsi turunan yang diintegralkan, maka penjabaran persamaannya menjadi berikut ini :

$$\int \boldsymbol{f(x)dx = f(x) + k = x^2 + k}$$

Apabila konstanta atau k = 0, dalam pengintegralan suatu fungsi turunan, maka nilai k adalah tetap, artinya k adalah bentuk k itu sendiri. Nilai k tersebut tidak dengan sendirinya dapat diganti oleh bilangan tertentu, terkecuali ada di soal bahwa nilai k sudah ditentukan nilainya. Ketidakteraturan nilai k inilah, apabila bentuk integral yang merupakan invers dari turunan disebut dengan integral tak tentu.

Bisa disimpulkan bahwa yang dinamakan dengan integral tak tentu yaitu integral yang tidak mempunyai antara batas atas dan bawah. Umumnya hanya berupa integral dari sebuah aljabar matematika. Bentuk integral ini tidak mempunyai daerah asal dan tidak mempunyai daerah hasil.

2. Kaidah-kaidah Integral Tak Tentu

Integral tak tentu juga mempunyai kaidah-kaidah yang harus dipahami dengan baik. Berdasarkan penjelasan di atas, mengenai integral merupakan kebalikan dari bentuk turunan, maka kaidah-kaidahnya pun tidak jauh dari kaidah suatu turunan atau diferensial. Di bawah ini akan dijelaskan mengenai kaidah-kaidah apa saja dalam integral tak tentu yang bisa membantu dalam pemahaman perumusan integral itu sendiri, adalah sebagai berikut :

Kaidah 1. Formula Pangkat

Integral tak tentu dari suatu pangkat dapat diartikan sebagai fungsi pangkat lain yang diperoleh dari integran dengan cara menambah pangkatnya dengan 1 dan membagi pernyataan yang dihasilkan dengan pangkat baru tersebut.

$$\int \boldsymbol{ax^n\ dx = \frac{a}{n+1}x^{n+1} + k\ dengan\ n \neq -1}$$

Contoh Soal :

a. $\int x^4\ dx = \frac{1}{4+1}x^{4+1} + k = \frac{1}{5}x^5 + k = 0{,}2x^5 + k$

Bukti : $\frac{dy}{dx}(\ 0{,}2x^5 + k) = x^4$

b. $\int 4\ dx = \frac{4x^{0+1}}{0+1} + k = 4x + k$

Bukti : $\frac{dy}{dx}$ (4x+k) = 4

c. $\int 3x^2\ dx = \frac{3x^{2+1}}{2+1} + k = x^3 + k$

Bukti : $\frac{dy}{dx}$ ($x^3 + k$) = $3x^2$

d. $\int dx = \frac{x^{0+1}}{0+1} + k = x + k$

Bukti : $\frac{dy}{dx}$ (x+k) = 1

e. $\int (x+1)dx = \frac{(x+1)^{2+1}}{2+1} + k = \frac{1}{3}(x+1)^3 + k$

Bukti : $\frac{dy}{dx}\frac{1}{3}(x+1)^3 + k = (x+1)^2$

Kaidah 2. Formula Logaritmis

Dalam kaidah ini, rumus yang diterapkan berbeda dengan sebelumnya, adapun penjabarannya adalah sebagai berikut :

$$\int \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{dx} = \boldsymbol{In\ x} + \boldsymbol{k}$$

Contoh Soal :

(1) $\int \frac{\mathbf{3}}{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{dx} = \mathbf{3}\ \boldsymbol{In} + \boldsymbol{k}$

Bukti : $\frac{\boldsymbol{d}}{\boldsymbol{dx}}$(3 ln x + k **)** $= \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{x}}$

(2) $\int \frac{\mathbf{3}}{\boldsymbol{x}+\mathbf{1}}\boldsymbol{dx} = \int \frac{\mathbf{3}\boldsymbol{d}(\boldsymbol{x}+\mathbf{1})}{\boldsymbol{x}+\mathbf{1}} + \boldsymbol{k} = \mathbf{3}\ \boldsymbol{In}\ (\boldsymbol{x}+\mathbf{1}) + \boldsymbol{k}$

Bukti : $\frac{d}{dx}${ 3 In (x+1) + k }= $\frac{3}{x+1}$

Kaidah 3. Formula Eksponensial

Formula eksonensial yang dimaksud yaitu fungsi yang biasa dinotasikan dalam bentuk (e^x) dibaca e pangkat x, dimana (e) adalah basis logaritma natural.

Rumus dasar :

$$\int e^x\, dx = e^x + k$$

U = f(x)

$$\int e^x\ du = e^x + k\ \ pada\ u = f(x)$$

Contoh Soal :

(1) $\int e^{x+2} dx = e^{x+2}\ d(x+2) = e^{x+2} + k$

Bukti : $\frac{d}{dx}\left(e^{x+2} + k\right) = e^{x+2}$

(2) $\int e^{2x} dx = \frac{1}{2}\int e^{2x} d(2x) = \frac{1}{2}\int e^{2x} + k$

Bukti : $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}\int e^{2x} + k\right) = e^{2x}$

(3) $\int e^{-3x+2} dx = \frac{1}{3}\int e^{-3x+2} d(2x) = \frac{1}{3} e^{-3x+2} + k$

Bukti : $\frac{d}{dx}\left(-\frac{1}{3} e^{-3x+2} + k\right) = e^{-3x+2}$

(4) Selesaikanlah $\int e^{-x} dx$

Penyelesaian :

Misal U $= -x$

maka du $= -dx$

dx $= -du$

jadi, $\int \boldsymbol{e^{-x}dx} = \int \boldsymbol{e^{u}}.\boldsymbol{-du}$

$= -\int \boldsymbol{e^{u}du}$

$= -e^{u} + k$

Kembalikan nilai u, maka $= -e^{-x} + k$

(5) Selesaikanlah $\int \boldsymbol{2^{3x+1}dx}$

Penyelesaian :

$$\int 3^{3x+1}dx = \int (2^3)^x \,.\, 2\, dx$$

$$= 2 \int 8^x.\, dx$$

$$= 2\left[\frac{8^x}{In\ 8}\right] + k$$

$$= \frac{2.\,(2^3)^x}{In\ 8} + k$$

$$= \frac{2^{3x+1}}{In\ 8} + k$$

Kaidah 4. Formula penjumlahan

Dalam kaidah ke empat ini yaitu mengenai integral dalam formula penjumlahan, yang bisa dirumuskan menjadi :

$$\int \{(x) + g(x)\}dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$

$$= F(x) + G(x) + k$$

Contoh Soal :

(1) $\int (x^4 + 3x^2)dx = \int x^4 dx + \int 3x^2 dx = 0,2x^5 + x^3 + k$

Bukti : $\frac{d}{dx}(0,2x^5 + x^3 + k = x^4 + 3x^2$

(2) $\int \left(e^x + \frac{1}{x}\right) dx = \int e^x dx + \int \frac{1}{x} dx = 0,2e^x + \text{In } x + k$

Bukti :$\frac{d}{dx}(e^x + \text{In } x + k) = e^x + \frac{1}{x}$

(3) $\int (3x^2 - 10x)dx = \int 10x\, dx = x^3 + 5x^2 + k$

Bukti : $\frac{d}{dx}(x^3 - 5x^2 + k) = 3x^2 - 10x$

Kaidah 5. Formula perkalian

Dalam integral tak tentu juga diterapkan mengenai kaidah dalam formula perkalian, yang bias dilihat dari rumus berikut ini :

$$\int nf(x)dx = n \int f(x)dx$$

Contoh Soal :

(1) $\int 3x^2 dx = 3 \int x^2 dx = 3(\frac{x^{2+1}}{2+1}) + k = x^3 + k$

Bukti : $\frac{d}{dx}(x^3 + k) = 3x^2$

(2) $\int -x^3\, dx = -1 \int x^3 = -1 \left(\frac{x^{3+1}}{3+1} + k\right) = -\frac{1}{4}x^4 + k$

Bukti : $\frac{d}{dx}(-\frac{1}{4}x^4 + k) = -x^3$

(3) $\int x\left(6x^2 - 3x\right) = \int\left(6x^3 - 3x^2\right) = \frac{6}{3+1}x^{3+1} - \frac{3}{2}x^{2+1} = 1,5x^4 - x^3 + k$

(4) Selesaikanlah integral tak tentu berikut ini

$$\int (2x+1)(x-5)dx$$

Penyelesaian :

$$\int (2x+1)(x-5)dx \quad = \int 2x^2 + 9x - 5 + k$$

$$= \frac{2}{3}x^3 + \frac{9}{2}x^2 - 5x + k$$

Kaidah 6. Formula substitusi

$$\int f(u)\frac{du}{dx}dx = \int f(\,u)\, du = f(u) + k$$

u = g(x) $\int f\, du = substitut\ bagi\ \int dx$

Dimana, u = g(x), dan ∫ du merupakan subsitusi bagi ∫ dx.

Contoh Soal :

(1) Selesaikanlah $\int 6x\,(\,3x^2 - 10)$**dx**

Penyelesaian :

Cara biasa atau langsung

$\int 6x\ (\ 3x^2 - 10)$dx =$(\ 18x^3 - 60x)dx =\ 4{,}5x^4 - 30x^2 + k$

Berdasarkan cara substitusi, misalkan u = $3x^2 - 10$; maka $\frac{du}{dx} = 6x$

Atau dx=$\frac{du}{6x}$sehingga menjadi :

$\int 6x(3x^2 - 10)dx = \int 6x\ u\ \frac{du}{dx} = \int u\ du = \frac{u^2}{2} + k$

= $\frac{(3x^2-10)^2}{2} + k$

= $\frac{1}{2}(9x^4 - 60x^2 + 100) + k$

= $4{,}5x^4 - 30x^2 + 50 + k$

= $4{,}5x^4 - 30x^2 + k$ dimanak = 50 +k

(2) Selesaikanlah $\int \frac{x+3}{x^2+6x}\boldsymbol{dx}$

Misalkan u = $x^2 + 6x$ maka $\frac{du}{dx} = 2x + 6\ dx$

Karena pembilang (x+3) = $\frac{1}{3}(\frac{du}{dx})$ sehingga:

$$\int \frac{x+3}{x^2+6x}dx = \int \frac{\frac{1}{2}(\frac{du}{dx})}{u}dx$$

$$= \int \frac{\frac{1}{2}(du)}{u} = \frac{1}{2}\int \frac{(du)}{u}$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{1}{u} du = \frac{1}{2}\ In\ u + k$$

(3) Untuk mengintegralkan fungsi komposit berpangkat lebih dari dua, dapat digunakan formula :

$$\frac{\boldsymbol{a}}{\frac{\boldsymbol{du}}{\boldsymbol{dx}}(\boldsymbol{n}+\mathbf{1})} . \boldsymbol{u}^{\boldsymbol{n}+\mathbf{1}} + \boldsymbol{k}$$

Selesaikanlah $\int 2x(x^2+4)^4$

Penyelesaian :

Misalkan u = (x^2+4) maka $\frac{du}{dx} = 2x$; $a = 2x$; $n = 4$

$$\int \mathbf{2x(x^2+4)^4} = \frac{\mathbf{2x}}{\mathbf{2x(4+1)}}(\mathbf{x^2+4})^{\mathbf{5}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{5}}.(\mathbf{x^2+4})^{\mathbf{5}} + \mathbf{k}$$

Selesaikanlah $9\int (x^2+3x+5)^8.(2x+3)dx$

Penyelesaian :

Misalkan u = x^2+3x+5 , maka

$$\frac{du}{dx} = 2x+3$$

$$dx = \frac{du}{2x+3}$$

$$9\int (x^2+3x+5)^8.(2x+3)dx = \int 9u^8.(2x+3).\frac{du}{(2x+3)}$$

$$\int 9u^8\, du = \frac{9}{9}u^9 + k = u^9 + k$$

$$(x^2 + 3x + 5)^9 + k$$

(4) Dalam mengintegralkan suatu fungsi, usahakan jangan ada tanda akar dan jangan dalam bentuk pembagian.

Contoh Soal :

$$\int \frac{\mathbf{2x^3 + \sqrt{x}}}{\mathbf{x^2}}\,\mathbf{dx} = \int (\mathbf{2x^3 + x^{\frac{1}{2}}})\mathbf{x^{-2}} = \int \left(\mathbf{2x + x^{\frac{-3}{2}}}\right)\mathbf{dx}$$

$$= \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{1+1}}\mathbf{x^{1+1}} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{\frac{-3}{2}+1}}\mathbf{x^{\frac{-3}{2}+1}}$$

$$= \mathbf{x^2 - 2x^{\frac{-1}{2}} + k}$$

Contoh Soal :

$$\int \frac{\mathbf{1}}{\sqrt[3]{(\boldsymbol{3x+2})^5}}\boldsymbol{dx} = \int \frac{\mathbf{1}}{(\boldsymbol{3x+2})^{\frac{5}{3}}} = \int (\boldsymbol{3x+2})^{\frac{-5}{3}}$$

$$= \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3(-\frac{5}{3}+1)}} \,.\, (\boldsymbol{3x+2})^{\frac{-5}{3}+1} + \boldsymbol{k}$$

$$= \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{-2}}(\boldsymbol{3x+2})^{\frac{-2}{3}} + \boldsymbol{k}$$

$$= \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{-2}(\boldsymbol{3x+2})^{\frac{2}{3}}} + \boldsymbol{k}$$

Dalam penyelesaian integral tak tentu memiliki tiga cara penyelesaian, yaitu dengan penjabaran berikut ini :

a. Penyelesaian cara biasa

Dengan menggunakan rumusan rumusan utama dari integral.

b. Penyelesaian cara substitusi

Cara yang pertama adalah dengan integral substitusi, yang pada prinsipnya adalah integral pemisalan. Prinsip integral substitusi ada 2 yaitu jika salah satu bagian, kita misalkan dengan u, dan sisa yang lainnya, termasuk dx, harus diubah dalam du.

Pada cara substitusi ini,bentuk fungsi f(x) dapat diunah menjadi bentuk$k.\left(g(x)\right)^{n}.g^{I}(x)$. perhatikan bahwa jika U = g(x), maka$\frac{dU}{dx}g^{I}\ (x)$ atau $dU = g^{I}(x)$dx.

c. Penyelesaian cara metode parsial

Dalam penerapan integral tak tentu, selain metode substitusi adalah dengan cara metode parsial. Artinya metode ini adalah alternative kedua jika metode substitusi di atas tidak bisa digunakan.

Metode parsial ini adalah integral dari turunan hasil kali dua fungsi, adapun konsep dari metode parsial ini adalah sebagai berikut :

Penerapan integral tak tentu :

a. Untuk menentukan persamaan kurva

Apabila ada fungsi y = f(x), merupakan gradien garis singgung kurva, dimana sembarang titik pada kurvatersebut adalah y’ = = f'(x).Oleh karena itu, apabila gradien garis singgungnya sudah diketahui, maka persamaan kurva bisa diselesaikan dengan cara seperti berikut ini:

$$\mathbf{y = \int f\,'(x)\,dx = f(x) + k}$$

Apabila ada salah satu titik yang melewati kurva telah diketahui, maka nilai k juga diketahui, dengan demikian persamaan kurva bisa diselesaikan.

Contoh Soal :

Gradien garis pada suatu kurva dengan y = F(x), dimana $\frac{dy}{dx} = 1 - \frac{4}{x^2}$, Bentuklah suatu persamaan kurva, apabila sebuah kurva diketahui melalui titik (2 , 5).

Penyelesaian :

$$\boldsymbol{\frac{dy}{dx}} \quad = \boldsymbol{y'} \quad = \mathbf{1} - \frac{4}{x^2}$$

$$y = F(x) = \int \left(1 - \frac{4}{x^2}\right) dx$$

$$y = x + 4x^{-1} + k$$

melalui titik (2, 5)

$y = x + 4x^{-1} + k$

$\mathbf{5 = 2 + 4(2)^{-1} + \boldsymbol{k}}$

$\mathbf{5 = 4 + \boldsymbol{k}}$

$\boldsymbol{k} = \mathbf{1}$

b. Menentukan fungsi f(x) jika f'(x) dan f(a) diketahui

Contoh Soal :

Jika diketahui f'(x) = $6x^2 - 2x + 4$ dan f(2) = 4 maka tentukanlah fungsi f(x)!

Penyelesaian :

$f'(x) = 6x^2 - 2x + 4$

maka $f(x) = \int (6x^2 - 2x + 4)dx$

$f(x) = \frac{6}{3}x^3 - \frac{2}{2}x^2 + 4x + C$

$f(x) = 2x^3 - x^2 + 4x + C$

karena f(2) = 4 maka $2(2)^3 - (2)^2 + 4(2) + C = 4$

$16 - 4 + 8 + C = 4$

$20 + C = 4$

Jadi $C = -16$

Sehingga $f(x) = 2x^3 - x^2 + 4x - 16$

c. Bisa juga untuk penyelsaian permasalahan mengenai jarak, kecepatan maupun waktu.

Contoh Soal :

Jika diketahui percepatan molekul adalah at = -12 + 24 m/ second, dan kecepatan berada di t = 0 adalah 20 m/ second, Hitunglah persamaan molekul tersebuut dalam integral!

Penyelesaian :

Percepatan molekul $a(t) = -12t + 24$

Sehingga :

$$v = \int a \, \mathrm{dt}$$

$$v = \int (-12t + 24) \, \mathrm{dt}$$

$$v = -6t^2 + 24t + C$$

pada t=0, v_o = 20 m/detik, maka 20 = 0 + 0 + C, C = 2

Jadi, persamaan kecepatannya adalah

$$u = -6t^2 + 24t + 20$$

Contoh Soal :

Jika diketahui partikel dengan vt = 8t – 6, dan saat 3 detik, partikel mampu mencapai jarak 28m, hitunglah jakar apabila partikel menembus setelah 5 detik!

Penyelesaian :

v(t) = 8t – 6

s(t) = $\int v(t)\,dt$

s(t) = $\int (8t-6)\,dt$

s(t) = $\frac{8}{2}t^2 - 6t + C$

s(t) = $4t^2 - 6t + C$

Untuk t = 3 maka s(3) = $4(3)^2 - 6(3) + C$ = 28

36 – 18 + C = 28

18 + C = 28 maka C = 10

Sehingga : s(t) = $4t^2 - 6t + 10$

s(5) = $4(5)^2 - 6(5) + 10$ = 100 – 30 + 10 = 80 m

C. Soal Latihan/Tugas

Selesaikanlah integral berikut dengan teliti dan benar!

1. $\int x^3 dx$
2. $\int 9x^3 dx$
3. $\int 4x^3 - 3x^2 + 2\,dx$
4. $\int (x^2 - \sqrt{x} + 4)\,dx$
5. $\int \frac{x^2+3x-2}{x} dx$
6. $\int \sqrt{2+5x}\,dx$
7. $\int \frac{3x}{\sqrt{1-x^2}} dx$
8. $\int x\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} dx$
9. $\int (x\sqrt{x} - 5)^2 dx$
10. $\int (x^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{2}{3}})^2 dx$

D. Daftar Pustaka

Dumairy. (2015). *Matematika Terapan Untuk Bisnis dan Ekonomi*. Yogyakarta. BPFE-Yogyakarta.

PERTEMUAN 16
PENERAPAN INTEGRAL TAK TENTU DALAM EKONOMI

A. Tujuan Pembelajaran

Pada materi pertemuan 16 ini, akan dijelaskan mengenai penerapan integral tak tentu dalam bidang ekonomi. Setelah mempelajari materi ini, mahasiswa mampu menyelesaikan permasalahan integral tak tentu dan mampu menerapkannya kedalam bidang ekonomi dan bisnis.

B. Uraian Materi

1. Penerapan Integral Tak Tentu dalam Bidang Ekonomi

Integral tak tentu seperti yang sudah dipahami di materi sebelumnya, adalah suatu kebalikan dari turunan. Intergal tak tentu ini juga bisa diterapkan dalam bidang ekonomi, terkait dengan bagaimana mencari persamaan fungsi total, apabil persamaan fungsi marjinalnya sudah diketahui. Fungsi marjinal sebagai bentuk dari turunan sebuah fungsi total, dengan demikian integral juga bisa divari bagaimana fungsi asal dari turunan maupun bagaimana fungsi totalnya.

a. Fungsi Biaya

Untuk menghitung fungsi biaya, bisa dengan menggunakan rumus sebagai berikut ini :

Fungsi biaya total adalah C = f(Q)

Fungsi biaya marjinal adalah MC = C' = $\frac{dC}{dQ}$ = f'(Q)

Fungsi biaya total tidak lain merupakan suatu integral dari biaya marjinal.

$$C = \int MC\, dQ = \int f(Q)\, dQ$$

Untuk memahami rumus di atas, silahkan pahami beberapa kasus di bawah ini dalam penerapan ke contoh soal.

Kasus 1:

Hitunglah persamaan dari fungsi biaya total maupun fungsi biaya rata-rata dari biaya marjinal suatu perusahaan ditunjukkan oleh MC = $3Q^2$ – 6Q + 4!

Penyelesaian :

Biaya totaldengan C = f(Q) dQ

= $\int(3Q^2 - 6Q + 4)\, dQ$

= $Q^3 - 3Q^2 + 4Q + k$

Biaya rata-rata : AC = $\frac{C}{Q} = Q^2 - 3Q + 4 + \frac{k}{Q}$

Suatu k sebagai konstanta tidak lain adalah fungsi biaya tetap. Apabila fungsi biaya tetap diketahui adalah 4, maka menjadi :

C = $Q^3 - 3Q^2 + 4Q + 4$

AC = $Q^2 - 3Q + 4 + \frac{4}{Q}$

Kasus 2

Biaya marginal dari suatu perusahaan yaitu MC = $6Q^2 + 4Q + 5$. Nilai konstanta sebesar 6, Tentukanlah persamaan biaya total dan biaya rata-ratanya ! Lakukan anaisis nya juga!

Penyelesaian :

MC = $6Q^2 + 4Q + 5$

k = 6

Ditanya: Persamaan TC dan AC ?

TC = $\int$ MC dQ

TC = $\int 6Q^2 + 4Q + 5\, dQ$

= $\frac{6}{3} Q^3 + \frac{4}{2} Q^2 + 5Q + k$

= $2Q^3 + 2Q^2 + 5Q + k$

AC = $\frac{TC}{Q}$

AC = $\frac{2Q^3 + 2Q^2 + 5Q + 6}{Q}$

= $2Q^2 + 2Q + 5 + \frac{6}{Q}$

Analisis dari soal di atas adalah berdasarkan perhitungannya maka didapatkan bahwa persamaan biaya totalnya (TC) = $2Q^3 + 2Q^2 + 5Q + k$ sedangkan biaya rata-ratanya yaitu AC = $2Q^2 + 2Q + 5 + \frac{6}{Q}$

Kasus 3

Bentuklah suatu persamaan dari fungsi biaya total maupun fungsi biaya rata-rata apabila diketahuikonstanta adalah 5. Apabila diketahui fungsi biaya marginal pada perusahaan adalah MC = $15Q^2 + 18Q + 5$. Hitung berapa besar fungsi biaya total maupun fungsi biaya rata-rata apabila kuantitas diketahui berjumlah 11? Lengkapi dengan analisis anda!

Penyelesaian :

MC = $15Q^2 + 18Q + 5$

k = 5

Q = 11

Ditanya adalah bagaimana persamaan dari TC maupun AC? Dan besarnya nilai TC dan AC apabila Q = 11 ?

TC = $\int$ MC dQ

TC = $\int 15Q^2 + 18Q + 5\, dQ$

TC = $\frac{15Q^3}{3} + \frac{18Q^2}{2} + 5Q + k$

TC = $5Q^3 + 9Q^2 + 5Q + 5$

AC = $\frac{TC}{Q}$

AC = $\frac{5Q^3 + 9Q^2 + 5Q + 5}{Q}$

AC = $5Q^2 + 9Q + 5 + \frac{5}{Q}$

Jika Q = 11, maka persamaannya menjadi :

TC = $5Q^3 + 9Q^2 + 5Q + 5$

TC = $5(11)^3 + 9(11)^2 + 5(11) + 5$

TC = 5(1.331) + 9(121) + 55 + 5

TC = 6.655 + 1.089 + 55 + 5

TC = 7.804

AC = $\frac{\mathrm{TC}}{Q}$

AC = $\frac{7.804}{11}$

AC = 709,45

Analisis berdasarkan perhitungan di atas adalah apabila MC = $15Q^2 + 18Q + 5$ dan apabila nilai konstanta adalah 5, sehingga fungsi biaya total dan fungsi biaya rata-rata menjadi TC = $5Q^3 + 9Q^2 + 5Q + 5$ dan AC = $5Q^2 + 9Q + 5 + \frac{5}{Q}$.

Dan ketika kuantitas adalah 11 unit, suatu fungsi biaya total sebesar Rp 7.804 dan biaya rata-ratanya sebesar Rp. 709,45.

b. Fungsi Penerimaan

Untuk fungsi penerimaan dibagi menjadi fungsi penerimaan total, dan fungsi penerimaan marjinal. Adapun rumus dalam fungsi penerimaan adalah sebagai berikut :

Fungsi penerimaan total dengan rumus R = f(Q)

Fungsi penerimaan marjinal dengan rumus MR = R' = $\frac{dR}{dQ}$ = f(Q)

Fungsi penerimaan total merupakan bagian dari integral dengan berdasarkan fungsi penerimaan marjinal.

$$R = \int MR\, dQ = \int f(Q)\, dQ$$

Berdasarkan rumus di atas, maka pelajarilah kasus-kasus berikut ini untuk memahami penerapan dalam bentuk soal.

Kasus 4

Hitunglah persamaan fungsi dari penerimaan total maupun fungsi penerimaan rata-rata jika fungsi marjinalnya adalah MR = 16-4Q!

Penyelesaian:

Penerimaan total dengan R = $\int MR\, dQ$

$= \int (16 - 4Q)\, dQ$

$= 16\,Q - 2Q^2$

Penerimaan rata-rata AR $= \frac{R}{Q}$

$= 16 - 2Q$

Pada persamaan fungsi penerimaan total dengan konstanta pada k = 0, karena disebabkan fungsi penerimaan menjadi nol atau tidak akan ada jika tidak ada barang yang terjual.

Kasus 5

Suatu perusahaan memiliki persamaan penerimaan marginalnya adalah MR = 6Q + 18. Carilah persamaan total dan penerimaan rata-ratanya! Analisis dari hasil perhitungannya!

Penyelesaian :

MR = 6Q + 18

Ditanya adalah persamaan TR dan AR?

TR = ∫ MR dQ

= ∫6Q + 18 dQ

= $3Q^2 + 18Q$

AR = $\frac{TR}{Q}$

= $\frac{3Q^2 + 18Q}{Q}$

= 3Q + 18

Analisis dari perhitungan di atas adalah berdasarkan hasil yang diperoleh persamaan total penerimaan dari persamaan MR = 6Q + 18 adalah TR = $3Q^2$ + 18Q dan persamaan penerimaan rata-ratanya yaitu AR = 3Q + 18.

Kasus 6

Apabila diketahui sebuah fungsi marginal adalah MR = $15Q^2$ + 10Q + 5, susunlah persamaan TR maupun AR apabila nilai k = 0!. Dan berapa besar fungsi penerimaan total maupun rata-rata apabila jumlahnya terjual sampai 15 unit? Lakukan analisisnya juga!

Penyelesaian :

MR = $15Q^2$ + 10Q + 5

k = 0

Q = 15

Ditanya adalah persamaan dari TR maupun AR? Dan besarnya TR mapun AR apabila nilai Q = 15?

TR = ∫ MR dQ

TR = ∫$15Q^2$ + 10Q + 5 dQ

TR = $\frac{15Q^3}{3} + \frac{10Q^2}{2}$ + 5Q + k

TR = $5Q^3 + 5Q^2 + 5Q$, jika k = 0

AR $= \frac{TR}{Q}$

AR $= \frac{15Q^3 + 5Q^2 + 5Q}{Q}$

AR $= 5Q^2 + 5Q + 5$

Jika Q = 15, maka persamaan menjadi :

TR $= 5Q^3 + 5Q^2 + 5Q$

TR $= 5(15)^3 + 5(15)^2 + 5(15)$

TR $= 5(3.375) + 5(225) + 75$

TR $= 16.875 + 1.125 + 75$

TR $= 18.075$

AR $= \frac{TR}{Q}$

AR $= \frac{18.075}{15}$

AR $= 1.205$

Analisis dari perhitungan di atas adalah apabila MR = $15Q^2 + 10Q + 5$ dan nilai dari k = 0, fungsi penerimaan total maupun fungsi penerimaan rata-rata berubah menjadi TR = $5Q^3 + 5Q^2 + 5Q$ dan AR = 5Q2 + 5Q + 5. Apabila nilai kuantitas adalah 15 unit, penerimaan total akan sebesar Rp. 18.075 dan penerimaan rata-ratanya sebesar Rp. 1.205.

c. Fungsi Utilitas

Untuk fungsi utilitas, akan dijabarkan juga bagaimana fungsi utilitas total dan utilitas marjinal. Penjabaran rumusnya adalah sebagai berikut :

Fungsi utilitas total dirumuskan sebagai U = f(Q)

Fungsi utilitas marjinal dengan MU = U' = $\frac{dU}{dQ}$ = f(Q)

Bisa dijabarkan bahwa utilitas total merupakan bagian integral dari suatu utilitas marjinal.

$$U = \int MU\, dQ = \int f'(Q)\, dQ$$

Berdasarkan rumus di atas, maka perhatikan kasus-kasus di bawah ini dalam penerapan soal-soal latihan untuk memudahkan anda dalam memahami rumus penjabaran di atas.

Kasus 7

Hitunglah nilai dari fungsi utilitas total apabila ada konsumen yang memiliki utilitas marjinal adalah MU = 90 – 10Q.

Penyelesaian:

Untuk fungsi dari utilitas total dengan cara berikut ini :

U $= \int MU\, dQ$

$= \int (90 - 10Q)\, dQ$

$= 90Q - 5Q^2$

Sama halnya dengan produk total maupun pada penerimaan total, maka dalam hal ini juga konstanta k = 0, karena tidak akan ada utilitas yang diperoleh seseorang apabila tidak ada barang yang dikonsumsi.

Kasus 8

Jika seseorang akan membeli buah jeruk memiliki utilitas marginal MU = 20Q + $18Q^2 + 30Q^4$. Carilah persamaan utilitas total dari konsumen tersebut dan jika Q = 2 dan k = 0 maka berapakah nilai utilitas total? Lakukan analisis perhitungan anda!

Penyelesaian:

MU $= 20Q + 18Q^2 + 30Q^4$

Q $= 2$

k $= 0$

TU $= \int MU\, dQ$

$= \int 20Q + 18Q^2 + 30Q^4\, dQ$

$= 10Q^2 + 6Q^3 + 6Q^5 + k$

$= 10Q^2 + 6Q^3 + 6Q^5 + 0$

$= 10Q^2 + 6Q^3 + 6Q^5$

Jika Q = 2, maka persamaan menjadi :

TU $= 10Q^2 + 6Q^3 + 6Q^5$

$= 10(2)^2 + 6(2)^3 + 6(2)^5$

$= 40 + 48 + 192$

$= 280$

Analisis dengan perhitungan di atas,apabila suatu fungsi utilitas total dari seorang pembeli jeruk adalah TU = $10Q^2 + 6Q^3 + 6Q^5$ dan nilai utilitas total pada saat Q = 2 adalah 280.

Kasus 9

Jika diketahui fungsi dari utilitas marjinal adalah MU = $18Q^2 + 18Q + 18$ dan konstanta adalah 0. Tunjukkan persamaan dari fungsi utilitas total, dan besarnya utilitas total apabila Q = 18? Analisislah!

Penyelesaian:

MU = $18Q^2 + 18Q + 18$

k = 0

Q = 18

Ditanya adalah persamaan TU? Dan besarnya TU apabila Q = 18?

TU = $\int$ MU dQ

= $\int 18Q^2 + 18Q + 18$ dQ

= $\frac{18Q^3}{3} + \frac{18Q^2}{2} 18 + k$

= $6Q^3 + 9Q^2 + 18Q$

Jika Q = 18, maka persamaannya menjadi :

TU = $6Q^3 + 9Q^2 + 18Q$

= $6(18)^3 + 9(18)^2 + 18(18)$

= 6(5.832) + 9(324) + 324

= 34.992 + 2.916 + 324

= 38.232

Analisis dari perhitungan di atas, apabila MU = $18Q^2 + 18Q + 18$ dan konstanta adalah 0, sehingga fungsi utilitastotal menjadi TU = $6Q^3 + 9Q^2 + 18Q$. Jika diketahui kuantitas adalah 18 unit, jadi jumlah dari utilitas total bernilai 38.232.

d. Fungsi Produksi

Fungsi produksi ini berkaitan dengan keluaran dan masukan dari produksi total, silahkan pahami penjabaran berikut :

Apabila suatu produksi total dirumuskan dengan P = f(X) di mana,

P = Keluaran

X = Masukan

Dan pada produk marjinal dengan MP = P' = $\frac{dP}{dX}$ = f'(X)

Maka produk total merupakan bagian integral dari suatu produk marjinal.

$$P = \int MP\ dx = \int f'(X)\ dX$$

Berdasarkan rumus di atas, maka pahami kasus-kasus di bawah ini untuk memudahkan dalam penerapan contoh soal nya.

Kasus 10

Jika diketahui produk marjinal adalah MP = 18X - $3X^2$. Hitunglah persamaan dari fungsi produk total maupun fungsi produk rata-rata!

Penyelesaian :

Produk total dengan P $= \int MP\ dX$

$= \int (18X - 3X^2)\ dX$

$= 9X^2 - X^3$

Produk rata-rata AP $= \frac{P}{X}$

$= 9X - X^2$

Pada persamaan fungsi produk total konstanta juga k = 0, karena alasannya sama yaitu tidak akan ada (P) yaitu barang yang dihasilkan jika tidak ada (X) atau bahan yang diolah atau digunakan.

Kasus 11

Sebuah perusahaan memiliki persamaan produk marginal MP = $6Q^2 + 16Q + 3$. Hitunglah persamaan dari fungsi produk total maupun fungsi produk rata-rata? Lakukan analisis dari perhitungan anda!

Penyelesaian:

MP $= 6Q^2 + 16Q + 3$

Ditanya adalah persamaan TP dan AP?

TP $= \int MP\ dQ$

$= \int 6Q^2 + 16Q + 3\ dQ$

$= 2Q^3 + 8Q^2 + 3Q + k$

AP $= \frac{TP}{Q}$

$= \frac{2Q^3 + 8Q^2 + 3Q + k}{Q}$

$= 2Q^2 + 8Q + 3 + \frac{k}{Q}$

Analisis dari perhitungan di atas, maka diperoleh persamaan produksi total adalah (TP) = $2Q^3 + 8Q^2 + 3Q + k$ dan persamaan produksi rata-ratanya adalah AP = $2Q^2 + 8Q + 3 + \frac{k}{Q}$.

Kasus 12

Produksi marginal dari PT. Sriwijaya ditunjukkan oleh persamaan MP = $75X^2 + 50X + 10$. Bentuklah persamaan produksi total dan produksi rata-rata apabila diketahui bahwa k = 0? Hitung berapa besarnya produksi total maupun produksi rata-rata apabila masukan adalah 10 unit? Silahkan lengkapi analisis perhitungan anda!

Penyelesaian:

MP $= 75X^2 + 50X + 10$

k $= 0$

X $= 10$

Ditanya adalah persamaan dari TP maupun AP? Dan besarnya nilai dari TP maupun AP apabila X = 10?

TP $= \int MP\, dX$

TP $= \int 75X^2 + 50X + 10\, dX$

TP $= \frac{75X^3}{3} + \frac{50X^2}{2} + 10X + k$

TP $= 25X^3 + 25X^2 + 10X$

AP $= \frac{TP}{x}$

AP $= \frac{25X^3 + 25X^2 + 10X}{x}$

AP $= 25X^2 + 25X + 10$

Jika X = 10, maka persamaanya menjadi :

TP $= 25X^3 + 25X^2 + 10X$

TP $= 25(10)^3 + 25(10)^2 + 10(10)$

TP $= 25(1000) + 25(100) + 100$

TP = 25.000 + 2.500 + 100

TP = 27.600

AP = $\frac{TP}{X}$

AP = $\frac{27.000}{10}$

AP = 2.760

Analisis perhitungan di atas adalah apabila MP = $75X^2 + 50X + 10$ dan nilai dari k = 0, sehingga fungsi produksi total maupun fungsi produksi rata-rata berubah menajdi TP = $25X^3 + 25X^2 + 10X$ dan AP = $25X^2 + 25X + 10$. Ketika kuantitas adalah 10 unit, jadi produksi totalnya berubah sebesar 27.600 unit dan produksi rata-ratanya sebesar 2.760 unit.

e. Fungsi Konsumsi dan Fungsi Tabungan

Pada ekonomi makro, yang kita ketahui bahwa untuk konsumsi disimbolkan dengan (C), sedangkan untuk tabungan dengan (S) dinyatakan fungsional dalam suatu pendapatan nasional yaitu simbolnya (Y). Sebagai bahan untuk memperdalam materi ini, silahkan pahami penjabaran rumus di bawah ini :

C = f(Y) = a + bY

MPC = C' = $\frac{dC}{dY}$ = f'(Y) = b

Karena Y = C + S, maka persamaanya menjadi :

S = g(Y) = – a + (1 – b)Y

MPS = S' = $\frac{dS}{dY}$ = g'(Y) = (1 – b)

Berdasarkan kaidah integrasi, konsumsi dan tabungan masing-masing adalah integral dari *marginal propensity to consume*(MPC) dan *marginal propensity to save* (MPS).

$$C = \int MPC\, dY = F(Y) + k \qquad k \equiv a$$
$$S = \int MPS\, dY = G(Y) + k \qquad k \equiv -a$$

Suatu k yaitu konstanta pada fungsi konsumsi maupun fungsi tabungan, perannya masing-masing adalah *autonomous consumption* dan *autonomous saving*.

Jika k = a = *autonomous consumption* = maka konsumsi otonom adalah besarnya konsumsi nasional apabila pendapatan nasional bernilai 0.

Jika k = -a = *autonomous saving* = maka tabungan otonom adalah besarnya tabungan nasional apabila pendapatan nasional bernilai 0.

Artinya bahwa MPC (*Marginal Propensity to Consume*) adalah perbandingan (ΔC) yaitu perubahan konsumsi terhadap nilai (ΔY) yaitu perubahan pendapatan nasioanl, yang bisa mengakibatkan adanya suatu perubahan dalam konsumsi.

Dimana:

MPC < 1 = ketika sebagian besar pendapatan digunakan dalam meningkatkan konsumi, dan sisanya tabungan berjumlah menjadi kecil. Sebaliknya,

MPC > 0,5 = ketika lebih dari 50 % suatu pendapatan seseorang diperoleh untuk konsumsi.

Perhatikan kasus-kasus di bawah ini sebagai pemahaman dalam penerapan rumus di atas dengan contoh soal berikut ini :

Kasus 13

Hitunglah fungsi dari konsumsi maupun tabungan apabila*autonmous consumption*-nya sebesar 30 milyar dan diketahui MPC = 0,8.

Penyelesaian:

C = $\int \mathrm{MPC}$ dY

= $\int 0{,}8$ dY

= 0,8Y + 30 milyar

S = $\int \mathrm{MPS}$ dY

= $\int 0{,}2$ dY

= 0,2Y – 30 milyar,

Atau,

S = Y – C

= Y – (0,8Y - 30 milyar)

= 0,2 – 30 milyar.

Kasus 14

Diketahui besarnya konsumsi *otonomous* adalah 40 milyar sedangkan MPC = 0,55. Bentuklah suatu persamaan fungsi dari konsumsi dan fungsi tabungan!.

Penyelesaian:

C = 40 milyar

MPC = 0,55

Ditanya adalah persamaan C dan S ?

C = ∫ MPC dY

=∫ 0,55 dY

= 0,55 Y + C

= 0,55 Y + 40

S = Y – C

= Y – (0,55 Y + 40)

= 0,45Y – 40

Y = C + S

= (0,55 Y + 40) + (0,45Y – 40)

Kasus 15

Carilah persamaan konsumsi dan persamaan tabungan masyarakat apabila diketahui konsumsi otonomnya senilai 50 milyar, sedangkan MPC = 0,70. Berapakah besar dari fungsi konsumsi maupun fungsi tabungan apabila pendapatan nasional adalah 555 milyar? Analisislah perhitungan anda!

Penyelesaian:

MPC = 0,70

k = a = 50 milyar

Y = 555 milyar

Ditanya adalah fungsi (C) dan fungsi (S)? Dan besar C dan S ?

MPC + MPS = 1

MPS = 1 – 0,70

MPS = 0,30

Fungsi (C)

f(Y) = ∫ MPC dY

f(Y) = ∫ 0,70 dY

f(Y) = 0,70Y + k

f(Y) = 0,70Y + 50

Fungsi (S)

f(Y) = ∫ MPS dY

f(Y) = ∫ 0,30 dY

f(Y) = 0,30Y – k

f(Y) = 0,30Y – 50

Jika Y = 555, maka persamaan menjadi :

C = 0,70Y + k

= 0,70 (555) + 50

= 388,5 + 50

= 438,5 milyar

S = 0,30Y – k

= 0,30 (555) – 50

= 166,5 – 50

= 116,5 milyar

Analisisnya berdasarkan perhitungan di atas, maka apabila MPC = 0,70 dan konsumsi otonomnya sebesar 50 milyar, jadi persamaan konsumsi berubah menjadi C = 0,70Y + 50 dan persamaan tabungan menjadi S = 0,30Y – 50. Apabila pendapatan nasional adalah 555, fungsi dari konsumsi dan tabungan akan berubah sebesar Rp. 438,5 dan Rp.116,5 milyar.

C. Soal Latihan/Tugas

Kerjakan soal latihan berikut ini dengan teliti dan benar :

1. Jika diketahui fungsi persamaan adalah :

   MR = -2.000Q + 1.200

   MC = $12Q^2$ - 800Q + 6.000

   Biaya tetap = 12.000

   Hitunglah :

   a. Bagaimana fungsi keuntungannya?
   b. Bagaimana besarnya kuantitas agar mendapatkan keuntungan?
   c. Bagaimana besarnya keuntungan maksimum?

2. Jika diketahui fungsi biaya marginal adalah MC = Q^2 - 42Q + 200.

   Tentukan:

   a. Fungsi biaya total (C), jika biaya tetap 900
   b. Besarnya biaya total jika Q = 12.

3. Carilah persamaan fungsi biaya total dan biaya rata-rata suatu perusahaan, jika biaya marginalnya adalah MC = 1,5 Q2 – 4 Q +12, sedangkan biaya tetap totalnya sebesar 20 !
4. Hitunglah fungsi penerimaan total jika diketahui fungsi penerimaan marjinal adalah MR = 900 – 28Q.
5. Apabila *Marginal revenue* untuk produk dinyatakan dalam persamaan MR = 20 – 4Q. Tentukan fungsi penerimaan total (R).
6. Apabila *Marginal cost* suatu produk dinyatakan oleh persamaan MC = 6Q – 21. Tentukan fungsi biaya total (C) jika Q = 20 dan C = 840.
7. Jika diketahui MR = 20 – 4Q dan MC = 2Q – 10.
   Untuk Q = 5, R = 50 dan C = 2. Tentukan keuntungan maksimum jika ada.

D. Daftar Pustaka

Dumairy. (2015). *Matematika Terapan Untuk Bisnis dan Ekonomi*. Yogyakarta. BPFE-Yogyakarta.

Yuliarto Nugroho, Ferdinand S, Mendjamin S. (2014). *Matematika Ekonomi dan Bisnis*. Jakarta: Raja Grafindo Persada.

PERTEMUAN 17
INTEGRAL TERTENTU

A. Tujuan Pembelajaran

Pada pertemuan 17 ini akan dijelaskan mengenai konsep integral tertentu. Setelah mempelajari materi ini, mahasiswa diharapkan mampu untuk menjelaskan perhitungan integral tertentu, mampu membedakannya dengan integral sebelumnya yaitu integral tak tentu dan mampu memahami kaidah-kaidah apa saja dalam integral tertentu.

B. Uraian Materi

1. Pengertian Integral Tertentu

Selain dari integral tak tentu pada pertemuan sebelumnya, kita akan membahas integral tertentu. Integral tertentu merupakan integral dari suatu fungsi yang nilai-nilaivariabel bebasnya (memiliki batas-batas) tertentu. Integral tertentu digunakan untuk menghitung luas area yang terletak di antara kurva y = f(x) dan sumbu horizontal –x, dalam suatu rentang wilayah yang dibatasi x = a dan x = b. Pada integral taktentu, kita rumuskan seperti di bawah ini:

$$\int \boldsymbol{f(x)dx = F(x) + k}$$

Apabila anda ingin mengetahui hasil integrasi tersebut untuk suatu rentangan wilayah tertentu, misalnya x = a dan x = b dimana a < b, maka x dapat disistribusikan dengan nilai-nilai a dan b sehingga ruas kanan persamaan di atas berubah menjadi :

{ F(b) + k } – { F – 1 (a) + k } = F(b) – F(b)

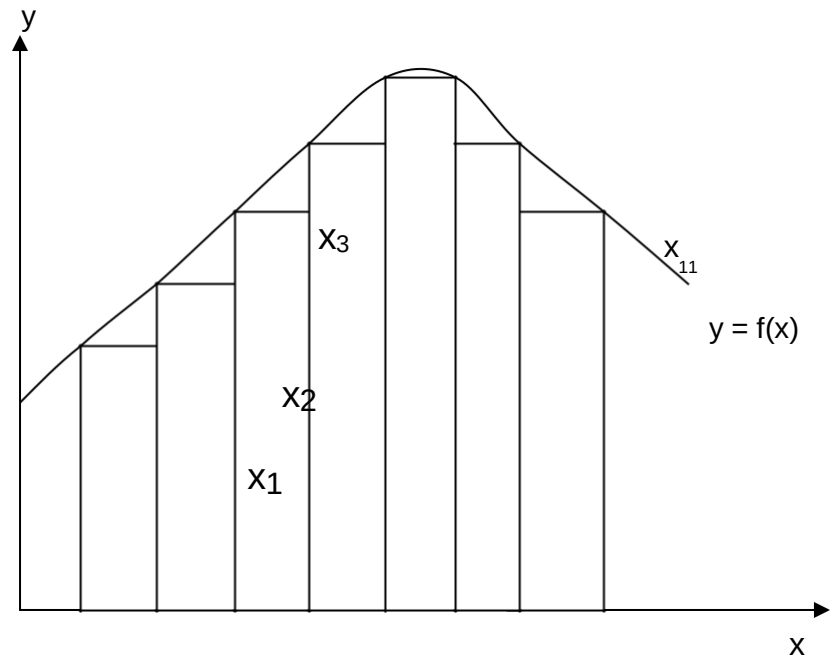
Dimana F(b) – F(a) adalah hasil integrasi tertentu dari f(x) antara a dan b. Secara lengkap persamaan pertama tadi dapat dituliskan menjadi:

$$\boldsymbol{\int_a^b f(x)dx = [f(x)]_a^b = f(b) - f(a)}$$

Notasi $\int_a^b f(x)dx$dibaca integral f(x) untuk rentang wilayah x dari a ke b. Selanjutnya mengingat $a < b$ dimana a dinamakan batas bawah integrasi, sedangkan b disebut batas atas integrasi.

Pemahaman integral tertentu ini dapat lebih mudah dipahami dengan bantuan penjelasan grafis. Andaikan Y = f(x) dan hendak akan dihitung luas area di antara kurva y =f(x) dan sumbu horizontal x untuk rentangan dari x = a ke x = b. langkah pertama yang harus dilakukan ialah menetapkan a dan b pada sumbu horizontal x, sehingga diperoleh suatu rentangan atau interval wilayah antara a dan b. Selanjutnya rentangan ini dibagi-bagi menjadi sebanyak n sub-rentanganyang sama lebar. Nilai masing-masing sub-rentangan tak lain adalah , Δ(b – a)/n; dan karena masing-masing sub-rentangan sama lebarnya, maka $\Delta x_1 = \Delta x_2 = \Delta x_3 \ldots \ldots = \Delta x_n$

Langkah berikutnya ialah menetapkan sembarang mana titik-titik yang membatasi tiap-tiap sub-rentang, misalnya. Perhatikan gambar berikut ini :



0 a x1x2x3xixixibx

x0x11

Gambar 17.1 Ilustrasi grafik integral tertentu

Nilai atau harga masing-masing titik batas tiap subrentang bisa dijabarkan sebagai berikut :

$x_0 = a$

$x_1 = a + \Delta x$

$x_2 = a + 2(\Delta x)$

$x_3 = a + 3(\Delta x)$

. . . . . .

$x_n = a + n(\Delta x) = b$

Luas seluruh area di bawah kurva untuk rentangan dari a ke b, dengan kata lain dari x_0 ke x_n adalah:

$f(x_1)\,\Delta x_1 + f(x_2)\,\Delta x_2 + \ldots + \Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x_i$

Dalam hal Δx sedemikian kecil-kecilnya atau mendekati nol, sementara n sedemikian banyaknya atau mendekati tak hingga, maka berlaku:

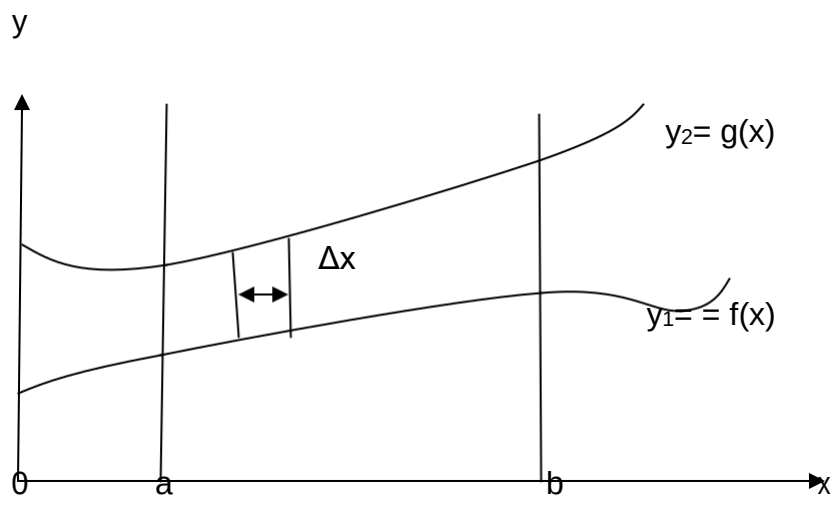
$$\lim_{n\to\sim} \sum_{i=1}^{n} \mathbf{f(x_i)\,\Delta x_i} = \lim_{\Delta x\to 0} \sum_{i=1}^{n} \mathbf{f(x_i)\,\Delta x_i} = \int_a^b \mathbf{f(x)\,dx}$$

Selain untuk menghitung luas suatu area antara sebuah kurva dan salah satu sumbu, integral tertentu dapat pula digunakan untuk menghitung luas suatu area yang terletak di antara dua kurva.

Andaikan terdapat dua buah kurva $y_1 = f(x)$ dan $y_2 = g(x)$ di mana f(x)< g(x).Maka luas area antara kedua kurva ini untuk rentang wilayah dan a ke b (a < b) dapat dijabarkan sebagai berikut :

$$\int_a^b \{g(x) - f(x)\}dx = \int_a^b g(x)dx - \int_a^b f(x)dx$$

Perhatikan gambar grafik berikut ini :



Gambar 17.2 Luas daerah kurva

2. Sifat atau kaidah Integral Tentu

Banyak persepsi mahasiswa mengenai integral. Integral menjadi momok untuk mahasiswa, jadi ketika mendengar mata kuliah intergral, maka mahasiswa sudah malas dan pucat dalam menerima pembelajaran. Padahal sebenarnya integral itu dapat ditentukan dengan mudah, bahkan denggan sangat mudah. Untuk mempermudah perhitungan integral, dapat memanfaatkan sifat atau kaidah integral sebagai berikut :

Pertama. Jika batas atas dan batas bawah dalam suatu integral tentu adalah sama, maka hasil integral tentu dari fungsi tersebut akan sama dengan nol karena tidak ada daerah antara batas - batas tersebut.Berikut ini adalah rumus secara matematis dijabarkan seperti ini :

$$\int_{a}^{a} f(x)dx = 0$$

Untuk penerapan contohnya, perhatikan contoh soal berikut ini :

$$\int_2^2 x^4 dx = \left[\frac{1}{5}x^5\right]\frac{2}{2} = \frac{1}{5}(32 - 32) = 0$$

Kedua. Terjadi jika batas atas dan batas bawah dalam integral tertentu dirubah posisinya (batas atas menjadi batas bawah dan batas bawah menjadi batas atas) untuk fungsi integral yang sama, maka akan diperoleh hasil-hasil yang sama meskipun batas-batasannya ditukar. Berikut ini adalah rumus secara matematis dari sifat kaidah integral yang kedua :

$$\boldsymbol{\int_a^b f(x)\, dx = -\int_b^a f(x)}$$

Untuk lebih jelasnya rumus di atas, maka perhatikan penerapan contoh soalnya sebagai berikut :

$$\int_2^5 x^4 dx = 618{,}6$$

$$= -\int_5^2 x^4 dx$$

$$= -\left[\frac{1}{5}x^5\right]\frac{2}{5}$$

$$= -\frac{1}{5}(32 - 3125)$$

$$= -\frac{1}{5}(-3093)$$

$$= 618{,}6$$

Ketiga. Apabila ada f(x) adalah fungsi integral dan k merupakan tetapan (konstanta) sembarang. Berikut ini adalah rumus secara matematis yang dapat dijabarkan dari kaidah ketiga :

$$\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$$

Silahkan perhatikan penerapan contoh dari rumus di atas sebagai berikut, untuk memudahkan anda dalam memahami kaidah ketiga :

$$\int_2^5 5x^4 dx = [x^5]_2^5$$
$$= (5^5 - 2^5)$$
$$= 3125 - 32$$
$$= 3092$$

Keempat. Kaidah keempat, misalkan diberikan dua buah fungsi yaitu f(x) dan g(x), maka integral tertentu dari penjumlahan atau pengurangan kedua fungsi tersebut dapat diselesaikan dalam penghitungan melalui kaidah keempat dengan rumus matematis dijabarkan berikut ini :

$$\int_a^b \{f(x)\,dx \pm g(x)\}dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$$

Perhatikan contoh penerapan rumus di atas dalam soal berikut ini :

$$\int_2^5 (x^4 + 5x^5)dx = \int_2^5 x^4 dx + \int_2^5 5x^5 dx$$

$$= 618{,}6 + 3093$$
$$= 3.711,6$$

Kelima. Misalkan terdapat dua integral dengan nilai fungsi yang sama dan nilai pada batas atas pada fungsi pertama sama dengan nilai pada batas bawah pada fungsi kedua.Berikut ini adalah rumus secara matematis dari kaidah kelima :

$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_b^c f(x)dx + \int_a^b f(x)\,dx$$

Perhatikan dalam penerapan contoh soal di bawah ini sebagai aplikasi dari rumus di atas :

$$\int_2^5 x^4 dx = \int_3^5 x^4 dx + \int_2^3 x^4\, dx$$

$$= \left[\frac{1}{5}x^5\right]_3^5 + [\frac{1}{5}x^5]_2^3$$

$$= \frac{1}{5}(243 - 32) + \frac{1}{5}(3125 - 243)$$

$$= 618{,}6$$

Keenam. Kaidah keenam adalah apabila fungsi f(x) nya bukan suatu fungsi melainkan konstanta.Berikut ini adalah rumus secara matematis dalam kaidah kelima yang bisa anda gunakan :

$$\int_{\boldsymbol{a}}^{\boldsymbol{b}} \boldsymbol{f(x)dx} = [\boldsymbol{F(x)}]_{\boldsymbol{a}}^{\boldsymbol{b}} = \boldsymbol{F(b)} - \boldsymbol{F(a)}$$

Perhatikan penerapan contoh soal berikut sebagai aplikasi dari pemaparan rumus di atas :

$$\int_2^5 x^4 dx = \left[\frac{1}{5}x^5\right]_2^5$$

$$= \frac{1}{5}(3125 - 32)$$

$$= 618{,}6$$

Contoh Soal:

Soal 1

Hitunglah hasil dari integral tentu berikut ini :

$$\int_2^4 (-x^2 + 6x - 8)dx$$

Penyelesaian :

$$\int_2^4(-x^2+6x-8)dx = \left(-\frac{1}{3}x^3+\frac{6}{2}x^2-8x\right)\Big]_2^4$$

$$= \left(-\frac{1}{3}x^3+3x^2-8x\right)\Big]_2^4$$

$$= \left(-\frac{1}{3}4^3+\frac{6}{2}4^2-8.4\right)-\left(-\frac{1}{3}2^3+\frac{6}{2}2^2-8.2\right)$$

$$= -\frac{56}{3}+20$$

$$= \frac{4}{3}$$

Soal 2

Tentukan hasil integral dari fungsi berikut:

$$\int_1^4 4x\,dx$$

Penyelesaian :

$$\int_1^4 4x\,dx = 2x^2\Big]_1^4$$

$$= 2(4)^2-2(1)^2$$

$$= 32-2$$

$$= 30$$

Soal 3

Tentukan hasil integral dari fungsi berikut:

$$\int_1^2 6\,dx$$

Penyelesaian :

$$\int_1^2 6\,dx = 6x]_1^2$$
$$= 6(2) - 6(1)$$
$$= 6$$

Soal 4

Tentukan hasil integral dari fungsi berikut ini:

$$\int_3^{12} 6\sqrt{x}\,dx$$

Penyelesaian :

$$\int_3^{12} 6\sqrt{x}\,dx = \int_3^{12} 6x^{\frac{1}{2}}\,dx$$
$$= 4x\sqrt{x}]_3^{12}$$
$$= 4.12\sqrt{12} - 4.3\sqrt{3}$$
$$= 84\sqrt{3}$$

Soal 5

Tentukan hasil dari integral pada fungsi berikut ini.

$$\int_0^6 \sqrt{4x+1}\,dx$$

Penyelesaian :

$$\int_0^6 \sqrt{4x+1}\,dx = \int_0^6 (4x+1)^{\frac{1}{2}} dx$$
$$= \left(\frac{2}{3} \times \frac{1}{4}(4x+1)^{\frac{3}{2}}\right)\Big]_0^6$$
$$= \frac{1}{6}(25)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{6}(1)^{\frac{3}{2}}$$
$$= \frac{1}{6}(125) - \frac{1}{6}(1)$$
$$= \frac{124}{4}$$

Soal 6

Tentukan hasil dari integral berikut.

$$\int_{-1}^{2} (2x^2 - 3)^2 \, dx$$

Penyelesaian :

$$\int_{-1}^{2} (2x^2 - 3)^2 \, dx = \int_{-1}^{2} (4x^4 - 12x^2 + 9) dx$$

$$= \tfrac{4}{5}x^5 - 4x^3 + 9x \Big]_{-1}^{2}$$

$$= \left(\tfrac{4}{5}2^5 + 4.2^3 + 9.2\right) - \left(\tfrac{4}{5}(-1)^5 + 4.(-1)^3 + 9.(-1)\right)$$

$$= \left(25\tfrac{3}{5} - 14\right) - \left(5\tfrac{4}{5}\right)$$

$$= 17\tfrac{2}{5}$$

3. **Penggunaan Integral Tertentu :**

   a. **Luas Daerah Antara Kurva dan Sumbu Koordinat**

Luas daerah antara kurva y = f(x) dengan sumbu koordinat X pada selang $a \le x \le b$ dimana daerahnya ada di atas atau di bawah sumbu X adalah :

$$L = \left| \int_a^b f(x)\, dx \right|$$

Sedangkan untuk daerah dengan batas sumbu koordinat Y, dapat dirumuskan menjadi :

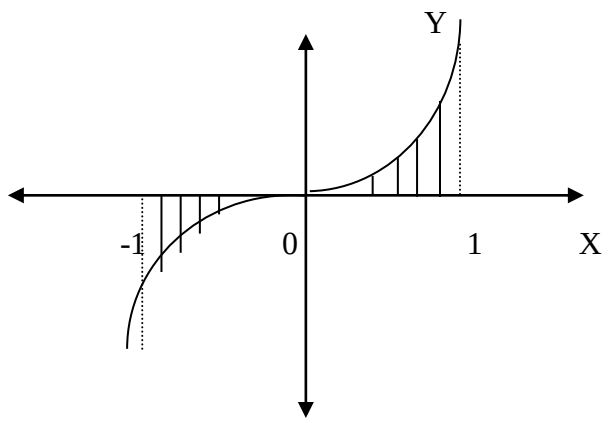
$$L = \left| \int_a^b f(y)\, dy \right|$$

Contoh 1 :

Tentukan luas daerah antara kurva y = x^3 , sumbu X , x = -1 dan x = 1 !

Penyelesaian :

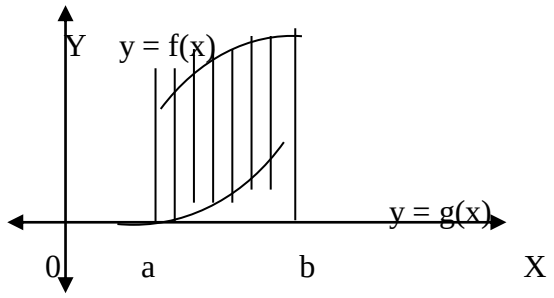
$$L = -\int_{-1}^{0} x^3\ dx + \int_{0}^{1} x^3\ dx = -\left[\frac{1}{4}x^4\right]_{-1}^{0} + \left[\frac{1}{4}x^4\right]_{0}^{1} = -(0-\frac{1}{4}) + (\frac{1}{4}-0) = \frac{1}{2}$$



Gambar 17.3 Luas daerah antar kurva dan sumbu

b. Luas Antara Dua Kurva

Untuk menentukan luas daerah antara dua kurva, kita berdasarkan luas antara kurva dan sumbu koordinat. Luas kurva adalah daerah yang diarsir diantara dua kurva. Perhatikan gambar di bawah ini :



Gambar 17.4 Luas daerah antar kurva

Untuk luas daerah yang diarsir berdasarkan grafik di atas, perhatikan rumus penjabaran berikut ini :

$$L = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b (f(x) - g(x))\,dx$$

ContohSoal :

Tentukan luas daerah antara kurva $y = x^2 + 3x$ dan y = 2x + 2 !

Penyelesaian :

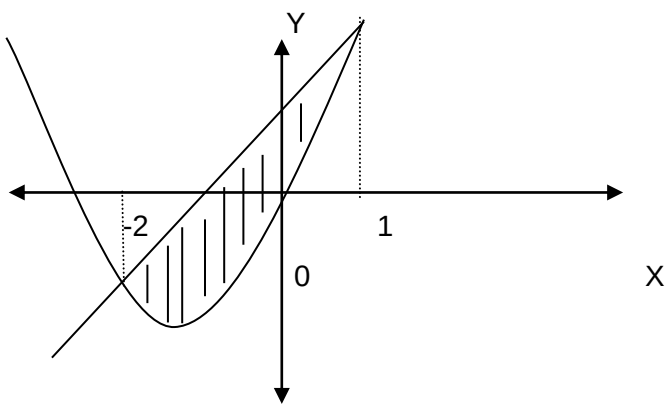
Titik potong kedua kurva yaitu :

$x^2 + 3x = 2x + 2$

$X^2 + x - 2 = 0$

$(x + 2)(x - 1) = 0$

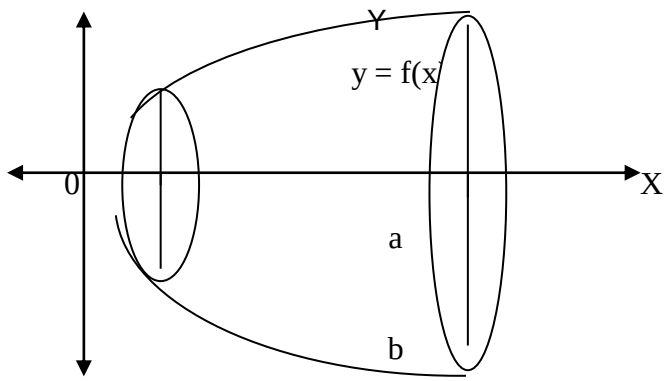
Jadi didapatkan nilai x = -2 atau x = 1



Gambar 17.5 Luas daerah antara kurva dan garis

$$L = \int_{-2}^{1} \left[(2x+2) - (x^2 + 3x)\right] dx = \int_{-2}^{1} (2 - x - x^2)\,dx = 4\frac{1}{2} \text{ satuan luas.}$$

c. Volume Benda Putar antara Kurva dan Sumbu Koordinat



Gambar 17.6 volume benda putar antara kurva dan sumbu koordinat

Volume benda putar yang dibatasi oleh kurva y = f(x), x = a, x = b dan sumbu X yang diputar sejauh 360° mengelilingi sumbu X adalah:

$$\boxed{V = \pi \int_a^b y^2 \, dx}$$

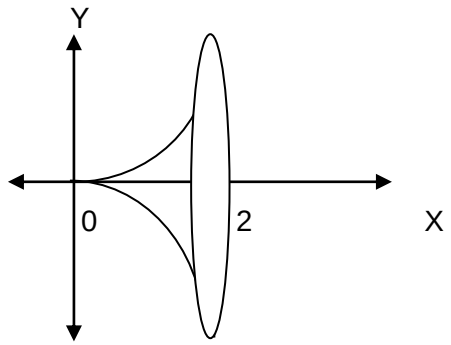
Begitu juga pada kurva x = f(y) yang diputar mengelilingi sumbu Y sejauh 360° dan dibatasi oleh y = a, y = b, sumbu Y dan kurva itu sendiri maka volumenya:

$$\boxed{V = \pi \int_a^b x^2 \, dy}$$

Contoh Soal :

Tentukan volume benda putar yang terjadi jika daerah yang dibatasi oleh kurva $y = x^2$, sumbu X dan garis x = 2 diputar mengelilingi sumbu X sejauh 360° !

Penyelesaian :



$$V = \pi\int_0^2 \left(x^2\right)^2\ dx$$

$$= \pi\int_0^4 x^4\ dx\pi$$

$$= \pi\left[\frac{1}{5}x^5\right]_0^2$$

$$= \pi\left(\frac{32}{5} - 0\right)$$

$= \frac{32}{5}$ satuan volume.

C. Soal Latihan/Tugas

Hitunglah nilai integral berikut ini dengan teliti dan benar!

1. $\int_4^6 (x + 9x^2)dx$
2. $\int_1^6 (3x^2 - 2x)dx$
3. $\int_1^3 (2x + 1)(3 - x)\ dx$
4. $\int_1^4 (\sqrt{x} - x)^2\ dx$
5. $\int_1^8 \left(x^{\frac{1}{3}} - x^{\frac{-1}{3}}\right) dx$
6. Tentukan nilai a jika diketahui :

   a. $\int_0^a \sqrt{x}\ dx = 18$

   b. $\int_{-1}^{2a} \frac{1}{x^2}\ dx = \frac{1}{2}$

7. Tentukan nilai integral di bawah ini :

   a. $\int_{0}^{3} 4x\, dx$

   b. $\int_{-2}^{1} 6x^2\, dx$

   c. $\int_{0}^{4} 12x\sqrt{x}\, dx$

   d. $\int_{-1}^{1} \left(5 - 2x - 6x^2\right) dx$

   e. $\int_{1}^{2} \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 dx$

D. Daftar Pustaka

Dumairy. (2015). *Matematika Terapan Untuk Bisnis dan Ekonomi*. Yogyakarta. BPFE-Yogyakarta.

PERTEMUAN 18
PENERAPAN INTEGRAL TERTENTU DALAM EKONOMI

A. Tujuan Pembelajaran

Pada pertemuan 18 ini, mahasiswa akan dijelaskan mengenai penerapan integral tertentu dalam bidang ekonomi. Setelah menyelesaikan perkuliahan, mahasiswa diharapkan mampu menghitung dan menerapkan integral tertentu dalam bidang ekonomi dan bisnis.

B. Uraian Materi

1. Penerapan Integral Tertentu dalam Ekonomi

a. Surplus Konsumen

Surplus konsumen merupakan bersedianya konsumen membayar (*willingness to pay*) berupa harga maksimum untuk memperoleh suatu barang. *Willingness to pay*diartikan sebagai kesediaan konsumen membayar harga suatu barang di atas harga pasar, dan menjadi ukuran besarnya kemampuan pembeli menghargai suatu barang. Surplus konsumen berarti juga merupakan kesedian konsumen membayar dikurangi jumlah yang sebenarnya dibayarkan konsumen.

Surplus konsumen (*consumer surplus*) menunjukkan bahwa seorang konsumen mendapatkan keuntungan lebih atau disebut surplus terkait kemampuannya mendapatkan suatu barang. Hal ini bisa terjadi diantaranya karena konsumen sebagai pembeli memiliki kemampuan finansial yang lebih. Jadi surplus Konsumen (*consumer surplus*) memiliki arti besarnya selisih harga yang konsumen bersedia membayardibanding dengan tingkat harga barang tersebut di pasar. Contoh mengenai surplus konsumen diantaranya yaitu sebagai berikut :

1) Harga suatu barang yang diminta di pasar adalah Rp 80.0000,- tetapi konsumen berani membeli barang tersebut seharga Rp 100.000,-. Artinya bahwa terjadi surplus konsumen sebesar Rp. 20.000,-.

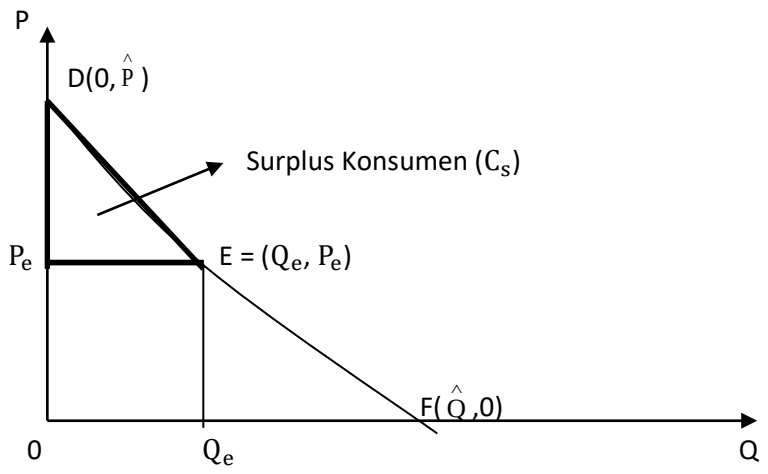
2) Seorang mahasiswa bersedia membayar buku dengan harga Rp 20.000, namun ia hanya cukup mengeluarkan uang yangdibayarkan adalah sebesar Rp 14.000. Maka besarnya surplus yang didapatkan mahasiswa tersebut sebesar Rp 6.000.
3) Seorang konsumen berencana membeli rumah. Dia memiliki uang Rp100.000.000 untuk membeli rumah. Jika konsumen tersebut membeli rumahyang menjadi idamannya seharga Rp60.000.000, maka dapat diartikan bahwa surplus yang didapatkan konsumen sebesar Rp40.000.000. Hal ini bermakna bahwa baginya mengaanggap rumah tersebut bernilai Rp100.000.000, tetapi ia medapatkan surplus sebesar Rp40.000.000 yang bisa dibelanjakan membeli barang-barang lain sesuai kebutuhannya.

Pada sebagian besar pasar dengan adanya surplus konsumen bisa dijadikan sebagai gambaran dari sejahteranya para konsumen dari sisi ekonomi dalam pemenuhan kebutuhan dalam kehidupannya. Para pembeli merupakan konsumen yang bertindak sebagai pembuat keputusan dalam kesepakatan jual beli secara rasional di pasar sehingga hak mereka tetap harus dihormati. Karena konsumen yang memutuskan akan membeli atau tidak barang tersebut sesuai kemampuan ekonominya.

Surplus konsumen mengandung arti sebuah nilai kerelaan konsumen untuk membeli suatu barang dengan harga diatas harga wajar dari harga barang tersebut yang sebenarnya. Surplus konsumen menunjukkanpartisipasi sebagai manfaat didapatkan pembeli di suatu pasar. Pada kurva besarnya surplus konsumen dapat dihitung dengan mencari luas areaterletak di bawah kurva fungsi permintaan dan di atas harga pasar. Luasan area dari surplus konsumen berupa bangun segitiga.

Pada kurva permintaan P = f(Q) menggambarkan jumlah dan tingkat harga dari suatu barang tertentu yang akan dibeli oleh konsumen. Bila harga pasar disimbolkan P, bermakna bahwa sebetulnya untuk membeli barang tersebut seorang konsumen itu mampu dan tidak masalah membayar dengan harga yang lebih tinggi dari P_e. Keuntungan seperti ini bagi seorang konsumen merupakan nilai lebih, sebab ia hanya perlu membeli barang tadi dengan harga P_e. Manfaat yang seperti ini menjadi keuntungan bagi konsumen berupa surplus.

Sehingga,seberapa besar surplus konsumen dapat dihitung dengan mencari luas area di bawah kurva permintaan tetapi di atas tingkat harga pasar.. Agar lebih jelasnya perhatikan kurva di bawah ini :



Besarnya surplus konsumen atau C_s (*consumer surplus*) dapat dicari melalui luas segitiga P_eDE, dengan kurva area yang dibatasi oleh Q = 0 yang dijadikan batas bawah dan Q = Q_e dijadikan batas atas. Sehingga nilai besarnya surplus konsumen dapat dicari melalui cara berikut.

$$\mathbf{C_s = \int_0^{Q_e} f(Q)dQ - Q_eP_e}$$

Apabila kurva permintaan berbentuk P = f(Q) atau,bisa juga diterapkan melalui rumus berikut :

$$\mathbf{C_s = \int_{P_e}^{\hat{P}} f(P)dP}$$

Apabila kurva permintaan berbentuk Q = f(P); $\hat{P}$ merupakan nilai P pada Q = 0 atau penggalanfungsi permintaan di sumbu harga.

Dengan demikian, maka dapat disimpulkan bahwa :

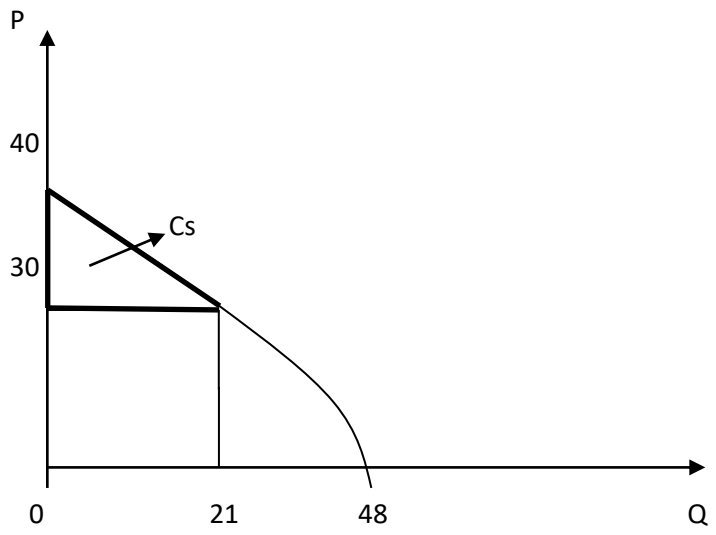
$$C_s = \int_0^{Q_e} f(Q)dQ - Q_eP_e$$

$$= \int_{P_e}^{\hat{P}} f(P)dP$$

Perhatikan kasus-kasus berikut ini untuk penerapan rumus untuk memudahkan dalam pemahamannya :

Kasus 1

Diketahui kurva permintaan dari barang tertentu dinyatakan oleh persamaan Q = 48 – 0,03P^2. Berapakah besarnya surplus konsumen apabila besarnya harga pasar adalah 30.



Gambar 18.2 Surplus konsumen kasus 1

Penyelesaian :

Q = 48 – 0,03P^2

Jika diketahui P = 0, diperoleh Q = 48

Jika diketahui Q = 0, diperoleh P = 40 ≡ $\hat{P}$

Jika P ≡ P_e = 30,

Q = Q_e = 21

Penyelesaian:

$C_s = \int_{P_e}^{\hat{P}} f(P)dP$

$= \int_{30}^{40} (48 - 0{,}03P^2)\ dP$

$= [48P - 0{,}01P^3]_{30}^{40}$

$= \{48(40) - 0{,}01(40)^3\} - \{48(30) - 0{,}01(30)^3\}$

= (1920 – 640) – (1440 – 270)

= 110

Kasus 2

Carilah besarnya surplus konsumen melalui dua macam cara penyelesaian pada fungsi permintaan Q = 40 – 2P besarnya harga pasar adalah 10.

Penyelesaian :

Q = 40 – 2P

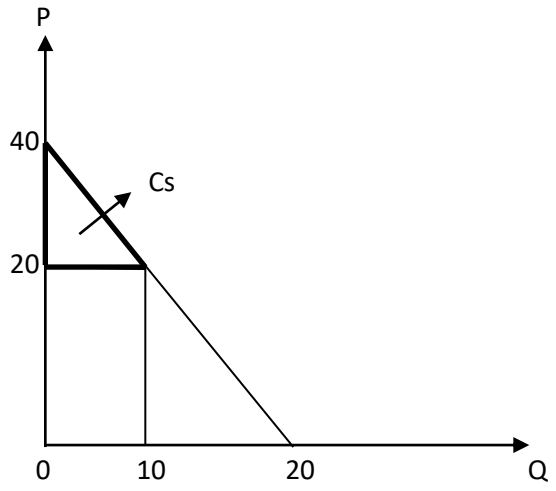
P = 20 – 0,50Q

Jika diketahui P = 0, diperoleh : Q = 40

Jika diketahui Q = 0, diperoleh : P = 20

Jika P = 10

Q_p = 20



Gambar 18.3 Surplus konsumen kasus 2

Ditanyakan: C_s = ?

Cara Pertama:

$C_s = \int_0^{Q_e} f(Q)dQ - Q_eP_e$

$= \int_0^{20}(20 - 0{,}50Q)dQ - (20)(10)$

$= [20Q - 0{,}25Q^2]_0^{20} - 200$

$= \{20(20) - 0{,}25(20)^2\} - \{20(0) - 0{,}25(0)^2\} - 200$

$= 400 - 100 - 200$

$= 100$

Cara Kedua:

$C_s = \int_{P_e}^{\acute{P}} f(P)dP$

$= \int_{10}^{20}(40 - 2P)\, dP$

$= [40P - P^2]_{10}^{20}$

$= \{40(20) - (20)^2\} - \{40(10) - (10)^2\}$

$= 400 - 300$

$= 100$

Kasus 3

Diketahui persamaan fungsi permintaan P = 58 – 8Q dan besarnya kuantitas pada saat keseimbanganpasarnya yaitu 5, carilah besarnya surplus konsumen melalui dua cara! Lakukan analisislah dan gambarkan kurvanya!

Penyelesaian :

P = 58 – 8Q

Qe = 5

Ditanyakan:C_s = ?

P = 58 – 8Q

P = 58 – 8(5)

Pe = 18

Cara Pertama:

$C_s = \int_0^{Q_e} f(Q)dQ - Q_eP_e$

$= \int_0^{5}(58 - 8Q)dQ - (5)(18)$

$= [58Q - 4Q^2]_0^5 - 90$

$= \{58(5) - 4(5)^2\} - \{58(0) - 4(0)^2\} - 90$

$= 190 - 0 - 90$

$= 100$

Cara Kedua:

P = 58 – 8Q

8Q = 58 – P

Q = 7,25 – 0,125P

Jika Q = 0 maka $\acute{P} = 58$

$C_s = \int_{P_e}^{\acute{P}} f(P)dP$

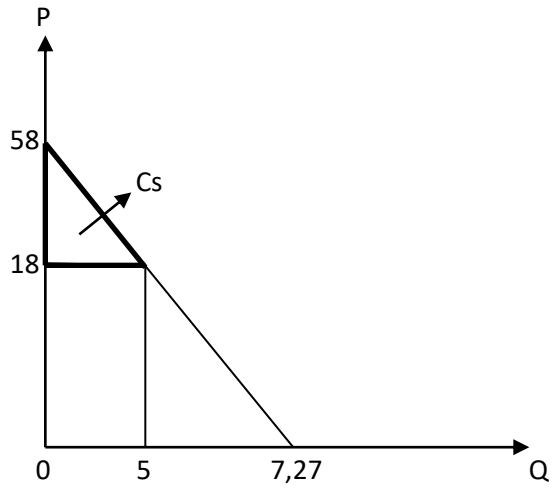
$= \int_{18}^{58} (7{,}25 - 0{,}125P)\, dP$

$= [7{,}25P - 0{,}0625P^2]_{18}^{58}$

$= \{7{,}25(58) - 0{,}0625(58)^2\} - \{7{,}25(18) - 0{,}0626(18)^2\}$

$= 210{,}25 - 110{,}25$

$= 100$



Gambar 1

8.4 Surplus konsumen kasus 3

Analisis berdasarkan perhitungan di atas, maka surplus yang diterima konsumen senilai Rp 100 karena konsumen mmbelinya pada harga Rp 18 padahal konsumen mampu membelinya dengan harga lebih tinggi dari titik keseimbangan sebesar Rp 18.

b. Surplus Produsen

Besarnya surplus produsen menunjukkan keuntungan lebih atau surplus yang didapatkan bagi produsen tertentu yang berkaitan dengantingkatan harga pasar dari barang yang ditawarkan ke konsumen. Surplus produsen merupakan besarnya tingkat harga barang yang ditawarkan produsen kemudian dikurangi oleh besarnya biaya dalam produksi barang tersebut. Agar mudah pemahamannya, dapat dikatakan bahwa surplus produsen dapat dikatakan sebagai besarnya keuntungan yang didapatkan produsen dalam penjualan barangnya. Contoh mengenai surplus produsen yaitu sebagai berikut.

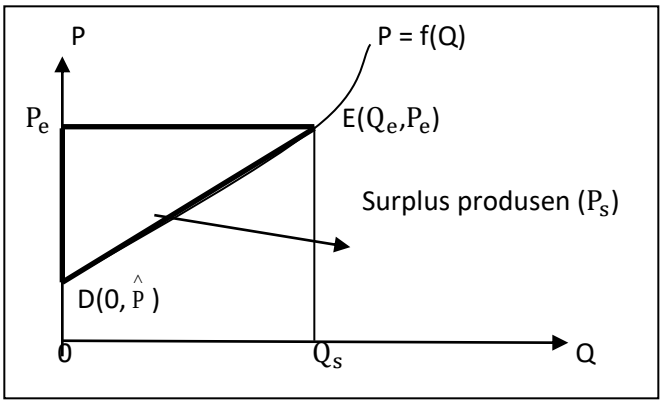
Misalnya Nisa adalah produsen sepatu kulit. Pengeluaran yang dipakai untukproduksi satu sepatu kulit, Nisa mengeluarkan biaya senilai Rp600.000,00. Nisa akan menjual sepatu kulit tersebut dengan harga Rp700.000,00/sepatu.Berdasarkan contoh di atas, dapat kita ketahui rinciannya sebagai berikut :

1) Biaya produksi satu jaket kulit adalah Rp 600.000
2) Harga jual satu jaket kulit adalah Rp 700.000
3) Surplus produsen atau keuntungan Nisa adalah Rp 700.000 – Rp 600.000 = Rp 100.000,00.

Pada kasus permasalahan di atas bisa dijawab melalui kurva. Sebelumnya menggunakan kurva permintaan untuk menggambarkan surpus konsumen, sedangkan untuk menggambarkan surplus produsen dilakukan dengan menggunakan kurva penawaran. Besarnya surplus produsen pada kurva penawaran dapat dicari dengan menghitung luasan kurvayang terletak dibawah harga barang, dan di atas kurva penawaran.

Persamaan fungsi penawaran ditunjukkan oleh P = f(Q) yang melukiskan jumlah suatu barang yang ditawarkan produsen pada tingkat harga tertentu. Apabiladiketahui harga pasar adalah $P_e$artinya bahwa bagi produsen

sebenarnya mampu atau bersedia menjual barang tersebut dengan harga lebih rendah dari $P_e$sehingga kejadian ini menjadi keuntungan baginya, karena produsen tersebut bisa menjual barang yang diproduksinya dengan harga P_e (harga penjualan lebih tinggi dari harga jual yang ditetapkan sebelumnya). Sehingga besarnya keuntungan berupa surplus produsen dapat digambarkan berupa luas area yang terletak di atas kurva penawaran tetapi di bawah tingkat harga pasar.



Gambar 18.5 Ilustrasi grafik Surplus Produsen

Besarnya surplus harga produsen atau P_s (singkatan dari *producer surplus*) digambarkan oleh luasan segitiga P_eDE, dengan areadengan batasan yaitu Q = 0 sebagai batasan di bawah dan Q = Q_e sebagai batasandi atas.

Area surplus produsen ditunjukkan oleh daerah yang berbentuk segitiga tebal di atas. Berdasarkan gambar di atas, dapat dilihat dampak sebagai akibat adanya perubahan harga melalui kurva tersebut terhadap surplus produsen. Jika harga yang terjadi semakin meningkat, maka besarnya surplus produsen akan naik dan kebalikannya apabila harga yang terjadi menurun, maka besarnya surplus produsen akan turun.

Pengitungan besar surplus produsen adalah:

$$P_s = Q_e P_e - \int_0^{Q_e} f(Q)dQ$$

Persamaan fungsi penawaran berbentuk:

P = f(Q), atau

$$P_s = \int_P^{P_e} f(P)dP$$

Pada persamaan fungsi penawaran berbentuk Q = f(P); $\hat{P}$ menunjukkan nilai P pada saat Q = 0, atau penggalan kurva penawaran pada sumbu harga.Dengan demikian:

$$P_s = Q_e P_e - \int_0^{Q_e} f(Q)dQ$$

$$= \int_P^{P_e} f(P)dP$$

Besar tinggi rendahnya kesejahteraan produsen dapat diketahui melalui surplus produsen. Bagi produsen apabila harga produknya tinggi maka produsen menjadi lebih bahagia. Sehingga, surplus produsen dapat diartikan sebagai selisih antara harga produk yang ada di pasar dengan *willingness to sell*dari produsen terhadap produknya. *Willingness to sell*dari produsen terhadap suatu barang dapat dilihat melalui kurva penawaran. Secara grafik, besarnya surplus produsen bisa dihitung dengan mencari luas area segitiga tebal di atas. Makna yang didapatkan produsen yaitu semakin rendah nilai*willingness to sell* (semakin efisien) maka semakin besar surplus produsen yang didapatkan dari barang tersebut.

Perhatikan kasus-kasus berikut ini sebagai contoh aplikasi dari penjabaran rumus di atas, supaya bisa memahami materi dengan baik.

Kasus 4

Produsen memiliki persamaan fungsi penawaran yaitu P = 0,5Q + 3. Carilah besarnya surplus produsen itu apabila diketahui tingkat harga keseimbangan di pasar yaitu 10? Lakukan penghitungan dengan dua cara !

Penyelesaian :

Fungsi penawaran

P = 0,5Q + 3

Q = -6 + 2P

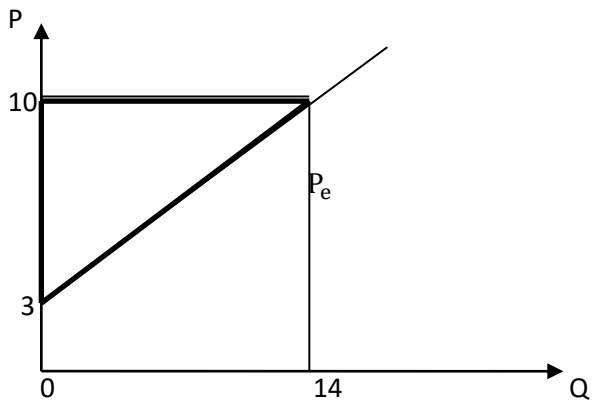
apabila P = 0

Q = -6

Apabila Q = 0

P = 3 ≡ Ṕ

Maka diperoleh P_e = 10 makaQ_e = 14



Gambar 18.6 Grafik surplus produsen kasus 4

Ditanyakan adalah bentuk Ps = ?

Penyelesaian:

Cara Pertama:

P_s $= Q_e P_e - \int_0^{Q_e} f(Q)dQ$

$= (14)(10) - \int_0^{14}(0{,}5Q + 3)dQ$

$= 140 - [0{,}25Q^2 - 3Q]_0^{14}$

$= 140 - \{0{,}25(14)^2 - 3(14)\} - \{0{,}25(0)^2 - 3(0)\}$

$= 140 - 91 - 0$

$= 49$

Cara Kedua:

P_s $= \int_P^{P_e} f(P)dP$

$= \int_3^{10}(-6 + 2P)dP$

$= [-6P + P^2]_3^{10}$

$= \{-6(10) + (10)^2\} - \{-6(0) + (0)^2\}$

$= 40 - (-9)$

$= 49$

Kasus 5

Diketahui persamaan fungsi penawaran adalah Q_s = 5P - 30 dan fungsi permintaan adalahQ_d =– 4P + 60.Carilah besarnya surplus konsumen dan surplus produsen !

Penyelesaian:

Fungsi penawaran:

Q = 5P-30

P = 6 + 0,2Q

Fungsi permintaan:

Q =– 4P + 60

P = - 0,25Q + 15

Ditanyakan adalah Cs dan Ps ?

Keseimbangan pasar:

Qs = Qd

5P - 30 =– 4P + 60

9P = 90

P = 10 ≡ Ṕ

Q =– 4P + 60

=– 4(10) + 60

= 20 ≡ Q_e

Surplus konsumen:

C_s $= \int_0^{Q_e} f(Q)dQ - Q_eP_e$

$= \int_0^{20}(-0{,}25Q + 15)dQ - (20)(10)$

$= [-0{,}125Q^2 + 15Q]_0^{20} - 200$

= 250 – 200

= 50

Surplus produsen:

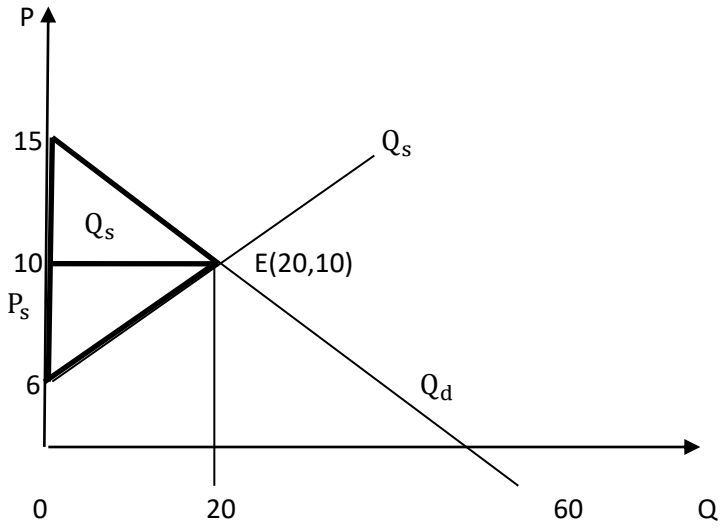
P_s $= Q_eP_e - \int_0^{Q_e} f(Q)dQ$

$= (20)(10) - \int_0^{20}(6 + 0{,}2Q)dQ$

$= 200 - [6Q - 0{,}1Q^2]_0^{20}$

= 200 – 80

= 120



Gambar 18.7 Grafik surplus produsen kasus 5

Kasus 6

Diketahui fungsi penawaran suatu barang yang dijual PT Mita Jaya adalah Ps = 51+ Q dan fungsi permintaannya Pd = 87 – Q. Hitunglah surplus produsen dari PT Mita Jaya dengan menggunakan dua cara! Analisis dan buatlahkurvanya!

Penyelesaian :

Pd = 87 – Q

Ps = 51 + Q

Ditanyakan adalah Ps = ?

Pd = Ps

87 – Q = 51 + Q

-Q – Q = 51 – 87

-2Q = -36

Qe = 18

P = 51 + Q

= 51 + 18

Pe = 69

Keseimbangan pasar (18, 69)

Cara Pertama

$P_s = Q_e P_e - \int_0^{Q_e} f(Q)dQ$

$= (69)(18) - \int_0^{18} (51 + Q)dQ$

$= 1242 - [51Q - 0{,}5Q^2]_0^{18}$

$= 1242 - [51(18) - 0{,}5(18)^2] - [51(0) - 0{,}5(0)^2]$

$= 1242 - 1080 - 0$

$= 162$

Cara Kedua

Ps = 51 + Q

-Q = 51 – P

Qs = -51 + P

Jika Q = 0 maka Ṕ = 51

Sehingga:

$P_s = \int_P^{P_e} f(P)dP$

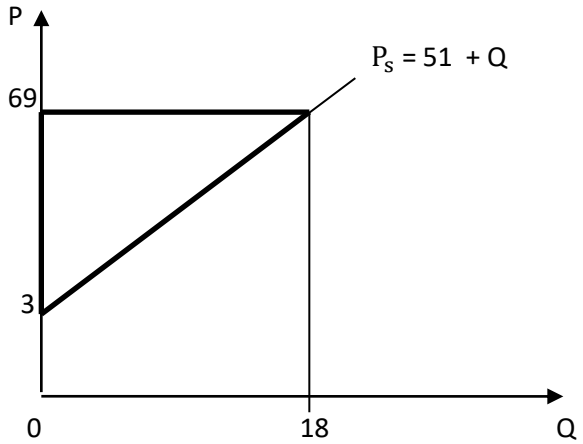
$= \int_{51}^{69} (-51 + P)dP$

$= [-51P + 0{,}5P^2]_{51}^{69}$

$= \{-51(69) + 0{,}5(69)^2\} - \{-51(51) + 0{,}5(51)^2\}$

$= -1.138{,}5 - (-1.300{,}5)$

$= 162$



Gambar 18.8 Grafik surplus produsen kasus 6

Analisis berdasarka perhitungan di atas, maka apabila surplus yang diperoleh PT Mita Jayaadalah sebesar Rp 162 karena PT Mita Jayamenjual barang di pasar melalui harga Rp 69 meskipun sebenarnya perusahaantersebut berani menjual barang tersebut dengan harga lebih rendah dibandingkan dengan harga keseimbangan sebesar Rp 69.

C. Soal Latihan/Tugas

1. Hitunglah surplus konsumen dari : Pd = 100 – Q^2. P_0 = 34
2. Hitunglah surplus konsumen dari: Pd = $\frac{100}{(Q+2)}$. P_0 = 20
3. Diketahui fungsi permintaan dan penawaran
   D : p= -½ x^2 - ½x + 33 dan S : p= 6 + x
   Carilah surplus konsumen disaat terjadi keseimbangan pasar !
4. Diketahui persamaan fungsi permintaan yaitu y + 3x = 150 apabila diketahui x menunjukkan jumlah barang (Q) dan y menunjukkan harga barang (P). Apabila tingkat harga pasar sebesar 40. Carilah surplus konsumennya !
5. Diketahui persamaan fungsi permintaan suatu barang adalah **P = 3Q + 20** dan persamaan fungsi penawarannya adalah **P = -2Q + 50.** Carilah besarnya surplus konsumen dan surplus produsennya !
6. Persamaan suatu fungsi penawaran ditunjukkan melalui x – 2y + 45 = 0. Simbol x menujukkan jumlah barang dan symbol y menunjukkan harga barang. Apabila diketahui harga pasar adalah 20. Tentukan besarnya surplus produsennya !

D. Daftar Pustaka

Dumairy. (2015). *Matematika Terapan Untuk Bisnis dan Ekonomi*. Yogyakarta. BPFE-Yogyakarta.

GLOSARIUM

Agregat	:	Variabel total/keseluruhan
Annual	:	Tahunan
Annuity	:	Rangkaian pembayaran atau penerimaan secara cicilan dengan besaran sama
Average cost	:	Biaya rata-rata
Bilangan Komposit	:	Bilangan asli yang lebih besar dari 1 yang bukan bilangan prima
Break Even Point	:	Titik dimana biaya sama dengan penerimaan sehingga kondisi tidak untung dan tidak rugi
Defisit	:	Ketidak seimbangan yang diakibatkan kekurangan
Demand	:	Permintaan
Determinan	:	Faktor yang menentukan
Diagram cartesius	:	Sistem koordinat yang digunakan untuk meletakkan titik pada penggambaran objek berdasarkan nilai pada pertemuan nilai sumbu x dengan nilai sumbu y
Diferensial	:	Turunan
Eksponensial	:	Nilai yang menunjukkan derajat kepangkatan
Ekspor	:	Pengiriman/penjualan barang ke luar negeri
Elastisitas	:	Perbandingan perubahan proporsional dari sebuah variabel dengan variabel lainnya.
Fixed cost	:	Biaya tetap
Fungsi linear	:	Sebuah fungsipersamaan garis dengan variabelnya berpangkat satu.
Future value	:	Nilai masa datang
Goverment expenditure	:	Belanja pemerintah yang mencakup konsumsi dan investasi tidak termasuk transfer payment
Horizontal	:	Mendatar dari kanan ke kiri atau sebaliknya
Impor	:	Barang luar negeri yang dijual ke dalam negeri
Integral	:	Konsep penemuan fungsi asal apabila turunan fungsinya diketahui
Invers	:	Sebaliknya
Kalimat verbal	:	Kalimat kerja
Koefisien	:	Bagian suku yang berupa bilangan
Konstan	:	Tetap; tidak berubah; terus menerus
Konstanta	:	Suatu nilai tetap
Konsumen	:	Pemakai barang hasil produksi
Limit	:	Membatasi
Logaritmik	:	Kebalikan dari pemangkatan untuk menentukan besar pangkat dari suatu bilangan pokok

Marginal	:	Berhubungan dengan batas
Present value	:	Nilai sekarang
Produsen	:	Penghasil barang
Proporsi	:	Perbandingan; pertimbangan
Revenue	:	Pendapatan; penerimaan
Simple interest	:	Bunga sederhana
Skalar	:	Bilangan real; bilangan kopleks; bilangan rasional
Substitusi	:	Mengganti
Supply	:	Penawaran
Surplus	:	Kelebihan
Time value of money	:	Nilai waktu dari uang
Titik ekstrim	:	Titik paling tinggi/titik puncak
Tranfer payment	:	Pengeluaran pemerintah kepada indivisu yang tidak memerlukan imbalan balik
Transpose	:	Mengubah urutan
Variabel	:	Lambang pengganti suatu bilangan yang belum dikethui secara jelas nilainya
Variable cost	:	Biaya variabel
Vertical	:	Tegak lurus dengan bidang datar atau mengarah ke atas

DAFTAR PUSTAKA

Assauri Sofyan. (2013). *Matematika Ekonomi* Cetakaan ke 28. Jakarta : Rajagrafindo Persada.

Atmaja Suprian. (2002). *Matematika Ekonomi I*. Bandung : Ghalia Indonesia.

Dumairy. (2015). *Matematika Terapan Untuk Bisnis dan Ekonomi*. Yogyakarta : BPFE-Yogyakarta.

Haussler, Paul, Wood. (2010). *Pengantar Matematika Ekonomi Untuk Analisis Bisnis dan Ilmu-ilmu Ekonomi*. Jakarta : Erlangga.

Kalangi. (2011). *Matematika Ekonomi dan Bisnis*. Jakarta : Salemba Empat.

Nugroho, Yulianto dkk. (2014). *Matematika Ekonomi Dan Bisnis*. Jakarta : Rajawali Pers.

Saputra Atmajaya. (2002). *Matematika Ekonomi 1*. Bandung: Ghalia Indonesia.

Sukirno Sadono. (2005). *Mikro Ekonomi Teori Pengantar Edisi Ketiga*. Jakarta : Rajawali Press.

Teguh M. (2015). *Matematika Ekonomi*. Jakarta : Rajagrafindo Persada.

Wijaya Andi dkk. (2014). *Matematika Ekonomi I*. Jakarta : Mitra Wacana Media.

RENCANA PEMBELAJARAN SEMESTER (RPS)

Program Studi	:	Akuntansi S-1
Prasyarat	:	**-**
Semester	:	**I**
Deskripsi Mata Kuliah	:	Mata kuliah ini merupakan mata kuliah wajib program Studi Akuntansi S-1 yang membahas tentang penerapan fungsi linear dan non linera dalam ekonomi, matematika keuangan, program linear dan penerapannya dalam ekonomi, diferensial fungsi sederhana dan penerapannya dalam ekonomi, serta integral dan penerapannya dalam ekonomi.
Penyusun	:	1. Listiya Ike Purnomo, S.E., M.M. 2. Nisak Ruwah Ibnatur Husnul, S.Pd., M.Pd. 3. Eka Rima Prasetya, S.Pd., M.Pd. 4. Prima Sadewa, S.Pd., M.Pd.
Mata Kuliah/Kode	:	Matematika Ekonomi / SAK0033
Sks	:	**3 Sks**
Kurikulum	:	**KKNI**
Capaian Pembelajaran	:	Setelah menyelesaikan mata kuliah ini, mahasiswa mampu membuat keputusan dan memecahkan permasalahan di bidang ekonomi dan bisnis dengan tepat.

PERTEMUAN KE-	KEMAMPUAN AKHIR YANG DIHARAPKAN	BAHAN KAJIAN (MATERI AJAR)	METODE PEMBELAJARAN	PENGALAMAN BELAJAR MAHASISWA	KRITERIA PENILAIAN	BOBOT NILAI
(1)	**(2)**	**(3)**	**(4)**	**(5)**	**(6)**	**(7)**
1	Mampu membentuk dan menggambarkan fungsi permintaan, fungsi penawaran dan kondisi keseimbangan pasar pada fungsi linier	Fungsi Permintaan, Penawaran, dan Keseimbangan pasar (linear)	Simulasi dan penugasan	Tugas 1	Ketepatan perhitungan dan kesesuaian gambar	5%
2	Mampu menggunakan konsep fungsi kuadrat untuk menyelesaikan persoalan dalam ekonomi	Fungsi Permintaan, Penawaran, dan Keseimbangan pasar (kuadrat)	Simulasi dan demonstrasi	Tugas 2	Ketepatan perhitungan	5%
3	Mampu menggunakan konsep fungsi linear dan non linear untuk menyelesaikan persoalan dalam ekonomi	Keseimbangan pasar akibat Pajak per unit dan Pajak Persentase	Simulasi dan demonstrasi	Tugas 3	Ketepatan perhitungan	5%
4	Mampu menggunakan konsep fungsi linear dan non linear untuk menyelesaikan persoalan dalam ekonomi	Keseimbangan pasar akibat subsidi per unit	Simulasi dan demonstrasi	Tugas 4	Ketepatan perhitungan	5%
5	Mampu menerapkan konsep fungsi linear dan non linear untuk menyelesaikan persoalan dalam ilmu ekonomi	Fungsi Biaya, Fungsi Pendapatan, dan Analisis Titik Impas	Simulasi dan demonstrasi	Tugas 5	Ketepatan perhitungan	5%

6	Mampu menerapan fungsi linear dalam ekonomi makro	Fungsi Konsumsi, Fungsi Tabungan dan pendapatan Nasional	Simulasi dan demonstrasi	Tugas 6	Ketepatan perhitungan	6%
7	Mampu menerapkan matematika keuangan dalam bisnis menggunakan konsep bunga sederhana dan bunga majemuk	Bunga Sederhana dan Bunga Majemuk	Simulasi dan demonstrasi	Tugas 7	Ketepatan perhitungan	6%
8	Mampu menerapkan matematika keuangan dalam bisnis menggunakan konsep anuitas	Anuitas	Simulasi dan demonstrasi	Tugas 8	Ketepatan perhitungan	6%
9	Mampu menerapkan Program Linear dalam masalah bisnis	Sistem Pertidaksamaan Linear dan Program Linear	Simulasi dan demonstrasi	Tugas 9	Ketepatan perhitungan	7%
UTS						
10	Mampu menggunakan konsep matrik dan determinan dalam persamaan linear	Aplikasi Matriks	Simulasi dan demonstrasi	Tugas 10	Ketepatan perhitungan	5%
11	Mampu menyelesaikan perhitungan limit fungsi	Limit Fungsi	Simulasi dan demonstrasi	Tugas 11	Ketepatan perhitungan	5%

12	Mampu menyelesaikan diferensial fungsi sesuai kaidahnya	Diferensial Fungsi Sederhana	Simulasi dan demonstrasi		Ketepatan perhitungan	5%
13	Mampu menerapkan konsep diferensial dalam menentukan nilai maksimum, minimum, dan titik belok.	Hubungan Fungsi dengan Diferensialnya	Simulasi dan demonstrasi	Tugas 13	Ketepatan perhitungan	5%
14	Mampu menerapkan diferensial dalam perhitungan bisnis	Penerapan Diferensial Fungsi Sederhana dalam ekonomi	Simulasi dan demonstrasi	Tugas 14	Ketepatan perhitungan	6%
15	Mampu menyelesaikan Integral Tak Tentu sesuai kaidahnya	Integral Tak Tentu	Simulasi dan demonstrasi	Tugas 15	Ketepatan perhitungan	6%
16	Mampu menerapkan Integral Tak Tentu dalam perhitungan bisnis	Penerapan Integral Tak Tentu dalam ekonomi	Simulasi dan demonstrasi	Tugas 16	Ketepatan perhitungan	6%
17	Mampu menyelesaikan integral ter tentu sesuai kaidahnya	Integral Tentu	Simulasi dan demonstrasi	Tugas 17	Ketepatan perhitungan	6%
18	Mampu menerapkan Integral Ter Tentu dalam perhitungan bisnis	Penerapan Integral Ter Tentu dalam ekonomi	Simulasi dan demonstrasi	Tugas 18	Ketepatan perhitungan	6%
UAS						

Referensi :

Assauri Sofyan. (2013). *Matematika Ekonomi* Cetakaan ke 28. Jakarta : Rajagrafindo Persada.
Atmaja Suprian. (2002). *Matematika Ekonomi I*. Bandung : Ghalia Indonesia.
Dumairy. (2015). *Matematika Terapan Untuk Bisnis dan Ekonomi*. Yogyakarta : BPFE-Yogyakarta.

Haussler, Paul, Wood. (2010). *Pengantar Matematika Ekonomi Untuk Analisis Bisnis dan Ilmu-ilmu Ekonomi*. Jakarta : Erlangga.
Kalangi. (2011). *Matematika Ekonomi dan Bisnis*. Jakarta : Salemba Empat.
Nugroho, Yulianto dkk. (2014). *Matematika Ekonomi Dan Bisnis*. Jakarta : Rajawali Pers.
Saputra Atmajaya. (2002). *Matematika Ekonomi 1*. Bandung: Ghalia Indonesia.
Sukirno Sadono. (2005). *Mikro Ekonomi Teori Pengantar Edisi Ketiga*. Jakarta : Rajawali Press.
Teguh M. (2015). *Matematika Ekonomi*. Jakarta : Rajagrafindo Persada.
Wijaya Andi dkk. (2014). *Matematika Ekonomi I*. Jakarta : Mitra Wacana Media.

Tangerang Selatan, 9 Desember 2019

Mengetahui,
Ketua Program Studi Akuntansi S-1,

Ketua Tim Penyusun,

Effriyanti, S.E.,Akt., M.Si.
NIDN. 0003047701

Listiya Ike Purnono, S.E., M.M.
NIDN. 0407058106