Matematika (PITUP)

Prof.dr.sc. Blaženka Divjak

FOI, Varaždin

Dio V

Sustavi linearnih jednadžbi

Sadržaj

Linearna jednadžba

Znamo da jednadžba

$$ax = b$$

ima jedinstveno rješenje $x = \frac{b}{a}$ uz uvjet da je $a \neq 0$. Takvu jednadžbu zovemo **linearna jednadžba s jednom nepoznanicom**.

U slučaju da je $a = 0$ i $b \neq 0$ ta jednadžba nema rješenja, a ako je $a = b = 0$, tada ima beskonačno mnogo rješenja, odnosno preciznije, svaki realni broj zadovoljava tu jednadžbu.

Linearna jednadžba s dvije nepoznanice je jednadžba oblika

$$ax + by = c,$$

gdje su $a, b, c \in \mathbb{R}$, a x, y su nepoznanice.

Rješenje takve jednadžbe je svaki uređeni par (x_0, y_0) realnih brojeva koji zadovoljava tu jednadžbu.

U slučaju da je $a^2 + b^2 \neq 0$ jednadžba ima beskonačno mnogo rješenja i sva ta rješenja leže na pravcu $ax + by - c = 0$.

Primjer 1.

Riješite jednadžbu $2x + y = 3$.

Primjer 1.

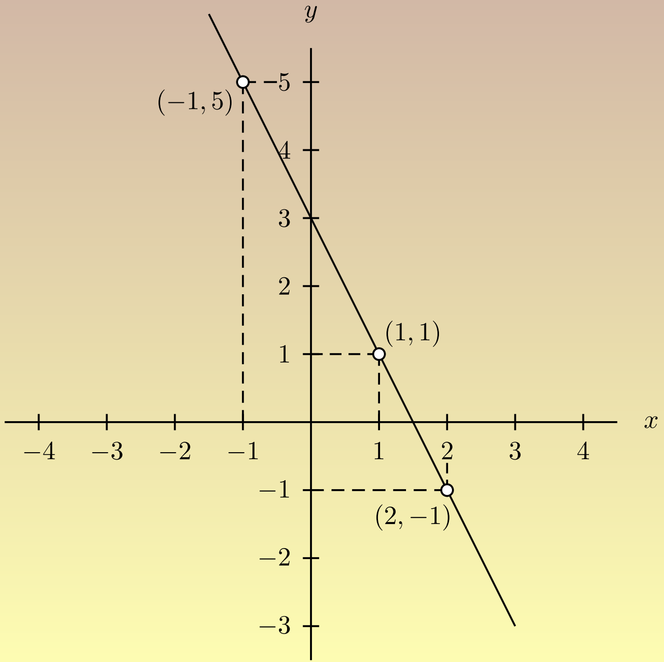
Riješite jednadžbu $2x + y = 3$.

Rješenje.

Jednadžba ima beskonačno mnogo rješenja koja leže na pravcu $2x + y - 3 = 0$. Za odabrani x, $y = 3 - 2x$.
Neka specijalna rješenja: $(1, 1), (2, -1), (-1, 5)$
Drugim riječima,

$$\text{za } x = 1 \text{ je } y = 1$$
$$\text{za } x = 2 \text{ je } y = -1$$
$$\text{za } x = -1 \text{ je } y = 5$$

Dakle, ovdje imamo jedan stupanj slobode, x biramo, ali za y onda nema više biranja jer je $y = 3 - 2x$.



Prof.dr.sc. Blaženka Divjak

Linearna jednadžba s tri nepoznanice je jednadžba oblika

$$ax + by + cz = d,$$

gdje su $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, a x, y, z su nepoznanice.

Rješenje takve jednadžbe je svaka uređena trojka (x_0, y_0, z_0) realnih brojeva koja zadovoljava tu jednadžbu.

U slučaju da je $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$ jednadžba ima beskonačno mnogo rješenja i sva ta rješenja leže u ravnini $ax + by + cz - d = 0$.

Napomena.

Kako što jednadžba

$$Ax + By + C = 0, \quad A^2 + B^2 \neq 0$$

predstavlja jednadžbu pravca u ravnini, tako i jednadžba

$$Ax + By + Cz + D = 0, \quad A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$$

predstavlja jednadžbu ravnine u prostoru.

Primjer 2.

Riješite jednadžbu $2x + 3y - z = -5$.

Primjer 2.

Riješite jednadžbu $2x + 3y - z = -5$.

Rješenje.

Jednadžba ima beskonačno mnogo rješenja koja leže u ravnini $2x + 3y - z + 5 = 0$. Za odabrane x, y je $z = 2x + 3y + 5$.

Neka specijalna rješenja: $(0,0,5), (1,0,7), (2,-2,3)$

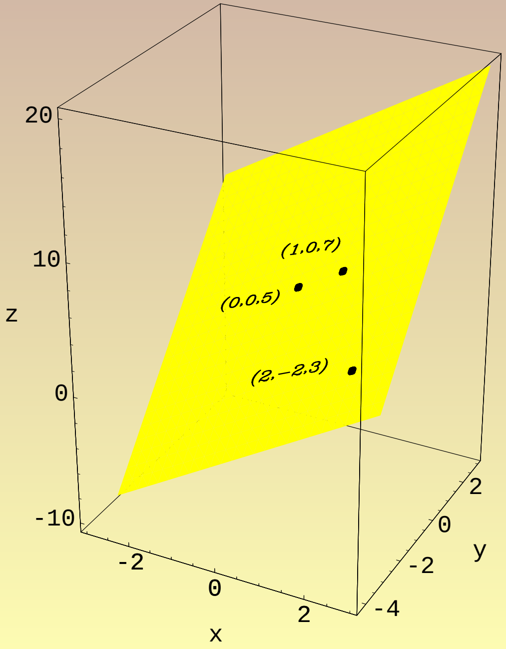
Drugim riječima,

za $x = 0$ i $y = 0$ je $z = 5$

za $x = 1$ i $y = 0$ je $z = 7$

za $x = 2$ i $y = -2$ je $z = 3$

Dakle, ovdje imamo dva stupnja slobode, x i y biramo, ali za z onda nema više biranja jer je $z = 2x + 3y + 5$.


(1,0,7)
(0,0,5)
(2,−2,3)
20
10
0
-10
z
-2
0
2
x
2
0
-2
-4
y

Linearna jednadžba s n nepoznanica je izraz oblika

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n = b$$

pri čemu su a_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ realni brojevi koji se zovu **koeficijenti varijabli**, $b \in \mathbb{R}$ zovemo **slobodni koeficijent**, a x_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ su **nepoznanice**.

Rješenje ove jednadžbe je svaka uređena n-torka realnih brojeva koja ju zadovoljava.

U slučaju da je $a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 \neq 0$ jednadžba ima beskonačno mnogo rješenja i sva rješenja leže u **hiperravnini** $a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n - b = 0$ koja se nalazi u $\mathbb{R}^n$.

Sustav linearnih jednadžbi

Na linearnu jednadžbu s dvije nepoznanice

$$ax + by = c$$

možemo gledati kao na sustav od jedne linearne jednadžbe s dvije nepoznanice. Taj sustav ili uopće nema rješenja ili pak ima beskonačno mnogo rješenja koja leže na pravcu $ax + by - c = 0$. Dakle, nemamo jedinstveno rješenje. Zašto? Intuitivno to možemo objasniti na sljedeći način: imamo dvije nepoznanice, a premalo uvjeta da bismo imali i jedinstvenost rješenja, tj. imamo previše slobode u biranju.

Što ako bismo imali da je broj jednadžbi jednak broju nepoznanica. Onda na neki način možemo očekivati da ćemo možda imati jedinstveno rješenje jer je broj nepoznanica jednak broju jednadžbi pa nemamo neku slobodu u biranju.

Pogledajmo sustav dvije linearne jednadžbe s dvije nepoznanice

$$a_1x + b_1y = c_1$$
$$a_2x + b_2y = c_2$$

Rješenje tog sustava je svaki uređeni par realnih brojeva koji zadovoljava obje jednadžbe. Što možemo reći o rješenjima tog sustava? Pogledajmo na primjerima što se sve može dogoditi.

Primjer 3.

Riješite sustav

$$x + y = 3$$
$$2x - y = 9$$

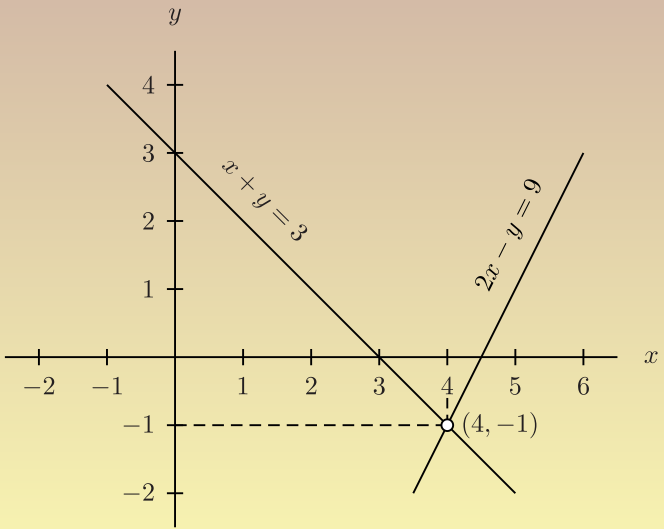
Primjer 3.

Riješite sustav

$$x + y = 3$$
$$2x - y = 9$$

Rješenje.

Rješenje tog sustava je $x = 4$, $y = -1$, tj. uređeni par $(4, -1)$. Dakle, ovaj sustav ima jedinstveno rješenje. Kako to možemo geometrijski objasniti? Svaka od gornjih jednadžbi predstavlja jednadžbu pravca, a ti pravci nisu paralelni pa se sijeku, a to sjecište je upravo rješenje našeg sustava.



y
x
$x+y=3$
$2x-y=9$
$(4,-1)$
-2 -1 1 2 3 4 5 6
4 3 2 1 -1 -2

Pridružimo našem sustavu

$$x + y = 3$$

$$2x - y = 9$$

tri determinante koje ćemo označiti sa D, D_1 i D_2.

Pridružimo našem sustavu

$$1x + 1y = 3$$

$$2x - 1y = 9$$

tri determinante koje ćemo označiti sa D, D_1 i D_2.

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$$

Determinantu D zovemo determinanta sustava i u nju pišemo brojeve koji stoje uz nepoznanice.

Pridružimo našem sustavu

$$x + y = 3$$
$$2x - y = 9$$

tri determinante koje ćemo označiti sa D, D_1 i D_2.

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \quad D_1 = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 9 & -1 \end{vmatrix}$$

Determinantu D_1 dobijemo tako da prvi stupac u determinanti D zamijenimo sa stupcem slobodnih članova.

Pridružimo našem sustavu

$$x + y = 3$$
$$2x - y = 9$$

tri determinante koje ćemo označiti sa D, D_1 i D_2.

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \quad D_1 = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 9 & -1 \end{vmatrix} \quad D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 9 \end{vmatrix}$$

Determinantu D_2 dobijemo tako da drugi stupac u determinanti D zamijenimo sa stupcem slobodnih članova.

Pridružimo našem sustavu

$$x + y = 3$$
$$2x - y = 9$$

tri determinante koje ćemo označiti sa D, D_1 i D_2.

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \quad D_1 = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 9 & -1 \end{vmatrix} \quad D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 9 \end{vmatrix}$$

Interesantno je da vrijedi

$$x = \frac{D_1}{D} = \frac{-12}{-3} = 4, \quad y = \frac{D_2}{D} = \frac{3}{-3} = -1$$

Primjer 4.

Riješite sustav

$$x + 2y = 2$$
$$3x + 6y = 18$$

Primjer 4.

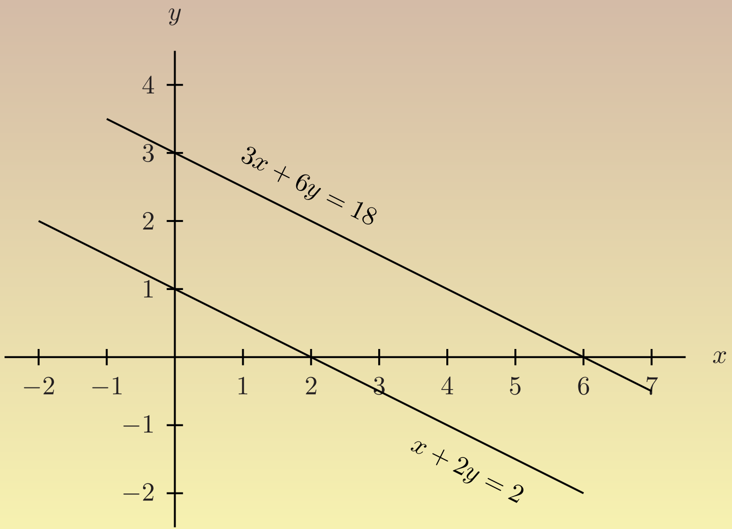
Riješite sustav

$$x + 2y = 2$$

$$3x + 6y = 18$$

Rješenje.

Ovaj sustav nema rješenja. Kako to možemo geometrijski objasniti? Svaka od gornjih jednadžbi predstavlja jednadžbu pravca, a ti pravci su paralelni pa nemaju zajedničkih točaka pa zbog toga gornji sustav nema rješenja.


y
x
4
3
2
1
−1
−2
−2
−1
1
2
3
4
5
6
7
3x + 6y = 18
x + 2y = 2

Pridružimo li sustavu

$$x + 2y = 2$$
$$3x + 6y = 18$$

njegove tri determinante D, D_1 i D_2, dobivamo

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 0 \quad D_1 = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 18 & 6 \end{vmatrix} = -24 \quad D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 18 \end{vmatrix} = 12$$

Ovdje nam $D = 0$ sugerira da nemamo jedinstveno rješenje (zapravo uopće nema rješenja) jer sada ne možemo pisati $x = \frac{D_1}{D}$ i $y = \frac{D_2}{D}$ jer u nazivniku ne smije biti 0.

Primjer 5.

Riješite sustav

$$
\begin{aligned}
x + 2y &= 2 \\
3x + 6y &= 6
\end{aligned}
$$

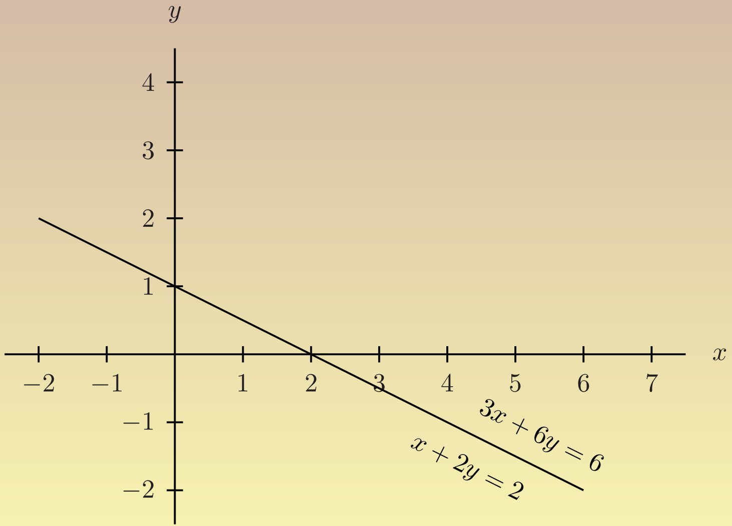
Primjer 5.

Riješite sustav

$$x + 2y = 2$$
$$3x + 6y = 6$$

Rješenje.

Ovaj sustav ima beskonačno mnogo rješenja koja leže na pravcu $x + 2y - 2 = 0$. Kako to možemo geometrijski objasniti? Svaka od gornjih jednadžbi predstavlja jednadžbu istog pravca jer se druga jednadžba dobije tako da se prva pomnoži sa 3. Dakle, zapravo imamo samo jednu jednadžbu jer druga nam ne daje nikakve nove informacije koje ne bismo mogli dobiti i iz prve jednadžbe.



y
4
3
2
1
-1
-2
x
-2
-1
1
2
3
4
5
6
7
$3x + 6y = 6$
$x + 2y = 2$

Pridružimo li sustavu

$$x + 2y = 2$$
$$3x + 6y = 6$$

njegove tri determinante D, D_1 i D_2, dobivamo

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 0 \quad D_1 = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 6 & 6 \end{vmatrix} = 0 \quad D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 0$$

$D = 0$ nam sugerira da nemamo jedinstvenost rješenja, a $D_1 = D_2 = 0$ nam bi trebalo sugerirati da imamo beskonačno mnogo rješenja. **Oprez:** To nije općenito tako.

Primjer 6.

Riješite sustav

$$0 \cdot x + 0 \cdot y = 0$$

$$0 \cdot x + 0 \cdot y = 7$$

Rješenje.

Sustav je očito kontradiktoran i vrijedi da je

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad D_1 = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 7 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad D_2 = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 7 \end{vmatrix} = 0$$

I u ovom je slučaju $D = D_1 = D_2 = 0$, ali je sustav kontradiktoran.

Sada možemo općenito reći sve o rješenjima sustava

$$a_1x + b_1y = c_1$$
$$a_2x + b_2y = c_2$$

Na već prije opisani način sustavu pridružimo tri determinante

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \quad D_1 = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

Razlikujemo tri slučaja.

a $D \neq 0$. U tom slučaju sustav ima jedinstveno rješenje

$$x = \frac{D_1}{D}, \quad y = \frac{D_2}{D}.$$

To se lagano provjeri uvrštavanjem u jednadžbe sustava.

b $D = 0$ i barem jedan od brojeva D_1 i D_2 je različit od nule. U tom slučaju sustav nema rješenja.

c $D = D_1 = D_2 = 0$. U tom slučaju sustav ili ima beskonačno mnogo rješenja ili nema uopće rješenja.

Vidjeli smo na jednostavnim primjerima da u slučaju da je broj jednadžbi jednak broju nepoznanica ne moramo imati jedinstveno rješenje. Dapače, rješenje ne mora uopće postojati.

Mogli bismo sada na sličan način promatrati sustav tri linearne jednadžbe s tri nepoznanice.

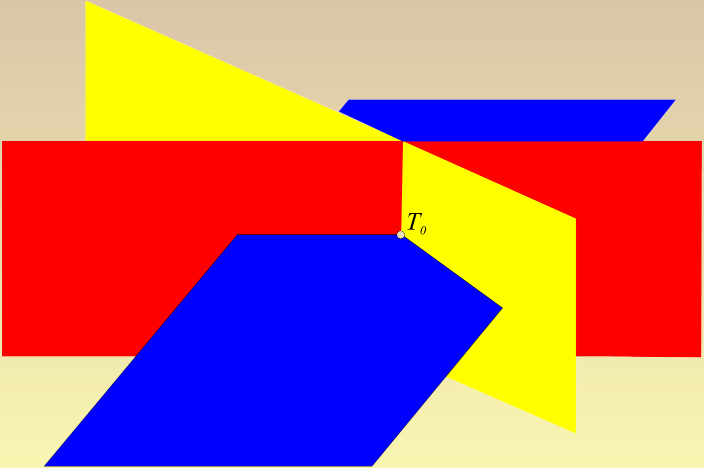
$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z &= d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z &= d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z &= d_3 \end{aligned} \qquad (\clubsuit)$$

Međutim, diskusija bi ovdje bila kompliciranija pa ćemo samo pogledati dva interesantna slučaja koja ćemo geometrijski interpretirati. Općenitu diskusiju ćemo provesti kasnije.

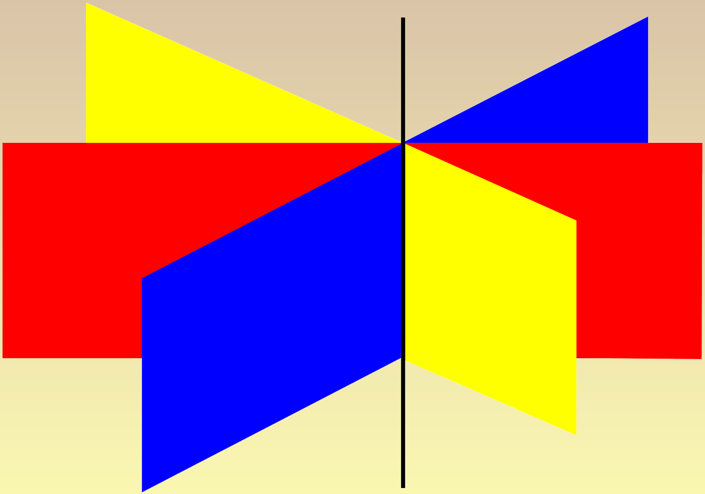
Što bi geometrijski značilo da sustav (♣) ima jedinstveno rješenje? Svaka od jednadžbi u (♣) predstavlja jednadžbu ravnine u prostoru pa ako (♣) ima jedinstveno rješenje to znači da tri ravnine imaju samo jednu zajedničku točku. Za takve ravnine kažemo da čine **snop** ravnina u prostoru.

Može se dogoditi da (♣) ima beskonačno mnogo rješenja koja pripadaju istom pravcu u prostoru, tj. zadane ravnine bi se sjekle po nekom pravcu. Za takve ravnine kažemo da pripadaju istom **pramenu** ravnina u prostoru.

Snop ravnina



Pramen ravnina



Zadatak 1.

Komentirajte geometrijski sve moguće slučajeve koji se mogu dogoditi kod ($\clubsuit$) *na sličan način kao što smo komentirali kod sustava dvije linearne jednadžbe s dvije nepoznanice. Tamo smo promatrali sve moguće položaje dvaju pravaca u ravnini, a ovdje treba promatrati sve moguće položaje triju ravnina u prostoru. Dva položaja smo već komentirali, snop i pramen ravnina. Promotrite preostale položaje i komentirajte kako to utječe na rješenje sustava* ($\clubsuit$).

Sustav m linearnih jednadžbi s n nepoznanica

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
&\vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m
\end{aligned} \qquad (\spadesuit)$$

Koeficijenti a_{ij}, b_i su realni brojevi za $i = 1, 2, \ldots, m$, $j = 1, 2, \ldots, n$. Koeficijent a_{ij} pripada j-toj varijabli u i-toj jednadžbi, a b_i je slobodni koeficijent u i-toj jednadžbi.

Rješenje sustava m linearnih jednadžbi s n nepoznanica je svaka uređena n-torka realnih brojeva $(r_1, r_2, \ldots, r_n)$ koja uvrštavanjem u sustav tako da je $x_i = r_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$ zadovoljava sve jednadžbe sustava.

S obzirom na rješivost sustav (♠) može biti:

a **Određen** – ima jedinstveno rješenje

b **Neodređen** – ima beskonačno mnogo rješenja

c **Kontradiktoran** – nema rješenja

Sustavu (♠) pridružit ćemo tri matrice:

- **Matrica sustava** – to je matrica tipa (m, n) u kojoj se nalaze koeficijenti uz nepoznanice

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

- **Matrica nepoznanica** – to je matrica tipa $(n, 1)$ u kojoj se nalaze nepoznanice

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

- **Matrica slobodnih koeficijenata** – to je matrica tipa $(m, 1)$ u kojoj se nalaze slobodni koeficijenti

$$B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Uz ovakve oznake sustav (♠) možemo napisati u matričnom obliku

$$AX = B.$$

Radi jednostavnosti, uvjerimo se na jednom konkretnom primjeru da je to zaista istina.

Primjer 7.

Zapišite u matričnom obliku sustav

$$2x_1 + 4x_2 - x_3 + 5x_4 = 7$$
$$-9x_1 + x_2 + 6x_3 + 8x_4 = -3$$

Rješenje.

Ovo je sustav od dvije linearne jednadžbe s četiri nepoznanice.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -1 & 5 \\ -9 & 1 & 6 & 8 \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 7 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Uvrstimo ove matrice u matričnu jednadžbu $AX = B$.

$$AX = B$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & -1 & 5 \\ -9 & 1 & 6 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2x_1 + 4x_2 - x_3 + 5x_4 \\ -9x_1 + x_2 + 6x_3 + 8x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Iz jednakosti dviju matrica slijedi da mora biti

$$\begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 - x_3 + 5x_4 &= 7 \\ -9x_1 + x_2 + 6x_3 + 8x_4 &= -3, \end{aligned}$$

a to je zapravo zadani sustav.

Rješavanje sustava pomoću inverzne matrice

U ovom ćemo dijelu pokazati kako se rješava sustav od n linearnih jednadžbi sa n nepoznanica (broj jednadžbi je jednak broju nepoznanica) pomoću inverzne matrice. Znamo da taj sustav možemo zapisati u matričnom obliku

$$AX = B.$$

Kako je broj jednadžbi jednak broju nepoznanica, matrica sustava A je kvadratna i reda je n.

U slučaju da je matrica A regularna, sustav ima jedinstveno rješenje

$$X = A^{-1}B.$$

U slučaju da je matrica A singularna, tada sustav ima beskonačno mnogo rješenja ili nema uopće rješenja. Što se točno događa u tom slučaju reći ćemo kasnije.

Pomoću inverzne matrice mogu se rješavati samo sustavi u kojima je broj jednadžbi jednak broju nepoznanica i čija je matrica sustava regularna.

Primjer 8.

Pomoću inverzne matrice riješite sustav

$$2u + 3v = 5$$

$$-5u + v = 7$$

Primjer 8.

Pomoću inverzne matrice riješite sustav

$$2u + 3v = 5$$
$$-5u + v = 7$$

Rješenje.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -5 & 1 \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix}$$

$$X = A^{-1}B = \frac{1}{17}\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-16}{17} \\ \frac{39}{17} \end{bmatrix}$$

Dakle, $u = \frac{-16}{17}$, $v = \frac{39}{17}$

Primjer 9.

Pomoću inverzne matrice riješite sustav

$$
\begin{aligned}
2a + b - c &= 0 \\
3a + 2c &= 12 \\
3a + b + 2c &= 11
\end{aligned}
$$

Primjer 9.

Pomoću inverzne matrice riješite sustav

$$
\begin{aligned}
2a + b - c &= 0 \\
3a + 2c &= 12 \\
3a + b + 2c &= 11
\end{aligned}
$$

Rješenje.

$$
A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 12 \\ 11 \end{bmatrix}
$$

$$X = A^{-1}B = \frac{1}{-7}\begin{bmatrix} -2 & -3 & 2 \\ 0 & 7 & -7 \\ 3 & 1 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 12 \\ 11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Dakle,

$$a = 2, \quad b = -1, \quad c = 3$$

Rješavanje sustava pomoću determinanti

U ovom dijelu ćemo pokazati kako se rješava sustav od n linearnih jednadžbi sa n nepoznanica pomoću determinanti.

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \quad \Big/ \cdot A_{11} \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \quad \Big/ \cdot A_{21} \\
&\vdots \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n &= b_n \quad \Big/ \cdot A_{n1}
\end{aligned}
$$

Pomnožimo redom pripadne jednadžbe s kofaktorima prvog stupca pripadne matrice sustava A. Zbrajanjem dobivamo

$$\big(a_{11}A_{11}+a_{21}A_{21}+\cdots+a_{n1}A_{n1}\big)x_1+$$

$$\big(a_{12}A_{11}+a_{22}A_{21}+\cdots+a_{n2}A_{n1}\big)x_2+\cdots+$$

$$+\big(a_{1n}A_{11}+a_{2n}A_{21}+\cdots+a_{nn}A_{n1}\big)x_n=$$

$$=b_1A_{11}+b_2A_{21}+\cdots+b_nA_{n1}$$

$$
\Big(\underbrace{a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + \cdots + a_{n1}A_{n1}}_{=\det A}\Big)x_1 +
$$

$$
\Big(\underbrace{a_{12}A_{11} + a_{22}A_{21} + \cdots + a_{n2}A_{n1}}_{=0}\Big)x_2 + \cdots +
$$

$$
+ \Big(\underbrace{a_{1n}A_{11} + a_{2n}A_{21} + \cdots + a_{nn}A_{n1}}_{=0}\Big)x_n =
$$

$$
= b_1A_{11} + b_2A_{21} + \cdots + b_nA_{n1}
$$

Označimo li sa $D = \det A$ determinantu matrice sustava, a sa D_1 determinantu matrice koju dobijemo iz matrice A tako da prvi stupac zamijenimo s elementima jednostupčane matrice slobodnih koeficijenata B, tj.

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_n & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

dobivamo da je

$$Dx_1 = D_1.$$

Općenito, ako pomnožimo sve jednadžbe zadanog sustava s kofaktorima elemenata i-tog stupca matrice sustava A i zatim ih zbrojimo, dobit ćemo

$$Dx_i = D_i, \qquad (\odot)$$

gdje je D_i determinanta matrice koju dobijemo tako da se i-ti stupac matrice A zamijeni s jednostupčanom matricom B.

Pravilo $(\odot)$ zovemo **Cramerovim pravilom** i ono se može koristiti da bi se riješio sustav linearnih jednadžbi u kojemu je broj jednadžbi jednak broju nepoznanica i $D \neq 0$.

Slučajevi koji mogu nastupiti kod rješavanja sustava n linearnih jednadžbi s n nepoznanica pomoću determinanti su:

1. $D \neq 0$. Tada je sustav određen i vrijedi

$$x_i = \frac{D_i}{D}, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

2. $D = 0$. Tada postoje sljedeće mogućnosti:
   a. $\exists i, i \in \{1, 2, \ldots, n\}, D_i \neq 0$. Sustav je kontradiktoran.
   b. $D_i = 0, \forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Tada vrijedi jedno od sljedećeg:
      i. Sustav je neodređen
      ii. Sustav je kontradiktoran

Dakle, u slučaju da je

$$D = D_1 = D_2 = \cdots = D_n = 0$$

samo Cramerovo pravilo nije dovoljno da bismo mogli zaključiti da li je sustav neodređen ili kontradiktoran.

Odgovor na to pitanje u potpunosti daje Kronecker-Capellijev teorem kojeg ćemo kasnije obraditi.

Cramerovo pravilo

1. $D \neq 0$. Sustav ima jedinstveno rješenje $x_i = \frac{D_i}{D}$
2. $D = 0$
   - a $\exists i, D_i \neq 0$. Sustav je kontradiktoran.
   - b $D_i = 0, \forall i$. Sustav je ili neodređen ili kontradiktoran

Cramerovo pravilo (n=3)

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2$$

$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3$$

Cramerovo pravilo (n=3)

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2$$

$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3$$

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Cramerovo pravilo (n=3)

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2$$

$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3$$

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Cramerovo pravilo (n=3)

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2$$

$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3$$

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}$$

Cramerovo pravilo (n=3)

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2$$

$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3$$

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix} \qquad D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

Cramerovo pravilo (n=3)

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2$$

$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3$$

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix} \qquad D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D}, \quad x_3 = \frac{D_3}{D}$$

Primjer 10.

Pomoću determinanti riješite sustav

$$\begin{aligned} 8x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ -2x_1 + 4x_2 + 6x_3 &= 2 \\ 3x_1 + 6x_2 + 9x_3 &= 5 \end{aligned}$$

Primjer 10.

Pomoću determinanti riješite sustav

$$\begin{aligned} 8x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ -2x_1 + 4x_2 + 6x_3 &= 2 \\ 3x_1 + 6x_2 + 9x_3 &= 5 \end{aligned}$$

Rješenje.

$$D = \begin{vmatrix} 8 & 1 & 1 \\ -2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix} = 12 \qquad D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 6 \\ 5 & 6 & 9 \end{vmatrix} = 4$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 8 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 6 \\ 3 & 5 & 9 \end{vmatrix} = -76 \qquad D_3 = \begin{vmatrix} 8 & 1 & 1 \\ -2 & 4 & 2 \\ 3 & 6 & 5 \end{vmatrix} = 56$$

Gaussov postupak

Neka su S i S' dva sustava linearnih jednadžbi. Kažemo da su ti sustavi **ekvivalentni** ako je skup rješenja sustava S jednak skupu rješenja sustava S', tj. $R(S) = R(S')$.

Primjeri ekvivalentnih sustava

1 Sustavi S i S' su ekvivalentni jer je $R(S) = R(S') = \{3\}$.

$$2x - 4 = 2 \qquad (S)$$

$$x - 3 = 0 \qquad (S')$$

2 Sustavi S i S' su ekvivalentni jer je $R(S) = R(S') = \{(3, -1)\}$.

$$\left.\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 2 \\ x_1 - x_2 &= 4 \end{aligned}\right\} \qquad (S)$$

$$\left.\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 &= 9 \\ x_1 + 2x_2 &= 1 \end{aligned}\right\} \qquad (S')$$

Primjer neekvivalentnih sustava

$$\left.\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 2 \\ x_1 - x_2 &= 4 \end{aligned}\right\} \qquad (S)$$

$$\left. x_1 + x_2 = 2 \right\} \qquad (S')$$

$R(S) = \big\{(3,-1)\big\}$. Uređeni par $(3,-1)$ je rješenje sustava S', no sustav S' ima beskonačno mnogo rješenja, tj. $R(S') = \big\{(t, 2-t) : t \in \mathbb{R}\big\}$. Dakle, $R(S) \neq R(S')$ pa su S i S' neekvivalentni sustavi. Primijetimo da je ovdje specijalno $R(S) \subset R(S')$.

Ekvivalentne transformacije sustava jednadžbi

Sada ćemo spomenuti transformacije na sustavima koje ne mijenjaju njegovo rješenje, tj. koje sustav prevode u njemu ekvivalentni sustav. Poznavanje takvih transformacija temelj su za efikasno rješavanje sustava.

1. Ako u zadanom sustavu S dvije jednadžbe zamijene mjesta, dobiveni sustav S' ekvivalentan je sustavu S.
2. Ako se neka jednadžba sustava S zamijeni produktom te jednadžbe i proizvoljnog realnog broja različitog od nule, dobiveni sustav ekvivalentan je polaznom sustavu.

3 Ako se u danom sustavu S neka jednadžba zamijeni zbrojem te jednadžbe i neke druge jednadžbe sustava, dobiveni sustav ekvivalentan je sa polaznim sustavom.

Nabrojene transformacije sustava zovemo **elementarnim transformacijama**.

Kombiniranjem drugog i trećeg pravila dobivamo

3' Ako se sustavu S neka jednadžba zamijeni zbrojem te jednadžbe i neke druge jednadžbe pomnožene proizvoljnim realnim brojem, dobiveni sustav ekvivalentan je sustavu S.

Ekvivalentna transformacija sustava je svaki postupak kojim se od zadanog sustava jednadžbi dobije ekvivalentni sustav.

Propozicija 1.

Svaka ekvivalentna transformacija sustava može se dobiti pomoću konačnog niza elementarnih transformacija.

Sada ćemo na jednom jednostavnom primjeru pokazati kako se provodi Gaussov postupak, a zatim pokazati kako se skraćeno piše Gaussov postupak pomoću tablice.

Primjer 11.

Riješite sustav

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 &= 3 \\ 2x_1 - 3x_2 &= 5 \end{aligned}$$

Primjer 11.

Riješite sustav

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 &= 3 \\ 2x_1 - 3x_2 &= 5 \end{aligned}$$

Rješenje.

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 &= 3 \quad /\cdot(-2) \\ 2x_1 - 3x_2 &= 5 \quad \longleftarrow + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 &= 3 \\ - x_2 &= -1 \quad /\cdot(-1) \end{aligned}$$

$$x_1 - x_2 = 3$$
$$x_2 = 1$$

$$x_1 = 4$$
$$x_2 = 1$$

Pomoću tablice taj postupak kratko zapisujemo

x_1	x_2	b	
1	-1	3	$/ \cdot (-2)$
2	-3	5	$+$
1	-1	3	
0	-1	-1	$/ \cdot (-1)$
1	-1	3	$+$
0	1	1	
1	0	4	
0	1	1	

Prof.dr.sc. Blaženka Divjak

Primjer 12.

Riješite sustav

$$\begin{aligned} 2x - 3y &= -1 \\ -6x + 9y &= 3 \end{aligned}$$

Primjer 12.

Riješite sustav

$$
\begin{aligned}
2x - 3y &= -1 \\
-6x + 9y &= 3
\end{aligned}
$$

Rješenje.

$$
\begin{array}{cc|cl}
x & y & b & \\
\hline
2 & -3 & -1 & / \cdot 3 \\
-6 & 9 & 3 & \longleftarrow + \\
\hline
2 & -3 & -1 & \\
0 & 0 & 0 & \longrightarrow \text{suvišna jednadžba } (0 \cdot x + 0 \cdot y = 0) \\
\hline
2 & -3 & -1 &
\end{array}
$$

Dakle, početni sustav je ekvivalentan sa sustavom

$$2x - 3y = -1. \tag{S'}$$

Riješimo li (S') po varijabli x dobivamo

$$x = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}y,$$

što znači da y biramo, a x onda izračunamo na temelju odabranog y. Dakle, sustav ima beskonačno mnogo rješenja, tj. neodređen je.

Varijabla x po kojoj je riješen sustav zove se **bazična varijabla**, a varijabla y zove se **nebazična varijabla** ili **parametar**.

Općenito, sve varijable u zadanom sustavu po kojima je sustav riješen zovu se **bazične varijable**, a preostale varijable zadanog sustava zovu se **nebazične varijable** ili **parametri** (pomoću njih su izražene bazične varijable).

Uobičajeno je parametre nazvati novim slovima različitim od onih koji se koriste u zadanom sustavu. Najčešće se koriste slova p, t, u, v (osim ako se već ne pojavljuju u zadanom sustavu).

Konkretno, varijablu y možemo nazvati sa p, pa **opće rješenje** zadanog sustava možemo zapisati u obliku

$$x = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}p$$

$$y = p, \quad p \in \mathbb{R}$$

ili u obliku uređenog para

$$\left(\frac{-1}{2} + \frac{3}{2}p,\, p\right), \quad p \in \mathbb{R}.$$

U rješavanju neodređenog sustava koristi se sljedeća terminologija:

a **Opće rješenje** sustava: $\left(\frac{-1}{2} + \frac{3}{2}p, \, p\right), \quad p \in \mathbb{R}$

b **Posebno (partikularno) rješenje** – dobijemo odabirom konkretnih vrijednosti za pojedine parametre: npr., za $p = 1$ je $(1, 1)$ jedno partikularno rješenje.

c **Bazično rješenje** je ono partikularno rješenje koje dobijemo kada sve parametre u općem rješenju postavimo na nulu. Konkretno ovdje, za $p = 0$ dobijemo bazično rješenje $\left(\frac{-1}{2}, 0\right)$.

d **Suvišna jednadžba** je ona jednadžba u zadanom sustavu koja se može dobiti linearnom kombinacijom preostalih jednadžbi sustava.

Napomena.

Kod rješavanja neodređenog sustava sami možemo izabrati koje varijable ćemo uzeti za bazične, a koje za parametre (osim ako nam unaprijed nije "nametnuto" koje će biti bazične, a koje parametri). Naravno, postavlja se pitanje broja bazičnih i nebazičnih varijabli za pojedini neodređeni sustav. Na to pitanje u potpunosti daje odgovor Kronecker-Capellijev teorem kojeg ćemo kasnije obraditi. Grubo rečeno, kako god birali bazične varijable uvijek ih ima isti broj za pojedini neodređeni sustav, tj. broj bazičnih varijabli ne ovisi o našem odabiru koje varijable ćemo uzeti za bazične, a onda ni broj parametara ne ovisi o našem odabiru. Koliko kojih trebamo "vidimo" u toku rješavanja sustava.

Sjetimo se sustava

$$2x - 3y = -1$$
$$-6x + 9y = 3$$

Njegovo opće rješenje je

$$x = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}p$$
$$y = p, \quad p \in \mathbb{R}$$

pri čemu je x bazična varijabla, y parametar, a bazično rješenje je $\left(\frac{-1}{2}, 0\right)$.

Mogli smo taj sustav riješiti tako da y uzmemo za bazičnu varijablu, a x za parametar. Tada bismo dobili opće rješenje tog sustava

$$x = p$$

$$y = \frac{2}{3}p + \frac{1}{3}, \quad p \in \mathbb{R}$$

Stavimo li $p = 0$ dobijemo drugo bazično rješenje $\left(0, \frac{1}{3}\right)$. Dakle, zadani sustav ima dva bazična rješenja $\left(\frac{-1}{2}, 0\right)$ i $\left(0, \frac{1}{3}\right)$. Očito je da bazična rješenja ovise o našem odabiru koje ćemo varijable uzeti za bazične, a koje za parametre. Dakle, da bismo dobili sva bazična rješenja, trebali bismo isti sustav rješavati više puta i to tako da svaki puta mijenjamo odabir bazičnih varijabli i parametara. Međutim, ako sustav sadrži puno varijabli i jednadžbi to može potrajati.

Sva bazična rješenja možemo dobiti samo iz nekog općeg rješenja neodređenog sustava. Objasnimo to na primjeru kada imamo samo jedan parametar, a kasnije ćemo objasniti na primjeru kada imamo dva parametra. U slučaju tri ili više parametara postupak je analogan.

Pogledajmo ponovno sustav

$$\begin{aligned} 2x - 3y &= -1 \\ -6x + 9y &= 3 \end{aligned}$$

Ako varijablu y uzmemo za parametar, opće rješenje sustava je

$$x = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}p$$

$$y = p, \quad p \in \mathbb{R}$$

Za $p = 0$ smo dobili bazično rješenje $\left(\frac{-1}{2}, 0\right)$. Što smo zapravo napravili? Drugu komponentu općeg rješenja smo izjednačili s nulom i riješili jednadžbu, tj. $y = 0$ pa slijedi da je $p = 0$ i zatim to uvrstili u prvu komponentu općeg rješenja te dobili jedno bazično rješenje.

Kako dobiti iz ovog općeg rješenja drugo bazično rješenje? Trebamo prvu komponentu općeg rješenja izjednačiti s nulom, tj. riješiti jednadžbu $x = 0$ iz koje dobijemo odgovarajući p pomoću kojeg izračunamo drugu komponentu y.

$$x = 0 \;\Rightarrow\; -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}p = 0 \;\Rightarrow\; p = \frac{1}{3}$$

Sada je

$$y = p \;\Rightarrow\; y = \frac{1}{3}$$

pa je dobiveno drugo bazično rješenje $\left(0, \frac{1}{3}\right)$.

Općenito, ako opće rješenje neodređenog sustava ima samo jedan parametar, tada sva bazična rješenja dobijemo tako da svaku od komponenata općeg rješenja u pojedinom koraku izjednačimo s nulom, riješimo jednadžbu i dobivenu vrijednost parametra uvrstimo u preostale komponente.

Bazično rješenje, jedan parametar

Jednostavno rečeno, ako opće rješenje neodređenog sustava ima jedan parametar, tada je bazično rješenje ono partikularno rješenje kojemu je barem jedna komponenta jednaka nula.

Primjer 13.

Riješite sustav

$$
\begin{aligned}
x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 2x_4 &= -5 \\
3x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 &= 9 \\
-2x_1 + x_2 - 3x_3 + 4x_4 &= 2
\end{aligned}
$$

tako da varijabla x_3 *bude parametar.*

Primjer 13.

Riješite sustav

$$
\begin{aligned}
x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 2x_4 &= -5\\
3x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 &= 9\\
-2x_1 + x_2 - 3x_3 + 4x_4 &= 2
\end{aligned}
$$

tako da varijabla x_3 *bude parametar.*

Rješenje.

Ideja je da radimo elementarne transformacije nad recima tako da biramo neki redak i neki element u tom retku i zatim napravimo nule na preostalim mjestima u stupcu u kojem se nalazi odabrani element.

x_1	x_2	x_3	x_4	b	
$\boxed{1}$	2	-2	2	-5	$/ \cdot (-3)$ $/ \cdot 2$
3	2	4	-1	9	$+$
-2	1	-3	4	2	$+$
1	2	-2	2	-5	
0	-4	10	-7	24	$+$
0	5	-7	8	-8	
1	2	-2	2	-5	$+$
0	$\boxed{1}$	3	1	16	$/ \cdot (-2)$ $/ \cdot (-5)$
0	5	-7	8	-8	$+$
1	0	-8	0	-37	
0	1	3	1	16	$+$
0	0	-22	$\boxed{3}$	-88	$/ \cdot \frac{-1}{3}$
1	0	-8	0	-37	
0	1	$\frac{31}{3}$	0	$\frac{136}{3}$	
0	0	-22	3	-88	

Objasnimo ukratko postupak rješavanja. U prvom koraku odabran je prvi redak i element 1. Kako se odabrani broj 1 nalazi u prvom stupcu, želimo preostale elemente u prvom stupcu "pretvoriti" u nule. To ćemo postići tako da prvi redak pomnožimo s -3 i dodamo ga drugom retku, nakon toga pomnožimo ga s 2 i dodamo trećem retku. Znamo da na taj način nećemo promijeniti rješenja početnog sustava, tj. na taj način dobivamo novi sustav koji je ekvivalentan početnom sustavu.

Za odabrani redak kaže se da je **vodeći redak**, a za odabrani element 1 kaže se da je **ključni element**. Za varijablu x_1 kažemo da je **vodeća varijabla** jer uz nju stoji ključni element.

Gledamo li sada dobivene brojeve vidimo da nemamo niti jedne jedinice uz nepoznanice u drugom i trećem retku (osim u prvom retku uz nepoznanicu x_1, ali prvi redak više nećemo birati jer ćemo si inače pokvariti nule koje smo napravili). Dakle, svaki redak biramo najviše jedanput jer u protivnom si kvarimo nule koje smo napravili.

U ovom trenutku mogli bismo, npr. odabrati drugi redak i broj -4 koji je u drugom stupcu pa onda na preostalim mjestima u drugom stupcu napraviti nule. Međutim, tada bi nam se pojavili razlomci, a to ovdje možemo izbjeći tako da treći redak dodamo drugom retku (naravno, mogli smo ići na razlomke i dalje raditi s njima).

Nakon dodavanja trećeg retka drugom, u drugom retku nam se pojave čak dvije jedinice (uz varijable x_2 i x_4). Naravno, biramo drugi redak za vodeći redak, i biramo, npr. varijablu x_2 za vodeću varijablu (mogli smo i varijablu x_4 odabrati za vodeću jer i uz nju u drugom retku stoji jedinica). Sada na preostalim mjestima u drugom stupcu želimo napraviti nule. To ćemo postići tako da drugi redak pomnožimo s -2 i dodamo ga prvom, zatim ga pomnožimo s -5 i dodamo trećem. Na taj način dobivamo sustav koji je ekvivalentan s početnim sustavom.

Jedini redak koji još nismo izabrali je treći redak. U njemu nemamo niti jednu jedinicu pa ćemo morati ići na razlomke. Pitanje je koju od varijabli x_3 i x_4 uzeti za vodeću. U principu je svejedno, uzimamo onu koja nam više odgovara. Međutim, u zadatku se od nas zahtijeva da riješimo sustav tako da varijabla x_3 bude parametar pa onda nju "ne smijemo" uzimati za vodeću varijablu jer bi nam inače "nestala" iz preostalih jednadžbi nako što bismo napravili nule u trećem stupcu, a pomoću nje moraju biti izražene preostale varijable.

Stoga uzimamo varijablu x_4 za vodeću, odnosno broj 3 za ključni element i želimo na preostalim mjestima u četvrtom stupcu napraviti nule. Kako je već u prvom retku na četvrtom mjestu nula, jedino još treba treći redak pomnožiti s $\frac{-1}{3}$ i dodati ga drugom retku. Na taj način dobivamo sustav

$$\begin{aligned} x_1 - 8x_3 &= -37 \\ x_2 + \frac{31}{3}x_3 &= \frac{136}{3} \\ -22x_3 + 3x_4 &= -88 \end{aligned}$$

koji je ekvivalentan početnom sustavu.

Stoga je opće rješenje početnog sustava

$$\begin{aligned} x_1 &= -37 + 8x_3 \\ x_2 &= \frac{136}{3} - \frac{31}{3}x_3, \qquad x_3 \in \mathbb{R} \\ x_4 &= -\frac{88}{3} + \frac{22}{3}x_3 \end{aligned}$$

odnosno

$$\begin{aligned} x_1 &= -37 + 8p \\ x_2 &= \frac{136}{3} - \frac{31}{3}p \\ x_3 &= p \\ x_4 &= -\frac{88}{3} + \frac{22}{3}p \end{aligned}$$

odnosno u obliku uređene četvorke

$$\left(-37 + 8p,\ \frac{136}{3} - \frac{31}{3}p,\ p,\ -\frac{88}{3} + \frac{22}{3}p\right), \qquad p \in \mathbb{R}$$

Sustav je riješen po varijablama x_1, x_2, x_4 i njih zovemo **bazične varijable**, a varijabla x_3 je **parametar**.

Zadatak 2.

Riješite prethodni sustav

$$x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 2x_4 = -5$$

$$3x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 = 9$$

$$-2x_1 + x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 2$$

tako da bude parametar

(a) varijabla x_1 *(b) varijabla* x_2 *(c) varijabla* x_4

Sustav je riješen po varijablama x_1, x_2, x_4 i njih zovemo **bazične varijable**, a varijabla x_3 je **parametar**.

Zadatak 2.

Riješite prethodni sustav

$$x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 2x_4 = -5$$
$$3x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 = 9$$
$$-2x_1 + x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 2$$

tako da bude parametar

(a) varijabla x_1 *(b) varijabla* x_2 *(c) varijabla* x_4

Rješenje.

(a) $\left(p,\ -\frac{59}{24} - \frac{31}{24}p,\ \frac{37}{8} + \frac{1}{8}p,\ \frac{55}{12} + \frac{11}{12}p\right)$

(b) $\left(-\frac{59}{31} - \frac{24}{31}p,\ p,\ \frac{136}{31} - \frac{3}{31}p,\ \frac{88}{31} - \frac{22}{31}p\right)$

(c) $\left(-5 + \frac{12}{11}p,\ 4 - \frac{31}{22}p,\ 4 + \frac{3}{22}p,\ p\right)$

Primjer 14.

Odredite sva bazična rješenja sustava

$$
\begin{aligned}
x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 2x_4 &= -5\\
3x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 &= 9\\
-2x_1 + x_2 - 3x_3 + 4x_4 &= 2
\end{aligned}
$$

Primjer 14.

Odredite sva bazična rješenja sustava

$$x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 2x_4 = -5$$
$$3x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 = 9$$
$$-2x_1 + x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 2$$

Rješenje.

Ovaj sustav smo prije riješili i vidjeli smo da se u općem rješenju pojavljuje jedan parametar, a bazično rješenje dobijemo kada parametar postavimo na nulu. Dakle, da bismo dobili sva bazična rješenja trebali bismo taj sustav riješiti na četiri načina tako da bismo svaki puta uzimali po jednu varijablu za parametar. To bi bio jedan način koji bi dugo trajao.

x_1 je parametar	x_2 je parametar
$x_1 = p$ $x_2 = -\frac{59}{24} - \frac{31}{24}p$ $x_3 = \frac{37}{8} + \frac{1}{8}p$ $x_4 = \frac{55}{12} + \frac{11}{12}p$ Bazično rješenje: za $p = 0$ $\left(0, -\frac{59}{24}, \frac{37}{8}, \frac{55}{12}\right)$	$x_1 = -\frac{59}{31} - \frac{24}{31}p$ $x_2 = p$ $x_3 = \frac{136}{31} - \frac{3}{31}p$ $x_4 = \frac{88}{31} - \frac{22}{31}p$ Bazično rješenje: za $p = 0$ $\left(-\frac{59}{31}, 0, \frac{136}{31}, \frac{88}{31}\right)$
x_3 je parametar	**x_4 je parametar**
$x_1 = -37 + 8p$ $x_2 = \frac{136}{3} - \frac{31}{3}p$ $x_3 = p$ $x_4 = -\frac{88}{3} + \frac{22}{3}p$ Bazično rješenje: za $p = 0$ $\left(-37, \frac{136}{3}, 0, -\frac{88}{3}\right)$	$x_1 = -5 + \frac{12}{11}p$ $x_2 = 4 - \frac{31}{22}p$ $x_3 = 4 + \frac{3}{22}p$ $x_4 = p$ Bazično rješenje: za $p = 0$ $\left(-5, 4, 4, 0\right)$

Drugi (lakši) način, koji se i inače koristi u rješavanju zadataka, smo već prije spomenuli. Naime, kada nađemo neko opće rješenje neodređenog sustava i u njemu se pojavljuje samo jedan parametar, tada sva bazična rješenja nađemo tako da u pojedinom koraku izjednačimo jednu komponentu općeg rješenja sa nulom, riješimo pripadnu jednadžbu i to rješenje uvrstimo u preostale komponente općeg rješenja.

Konkretno ovdje, uzmimo npr. opće rješenje u kojemu je varijabla x_3 parametar.

Bazično rješenje: za $x_1 = 0$	Bazično rješenje: za $x_2 = 0$
$x_1 = -37 + 8p$ $x_2 = \frac{136}{3} - \frac{31}{3}p$ $x_3 = p$ $x_4 = -\frac{88}{3} + \frac{22}{3}p$	$x_1 = -37 + 8p$ $x_2 = \frac{136}{3} - \frac{31}{3}p$ $x_3 = p$ $x_4 = -\frac{88}{3} + \frac{22}{3}p$
$-37 + 8p = 0 \Rightarrow p = \frac{37}{8}$	$\frac{136}{3} - \frac{31}{3}p = 0 \Rightarrow p = \frac{136}{31}$
$\left(0, -\frac{59}{24}, \frac{37}{8}, \frac{55}{12}\right)$	$\left(-\frac{59}{31}, 0, \frac{136}{31}, \frac{88}{31}\right)$
Bazično rješenje: za $x_3 = 0$	**Bazično rješenje: za $x_4 = 0$**
$x_1 = -37 + 8p$ $x_2 = \frac{136}{3} - \frac{31}{3}p$ $x_3 = p$ $x_4 = -\frac{88}{3} + \frac{22}{3}p$	$x_1 = -37 + 8p$ $x_2 = \frac{136}{3} - \frac{31}{3}p$ $x_3 = p$ $x_4 = -\frac{88}{3} + \frac{22}{3}p$
$x_3 = 0 \Rightarrow p = 0$	$-\frac{88}{3} + \frac{22}{3}p = 0 \Rightarrow p = 4$
$\left(-37, \frac{136}{3}, 0, -\frac{88}{3}\right)$	$\left(-5, 4, 4, 0\right)$

Napomena.

Mogli bismo zaključiti da je u slučaju da opće rješenje neodređenog sustava ima jedan parametar broj baznih rješenja jednak broju nepoznanica koje se pojavljuju u sustavu. Međutim, to nije istina. Općenito je u tom slučaju broj baznih rješenja najviše jednak broju nepoznanica.

Primjer 15.

Odredite sva bazična rješenja sustava

$$\begin{aligned} 6x_1 + 9x_2 - 2x_3 + 2x_4 &= 7 \\ 3x_1 + 4x_2 - x_3 + x_4 &= 1 \\ -2x_1 + 3x_2 + 8x_3 + 2x_4 &= 3 \end{aligned}$$

x_1	x_2	x_3	x_4	b	
6	9	-2	2	7	$+$
3	4	$\boxed{-1}$	1	1	$/\cdot(-2)$; $/\cdot 8$
-2	3	8	2	3	$+$
0	$\boxed{1}$	0	0	5	$/\cdot(-4)$; $/\cdot(-35)$
3	4	-1	1	1	$+$
22	35	0	10	11	$+$
0	1	0	0	5	
3	0	-1	1	-19	
22	0	0	10	-164	$/\cdot\frac{1}{2}$
0	1	0	0	5	
3	0	-1	1	-19	$+$
11	0	0	$\boxed{5}$	-82	$/\cdot\frac{-1}{5}$
0	1	0	0	5	
$\frac{4}{5}$	0	-1	0	$-\frac{13}{5}$	
11	0	0	5	-82	

Dakle, opće rješenje zadanog sustava je

$$x_1 = p$$
$$x_2 = 5$$
$$x_3 = \frac{13}{5} + \frac{4}{5}p$$
$$x_4 = -\frac{82}{5} - \frac{11}{5}p$$

pri čemu smo varijablu x_1 uzeli za parametar, a varijable x_2, x_3 i x_4 su bazične varijable. Naravno, mogli smo i neku drugu varijablu uzeti za parametar jer nam nitko ovdje na početku nije "nametnuo" koju od varijabli uzeti za parametar.

Da bismo pronašli sva bazična rješenja, trebamo u svakom koraku po jednu komponentu općeg rješenja izjednačiti s nulom, riješiti jednadžbu i pripadno rješenje uvrstiti u preostale komponente. Međutim, ako bismo ovdje drugu komponentu izjednačili sa nulom, tj. htjeli riješiti jednadžbu $x_2 = 0$, vidjeli bismo da ona nema rješenja jer je cijelo vrijeme x_2 konstantan i jednak 5. Dakle, u ovom slučaju imamo samo tri bazična rješenja

$$\left(0, 5, \frac{13}{5}, -\frac{82}{5}\right), \quad \left(-\frac{13}{4}, 5, 0, -\frac{37}{4}\right), \quad \left(-\frac{82}{11}, 5, -\frac{37}{11}, 0\right)$$

Primjer 16.

Odredite sva bazična rješenja sustava

$$
\begin{aligned}
6x_1 + 9x_2 - 2x_3 + 2x_4 &= 2\\
3x_1 + 4x_2 - x_3 + x_4 &= 1\\
-2x_1 + 3x_2 + 8x_3 + 2x_4 &= 3
\end{aligned}
$$

Primjer 16.

Odredite sva bazična rješenja sustava

$$\begin{aligned} 6x_1 + 9x_2 - 2x_3 + 2x_4 &= 2 \\ 3x_1 + 4x_2 - x_3 + x_4 &= 1 \\ -2x_1 + 3x_2 + 8x_3 + 2x_4 &= 3 \end{aligned}$$

Rješenje.

Gaussovim postupkom dobivamo

x_1	x_2	x_3	x_4	b	
6	9	-2	2	2	$+$
3	4	$\boxed{-1}$	1	1	$/\cdot(-2)$ $/\cdot 8$
-2	3	8	2	3	$+$
0	$\boxed{1}$	0	0	0	$/\cdot(-4)$ $/\cdot(-35)$
3	4	-1	1	1	$+$
22	35	0	10	11	$+$
0	1	0	0	0	
3	0	-1	1	1	$+$
22	0	0	$\boxed{10}$	11	$/\cdot\frac{-1}{10}$
0	1	0	0	0	
$\frac{4}{5}$	0	-1	0	$-\frac{1}{10}$	
22	0	0	10	11	

Dakle, opće rješenje zadanog sustava je

$$x_1 = p$$
$$x_2 = 0$$
$$x_3 = \frac{1}{10} + \frac{4}{5}p$$
$$x_4 = \frac{11}{10} - \frac{11}{5}p$$

pri čemu smo varijablu x_1 uzeli za parametar, a varijable x_2, x_3 i x_4 su bazične varijable. Naravno, mogli smo i neku drugu varijablu uzeti za parametar jer nam nitko ovdje na početku nije "nametnuo" koju od varijabli uzeti za parametar.

Da bismo pronašli sva bazična rješenja, trebamo u svakom koraku po jednu komponentu općeg rješenja izjednačiti s nulom, riješiti jednadžbu i pripadno rješenje uvrstiti u preostale komponente. Međutim, ako bismo ovdje drugu komponentu izjednačili sa nulom, tj. htjeli riješiti jednadžbu $x_2 = 0$, vidjeli bismo da ona ima beskonačno mnogo rješenja jer je cijelo vrijeme x_2 konstantan i jednak 0. Dakle, svaki $p \in \mathbb{R}$ zadovoljava ovu jednadžbu. To bi onda značilo da je svako rješenje ovog sustava bazično. Međutim, to nije tako. Sjetimo se definicije bazičnog rješenja.

Prema definiciji, bazično rješenje dobijemo kada u opće rješenje sve parametre postavimo na nulu. Kako kod rješavanja sustava možemo birati parametre na više načina, stoga i opće rješenje možemo dobiti na više načina, pa onda za svaki takav oblik općeg rješenja dobijemo po jedno bazično rješenje. Konkretno, u našem slučaju ispada da opće rješenje zadanog sustava možemo napisati samo na tri različita načina jer vidimo da imamo jedan parametar, ali varijablu x_2 ne možemo uzeti za parametar jer je ona cijelo vrijeme konstantna i jednaka 0.

Dakle, i u ovom slučaju imamo samo tri bazična rješenja koja dobijemo tako da prvu, treću i četvrtu komponentu općeg rješenja pojedinačno izjednačimo sa nulom, riješimo jednadžbu i rješenje uvrstimo u preostale komponente.

$$\left(0,0,\tfrac{1}{10},\tfrac{11}{10}\right),\quad \left(-\tfrac{1}{8},0,0,-\tfrac{11}{8}\right),\quad \left(\tfrac{1}{2},0,\tfrac{1}{2},0\right)$$

Uočimo da su po dvije komponente u bazičnim rješenjima jednake nula, iako imamo samo jedan parametar u općem rješenju. To je zbog toga što je u općem rješenju druga komponenta konstantna i jednaka nula.

Uočavamo da je broj bazičnih rješenja manji u slučaju da su neke od varijabli u općem rješenju konstantne, tj. da ne ovise o parametru. Međutim, čak i u slučaju da sve varijable u općem rješenju ovise o parametru, broj bazičnih rješenja može biti manji od broja varijabli koje se pojavljuju u sustavu.

Primjer 17.

Odredite sva bazična rješenja sustava

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 &= -1 \\ 2x_1 + 5x_2 + 2x_3 - 3x_4 &= -3 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 &= -2 \end{aligned}$$

x_1	x_2	x_3	x_4	b	
$\boxed{1}$	1	1	-1	-1	$/ \cdot (-2)$ $/ \cdot (-1)$
2	5	2	-3	-3	$+$
1	2	3	-2	-2	$+$
1	1	1	-1	-1	$+$
0	3	0	-1	-1	$+$
0	1	2	$\boxed{-1}$	-1	$/ \cdot (-1)$ $/ \cdot (-1)$
1	0	-1	0	0	
0	2	-2	0	0	$/ \cdot \frac{1}{2}$
0	1	2	-1	-1	
1	0	-1	0	0	
0	$\boxed{1}$	-1	0	0	$/ \cdot (-1)$
0	1	2	-1	-1	$+$
1	0	-1	0	0	
0	1	-1	0	0	
0	0	3	-1	-1	

Opće rješenje zadanog sustava je

$$x_1 = p$$

$$x_2 = p$$

$$x_3 = p$$

$$x_4 = 1 + 3p$$

U ovom slučaju imamo samo dva bazična rješenja, iako imamo četiri nepoznanice i sve one ovise o parametru, a to je zbog toga što je $x_1 = x_2 = x_3$.

Bazična rješenja su

$$(0, 0, 0, 1), \quad \left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, 0\right).$$

Primjer 18.

Odredite sva bazična rješenja sustava

$$-2x - 3y + 3z = -8$$
$$x + y - z = 4$$

Primjer 18.

Odredite sva bazična rješenja sustava

$$-2x - 3y + 3z = -8$$
$$x + y - z = 4$$

Rješenje.

$$\begin{array}{ccc|cl}
x & y & z & b & \\
\hline
-2 & -3 & 3 & -8 & \leftarrow + \\
\boxed{1} & 1 & -1 & 4 & / \cdot 2 \\
\hline
0 & -1 & \boxed{1} & 0 & \\
1 & 1 & -1 & 4 & \leftarrow + \\
\hline
0 & -1 & 1 & 0 & \\
1 & 0 & 0 & 4 &
\end{array}$$

Opće rješenje sustava je

$$x = 4$$

$$y = p$$

$$z = p$$

U ovom slučaju imamo samo jedno bazično rješenje, iako imamo tri nepoznanice. To je zbog toga što je varijabla x konstantna, a $y = z$, pa opće rješenje zadanog sustava možemo prikazati na samo jedan način. Bazično rješenje je $(4, 0, 0)$.

Primjer 19.

Odredite sva bazična rješenja sustava

$$4x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 5$$
$$3x_1 - 2x_2 + 8x_3 - x_4 = -1$$
$$x_1 - 12x_2 + 26x_3 - 5x_4 = -13$$

Primjer 19.

Odredite sva bazična rješenja sustava

$$4x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 5$$
$$3x_1 - 2x_2 + 8x_3 - x_4 = -1$$
$$x_1 - 12x_2 + 26x_3 - 5x_4 = -13$$

Rješenje.

Gaussovim postupkom dobivamo

x_1	x_2	x_3	x_4	b	
4	3	-1	$\boxed{1}$	5	$/\cdot 5$
3	-2	8	-1	-1	$+$
1	-12	26	-5	-13	$+$
4	3	-1	1	5	$+$
7	$\boxed{1}$	7	0	4	$/\cdot(-3)$ $/\cdot(-3)$
21	3	21	0	12	$+$
-17	0	-22	1	-7	
7	1	7	0	4	
0	0	0	0	0	$\longrightarrow$ suvišna jednadžba
-17	0	-22	1	-7	
7	1	7	0	4	

Opće rješenje zadanog sustava je

$$x_1 = u$$

$$x_2 = 4 - 7u - 7v$$

$$x_3 = v$$

$$x_4 = -7 + 17u + 22v$$

pri čemu smo varijable x_1 i x_3 uzeli za parametre, a varijable x_2 i x_4 su bazične varijable. Naravno, kako nam na početku ništa nije bilo "nametnuto", mogli smo i neke druge varijable uzeti za parametre.

Uočavamo da su nam ovdje bila potrebna dva parametra. U prethodnim primjerima smo isto imali sustav od tri linearne jednadžbe s četiri nepoznanice, ali nam je bio potreban samo jedan parametar. Ovdje su potrebna dva parametra jer smo u toku rješavanja sustava Gaussovim postupkom uočili da imamo jednu suvišnu jednadžbu (tj. jednadžbu koja se može dobiti iz preostalih jednadžbi sustava pomoću elementarnih transformacija), odnosno da imamo samo dvije nezavisne jednadžbe.

Nakon ovog primjera, u ovom trenutku možemo i otkriti "tajnu" kako znati koliko parametara treba biti u općem rješenju rješivog sustava.

Naime, vrijedi

U rješivom sustavu je

broj parametara $=$ broj nepoznanica $-$ broj nezavisnih jednadžbi

Ova tvrdnja je zapravo posljedica Kronecker-Capellijevog teorema kojeg ćemo uskoro obraditi.

U našem slučaju imamo tri jednažbe s četiri nepoznanice, ali jedna jednadžba je viška pa imamo zapravo dvije nezavisne jednadžbe. Stoga je broj parametara jednak $4-2=2$. U većini prethodnih primjera smo isto imali tri jednadžbe s četiri nepoznanice, ali sve tri jednadžbe su bile nezavisne, pa je broj parametara bio jednak $4-3=1$.

Ako imamo zadani sustav linearnih jednadžbi, na početku je općenito teško znati koliko zapravo imamo nezavisnih jednadžbi, pa je teško saznati i broj potrebnih parametara. Međutim, u toku rješavanja sustava Gaussovim postupkom mi otkrivamo suvišne jednadžbe i na kraju nam zapravo preostaju samo nezavisne jednadžbe pa na samom kraju mi saznajemo koliko nam parametara treba u općem rješenju. Vidjet ćemo kasnije na jednom primjeru kako čak možemo otkriti Gaussovim postupkom da li je sustav kontradiktoran.

Vratimo se sada bazičnim rješenjima zadanog sustava.

Opće rješenje smo dobili u obliku

$$
\begin{aligned}
x_1 &= u \\
x_2 &= 4 - 7u - 7v \\
x_3 &= v \\
x_4 &= -7 + 17u + 22v
\end{aligned}
$$

pri čemu smo varijable x_1 i x_3 uzeli za parametre.

Bazično rješenje dobijemo kada parametre postavimo na nulu, tj. za $u = 0$, $v = 0$. Dakle, jedno bazično rješenje je $(0, 4, 0, -7)$.

Međutim, tražimo sva bazična rješenja. Pitamo se na koliko različitih načina možemo dobiti opće rješenje zadanog sustava, odnosno na koliko različitih načina možemo od četiri varijable odabrati dvije za parametre. To možemo napraviti najviše na $\binom{4}{2} = 6$ načina. Konkretno ovdje, to možemo napraviti točno na 6 načina.

Ako varijable x_1 i x_2 uzmemo za parametre, tada opće rješenje dobijemo u obliku

$$x_1 = u$$

$$x_2 = v$$

$$x_3 = \frac{4}{7} - u - \frac{1}{7}v$$

$$x_4 = \frac{39}{7} - 5u - \frac{22}{7}v$$

Pripadano bazično rješenje dobijemo za $u = 0$, $v = 0$

$$\left(0, 0, \frac{4}{7}, \frac{39}{7}\right)$$

Ako varijable x_1 i x_3 uzmemo za parametre, tada opće rješenje dobijemo u obliku

$$\begin{aligned} x_1 &= u \\ x_2 &= 4 - 7u - 7v \\ x_3 &= v \\ x_4 &= -7 + 17u + 22v \end{aligned}$$

Pripadano bazično rješenje dobijemo za $u = 0$, $v = 0$

$$(0, 4, 0, -7)$$

Ako varijable x_1 i x_4 uzmemo za parametre, tada opće rješenje dobijemo u obliku

$$\begin{aligned}
x_1 &= u \\
x_2 &= \frac{39}{22} - \frac{35}{22}u - \frac{7}{22}v \\
x_3 &= \frac{7}{22} - \frac{17}{22}u + \frac{1}{22}v \\
x_4 &= v
\end{aligned}$$

Pripadano bazično rješenje dobijemo za $u = 0$, $v = 0$

$$\left(0, \frac{39}{22}, \frac{7}{22}, 0\right)$$

Ako varijable x_2 i x_3 uzmemo za parametre, tada opće rješenje dobijemo u obliku

$$x_1 = \frac{4}{7} - \frac{1}{7}u - v$$

$$x_2 = u$$

$$x_3 = v$$

$$x_4 = \frac{19}{7} - \frac{17}{7}u + 5v$$

Pripadano bazično rješenje dobijemo za $u = 0$, $v = 0$

$$\left(\frac{4}{7}, 0, 0, \frac{19}{7}\right)$$

Ako varijable x_2 i x_4 uzmemo za parametre, tada opće rješenje dobijemo u obliku

$$x_1 = \frac{39}{35} - \frac{22}{35}u - \frac{1}{5}v$$

$$x_2 = u$$

$$x_3 = -\frac{19}{35} + \frac{17}{35}u + \frac{1}{5}v$$

$$x_4 = v$$

Pripadano bazično rješenje dobijemo za $u = 0$, $v = 0$

$$\left(\frac{39}{35}, 0, -\frac{19}{35}, 0\right)$$

Ako varijable x_3 i x_4 uzmemo za parametre, tada opće rješenje dobijemo u obliku

$$
\begin{aligned}
x_1 &= \frac{7}{17} - \frac{22}{17}u + \frac{1}{17}v \\
x_2 &= \frac{19}{17} + \frac{35}{17}u - \frac{7}{17}v \\
x_3 &= u \\
x_4 &= v
\end{aligned}
$$

Pripadano bazično rješenje dobijemo za $u = 0$, $v = 0$

$$\left(\frac{7}{17}, \frac{19}{17}, 0, 0\right)$$

Dakle, imamo ukupno šest bazičnih rješenja

$$\left(0,0,\tfrac{4}{7},\tfrac{39}{7}\right),(0,4,0,-7),\left(0,\tfrac{39}{22},\tfrac{7}{22},0\right),$$

$$\left(\tfrac{4}{7},0,0,\tfrac{19}{7}\right),\left(\tfrac{39}{35},0,-\tfrac{19}{35},0\right),\left(\tfrac{7}{17},\tfrac{19}{17},0,0\right).$$

Da li smo mogli sva bazična rješenja dobiti iz jednog oblika općeg rješenja sustava, a ne da tražimo sve moguće oblike općeg rješenja?

Odgovor je potvrdan. Kao što smo u slučaju jednog parametra po jednu komponentu općeg rješenja izjednačavali s nulom, u slučaju dva parametra moramo po dvije komponente izjednačavati s nulom, riješiti sustav dvije linearne jednadžbe s dvije nepoznanice i rješenje sustava uvrstiti u preostale komponente općeg rješenja.

Uzmimo, npr. opće rješenje sustava u kojemu su varijable x_1 i x_3 parametri.

$$x_1 = u$$

$$x_2 = 4 - 7u - 7v$$

$$x_3 = v$$

$$x_4 = -7 + 17u + 22v$$

Jedno bazično rješenje dobijemo kada prve dvije komponente izjednačimo s nulom, tj.

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 0.$$

Dobivamo sustav

$$u = 0$$
$$7u + 7v = 4$$

čije je rješenje $u = 0$, $v = \frac{4}{7}$.

Pripadno bazično rješenje je

$$\left(0, 0, \tfrac{4}{7}, \tfrac{39}{7}\right)$$

Drugo bazično rješenje dobijemo kada prvu i treću komponentu izjednačimo s nulom, tj.

$$x_1 = 0, \quad x_3 = 0.$$

Dobivamo sustav

$$u = 0$$
$$v = 0$$

čije je rješenje $u = 0$, $v = 0$.

Pripadno bazično rješenje je

$$(0, 4, 0, -7)$$

Treće bazično rješenje dobijemo kada prvu i četvrtu komponentu izjednačimo s nulom, tj.

$$x_1 = 0, \quad x_4 = 0.$$

Dobivamo sustav

$$\begin{aligned} u &= 0 \\ 17u + 22v &= 7 \end{aligned}$$

čije je rješenje $u = 0$, $v = \frac{7}{22}$.

Pripadno bazično rješenje je

$$\left(0, \frac{39}{22}, \frac{7}{22}, 0\right)$$

Četvrto bazično rješenje dobijemo kada drugu i treću komponentu izjednačimo s nulom, tj.

$$x_2 = 0, \quad x_3 = 0.$$

Dobivamo sustav

$$\begin{aligned} 7u + 7v &= 4 \\ v &= 0 \end{aligned}$$

čije je rješenje $u = \frac{4}{7}$, $v = 0$.

Pripadno bazično rješenje je

$$\left(\tfrac{4}{7}, 0, 0, \tfrac{19}{7}\right)$$

Peto bazično rješenje dobijemo kada drugu i četvrtu komponentu izjednačimo s nulom, tj.

$$x_2 = 0, \quad x_4 = 0.$$

Dobivamo sustav

$$\begin{aligned} 7u + 7v &= 4 \\ 17u + 22v &= 7 \end{aligned}$$

čije je rješenje $u = \frac{39}{35}$, $v = -\frac{19}{35}$.

Pripadno bazično rješenje je

$$\left(\tfrac{39}{35}, 0, -\tfrac{19}{35}, 0\right)$$

Šesto bazično rješenje dobijemo kada treću i četvrtu komponentu izjednačimo s nulom, tj.

$$x_3 = 0, \quad x_4 = 0.$$

Dobivamo sustav

$$\begin{aligned} v &= 0 \\ 17u + 22v &= 7 \end{aligned}$$

čije je rješenje $u = \frac{7}{17}$, $v = 0$.

Pripadno bazično rješenje je

$$\left(\frac{7}{17}, \frac{19}{17}, 0, 0\right)$$

Bazično rješenje, dva parametra

Jednostavno rečeno, ako opće rješenje neodređenog sustava ima dva parametra, tada je bazično rješenje ono partikularno rješenje kojemu su barem dvije komponente jednake nula.

Općenito, ako imamo sustav linearnih jednadžbi s n nepoznanica čije opće rješenje ima dva parametra, tada je broj bazičnih rješenja najviše jednak $\binom{n}{2}$, tj. broju načina na koji možemo izabrati dvije varijable za parametre od n ponuđenih. U nekim situacijama neke varijable će u općem rješenju biti konstantne pa ih nećemo moći uzeti za parametre, ili će neke biti međusobno jednake, itd. U tim situacijama je onda broj bazičnih rješenja strogo manji od $\binom{n}{2}$.

U prethodnom primjeru smo imali 4 nepoznanice pa je broj bazičnih rješenja bio jednak najviše $\binom{4}{2} = 6$, zapravo je bio jednak točno 6. Pogledajmo neke primjere u kojima je broj bazičnih rješenja strogo manji od $\binom{n}{2}$.

Primjer 20.

Odredite sva bazična rješenja sustava

$$\begin{aligned} -3x_1 - 9x_2 - 17x_3 + 3x_4 &= 2 \\ x_1 + 3x_2 + 6x_3 - x_4 &= 1 \end{aligned}$$

U prethodnom primjeru smo imali 4 nepoznanice pa je broj bazičnih rješenja bio jednak najviše $\binom{4}{2} = 6$, zapravo je bio jednak točno 6. Pogledajmo neke primjere u kojima je broj bazičnih rješenja strogo manji od $\binom{n}{2}$.

Primjer 20.

Odredite sva bazična rješenja sustava

$$\begin{aligned} -3x_1 - 9x_2 - 17x_3 + 3x_4 &= 2 \\ x_1 + 3x_2 + 6x_3 - x_4 &= 1 \end{aligned}$$

Rješenje.

Gaussovim postupkom dobivamo

x_1	x_2	x_3	x_4	b	
-3	-9	-17	3	2	$+$
$\boxed{1}$	3	6	-1	1	$/ \cdot 3$
0	0	$\boxed{1}$	0	5	$/ \cdot (-6)$
1	3	6	-1	1	$+$
0	0	1	0	5	
1	3	0	-1	-29	

Stoga je opće rješenje sustava

$$x_1 = u$$

$$x_2 = v$$

$$x_3 = 5$$

$$x_4 = 29 + u + 3v$$

U ovom slučaju je varijabla x_3 konstantna u općem rješenju pa ćemo imati samo tri bazična rješenja.

$$(0,0,5,29),\left(0,-\frac{29}{3},5,0\right),\left(-29,0,5,0\right)$$

Zašto se broj bazičnih rješenja smanjio čak za tri, iako je samo jedna varijabla konstantna? Sjećamo se da se u sličnom slučaju jednog parametra broj bazičnih rješenja smanjio samo za jedan. Poanta je da ovdje biramo po dvije varijable za parametre, a kako je varijabla x_3 konstantna, otpadaju nam mogućnosti da varijable x_1 i x_3, x_2 i x_3, x_3 i x_4 budu parametri pa nam preostaju još samo tri mogućnosti za izbor parametara.

Primjer 21.

Odredite sva bazična rješenja sustava

$$2x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 = 2$$
$$-3x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 = -3$$

Primjer 21.

Odredite sva bazična rješenja sustava

$$2x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 = 2$$
$$-3x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 = -3$$

Rješenje.

x_1	x_2	x_3	x_4	b
2	2	−1	$\boxed{-1}$	2
−3	−3	2	1	−3
2	2	−1	−1	2
−1	−1	$\boxed{1}$	0	−1
1	1	0	−1	1
−1	−1	1	0	−1

+
+

Opće rješenje sustava je

$$
\begin{aligned}
x_1 &= u \\
x_2 &= v \\
x_3 &= -1 + u + v \\
x_4 &= -1 + u + v
\end{aligned}
$$

Da bismo dobili sva bazična rješenja, moramo po dvije komponente općeg rješenja izjednačiti s nulom, riješiti sustav i rješenje uvrstiti u preostale komponente. Međutim, kada bismo izjednačili treću i četvrtu komponentu s nulom dobili bismo sustav koji ima beskonačno mnogo rješenja jer su varijable x_3 i x_4 jednake. Da li zaista zadani sustav ima beskonačno mnogo bazičnih rješenja?

Sjetimo se opet definicije baričnog rješenja. Bazično rješenje je ono partikularno rješenje koje dobijemo iz nekog općeg rješenja kada sve parametre postavimo na nulu. Međutim, kako u općem rješenju imamo dva parametra (konkretno, ovdje su to varijable x_1 i x_2) i četiri varijable, zadani sustav može imati najviše $\binom{4}{2} = 6$ bazičnih rješenja. Kako iz općeg rješenja vidimo da su varijable x_3 i x_4 međusobno jednake, njih ne možemo istovremeno uzeti za parametre (ne možemo staviti $x_3 = u$, $x_4 = v$, jer je $x_3 = x_4$). Stoga nam otpada mogućnost da x_3 i x_4 istovremeno budu parametri, a ostalih pet mogućnosti za parametre može proći. Zato niti ne možemo istovremeno treću i četvrtu komponentu općeg rješenja izjednačavati sa nulom.

Stoga bi zadani sustav na prvi pogled imao 5 bazičnih rješenja. Međutim, ima ih samo tri jer dva su dvostruka jer je $x_3 = x_4$.

$$(0, 0, -1, -1), (0, 1, 0, 0), (1, 0, 0, 0)$$

Također, uočavamo da su po tri komponente jednake nula u bazičnim rješenjima, iako imamo samo dva parametra. To je opet zbog toga što je $x_3 = x_4$.

Zadatak 3.

Riješite prethodni sustav Gaussovim postupkom tako da neke druge varijable uzmete za parametre i uvjerite se da je nemoguće istovremeno uzeti varijable x_3 i x_4 za parametre. Kako se to vidi iz Gaussovog postupka?

U slučaju da imamo dva parametra u općem rješenju, broj bazičnih rješenja može biti manji i u slučaju da nema fiksnih varijabli i da nikoje dvije varijable nisu jednake. Pogledajmo primjer.

Primjer 22.

Odredite sva bazična rješenja sustava

$$x_1 + x_2 + 2x_3 - 3x_4 = -1$$
$$2x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 = 3$$

U slučaju da imamo dva parametra u općem rješenju, broj bazičnih rješenja može biti manji i u slučaju da nema fiksnih varijabli i da nikoje dvije varijable nisu jednake. Pogledajmo primjer.

Primjer 22.

Odredite sva bazična rješenja sustava

$$x_1 + x_2 + 2x_3 - 3x_4 = -1$$
$$2x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 = 3$$

Rješenje.

Gaussovim postupkom dobivamo

x_1	x_2	x_3	x_4	b	
1	1	2	-3	-1	+
2	2	$\boxed{-1}$	-1	3	$/\cdot 2$
5	5	0	-5	5	$/\cdot \frac{1}{5}$
2	2	-1	-1	3	
1	1	0	$\boxed{-1}$	1	$/\cdot(-1)$
2	2	-1	-1	3	+
1	1	0	-1	1	
1	1	-1	0	2	

Opće rješenje zadanog sustava je

$$x_1 = u$$

$$x_2 = v$$

$$x_3 = -2 + u + v$$

$$x_4 = -1 + u + v$$

Da bismo dobili sva bazična rješenja, moramo po dvije komponente općeg rješenja izjednačiti s nulom, riješiti sustav i rješenje uvrstiti u preostale komponente. Međutim, kada bismo izjednačili treću i četvrtu komponentu s nulom dobili bismo sustav

$$u + v = 2$$
$$u + v = 1$$

koji očito nema rješenja. Što to znači? To opet znači da ne možemo istovremeno uzeti varijable x_3 i x_4 za parametre jer se one razlikuju za konstantu (naime, $x_4 - x_3 = 1$, pa ne možemo staviti $x_3 = u$, $x_4 = v$ jer ih ne možemo proizvoljno birati; moramo paziti da se razlikuju za 1).

Preostalih pet mogućnosti izbora parametara može proći pa u ovom slučaju zadani sustav ima 5 bazičnih rješenja.

$$(0,0,-2,-1),(0,2,0,1),(0,1,-1,0),(2,0,0,1),(1,0,-1,0)$$

Zadatak 4.

Riješite prethodni sustav Gaussovim postupkom tako da neke druge varijable uzmete za parametre i uvjerite se da je nemoguće istovremeno uzeti varijable x_3 i x_4 za parametre. Kako se to vidi iz Gaussovog postupka?

Napomena.

Do sada smo detaljno proučavali bazična rješenja na primjerima sustava čije opće rješenje ima jedan ili dva parametra i vidjeli smo neke specifične situacije koje mogu nastupiti. Sasvim analogno se može dalje raditi sa sustavima čije opće rješenje ima tri ili više parametara i proučavati specifične situacije koje mogu nastupiti, a kojih ovdje može biti jako puno.

Općenito, ako imamo sustav linearnih jednadžbi sa n nepoznanica čije opće rješenje ima k parametara $(0 < k < n)$, tada taj sustav ima najviše $\binom{n}{k}$ bazičnih rješenja, što je jednako broju načina na koji možemo od n varijabli izabrati njih k za parametre.

Sva bazična rješenja dobijemo iz nekog općeg rješenja tako da po k njegovih komponenata izjednačavamo sa nulom, riješimo sustav i dobiveno rješenje uvrstimo u preostale komponente. Ako neki od tih sustava nema jedinstveno rješenje ili nema uopće rješenje, tada se radi o nekom specifičnom slučaju, a to znači da varijable koje smo izjednačili sa nulom da bismo dobili takav sustav, ne možemo istovremeno uzeti za parametre. U tom će slučaju broj bazičnih rješenja biti strogo manji od $\binom{n}{k}$.

Primjer 23.

Odredite sva bazična rješenja sustava

$$2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 5$$

$$4x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 10$$

Primjer 23.

Odredite sva bazična rješenja sustava

$$2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 5$$
$$4x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 10$$

Rješenje.

$$\begin{array}{cccc|cl}
x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & b & \\
\hline
2 & \boxed{1} & 1 & 1 & 5 & / \cdot (-2) \\
4 & 2 & 2 & 2 & 10 & \leftarrow + \\
\hline
2 & 1 & 1 & 1 & 5 & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \longrightarrow \text{suvišna jednadžba} \\
\hline
2 & 1 & 1 & 1 & 5 &
\end{array}$$

Opće rješenje zadanog sustava je

$$
\begin{aligned}
x_1 &= u \\
x_2 &= 5 - 2u - v - t \\
x_3 &= v \\
x_4 &= t
\end{aligned}
$$

gdje je x_2 bazična varijabla, a preostale varijable su parametri. Naime, imamo samo jednu nezavisnu jednadžbu, a broj nepoznanica je 4. Stoga je broj parametara jednak $4 - 1 = 3$. Baznih rješenja je najviše $\binom{4}{3} = 4$. Da bismo ih dobili, moramo po tri komponente općeg rješenja izjednačiti sa nulom, riješiti sustav i rješenje uvrstiti u preostale komponente.

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 0$$

Dobivamo sustav

$$\begin{aligned} u &= 0 \\ 5 - 2u - v - t &= 0 \\ v &= 0 \end{aligned}$$

Rješenje sustava je: $u = 0$, $v = 0$, $t = 5$

Pripadno bazično rješenje: $(0, 0, 0, 5)$

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 0, \quad x_4 = 0$$

Dobivamo sustav

$$\begin{aligned} u &= 0 \\ 5 - 2u - v - t &= 0 \\ t &= 0 \end{aligned}$$

Rješenje sustava je: $u = 0$, $v = 5$, $t = 0$

Pripadno bazično rješenje: $(0, 0, 5, 0)$

$$x_1 = 0, \quad x_3 = 0, \quad x_4 = 0$$

Dobivamo sustav

$$u = 0$$
$$v = 0$$
$$t = 0$$

Rješenje sustava je: $u = 0$, $v = 0$, $t = 0$

Pripadno bazično rješenje: $(0, 5, 0, 0)$

$$x_2 = 0, \quad x_3 = 0, \quad x_4 = 0$$

Dobivamo sustav

$$\begin{aligned} 5 - 2u - v - t &= 0 \\ v &= 0 \\ t &= 0 \end{aligned}$$

Rješenje sustava je: $u = \frac{5}{2}$, $v = 0$, $t = 0$

Pripadno bazično rješenje: $\left(\frac{5}{2}, 0, 0, 0\right)$

Pogledajmo sada kako pomoću Gaussovog postupka možemo otkriti da li je neki sustav kontradiktoran.

Primjer 24.

Riješite sustav

$$
\begin{aligned}
x_1 - 2x_2 + 2x_3 &= -5 \\
2x_1 + 4x_2 - x_3 &= 9 \\
8x_2 - 5x_3 &= 2
\end{aligned}
$$

Pogledajmo sada kako pomoću Gaussovog postupka možemo otkriti da li je neki sustav kontradiktoran.

Primjer 24.

Riješite sustav

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 2x_3 &= -5 \\ 2x_1 + 4x_2 - x_3 &= 9 \\ 8x_2 - 5x_3 &= 2 \end{aligned}$$

Rješenje.

Gaussovim postupkom dobivamo

x_1	x_2	x_3	b	
$\boxed{1}$	-2	2	-5	$/\cdot(-2)$
2	4	-1	9	$+$
0	8	-5	2	
1	-2	2	-5	
0	$\boxed{8}$	-5	19	$/\cdot(-1)$
0	8	-5	2	$+$
1	-2	2	-5	
0	8	-5	19	
0	0	0	-17	$\longrightarrow$ kontradikcija $(0\cdot x_1+0\cdot x_2+0\cdot x_3=-17)$

Sustav linearnih jednadžbi je kontradiktoran ako se tokom njegovog rješavanja Gausssovim postupkom pojavi neki redak koji se sastoji od samih nula s lijeve strane, a na desnoj strani je neki broj različit od nule.

Gaussov postupak je pogodan za rješavanje sustava linearnih jednadžbi bez obzira na odnos broja jednadžbi i broja varijabli. Pomoću inverzne matrice ili pomoću determinanti je moguće riješiti samo sustav u kojemu je broj jednadžbi jednak broju nepoznanica i čija je matrica sustava regularna.

Gaussov postupak

Gaussovim postupkom možemo riješiti bilo koji sustav linearnih jednadžbi bez obzira na odnos broja jednadžbi i broja nepoznanica i bez obzira da li je sustav određen, neodređen ili kontradiktoran.

Primjer 25.

Gaussovim postupkom riješite sustav

$$\begin{aligned} 8x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ -2x_1 + 4x_2 + 6x_3 &= 2 \\ 3x_1 + 6x_2 + 9x_3 &= 5 \end{aligned}$$

Rješenje.

x_1	x_2	x_3	b		
8	1	1	1		
-2	4	6	2	$/\cdot\frac{1}{2}$	
3	6	9	5		
8	$\boxed{1}$	1	1	$/\cdot(-2)$	$/\cdot(-6)$
-1	2	3	1	$+$	
3	6	9	5		$+$
8	1	1	1	$+$	
-17	0	$\boxed{1}$	-1	$/\cdot(-1)$	$/\cdot(-3)$
-45	0	3	-1		$+$
25	1	0	2		$+$
-17	0	1	-1	$+$	
$\boxed{6}$	0	0	2	$/\cdot\frac{17}{6}$	$/\cdot\frac{-25}{6}$
0	1	0	$-\frac{19}{3}$	$\longrightarrow x_2 = -\frac{19}{3}$	
0	0	1	$\frac{14}{3}$	$\longrightarrow x_3 = \frac{14}{3}$	
6	0	0	2	$\longrightarrow 6x_1 = 2 \longrightarrow x_1 = \frac{1}{3}$	

Dakle, zadani sustav ima jedinstveno rješenje

$$\left(\frac{1}{3}, -\frac{19}{3}, \frac{14}{3}\right).$$

Kako imamo tri nezavisne jednadžbe (nema suvišnih) i tri nepoznanice, broj parametara je jednak $3-3=0$, tj. sustav ima jedinstveno rješenje.

Primjer 26.

Gaussovim postupkom riješite sustav

$$\begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 - x_3 &= 1 \\ -4x_1 - 8x_2 + 2x_3 &= -2 \\ 14x_1 + 28x_2 - 7x_3 &= 7 \end{aligned}$$

Rješenje.

$$
\begin{array}{ccc|cl}
x_1 & x_2 & x_3 & b & \\
\hline
2 & 4 & \boxed{-1} & 1 & /\cdot 2 \qquad /\cdot(-7) \\
-4 & -8 & 2 & -2 & \leftarrow + \\
14 & 28 & -7 & 7 & \leftarrow + \\
\hline
2 & 4 & -1 & 1 & \\
0 & 0 & 0 & 0 & \longrightarrow \text{suvišna jednadžba} \\
0 & 0 & 0 & 0 & \longrightarrow \text{suvišna jednadžba} \\
\hline
2 & 4 & -1 & 1 &
\end{array}
$$

Dakle, početni sustav je ekvivalentan sa sustavom

$$2x_1 + 4x_2 - x_3 = 1$$

Stoga je opće rješenje početnog sustava

$$
\begin{aligned}
x_1 &= u \\
x_2 &= v \\
x_3 &= 2u + 4v - 1
\end{aligned}
$$

pri čemu smo varijable x_1 i x_2 uzeli za parametre.

Kako zapravo imamo samo jednu nezavisnu jednadžbu (ovdje su čak dvije bile suvišne) i tri nepoznanice, stoga je broj parametara jednak $3 - 1 = 2$.

Inverzna matrica – Gaussov postupak

Problem određivanja inverzne matrice može se svesti na rješavanje sustava linearnih jednadžbi tako da se u matričnu jednadžbu $AA^{-1} = I$ uvrsti nepoznata matrica A^{-1} po elementima, izmnoži se lijeva strana i koristi se jednakost matrica. Na taj način dobijemo sustav od n^2 linearnih jednadžbi s n^2 nepoznanica u kojemu su nepoznanice nepoznati elementi matrice A^{-1}, a n je red matrice A.

Uočimo da iz

$$AA^{-1} = I$$

i definicije množenja matrica slijedi da se tako dobiveni sustav od n^2 linearnih jednadžbi s n^2 nepoznanica može podijeliti na n međusobno neovisnih sustava od n linearnih jednadžbi s n nepoznanica čije su matrice sustava jednake matrici A. Nepoznice u i-tom takvom sustavu su nepoznati elementi iz i-tog stupca matrice A^{-1}, a slobodni koeficijenti su svi nula osim jednog koji je jednak 1. Svi ti sustavi se mogu riješiti odjednom pomoću Gaussovog postupka i na taj način se odrede nepoznati elementi matrice A^{-1}.

Pogledajmo na primjeru kako se to radi.

Primjer 27.

Odredite A^{-1} *ako je* $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

Primjer 27.

Odredite A^{-1} *ako je* $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

Rješenje.

Po definiciji treba biti $AA^{-1} = I$. Stavimo

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

i uvrstimo u gornju jednadžbu. Dobivamo

$$\begin{bmatrix} a+2d+g & b+2e+h & c+2f+i \\ 2d+3g & 2e+3h & 2f+3i \\ a-d & b-e & c-f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Iz definicije jednakosti matrica slijedi

$$
\begin{array}{rrr}
a+2d+g=1 & b+2e+h=0 & c+2f+i=0 \\
2d+3g=0 & 2e+3h=1 & 2f+3i=0 \\
a-d=0 & b-e=0 & c-f=1
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ccc|ccc}
 & & & & & \\
\hline
1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\
1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ccc|cccl}
\boxed{1} & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & /\cdot(-1) \\
0 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 & \\
1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & + \\
\hline
1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & + \\
0 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 & + \\
0 & -3 & \boxed{-1} & -1 & 0 & 1 & /\cdot 3 \\
\hline
1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & \\
0 & -7 & 0 & -3 & 1 & 3 & /\cdot \frac{-1}{7} \\
0 & -3 & -1 & -1 & 0 & 1 & /\cdot(-1) \\
\hline
1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & + \\
0 & \boxed{1} & 0 & \frac{3}{7} & -\frac{1}{7} & -\frac{3}{7} & /\cdot(-3) \\
0 & 3 & 1 & 1 & 0 & -1 & + \\
\hline
1 & 0 & 0 & \frac{3}{7} & -\frac{1}{7} & \frac{4}{7} & \\
0 & 1 & 0 & \frac{3}{7} & -\frac{1}{7} & -\frac{3}{7} & \\
0 & 0 & 1 & -\frac{2}{7} & \frac{3}{7} & \frac{2}{7} &
\end{array}
$$

Iz toga slijedi da je

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{3}{7} & -\frac{1}{7} & \frac{4}{7} \\ \frac{3}{7} & -\frac{1}{7} & -\frac{3}{7} \\ -\frac{2}{7} & \frac{3}{7} & \frac{2}{7} \end{bmatrix}$$

Postupak računanja inverzne matrice

Pomoću elementarnih transformacija koje se koriste u Gaussovom postupku može se odrediti inverzna matrica. Postupak invertiranja matrice A n-tog reda je sljedeći:

1. Formira se tablica s n redova i $2n$ stupaca koja u lijevom dijelu sadrži matricu koja se želi invertirati, a na desnoj strani je jedinična matrica n-tog reda
2. Provode se elementarne transformacije po recima tako dugo dok se na lijevoj strani ne dobije jedinična matrica. Matrica koju dobijemo na desnoj strani je inverzna matrica zadane matrice.

$$\begin{array}{|c|c|}\hline A & I \\ \hline\end{array} \xrightarrow{\text{elementarne transformacije}} \begin{array}{|c|c|}\hline I & A^{-1} \\ \hline\end{array}$$

Ovaj postupak invertiranja je posebno efikasan pri invertiranju matrica reda većeg od tri jer za matrice velikog reda postupak invertiranja preko adjunkte zahtijeva računanje velikog broja minori velikog reda, što je jako nespretno čak i za računalo.

Primjer 28.

Odredite A^{-1} *ako je* $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & 6 & 1 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

Primjer 28.

Odredite A^{-1} *ako je* $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & 6 & 1 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

Rješenje.

$$\begin{array}{cccc|cccc|l}
\boxed{1} & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & / \cdot (-2) \quad / \cdot (-4) \\
0 & 3 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & \\
2 & -2 & 6 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & \leftarrow + \\
4 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & \leftarrow + \\
\hline
1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \\
0 & 3 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & \leftarrow + \\
0 & -6 & 8 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 & \leftarrow + \\
0 & -6 & 7 & \boxed{1} & -4 & 0 & 0 & 1 & / \cdot (-1) \quad / \cdot (-2) \\
\hline
\end{array}$$

1	2	−1	0	1	0	0	0	
0	15	−13	0	8	1	0	−2	
0	0	$\boxed{1}$	0	2	0	1	−1	$/\cdot(-7)$ $/\cdot 13$
0	−6	7	1	−4	0	0	1	
1	2	0	0	3	0	1	−1	
0	15	0	0	34	1	13	−15	$/\cdot\frac{1}{15}$
0	0	1	0	2	0	1	−1	
0	−6	0	1	−18	0	−7	8	
1	2	0	0	3	0	1	−1	
0	$\boxed{1}$	0	0	$\frac{34}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{13}{15}$	−1	$/\cdot(-2)$ $/\cdot 6$
0	0	1	0	2	0	1	−1	
0	−6	0	1	−18	0	−7	8	

$$\begin{array}{cccc|cccc}
 & & & & & & & \\
\hline
1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{23}{15} & -\frac{2}{15} & -\frac{11}{15} & 1 \\
0 & 1 & 0 & 0 & \frac{34}{15} & \frac{1}{15} & \frac{13}{15} & -1 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{22}{5} & \frac{2}{5} & -\frac{9}{5} & 2
\end{array}$$

Dakle, dobili smo da je

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{23}{15} & -\frac{2}{15} & -\frac{11}{15} & 1 \\ \frac{34}{15} & \frac{1}{15} & \frac{13}{15} & -1 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ -\frac{22}{5} & \frac{2}{5} & -\frac{9}{5} & 2 \end{bmatrix}$$

Rang matrice

Neka je A matrica tipa (m, n). Ako se iz matrice A izbaci $m-k$ redaka i $n-k$ stupaca, ostane kvadratna matrica reda k čiju determinantu zovemo **subdeterminanta** k-tog reda matrice A.

Na primjer, uzmemo li matricu A tipa $(3, 4)$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -8 \\ 4 & 8 & -2 & 9 \\ 5 & 6 & 7 & -4 \end{bmatrix},$$

tada ona nema sudeterminanti reda većeg od tri zbog toga jer ima samo tri retka.

Sudetereminante reda 3 (moramo izbaciti nula redaka i jedan stupac) matrice A su

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 8 & -2 \\ 5 & 6 & 7 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 2 & -8 \\ 4 & 8 & 9 \\ 5 & 6 & -4 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 3 & -8 \\ 4 & -2 & 9 \\ 5 & 7 & -4 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 3 & -8 \\ 8 & -2 & 9 \\ 6 & 7 & -4 \end{vmatrix}$$

Neke subdeterminante reda 2 (moramo izbaciti jedan redak i dva stupca) matrice A su

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 8 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & -8 \\ 6 & -4 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 8 & -2 \\ 6 & 7 \end{vmatrix}$$

Pronađite preostale sudeterminante reda 2 matrice A. Ima ih ukupno 18.

Dakle, mogli bismo još reći da neku subdeterminantu reda k u matrici tipa (m, n), pri čemu je $k \leqslant \min\{m, n\}$, dobijemo tako da uzmemo nekih k redaka i k stupaca u zadanoj matrici i izdvojimo elemente koji se nalaze na njihovim presjecima tako da te elemente ostavimo u istom relativnom položaju u kojemu su bili u matrici A.

Kažemo da matrica A **ima rang** k i pišemo $r(A) = k$ ako je k najveći prirodni broj takav da u matrici A postoji subdeterminanta reda k različita od nule.

Dakle, samo računanje ranga matrice svodi se na računanje determinanti s time da moramo početi s računanjem subdeterminanti najvećeg mogućeg reda koje se mogu pojaviti u zadanoj matrici. Znamo da je računanje determinanti dugotrajan i mukotrpan posao već za determinate malog reda pa u slučaju da matrica ima puno redaka i stupaca, računanje njezinog ranga po definiciji bio bi mukotrpan posao.

Na svu sreću, vidjet ćemo da neke operacije na matrici ne mijenjaju njezin rang, a one upravo uvelike olakšavaju računanje ranga.

Evo nekoliko činjenica vezanih uz rang matrice koje direktno slijede iz definicije:

1. Samo nulmatrice imaju rang jednak nuli.
2. Kvadratna matrica reda n je regularna akko je $r(A) = n$.
3. Ako je A matrica tipa (m, n), tada je $r(A) \leqslant \min\{m, n\}$.

Da bismo lakše računali rang matrice, koristimo **elementarne operacije** na redovima (stupcima) matrice:

1. Zamjena dvaju redaka (stupaca) matrice
2. Množenje retka (stupca) matrice realnim brojem različitim od nule
3. Pribrajanje umnoška nekog retka (stupca) realnim brojem nekom drugom retku (stupcu)

Propozicija 2.

Elementarne operacije ne mijenjaju rang matrice.

Dokaz.

Dokaz slijedi iz definicije ranga i svojstava determinanti. Npr., zašto zamjena dvaju redaka ne mijenja rang matrice. Ako je matrica A ranga k, to znači da u njoj postoji subdeterminanta reda k koja je različita od nule i sve subdeterminante većeg reda su jednake nuli. Ako smo matrici A zamijenili dva retka, tada smo možda i toj subdeterminanti zamijenili dva retka. No, zamjenom dva retka determinanta mijenja samo predznak, pa će i u novonastaloj matrici to biti subdeterminanta najvećeg reda različita od nule. Slično se dokaže i za preostale elementarne operacije.

Neka su A i B matrice istog tipa. Kažemo da je matrica A **ekvivalentna** s matricom B i pišemo $A \sim B$ akko je $r(A) = r(B)$.

Zadatak 5.

Dokažite da je relacija $\sim$ relacija ekvivalencije na skupu svih matrica istog tipa. Što su klase ekvivalencije?

Da bismo lakše izračunali rang matrice, najprije na nju primijenimo elementarne operacije jer one ne mijenjaju rang. Cilj nam je dobiti u matrici što više nula kako bismo čim lakše računali subdeterminante. U biti, cilj nam je dobiti što je moguće veću regularnu trokutastu podmatricu.

Primjer 29.

Izračunajte rang matrice

$$\begin{bmatrix} -8 & -5 & 7 & -2 \\ 7 & 5 & 9 & 5 \\ 1 & 0 & -16 & -3 \\ 8 & 5 & -7 & 2 \end{bmatrix}$$

Rješenje.

$$\begin{bmatrix} -8 & -5 & 7 & -2 \\ 7 & 5 & 9 & 5 \\ 1 & 0 & -16 & -3 \\ 8 & 5 & -7 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -8 & -5 & 7 & -2 \\ 7 & 5 & 9 & 5 \\ 1 & 0 & -16 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} -8 & -5 & 7 & -2 \\ 7 & 5 & 9 & 5 \\ 8 & 5 & -7 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -8 & -5 & 7 & -2 \\ 7 & 5 & 9 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

U posljednjoj matrici imamo dva retka sa samim nulama, pa je otuda jasno da je najveća subdeterminanta različita od nule reda 2, npr. $\begin{vmatrix} -8 & -5 \\ 7 & 5 \end{vmatrix}$, pa je rang početne matrice jednak 2.

Kronecker-Capellijev teorem

Svaki se sustav linearnih jednadžbi može zapisati u matričnom obliku $AX = B$, gdje je A matrica sustava, X jednostupčana matrica nepoznanica, a B jednostupčana matrica slobodnih koeficijenata.

Poznato nam je od prije da sustav ima jedinstveno rješenje $X = A^{-1}B$ u slučaju da je A regularna matrica. Međutim, postavlja se pitanje uvjeta koje trebaju zadovoljiti matrice A i B da bi sustav imao rješenje, tj. da bi bio **konzistentan**. Pri tome A ne mora nužno biti kvadratna matrica. Odgovor na ovaj problem usko je vezan uz pojam ranga matrice.

Proširena matrica sustava $AX = B$ je matrica A_p koja ima jedan stupac više od matrice A i u taj stupac je smještena matrica B, tj.

$$A_p = \left[\begin{array}{c|c} A & B \end{array}\right].$$

Evo konačno teorema kojeg smo toliko puta do sada spominjali, a koji u potpunosti daje odgovor na pitanje rješivosti sustava linearnih jednadžbi.

Teorem 1 (Kronecker-Capelli).

Sustav linearnih jednadžbi ima rješenje akko rang matrice sustava jednak rangu proširene matrice sustava, tj. $r(A) = r(A_p)$.

Dokaz.

$\boxed{\Rightarrow}$

Pretpostavimo da sustav linearnih jednadžbi ima rješenje. Tada matrična jednadžba $AX = B$ ima rješenje $X = C = [c_k]$, tj. vrijedi

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} c_k = b_i, \quad i = 1, 2, \ldots, m.$$

Proširena matrica je tada oblika

$$A_p = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & \sum c_k a_{1k} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & \sum c_k a_{mk} \end{bmatrix}$$

Posljednji stupac u matrici A_p je linearna kombinacija stupaca matrice A. Kako je matrica A_p dobivena iz matrice A dodavanjem stupca matrice B, rang matrice A_p može jedino biti jednak $r(A)$ ili $r(A)+1$ (dodavanjem redaka ili stupaca rang se ne može smanjiti). Kada bi bilo $r(A_p)=r(A)+1$, tada bi u matrici A_p mogli naći subdeterminantu reda $r(A)+1$ različitu od nule. No, tada bi ta subdeterminanta morala sadržavati stupac matrice B (jer bi u protivnom bilo $r(A)=r(A)+1$, što je nemoguće). No, taj stupac je linearna kombinacija stupaca matrice A pa iz svojstava determinanti slijedi da bi ta subedeterminanta bila jednaka nula. Dakle, zaista je $r(A_p)=r(A)$.

$\Leftarrow$

Pretpostavimo da je $r(A_p) = r(A) = r$. Tada A ima r linearno nezavisnih stupaca, tj. u matrici A postoji subdeterminanta reda r različita od nule. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je to prvih r stupaca. Kako je po pretpostavci $r(A_p) = r(A)$, tada je u proširenoj matrici A_p posljednji stupac linearna kombinacija tih r stupaca, tj. postoje $c_1, \ldots, c_r \in \mathbb{R}$ takvi da je

$$b_i = c_1 a_{i1} + \cdots + c_r a_{ir} + c_{r+1} a_{i,r+1} + \cdots + c_n a_{in}$$

pri čemu je $c_{r+1} = \cdots = c_n = 0$.

Stoga je $B = AC$, gdje je $C = [c_k]$ jednostupčana matrica. Dakle, $X = C$ je rješenje matrične jednadžbe $AX = B$. ♡

Korolar 1.

Pretpostavimo da imamo sustav m linearnih jednadžbi s n nepoznanica.

1 *Ako je pritom $r(A_p) = r(A) = n$, onda je sustav određen (ima jedinstveno rješenje).*

2 *Ako je $r(A_p) = r(A) < n$, onda je sustav neodređen.*

3 *Ako je $r(A_p) > n$, onda je sustav kontradiktoran.*

Homogeni sustav linearnih jednadžbi

Linearni sustav kod kojeg su svi slobodni koeficijenti jednaki nula zove se **homogeni sustav**. Homogeni sustav uvijek ima barem jedno rješenje $(0, 0, \dots, 0)$ koje zovemo **trivijalno rješenje**.

Sljedeći teorem je posljedica Kronecker-Capellijevog teorema.

Teorem 2 (Roucheov teorem).

Homogeni sustav $AX = O$ *u kojemu je broj jednadžbi jednak broju nepoznanica ima i netrivijalnih rješenja akko* $\det A = 0$.

Primjer 30.

Odredite vrijednosti realnog parametra a tako da sustav

$$
\begin{aligned}
2x_1 + 2x_2 - x_3 &= 0\\
3x_1 + (3+a)x_2 - 3x_3 &= 0\\
(a-1)x_1 + 4x_2 - 3x_3 &= 0
\end{aligned}
$$

ima i netrivijalnih rješenja. Nađite opće rješenje u tim slučajevima.

Primjer 30.

Odredite vrijednosti realnog parametra a tako da sustav

$$\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 - x_3 &= 0 \\ 3x_1 + (3+a)x_2 - 3x_3 &= 0 \\ (a-1)x_1 + 4x_2 - 3x_3 &= 0 \end{aligned}$$

ima i netrivijalnih rješenja. Nađite opće rješenje u tim slučajevima.

Rješenje.

Zadatak ćemo riješiti na dva načina, koristeći Roucheov teorem i pomoću Gaussovog postupka.

1. način (Roucheov teorem)

Prema Roucheovom teoremu homogeni sustav u kojemu je broj jednadžbi jednak broju nepoznanica ima i netrivijalnih rješenja akko je determinanta matrice sustava jednaka nula.

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 3 & 3+a & -3 \\ a-1 & 4 & -3 \end{vmatrix} = 0$$

$$a^2 - 10a + 15 = 0$$

$$a_1 = 5 - \sqrt{10}, \quad a_2 = 5 + \sqrt{10}$$

Dakle, za $a = 5 - \sqrt{10}$ i $a = 5 + \sqrt{10}$ zadani homogeni sustav ima i netrivijalnih rješenja.

2. način (Gaussov postupak)

x_1	x_2	x_3	b		
2	2	$\boxed{-1}$	0	$/\cdot(-3)$	$/\cdot(-3)$
3	$3+a$	-3	0	$+$	
$a-1$	4	-3	0		$+$
2	2	-1	0		$+$
-3	$a-3$	0	0	$+$	
$a-7$	$\boxed{-2}$	0	0	$/\cdot\frac{a-3}{2}$	
$a-5$	0	-1	0		
$\frac{1}{2}a^2-5a+\frac{15}{2}$	0	0	0		
$a-7$	-2	0	0		

Iz drugog retka zaključujemo da u slučaju da je $\frac{1}{2}a^2 - 5a + \frac{15}{2} \neq 0$ mora biti $x_1 = 0$. Tada iz prvog i trećeg retka slijedi

$$(a-5)x_1 - x_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_3 = 0$$
$$(a-7)x_1 - 2x_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_2 = 0$$

pa bi u tom slučaju sustav imao samo trivijalno rješenje. Stoga mora biti

$$\frac{1}{2}a^2 - 5a + \frac{15}{2} = 0$$

iz čega opet dobivamo

$$a_1 = 5 - \sqrt{10}, \quad a_2 = 5 + \sqrt{10}.$$

Da bismo pronašli opće rješenje zadanog sustava u tim slučajevima, moramo koristiti Gaussov postupak. Ne možemo koristiti Cramerovo pravilo jer je $D = 0$. Ako smo do traženih a-ova došli preko Roucheovog teorema, tada svaki pojedini a zasebno uvrstimo u sustav kojeg onda rješavamo dalje Gaussovim postupkom. Ako smo odmah krenuli s Gaussovim postupkom, tada ne moramo krenuti iz početka, nego krenemo u tablici od mjesta gdje smo ju prekinuli kad smo započeli diskusiju.

$a = 5 - \sqrt{10}$

x_1	x_2	x_3	b
$a-5$	0	-1	0
$\frac{1}{2}a^2-5a+\frac{15}{2}$	0	0	0
$a-7$	-2	0	0
$-\sqrt{10}$	0	-1	0
0	0	0	0
$-2-\sqrt{10}$	-2	0	0
$-\sqrt{10}$	0	-1	0
$-2-\sqrt{10}$	-2	0	0

Opće rješenje:

$$x_1 = p, \quad x_2 = -\frac{2+\sqrt{10}}{2}p, \quad x_3 = -\sqrt{10}\,p$$

$a = 5 + \sqrt{10}$

x_1	x_2	x_3	b
$a-5$	0	-1	0
$\frac{1}{2}a^2-5a+\frac{15}{2}$	0	0	0
$a-7$	-2	0	0
$\sqrt{10}$	0	-1	0
0	0	0	0
$-2+\sqrt{10}$	-2	0	0
$\sqrt{10}$	0	-1	0
$-2+\sqrt{10}$	-2	0	0

Opće rješenje:

$$x_1 = p, \quad x_2 = \frac{-2+\sqrt{10}}{2}p, \quad x_3 = \sqrt{10}\,p$$

Primjer 31.

U ovisnosti o $a \in \mathbb{R}$ *riješite sustav*

$$ax + y + z = 1$$

$$x + ay + z = 2$$

$$x + y + az = -3$$

Primjer 31.

U ovisnosti o $a \in \mathbb{R}$ riješite sustav

$$ax + y + z = 1$$
$$x + ay + z = 2$$
$$x + y + az = -3$$

Rješenje.

Kako je broj jednadžbi jednak broju nepoznanica možemo koristiti Cramerovo pravilo, a drugi način je Gaussov postupak koji uvijek prolazi.

1. način (Cramerovo pravilo)

$$D = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = a^3 - 3a + 2$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & a & 1 \\ -3 & 1 & a \end{vmatrix} = a^2 + a - 2$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & a \end{vmatrix} = 2a^2 + 2a - 4$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 2 \\ 1 & 1 & -3 \end{vmatrix} = -3a^2 - 3a + 6$$

U slučaju da je $D \neq 0$ sustav ima jedinstveno rješenje

$$x = \frac{D_1}{D}, \quad y = \frac{D_2}{D}, \quad z = \frac{D_3}{D}$$

Pogledajmo kada je $D = 0$, tj. riješimo jednadžbu

$$a^3 - 3a + 2 = 0.$$

Ovo je kubna jednadžba. Kandidati za cjelobrojna rješenja (ako ih ima) su djelitelji slobodnog člana, a to su:

$$1, -1, 2, -2.$$

Direktnim uvrštavanjem dobivamo da su $a_1 = 1$ i $a_2 = -2$ rješenja gornje jednadžbe. Međutim kubna jednadžba ima tri rješenja.

Podijelimo li polinom $a^3 - 3a + 2$ s polinomom $(a-1)(a+2)$, dobivamo da se početna jednadžba može faktorizirati u obliku

$$(a-1)^2(a+2) = 0.$$

Stoga je treće rješenje opet $a_3 = 1$, odnosno 1 je dvostruko rješenje. Dakle, u slučaju da je $a \neq 1$ i $a \neq -2$ zadani sustav ima jedinstveno rješenje

$$x = \frac{D_1}{D} = \frac{a^2 + a - 2}{a^3 - 3a + 2} = \frac{1}{a-1}$$

$$y = \frac{D_2}{D} = \frac{2a^2 + 2a - 4}{a^3 - 3a + 2} = \frac{2}{a-1}$$

$$z = \frac{D_3}{D} = \frac{-3a^2 - 3a + 6}{a^3 - 3a + 2} = \frac{-3}{a-1}$$

Ako je $a = 1$, tada je

$$D = D_1 = D_2 = D_3 = 0$$

pa nam ◂ Cramerovo pravilo ne daje odgovor o rješivosti sustava. Znamo jedino da je sustav u tom slučaju kontradiktoran ili neodređen, a da bismo to saznali moramo koristiti Gaussov postupak. Međutim, za $a = 1$ sustav izgleda

$$\begin{aligned} x + y + z &= 1 \\ x + y + z &= 2 \\ x + y + z &= -3 \end{aligned}$$

iz čega je očito da je to kontradiktoran sustav.

Ako je $a = -2$, tada je opet

$$D = D_1 = D_2 = D_3 = 0$$

pa nam Cramerovo pravilo ne daje odgovor. Mogli bismo računati rang matrice sustava i rang proširene matrice pa na temelju toga doznati odgovor, ali kako sustav ionako moramo riješiti (u slučaju da ima rješenje) možemo odmah ići na Gaussov postupak. Za $a = -2$ sustav izgleda

$$\begin{aligned} -2x + y + z &= 1 \\ x - 2y + z &= 2 \\ x + y - 2z &= -3 \end{aligned}$$

$$
\begin{array}{ccc|c}
x & y & z & \\
\hline
-2 & 1 & \boxed{1} & 1 \\
1 & -2 & 1 & 2 \\
1 & 1 & -2 & -3 \\
\hline
-2 & 1 & 1 & 1 \\
3 & \boxed{-3} & 0 & 1 \\
-3 & 3 & 0 & -1 \\
\hline
-1 & 0 & 1 & \frac{4}{3} \\
3 & -3 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
-1 & 0 & 1 & \frac{4}{3} \\
3 & -3 & 0 & 1
\end{array}
$$

$/ \cdot (-1)$ $+$ $/ \cdot 2$ $+$

$+$ $/ \cdot \frac{1}{3}$ $+$

Dakle, za $a = -2$ sustav ima rješenje

$$x = p, \quad y = -\frac{1}{3} + p, \quad z = \frac{4}{3} + p$$

2. način (Gaussov postupak)

Krenemo odmah rješavati sustav Gaussovim postupkom. Tokom rješavanja, koliko je god dugo moguće, ne biramo retke u kojima se nalazi nepoznati parametar (ovdje je svejedno kad se on nalazi u svakom retku).

x	y	z		
a	1	$\boxed{1}$	1	$/\cdot(-1)$ $/\cdot(-a)$
1	a	1	2	$+$
1	1	a	-3	$+$
a	1	1	1	
$1-a$	$a-1$	0	1	$/\cdot\frac{1}{a-1}$ $\longrightarrow$ uz uvjet $a\neq 1$
$1-a^2$	$1-a$	0	$-3-a$	$/\cdot\frac{1}{1-a}$

$$
\begin{array}{ccc|cl}
 & & & & \\
\hline
a & 1 & 1 & 1 & \leftarrow + \\
-1 & \boxed{1} & 0 & \frac{1}{a-1} & / \cdot (-1) \quad / \cdot (-1) \\
1+a & 1 & 0 & \frac{a+3}{a-1} & \leftarrow + \\
\hline
a+1 & 0 & 1 & \frac{a-2}{a-1} & \\
-1 & 1 & 0 & \frac{1}{a-1} & \\
a+2 & 0 & 0 & \frac{a+2}{a-1} & / \cdot \frac{1}{a+2} \longrightarrow \text{uz uvjet } a \neq -2 \\
\hline
a+1 & 0 & 1 & \frac{a-2}{a-1} & \leftarrow + \\
-1 & 1 & 0 & \frac{1}{a-1} & \leftarrow + \\
\boxed{1} & 0 & 0 & \frac{1}{a-1} & / \cdot -(a+1) \\
\hline
0 & 0 & 1 & \frac{-3}{a-1} & \\
0 & 1 & 0 & \frac{2}{a-1} & \\
1 & 0 & 0 & \frac{1}{a-1} &
\end{array}
$$

Dakle, dobili smo da uz uvjete $a \neq 1$ i $a \neq -2$ sustav ima jedinstveno rješenje

$$x = \frac{1}{a-1}, \quad y = \frac{2}{a-1}, \quad z = \frac{-3}{a-1}$$

U slučaju da je $a = 1$, vratimo se u tablicu na mjesto na kojem smo postavili taj uvjet i vidjet ćemo da drugi redak ima slijeve strane nule, a s desne broj 1, što znači da je za $a = 1$ sustav kontradiktoran.

U slučaju da je $a = -2$ vratimo se u tablicu na mjesto na kojemu smo postavili taj uvjet i vidjet ćemo da će se treći redak sastojati od samih nula, što znači da je on suvišan i sustav bismo dalje riješili kao i prije i dobili rješenje

$$x = p, \quad y = -\frac{1}{3} + p, \quad z = \frac{4}{3} + p$$

Primjer 32.

Tvornica radi tri mješavine jogurta: Lipa-Naranča, tako da uzima $\frac{1}{2}$ jogurta od lipe i $\frac{1}{2}$ jogurta od naranče po litri; Lipa-Limun, tako da uzima $\frac{3}{4}$ jogurta od lipe i $\frac{1}{4}$ jogurta od limuna po litri; Naranča-Limun, tako da uzima $\frac{3}{4}$ jogurta od naranče i $\frac{1}{4}$ jogurta od limuna po litri. Svaki dan tvornica ima na raspolaganju 200 litara jogurta od lipe, 162.5 litara jogurta od naranče i 87.5 litara jogurta od limuna. Koliko litara svake mješavine treba napraviti svaki dan ako se želi potrošiti sav dostupni jogurt koji je na raspolaganju?

Rješenje.

Uvedimo sljedeće oznake

$$\begin{array}{lcl} x & \longrightarrow & \text{broj litara jogurta Lipa-Naranča} \\ y & \longrightarrow & \text{broj litara jogurta Lipa-Limun} \\ z & \longrightarrow & \text{broj litara jogurta Naranča-Limun} \end{array}$$

pri čemu su to oznake za broj litara pojedinih mješavina koje tvornica dnevno treba proizvesti.

U tom slučaju tvornica potroši $\frac{1}{2}x + \frac{3}{4}y$ litara jogurta od lipe, $\frac{1}{2}x + \frac{3}{4}z$ litara jogurta od naranče i $\frac{1}{4}y + \frac{1}{4}z$ litara jogurta od limuna.

Želi li se potrošiti sav dostupni jogurt, mora vrijediti

$$\frac{1}{2}x + \frac{3}{4}y = 200$$
$$\frac{1}{2}x + \frac{3}{4}z = 162.5$$
$$\frac{1}{4}y + \frac{1}{4}z = 87.5$$

Riješimo li se razlomaka dobivamo

$$2x + 3y = 800$$
$$2x + 3z = 650$$
$$y + z = 350$$

Dakle, problem se svodi na rješavanje sustava tri linearne jednadžbe s tri nepoznanice. Riješimo taj sustav Gaussovim postupkom (u ovom trenutku niti ne znamo da li je problem dobro postavljen, tj. da li sustav ima uopće rješenja i da li je rješenje jedinstveno pa je najbolje krenuti Gaussovim postupkom).

$$
\begin{array}{ccc|cll}
x & y & z & & & \\
\hline
2 & 3 & 0 & 800 & & \\
2 & 0 & 3 & 650 & & + \\
0 & 1 & \boxed{1} & 350 & / \cdot (-3) & \\
\hline
\boxed{2} & 3 & 0 & 800 & / \cdot (-1) & \\
2 & -3 & 0 & -400 & & + \\
0 & 1 & 1 & 350 & & \\
\hline
2 & 3 & 0 & 800 & / \cdot \frac{1}{2} & \\
0 & -6 & 0 & -1200 & / \cdot \frac{-1}{6} & \\
0 & 1 & 1 & 350 & & \\
\hline
1 & \frac{3}{2} & 0 & 400 & & + \\
0 & \boxed{1} & 0 & 200 & / \cdot (-1) & / \cdot \frac{-3}{2} \\
0 & 1 & 1 & 350 & + & \\
\hline
1 & 0 & 0 & 100 & & \\
0 & 1 & 0 & 200 & & \\
0 & 0 & 1 & 150 & &
\end{array}
$$

Dobili smo da je

$$x = 100, \quad y = 200, \quad z = 150.$$

Dakle, želi li se potrošiti sav dostupni jogurt, tvornica dnevno mora proizvesti 100 litara jogurta Lipa-Naranča, 200 litara jogurta Lipa-Limun i 150 litara jogurta Naranča-Limun.

Sustavi linearnih nejednadžbi

Linearna nejednadžba s n varijabli je izraz oblika

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n <^* b$$

pri čemu umjesto znaka $<^*$ može stajati $<$, $>$, $\leqslant$ ili $\geqslant$.

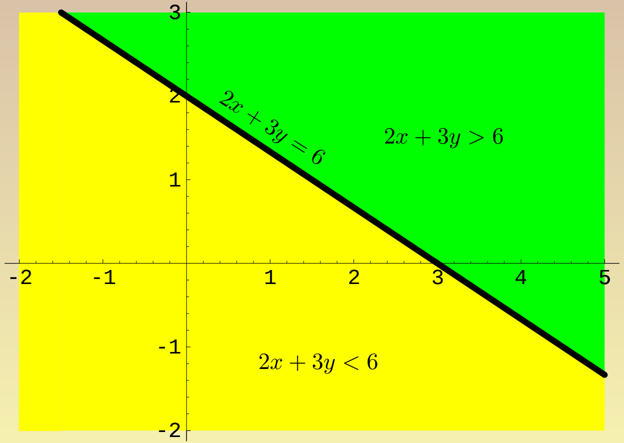
Nadalje, $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ su **koeficijenti varijabli**, $b \in \mathbb{R}$ je **slobodni koeficijent**.

Rješenje nejednadžbe je svaka uređena n-torka realnih brojeva koja ju zadovoljava.

Sustavi linearnih nejednadžbi s dvije varijable

Sustave linearnih nejednadžbi s dvije varijable izdvajamo posebno zbog toga jer se oni mogu rješavati grafički. Grafičko rješavanje sustava linearnih nejednadžbi s dvije varijable temelji se na svojstvima pravca $ax + by + c = 0$ da on dijeli ravninu na tri dijela:

- s jedne strane pravca je poluravnina u kojoj leže točke čije koordinate (x, y) zadovoljavaju nejednadžbu $ax + by + c < 0$
- na suprotnoj strani je poluravnina za čije točke vrijedi $ax + by + c > 0$
- na samom pravcu su točke koje zadovoljavaju jednadžbu kojom je zadan pravac


3
2
1
-1
-2
-2
-1
1
2
3
4
5
$2x+3y=6$
$2x+3y>6$
$2x+3y<6$

Postupak grafičkog rješavanja linearne nejednadžbe $ax + by <^* c$ provodi se u dva koraka:

1. Nacrta se pripadni pravac $ax + by = c$
2. Koordinate jedne točke izvan pravca uvrste se u zadanu nejednadžbu i time se provjeri da li je ta poluravnina grafičko rješenje nejednadžbe. Ukoliko to nije slučaj, točke koje zadovoljavaju nejednadžbu leže u poluravnini s druge strane pravca. Ako pravac ne prolazi kroz ishodište radi jednostavnosti preporuča se koristiti točka $(0, 0)$. Ako su nejednadžbe tipa $<$ ili $>$ u grafičko rješenje nisu uključeni rubovi poluravnina pa ih onda crtamo isprekidanom linijom.

Primjer 33.

Riješite grafički sustav nejednadžbi

$$\begin{aligned} -x + y &\leqslant 1 \\ 3x + 2y &\leqslant 6 \\ y &\geqslant 0 \end{aligned}$$

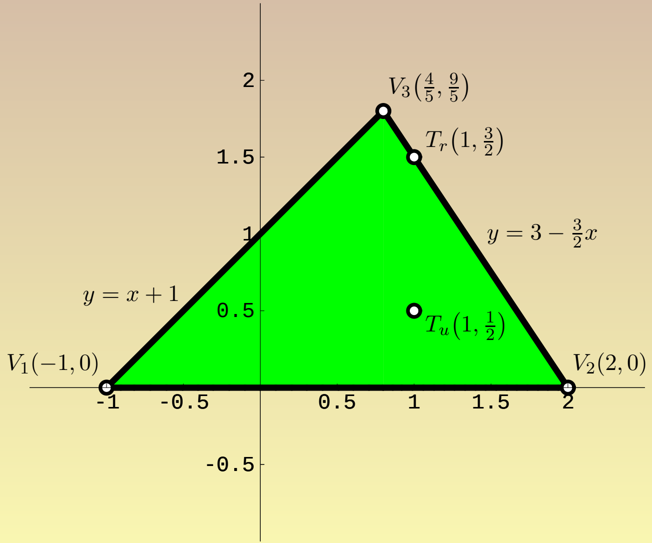
Primjer 33.

Riješite grafički sustav nejednadžbi

$$-x + y \leqslant 1$$
$$3x + 2y \leqslant 6$$
$$y \geqslant 0$$

Rješenje.

Svakoj od nejednadžbi pripada jedna od poluravnina kao rješenje te nejednadžbe. U presjeku tih poluravnina nalaze se točke koje zadovoljavaju sve tri nejednadžbe. Taj se skup zove **poliedar rješenja**. Rješenje ovog sustava prikazano je na sljedećoj slici.



$V_3\left(\frac{4}{5}, \frac{9}{5}\right)$
$T_r\left(1, \frac{3}{2}\right)$
$y = 3 - \frac{3}{2}x$
$y = x + 1$
$T_u\left(1, \frac{1}{2}\right)$
$V_1(-1, 0)$
$V_2(2, 0)$
2
1.5
1
0.5
-0.5
-1
-0.5
0.5
1
1.5
2

Na slici su označena i neka posebna rješenja:

- **Vršna rješenja**: $V_1(-1,0)$, $V_2(2,0)$, $V_3\left(\frac{4}{5},\frac{9}{5}\right)$
- Jedno **rubno rješenje**: $T_r\left(1,\frac{3}{2}\right)$
- Jedno **unutarnje** ili **stabilno rješenje**: $T_u\left(1,\frac{1}{2}\right)$

U ovom primjeru vršna rješenja zadovoljavaju po dvije nejednadžbe kao jednakosti, a jednu kao strogu nejednakost.

Rubno rješenje zadovoljava jednu nejednadžbu kao jednakost.

Unutarnje rješenje zadovoljava sve zadane nejednadžbe kao stroge nejednakosti.

Primjer 34.

Riješite grafički sustav nejednadžbi

$$-x + y \leqslant 1$$

$$3x + 2y \leqslant 6$$

$$y > 3$$

Primjer 34.

Riješite grafički sustav nejednadžbi

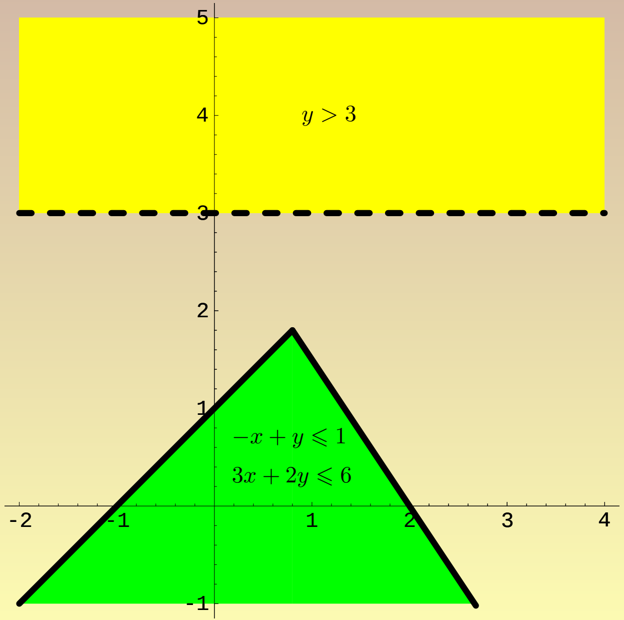
$$-x + y \leqslant 1$$

$$3x + 2y \leqslant 6$$

$$y > 3$$

Rješenje.

Zadani sustav nejednadžbi nema rješenja (kontradiktoran je). Naime, točke koje zadovoljavaju prve dvije nejednadžbe na slici se nalaze u zelenom dijelu ravnine, a točke koje zadovoljavaju treću nejednadžbu nalaze se u žutom dijelu ravnine. Kako se ta dva skupa ne sijeku, ne postoji točka koja bi zadovoljavala sve tri nejednadžbe.


5
4
$y > 3$
3
2
1
$-x + y \leqslant 1$
$3x + 2y \leqslant 6$
-2
-1
1
2
3
4
-1

Primjer 35.

Riješite grafički sustav nejednadžbi

$$\begin{aligned} -x + y &\leqslant 1 \\ 3x + 2y &\leqslant 6 \\ y &\geqslant \frac{9}{5} \end{aligned}$$

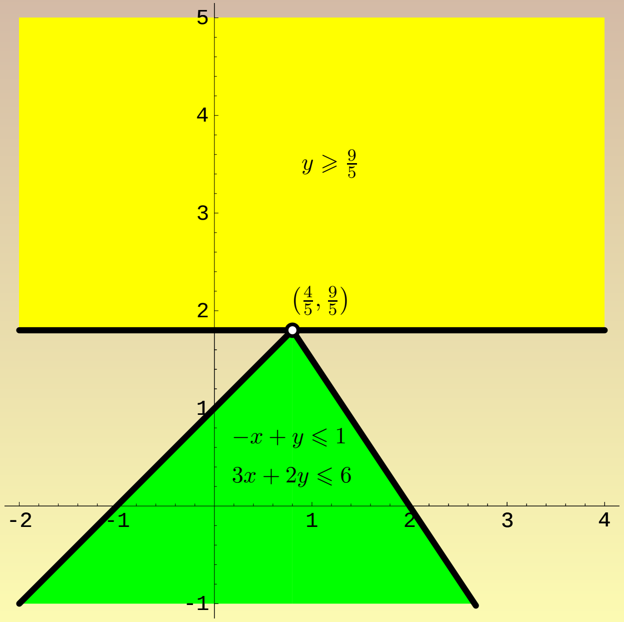
Primjer 35.

Riješite grafički sustav nejednadžbi

$$-x+y \leqslant 1$$
$$3x+2y \leqslant 6$$
$$y \geqslant \frac{9}{5}$$

Rješenje.

Zadani sustav nejednadžbi ima samo jedno rješenje $\left(\frac{4}{5}, \frac{9}{5}\right)$. Naime, točke koje zadovoljavaju prve dvije nejednadžbe na slici se nalaze u zelenom dijelu ravnine, a točke koje zadovoljavaju treću nejednadžbu nalaze se u žutom dijelu ravnine. Sa slike vidimo da se ta dva skupa sijeku u samo jednoj točki $\left(\frac{4}{5}, \frac{9}{5}\right)$.



5
4
3
2
1
-1
-2
-1
1
2
3
4
$y \geqslant \frac{9}{5}$
$\left(\frac{4}{5}, \frac{9}{5}\right)$
$-x + y \leqslant 1$
$3x + 2y \leqslant 6$

Primjer 36.

Riješite grafički sustav nejednadžbi

$$3x + 2y > 2$$

$$3x + 2y \leqslant 6$$

Primjer 36.

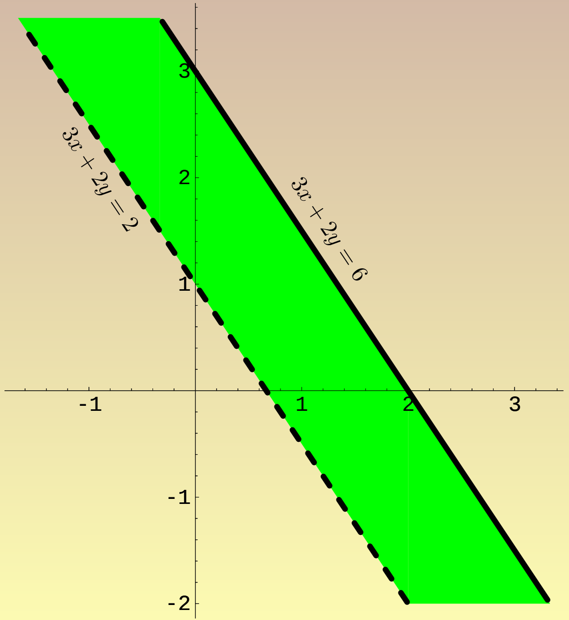
Riješite grafički sustav nejednadžbi

$$3x + 2y > 2$$

$$3x + 2y \leqslant 6$$

Rješenje.

Pravci $3x + 2y = 2$ i $3x + 2y = 6$ su paralelni, a rješenje zadanog sustava nejednadžbi su sve točke između ta dva pravca uključujući pravac $3x + 2y = 6$, ali ne uključujući pravac $3x + 2y = 2$ (zbog stroge nejednakosti u prvoj nejednadžbi). Zato je pravac $3x + 2y = 2$ na slici nacrtan isprekidanom linijom.



$3x + 2y = 2$
$3x + 2y = 6$
-1
1
2
3
-2

Primjer 37.

Riješite grafički sustav nejednadžbi

$$\begin{aligned} 3x + 2y &\geqslant 2 \\ 3x + 2y &\leqslant 6 \\ x &\geqslant 0 \\ y &\geqslant 0 \end{aligned}$$

Primjer 37.

Riješite grafički sustav nejednadžbi

$$3x + 2y \geqslant 2$$

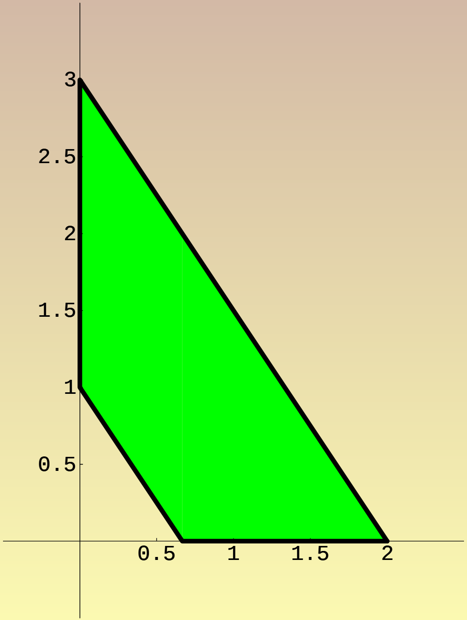
$$3x + 2y \leqslant 6$$

$$x \geqslant 0$$

$$y \geqslant 0$$

Rješenje.

Kako su pravci $3x + 2y = 2$ i $3x + 2y = 6$ paralelni, rješenje je trapez prikazan na slici.


3
2.5
2
1.5
1
0.5
0.5
1
1.5
2

Opće rješenje sustava nejednadžbi

U općem slučaju sustav nejednadžbi ima beskonačno mnogo rješenja.

U slučaju neodređenog sustava jednadžbi njegova rješenja su okarakterizirana pomoću parametara.

Postavlja se pitanje kako dobiti opće rješenje sustava nejednadžbi. Nažalost, u ovom slučaju ne mogu se primijeniti ekvivalentne transformacije na kojima se temeljio Gaussov postupak. Pogledajmo zašto.

Primjer 38.

Riješite sustav nejednadžbi

$$x + y > 1$$
$$-3x + 2y \leqslant 6$$

Primjer 38.

Riješite sustav nejednadžbi

$$
\begin{aligned}
x + y &> 1\\
-3x + 2y &\leqslant 6
\end{aligned}
$$

Rješenje.

Kada bi se radilo o jednadžbama mogli bismo eliminirati varijablu x množenjem prve jednadžbe s 3 i pribrajanjem drugoj. Međutim, ovdje se radi o nejednadžbama pa bismo uz ovakvu transformaciju imali problem određivanja smisla nejednakosti u dobivenoj nejednadžbi. Ovakvu transformaciju smjeli bismo primjenjivati ukoliko bi obje nejednadžbe sadržavale isti znak nejednakosti.

Elementarne transformacije sustava nejednadžbi

Ako je zadana nejednadžba $A <^* B$, pri čemu su A i B algebarski izrazi, a C je realni broj ili algebarski izraz, tada su nejednadžbe

- $A + C <^* B + C$
- $A - C <^* B - C$
- za $C > 0$, $AC <^* BC$
- za $C < 0$, $AC >^* BC$

ekvivalentne zadanoj, pri čemu je znak $>^*$ po smislu nejednakosti suprotan znaku $<^*$.

Dopunske varijable

Sustavu linearnih nejednadžbi može se uvođenjem dopunskih varijabli pridružiti ekvivalentni sustav linearnih jednadžbi.
Tako, npr. nejednadžbi $A < B$ možemo pridružiti jednadžbu dodavanjem lijevoj strani nenegativne varijable u koja za različita rješenja te nejednadžbe poprima vrijednosti razlike između njezine desne i lijeve strane.
Ukoliko se radi o nejednadžbi sa znakom $>$, tada nenegativnu varijablu treba oduzeti od lijeve strane (ili ju dodati desnoj) da bi se dobila jednadžba.

Primjer 39.

Sustavu nejednadžbi

$$
\begin{aligned}
-x + y &\leqslant 1 \\
3x + 2y &\leqslant 6 \\
y &\geqslant 0
\end{aligned}
$$

pridružite ekvivalentni sustav jednadžbi.

Primjer 39.

Sustavu nejednadžbi

$$
\begin{aligned}
-x + y &\leqslant 1 \\
3x + 2y &\leqslant 6 \\
y &\geqslant 0
\end{aligned}
$$

pridružite ekvivalentni sustav jednadžbi.

Rješenje.

Pridruženi ekvivalentni sustav glasi

$$
\begin{aligned}
-x + y + u_1 &= 1 \\
3x + 2y + u_2 &= 6 \\
y - u_3 &= 0
\end{aligned}
$$

Varijable u_1, u_2 i u_3 zovu se **dopunske** ili **oslabljene** varijable. Pridjev "oslabljene" označava da postoji uvjet na njihov izbor.

Ovaj prošireni sustav linearnih jednadžbi može se rješavati Gaussovim postupkom. U pravilu se taj sustav rješava tako da se kao bazične varijable pojavljuju one varijable s kojima je zadan početni sustav nejednadžbi (tzv. **strukturne varijable**), a dopunske varijable se javljaju kao parametri.

Ovisno o odnosu broja nejednadžbi i broja strukturnih varijabli, u općem rješenju se uz dopunske varijable mogu pojaviti i neke od strukturnih varijabli.

Riješimo sada pridruženi sustav linearnih jednadžbi tako da varijable u_1 i u_2 uzmemo za parametre. Naime, vidjet ćemo da imamo tri nezavisne jednadžbe i 5 nepoznanica pa je broj potrebnih parametara jednak $5-3=2$.

$$
\begin{array}{ccccc|c}
x & y & u_1 & u_2 & u_3 & \\
\hline
\boxed{-1} & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \quad / \cdot 3 \\
3 & 2 & 0 & 1 & 0 & 6 \quad + \\
0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\
\hline
-1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \quad + \\
0 & \boxed{5} & 3 & 1 & 0 & 9 \quad / \cdot \frac{-1}{5} \quad / \cdot \frac{-1}{5} \\
0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \quad + \\
\hline
-1 & 0 & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} & 0 & -\frac{4}{5} \\
0 & 5 & 3 & 1 & 0 & 9 \\
0 & 0 & -\frac{3}{5} & -\frac{1}{5} & -1 & -\frac{9}{5}
\end{array}
$$

Opće rješenje sustava je

$$x = \frac{4}{5} + \frac{2}{5}u_1 - \frac{1}{5}u_2$$

$$y = \frac{9}{5} - \frac{3}{5}u_1 - \frac{1}{5}u_2$$

$$u_3 = \frac{9}{5} - \frac{3}{5}u_1 - \frac{1}{5}u_2$$

No, ne zaboravimo da su $u_1, u_2, u_3 \geqslant 0$. Stoga zbog $u_3 \geqslant 0$ iz treće jednakosti slijedi

$$\frac{9}{5} - \frac{3}{5}u_1 - \frac{1}{5}u_2 \geqslant 0,$$

odnosno

$$3u_1 + u_2 \leqslant 9,$$

odnosno

$$u_2 \leqslant 9 - 3u_1.$$

Sada iz $u_1 \geqslant 0$, $u_2 \geqslant 0$ i $u_2 \leqslant 9 - 3u_1$ slijedi

$$0 \leqslant u_1 \leqslant 3, \quad 0 \leqslant u_2 \leqslant 9 - 3u_1.$$

Dakle, opće rješenje zadanog sustava linearnih nejednadžbi je

$$\begin{aligned} x &= \tfrac{4}{5} + \tfrac{2}{5}u_1 - \tfrac{1}{5}u_2 \\ y &= \tfrac{9}{5} - \tfrac{3}{5}u_1 - \tfrac{1}{5}u_2 \\ 0 &\leqslant u_1 \leqslant 3, \quad 0 \leqslant u_2 \leqslant 9 - 3u_1 \end{aligned}$$

Sjetimo se da smo već prije taj sustav riješili ◂ grafički, a sada smo sva ta rješenja zapisali algebarski pomoću dopunskih varijabli u_1 i u_2 koje moraju zadovoljavati i neke gore navedene uvjete.

Da bismo dobili neko posebno rješenje potrebno je:

- Izabrati vrijednost parametra u_1 u skladu s prvim od dva uvjeta
- Izračunati gornju granicu za interval u kojemu se smije birati vrijednost parametra u_2 za već odabranu vrijednost parametra u_1
- Izabrati vrijednost za parametar u_2

Posebna rješenja zadanog sustava koja su označena na

◂ slici dobiju se za sljedeće kombinacije ovih parametara:

u_1	u_2	Rješenje
0	9	$V_1(-1,0)$
0	0	$V_3\left(\frac{4}{5},\frac{9}{5}\right)$
3	0	$V_2(2,0)$
$\frac{1}{2}$	0	$T_r\left(1,\frac{3}{2}\right)$
$\frac{3}{2}$	2	$T_u\left(1,\frac{1}{2}\right)$

Uočite da vršna rješenja dobijemo kada uzmemo rubne vrijednosti za dopunske varijable u_1 i u_2. Rubno rješenje dobijemo kada jedna od dopunskih varijabli ima rubnu vrijednost, a druga nema rubnu vrijednost, a unutarnje rješenje dobijemo kada niti jedna dopunska varijabla nema rubnu vrijednost.

Naime, dobili smo da je

$$0 \leqslant u_1 \leqslant 3, \quad 0 \leqslant u_2 \leqslant 9 - 3u_1.$$

Za $u_1 = 0$ mora biti $0 \leqslant u_2 \leqslant 9$. Stoga za $u_1 = 0$ i $u_2 = 0$ dobijemo vršno rješenje $V_3\left(\frac{4}{5}, \frac{9}{5}\right)$, a za $u_1 = 0$ i $u_2 = 9$ dobijemo vršno rješenje $V_1(-1, 0)$.

Za $u_1 = 3$ mora biti $u_2 = 0$ pa dobijemo i treće vršno rješenje $V_2(2, 0)$.

Napomena.

Mogli bismo općenito definirati vršna, rubna i unutarnja rješenja za bilo koji sustav linearnih nejednadžbi s proizvoljno konačno mnogo varijabli. Kratko rečeno, vršna rješenja su ona rješenja koja dobijemo kada za sve dopunske varijable uzmemo odgovarajuće rubne vrijednosti, rubna rješenja su ona kod kojih je za barem jednu dopunsku varijablu uzeta rubna vrijednost, a unutarnja rješenja su ona kod kojih niti jedna dopunska varijabla nema rubnu vrijednost.

Kada imamo više varijabli možemo razlikovati rubove raznih dimenzija, npr. kada bismo imali tri varijable i ako bismo "grafički" rješavali sustav, tada bismo se nalazili u prostoru pa bismo kao rješenje u nekom specijalnom slučaju dobili poliedar, koji ima vrhove (vršna rješenja ili rubovi dimenzije 0), bridove (rubovi dimenzije 1) i strane (rubovi dimenzije 2). Općenito, u n-dimenzionalnom afinom prostoru rub dimenzije k zovemo k-strana. Mi ovdje nećemo ulaziti u tolike detalje. Sve ovo ovdje smo rekli više na intuitivnom nivou (dakle, ne baš matematički strogo) motivirani primjerima sa dvije varijable.

Nećemo uvijek imati vršna rješenja. Sjetimo se primjera 36. kojeg smo grafički riješili i kao rješenje smo dobili dio ravnine omeđen s dva paralelna pravca. slika

Sa slike je jasno da nemamo vršnih rješenja, barem ne u onom smislu na koji mi intuitivno pojmimo vršno rješenje. Da li bismo dobili isti zaključak da taj sustav nismo rješavali grafički, nego da smo ga rješavali preko dopunskih varijabli i na koji bismo uopće način mogli zaključiti da nema vršnih rješenja? Pogledajmo što se tu zapravo događa.

Sustav je bio zadan sa

$$3x + 2y > 2$$
$$3x + 2y \leqslant 6$$

Njemu pridružimo ekvivalentni sustav jednadžbi

$$3x + 2y + u_1 = 6$$
$$3x + 2y - u_2 = 2$$
$$u_1 \geqslant 0, \; u_2 > 0$$

u_2 mora biti strogo veći od nule jer je prva nejednakost stroga. Riješimo li taj sustav Gaussovim postupkom, dobivamo

$$\begin{array}{cccc|c}
x & y & u_1 & u_2 & \\
\hline
\boxed{3} & 2 & 1 & 0 & 6 \\
3 & 2 & 0 & -1 & 2 \\
\hline
3 & 2 & 1 & 0 & 6 \\
0 & 0 & -1 & -1 & -4
\end{array}
\quad \begin{array}{l} / \cdot (-1) \\ \leftarrow + \end{array}$$

Stoga je opće rješenje pridruženog sustava jednadžbi

$$y = 3 - \frac{1}{2}u_1 - \frac{3}{2}x$$
$$u_2 = 4 - u_1$$

Dakle, ovdje ne možemo istovremeno uzeti varijable x i y za bazične, nego smo morali jednu dopunsku varijablu uzeti za bazičnu, a jednu od strukturnih varijabli za parametar.

No zbog uvjeta $u_1 \geqslant 0$ i $u_2 > 0$ iz druge jednakosti slijedi

$$4 - u_1 > 0,$$

odnosno, sve zajedno

$$0 \leqslant u_1 < 4.$$

Stoga je opće rješenje zadanog sustava nejednadžbi

$$y = 3 - \frac{1}{2}u_1 - \frac{3}{2}x$$

$$0 \leqslant u_1 < 4, \quad x \in \mathbb{R}$$

Uočite da na parametar x nemamo nikakvih uvjeta jer on nije dopunska varijabla, njega nismo dodatno uvodili, on je od početka bio u zadanom sustavu nejednadžbi kao nepoznanica koju smo morali uzeti za parametar.

Uočavamo da nam je u općem rješenju nestala dopunska varijabla u_2 koju smo uveli. To nam upravo govori da nećemo imati vršnih rješenja.

S druge strane, gornja granica za u_1 je stroga, što znači da ćemo imati jedan rub manje, a sa slike je to i jasno jer za $u_1 = 4$ dobijemo pravac $3x + 2y = 2$ kojeg smo morali izbaciti (zato smo ga crtali isprekidanom linijom) zbog stoge nejednakosti. Za $u_1 = 0$ dobijemo pravac $3x + 2y = 6$ koji jest rub, što vidimo i sa slike.

Nadalje, na parametar x nemamo nikakvih uvjeta, što je i sa slike jasno jer se skup rješenja duž x-osi proteže u beskonačnost, pa x može biti proizvoljan. Sa slike vidimo da za fiksni x, y mora biti u određenim granicama, a to u općem rješenju kontroliramo sa parametrom u_1 na kojeg imamo uvjet $0 \leqslant u_1 < 4$.

Naravno, mogli smo uzeti i obrnuto, da y bude proizvoljan, a da x onda kontroliramo sa u_1 za fiksni y, ali to smo onda trebali napraviti kod rješavanja pridruženog sustava jednadžbi tako da uzmemo y za parametar, a x za bazičnu varijablu.

Primjer 40.

Odredite opće rješenje sustava

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 &\leqslant 0 \\ -2x_1 - x_2 + 2x_3 &\geqslant 0 \\ -x_1 - 3x_2 + 3x_3 &\geqslant 0 \end{aligned}$$

Primjer 40.

Odredite opće rješenje sustava

$$
\begin{aligned}
x_1 - 2x_2 + x_3 &\leqslant 0 \\
-2x_1 - x_2 + 2x_3 &\geqslant 0 \\
-x_1 - 3x_2 + 3x_3 &\geqslant 0
\end{aligned}
$$

Rješenje.

Pridruženi sustav linearnih jednadžbi je

$$
\begin{aligned}
x_1 - 2x_2 + x_3 + u_1 &= 0 \\
-2x_1 - x_2 + 2x_3 - u_2 &= 0 \\
-x_1 - 3x_2 + 3x_3 - u_3 &= 0 \\
u_1, u_2, u_3 &\geqslant 0
\end{aligned}
$$

Riješimo li pripadni sustav Gaussovim postupkom dobivamo

$$x_1 = \frac{3}{5}x_3 - \frac{1}{5}u_1 - \frac{2}{5}u_2$$
$$x_2 = \frac{4}{5}x_3 + \frac{2}{5}u_1 - \frac{1}{5}u_2$$
$$u_3 = -u_1 + u_2$$

Zbog $u_1, u_2, u_3 \geqslant 0$ iz treće jednakosti slijedi

$$-u_1 + u_2 \geqslant 0,$$

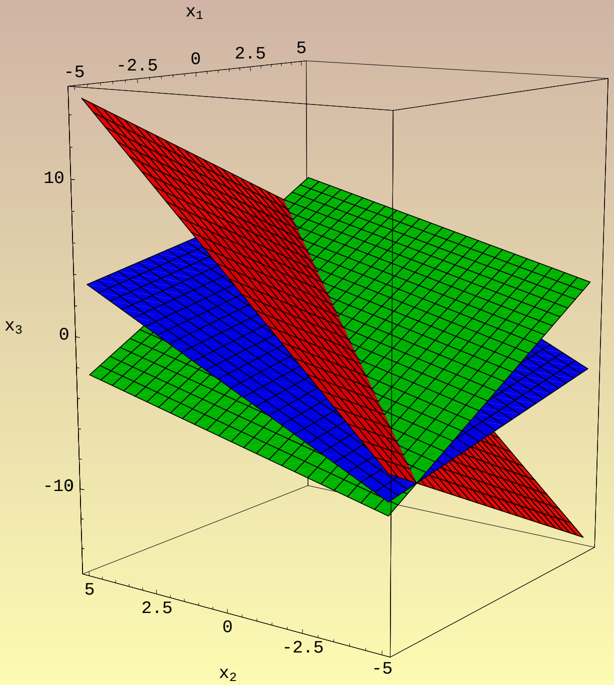
odnosno sve zajedno

$$0 \leqslant u_1 \leqslant u_2.$$

Stoga je opće rješenje zadanog sustava nejednadžbi

$$\begin{aligned} x_1 &= \tfrac{3}{5}x_3 - \tfrac{1}{5}u_1 - \tfrac{2}{5}u_2 \\ x_2 &= \tfrac{4}{5}x_3 + \tfrac{2}{5}u_1 - \tfrac{1}{5}u_2 \\ 0 &\leqslant u_1 \leqslant u_2 \end{aligned}$$

Primijetimo da nam je opet nestala jedna dopunska varijabla, što zapravo znači da neće biti vršnih rješenja. Geometrijski se zapravo radi o tri ravnine u prostoru koje se sijeku po pravcu, rješenje sustava nejednadžbi je dio prostora između ravnina $x_1 - 2x_2 + x_3 = 0$ i $-x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 0$ (na slici, dio prostora ispod crvene ravnine, a iznad plave ravnine).


x1
-5
-2.5
0
2.5
5
10
x3
0
-10
5
2.5
0
-2.5
-5
x2

Za $u_1 = u_2 = 0$ dobit ćemo rub dimenzije 1, tj. pravac po kojemu se ravnine sijeku, a za $u_1 = 0$ dobit ćemo rub dimenzije 2, tj. dio ravnine $x_1 - 2x_2 + x_3 = 0$ (dio crvene ravnine), a za $u_2 = u_1$ (rubna vrijednost parametra u_2) dobit ćemo rub dimenzije 2, tj. dio ravnine $-x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 0$ (dio plave ravnine).