1 MELAKUKAN OPERASI BILANGAN REAL

1. Menghitung hasil operasi bilangan real (Persen)
2. Menghitung hasil operasi bilangan berpangkat
3. Menyederhanakan pecahan bentuk akar
4. Menghitung nilai logaritma

1.1 Menghitung Persen

Persen adalah lambang bilangan rasional yang berpenyebut seratus (100). Lambang dari persen adalah : ***%***, jadi makna persen adalah per seratus. Jadi 1 % berarti $\frac{1}{100}$ bagian dari jumlah dasar.

Contoh 1:

Limbah dari pembuatan pintu plat baja adalah 0,18 m^2. Jika seluruh bahan yang tersedia adalah 3,6 m^2, hitunglah persentase limbah tersebut!

Penyelesaian :

Luas dasar : 3,6 m^2 (100%) jadi untuk 1 m^2 = $\frac{100}{3,6}\%$

Jadi 0,18 $m^2 \rightarrow$ 0,18 x $\frac{100}{3,6}\%$ = 5 %

Contoh 2:
Seorang pedagang membeli satu sak semen yang berisi 50 kg dengan harga Rp 40.000. Semen tersebut dijual secara eceran seharga Rp 1.200/kg. Jika semua semen telah terjual habis, hitunglah persentase laba yang diperoleh pedagang!

Penyelesaian:
Harga beli = Rp 40.000
Harga jual = 50 kg x Rp 1.200/kg = Rp 60.000
Laba = Rp 60.000 – Rp 40.000 = Rp 20.000
Persentase Laba = $\frac{20.000}{40.000}$ x 100% = 50%

1.2 Menghitung Bilangan Berpangkat

Pengertian pangkat berdasarkan perkalian berganda.
Misalnya : 3^4 artinya 3 x 3 x 3 x 3
Pada umumnya : a^n = a x a x a x a x … x a sebanyak n faktor.
Dalam bentuk a^n , maka :
- a disebut : bilangan pokok
- n disebut : eksponen
- a^n disebut : bilangan berpangkat dan dibaca : “a pangkat n” atau “ pangkat n dari a “.

Pangkat Sebenarnya.
Pangkat sebenarnya adalah bilangan berpangkat dengan eksponen bilangan Asli.
Rumus-rumus :

a. $a^m x a^n = a^{m+n}$ Misal : $a^3 x a^2 = (axaxa)x(axa) = a^5$

$a^3 x a^2 = a^{3+2} = a^5$

b. $a^m : a^n = a^{m-n}$ (a ≠ 0) Misal : $a^3 : a^2 = (axaxa):(axa) = a$

$a^3 : a^2 = a^{3-2} = a$

c. $(a^m)^n = a^{mxn}$ Misal : $(a^3)^2 = (a^3)x(a^3) = a^{3+3} = a^6$

$(a^3)^2 = a^{3x2} = a^6$

1. Pangkat Tak Sebenarnya

Pangkat tak sebenarnya adalah bilangan berpangkat dengan eksponen bilangan Bulat negatif, nol atau pecahan positif maupun negatif.

Rumus-rumus :

a. $a^0 = 1$ (a ≠ 0) Misal : $a^3 : a^3 = (axaxa):(axaxa) = 1$

$a^3 : a^3 = a^{3-3} = a^0 = 1$

b. $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ (n ≠ 0) Misal : $a^2 : a^5 = \frac{axa}{axaxaxaxa} = \frac{1}{axaxa} = \frac{1}{a^3} = a^{-3}$

$a^2 : a^5 = a^{2-5} = a^{-3}$

c. $\sqrt[n]{a^m} = (a)^{\frac{m}{n}}$ Misal : $\sqrt[3]{a^6} = a^{\frac{6}{3}} = a^2$

$\sqrt[9]{a^3} = a^{\frac{3}{9}} = a^{\frac{1}{3}}$

Catatan :

1. $1^p = 1$ (dimana p sembarang)
2. $a^1 = a$ (dimana a sembarang)
3. $0^p = 0$ (dimana p ≠ 0)
4. $a^0 = 1$ (dimana a ≠ 0)
5. $\frac{0}{0} =$ tak tentu
6. $\frac{0}{a} = 0$
7. $\frac{a}{0} =$ tak terdefinisi = ∞
8. Bilangan-bilangan tak tentu selain $\frac{0}{0}$, adalah : $0^0, \infty - \infty, \frac{\infty}{\infty}, \frac{\infty}{0}$

Beberapa rumus yang perlu diperhatikan :

1. $a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$
2. $(a^m x b^m)^n = a^{m.n}.b^{m.n}$
3. $(\frac{a^m}{b^m})^n = \frac{a^{m.n}}{b^{m.n}}$ (b ≠ 0)
4. $(a^p)^q \neq (a)^{(p^q)}$
5. $(\frac{a^n}{\sqrt{b^m}}) = a^{\frac{1}{2}n}.b^{-\frac{1}{2}m}$
6. $\sqrt{\frac{a^m}{b^n}} = a^{\frac{1}{2}m}.b^{-\frac{1}{2}n}$
7. $\sqrt[n]{a^m.b^p} = a^{\frac{m}{n}}.b^{\frac{p}{n}}$
8. $a^m \pm a^n = a^m \pm a^n$
9. $a^n \pm b^n = a^n \pm b^n$
10. Bentuk baku (notasi Ilmiah) adalah $ax10^n$ dimana 1 ≤ a < 10

Contoh soal :

1. $2^3 = 2x2x2 = 8$

2. $(-3)^4 = (-3).(-3).(-3).(-3) = 81$
3. $3^2 x 3^3 = 3^{2+3} = 3^5 = 243$
4. $3^6 : 3^2 = 3^{6-2} = 3^4 = 81$
5. $(2^3.a^2)^{-2} = (2^3)^{-2}.(a^2)^{-2} = 2^{3x(-2)}.a^{2x(-2)} = 2^{-6}.a^{-4}$
6. $\sqrt[3]{8} = (2^{\frac{3}{3}}) = 2$
7. $(16)^{-\frac{3}{4}} = (2^4)^{-\frac{3}{4}} = 2^{4x(-\frac{3}{4})} = 2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$
8. $16^{(-2x-4)} = \frac{1}{32^{(5+2)}}$

   $(2^4)^{(-2x-4)} = (2^{-5})^{(x+2)}$ karena bil. pokok telah sama, maka :

   4.(-2x – 4) = -5.(x + 2)
   - 8x – 16 = - 5x – 10
   - 8x + 5x = - 10 + 16
   - 3x = 6
   x = - 2

1.3 Menyederhanakan pecahan bentuk akar

<u>Penyebut satu suku (satu faktor)</u>

$$\frac{a}{\sqrt{b}} = \frac{a}{\sqrt{b}} x \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{b}} = \frac{a}{b}\sqrt{b}$$

Penyebut yang terdiri dari dua suku

- $\frac{c}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \frac{c}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} x \frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} = \frac{c.(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{a-b}$
- $\frac{c}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} = \frac{c}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} x \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \frac{c.(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{a-b}$
- $\frac{c}{a+\sqrt{b}} = \frac{c}{a+\sqrt{b}} x \frac{a-\sqrt{b}}{a-\sqrt{b}} = \frac{c.(a-\sqrt{b})}{a^2-b}$
- $\frac{c}{a-\sqrt{b}} = \frac{c}{a-\sqrt{b}} x \frac{a+\sqrt{b}}{a+\sqrt{b}} = \frac{c.(a+\sqrt{b})}{a^2-b}$

Contoh soal:

1. $\frac{3}{\sqrt{7}} = \frac{3}{\sqrt{7}} x \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}} = \frac{3\sqrt{7}}{7} = \frac{3}{7}\sqrt{7}$
2. $\frac{3}{5+\sqrt{2}} = \frac{3}{5+\sqrt{2}} x \frac{5-\sqrt{2}}{5-\sqrt{2}} = \frac{3.(5-\sqrt{2})}{25-2} = \frac{15-3\sqrt{2}}{23} = \frac{15}{23} - \frac{3\sqrt{2}}{23}$
3. $\frac{4}{3-\sqrt{5}} = \frac{4}{3-\sqrt{5}} x \frac{3+\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}} = \frac{4.(3+\sqrt{5})}{9-5} = 3+\sqrt{5}$
4. $\frac{8}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} = \frac{8}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} x \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = \frac{8.(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{3-2} = 8(\sqrt{3}-\sqrt{2})$

5. $\frac{10}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = \frac{10}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} = \frac{10(\sqrt{3}+\sqrt{2})}{3+2} = 2(\sqrt{3}+\sqrt{2})$

1.4 Menghitung nilai logaritma

Rumus Dasar Logaritma

1. $^{a}\log b = \frac{\log b}{\log a}$
2. $^{a}\log b = c$ berlaku : $b = a^{c}$
3. $^{a}\log(b.c) = {}^{a}\log b + {}^{a}\log c$
4. $^{a}\log\left(\frac{b}{c}\right) = {}^{a}\log b - {}^{a}\log c$
5. $^{a}\log b^{n} = n.\ {}^{a}\log b$
6. $^{g}\log \sqrt[n]{a} = {}^{g}\log a^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n}.{}^{g}\log a$
7. $^{\frac{1}{g}}\log a = -{}^{g}\log a$
8. $g^{{}^{g}\log a} = a$

Contoh soal:

1. $^{2}\log 32 = {}^{2}\log 2^{5} = 5.{}^{2}\log 2 = 5.1 = 5$
2. $^{5}\log \frac{1}{125} = {}^{5}\log 5^{-3} = -3.{}^{5}\log 5 = -3.1 = -3$
3. $^{\frac{1}{2}}\log 2 = {}^{\frac{1}{2}}\log \frac{1}{\frac{1}{2}} = {}^{\frac{1}{2}}\log(\tfrac{1}{2})^{-1} = -1.{}^{\frac{1}{2}}\log \tfrac{1}{2} = -1.1 = -1$
4. $^{\frac{1}{3}}\log \sqrt{3} = {}^{\frac{1}{3}}\log 3^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}.{}^{\frac{1}{3}}\log 3 = \frac{1}{2}.-1.{}^{3}\log 3 = \frac{1}{2}.-1.1 = -\frac{1}{2}$
5. Tentukan nilai x dari $^{x}\log 125 = 3$

   Penyelesaian : $^{x}\log 125 = 3$ berarti $x^{3} = 125$

   $x^{3} = 5^{3}$

   $x = 5$

6. Tentukan nilai x (x bilangan nyata positif) dari : log x - log 2 = log 6

   Penyelesaian : log x - log 2 = log 6

   $\log \frac{x}{2} = \log 6$

   $\frac{x}{2} = 6$

   $x = 12$

Latihan Soal

1. Sebuah baju setelah dikenakan potongan harga dijual dengan harga Rp 60.000. Jika pada labelnya Rp 75.000 maka besar persentase potongan tersebut adalah …
 a. 10 % b. 15 % c. 17,5 % d. 20 % e. 25 %

2. Seseorang menjual mobil dengan harga Rp 30.000.000, jika ia menderita kerugian 25% maka harga pembelian mobil tersebut adalah …
 a. Rp 30.500.000 b. Rp 31.500.000 c. Rp 32.500.000 d. 37.500.000 e. Rp 40.000.000

3. Suatu koperasi membeli 2 lusin buku tulis dengan harga Rp 15.000 tiap lusin, kemudian buku tulis tersebut dijual kembali dengan harga Rp 1.500 per buah. Persentase keuntungan tersebut adalah … (no. 4, Uan. 97-98)
 a. 10% b. 16,7% c. 20% d. 50% e. 60%

4. Nilai dari $^5\log 10 + {}^5\log 50 - {}^5\log 4$ adalah … (no. 2, Uan. 97-98)
 a. 3 b. 5 c. 8 d. 15 e. 25

5. Nilai x yang memenuhi : $3^{5x-2} = 9^{x+2}$ adalah … (No. 11, Uan. 97-98)
 a. 1 b. 2 c. 3 d. 4 e. 5

6. Bentuk sederhana dari : $(2^3)^4 \times (2^3)^{-5}$ adalah … (no. 1, Uan. 98-99)
 a. 16 b. 8 c. 6 d. 1/6 e. 1/8

7. Jika log 3 = 0,477 dan log 5 = 0,699, maka log 45 adalah … (no. 2, Uan. 98-99)
 a. 0,255 b. 0.653 c. 0,667 d. 1,175 e. 1,653

8. Nilai x yang memenuhi : $\left(\frac{1}{25}\right)^{x-2} = 5^{x+1}$ adalah … (no. 11, Uan. 98-99)
 a. 3 b. 1 c. 0 d. – 1 e. – 3

9. Bentuk sederhana dari : $4\sqrt{3} + 3\sqrt{12} - \sqrt{27}$ adalah … (no. 2, Uan. 99-00)
 a. $10\sqrt{3}$ b. $9\sqrt{3}$ c. $8\sqrt{3}$ d. $7\sqrt{3}$ $6\sqrt{3}$

10. Nilai dari $^2\log 16 - {}^3\log 27 + {}^5\log 1$ adalah … (no. 3, Uan. 99-00)
 a. –1 b. 0 c. 1 d. 5 e. 6

11. Nilai x yang memenuhi persamaan $\sqrt[3]{25^{x+4}} = 125^{x+1}$ adalah … (no. 13, Uan. 99-00)
 a. $-\frac{1}{3}$ b. $-\frac{1}{4}$ c. $-\frac{1}{5}$ d. $-\frac{1}{6}$ e. $-\frac{1}{7}$

12. Nilai dari : $^2\log 4 + {}^2\log 12 - {}^2\log 6$ adalah … (no. 2, Uan. 00-01)
 a. 8 b. 60 c. 5 d. 4 e. 3

13. Himpunan penyelesaian dari persamaan : $^2\log x + {}^2\log (x + 2) = 3$ adalah …
 a. { -4 , 2 } b. { -4 } c. { 2 } d. { 2½ } e. { 4 }

14. Bentuk akar dari $x^{\frac{1}{2}}.y^{\frac{1}{4}}$ adalah …(no. 3, Uan. 01-02)
 a. $\sqrt{x^2.y^4}$ b. $\sqrt{x^4.y^2}$ c. $\sqrt[4]{x.y^2}$ d. $\sqrt[4]{x^2.y}$ e. $\sqrt{x} + \sqrt[4]{y}$

15. Jika log 3 = 0,477 dan log 5 = 0,699, maka log 45 adalah … (no. 4, Uan. 01-02)

a. 1,176 b. 1,431 c. 1,649 d. 1,653 e. 1,954

16. Nilai dari : ${}^{2}\log 8 - {}^{\frac{1}{2}}\log 0{,}25 + {}^{3}\log 27 + {}^{2}\log 1$ adalah … (no. 13, Uan. 02-03)
    a. –2 b. –1 c. 0 d. 1 e. 2

17. Bentuk sederhana dari : $(32)^{\frac{1}{5}} x \left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$ adalah … (no. 2, Uan. 03-04)
    a. $\frac{1}{2}$ b. 4 c. 6 d. $6\frac{2}{5}$ e. 8

18. Nilai dari : ${}^{3}\log \frac{1}{9} + {}^{3}\log 18 - {}^{3}\log 6$ adalah … (no. 11, Uan. 03-04)
    a. -2 b. -1 c. 1 d. 2 e. 3

19. Jika a = 27, b = 4 dan c = 3, maka nilai dari $(a^{\frac{1}{3}}.b^{\frac{3}{2}}).c^{-1}$ adalah … (no. 2, Uan. 04-05)
    a. – 72 b. -8 c. 0 d. 8 e. 72

20. Nilai dari : ${}^{5}\log 75 - {}^{3}\log 45 - {}^{5}\log 3 + {}^{3}\log 2$ adalah … (no. 8, Uan 04-05)
    a. – 5 b. – 1 c. 25/27 d. 1 e. 5

21. Bentuk sederhana dari pecahan $\frac{5}{2\sqrt{3}-4}$ adalah …
    A. $\frac{5}{2}.(\sqrt{3}+2)$ B. $\frac{5}{2}.(\sqrt{3}-2)$ C. $\frac{1}{5}.(\sqrt{3}+2)$ D. $\frac{1}{5}.(\sqrt{3}-2)$ E. $\frac{1}{2}.(\sqrt{3}+2)$

22. Bentuk rasional $\frac{6}{\sqrt{2}+\sqrt{5}}$ adalah …
    A. $2\sqrt{5}-2\sqrt{2}$ B. $2\sqrt{2}-2\sqrt{5}$ C. $2.(\sqrt{2}+\sqrt{5})$ D. $6.(\sqrt{2}-\sqrt{5})$ E. $\frac{1}{3}.(\sqrt{2}-\sqrt{5})$

23. Bentuk rasional dari $\frac{3-\sqrt{7}}{3+\sqrt{7}}$ adalah…..
    A. 1 + 6$\sqrt{7}$ B. 2 - 6$\sqrt{7}$ C. 2 + 6$\sqrt{7}$ D. 1 + 3$\sqrt{7}$ E. 1 - 3$\sqrt{7}$

24. Bentuk sederhana dari pecahan $\frac{5}{2\sqrt{3}-4}$ adalah …
    A. $\frac{5}{2}.(\sqrt{3}+2)$ B. $\frac{5}{2}.(\sqrt{3}-2)$ C. $\frac{1}{5}.(\sqrt{3}+2)$ D. $\frac{1}{5}.(\sqrt{3}-2)$ E. $\frac{1}{2}.(\sqrt{3}+2)$

25. Bentuk rasional $\frac{6}{\sqrt{2}+\sqrt{5}}$ adalah …
    A. $2\sqrt{5}-2\sqrt{2}$ B. $2\sqrt{2}-2\sqrt{5}$ C. $2.(\sqrt{2}+\sqrt{5})$ D. $6.(\sqrt{2}-\sqrt{5})$ E. $\frac{1}{3}.(\sqrt{2}-\sqrt{5})$

2

MEMECAHKAN MASALAH YANG BERKAITAN SISTEM PERSAMAAN DAN PERTIDAKSAMAAN

1. Menentukan himpunan penyelesaian pertidaksamaan linear dengan satu variabel
2. Menyelesaiakn sistem pertidaksamaan linear dengan dua variable

2.1 Persamaan Linier

Persamaan Linier 1 Variabel

Bentuk Umum : $ax + b = 0$, dimana $a,b \in R$, $a \neq 0$

Sifat-sifat :

(i). Nilai persamaan tidak berubah jika kedua ruas ditambah atau dikurangi dan dikalikan atau dibagi dengan bilangan yang sama.

(ii). Jika salah satu elemen dipindah ruas, maka :

a. penjumlahan berubah menjadi pengurangan dan sebaliknya.
b. perkalian berubah menjadi pembagian dan sebaliknya.

Contoh :

$5x + 3 = 8$
$5x + 3 - 3 = 8 - 3$ (kedua ruas dikurangi 3)
$5x = 5$
$5x \cdot 1/5 = 5 \cdot 1/5$ (kedua ruas dikalikan 1/5)
$x = 1$

Persamaan Linier 2 Variabel

Bentuk Umum : $ax + by + c = 0$, dimana $a,b,c \in R$, $a \neq 0$, $b \neq 0$
$px + qy + r = 0$, dimana $p,q,r \in R$, $p \neq 0$, $q \neq 0$

Cara penyelesaian : Metode Eliminasi dan Substitusi

Contoh : Tentukan himpunan Penyelesaian dari $2x + 3y = 2$ (1)
$x - y = 1$ (2)

Jawab : Eliminasi x pada (1) dan (2)

$$\begin{array}{rcll} 2x + 3y = 2 & |\times 1| \Leftrightarrow & 2x + 3y = 2 & \\ x - y = 1 & |\times 2| \Leftrightarrow & 2x - 2y = 2 & - \\ \hline & & 5y = 0 & \\ & & y = 0 & \end{array}$$

Substitusi y = 0 ke (2):
$x - y = 1$
$x - 0 = 1$
$x = 1$

Jadi Himpunan penyelesaian: { 1 , 0 }

<u>Pertidaksamaan Linier</u>

Bentuk Umum : $ax + b < 0$
$ax + b > 0$
$ax + b \leq 0$
$ax + b \geq 0$ dimana $a, b \in R$, $a \neq 0$.

Contoh :

Tentukan Himpunan penyelesaian dari : $3x – 15 < 0$

Penyelesaian : $3x – 15 < 0$
$3x < 15$
$x < 5$
Jadi Hp : $\{ x | x < 5 \}$.

Contoh :

Tentukan Himpunan Penyelesaian dari : $-2x + 14 \geq 0$.

Penyelesaian : $-2x + 14 \geq 0$
$-2x \geq -14$
$x \leq 7$
Jadi Hp : $\{ x | x \leq 7 \}$.

Latihan Soal

1. Jika x dan y merupakan penyelesaian dari system persamaan
$2x + 3y = 0$
$3x – 2y = -13$, maka nilai x + y adalah ……
a. -6 b. -5 c. -4 d. -2 e. -1

2. Jika p dan q merupakan penyelesaian dari system persamaan
$2p + q = 5$
$p – 2q = 0$, maka nilai p – q adalah ……
a. -2 b. -1 c. 1 d. 2 e. 3

3. Himpunan penyelesaian dari system persamaan
$y - x = -1$
$y – x^2 + 6x = 5$, adalah ……
a. {(6 ; 5)(1 ; 0)} c. {(5 ; 6)(0 ; 2)} e. {(8 ; 5)(2 ; 0)}
b. {(5 ; 6)(2 ; 0)} d. {(6 ; 5)(2 ; 0)}

4. Himpunan penyelesaian dari $\frac{x}{3} - 2 \leq \frac{5x+9}{2}$ adalah ……
a. { x| x ≥ -3 } c. { x| x ≤ 3 } e. { x| -3 < x < 3 }
b. { x| x ≥ 3 } d. { x| 3 < x < -3 }

5. Nilai x yang memenuhi $\frac{4x-3}{2} \geq \frac{2-x}{3}$ adalah ……
a. x ≤ 13/14 c. x ≥ 6/7 e. x ≥ -13/14
b. x ≥ 13/14 d. x ≤ 6/7

6. Himpunan Penyelesaian pertidaksamaan 5x – 6 ≥ 7x – 10 adalah ……
a. { x | x ≥ 2 } c. { x | x ≥ 2/3 } { x | x ≤ 2/3 }
b. { x | x ≤ 2 } d. { x | x < 2/3 }

7. Himpunan Penyelesaian dari pertidaksamaan $\frac{1-2x}{3} < 3$, $x \in R$ adalah …
a. { x | x > -4 } c. { x | x > 4 } e. { x | x > -8 }

b. { x | x < 4 } d. { x | x < -4 }

8. Himpunan Penyelesaian pertidaksamaan 8 + 2x ≤ 12 + 6x adalah ……
   a. { x | x ≤ -1 } c. { x | x ≤ -3 } e. { x | x ≤ -5 }
   b. { x | x ≥ -1 } d. { x | x ≥ -5 }
9. Nilai obyektif z = 2x – 3y yang memenuhi sistem persamaan x + 2y = 3 dan 2x – 5y = 15 adalah …
   a. 10 b. 11 c. 13 d. 15 e. 17

10. Jika x dan y adalah penyelesaian dari sistem persamaan linier 4x + 3y = 13 dan x + y = 4 maka 2x – y = …
   a. – 2 b. – 1 c. 1 d. 2 e. 5

11. Harga 3 kg mangga dan 1 kg jeruk adalah Rp 25.500,00 sedang harga 4 kg mangga dan 2 kg jeruk Rp 42.000,00. Harga 1 kg mangga adalah ….
   a. Rp 4.000,00 b. Rp 4.500,00 c. Rp 8.500,00 d. Rp 9.000,00 e. Rp 10.500,00

12. Harga tiket bus Jakarta – Surabaya untuk kelas ekonomi Rp 25.000,00 dan kelas eksekutif Rp 65.000,00. Jika dari 200 tiket yang terjual diperoleh uang Rp 9.600.000,00, maka banyaknya penumpang kelas ekonomi dan kelas eksekutif masing-masing adalah ….
   a. 75 orang dan 125 orang c. 85 orang dan 115 orang e. 115 orang dan 85 orang
   b. 80 orang dan 120 orang d. 110 orang dan 90 orang

13. Sebuah hotel mempunyai dua tipe kamar yang masing-masing berdaya tampung 3 orang dan 2 orang. Jika jumlah kamar seluruhnya 32 kamar dengan daya tampung seluruhnya 84 orang, berapa banyak kamar yang berdaya tampung 2 orang ? (no. 5, Uan 98-99)
   a. 6 b. 12 c. 14 d. 16 e. 20

14. Harga 2 buah buku dan 3 buah penggaris adalah Rp 5.400 sedangkan harga 3 buah buku dan 4 buah penggaris Rp 7.700. Harga sebuah penggaris adalah … (no. 7, Uan 99-00)
   a. Rp 1.500 b. Rp 1.200 c. Rp 1.000 d. Rp 900 e. Rp 800

15. Himpuanan penyelesaian 4x – 6 > 6x + 4, x∈ Himpunan bilangan Real adalah … (no.8, Uan 99-00)
   a. {x │ x > -5} b. {x │ x > 5} c. {x │ x - 5} d. {x │ x < 5} e. {x │ x ≤ - 5}

16. Harga 2 buah buku dan 2 buah pensil Rp 8.800. Jika harga sebuah buku Rp 600 lebih murah daripada harga sebuah pensil, maka harga sebuah buku adalah … (no. 4, Uan 00-01)
   a. Rp 1.400 b. Rp 1.600 c. Rp 1.900 d. Rp 2.000 e. Rp 2.500

17. Himpunan penyelesaian dari pertidaksamaan $\frac{1-2x}{3} < 3$, x ∈ R adalah … (no. 5, Uan 00-01)
   a. {x │ x > -4} b. {x │ x < 4} c. {x │ x > 4} d. {x │ x < -4} e. {x │ x > -8}

3 MEMECAHKAN MASALAH YANG BERKAITAN FUNGSI, PERSAMAAN FUNGSI LINEAR DAN FUNGSI KUADRAT

1. Menetukan persamaan garis
2. Menggambar grafik fungsi kuadrat

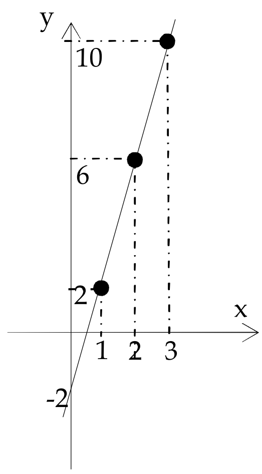
3.1 Persamaan Garis

Secara umum persamaan fungsi linear ditulis :

y = ax + b , dengan a dan b $\in$ R.

Contoh : Gambarlah grafik yang persamaannya y = 4x – 2.
Untuk menggambar grafik fungsi linear dapat digunakan 2 cara, yaitu dengan :
a. dengan tabel

y = 4x – 2		
X	y	Titik
-1	- 6	(-1 , -6)
0	- 2	(0 , -2)
1	2	(1 , 2)
2	6	(2 , 6)
3	10	(3 , 10)



b. dengan titik potong sb-x dan sb-y
1. perpotongan dengan sumbu-x maka syarat : y =0
   y = 4x – 2
   0 = 4x – 2
   4x = 2
   x = ½ Jadi koordinat titik potongnya : (½ , 0)
2. perpotongan dengan sumbu-y maka syarat : x = 0
   y = 4x – 2
   y = 4.0 – 2
   y = - 2 Jadi koordinat titik potongnya : (0 , -2)

Titik potong sumbu-x dan titik potong sumbu-y dihubungkan, maka terbentuklah garis y = 4x – 2

Gradien
Gradien adalah angka kemiringan grafik yaitu kemiringan terhadap sumbu- x positif. Gradien dinotasikan dengan huruf m.
Jika sudut yang dibentuk antara garis terhadap sumbu-x positif adalah $\text{tg}\,\alpha = \text{m}$, maka :

$$\text{tg}\,\alpha = \text{m} = \frac{\text{komponen y}}{\text{komponen x}}$$

Sifat-sifat grafik fungsi linear :
a. Jika m = 0 maka grafik sejajar sumbu-x.
b. Jika m > 0 maka grafik condong ke kanan (0° < α < 90°).
c. Jika m < 0 maka grafik condong ke kiri (90° < α < 180°).

Menentukan Persamaan Garis Melalui Satu Titik dengan Gradien m
Persamaan garis melalui satu titik P (x_1,y_1) dan mempunyai gradient m, dapat ditentukan dengan persamaan :

$$\mathbf{y - y_1 = m\,(x - x_1)}$$

Contoh :

Tentukan persamaan garis yang melalui P (2 , 3) dan mempunyai gradien 2.
Penyelesaian :
$y - y_1 = m\ (x - x_1)$
$y - 3 = 2.\ (x - 2)$
$y = 2x - 4 + 3$
$y = 2x - 1$

Menentukan Persamaan Garis yang Melalui Dua Titik
Persamaan garis yang melalui dua titik P (x_1,y_1) dan Q (x_2,y_2) dapat ditentukan dengan persamaan :
$\frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{x-x_1}{x_2-x_1}$ atau $y - y_1 = m\ (x - x_1)$ dengan $m = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$

Contoh :
Tentukan persamaan garis yang melalui titik P (3, -2) dan Q (-4 , 5)!
Penyelesaian :

$\rightarrow \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{x-x_1}{x_2-x_1}$

$\rightarrow \frac{y-(-2)}{5-(-2)} = \frac{x-3}{(-4)-3}$

$\rightarrow \frac{y+2}{7} = \frac{x-3}{-7}$

$\rightarrow y + 2 = \frac{7}{-7}(x - 3)$

$\rightarrow y = -x + 3 - 2$

$\rightarrow y = -x + 1$

Menentukan Sudut yang Dibentuk oleh Grafik Fungsi
Untuk menentukan sudut yang dibentuk oleh grafik fungsi terhadap sumbu-x positif dapat ditentukan dengan gradiennya. ($\text{tg}\ \alpha = m$)

Contoh :
Tentukan sudut yang dibentuk oleh garis $2\sqrt{3}x - 2y = 1$!
Penyelesaian : $2\sqrt{3}x - 2y = 1$
$-2y = 1 - 2\sqrt{3}x$
$y = \sqrt{3}x - ½$
Dengan melihat hasil akhir persamaan, maka $m = \sqrt{3}$
$\text{tg}\ \alpha = \sqrt{3}$
$\alpha = 60°$

Menentukan Titik Potong Dua Garis
Untuk menentukan titik potong dapat digunakan cara eliminasi, substitusi atau determinan.
Contoh :
Tentukan titik potong garis 4x + 3y = 11 dengan garis 2x – 5y = -1.
Penyelesaian :

$4x + 3y = 11 \quad x1 \quad 4x + 3y = 11$
$2x - 5y = -1 \quad x2 \quad 4x - 10y = -2 \quad -$

$13y = 13$
$y = 1$

maka nilai x : $2x - 5y = -1$
$2x - 5(1) = -1$
$2x = -1 + 5$
$2x = 4$ maka nilai $x = 2$

Jadi kedua garis berpotongan di koordinat (2 , 1).

Hubungan Dua Garis Berpotongan Tegak Lurus.
Dua buah garis berpotongan tegak lurus jika : $m_1 . m_2 = -1$
Contoh :

Tentukan persamaan garis yang melalui titik (-2 , 3) dan tegak lurus terhadap garis 2y - 4x + 8 = 0 !
Penyelesaian :
Mengubah persamaan garis 2y - 4x + 8 = 0 ke bentuk umum persamaan garis :
ke bentuk y = mx + c , yaitu : 2y - 4x + 8 = 0
y = 2x – 4 . gradien garis 1 (m_1) = 2

Tegak lurus berlaku : $m_1 . m_2 = -1$
$2 m_2 = -1$ maka $m_2 = - ½$

Persamaan garis yang dicari adalah : $y – y_1 = m (x – x_1)$
y – 3 = - ½ (x – (-2))
y = - ½x - 1 + 3
y = - ½x + 2 atau 2y = - x + 4

Hubungan Dua Buah Garis yang Sejajar
Dua buah garis dikatakan sejajar jika : $m_1 = m_2$
Contoh :
Sebuah garis melalui titik (6 , -4) dan sejajar dengan garis -3y + 9x +12 = 0. Tentukan persamaan garis tersebut !
Penyelesaian :
Mengubah persamaan garis -3y + 9x +12 = 0 ke bentuk umum persamaan garis :
ke bentuk y = mx + c , yaitu : -3y + 9x +12 = 0
-3y = -9x – 12
y = 3x + 4 gradien garis 1 (m_1) = 3
Dua buah garis sejajar berlaku : $m_1 = m_2$
Maka gradien $m_2 = 3$
Persamaan garis yang dicari adalah : $y – y_1 = m (x – x_1)$
y – (-4) = 3(x – 6)
y = 3x – 18 – 4
y = 3x – 22

3.2 Grafik Fungsi Kuadrat

Bentuk umum fungsi kuadrat : **f(x) = ax² + bx + c** , dengan a, b, dan c bilangan real a ≠ 0.
$D = b^2 – 4ac$ disebut diskriminan.
$f(x) = ax^2 + bx + c$ dapat juga ditulis **$y = ax^2 + bx + c$.**

Grafik fungsi kuadrat berrbentuk parabola dengan sifat :
(i) Jika a > 0 maka parabola terbuka ke atas dan mempunyai nilai balik minimum
(ii) Jika a < 0 maka parabola terbuka ke bawah dan mempunyai nilai balik minimum
(iii) Jika D > 0 maka parabola memotong sumbu x di dua titik
(iv) Jika D = 0 maka parabola memotong sumbu x di satu titik (menyinggung sumbu x)
(v) Jika D < 0 maka parabola tidak memotong sumbu x

Langkah-langkah Menggambar Grafik Fungsi Kuadrat
a. Menentukan sumbu simetri yaitu $x = \frac{-b}{2a}$
b. Menentukan titik puncak yaitu P (x,y) dengan $x = \frac{-b}{2a}$ dan $y = \frac{-D}{4a}$
c. Menentukan titik potong dengan sumbu y untuk x = 0
d. Bila D > 0 tentukan titik potong dengan sumbu x untuk y = 0
Bila D ≤ 0 tentukan beberapa titik di sekitar sumbu simetri.

Contoh 1:
Gambarlah grafik dari $y = - x^2 + 2x$
Penyelesaian :
$y = - x^2 + 2x \rightarrow a = -1, b = 2, c = 0$
$D = b^2 – 4ac$
$D = (2)^2 – 4(-1) (0) = 4$

Sumbu simetri → $x = \frac{-b}{2a} = \frac{-2}{2(-1)} = 1$

$y = \frac{-D}{4a} = \frac{-4}{4(-1)} = 1$ → Nilai balik maksimum : 1

Jadi titik puncak (1 , 1)

Titik potong dengan sumbu-x, y = 0

$-x^2 + 2x = 0$

$x.(-x + 2) = 0$

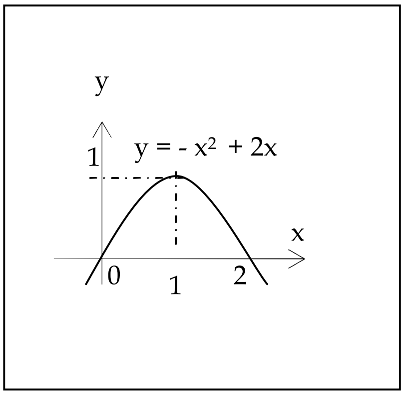
$-x = 0$ atau $x = 2$

Jadi titik potong sumbu-x adalah : (0 , 0) dan (2 , 0).

Titik potong dengan sumbu-y, x = 0

$y = -(0)^2 + 2(0) = 0$

Jadi titik potong dengan sumbu y adalah (0 , 0).



Contoh 2 :

Tentukan persamaan parabola melalui titik (0, -5) dan titik puncak (3 , 4)!

Penyelesaian :

$\mathbf{y = a.(x - p)^2 + q}$ → p dan q : titik puncak
→ x dan y : titik yang dilalui

$-5 = a.(0 - 3)^2 + 4$

$-5 = 9a + 4$

$9a = 9 \rightarrow a = -1$

maka persamaan parabola : $y = -1(x - 3)^2 + 4$

$y = -1(x^2 - 6x + 9) + 4$

$y = -x^2 + 6x - 5$

Latihan Soal

1. Persamaan garis yang melalui titik (-1 , 1) dan titik (-2 , 6) adalah … (no. 8, Uan. 98-99)
a. y = 5x – 4 b. y = 5x + 6 c. y = - 5x - 4 d. y = - 5x + 4 e. y = - 5x - 6

2. Nilai maksimum dari fungsi kuadrat $f(x) = -x^2 + 2x + 15$ adalah … (no. 9, Uan. 98-99)
a. – 32 b. – 16 c. 1 d. 16 e. 32

3. Grafik $y = 2x^2 - x - 6$ memotong sumbu x di titik … (no. 8, Uan. 97-98)
a. (-3/2 , 0) dan (2 , 0) c. (3 , 0) dan (-2 , 0) e. (1/3 , 0) dan (-3 , 0)
b. (3/2 , 0) dan (-2 , 0) d. (3 , 0) dan (-1 , 0)

4. Titik puncak (ekstrim) grafik $y = x^2 - 4x + 3$ adalah … (no. 9, Uan. 97-98)
a. (2 , -1) b. (2 , 1) c. (-2 , 1) d. (-2 , 7) e. (-2 , 15)

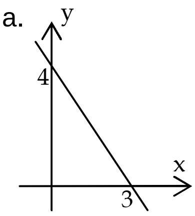
5. Persamaan garis yang melalui titik A (3 , 2) dan tegak lurus dengan persamaan 3x + y = - 2 adalah … (no. 10, Uan. 99-00)
a. 3x – 3y – 1 = 0 b. 3x – y + 10 = 0 c. 3x – y – 3 = 0 d. x – 3y + 3 = 0 e. x – 3y – 3 = 0

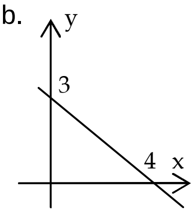
6. Koordinat titik balik grafik fungsi $f(x) = x^2 - 6x + 8$ adalah … (no. 11, Uan. 99-00)
a. (3 , -1) b. (-3 , -1) c. (4 , -2) d. (6 , 8) e. (-6 , -8)

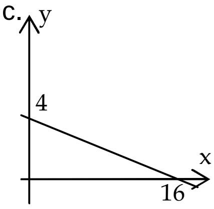
7. Persamaan garis yang melalui titik potong garis dengan persamaan 2x + 5y = 1 dan x – 3y = - 5 serta tegak lurus pada garis dengan 2x – y + 5 = 0 adalah … (no. 8, Uan. 00-01)
a. y + x = 0 b. 2y + x = 0 c. y = -2x + 2 d. y + 2x + 2 = 0 e. y = - ½ x + 2

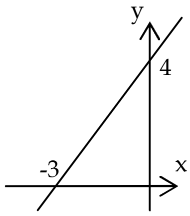
8. Nilai m agar grafik fungsi $y = (m - 1)x^2 - 2mx + (m - 3)$ selalu berada di bawah sumbu-x (definit negatif) adalah … (no. 9, Uan. 00-01)
a. m = 1 b. m > 1 c. m < 1 d. m > 3/4 e. m < 3/4

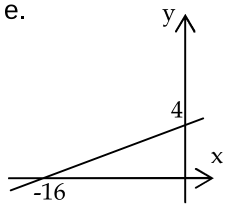
9. Gambar grafik yang sesuai dengan persamaan $\frac{x-4}{4}+y=3$ adalah … (no. 8, Uan. 01-02)

a. 

b. 

c. 

d. 

e. 

10. Sebuah peluru ditembakkan vertikal dengan persamaan lintasan h(t) = 150 t – $5t^2$. Tinggi maksimum peluru aadalah … (No. 29, Uan. 01-02)

a. 925 m b. 1015 m c. 1025 m d. 1125 m e. 1225 m

11. Grafik fungsi y = $4x^2$ – 8x – 21 memotong sumbu x, sumbu y dan mempunyai titik balik P berturut-turut adalah … (no. 8, Uan. 02-03)

a. x = - 3/2, x = 7/2, y = 21 dan P (1 , 25)

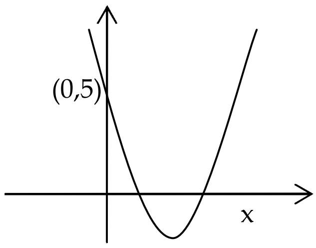
b. x = 3/2, x = - 7/2, y = 21 dan P (- 1 , 25)

c. x = - 3/2, x = 7/2, y = - 21 dan P (1 , - 25)

d. x = 3/2, x = - 7/2, y = - 21 dan P (1 , - 25)

e. x = 3/2, x = - 7/2, y = - 21 dan P (- 1 , - 25)

12. Persamaan grafik fungsi kuadrat pada gambar disamping adalah … (no. 7, Uan. 02-03)



a. y = x^2 – 4x + 5

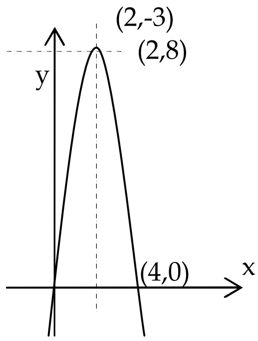
b. y = $2x^2$ – 8x + 5

c. y = x^2 + 4x + 5

d. y = $2x^2$ + 8x + 5

e. y = $2x^2$ – 4x + 5

13. Persamaan fungsi pada grafik di samping adalah … (no. 4, Uan. 04-05)



a. y = $2x^2$ + 8x

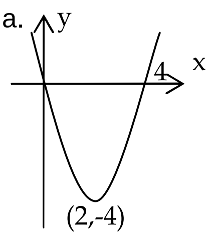
b. y = $2x^2$ – 8x

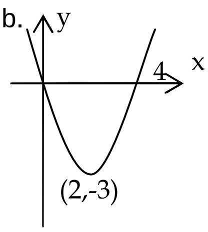
c. y = - $2x^2$ + 8x

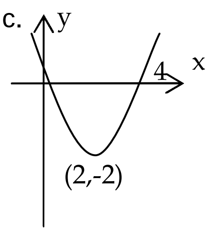
d. y = $2x^2$ – 8x

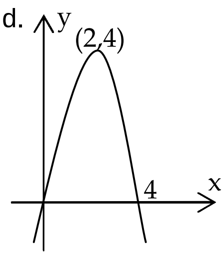
e. y = - $2x^2$ –8x

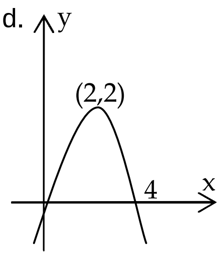
14. Gambar sketsa grafik fungsi y = x^2 – 4x adalah …

a. 

b. 

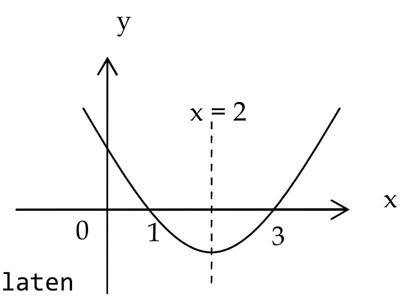
c. 

d. 

d. 

15. Gambar grafik di samping adalah grafik dari …

a. y = x^2 – 3x + 4 c. y = x^2 +4x + 3 e. y = x^2 – 3x + 3



b. $y = x^2 - 4x + 3$ d. $y = 2x^2 - 8x + 3$

4 MENYELESAIKAN MASALAH PROGRAM LINEAR

1. Menuliskan model matematika
2. Menghitung nilai optimum suatu masalah program linear

Program linear adalah suatu metode untuk mencari nilai maksimum atau minimum dari bentuk linear pada daerah yang dibatasi oleh grafik-grafik fungsi linear. Model Matematika adalah suatu cara untuk memandang suatu permasalahan atau suatu persoalan dengan menggunakan sistem pertidaksamaan Matematika. Masalah –masalah yang akan diselesaikan dengan kaidah program linear biasanya memenuhi beberapa syarat untuk dipenuhi oleh peubah-peubah seperti x dan y. Oleh karena itu dalam program linear langkah pertama adalah menterjemahkan syarat-syarat tersebut ke bentuk sostem pertidaksamaan. Sistem pertidaksamaan yang mengungkapkan semua syarat yang harus dipenuhi oleh x dan y disebut ***Model Matematika***.

Catatan :

Untuk menyusun suatu model matematika diperlukan ketrampilan memahami implikasi dari semua pernyataan yang memenuhi syarat-syarat tertentu.

Pernyataan	Pertidaksamaan	Dinotasikan
x tidak kurang dari 5	$x = 5$ atau $x > 5$	$x \geq 5$
x sekurang-kurangnya 7	$x = 7$ atau $x > 7$	$x \geq 7$
x maksimum 3	$x = 3$ atau $x < 3$	$x \leq 3$
x diantara 2 dengan 8	$x > 2$ dan $x < 8$	$2 < x < 8$
x kurang kurang dari 13 tetapi tidak kurang dari 3	$x \geq 3$ dan $x < 13$	$3 \leq x < 13$

Contoh :

Tentukan daerah himpunan penyelesaian untuk peubah x dan y yang memenuhi syarat-syarat berikut :

1. x dan y masing-masing tidak kurang dari 0.
2. Jumlah 2x dan y tidak lebih dari 6.
3. Jumlah 3x dan 2y sekurang-kurangnya 12.

Jawab :

Sistem pertidaksamaan :

1. $x \geq 0$; $y \geq 0$
2. $2x + y \leq 6$
3. $3x + 2y \geq 12$

Melukis Grafis :

$2x + y = 6$	$3x + 2y = 12$

x	0	1	3
y	6	4	0

x	0	2	4
y	6	3	0

Daerah himpunan penyelesaian sistem pertidaksamaan di atas ditunjukkan dalam gambar berikut ini :

Contoh :

Untuk membuat suatu jenis roti A diperlukan 200 gram tepung dan 25 gram mentega dan untuk roti jenis B diperlukan 100 gram tepung dan 50 gram mentega. Jika tersedia 4 kg tepung dan 1,2 kg mentega, tuliskanlah dalam model matematika untuk permasalahan tersebut.

Jawab :

Misalkan : Jenis Roti A = x
Jenis Roti B = y

Maka permasalahan di atas dapat dituangkan dalam rabel sebagai berikut :

Bahan	Roti Jenis A (gram)	Roti Jenis B (gram)	Persediaan Bahan (gram)
Tepung	200	100	4.000
Mentega	25	50	1.200

Maka terjadi hubungan :
Kebutuhan tepung : $200\ x + 100\ y \leq 4.000 \rightarrow 2\ x + y \leq 40$
Kebutuhan mentega : $25\ x + 50\ y \leq 1.200 \rightarrow x + 2\ y \leq 48$

Karena x dan y menyatakan banyaknya roti, maka harus berlaku $(x,y) \in$ Cacah dan $(x,y) \geq 0$. Jadi model matematikanya adalah : $2x + y \leq 40$; $x + 2\ y \leq 48$; $x \geq 0$; $y \geq 0$ dan $(x,y) \in$ Cacah.

Langkah/langkah untuk menentukan nilai optimum suatu masalah program linear adalah:

1. mengubah soal verbal ke dalam bentuk model matematika.
2. menggambar grafik dari model matematika
3. menentukan daerah penyelesaian
4. menentukan nilai optimum dari fungsi obyektif

Contoh :

Seorang pengrajin patung akan membuat beberapa patung Dewi Sri dan beberapa patung Ganesha. Sebuah patung Dewi Sri membutuhkan 2 gram emas dan 2 gram perak untuk lapisan luarnya. Sedangkan sebuah patung Ganesha membutuhkan 3 gram emas dan 1 gram perak untuk lapisan luarnya. Persediaan emas dan perak pengrajin masing-masing 12 gram dan 8 gram.
Berapa banyak masing-masing patung yang dapat dibuat dengan persediaan bahan tersebut ?
Berapa banyak masing-masing patung yang harus dibuat sehingga memperoleh jumlah maksimum ?
Jika patung Dewi Sri akan dijual dengan harga Rp 500.000 perbuah dan untuk patung Ganesha Rp 400.000 perbuah, berapa banyak masing-masing jenis patung yang harus dibuat agar pengrajin memperoleh pendapatan sebanyak-banyaknya ?
Jawab :

a. Untuk menjawab persoalan tersebut, terlebih dahulu kita menterjemahkan ke dalam model matematika. Andaikata banyak patung Dewi Sri adalah x dan patung Ganesha adalah y, maka bahan yang dibutuhkan serta persediaan yang ada dapat disajikan pada tabel berikut :

	Emas	Perak
Patung Dewi Sri	2x	2x
Patung Ganesha	3y	y
Persediaan	12	8

Dengan melihat tabel tersebut kita dapat dengan mudah menyusun model matematikanya sebagai berikut :

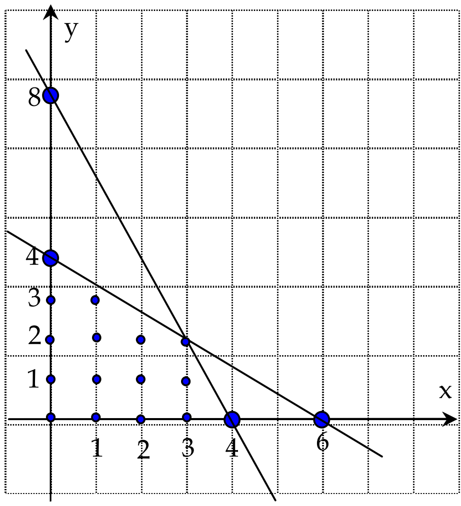
$2x + 3y \le 12$ dan $2x + y \le 8$

Oleh karena x dan y adalah bilangan (Cacah) non negatif, maka $x \ge 0$ dan $y \ge 0$. Sehingga sistem pertidaksamaan tersebut selengkapnya adalah :

(1) $2x + 3y \le 12$; (2) $2x + y \le 8$; (3) $x \ge 0$; (4) $y \ge 0$

Selanjutnya kita gambar daerah himpunan penyelesaian sistem pertidaksamaan di atas dengan bantuan tabel berikut :

	2x + 3y = 12			2x + y = 8		
x	0	3	6	0	1	4
y	4	2	0	8	6	0



Penyelesaian yang mungkin dari persoalan di atas adalah pasangan berurutan bilangan cacah (x,y) yang memenuhi sistem tersebut. Daerah yang memenuhi pasangan berurutan tersebut dinamakan daerah ***fisibel*** (***feasible***).

Nilai yang kita cari dapat dinyatakan dengan bentuk fungsi sasaran yaitu :

f (x,y) = 500.000x + 400.000y

Perhatikan tabel jenis patung yang mungkin dapat dibuat beserta hasil pendapatannya :

(x,y)	500.000x + 400.000y
(0,4)	1.600.000
(3,2)	2.300.000
(4,0)	2.000.000

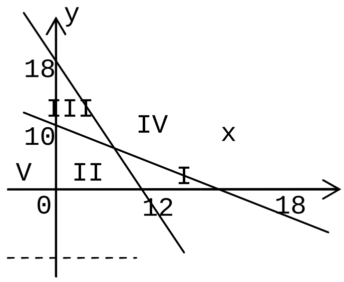
Dari tabel hasil pendapatan yang mungkin tampak bahwa pendapatan yang terbanyak adalah Rp 2.300.000 jika pengrajin membuat 3 buah patung Dewi Sri dan 2 patung Ganesha, yaitu pada titik (3,2) → f (3,2) = 500.000 (3) + 400.000 (2) = 2.300.000

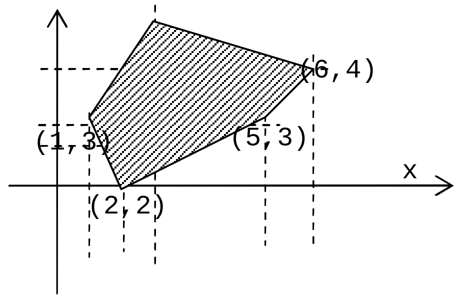
Latihan soal

1. Tempat parkir seluas 360 m^2 dapat menampung tidak lebih dari 30 kendaraan. Untuk parkir sebuah sedan diperlukan rata-rata 6 m^2 dan sebuah bus 24 m^2. Jika banyak sedan dinyatakan dalam x dan bus dalam y, maka model matematika dari pernyataan di atas adalah … (no. 19, Uan 97-98)
   a. $x+y \le 30$, $x+4y \le 60$, $x;y \ge 0$, x,y 0 B
   b. $x+y \le 30$, $4x+y \le 60$, $x;y \ge 0$, x,y 0 B
   c. $x+y < 30$, $4x+y \le 60$, $x;y \ge 0$, x,y 0 B
   d. $x+y < 30$, $x+4y < 60$, $x;y \ge 0$, x,y 0 B
   e. $x+y \le 30$, $4x+y < 60$, $x;y \ge 0$, x,y 0 B

2. Daerah penyelesaian dari sistem pertidaksamaan, terletak pada daerah … (no. 20, Uan 97-98)
   $3x + 2y \le 36$
   $x + 2y \ge 20$
   $x, y \ge 0$
   a. I b. II c. III d. IV e. V

y

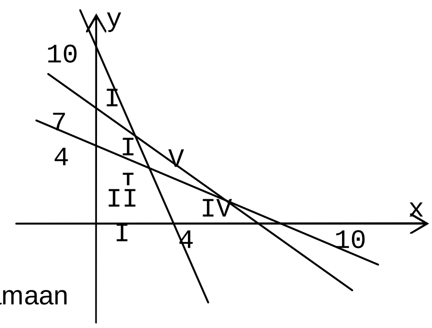




3. Daerah yang diarsir pada gambar di samping merupakan daerah penyelesaian sistem pertidak-samaan linier. Nilai maksimum fungsi obyektif $f(x,y) = x + 3y$ adalah … (no. 21, Uan 97-98)
   a. 8 b. 10 c. 14 d. 18 e. 22

4. Serorang pemborong pengecatan rumah mempunyai persediaan 80 kaleng cat putih dan 60 kaleng cat abu-abu. Pemborong tersebut mendapat tawaran untuk mengecat ruang tamu dan ruang tidur. Setelah dihitung ternyata 1 ruang tamu menghabiskan 2 kaleng cat putih dan 1 kaleng cat abu-abu, sedangkan 1 ruang tidur menghabiskan cat masing-masing warna sebanyak 1 kaleng. Jika banyak ruang tamu dinyatakan dengan x dan ruang tidur dengan y, maka model matematika dari pernyataan di atas adalah … (no. 19, Uan 98-99)
   a. $2x+y \le 80$; $x+y \le 60$; $x \ge 0$; $y \ge 0$
   b. $x+y \le 80$; $2x+y \ge 60$; $x \ge 0$; $y \ge 0$
   c. $2x+y \ge 80$; $x+y \le 60$; $x \ge 0$; $y \ge 0$
   d. $2x+y \le 80$; $x+y \ge 60$; $x \ge 0$; $y \ge 0$
   e. . $x+y \le 80$; $2x+y$ .60 ; $x \ge 0$; $y \ge 0$

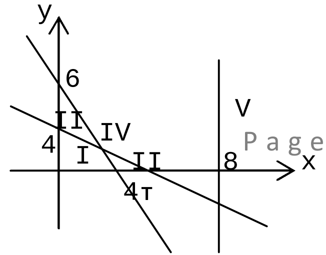
`



5. Daerah penyelesaian model matematika yang ditunjukkan sistem pertidaksamaan :
   $5x + 2y \le 20$
   $7x + 10y \le 70$
   $2x + 5y \ge 20$
   $x; y \ge 0$, adalah daerah … (no. 20, Uan 98-99)
   a. I b. II c. III d. IV e. V

6. Nilai minimum fungsi obyektif $f(x,y) = 4x + 3y$ dari sistem pertidaksamaan
   $2x + y \ge 11$
   $x + 2y \ge 10$; $x,y \ge 0$, adalah … (no. 21, Uan 98-99)
   a. 15 b.22 c. 25 d. 33 d. 40

7. Seorang penjual buah-buahan yang menggunakan gerobak mempunyai modal Rp 1.000.000. Ia telah membeli jeruk dengan harga Rp 4.000 per kg dan pisang Rp 1.600 per kg. Jika banyak jeruk yang dibeli x kg, banyak pisang y kg sedangkan muatan gerobak tidak dapat melebihi 400 kg maka sistem pertidaksamaan di atas adalah … (no. 21, Uan 99-00)
   a. $5x + 4y \le 2500$; $x + y \le 400$; $x \ge 0$; $y \ge 0$
   b. $5x + 4y \le 1250$; $x + y \le 400$; $x \ge 0$; $y \ge 0$
   c. $5x + 2y \le 2500$; $x + y \le 400$; $x \ge 0$; $y \ge 0$

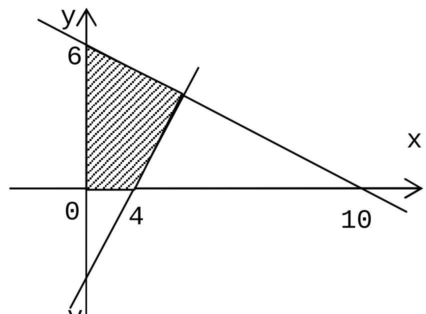


d. $5x + 2y \le 1250$; $x + y \le 400$; $x \ge 0$; $y \ge 0$
e. $5x + \quad y \le \; 750$; $x + y \le 400$; $x \ge 0$; $y \ge 0$

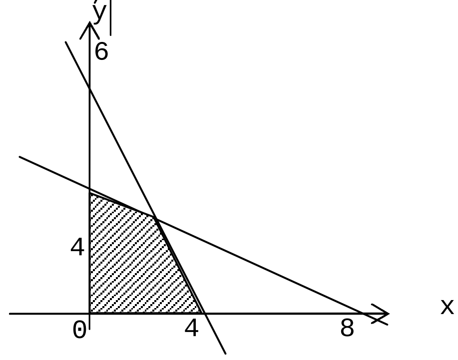
8. Daerah yang merupakan penyelesaian dari sistem pertidaksamaan : $3x + 2y \ge 12$; $x + 2y \le 8$; $0 \le x \le 8$; $y \ge 0$, seperti pada gambar di samping adalah …(no.22,Uan 99-00).
a. I   b. II   c. III   d. IV   e. V

9. Pak Daud membeli es krim jenis I dengan harga per buah Rp 500 dan es krim jenis II dengan harga Rp 400 per buah. Lemari es yang dipunyai Pak Daud untuk menyimpan es krim tersebut tidak dapat memuat lebih dari 300 buah dan uang yang dipunyai Pak Daud hanya Rp 140.000. Jika es krim tersebut dijual kembali dengan mengambil untung masing-masing jenis Rp 100 per buah maka banyak es krim jenis I dan II yang harus dibeli Pak Daud agar jika terjual seluruhnya mendapat untung sebesar-besarnya, masing-masing adalah … (no. 23, Uan 99-00)
a. 200 buah dan 100 buah   c. 100 buah dan 200 buah   e. 50 buah dan 250 buah
b. 150 buah dan 150 buah   d. 75 buah dan 125 buah

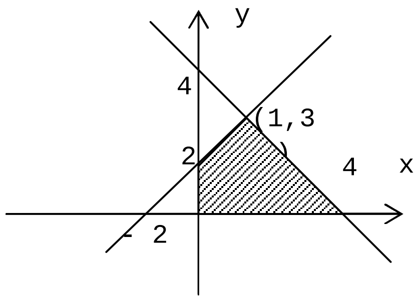
10. Suatu pesawat udara mempunyai tempat duduk tidak lebih dari 48 penumpang.Setiap penumpang kelas utama boleh membawa bagasi 60 kg sedang untuk kelas ekonomi 20 kg. Pesawat itu hanya dapat membawa bagasi 1.440 kg, bila x dan y berturut-turut menyatakan banyak penumpang kelas utama dan ekonomi, maka model matematika dari persoalan di atas adalah … (no. 19, Uan 00-01)
a. $x + y \le 48$; $3x + y \ge 72$; $x,y \ge 0$ d. $x + y \ge 48$; $x + 3y \ge 72$; $x,y \ge 0$
b. $x + y \le 48$; $x + 3y \le 72$; $x,y \ge 0$ e. $x + y \ge 48$; $x + 3y \le 72$; $x,y \ge 0$
c. $x + y \le 48$; $3x + y \le 72$; $x,y \ge 0$



11. Daerah yang diarsir pada gambar di samping adalah himpunan penyelesaian dari sistem pertidaksamaan … (no.20, Uan 00-01)
a. $5x + 3y \le 30$; $x - 2y \ge 4$; $x \ge 0$; $y \ge 0$
b. $5x + 3y \le 30$; $x - 2y \le 4$; $x \ge 0$; $y \ge 0$
c. $3x + 5y \le 30$; $2x - y \ge 4$; $x \ge 0$; $y \ge 0$
d. $3x + 5y \le 30$; $2x - y \le 4$; $x \ge 0$; $y \ge 0$
e. $3x + 5y \ge 30$; $2x - y \le 4$; $x \ge 0$; $y \ge 0$

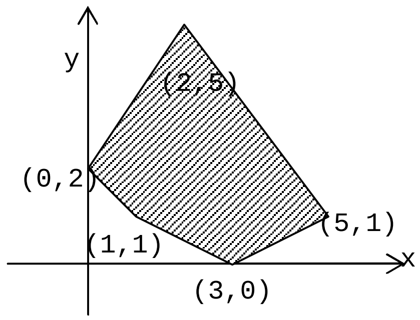


12. Daerah yang diarsir pada gambar disamping adalah himpunan penyelesaian suatu sistem pertidak-samaan. Nilai maksimum untuk $5x + 4y$ dari daerah penyelesaian tersebut adalah … (no. 21, Uan 00-01)
a. 40   c. 24   e. 16
b. 28   d. 20



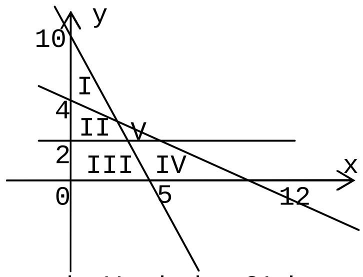
13. Daerah yang diarsir pada grafik di samping adalah daerah penyelesaian suatu sistem pertidaksamaan, nilai maksimum fungsi $P = 2x + 4y$ adalah …
a. 16   c. 12   e. 8
b. 14   d. 10

14. Daerah yang diarsir adalah daerah himpunan penyelesaian permasalahan program linear. Nilai maksimum dari fungsi tujuan z = 2x + 5y adalah … (no. 14, Uan 02-03)
a. 6 c. 10 e. 29
b. 7 d. 15



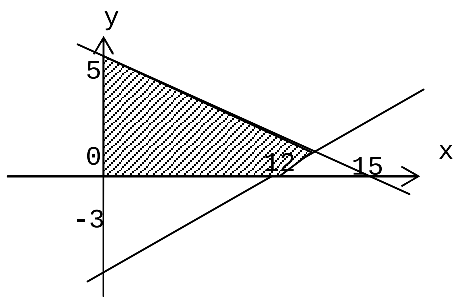
15. Nilai optimum z = 5x + 2y dari model matematika berikut :
$3x + 2y \leq 36.000$
$x + 2y \leq 20.000$
$x ; y \geq 0$, adalah … (no. 22, Uan 03-04)
a. 20.000 b. 52.000 c. 60.000 d. 86.000 e. 100.000

16. Daerah penyelesaian model matematika :
$x + 3y \leq 12$
$2x + y \geq 10$
$y \leq 2$
$x ; y \geq 0$ adalah daerah … (no. 23, Uan 03-04)
a. I b. II c. III d. IV e. V



17. Pengusaha perumahan akan membangun dua macam tipe rumah. Untuk tipe 21 luas tanah yang diperlukan 60 m^2 dan tipe 36 luas tanah 90 m^2. Jika banyaknya rumah yang akan dibangun tidak lebih dari 800 unit dan luas tanah yang tersedia adalah 54.000 m^2, maka model matematika dari permasalahan tersebut adalah … (no. 34, Uan 03-04)
a. $2x + 3y \leq 54.000$; $x+ y \leq 800$; $x \geq 0$; $y \geq 0$
b. $2x + 3y \leq 1800$; $x+ y \leq 800$; $x \geq 0$; $y \geq 0$
c. $3x + 2y \leq 800$; $x+ y \leq 54.000$; $x \geq 0$; $y \geq 0$
d. $3x + 2y \leq 800$; $x+ y \leq 1800$; $x \geq 0$; $y \geq 0$
e. $2x + 3y \geq 1800$; $x+ y \leq 800$; $x \geq 0$; $y \geq 0$

18. Sistem pertidaksamaan linier untuk daerah yang diarsir pada gambar di samping adalah … (no. 17, Uan 04-05)
a. $x \geq 0$; $y \geq 0$; $x - 4y \leq 12$; $3x+ 9y < 45$
b. $x > 0$; $y > 0$; $x - 4y \geq 12$; $3x + 9y \geq 45$
c. $x \geq 0$; $y \geq 0$; $x - 4y \geq 12$; $3x+ 9y \geq 45$
d. $x \geq 0$; $y \geq 0$; $x - 4y \leq 12$; $3x+ 9y \leq 45$
e. $x \geq 0$; $y > 0$; $x - 4y \leq 12$; $3x+ 9y \leq 45$



19. Seorang pemborong mendapat pesanan dua jenis bentuk pagar :
- Pagar jenis I seharga Rp 30.000 per meter
- Pagar jenis II seharga Rp 45.000 per meter

Tiap m^2 pagar jenis I memerlukan 4 m besi pipa dan 6 m besi beton.
Tiap m^2 pagar jenis II memerlukan 8 m besi pipa dan 4 m besi beton.
Persediaan yang ada 640 m besi pipa dan 480 m besi beton. Jika semua pesanan terpenuhi maka hasil penjualan maksimum kedua jenis pagar adalah …
a. Rp 2.400.000 c. Rp 5.400.000 e. Rp 3.900.000
b. Rp 3.600.000 d. Rp 4.800.000

5 MENYELESAIKAN MASALAH MATRIKS DAN VEKTOR

1. Menentukan hasil operasi matriks
2. Menentukan hasil operasi vektor
3. Menentukan besar sudut antara dua vektor

5.1 Matriks

Pengertian Matriks

Dalam kehidupan sehari-sehari tanpa kita sadari terkadang sebuah kegiatan yang kita laksanakan dapat kita tampilkan dalam materi matematika, kita sajikan dalam bentuk tabel.

Contoh:

Dalam menyiapkan Ujian Akhir Nasional, Parmin mencatat dan mengevaluasi semua hasil ulangan untuk program diklat Matematika, Bahasa Indonesia dan Bahasa Inggris seperti pada tabel di bawah ini :

Ulangan ke :	I	II	II	IV
Matematika	6	7	5	7
Bahasa Indonesia	6	7	7	8
Bahasa Inggris	5	6	7	7

Catatan nilai Parmin dapat disajikan dalam bentuk :

$\begin{pmatrix} 6 & 7 & 5 & 7 \\ 6 & 7 & 7 & 8 \\ 5 & 6 & 7 & 7 \end{pmatrix}$ atau dalam bentuk $\begin{bmatrix} 6 & 7 & 5 & 7 \\ 6 & 7 & 7 & 8 \\ 5 & 6 & 7 & 7 \end{bmatrix}$

Kesamaan Matriks

Matriks A = (a_{ij}) berordao m x n dan matriks B = (b_{ij})berordo p x q dikatakan sama jika dan hanya jika sebagai berikut :

- M = p dan n = q, yang berarti matrik A dan matriks B berordo sama.
- $a_{ij} = b_{ij}$ untuk semua i dan j, yang berarti semua elemen yang seletak sama.

Catatan :

Elemen yang seletak adalah elemen yang mempunyai nomor baris dan kolom sama.

Transpose Matriks

Transpose artinya perputaran, yang dilambangkan dengan A' atau A^T atau A^t, yaitu menukar elemen pada baris menjadi elemen pada kolom atau dengan kata lain elemen-elemen baris dari matriks A akan menjadi elemen-elemen kolom matriks A^t.

Secara lebih terperinci apabila a_{ij} elemen matriks A dan apabila ditranspose menjadi matriks A^t maka elemen tersebut menjadi a'_{ji}.

Contoh 1 :

Matriks A = $\begin{pmatrix} 4 & -2 & 6 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ maka matriks transposenya adalah $A^t = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -2 & 1 \\ 6 & 6 \end{pmatrix}$

Penjumlahan Matriks

Agar pengertian dan syarat penjumlahan dua buah matriks dapat dipahami dengan baik, coba simaklah persoalan di bawah ini :

Dewi dan Budi adalah calon siswa teladan dari sebuah SMK. Penentuan siapa yang berhak mengikuti seleksi siswa teladan tingkat kabupaten didasarkan pada jumlah nilai mata diklat matematika dan bahasa inggris pada semester I dan semester II. Nilai kedua mata diklat yang dicapai oleh Dewi dan Budi ditampilkan pada tabel di bawah ini :

Mata Diklat	Semester I		Semester II		Jumlah	
	Dewi	Budi	Dewi	Budi	Dewi	Budi
Matematika	82	86	80	80	162	166
Bahasa Inggris	72	78	73	74	145	152

Dari tabel di atas terlihat bahwa jumlah nilai semester I dan II untuk mata diklat Matematika dan Bahasa Inggris yang dicapai Budi lebih tinggi dibandingkan yang dicapai oleh Dewi.
Dengan demikian Budi lebih berhak mengikuti seleksi siswa teladan.
Bila data atau informasi pada tabel di atas disajikan dalam bentuk matriks, maka dapat dituliskan sebagai berikut

$$\begin{pmatrix}82 & 86\\ 72 & 78\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}80 & 80\\ 73 & 74\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}162 & 166\\ 145 & 152\end{pmatrix}$$

Selanjutnya perhatikan contoh penjumlahan dua matriks di bawah ini.

Diketahui dua buah matriks : $A\begin{pmatrix}3 & 1\\ 2 & 4\end{pmatrix}$ dan $B\begin{pmatrix}-3 & -1\\ -2 & -4\end{pmatrix}$

1. Tentukan : A + B dan B + A
2. Apakah : A + B = B + A

Jawab :

1. $A + B = \begin{pmatrix}3 & 1\\ 2 & 4\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-3 & -1\\ -2 & -4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3+(-3) & 1+(-1)\\ 2+(-2) & 4+(-4)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$

   $B + A = \begin{pmatrix}-3 & -1\\ -2 & -4\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}3 & 1\\ 2 & 4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3+3 & -1+1\\ -2+2 & -4+4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$

2. Dari jawaban 1 terlihat bahwa A + B = B + A = 0

<u>Pengurangan Matriks</u>

Apabila kita perhatikan, elemen-elemen yang seletak dari matriks B dan matriks A saling berlawanan. Matriks B yang bersifat seperti itu disebut lawan atau negatife dari matriks A, dan ditulis sebagai -A.
Dalam operasi bilangan real, kita ketahui bahwa operasi pengurangan dapat ditentukan dengan menjumlahkan sebuah bilangan dengan lawan atau negatif dari suatu bilangan.
Dengan menggunakan pemikiran yang serupa dengan operasi pengurangan pada bilangan real, maka opersi pengurangan dalam matriks dapat ditentukan dengan menjumlahkan sebuah matriks dengan lawan atau negative dari matriks lainnya. Apabila A dan B masing-masing matriks berordo sama maka pengurangan matriks A oleh B dapat dinyatakan sebagai berikut :

$$A - B = A + (-B)$$

Selanjutnya perhatikan contoh di bawah ini :
Contoh 1 :

Jika matriks A $\begin{pmatrix}3\\ 4\end{pmatrix}$ dan matriks B $\begin{pmatrix}-6\\ 5\end{pmatrix}$, maka :

$A - B = \begin{pmatrix}3\\ 4\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-6\\ 5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3-(-6)\\ 4-5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}9\\ -1\end{pmatrix}$

$A + (-B) = \begin{pmatrix}3\\ 4\end{pmatrix} + \{-\begin{pmatrix}-6\\ 5\end{pmatrix}\} = \begin{pmatrix}3+6\\ 4-5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}9\\ -1\end{pmatrix}$

Contoh :

Jika matriks P $\begin{pmatrix}3 & -6\\ 5 & 2\end{pmatrix}$ dan matriks B $\begin{pmatrix}-1 & 3\\ 4 & 4\end{pmatrix}$,

A – B akan sama dengan A + (-B) maka hasilnya adalah : $\begin{pmatrix}3 & -6\\ 5 & 2\end{pmatrix} + \{-\begin{pmatrix}-1 & 3\\ 4 & 4\end{pmatrix}\} = \begin{pmatrix}3+3 & -6-3\\ 5-4 & 2-4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6 & -9\\ 1 & -2\end{pmatrix}$

Perkalian Matriks dengan skalar

Diketahui Matriks A = $\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 4\end{pmatrix}$, maka 2A = 2. $\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 4\end{pmatrix}$ = $\begin{pmatrix}2x1 & 2x3\\ 2x2 & 2x4\end{pmatrix}$ = $\begin{pmatrix}2 & 6\\ 4 & 8\end{pmatrix}$

Perkalian matriks dengan matriks

Syarat dua buah matriks A dan B dapat dikalikan, apabila **banyak kolom matriks A** sama dengan **banyak baris matriks B.**

Contoh : jika diketahui matriks-matriks : A = $\begin{pmatrix}a & c\\ b & d\end{pmatrix}$ dan B = $\begin{pmatrix}p & r\\ q & s\end{pmatrix}$

maka perkalian matriks A dan B dapat ditentukan dengan persamaan :

$$A \times B = \begin{pmatrix}a & c\\ b & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}p & r\\ q & s\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}axp+cxq & axr+cxs\\ bxp+dxq & bxr+dxs\end{pmatrix}$$

Invers Matriks ordo 2

Misal A = $\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$,maka invers matriks A ditulis A^{-1} ditentukan dengan :

$$A^{-1} = \frac{1}{\det . A}\begin{bmatrix}d & -b\\ -c & a\end{bmatrix}$$, dengan det. A = ad – bc $\neq$ 0

Contoh 1 :

Tentukan invers matriks A = $\begin{bmatrix}5 & -3\\ 4 & -2\end{bmatrix}$

Jawab :

Det. A= $\begin{bmatrix}5 & -3\\ 4 & -2\end{bmatrix}$ = 5(-2) – (-3). 4 = -10-(-12) = 2

$A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}-2 & 3\\ -4 & 5\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1 & \frac{3}{2}\\ -2 & \frac{5}{2}\end{bmatrix}$

5.2 Vektor

Pengertian vektor

1. Vektor adalah besaran yang mempunyai besar dan arah.
2. Modulus vektor adalah besar atau panjang vektor.
3. Modulus / besar / panjang vektor $\underline{a}$ = $\begin{pmatrix}a_1\\ a_2\end{pmatrix}$ adalah : $|\underline{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$
4. Vektor posisi titik P (x , y) adalah : $\overline{OP} = \begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$
5. Dua vektor sama bila besar dan arahnya sama.
6. Vektor yang besarnya sama dengan vektor $\underline{a}$ tetapi arahnya berlawanan disebut vektor negatif dari $\underline{a}$ dituliskan – $\underline{a}$
7. Vektor nol adalah vektor yang besarnya nol dan arahnya tak tentu
8. Vektor satuan dari vektor $\underline{a}$ dirumuskan : $\underline{e} = \frac{a}{|\underline{a}|}$

Operasi vektor

Pada bangun bidang datar, jika diketahui vektor $\underline{a}$ = $\begin{pmatrix}a_1\\ a_2\end{pmatrix}$ dan vektor $\underline{b}$ = $\begin{pmatrix}b_1\\ b_2\end{pmatrix}$, maka :

1. Perkalian vektor $\underline{a}$ dengan skalar k adalah : k . $\underline{a}$ = $\begin{pmatrix}k . a_1\\ k . a_2\end{pmatrix}$

Contoh :

Diketahui vektor $\underline{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \end{pmatrix}$. Tentukanlah :

a. 3 . $\underline{a}$ b. -2 . $\underline{a}$ c. ½ . $\underline{a}$

Penyelesaian :

a. $3 . \underline{a} = 3. \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.4 \\ 3.(-8) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ -24 \end{pmatrix}$

b. $-2 . \underline{a} = -2. \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2.4 \\ -2.(-8) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 16 \end{pmatrix}$

c. $\frac{1}{2} . \underline{a} = \frac{1}{2} . \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}.4 \\ \frac{1}{2}.(-8) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$

2. Penjumlahan vektor $\underline{a}$ dan vektor $\underline{b}$ adalah : $\underline{a} + \underline{b} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \end{pmatrix}$

Contoh :

Jika vektor $\underline{c} = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix}$ dan vektor $\underline{d} = \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \end{pmatrix}$ maka : $\underline{c} + \underline{d} = \begin{pmatrix} 8+3 \\ 4+9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 13 \end{pmatrix}$

3. Selisih (pengurangan) vektor $\underline{a}$ dan vektor $\underline{b}$ adalah : $\underline{a} - \underline{b} = \begin{pmatrix} a_1 - b_1 \\ a_2 - b_2 \end{pmatrix}$

Contoh :

Jika vektor $\underline{c} = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix}$ dan vektor $\underline{d} = \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \end{pmatrix}$ maka : $\underline{c} - \underline{d} = \begin{pmatrix} 8-3 \\ 4-9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \end{pmatrix}$

4. Perkalian skalar dua vektor **($\underline{a}$. $\underline{b}$)**

Perkalian skalar dari dua vektor **$\underline{a} = a_1i + a_2j + a_3k$** dan vektor **$\underline{b} = b_1i + b_2j + b_3k$** ditulis dengan : **$\underline{a} . \underline{b}$** (dibaca a dot b).

- Jika sudut antara vektor $\underline{a}$ dan vektor $\underline{b}$ diketahui sama dengan α ($0° \le \alpha \le 180°$), maka :
  $\underline{a} . \underline{b} = |\underline{a}|.|\underline{b}|. \cos \alpha$
- Jika sudut antara vektor $\underline{a}$ dan vektor $\underline{b}$ tidak diketahui, maka : $\underline{a} . \underline{b} = a_1.b_1 + a_2.b_2 + a_3.b_3$

Contoh :

Diketahui vektor $\underline{a}$ = 2i + 3j + 6k dan $\underline{b}$ = i + 2j + 2k , maka perkalian skalar vektor $\underline{a}$ dan vektor $\underline{b}$ adalah :

$\underline{a} . \underline{b} = a_1.b_1 + a_2.b_2 + a_3.b_3$
$\underline{a} . \underline{b} = 2.1 + 3.2 + 6.2$
$\underline{a} . \underline{b} = 2 + 6 + 12 = 20$

Jika diketahui $|\underline{a}| = 6$ dan $|\underline{b}| = 5$ dan sudut antara vektor $\underline{a}$ dan vektor $\underline{b}$ adalah 60° maka perkaliannya adalah :

$\underline{a} . \underline{b} = |\underline{a}|.|\underline{b}|. \cos \alpha$
= 6 . 5 . cos 60°
= 30 . ½
= 15

5. Sudut Antara Dua Vektor

Dari rumus perkalian skalar dua vektor $\underline{a} . \underline{b} = |\underline{a}|.|\underline{b}|. \cos \alpha$ maka besar sudut antara vektor $\underline{a}$ dan vektor $\underline{b}$ dapat ditentukan, yaitu :

$$\cos \alpha = \frac{\underline{a} . \underline{b}}{|\underline{a}|.|\underline{b}|} = \frac{a_1.b_1 + a_2.b_2 + a_3.b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}.\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$$

Contoh :

Jika vektor a = $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ dan vektor b = $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$, maka sudut antara vektor a dan vektor b adalah …

Penyelesaian :

$\cos\alpha = \dfrac{a\,.\,b}{|a|\,.\,|b|} = \dfrac{a_1.b_1 + a_2.b_2 + a_3.b_3}{\sqrt{a_1{}^2 + a_2{}^2 + a_3{}^2}.\sqrt{b_1{}^2 + b_2{}^2 + b_3{}^2}}$

$\cos\alpha = \dfrac{1.1 + 0.1 + 0.0}{\sqrt{1^2 + 0^2 + 0^2}.\sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} x \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$

$\cos\alpha = \frac{1}{2}\sqrt{2}$

α = arc. cos $\frac{1}{2}\sqrt{2}$

= 45°

Latihan Soal

1. Jika Matriks A= $\begin{bmatrix}8 & -3\\-2 & 4\end{bmatrix}$, B = $\begin{bmatrix}25 & 6\\-7 & -5\end{bmatrix}$, dan C = $\begin{bmatrix}11 & -4\\1 & -6\end{bmatrix}$.Maka $3A + B + 2C$ adalah …

   a. $\begin{bmatrix}44 & -1\\-8 & -7\end{bmatrix}$ b. $\begin{bmatrix}71 & -11\\-11 & -5\end{bmatrix}$ c. $\begin{bmatrix}27 & -11\\-15 & -5\end{bmatrix}$ d. $\begin{bmatrix}71 & 5\\-11 & 19\end{bmatrix}$ e. $\begin{bmatrix}27 & 5\\-11 & 5\end{bmatrix}$

2. Diketahui A = $\begin{bmatrix}3 & 1\\2 & 4\end{bmatrix}$, B = $\begin{bmatrix}0 & 1\\-1 & 2\end{bmatrix}$ dan x matriks berordo (2x2) yang memenuhi persamaan matriks 2A – B + x = 0, maka x sama dengan …

   a. $\begin{bmatrix}6 & -1\\-5 & 6\end{bmatrix}$ b. $\begin{bmatrix}6 & 1\\5 & -6\end{bmatrix}$ c. $\begin{bmatrix}6 & -1\\-5 & -6\end{bmatrix}$ d. $\begin{bmatrix}-6 & -1\\-5 & -5\end{bmatrix}$ e. $\begin{bmatrix}-6 & 1\\5 & 6\end{bmatrix}$

3. Invers matriks A = $\begin{bmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{bmatrix}$ adalah …

   a. $\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & 5\\\frac{3}{2} & -1\end{bmatrix}$ b. $\begin{bmatrix}2 & \frac{1}{3}\\\frac{3}{2} & -\frac{1}{2}\end{bmatrix}$ c. $\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & 1\\\frac{3}{2} & -\frac{1}{2}\end{bmatrix}$ d. $\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & -1\\\frac{3}{2} & 2\end{bmatrix}$ e. $\begin{bmatrix}-2 & 1\\\frac{3}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}$

4. Diketahui matriks A = $\begin{bmatrix}4 & -1\\3 & 2\end{bmatrix}$ dan B = $\begin{bmatrix}-3 & -2\\1 & 5\end{bmatrix}$ maka 3A + 2B adalah … (no. 40, Uan 97-98)

   a. $\begin{bmatrix}1 & -3\\4 & 7\end{bmatrix}$ b. $\begin{bmatrix}5 & -15\\12 & 35\end{bmatrix}$ c. $\begin{bmatrix}6 & -7\\11 & 4\end{bmatrix}$ d. $\begin{bmatrix}9 & -10\\15 & 12\end{bmatrix}$ e. $\begin{bmatrix}6 & -7\\11 & 16\end{bmatrix}$

5. Diketahui matriks A = $\begin{bmatrix}2 & -1 & 3\\1 & 4 & -2\end{bmatrix}$ dan B = $\begin{bmatrix}-1 & 3\\1 & 2\\3 & -2\end{bmatrix}$. Maka A.B adalah … (no. 40, Uan 98-99)

   a. $\begin{bmatrix}6 & -3\\-2 & 15\end{bmatrix}$ b. $\begin{bmatrix}6 & -2\\-3 & 7\end{bmatrix}$ c. $\begin{bmatrix}6 & -2\\-3 & 15\end{bmatrix}$ d. $\begin{bmatrix}6 & -3\\-2 & 7\end{bmatrix}$ e. $\begin{bmatrix}15 & 2\\3 & 6\end{bmatrix}$

6. Diketahui matriks A=$\begin{bmatrix}3 & -4\\2 & 1\end{bmatrix}$,B=$\begin{bmatrix}-3 & -2\\-1 & 5\end{bmatrix}$dan C=$\begin{bmatrix}5 & 4\\-2 & 1\end{bmatrix}$, maka 2A–B+3C=…(no.31, Uan 99-00)

a. $\begin{bmatrix} 9 & 6 \\ -1 & -6 \end{bmatrix}$ b. $\begin{bmatrix} 24 & 6 \\ -1 & -6 \end{bmatrix}$ c. $\begin{bmatrix} 9 & -6 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$ d. $\begin{bmatrix} 15 & 6 \\ -6 & -6 \end{bmatrix}$ e. $\begin{bmatrix} -24 & 6 \\ 1 & -6 \end{bmatrix}$

7. Jika matriks A=$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}$ dan B=$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \\ -1 & -4 \end{bmatrix}$, maka A x B = … (no. 32, Uan 99-00)

a. $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 7 & 22 \end{bmatrix}$ b. $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -7 & 22 \end{bmatrix}$ c. $\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -7 & 22 \end{bmatrix}$ d. $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 7 & 2 \\ 22 & 1 \end{bmatrix}$ e. $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 7 & 2 \\ -22 & 1 \end{bmatrix}$

8. Jika diketahui matriks A=$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -4 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ dan B=$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ maka A.B = … (no.40,Uan 00-01)

a. $\begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ b. $\begin{bmatrix} -4 & 6 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ c. $\begin{bmatrix} 2 & -3 & -3 \\ 4 & -4 & 0 \end{bmatrix}$ d. $\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -3 & -4 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$ e. $\begin{bmatrix} 6 & -3 & 3 \\ 14 & -7 & 9 \\ -9 & 5 & -3 \end{bmatrix}$

9. Matriks X yang memenuhi persamaan $2.\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & 4 & -5 \end{bmatrix} + X = \begin{bmatrix} 6 & 3 & -5 \\ 8 & 9 & 3 \end{bmatrix}$ adalah…(no.14,Uan 01-02)

a. $\begin{bmatrix} 2 & 5 & -11 \\ 2 & 1 & -7 \end{bmatrix}$ b. $\begin{bmatrix} 2 & 5 & -11 \\ 2 & 1 & 13 \end{bmatrix}$ c. $\begin{bmatrix} 2 & 1 & -11 \\ 2 & 1 & 13 \end{bmatrix}$ d. $\begin{bmatrix} -2 & 5 & -11 \\ 2 & 1 & 13 \end{bmatrix}$ e. $\begin{bmatrix} 2 & 5 & -11 \\ -2 & 1 & 13 \end{bmatrix}$

10. Diketahui matriks A=$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ dan B=$\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$, maka $(A \times B)^{-1}$ adalah … (no. 15, Uan 01-02)

a. $\frac{1}{27}\begin{bmatrix} 7 & 5 \\ 8 & 6 \end{bmatrix}$ b. $\frac{1}{13}\begin{bmatrix} 7 & 5 \\ 8 & 6 \end{bmatrix}$ c. $\frac{1}{13}\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}$ d. $\frac{1}{22}\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -7 \end{bmatrix}$ e. $\frac{1}{22}\begin{bmatrix} 7 & 5 \\ 8 & 6 \end{bmatrix}$

11. Diketahui matriks A=$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ dan B = $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$. Nilai A – 2B = … (no. 9, Uan 02-03)

a. $\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$ b. $\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}$ c. $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}$ d. $\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ e. $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

12. Invers matriks $\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}$ adalah … (no. 10, Uan 02-03)

a. $-\frac{1}{10}\begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ b. $\frac{1}{10}\begin{bmatrix} -2 & -4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ c. $\frac{1}{10}\begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ d. $-\frac{1}{14}\begin{bmatrix} -2 & -4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ e. $-\frac{1}{14}\begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$

13. Diketahui matriks A=$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ dan B=$\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$. Maka A x B = … (no. 8, Uan 03-04)

a. $\begin{bmatrix} 20 & 47 \\ 14 & 32 \end{bmatrix}$ b. $\begin{bmatrix} 8 & 6 & 12 \\ 4 & 5 & 18 \end{bmatrix}$ c. $\begin{bmatrix} 20 & 14 \\ 47 & 32 \end{bmatrix}$ d. $\begin{bmatrix} 2 & 6 & 12 \\ 4 & 10 & 18 \end{bmatrix}$ e. $\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 10 \\ 12 & 18 \end{bmatrix}$

14. Diketahui matriks A= $\begin{bmatrix} 6 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ dan B= $\begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$. Hasil dari A2 + B = … (no. 5, Uan 04-05)
    a. $\begin{bmatrix} 36 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ b. $\begin{bmatrix} 34 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ c. $\begin{bmatrix} 34 & 5 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ d. $\begin{bmatrix} 34 & -4 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$ e. $\begin{bmatrix} 36 & -4 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$

15. Bila vektor a= 3i – 2j + k dan vektor b= 2i + j – k maka nilai a . b adalah ….
    a. -3 b. -1 c. 1 d. 2 e. 3

16. Sudut yang dibentuk vektor a dan vektor b adalah 60°. Jika a = i + 2j – k dan b = 2i + j – k maka nilai a . b adalah ….
    a. 1 b. 3 c. 4 d. 5 e. 6

17. Vektor a= 2i + 3j – 2k dan vektor b= -2i + j – mk. Jika vektor a dan vektor b siku-siku maka nilai m adalah ….
    a. 2 b. 1 c. ½ d. ¼ e. 1/8

18. Jika vektor a= 2i + j -2k dan vektor b= 3i – 2j + k maka a x b adalah ….
    a. -3i - 8j - 7k b. -3i - 8j - 4k c. -3i - 5j - 7k d. -8i - 3j - 7k e. -8i - 7j - 3k

19. Jika vektor a= i - j -2k dan vektor b= -3i - j + 2k maka b x a adalah ….
    a. 4i - 4j - 4k b. -4i + 4j + 4k c. 4i - 4j + 4k d. 4i - 4j - 4k e. -4i - 4j + 4k

20. Vektor a= 2i + 3j - √12k, maka besar vektor a = …
    a. √12 b. 4 c. 4,5 d. 5 e. 6

21. Besar sudut vektor a dan b = 90°, jika vektor a = 2i + 2j – k dan b = ni –j + 2k maka nilai n adalah ….
    a. -4 b. -2 c. 2 d. 3 e. 4

22. Diketahui dua vektor $\bar{a} = 2\bar{i} - 3\bar{j} + 4\bar{k}$ dan $\bar{b} = 5\bar{j} + \bar{k}$. Nilai dari $\bar{a}.\bar{b}$ adalah … (no.34, Uan 02-03)
    a. -9 b. -11 c. 7 d. 8 e. 11

23. Diketahui vektor $\bar{a} = \bar{i} + 3\bar{j} + 2\bar{k}$ dan $\bar{b} = 3\bar{i} + 2\bar{j} - \bar{k}$, maka besar sudut antara vektor $\bar{a}$ dan vektor $\bar{b}$ adalah … (no. 37, Uan 03-04)

24. Diketahui vektor $\bar{a} = \bar{i} + 2\bar{j} + m\bar{k}$ dan $\bar{b} = 2\bar{i} - 10\bar{j} + 2\bar{k}$. Jika nilai $\bar{a}\,.\,\bar{b} = 0$ maka nilai m adalah … (no. 29, Uan 04-05)
    a. 18 b. 9 c. 6 d. 3 e. -16

5.3

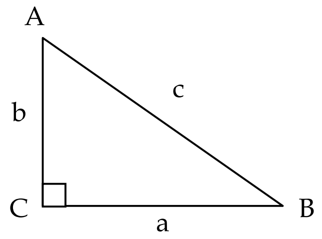
6	MENGHITUNG KELILING DAN LUAS PERMUKAAN BANGUN DATAR, SERTA LUAS PERMUKAAN DAN VOLUME BANGUN RUANG 1. Menghitung keliling bangun datar 2. Menghitung luas bangun datar 3. Menghtung luas permukkan bangun ruang 4. Menghitung volume bangun ruang

6.1 Bangun Datar

Teorema Phytagoras

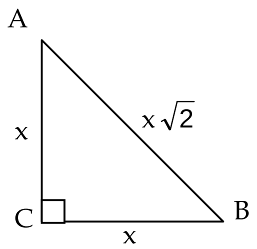
Dalam segitiga siku-siku berlaku teorema Pytagoras, yaitu : “ Kuadrat sisi miring sama dengan jumlah kuadrat sisi-sisi sikunya “.

Teorema Phytagoras : $a^2 + b^2 = c^2$



Segitiga Istimewa

Suatu segitiga siku-siku sama kaki, jika sisi sikunya adalah x satuan maka sisi miringnya adalah x√2 satuan.



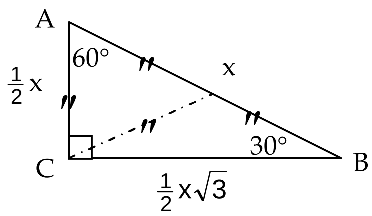
Asal hitungan berdasar teorema Phytagoras :

$c^2 = a^2 + b^2$ maka : $c = \sqrt{a^2 + b^2}$

: $c = \sqrt{x^2 + x^2}$

: $c = \sqrt{2x^2}$: $c = x\sqrt{2}$

Suatu segitiga siku-siku jika besar dua sudut lainya adalah 30° dan 60° dan panjang sisi miringnya x satuan maka sisi siku-siku di depan sudut 30° (AC) besarnya sama dengan setengah sisi miringnya ($\frac{1}{2}$x), sedangkan untuk sisi siku-siku di depan sudut 60° (BC) besarnya adalah $\frac{1}{2}\sqrt{3}\,x$.



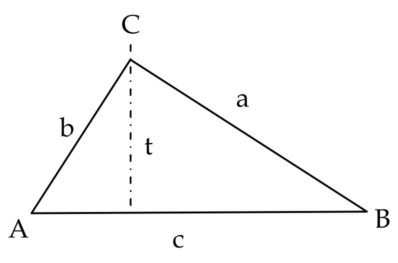
Rumus Keliling dan Luas Bidang

Segitiga

K = a + b + c

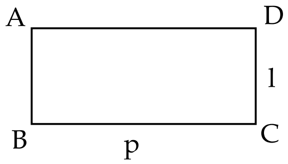
L ∈ = ½ . alas . tinggi

L ∈ = $\sqrt{s.(s-a).(s-b).(s-c)}$



dimana s = $\dfrac{a+b+c}{2}$

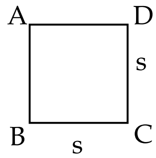
Persegi panjang



K = 2 . (p + l)

L = p . l

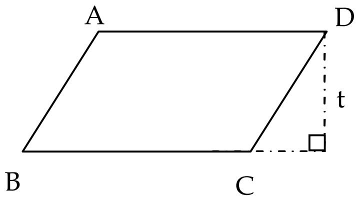
Bujur sangkar



K = 4. s

L = s . s = s^2

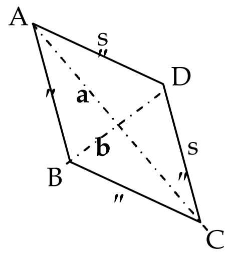
Jajaran genjang



K = 2. (a + b)

L = a. t

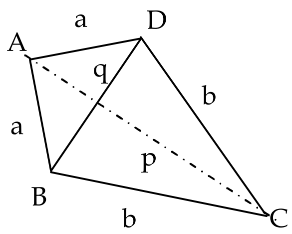
Belah ketupat



K = 4 . s

L = ½ . a . b

dimana : a dan b diagonal



Layang-layang

K = 2. (a + b)

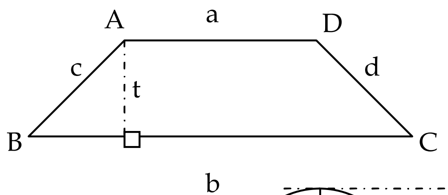
L = ½ . p . q

dimana :

q = BD

p = AC

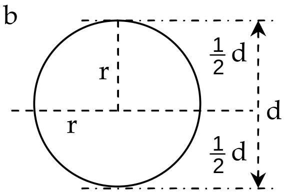
Trapesium



K = a + b + c + d

L = ½ .(a + b) . t

Lingkaran



K = 2.π . r

K = π . d ….. dimana 2.r = d

$L = \pi \cdot r^2$

$L = \frac{1}{4} \cdot \pi \cdot d^2$ …… dimana r = ½ d

Aturan Trapesoida

Bangun daerah bidang tak beraturan dibagi menjadi beberapa bagian yang sama, disebut pilah. Satu bidang pilah ABQP luasnya mendekati trapesium dengan sisi sejajar O_1 dan O_2 serta jaraknya d.

Luas pilah ABQP $\approx d.\left(\frac{O_1 + O_2}{2}\right)$

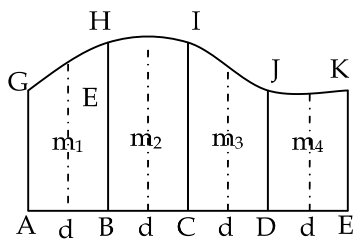
Luas pilah BCRQ $\approx d.\left(\frac{O_2 + O_3}{2}\right)$

Demikian seterusnya sehingga luas total merupakan jumlah masing-masing pilah, maka luas total dirumuskan :

Luas AETP $\approx d.\left(\frac{O_1 + O_5}{2} + (O_2 + O_3 + O_4)\right)$

Aturan Mid-Ordinat

Seperti halnya aturan trapesoida, pada aturan ini diambil tengah-tengah dari masing-masing ordinat.



Luas pilah ABHG = d . m_1

Luas pilah BCIH = d . m_2

Demikian seterusnya sehingga luas total merupakan jumlah masing-masing pilah, maka luas total dirumuskan :

Luas AEKG = d . ($m_1 + m_2 + m_3 + m_4$)

Aturan Simpson

Aturan ini biasanya dipergunakan untuk menghitung luas daerah di bawah kurva f(x) dengan sumbu-x pada interval tertentu [a , b].

Aturan Simpson dituliskan dalam rumus :

$A = \frac{d}{3} . \{(F + L) + 4.E + 2R\}$

dimana :

A : Luas daerah

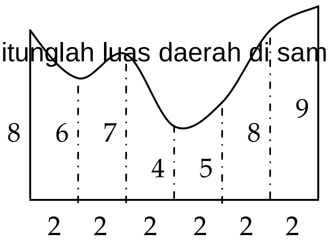
d : Lebar pilah

F : Ordinat pertama
L : Ordinat terakhir
E : Jumlah ordinat bernomor genap
R : Jumlah ordinat bernomor ganjil

Contoh :

Hitunglah luas daerah di samping ini dengan menggunakan aturan :

a. aturan trapesoida
b. aturan mid-ordinat
c. aturan Simpson



Jawab :
a. aturan trapesoida

$$L \approx d.\left(\frac{O_1+O_5}{2}+(O_2+O_3+O_4)\right) \approx 2.\left\{\frac{8+9}{2}+(6+7+4+5+8)\right\}$$

$$\approx 2.\{8{,}5+30\} \approx 2\ .\ 38{,}5$$

$\approx$ 77 satuan luas.

b. aturan mid-ordinat

$$L \approx d\ .\ (m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + m_5 + m_6)$$

$$L \approx 2.\left(\frac{8+6}{2}+\frac{6+7}{2}+\frac{7+4}{2}+\frac{4+5}{2}+\frac{5+8}{2}+\frac{8+9}{2}\right)$$

$$\approx 2.\ (\ 7 + 6{,}5 + 5{,}5 + 4{,}5 + 6{,}5 + 8{,}5\ ) \approx 2.\ (\ 38{,}5\ )$$

$\approx$ 77 satuan luas

c. aturan Simpson

$$L \approx \frac{d}{3}.\{(F+L)+4.E+2R\} \approx \frac{2}{3}.\{(8+9)+4.(6+4+8)+2.(7+5)\}$$

$$\approx \frac{2}{3}.(17+72+24) \approx \frac{2}{3}.113 \approx \frac{226}{3}$$

$\approx$ 75,3 satuan luas

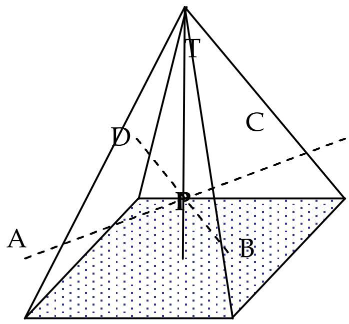
6.2 Bangun Ruang

Limas Beraturan

Limas beraturan adalah limas yang bidang alasnya segi banya beraturan dan proyeksi titik puncak ke bidang alas berimpit dengan titik tengah bidang alas.

Jika T.ABCD limas segi empat beraturan, maka ABCD berbentuk empat persegi panjang. Proyeksi titik T ke bidang alas ABCD adalah P berimpit dengan titik potong diagonal AC dan BD.

Bila AB, BC dan TP diketahui panjangnya maka dapat dihitung luas dan volume limas.



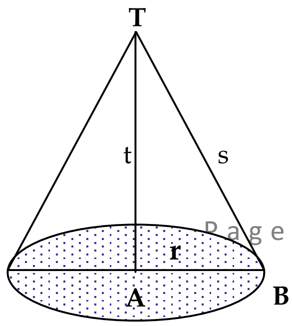
Luas limas = luas ABCD + 2 luas BCT + 2 luas ABT

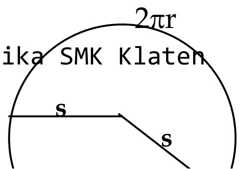
Volume limas = $\frac{1}{3}$ x tinggi x luas alas

= $\frac{1}{3}$ x ABCD x TP

Kerucut

Suatu kerucut jika diketahui jari-jari bidang alasnya (r) dan tingginya (t) maka :
Luas kerucut = luas lingkaran dengan jari-jari (r) + luas selimut kerucut.





Luas selimut kerucut dihitung dengan cara memotong sisi TB dan dibuka. Bukaan kerucut berbentuk jaring lingkaran dengan jari-jari (s) dangan dan panjang busur 2πr.

Panjang s (garis pelukis) = $\sqrt{t^2 + r^2}$

Perhatikan gambar bukaan di atas.
Daerah yang tidak terarsir adalah bukaan selimut kerucut, berupa sebuah juring.

Luas juring $= \frac{2\pi r}{2\pi s}.\pi.s^2$

$= \pi.r.s$ (luas selimut kerucut)

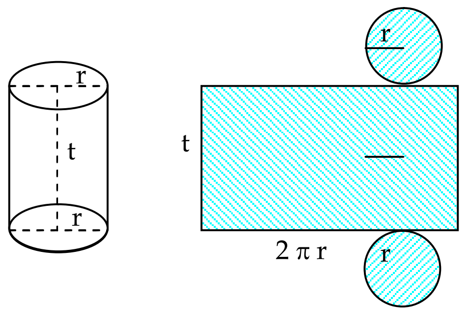
Jadi luas selimut kerucut = $\pi.r.s$

Luas kerucut = $\pi\ r^2 + \pi\ r\ s$

Volume kerucut = $\frac{1}{3}$ x tinggi x luas alas $= \frac{1}{3}$ x $\pi.r^2.t$

<u>Silinder</u>

Silinder (tabung) dengan jari-jari bidang alas (r) dan tinggi (t). Bila silinder itu dibuka akan diperoleh **sebuah empat persegi panjang** dengan panjang 2πr (keliling alas) dan lebarnya t (tinggi tabung) dan **dua buah lingkaran** dengan jari-jari (r).



Luas silinder = luas empat persegi panjang + 2 luasan lingkaran

$= 2\ \pi\ r\ t + 2\ \pi\ r^2$

Volume tabung = luas alas x tinggi

$= \pi\ r^2\ .\ t$

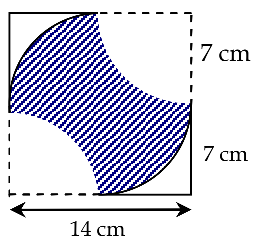
Latihan Soal

1. Luas daerah yang diarsir adalah … ($\pi = \frac{22}{7}$)

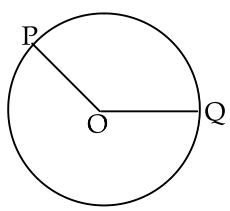
   A. 102 cm^2
   B. 105 cm^2
   C. 110 cm^2
   D. 119 cm^2
   E. 129 cm^2

2. Luas plat besi yang diarsir adalah …($\pi = \frac{22}{7}$)

   A. 77 cm^2
   B. 92 cm^2
   C. 98 cm^2
   D. 109 cm^2
   E. 7102 cm^2



3. Pada gambar disamping O adalah pusat lingkaran dan panjang OB = 7 cm. Jika $\angle$POQ = 135° dan $\pi = \frac{22}{7}$, maka luas juring lingkaran POQ adalah …



A. $16\frac{1}{2}$ cm^2 C. $61\frac{1}{2}$ cm^2 E. $115\frac{1}{2}$ cm^2

B. 44cm^2 D. $57\frac{3}{4}$ cm^2

4. Suatu limas sisi 4 beraturan T.ABCD diketahui AB = 6cm, BC = 2 cm dan tinggi limas TP = 4 cm. Maka luas permukaan limas adalah … cm^2

   A. (22 - $6\sqrt{17}$) B. (17 - $3\sqrt{17}$ C. (17 + $6\sqrt{17}$) D. (22+$3\sqrt{17}$) E. (22+$6\sqrt{17}$)

5. Luas permukaan kerucut yang diameter alasnya 14 cm dan tingginya 24 cm adalah …

   A. 570 cm^2 B. 572 cm^2 C. 594 cm^2 D. 682 cm^2 E. 704 cm^2

6. Dari limas sisi 4 beraturan T.ABCD diketahui AB = 6 cm, BC = 2 cm dan tinggi limas TP = 6 cm , maka volume limas tersebut adalah …

   A. 18 cm^3 B. 24 cm^3 C. 36 cm^3 D. 38 cm^3 E. 48 cm^3

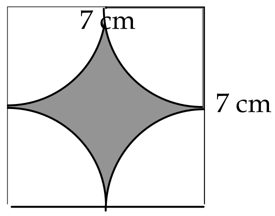
7. Dua buah lingkaran (M , R) dan (N , r) mempunyai garis singgung persewkutuan AB. Jika MN = 25 cm, R = 11 cm dan r = 4 cm, maka panjang garis singgung persekutuan AB adalah …

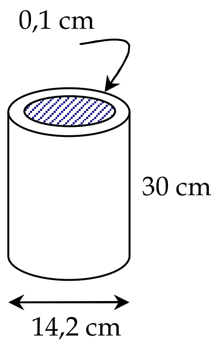
   A. 23 cm B. 24 cm C. 26 cm D. $\sqrt{664}$ cm E. $\sqrt{674}$ cm

8. Luas daerah yang diarsir pada gambar di samping adalah … (no. 22, Uan. 97-98)

   A. 10,5 cm^2 C. 24,5 cm^2 E. 29,8 cm^2

   B. 16 cm^2 D. 28 cm^2





9. Kaleng berbentuk silinder mempunyai ukuran seperti pada gambar di samping. Jika diisi pasir sampai penuh, volume pasir tersebut adalah … (no. 23, Uan. 97-98)

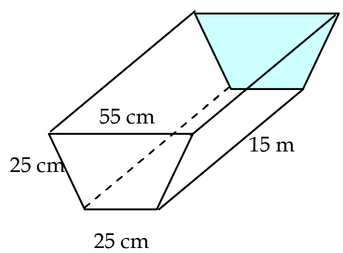
   A. 4.620 cm^3 C. 660 cm^3 E. 154 cm^3

   B. 1.320 cm^3 D. 540 cm^3

10. Talang terbuat dari seng berbentuk prisma tegak segi empat dengan kedua ujung talang tertutup tampak seperti pada gambar di samping. Luas permukaan talang adalah … (no. 32, Uan. 97-98)

    A. 0,08 m^2 C. 11,25 m^2 E. 11,41 m^2

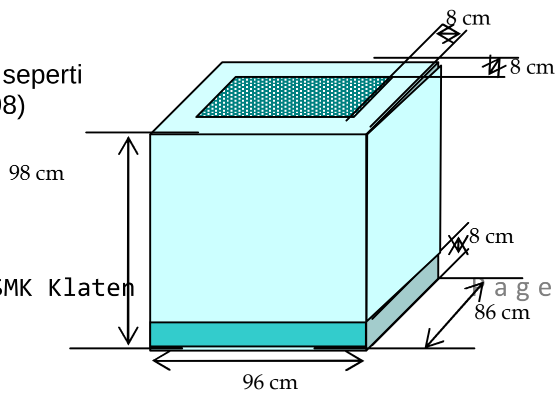
    B. 0,16 m^2 D. 11,33 m^2



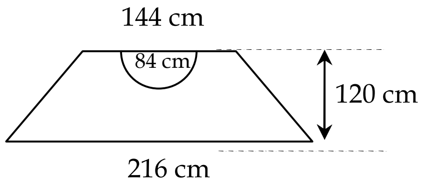
11. Volume bak mandi yang mempunyai bentuk dan ukuran seperti gambar di samping adalah … (no. 35, Uan. 97-98)

    A. 809 liter C. 504 liter E. 448 liter

    B. 743 liter D. 459 liter

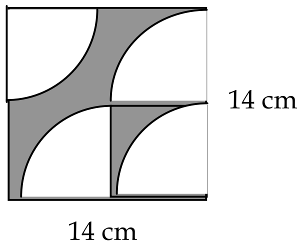


12. Luas daerah yang diarsir pada gambar berikut adalah … (no. 22, Uan. 98-99)
    A. 21.336 cm^2 C. 18.828 cm^2 E. 10.512 cm^2
    B. 21.024 cm^2 D. 16.422 cm^2

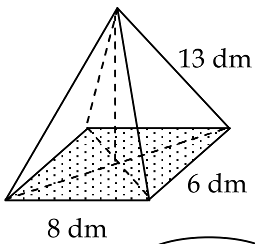


13. Luas bahan yang diperlukan untuk membuat pipa saluran udara dari pelat seng berdiameter 42 cm dan panjang 2 meter adalah … (no. 23, Uan. 98-99)
    A. 0,132 m^2 B. 0,264 m^2 C. 1,32 m^2 D. 2,64 m^2 E. 5,28 m^2

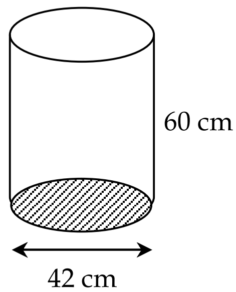
14. Luas daerah yang diarsir pada gambar di samping adalah … (no. 24, Uan. 99-00)
    A. 42 cm^2 C. 119 cm^2 E. 157 cm^2
    B. 84 cm^2 D. 124 cm^2



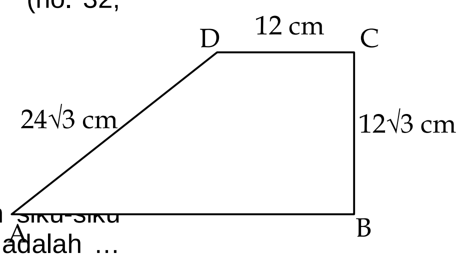
15. Volume limas pada gambar di samping adalah … (no. 33. Uan. 99-00)
    A. 624 dm^3 C. 312 dm^3 E. 192 dm^3
    B. 576 dm^3 D. 208 dm^3



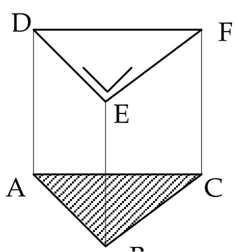
16. Luas permukaan sebuah kaleng berbentuk tabung dengan sisi atasnya tanpa tutup seperti pada gambar di samping adalah … (no. 23, Uan. 00-01)
    A. 8.052 cm^2 D. 83.292 cm^2
    B. 9.306 cm^2 E. 83.424 cm^2
    C. 10.692 cm^2



17. Volum limas pada gambar di samping adalah … (no. 32, Uan. 00-01) (sama spt no.33, Uan 99-00)
    A. 624 dm^2 D. 208 dm^2
    B. 576 dm^2 E. 192 dm^2
    C. 321 dm^2

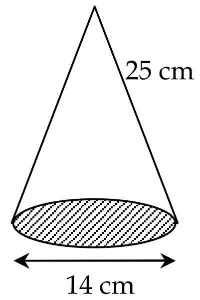


18. Alat pengeruk tanah mempunyai bentuk trapesium siku-siku ABCD seperti gambar. Keliling trapesium tersebut adalah … (no. 18, Uan. 01-02)
    A. (60 + 36√3) cm D. (120 + 12√3) cm
    B. (132 + 12√3) cm E. (60 + 45√3) cm
    C. (48 + 36√3) cm

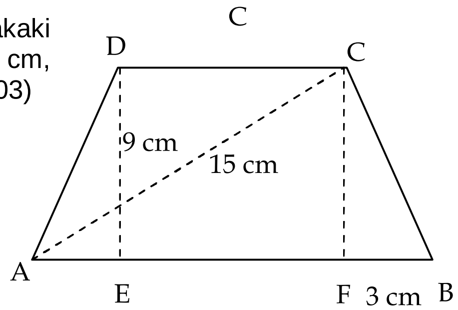


19. Prisma ABCDEF dengan panjang AC = 10 cm, AB = 6 cm dan AD = 12 cm. Luas permukaan prisma adalah … (no. 20, Uan. 01-02)
    A. 288 cm^2 D. 336 cm^2
    B. 312 cm^2 E. 348 cm^2
    C. 318 cm^2

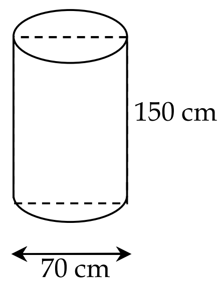
20. Volume kerucut pada gambar di samping adalah … (no. 21, Uan. 01-02)
    A. 352 cm^3 D. 3.696 cm^3
    B. 528 cm^3 E. 4.928 cm^3
    C. 1.232 cm^3



21. Gambar di samping adalah gambar trapesium samakaki ABCD. Jika panjang AC = 15 cm, BF = 3 cm dan DE = 9 cm, maka keliling trapesium ABCD adalah … (no. 5, Uan. 02-03)
    A. $(12 + \sqrt{10})$ cm   D. $(29 + 6\sqrt{10})$ cm
    B. $(18 + 3\sqrt{10})$ cm   E. $(57 + 6\sqrt{10})$ cm
    C. $(24 + 6\sqrt{10})$ cm

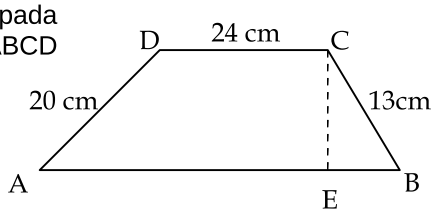


22. Luas selimut tabung pada gambar disamping dengan adalah … (no. 11, Uan. 02-03)
    A. 66.000 cm^2 D. 10.500 cm^2
    B. 33.000 cm^2 E. 5.750 cm^2
    C. 16.500 cm^2



23. Panjang besi beton yang diperlukan untuk membuat ring berdiameter 42 cm, jika $\pi = \frac{22}{7}$ adalah … (no. 36, Uan. 02-03)
    A. 1.386 cm   B. 924 cm   C. 132 m   D. 84 cm   E. 21 cm

24. Diketahui trapesium ABCD dengan ukuran seperti pada gambar, jika AE = 40 cm, maka luas daerah trapesium ABCD adalah … (no. 6, Uan. 03-04)
    A. 126 cm^2 D. 540 cm^2
    B. 252 cm^2 E. 552 cm^2
    C. 414 cm^2



25. Suatu limas beraturan dengan alas berbentuk persegi panjang, panjang alas = 16 cm, lebar alas = 12 cm, panjang rusuk tegak = 26 cm. Volum limas tersebut adalah … (no. 14, Uan. 03-04)
    A. 1.248 cm^3 B. 1.536 cm^3 C. 1.664 cm^3 D. 2.304 cm^3 E. 2.496 cm^3

7 MENERAPKAN PRINSIP/PRINSIP LOGIKA MATEMATIKA

1. Menentukan nilai kebenaran suatu pernyataan majemuk
2. Menentukan negasi dari suatu pernyataan majemuk
3. Menentukan invers, konvers dan kontraposisi
4. Menarik kesimpulan

7.1 Pernyataan Majemuk

Konjungsi

Jika dua pernyataan digabungkan dengan kata “dan” maka pernyataan itu disebut konjungsi. Penulisan kata gabung “dan “ pada konjungsi dilambangkan dengan tanda : “ $\wedge$ “. Sedangkan tabel kebenaran pernyataan-pernyataan konjungsi disampaikan dalam bentuk tabel sebagai berikut :

P	Q	$P \wedge Q$
B	B	B
B	S	S
S	B	S
S	S	S

atau

P	Q	$P \wedge Q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Pernyataan majemuk $P \wedge Q$ dikatakan benar jika kedua-duanya benar dalam hal lain dikatakan salah.

Contoh :

a. P : Singa adalah binatang buas. (B)
Q : Singa binatang pamakan daging. (B)
$P \wedge Q$: Singa adalah binatang buas dan pemakan daging. (B)

b. P : 9 adalah bilangan ganjil. (B)
Q : 9 adalah bilangan prima. (S)
$P \wedge Q$: 9 adalah bilangan ganjil dan prima. (S)

c. P : 7 adalah bilangan genap. (S)
Q : 7 adalah bilangan khayal. (S)
$P \wedge Q$: 7 adalah bilangan genap dan khayal. (S)

Disjungsi

Jika dua pernyataan digabungkan dengan kata “ atau “ maka pernyataan majemuk ini disebut disjungsi. Disjungsi mempunyai dua arti yang berbeda yaitu :

- Disjungsi Inklusif
- Disjungsi Eksklusif

Disjungsi inklusif mempunyai makna benar jika paling sedikit satu dari pernyataan bernilai benar. Lambang disjungsi inklusif adalah “ $\vee$ “ dan tabel kebenarannya sebagai berikut :

P	Q	$P \vee Q$
B	B	B
B	S	B
S	B	B
S	S	S

atau

P	Q	$P \vee Q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Pernyatan majemuk $P \vee Q$ dikatakan salah jika kedua-duanya salah, dalam hal lain dikatakan benar.
Contoh :

P : Tono pergi ke pasar
Q : Andi pergi ke pasar
$P \vee Q$: Tono atau Andi pergi ke pasar.

Dijungsi eksklusif mempunyai makna benar jika paling sedikit satu pernyataan benar tetapi tidak kedua-duanya. Disjungsi eksklusif mempunyai lambang " $\underline{\vee}$ " dan tabel kebenaran dari disjungsi eksklusif sebagai berikut :

P	Q	$P \underline{\vee} Q$
B	B	S
B	S	B
S	B	B
S	S	S

atau

P	Q	$P \underline{\vee} Q$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Pernyataan majemuk $P \underline{\vee} Q$ dikatakan bernilai salah jika P dan Q bernilai sama, dalam hal lain dikatakan benar.

Contoh :

P : Ibu sedang pergi ke pasar.
Q : Ibu sedang memasak.
$P \vee Q$: Ibu sedang pergi ke pasar atau sedang memasak.

Keterangan :
Contoh di atas mempunyai makna :
1. Ibu sedang pergi ke pasar tetapi tidak sedang memasak.
2. Ibu tidak sedang pergi ke pasar tetapi sedang memasak.
3. Tidak mungkin ibu sedang pergi ke pasar sekaligus sedang memasak begitu pula sebaliknya.

Implikasi (kondisional)

Pernyataan majemuk yang berbentuk " jika P maka Q " disebut implikasi atau kondisional. Lambang penulisan implikasi sebagai berikut : " $P \rightarrow Q$ " atau " $P \Rightarrow Q$ ".
Dari lambang di atas bermakna :
1. Jika P maka Q
2. P hanya jika Q
3. P syarat yang cukup untuk Q
4. Q syarat yang perlu untuk P

Pernyataan majemuk " $P \rightarrow Q$ " akan dikatakan bernilai salah jika P benar dan Q salah, dalam hal lain dikatakan benar.

Tabel kebenaran dari implikasi sebagai berikut :

P	Q	$P \rightarrow Q$
B	B	B
B	S	S
S	B	B
S	S	B

atau

P	Q	$P \rightarrow Q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Contoh :

P : Achmad adalah penduduk Kabupaten Klaten (B)
Q : Achmad adalah penduduk Provinsi Jawa Tengah. (B)
$P \rightarrow Q$: Jika Achmad adalah penduduk Kabupaten Klaten maka ia penduduk Provinsi Jawa Tengah (B)

Bi-Implikasi

Pernyataan majemuk yang berbentuk " P jika dan hanya jika Q " disebut Bi-implikasi. Penulisan Bi-implikasi menggunakan lambang " $P \leftrightarrow Q$ atau $P \Leftrightarrow Q$ ".
Dari lambang di atas bermakna :
1. P jika dan hanya jika Q.
2. P ekuivalen Q.
3. P syarat yang perlu dan cukup untuk Q.

Jika P dan Q dua pernyataan yang tersusun sebagai "$P \leftrightarrow Q$ " maka tabel kebenarannya sebagai berikut :

P	Q	P ↔ Q
B	B	B
B	S	S
S	B	S
S	S	B

atau

P	Q	P ↔ Q
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Pernyataan P ↔ Q akan dikatakan bernilai benar jika P dan Q jika P dan Q bernilai sama, dalam hal lain dikatakan salah .

Contoh :

P : Presiden Indonesia berkedudukan di Jakarta. (B)
Q : Jakarta adalah ibu kota Indonesia (B)
P↔Q : Presiden Indonesia berkedudukan di Jakarta jika dan hanya jika Jakarta adalah ibu kota Indonesia

7.2 Negasi

<u>Pengertian negasi</u>
Negasi atau ingkaran adalah penolakan dari pernyataan yang ada. Jika sebuah pernyataan bernilai salah maka negasinya bernilai benar dan jika pernyataan bernilai benar maka negasinya bernilai salah. Penulisan lambang negasi P adalah “ ~ P “. Untuk menentukan ingkaran atau negasi dari sebuah pernyataan maka penulisan ditambah kata “ tidak , tidak benar bahwa, atau bukan “ di depan pernyataan.
Tabel kebenaran dari negasi adalah sebagai berikut :

P	~ P
S	B

P	~ P
0	1

Contoh :

a. P : 2 adalah bilangan prima. (B)
~ P : 2 adalah bukan bilangan prima. (S)

b. P : Ali anak orang kaya. (B)
~ P : Ali bukan anak orang kaya. (S)

<u>Negasi Pernyataan Berkuantor</u>
Pernyataan berkuantor adalah suatu pernyataan yang melibatkan “ banyaknya obyek “. Dikenal dua jenis pernyatan berkuantor, yaitu :

a. Semua (setiap) dinamakan kuantor umum (universal) dilambangkan dengan □x yang dibaca : untuk semua x atau untuk setiap x.
b. Ada dinamakan kuantor khusus (eksistensial) dilambangkan dengan □x, yang dibaca : ada x atau terdapat x.

Catatan :
Perkataan “ ada “ berarti sekurang-kurangnya satu.
Jadi “ ada “ dapat berarti beberapa atau terdapat.

Contoh :

1. Tentukan negasi dari pernyataan : “ Semua mobil buatan manca negara”.
   Jawab :
   p : Semua mobil buatan manca negara.
   –p : Tidak benar bahwa semua mobil buatan manca negara.
   –p : Ada mobil yang bukan buatan manca negara.

2. Tentukan negasi dari pernyataan : “ Ada siswa yang tidak berkaca mata “.

Jawab :
p : Ada siswa yang tidak berkaca mata.
$-p$: Semua siswa berkaca mata.

<u>Negasi Ingkaran Pernyataan Majemuk</u>
Negasi untuk disjungsi
Bentuk : $-(p \vee q) = -p \quad -q$
Contoh : p : Basri kaya.
q : Basri kikir.
$p \vee q$: Basri kaya atau Basri kikir.
$-(p \vee q)$: Tidak benar Basri kaya atau kikir.
$-p \wedge -q$: Basri tidak kaya dan tidak kikir.

Negasi untuk konjungsi
Bentuk : $-(p \quad q) = -p \vee -q$
Contoh : p : Basri pendek.
q : Basri gemuk.
$p \wedge q$: Basri pendek dan Basri gemuk.
$-(p \wedge q)$: Tidak benar Basri pendek dan gemuk.
$-p \vee -q$: Basri tidak pendek atau tidak gemuk.

Negasi untuk implikasi
Bentuk : $-(p \rightarrow q) = p \div -q$
Contoh : p : Suminten rajin mandi.
q : Suminten berkulit putih.
$p \rightarrow q$: Jika Suminten rajin mandi, maka Suminten berkulit putih.
$-(p \rightarrow q)$: Tidak benar Jika Suminten rajin mandi, maka Suminten berkulit putih.
$p \wedge -q$: Suminten rajin mandi dan Suminten tidak berkulit putih.

Negasi untuk biimplikasi
Bentuk : $-(p \leftrightarrow q) = p \leftrightarrow -q = -p \leftrightarrow q$
Contoh : p : Sugriwo makan.
q : Sayurnya gudeg.
$p \leftrightarrow q$: Sugriwo makan jika dan hanya jika sayurnya gudeg.
$-(p \leftrightarrow q)$: Tidak benar Sugriwo makan jika dan hanya jika sayurnya gudeg.
$p \leftrightarrow -q$: Sugriwo makan jika dan hanya jika sayurnya bukan gudeg.
$-p \leftrightarrow q$: Sugriwo tidak makan jika dan hanya jika sayurnya gudeg.

Negasi dari pernyataan ekuivalen dengan disjungsi dari masing-masing konjungsinya dan begitu sebaliknya.
Bentuk kesetaraan di atas disebut juga dengan dalil De-Morgan, yaitu :

$$\sim (P \wedge Q) \equiv \sim P \vee \sim Q$$
$$\sim (P \vee Q) \equiv \sim P \wedge \sim Q$$

Selain dalil De-Morgan masih banyak kesetaraan yang lain, misalnya :

$$\sim (P \rightarrow Q) \equiv P \wedge \sim Q$$
$$\sim (P \leftrightarrow Q) \equiv (P \wedge \sim Q) \vee (Q \wedge \sim P)$$

Contoh :
8 adalah bilangan genap <u>dan</u> bulat.
Negasinya ada 2 kemungkinan, yaitu :
<u>Tidak benar bahwa</u> 8 adalah bilangan genap <u>dan</u> bulat.
atau 8 adalah <u>bukan</u> bilangan genap <u>atau</u> <u>bukan</u> bilangan bulat.

7.3 Invers, Konvers dan Kontraposisi

Jika implikasi $P \rightarrow Q$ maka dapat dibuat pernyataan–pernyataan implikasi yang lain, yaitu :

1. Konvers : $Q \rightarrow P$
2. Invers : $\sim P \rightarrow \sim Q$
3. Kontraposisi : $\sim Q \rightarrow \sim P$

Tabel kebenaran :

				Implikasi	Konvers	Invers	Kontraposisi
P	**Q**	**~ P**	**~ Q**	**$P \rightarrow Q$**	**$Q \rightarrow P$**	**$\sim P \rightarrow \sim Q$**	**$\sim Q \rightarrow \sim P$**
B	B	S	S	B	B	B	B
S	B	B	S	B	S	S	B
S	S	B	B	B	B	B	B
B	S	S	B	S	B	B	S

ekuivalen

ekuivalen

Contoh:
Implikasi : Jika ia lapar, maka ia makan.
Konversi : Jika ia makan, maka ia lapar.
Inversi : Jika ia tidak lapar, maka ia tidak makan.
Kontraposisi : Jika ia tidak makan, maka ia tidak lapar.

7.4 Menarik Kesimpulan

Modus Ponens

Dasar penyelesaian :

Premis 1	:	$p \rightarrow q$	(B)
Premis 2	:	p	(B)
Kesimpulan	:	q	(B)

Contoh :

Premis 1 : Jika langit mendung, maka turun hujan.
Premis 2 : Langit mendung.
Kesimpulan : Turun hujan.

Modus Tolens

Dasar penyelesaian :

Premis 1	:	$p \rightarrow q$	(B)
Premis 2	:	$-q$	(B)
Kesimpulan	:	$-p$	(B)

Contoh :

Premis 1 : Jika langit mendung, maka turun hujan.
Premis 2 : Tidak turun hujan.
Kesimpulan : Langit tidak mendung.

Prinsip Silogisme

Dasar penyelesaian :

Premis 1	:	$p \rightarrow q$	(B)
Premis 2	:	$q \rightarrow r$	(B)
Kesimpulan	:	$p \rightarrow r$	(B)

Contoh :

Premis 1 : Jika langit mendung, maka turun hujan.
Premis 2 : Jika turun hujan, halaman rumah becek.
Kesimpulan : Jika langit mendung, maka halaman rumah becek.

Latihan Soal

1. Ingkaran (negasi) dari pernyataan :
   “ Semua siswa SMK harus melaksanakan Prakerin.” adalah … (no. 14, Uan. 97-98)
   a. Semua siswa SMK tidak harus melaksanakan Prakerin.
   b. Beberapa siswa SMK harus melaksanakan Prakerin.
   c. Tidak semua siswa SMK harus melaksanakan Prakerin.

d. Ada siswa SMK yang tidak harus melaksanakan Prakerin.
e. ada siswa SMK yang harus melaksanakan Prakerin.

2. Kontraposisi dari pernyataan : “ Jika 2 x 3 = 6 maka 2 + 3 = 5 “ adalah …(no. 15, Uan. 97-98)
a. Jika 2 x 3 $\neq$ 6 maka 2 + 3 $\neq$ 5
b. Jika 2 x 3 $\neq$ 6 maka 2 + 3 = 5
c. Jika 2 + 3 $\neq$ 5 maka 2 x 3 $\neq$ 6
d. Jika 2 + 3 = 5 maka 2 x 3 = 6
e. Jika 2 + 3 $\neq$ 5 maka 2 x 3 = 6

3. Nilai kebenaran dari pernyataan dalam tabel berikut adalah … (no. 14, Uan. 98-99)

p	q	$p \to q$
B	B	…
B	S	…
S	B	…
S	S	…

a. BBSS
b. BBSB
c. BSBB
d. BSBS
e. BSSS

4. Invers dari pernyataan :
“ Jika petani menanam padi maka harga beras turun” adalah … (no. 15, Uan. 98-99)
a. Jika petani menanam padi maka harga beras tidak turun.
b. Jika petani tidak menanam padi maka harga beras turun.
c. Jika harga beras turun maka petani menanam padi.
d. Jika harga beras turun maka petani tidak menanam padi.
e. Jika petani tidak menanam padi maka harga beras tidak turun.

5. Nilai kebenaran dari pernyataan dalam tebel berikut adalah … (no. 16, Uan. 99-00)

p	q	$\sim p \vee q$
B	B	…
B	S	…
S	B	…
S	S	…

a. BSBB
b. BBSB
c. BSSB
d. SBSB
e. BBSS

6. Konversi dari pernyataan “ Jika 2 < 5 maka 2 (-3) > 5 (-3)” , adalah … (no. 17, Uan. 99-00)
a. Jika 2 (-3) > 5 (-3) maka 2 < 5
b. Jika 2 (-3) < 5 (-3) maka 2 < 5
c. Jika 2 (-3) $\leq$ 5 (-3) maka 2 < 5
d. Jika 2 $\geq$ 5 maka 2 (-3) $\leq$ 5 (-3)
e. Jika 2 > 5 maka 2 (-3) < 5 (-3)

7. Negasi dari pernyataan :
“ Jika upah buruh naik, maka harga barang naik” adalah … (No. 14, Uan. 00-01)
a. Jika upah buruh tidak naik, maka harga barang naik.
b. Jika garga barang naik, maka upah buruh naik.
c. Upah buruh naik dan harga barang tidak naik.
d. Upah buruh naik dan harga barang naik.
e. Harga barang naik jika dan hanya jika upah buruh naik.

8. Diketahui :
P1 : Jika servis hotel baik, maka hotel itu banyak tamu.
P2 : Jika hotel itu banyak tamu, maka hotel itu mendapat untung.
Kesimpulan dari argumentasi di atas adalah … (No. 15, Uan. 00-01)
a. Jika servis hotel baik, maka hotel itu mendapat untung.
b. Jika servis hotel tidak baik, maka hotel itu tidak mendapat untung.
c. Jika hotel ingin mendapat untung, maka servisnya baik.
d. Jika hotel itu tamunya banyak, maka servisnya baik.
e. Jika hotel servisnya tidak baik, maka tamunya tidak banyak.

9. Pernyataan yang bernilai benar adalah … (No. 9, Uan. 01-02)
   a. 5 + 5 = 12 dan 7 +7 = 14
   b. 2 + 2 = 5 atau 7 + 10 = 25
   c. Jika 4 + 2 = 7 maka 2 adalah bilangn prima
   d. Jika 5 + 5 = 10 maka Jakarta bukan ibukota RI
   e. 4 x 4 = 16 jika dan hanya jika 8 + 2 = 14

10. Diketahui dua buah premis berikut :
    Premis 1 : Jika Taufik atlit bulutangkis maka ia mempunyai stamina yang prima.
    Premis 2 : Taufik tidak mempunyai stamina prima.
    Kesimpulan yang dapat ditarik dari kedua premis itu adalah … (No. 10, Uan. 01-02)
    a. Taufik seorang atlet bulutangkis.
    b. Taufik bukan seorang atlet bulutangkis.
    c. Taufik mempunyai stamina yang prima.
    d. Taufik tidak mempunyai stamina yang prima.
    e. Taufik bukan seorang pelari.

11. Suatu pernyataan yang sesuai dengan pernyataan :
    " Jika Anda datang, maka saya tidak pergi" adalah … (No. 19, Uan. 02-03)
    a. Jika saya pergi, maka Anda tidak datang.
    b. Jika saya tidak pergi, maka Anda datang.
    c. Jika Anda datang, maka saya pergi.
    d. Jika Anda tidak datang, maka saya tidak pergi.
    e. Jika saya pergi, maka Anda datang.

12. Diketahui :
    Premis 1 : Jika 12 habis dibagi 6, maka 12 habis dibagi 3.
    Premis 2 : 10 tidak habis dibagi 3.
    Konklusi dari premis-premis di atas adalah … (No. 20, Uan. 03-04)
    a. 12 habis dibagi 6
    b. 12 habis dibagi 3
    c. 10 tidak habis dibagi 6
    d. 10 tidak habis dibagi 3
    e. 10 habis dibagi 3

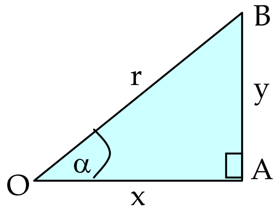
13. Invers dari pernyataan :
    " Jika musim hujan maka air sungai meluap " adalah … (No. 33, Uan. 03-04)
    a. Jika air sungai meluap maka musim hujan.
    b. Air sungai meluap dan musim hujan.
    c. Jika tidak musim hujan maka air sungai tidak meluap.
    d. Jika air sungai tidak meluap maka tidak musim hujan.
    e. Air sungai tidak meluap atau tidak musim hujan.

14. Diketahui :
    P1 : Jika lukisan ini segilima, maka lukisan ini poligon.
    P2 : Lukisan ini bukan poligon.
    Kesimpulan dari argumentasi di atas adalah … (No. 15, Uan. 04-05)
    a. Lukisan ini poligon.
    b. Lukisan ini bukan poligon.
    c. Lukisan ini poligon, tetapi bukan segilima.
    d. Lukisan ini bukan poligon, tetapi bukan segilima.
    e. Lukisan ini bukan poligon dan bukan segilima.

8 MENERAPKAN KONSEP PERBANDINGAN TRIGONOMETRI

1. Mengubah koordinat kutub menjadi koordinat kartesius atau sebaliknya
2. Menentukan nilai perbandingan trigonometri menggunakan rumus jumlah dan selisih
3. Menyelesaikan maslaah yang berkaitan dengan perbandingan trigonometri

8.1 Perbandingan Trigonometri



x = sisi siku-siku samping sudut (proyeksi)
y = sisi siku-siku depan sudut (proyektor)
r = sisi miring (proyektum)

Dasar perbandingan :

a. sinus α $= \dfrac{y}{r}$ d. cosecan α $= \dfrac{r}{y}$

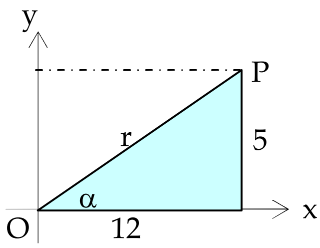
b. cosinus $= \dfrac{x}{r}$ e. secan α $= \dfrac{r}{x}$

c. tangen α $= \dfrac{y}{x}$ f. cotangen α $= \dfrac{x}{y}$

Contoh :

Suatu garis OP dengan O (0 ; 0) dan P (12 ; 5) membentuk sudut α terhadap sumbu x positif. Tentukan perbandingan trigonometrinya.

Penyelesaian :



r = $\sqrt{112^2 + 5^2} = \sqrt{144+25} = \sqrt{169} = 13$

a. sinus α $= \dfrac{5}{13}$ d. cosecan α $= \dfrac{13}{5}$

b. cosinus $= \dfrac{12}{13}$ e. secan α $= \dfrac{13}{12}$

c. tangen α $= \dfrac{5}{12}$ f. cotangen α $= \dfrac{12}{5}$

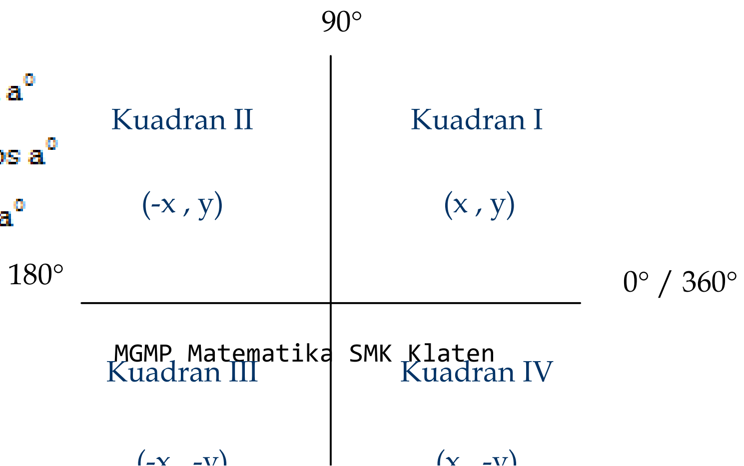
Tabel nilai sudut istimewa :

Sudut α :	0°	30°	45°	60°	90°
Sin α	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1
Cos α	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0
Tg α	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	~

$\sin(180^\circ - a) = \sin a^\circ$

$\cos(180^\circ - a) = -\cos a^\circ$

$tg\,(180^\circ - a) = -\,tg\; a^\circ$



$\sin(180^0 + a) = -\sin a^0$

$\cos(180^0 + a) = -\cos a^0$

$tg\,(180^0 + a) = tg\ a^0$

$\sin(360^0 - a) = \sin(-a) = -\ \sin a^0$

$\cos(360^0 - a) = \cos(-a) = \cos a^0$

$tg\,(360^0 - a) = tg(-a) = -\ tg\ a^0$

8.2 Rumus trigonometri untuk jumlah dua sudut dan selisih dua sudut

1. Cos (A+B) = Cos A. Cos B – Sin A . Sin B
2. Cos (A-B) = Cos A. Cos B + Sin A . Sin B
3. Sin (A+B) = Sin A. Cos B + Cos A . Sin B
4. Sin (A-B) = Sin A. Cos B - Cos A . Sin B
5. Tan (A+B) = $\dfrac{TanA + TanB}{1 - TanA.TanB}$
6. Tan (A-B) = $\dfrac{TanA - TanB}{1 + TanA.TanB}$

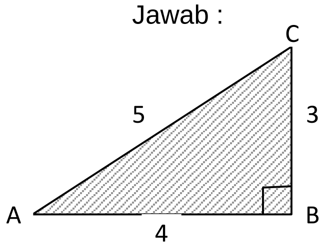
Contoh Soal :

Diketahui : Sin A = $\frac{3}{5}$ untuk A sudut lancip

Cos B = - $\frac{12}{13}$ untuk B sudut lancip

Tentukan : a. Sin (A + B)
b. Cos (B – A)
c. Tan (A – B)

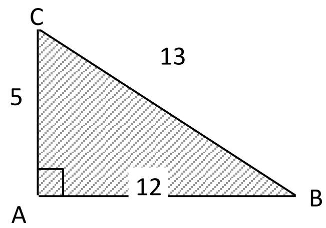
Jawab :



Sin A = $\frac{3}{5}$

Cos A = $\frac{4}{5}$

Tan A = $\frac{3}{4}$



Sin B = $\frac{12}{13}$

Cos B = - $\frac{12}{13}$

Tan B = - $\frac{5}{12}$

a. Sin (A+B) = Sin A . Cos B + Cos A . Sin B

$= \frac{3}{5} \cdot (-\frac{12}{13}) + \frac{4}{5} \cdot \frac{5}{13}$

$= -\frac{36}{65} + \frac{20}{65} = -\frac{16}{65}$

b. Cos (B-A) = Cos B . Cos A + Sin B . Sin A

$= -\frac{12}{13} \cdot \frac{4}{5} + \frac{5}{13} \cdot \frac{3}{5}$

$= -\frac{48}{65} + \frac{15}{65} = -\frac{33}{65}$

c. Tan (A-B) = $\dfrac{\text{Tan A – Tan B}}{\text{1 + Tan A . Tan B}}$

$= \dfrac{3/4 - (-5/12)}{1 + 3/4.(-5/12)}$

$= \dfrac{3/4 + 5/12}{1 - 15/48} = \dfrac{36/48 + 20/48}{\frac{48}{48} - \frac{15}{48}} = \dfrac{56/48}{33/48} = \dfrac{56}{33}$

8.3 Rumus trigonometri rangkap

a. Sin 2 A $= 2 \text{ Sin A . Cos A}$

b. Cos 2 A $= \text{Cos}^2 \text{ A} - 1$

$= 2 \text{ Cos}^2 \text{ A} - 1$

$= 1 - 2 \text{ Sin}^2 \text{ A}$

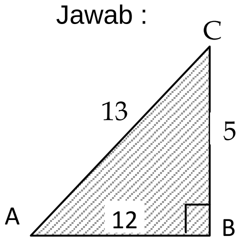
c. Tan 2 A = $\dfrac{2.\text{TanA}}{1-\text{Tan}^2\text{A}}$

Contoh Soal :

Diketahui Cos A = $\dfrac{12}{13}$ untuk A sudut lancip.

Tentukan : a. Sin 2 A b. Cos 2 A c. Tan 2 A

Jawab :



Cos A = $\dfrac{12}{13}$

Sin A = $\dfrac{5}{13}$

Tan A = 5/12

a. Sin 2 A $= 2 \text{ Sin A . Cos A}$

$= 2 \cdot \dfrac{5}{13} \cdot \dfrac{12}{13}$

$= \dfrac{120}{169}$

b. Cos 2 A $= 1 - 2 \text{ Sin}^2 \text{ A}$

$= 1 - 2 \left(\dfrac{5}{13}\right)^2$

$= 1 - 2 \ \dfrac{25}{169}$

$= \dfrac{169-50}{169}$

$= \dfrac{119}{169}$

c. Tan 2 A $= \dfrac{2 \text{ Tan A}}{1 - \text{Tan}^2 \text{ A}} = \dfrac{2 \cdot 5/12}{1 - \left(\frac{5}{12}\right)^2}$

$= \dfrac{\frac{10}{12}}{\frac{144}{144} - \frac{25}{144}} = \dfrac{10/12}{\frac{119}{144}}$

$= \dfrac{10}{12} \times \dfrac{144}{119} = \dfrac{120}{119}$

8.4 Rumus perkalian Sinus dan Cosinus

a. 2 Sin A . Cos B = Sin (A+B) + sin (A-B)

b. 2 Cos A . Sin B = Sin (A+B) – Sin (A-B)

c. 2 Cos A . Cos B = Cos (A+B) + Cos (A-B)

d. – 2 Sin A . Sin B = Cos (A+B) – Cos (A-B)

Contoh Soal :

Nyatakan sebagai jumlah Sinus dan sederhanakan jika mungkin :

a. Cos 75^0 Cos 15^0

b. Cos 2x . Sin x

Jawab :

a. 2 Sin A Cos B = sin (A+B) + sin (A-B)

Sin A Cos B = ½ {Sin (A+B) + Sin (A-B)}

Sin 75 Cos 15 = ½ {Sin (75 + 15) + Sin (75 – 15)}

= ½ {Sin 90^0 + Sin 60^0} = ½ {1 + ½ $\sqrt{3}$} = ½ + ¼ $\sqrt{3}$

b. 2 Cos A . Sin B = Sin (A+B) – Sin (A-B)

Cos A Sin B = ½ {Sin (A+B) – Sin (A-B)}

Cos 2x Sin x = ½ {Sin (2x + x) – Sin (2x – x)}

= ½ {Sin 3x – Sin x}

= ½ Sin 3x – ½ Sin x

8.5 Rumus penjumlahan dan pengurangan Sinus dan Cosinus

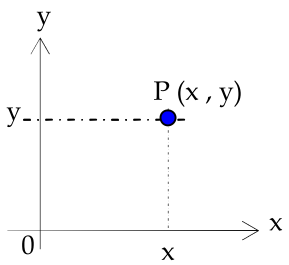
a. Sin A + Sin B = 2 Sin ½ (A+B) . Cos ½ (A-B)
b. Sin A – Sin B = 2 Cos ½ (A+B) . Sin ½ (A-B)
c. Cos A – Cos B = 2 Cos ½ (A+B) . Cos ½ (A-B)
d. Cos A – Cos B = - 2 Sin ½ (A+B) . Sin ½ (A-B)

Contoh :
Hitunglah : a. Cos 75^0 + Cos 15^0 b. Sin 75^0 + Sin 15^0
Jawab :
a. Cos A + Cos B = 2 Cos ½ (A+B) Cos ½ (A-B)
Cos 75^0 + Cos 15^0 = 2 Cos ½ (75+15) Cos ½ (75-15)
= 2 Cos ½ (90) . Cos ½ (60)
= 2 Cos 45 . Cos 30
= 2 . ½ $\sqrt{2}$. ½ $\sqrt{3}$ = ½ $\sqrt{6}$

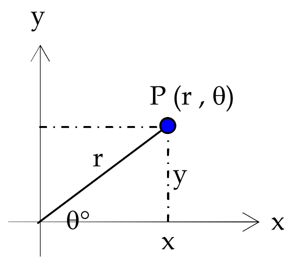
b. Sin A + Sin B = 2 Sin ½ (A+B) . Cos ½ (A-B)
Sin 75 + Sin 15 = 2 Sin ½ (75+15) . Cos ½ (75-15)
= 2 Sin ½ (90) . Cos ½ (60)
= 2 Sin 45 . Cos 30
= 2 . ½ $\sqrt{2}$. ½ $\sqrt{3}$ = ½ $\sqrt{6}$

8.6 Koordinat kartesius dan koordinat kutub

Letak suatu titik pada sebuah bidang dapat dinyatakan dengan 2 macam sistem koordinat, yaitu :
a. Sistem koordinat kartesius, yaitu dengan absis (x) dan ordinat (y).
b. Sistem koorsdinat kutub, yaitu dengan jarak (r) dan sudut yang dibentuk dengan sumbu x positif ($\theta°$).



Misal : Titik P (x , y)



Misal : Titik P (r , $\theta°$)

Koordinat kartesius titik P adalah (x , y) dan koordinat kutub adalah (r , $\theta°$). Tampak bahwa dari x , y , r, dan $\theta°$ terdapat hubungan sebagai berikut :

1. $\sin \theta° = \dfrac{y}{r} \rightarrow y = r . \sin \theta°$
2. $\cos \theta° = \dfrac{x}{r} \rightarrow x = r . \cos \theta$
3. $r = \sqrt{x^2 + y^2}$
4. $\text{tg } \theta° = \dfrac{y}{x} \rightarrow \theta° = \text{arc. tg } \dfrac{y}{x}$

Koordinat kutub titik P adalah (r, $\theta°$) bila dinyatakan dengan koordinat kartesius adalah :
(r.cos$\theta°$, r.sin$\theta°$). Sebaliknya koordinat kartesius (x,y) bila dinyatakan dengan koordinat kutub adalah ($\sqrt{x^2 + y^2}$, $\text{arc. tg } \dfrac{y}{x}$).

Contoh 1:

Diketahui koordinat kutub titk P (4 , 60°). Tentukan koordinat kartesius titik tersebut !

Penyelesaian : P (4 , 60°) $\rightarrow$ r = 4 dan $\theta°$ = 60°

$x = r \cdot \cos\theta°$	$y = r \cdot \sin\theta°$
$x = 4 \cdot \cos 60°$	$y = 4 \cdot \sin 60°$
$x = 4 \cdot \frac{1}{2}$	$y = 4 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3}$
$x = 2$	$y = 2\sqrt{3}$

Jadi koordinat kartesius dari titik P (4 , 60°) adalah : P (2 , $2\sqrt{3}$)

Contoh 2 :

Diketahui koordinat kartesius titik P ($-2,-2\sqrt{3}$). Tentukan koordinat kutub titik P tersebut!

Penyelesaian : P ($-2,-2\sqrt{3}$). $\rightarrow$ x = -2 dan y = $-2\sqrt{3}$ (di kuadran III)

$r = \sqrt{(-2)^2 + (-2\sqrt{3})^2}$	$\text{tg } \theta° = \frac{y}{x} = \frac{-2\sqrt{3}}{-2}$
$r = \sqrt{4+12}$	$\text{tg } \theta° = \sqrt{3}$
$r = \sqrt{16}$	$\theta° = \text{arc. tg } \sqrt{3}$
$r = 4$	$\theta° = 240°$ (kuadran III)

Jadi koordinat kutub dari titik P ($-2,-2\sqrt{3}$) adalah : P (4 , 240°)

Latihan Soal

1. Nilai sin 225° adalah …

   a. $-\frac{1}{2}\sqrt{2}$ b. $-\frac{1}{2}$ c. $\frac{1}{2}$ d. $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ e. $\frac{1}{2}\sqrt{3}$

2. Koordinat kutub (4, 150°), maka koordinat kartesiusnya adalah …

   a. ($2\sqrt{3}$, 2) b. ($-2\sqrt{3}$, 2) c. ($2\sqrt{3}$, -2) d. ($-2\sqrt{3}$, -2) e. (2 , $-2\sqrt{3}$)

3. Diketahui cotg A = $\frac{7}{24}$ dengan sudut A lancip, maka sin A + cos A = …

   a. $\frac{25}{7}$ b. $\frac{24}{7}$ c. $\frac{25}{24}$ d. $\frac{24}{25}$ e. $\frac{31}{25}$

4. Luas segitiga ABC dengan panjang sisi b = 5 cm, panjang sisi c = 8 cm, $\angle$A = 45° adalah …

   a. 10 cm^2 b. $10\sqrt{3}$ cm^2 c. 20 cm^2 d. $20\sqrt{3}$ cm^2 e. $20\sqrt{2}$ cm^2

5. Diketahui sin A = $\frac{3}{5}$, cos B = $\frac{5}{13}$, A dan B sudut lancip, maka nilai dari sin(A + B) = …

   a. $-\frac{63}{65}$ b. $-\frac{50}{65}$ c. $-\frac{33}{65}$ d. $\frac{33}{65}$ e. $\frac{63}{65}$

6. Jika cos A = $\frac{4}{5}$ dan 0° < A < 90° , maka sin 2A = …

   a. $\frac{24}{25}$ b. $\frac{8}{10}$ c. $\frac{6}{10}$ d. $\frac{7}{25}$ e. $\frac{4}{25}$

7. sin 75° + sin 15° = …

   a. - 1 b. 0 c. $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ d. $\frac{1}{2}\sqrt{6}$ e. 1

8. Ali berdiri sejauh 100 meter dari suatu tiang, dan memandang ke puncak menara dengan sudut pandang α . Jika sin α = $\frac{3}{5}$ dan tinggi Ali 1,5 meter maka tinggi tiang = … (no. 33, Uan 97-98)

a. 61,5 m b. 75 m c. 76,5 m d. 81,5 m e. 134,8 m

9. Jika cos A = $-\frac{3}{5}$, sin B = $\frac{5}{13}$, A di kuadran II dan B di kuadran I, maka nilai dari sin (A+B) adalah … (no. 34, Uan 97-98)
a. $-\frac{16}{65}$ b. $\frac{33}{65}$ c. $\frac{34}{65}$ d. $\frac{56}{65}$ e. $\frac{63}{65}$

10. Nilai sin 225° = … (no. 33, Uan 98-99)
a. $-\frac{1}{2}\sqrt{2}$ b. $-\frac{1}{2}$ c. $\frac{1}{2}$ d. $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ e. $\frac{1}{2}\sqrt{3}$

11. Diketahui sin A = $\frac{3}{5}$ dan A adalah sudut lancip. Nilai sin 2A = … (no. 34,Uan 98-99)
a. $\frac{30}{25}$ b. $\frac{24}{25}$ c. $\frac{17}{25}$ d. $\frac{7}{25}$ e. $\frac{5}{25}$

12. sin 75° + sin 15° adalah … (no. 33, Uan 00-01)
a. - 1 b. 0 c. $\frac{1}{2}\sqrt{6}$ d. $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ e. 1

13. Diketahui cos A = $\frac{4}{5}$, 0°< x < 90°, maka cos 2A = … (no. 34, Uan 00-01)
a. $\frac{24}{25}$ b. $\frac{8}{10}$ c. $\frac{6}{10}$ d. $\frac{7}{25}$ e. $\frac{4}{25}$

14. Jika tg α = $\frac{1}{p}$, α sudut lancip, maka nilai cos 2α = … (no. 32, Uan 01-02)
a. $\frac{p^2+1}{p^2-1}$ b. $\frac{p^2-1}{p^2+1}$ c. $\frac{2p^2}{p^2-1}$ d. $\frac{-2p^2}{p^2-1}$ e. $\frac{p^2-1}{\sqrt{p^2+1}}$

15. Jika sin A = $\frac{3}{5}$,A pada kuadran II, maka cos 2A= … (no.28, Uan 02-03)
a. -1 b. $-\frac{4}{5}$ c. 0 d. $\frac{4}{5}$ e. 1

16. Koordinat kutub titik A (4 , 120°), koordinat kartesiusnya adalah … (no.31,Uan 02-03)
a. $(-2 , 2\sqrt{3})$ b. $(2 , 2\sqrt{3})$ c. $(-2 , -2\sqrt{3})$ d. $(2 , -2\sqrt{3})$ e. $(2\sqrt{3} , -2)$

17. Diketahui cos α = $\frac{2}{3}$ dengan α sudut lancip, maka nilai sin $\frac{1}{2}\alpha$ adalah … (no.32,Uan 03-04)
a. $\frac{1}{6}\sqrt{2}$ b. $\frac{1}{6}\sqrt{6}$ c. $\frac{1}{3}\sqrt{2}$ d. $\frac{1}{3}\sqrt{3}$ e. $\frac{1}{6}\sqrt{30}$

18. Nilai dari cos 240° adalah … (no.9, Uan 04-05)
a. $-\frac{1}{2}\sqrt{3}$ b. $-\frac{1}{2}$ c. $\frac{1}{2}$ d. $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ e. $\frac{1}{2}\sqrt{3}$

19. Diketahui : tg A = $-\frac{1}{2}$ dengan $\frac{\pi}{2} < A < \pi$, maka nilai sin A.cos A adalah … (no.12,Uan 03-04)
a. $-\frac{2}{3}$ b. $-\frac{3}{5}$ c. $-\frac{2}{5}$ d. $-\frac{2}{7}$ e. $-\frac{1}{5}$

20. Jika 90° < α < 180° dan sin α = 4/5, maka cos α = …
a. -4/3 c. -3/5 e. 4/5
b. -4/5 d. 3/5

9 MENYELESAIKAN MASLAAH DENGAN KONSEP PELUANG

1. Menghitung permutasi dan kombinasi
2. Menghitung peluang suatu kejadian

9.1 Faktorial

Dilambangkan dengan : n !
Misalkan hasil dari 5 ! adalah : 5 x 4 x 3 x 2 x 1 =120

9.2 Permutasi

Permutasi diartikan : susunan n unsur yang diambil r unsur dengan memperhatikan urutannya.

Dilambangkan dengan : $P_r^n = \dfrac{n\,!}{(n-r)!}$

9.3 Kombinasi

Kombinasi diartikan : susunan n unsur yang diambil r unsur dengan tidak memperhatikan urutannya.

Dilambangkan dengan : $K_r^n = \dfrac{n!}{r!\,(n-r)!}$

9.5 Peluang suatu Kejadian

a. $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
b. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
c. $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$
d. $P(A \cap B) = P(A) \times P(B/A)$

Latihan Soal

1. Dari 10 siswa akan dipilih 8 siswa sebagai pengurus kelas. Banyaknya susunan pengurus yang berbeda yang mungkin dapat dibentuk adalah …
   a. 18 susunan b. 20 susunan c. 45 susunan d. 90 susunan e. 180 susunan

2. Pasangan pengantin baru merencanakan ingin mempunyai 3 anak, maka peluang mendapat 2 anak laki-laki dan satu perempuan adalah …
   a. $\frac{1}{6}$ b. $\frac{2}{6}$ c. $\frac{1}{8}$ d. $\frac{2}{8}$ e. $\frac{3}{8}$

3. Tiga mata uang logam dilempar bersama sebanyak 280 kali. Frekuensi harapan muncul dua gambar adalah …
   a. 35 kali b. 70 kali c. 105 kali d. 140 kali e. 175 kali

4. Dari 5 orang tokoh masyarakat suatu daerah akan dipilih 3 orang untuk menduduki jabatan Ketua RT, Sekretaris dan Bendahara. Banyak susunan yang mungkin terjadi dari pemilihan tersebut adalah … (no. 24, Uan. 97-98)
   a. 10 susunan b. 20 susunan c. 24 susunan d. 40 susunan e. 60 susunan

5. Dari 6 siswa akan dipilih 4 siswa sebagai pengurus kelas. Banyak susunan yang mungkin terjadi adalah … (no. 25, Uan. 97-98)
   a. 30 susunan b. 24 susunan c. 15 susunan d. 12 susunan e. 6 susunan

6. Rapat Pramuka dihadiri 8 siswa SMK, 6 siswa SMU, dan 4 siswa MAN. Bila seorang siswa dipilih untuk berbicara di depan. Peluang pembicara dari siswa SMK atau MAN adalah … (no. 26, Uan. 97-98)
   a. 7/9 b. 2/3 c. 5/9 d. 1/3 e. 2/9

7. Nomor polisi kendaraan bermotor terdiri dari empat angka dan diawali dengan angka **4** yang disusun dari angka-angka **4, 5, 6, 7, 8** dan **9**. Jika angka-angkanya boleh berulang maka banyaknya nomor polisi tersebut adalah … (no. 24, Uan. 98-99)
   a. 60 b. 120 c. 216 d. 360 e. 1.290

8. Banyaknya kemungkinan susunan huruf yang terdiri dari **4** huruf yang dapat dibentuk dari kata " **RAPI** " adalah … (no. 25, Uan. 98-99)
   a. 4 b. 8 c. 16 d. 24 e. 32

9. Dalam sebuah kotak terdapat 6 buah bola bernomor 1 sampai 6. Jika diambil sebuah bola secara acak, peluang terambil bola bernomor kelipatan 2 atau kelipatan 3 adalah …(no. 26, Uan. 98-99)
   a. 1/6 b. 2/6 c. 4/6 d. 5/6 e. 1

10. Dari **10** calon pengurus suatu yayasan akan dipilih **2** orang untuk menduduki jabatan Ketua dan Sekretaris. Banyak susunan pengurus yang mungkin adalah … (no. 25, Uan. 99-00)
    a. 90 b. 50 c. 45 d. 20 e. 15

11. Dua buah dadu dilempar sekaligus sebanyak dua kali. Peluang muncul jumlah kedua mata dadu sama dengan 7 atau 10 adalah … (no. 26, Uan. 99-00)
    a. ¼ b. 1/6 c. 5/36 d. 1/12 e. 1/54

12. Ada 6 siswa baru yang belum saling mengenal satu sama lain, apabila mereka ingin berkenalan dengan berjabatan tangan. Maka jabatan tangan yang akan terjadi adalah …(no. 25, Uan. 00-01)
    a. 10 kali b. 12 kali c. 13 kali d. 15 kali e. 16 kali

13. Dari seperangkat kartu Bridge diambil sebuah kartu secara acak. Berapakah frekuensi harapan terambil kartu bernomor 9 yang berwarna merah, jika pengambilan tersebut dilakukan sebanyak 130 kali ? (no. 26, Uan. 00-01)
    a. 5 kali b. 10 kali c. 13 kali d. 26 kali e. 52 kali

14. Untuk memberikan kode produksi yang terdiri dari 4 angka tersedia angka-angka 0, 1, 2, 3, dan 4. Bila susunan angka-angka itu boleh berulang (kecuali untuk angka 0 empat kali berturut-turut) maka banyak kode tersebut adalah … (no. 22, Uan. 01-02)
    a. 625 susunan b. 624 susunan c. 621 susunan d. 620 susunan e. 120 susunan

15. Dalam suatu kotak terdapat 6 bola dengan warna berbeda-beda. Jika dari dalam kotak tersebut diambil 2 bola sekaligus 3 kali berturut-turut tanpa pengembalian, maka banyak susunan warna bola yang mungkin terjadi dari hasil pengambilan tersebut adalah … (no. 23, Uan. 01-02)
    a. 90 susunan b. 80 susunan c. 45 susunan d. 21 susunan e. 18 susunan

16. Sepasang suami istri bermaksud melaksanakan keluarga berencana. Mereka berharap memiliki dua anak, anak pertama wanita dan selanjutnya laki-laki. Kemungkinan harapan mereka terpenuhi adalah … (no. 25, Uan. 01-02)
    a. 1/2. b. 1/3 c. 1/4 d. 1/5 e. 1/6

17. Pada kompetisi bola basket yang diikuti 6 regu, panitia menyediakan 6 tiang bendera. Banyak susunan yang berbeda untuk memasang bendera tersebut adalah …(no. 17, Uan. 02-03)
    a. 6 cara b. 36 cara c. 24 cara d. 120 cara e. 720 cara

18. Untuk memperoleh jenis baru, dilakukan penyilangan terhadap 7 jenis padi yang berlainan satu dengan yang lain. Banyak macam penyilangan yang dapat dilakukan ada…(no. 18, Uan. 02-03)

a. 2520 cara b. 147 cara c. 84 cara d. 42 cara e. 21 cara

19. Dalam babak penyisihan suatu kompetisi sepak bola terdapat 10 kesebelasan yang akan bertanding satu sama lain. Banyaknya pertandingan dalam babak penyisihan tersebut adalah … (no. 18, Uan. 03-04)
    a. 10 pertandingan c. 45 pertandingan e. 100 pertandingan
    b. 20 pertandingan d. 90 pertandingan

20. Pimpinan perusahaan akan memilih tujuh orang karyawan yang berprestasi untuk mengisi dua jabatan yang berbeda di perusahaan tersebut. Banyaknya cara pimpinan perusahaan memilih karyawan tersebut adalah … (no. 19, Uan. 03-04)
    a. 14 cara b. 21 cara c. 42 cara d. 105 cara e. 210 cara

10 MENERAPKAN ATURAN KONSEP STATISTIK DALAM PEMECAHAN MASALAH

1. Menghitung permutasi, kombinasi, dan peluang suatu kejadian
2. Menghitung unsur-unsur pada diagram lingkaran atau batang
3. Menghitung ukuran pemusatan
4. Menghitung ukuran penyebaran

Pengolahan data adalah suatu kegiatan untuk memperoleh nilai statistik dari data yang telah dikumpulkan, atau mengolah data adalah memanipulasikan data untuk memperoleh keterangan-keterangan yang berupa angka-angka ringkasan, sedangkan data adalah keterangan yang dapat memberikan gambaran tentang suatu keadaan atau masalah.
Adapun penyajian data dapat dibagi menjadi 2 macam, yaitu : Data Tunggal dan Data Kelompok.

a. Rumus-rumus data tunggal :
Contoh Permasalahan: Tersedia data tunggal sebagai berikut : **5, 6, 4, 5, 6, 4, 7, 8, 5, 3**, tentukanlah:

1. Rata-rata Hitung (mean = $\bar{x}$)

Rumus : $\bar{x} = \dfrac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}$ atau $\bar{x} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$

Keterangan :

$\bar{x}$ = rata-rata (dibaca : x bar)

n = banyaknya data

$\sum_{i=1}^{n} x_i$ = jumlah seluruh data

Jawab : $\bar{x} = \dfrac{5+6+4+5+6+4+7+8+5+3}{10} = 5{,}3$

2. Median (Me)

Median (Me) adalah nilai tengah dari kumpulan data yang telah diurutkan (disusun) dari data terkecil sampai data terbesar.

Jawab : data yang diurutkan menjadi : **3, 4, 4, 5, 5, 5, 6, 6, 7, 8**

Karena banyaknya data 10 buah maka titik tengah data adalah rata-rata dari :

Me = $\dfrac{5+5}{2} = 5$

3. Modus (Mo)

Modus didefinisikan sebagai nilai data yang paling sering muncul atau nilai data yang frekuensinya paling besar.

Jawab : data yang diurutkan menjadi : **3, 4, 4, 5, 5, 5, 6, 6, 7, 8**

Dengan melihat data tersebut di atas terlihat modus (Mo) = 5

4. Rata-Rata Geometric/Ukur (Ru)

Rumus : Ru = $\sqrt[n]{x_1 . x_2 . x_3 .... x_n}$

Dengan melihat data tersebut maka rata-rata geometric/ukur data adalah :

Ru = $\sqrt[10]{5.6.4.5.6.4.7.8.5.3}$ Ru = 5,108

5. Rata-rata Harmoni (Rh)

Rumus : Rh = $\dfrac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + ... + \frac{1}{x_n}}$

Dengan melihat data tersebut maka rata-rata harmoni data adalah :

Rh = $\dfrac{10}{\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{4}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{5}+\frac{1}{3}}$

Rh = $\dfrac{10}{\frac{1709}{840}} = 10x\dfrac{840}{1709}$ =4,92

6. **Simpangan Rata-rata (Sr)**

Sr = $\dfrac{\sum|x_i - \bar{x}|}{n}$

Jawab : Untuk mencari simpangan rata-rata dibuat tabel :
Dari hitungan awal telah didapatkan rata-rata hitung = 5,3

x_i	$\lvert x_i - \bar{x}\rvert$
3	2,3
4	1,3
4	1,3
5	0,3
5	0,3
5	0,3
6	0,7
6	0,7
7	1,7
8	2,7
jumlah	11,6

Maka Sr = $\dfrac{11,6}{10} = 1,16$

7. **Quartil**

Quartil adalah ukuran letak yang membagi suatu kelompok data menjadi empat bagian yang sama besar. Secara gambar dapat dijelaskan sebagai berikut :
Nilai quartil dari sebuah data dapat ditentukan jika data tersebut sudah diurutkan dari nilai terkecil sampai tertinggi, sehingga letak dari masing-masing Quartil Bawah Q_1, Quartil Tengah Q_2 dan Quartil Atas Q_3 ditentukan dengan rumus :

- Letak Q_1 = $\dfrac{n+1}{4}$ — Letak $Q_1 = \dfrac{(10+1)}{4} = \dfrac{11}{4} = 2,75$
- Letak Q_2 = $\dfrac{2.(n+1)}{4}$ — Letak $Q_1 = \dfrac{2.(10+1)}{4} = \dfrac{22}{4} = 5,50$
- Letak Q_3 = $\dfrac{3.(n+1)}{4}$ — Letak $Q_1 = \dfrac{3.(10+1)}{4} = \dfrac{33}{4} = 8,25$

Jawab : data yang diurutkan menjadi : **3, 4, 4, 5, 5, 5, 6, 6, 7, 8**
Dengan mengetahui letak masing-masing quartil, maka :

$Q_1 = 4 + \frac{3}{4}(4-4) = 4$

$Q_2 = 5 + \frac{1}{2}(5-5) = 5$

$Q_3 = 6 + \frac{1}{4}(7-6) = 6\frac{1}{4}$

8. **Simpangan Quartil**

Simpangan quartil atau jangkauan semi interquartil adalah setengah dari rentangan atau selisih dari Q_3 dengan Q_1.

Dirumuskan dengan : Sq = $\frac{1}{2}(Q_3 - Q_1)$

Dengan temuan hitungan di atas maka Sq = $\frac{1}{2}(6\frac{1}{4} - 4) = \frac{9}{8} = 1\frac{1}{8}$

9. **Desil**

Desil adalah ukuran-ukuran yang membagi data menjadi 10 bagian yang sama. Titik ukuran tersebut dinotasikan dengan D_1, D_2, … hingga D_9. Dengan kata lain bahwa 10%data kurang dari D_1, 20% data kurang dari D_2, ...dan hingga 90% data kurang dari D_9.

Dirumuskan dengan : $D_i = \frac{i.(n+1)}{10}$, dengan i = 1 sampai 9.

Dengan memperhatikan data di atas maka tentukanlah D_4 dari data tersebut !

Jawab : data yang diurutkan menjadi : **3, 4, 4, 5, 5, 5, 6, 6, 7, 8**

Letak $D_4 = \frac{4.(10+1)}{10} = 4{,}4$

Maka nilai dari $D_4 = 5 + \frac{4}{10}(5-5) = 5$

10. Persentil

Persentil adalah ukuran-ukuran yang membagi data menjadi 100 bagian yang sama besar. Titik-titik ukuran tersebut dinotasikan dengan P_1, P_2, P_3, ….., P_{99}, sehingga 1% data kurang dari P_1, 2% data kurang dari P_2, dan seterusnya hingga 99% data kurang dari P_{99}.

Dirumuskan dengan : Pi = $\frac{i.(n+1)}{100}$, dengan i = 1 hingga 99.

Dengan memperhatikan data di atas maka tentukanlah P_{80} dari data tersebut !

Jawab : data yang diurutkan menjadi : **3, 4, 4, 5, 5, 5, 6, 6, 7, 8**

Letak $P_{80} = \frac{80.(10+1)}{100} = 8{,}80$

Maka nilai dari $P_{80} = 6 + \frac{80}{100}(7-6) = 6{,}80$

11. Simpangan Baku (standar deviasi = S)

Simpangan baku sebagai salah satu ukuran penyebaran absolut (mutlak), dapat digunakan untuk membandingkan suatu rangkaian data dengan rangkaian data lainnya.

Simpangan baku suatu rangkaian data adalah akar pangkat dua dari kuadrat terhadap mean. Dengan perkataan lain, simpangan standar adalah akar pangkat dua dari variansi. Dengan kata lain standar deviasi = $\sqrt{S^2}$ atau standar deviasi = $\sqrt{\text{var iansi}}$.

Dirumuskan dengan : $S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n}}$ atau $S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n}$

Dengan memperhatikan data di atas maka tentukanlah standar deviasi dan variansi data !

Jawab : data yang diurutkan menjadi : **3, 4, 4, 5, 5, 5, 6, 6, 7, 8**

Dari hitungan awal didapat rata-rata = 5,3

Untuk menghitungnya dibuat tabel sebagai berikut :

x_i	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$
3	- 2,3	5,29
4	- 1,3	1,69
4	- 1,3	1,69
5	- 0,3	0,09
5	- 0,3	0,09
5	- 0,3	0,09
6	0,7	0,49
6	0,7	0,49
7	1,7	2,89
8	2,7	7,29
jumlah		20,10

Maka nilai standar deviasi : $S = \sqrt{\frac{20,1}{10}} = \sqrt{2,01}$, dan nilai variansi data : $S^2 = 2,01$

b. Rumus-rumus data kelompok :

1. Rata-rata Hitung (mean)

Untuk mencari rata-rata hitung, kita dapat menggunakan dua cara yaitu :

a. nilai tengah (xi)

Dirumuskan dengan : $\bar{x} = \frac{\sum f_i . x_i}{\sum f_i}$

b. rata-rata sementara

Dirumuskan dengan : $\bar{x} = x_o + \frac{P}{n} \sum f_i . c_i$

Keterangan : P = panjang kelas
x_o = rata-rata sementara
n = banyaknya data

Contoh soal : Carilah nilai rata-rata dari data tabel berikut ini !

Nilai	Frekuensi
59 – 65	4
66 – 72	8
73 – 79	20
80 – 86	10
87 – 93	4
94 – 100	4
Jumlah	50

a. Dengan Metode Titik Tengah

Nilai	xi	Fi	fi . xi
59 – 65	62	4	248
66 – 72	69	8	552
73 – 79	76	20	1520
80 – 86	83	10	830
87 – 93	90	4	360
94 – 100	97	4	388
jumlah		50	3898

$\bar{x} = \frac{\sum f_i . x_i}{\sum f_i}$ maka : $\bar{x} = \frac{3898}{50} = 77,96$

b. Dengan Metode Rata-rata Sementara

Mencari nilai rata-rata dengan metode rata-rata sementara yaitu dengan mengambil x_i dengan frekuensi terbanyak dan sebagai x_o.

Nilai	fi	xi	ci	fi . ci
59 – 65	4	62	- 2	- 8
66 – 72	8	69	- 1	- 8
73 – 79	20	76	0	0
80 – 86	10	83	1	10
87 – 93	4	90	2	8
94 – 100	4	97	3	12
jumlah	50			14

$\bar{x} = x_o + \frac{P}{n} \sum f_i . c_i$ maka : $\bar{x} = 76 + \frac{7}{50} .14 = 77,96$

2. Median (Me)

Untuk menghitung median dari data yang telah dikelompokkan menggunakan rumus :

$$Me = b + P\left(\frac{\frac{1}{2}n - F}{f}\right)$$

Keterangan : b = batas bawah kelas median

P = panjang kelas
F = jumlah frekuensi sebelum kelas median
f = frekuensi kelas median
n = banyaknya data

Dengan melihat banyaknya data = 50, maka median berada pada kelas 73 – 79.

$$b = \frac{72+73}{2} = 72{,}5$$

F = 4 + 8 = 12
f = 20

$$Me = 72{,}5 + 7.\left(\frac{\frac{1}{2}.50 - 12}{20}\right)$$

$$Me = 72{,}5 + 7.\left(\frac{25-12}{20}\right) = 72{,}5 + 7.\frac{13}{20} = 72{,}5 + 4{,}55 = 77{,}05$$

3. Modus (Mo)

Untuk menghitung modus dari data yang telah dikelompokkan menggunakan rumus :

$$Mo = b + P.\left(\frac{b_1}{b_1 + b_2}\right)$$

Keterangan : b = batas bawah kelas modus
P = panjang kelas
b_1 = frekuensi kelas modus dikurangi frekuensi kelas sebelumnya
b_2 = frekuensi kelas modus dikurangi frekuensi kelas berikutnya

Dengan melihat data yang ada kelas 73 – 79 mempunyai frekuensi yang terbesar, berarti modusnya terletak pada kelas tersebut.

$$b = \frac{72+73}{2} = 72{,}5$$

b_1 = 20 – 8 = 12
b_2 = 20 – 10 = 10

$$Mo = 72{,}5 + 7.\left(\frac{12}{12+10}\right) = 76{,}31$$

4. Quartil

Untuk menghitung quartil dari data yang telah dikelompokkan menggunakan rumus :

$$Q_1 = b + P.\frac{\frac{1}{4}n - F}{f} \qquad Q_2 = b + P.\frac{\frac{2}{4}n - F}{f} \qquad Q_3 = b + P.\frac{\frac{3}{4}n - F}{f}$$

Keterangan : b = tepi bawah kelas Qi
F = jumlah frekuensi sebelum kelas Qi
f = frekuensi kelas Qi
n = banyaknya data

Misalkan dengan menggunkan data tersebut di atas tentukanlah Q_3 !

Letak $Q_3 = \frac{3.(50+1)}{4} = \frac{153}{4} 38\frac{1}{4}$ berarti letak Q_3 pada kelas 80 – 86

$$b = \frac{79+80}{2} = 79{,}5$$

F = 32 dan f = 10

$$Q_3 = 79{,}5 + 7.\frac{\frac{3}{4}50 - 32}{10} 83{,}35$$

5. Desil

Dirumuskan dengan : $D_i = b + P.\left(\dfrac{\frac{i}{10}n - F}{f}\right)$

Keterangan : b = tepi bawah kelas Qi
F = jumlah frekuensi sebelum kelas Qi
f = frekuensi kelas Qi
n = banyaknya data

Misalkan dengan menggunkan data tersebut di atas tentukanlah D_6 !

Letak D_6 = $\dfrac{6}{10}.50 = 30$, maka kelas interval yang memuat D_6 adalah 73 – 79.

b = $\dfrac{72+73}{2} = 72{,}5$

F = 4 + 8 = 12

f = 20

$D_i = 72{,}5 + 7.\left(\dfrac{30-12}{20}\right) = 78{,}80$

6. Persentil

Dirumuskan dengan : $P_i = b + P.\left(\dfrac{\frac{i}{100}n - F}{f}\right)$

Keterangan : b = tepi bawah kelas Pi
F = jumlah frekuensi sebelum kelas Pi
f = frekuensi kelas Pi
n = banyaknya data

Misalkan dengan menggunkan data tersebut di atas tentukanlah P_{80} !

Letak P_6 = $\dfrac{80}{100}.50 = 40$, maka kelas interval yang memuat P_{80} adalah 80 – 86.

b = $\dfrac{79+80}{2} = 79{,}5$

F = 4 + 8 + 20 = 32

f = 10

$P_i = 79{,}5 + 7.\left(\dfrac{\frac{80}{100}.50 - 32}{10}\right) = 85{,}10$

7. Simpangan Baku (standar deviasi = S)

Untuk mencari nilai simpangan baku data yang telah dikelompokkan dapat dicari dengan menggunakan dua rumus, yaitu :

a. $S = \sqrt{\dfrac{\sum f_i.x_i^2 - \dfrac{\left(\sum f_i.x_i\right)^2}{\sum f_i}}{\sum f_i - 1}}$ b. $S = \dfrac{P}{n}\sqrt{n.\sum_{i=1}^{k} c_i^2.f_i - \left(\sum c_i.f_i\right)^2}$

Dengan melihat rumus yang ada, kelihatan lebih mudah menggunakan rumus b.

Nilai	fi	Xi	ci	ci^2	ci^2.fi	ci.fi
59 – 65	4	62	- 2	4	16	- 8
66 – 72	8	69	- 1	1	8	- 8
73 – 79	20	76	0	0	0	0
80 – 86	10	83	1	1	10	10
87 – 93	4	90	2	4	16	8
94 – 100	4	97	3	9	36	12
jumlah	50				86	14

$$S = \frac{7}{50}\sqrt{50.86-(14)^2} = \frac{7}{50}\sqrt{4300-196} = \frac{7}{50}.64{,}06 = 8{,}96$$ maka variansi : $S^2 = (8{,}96)^2 = 80{,}28$

Latihan Soal

1. Simpangan quartil dari data : 3, 5, 9, 10, 10, 12, 13, 15, 15 adalah …
   a. 3,5 b. 7 c. 10 d.12 e. 14

2. Nilai ulangan matematika dari 15 siswa adalah : 5, 6, 7, 9, 7, 4, 4, 7, 6, 8, 8, 9, 7, 6, 5. Median dari data tersebut adalah …
   a. 5 b. 6,5 c. 7 d. 7,5 e. 8

3. Dari hasil pengukuran tinggi badan siswa, tinggi rata-rata siswa laki-laki 160 cm , tinggi rata-rata siswa wanita 150 cm. Jika jumlah siswa laki-laki 25 orang dan wanita 15 orang, maka tinggi badan siswa rata-rata gabungan adalah …
   a. 156,50 cm b. 156, 25 cm c. 156,00 cm d. 155,00 cm e. 153,75 cm

4. Simpangan baku dari data : 2, 3, 5, 8, 7 adalah …
   a. $\sqrt{5{,}2}$ b. $\sqrt{5{,}25}$ c. $\sqrt{6}$ d. $\sqrt{7}$ e. $\sqrt{7{,}2}$

5. Data nilai ulangan matematika pada suatu kelas adalah sebagai berikut :

Nilai	Frekuensi
50 – 59	7
60 – 69	10
70 – 79	15
80 – 89	12
90 -99	6

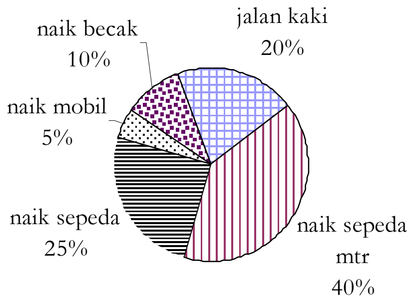
   Modus dari data tersebut adalah …
   a. 73,5
   b. 74,0
   c. 74,5
   d. 75,0
   e. 75,9

6. Hasil ulangan dari 50 siswa SMK adalah sebagai berikut :

Nilai	Frekuensi
40 - 49	2
50 – 59	4
60 – 69	5
70 – 79	7
80 – 89	4
90 -99	3

   Persentil 40 (P_{40}) adalah …
   a. 66,17
   b. 71,50
   c. 72,50
   d. 76,17
   e. 77,17

7. Diagram di samping menunjukkan cara yang ditempuh oleh 180 siswa SMK untuk berangkat ke sekolah. Jumlah siswa yang <u>tidak naik</u> mobil ke sekolah adalah … (no. 27, Uan. 97-98)
   a. 18 siswa c. 45 siswa e. 171 siswa
   b. 36 siswa d. 72 siswa



8. Berat paket yang diterima oleh suatu perusahaan selama 1 minggu tercatat seperti pada tabel di bawah. Rata-rata dari berat paket dalam 1 minggu tersebut adalah … (no. 28, Uan. 97-98)
   a. 6,15 kg
   b. 6,23 kg

Berat (kg)	Frekuensi
5	6

c. 6,47 kg
d. 6,59 kg
e. 6,82 kg

6	8
7	12
8	4

9. Berat badan dari 30 siswa suatu kelas disajikan dalam tabel di bawah ini. Modus data tersebut adalah … (no. 29, Uan. 97-98)
   a. 52,5 kg
   b. 53,5 kg
   c. 54 kg
   d. 55 kg
   e. 56 kg

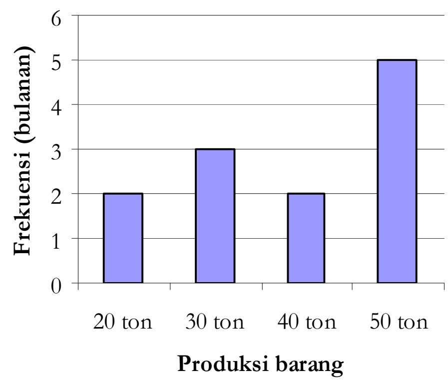
Berat (kg)	Frekuensi
41 – 45	1
46 – 50	6
51 – 55	12
56 – 60	8
61 – 65	3
Jumlah	30

10. Nilai dari Ulangan Matematika dari 12 siswa adalah sebagai berikut : **6, 8, 5, 7, 6, 8, 5, 9, 6, 6, 8, 7.** Median dari data tersebut adalah … (no. 30, Uan. 97-98)
    a. 8,5 b. 8 c. 7 d. 6,5 e. 6

11. Nomor polisi kendaraan bermotor terdiri dari empat angka dan diawali dengan angka **4** yang disusun dari angka-angka **4, 5, 6, 7, 8** dan **9**. Jika angka-angkanya boleh berulang maka banyaknya nomor polisi tersebut adalah … (no. 24, Uan. 98-99)
    a. 60 b. 120 c. 216 d. 360 e. 1.290

12. Dari hasil pengukuran tinggi badan siswa pada sebuah kelas diperoleh tinggi badan rata-rata siswa laki-laki 160 cm dan siswa wanita 150 cm. Jika jumlah siswa laki-laki 25 orang dan siswa wanita 15 orang, maka tinggi badan rata-rata gabungan siswa kelas tersebut adalah … (no. 27, Uan. 98-99)
    a. 156,60 cm b. 156,25 cm c. 156,00 cm d. 155,00 cm e. 153,75 cm

13. Diagram di samping menunjukkan frekuensi produksi suatu barang yang dihasilkan oleh suatu pabrik selama 12 bulan. Rata-rata produksi barang tiap bulan adalah … (no. 28, Uan. 98-99)
    a. 50,00 ton c. 37,50 ton e. 35,00 ton
    b. 38,33 ton d. 35,83 ton



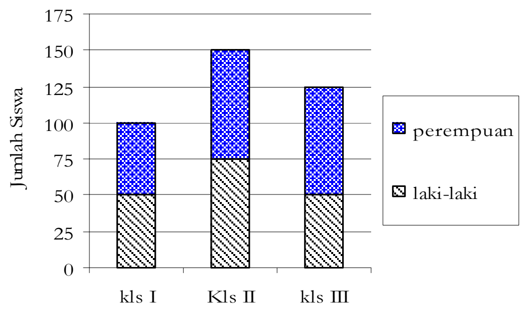
14. Tinggi badan 34 siswa tercatat seperti tabel di bawah ini. Setelah data diurutkan, tingggi badan yang membagi data menjadi 2 kelompok sama banyak adalah … (no. 29, Uan. 98-99)

Tinggi (cm)	Frekuensi
145 – 149	3
150 – 154	5
155 – 159	12
160 – 164	7
165 – 169	5
170 – 174	2
Jumlah	34

a. 158,25 cm
b. 157,63 cm
c. 155,74 cm
d. 155,68 cm
e. 155,25 cm

15. Hasil pendataan usia, dari 12 anak Balita (dalam tahun) diketahui sebagai berikut : **4, 3, 4, 4, 1, 1, 2, 1, 3, 3, 4.** Kuartil atas (Q_3.) dari data tersebut adalah … (no. 30, Uan. 98-99)
    a. 4 b. 3 ½ c. 2 d. 1 ½ e. 1

16. Keadaan siswa suatu sekolah tertuang dalam tabel di bawah ini. Jumlah siswa perempuan adalah … (no. 27, Uan. 99-00)
    a. 155 orang c. 200 orang e. 250 orang
    b. 175 orang d. 220 orang



17. Nilai ulangan matematika dari 15 siswa adalah : **5, 6, 7, 9, 7, 4, 7, 6, 8, 8, 9, 7, 4, 6, 5.** Median dari data tersebut adalah … (no. 28, Uan. 99-00)
    a. 5 b. 6,5 c. 7 d. 7,5 e. 8

18. Perhatikan nilai ulangan pada tabel berikut !

Nilai	4	5	6	7	8	9
Frekuensi	3	6	8	8	3	2

Rata-rata hitung nilai ulangan tersebut adalah … (no. 29, Uan. 99-00)

a. 6,00 b. 6,27 c. 6,59 d. 7,27 e. 7,37

19. Nilai ulangan Matematika pada suatu kelas adalah sebagai berikut :

Nilai	Frekuensi
40 – 49	2
50 – 59	4
60 – 69	5
70 – 79	7
80 – 89	4
90 – 99	3

Modus data di samping adalah … (no. 30, Uan. 99-00)
a. 73,5
b. 74,0
c. 74,5
d. 75,0
e. 75,9

20. Hasil test Matematika dari 15 siswa adalah sebagai berikut : **30, 45, 50, 55, 50, 60, 60, 65, 85, 70, 75, 55, 60, 35, 30**. Jangkauan semi interkuartil (Qd) data di atas adalah … (no. 30, Uan. 00-01)
    a. 65 b. 45 c. 35 d. 20 e. 10

21. Hasil pengukuran panjang potongan besi disajikan pada tabel di bawah ini. Modus dari data tersebut adalah … (no. 29, Uan. 00-01)
    a. 116,00 cm
    b. 116,50 cm
    c. 117,00 cm
    d. 117,75 cm
    e. 118,00 cm

Panjang (cm)	Frekuensi
101 – 105	2
106 – 110	8
111 – 115	22
116 – 120	40
121 – 125	18
126 – 130	7
131 – 135	3

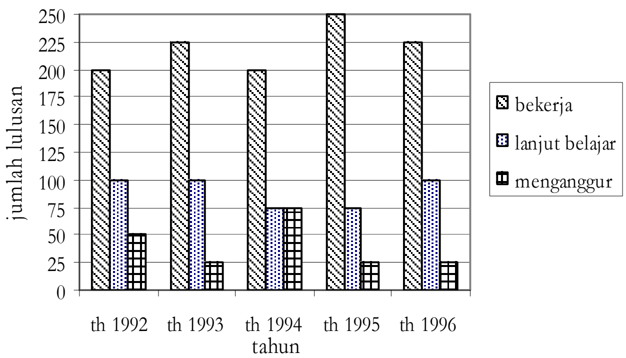
22. Perhatikan tabel di bawah ini! Jika nilai rata-ratanya sama dengan 7, maka besar x adalah … (no. 28, Uan. 00-01)
    a. 18

Nilai	Frekuensi

b. 16
c. 12
d. 10
e. 7

5	6
6	8
7	10
8	x
9	4

23. Diagram batang di samping ini menggambarkan kondisi lulusan dari suatu SMK dari tahun 1992 sampai dengan tahun 1996. Banyak lulusan yang tidak menganggur selama tahun 1992 sampai dengan tahun 1995 adalah … (no. 27, Uan. 00-01)



a. 175 orang
c. 1.050 orang
e. 1.300 orang
b. 875 orang
d. 1.225 orang

24. Daftar sumbangan warga di suatu daerah dalam rangka HUT RI ditunjukkan pada tabel di bawah ini. Rata-rata sumbangan warga tersebut adalah … (no. 26, Uan. 01-02)
a. Rp 7.500
b. Rp 8.000
c. Rp 8.500
d. Rp 9.000
e. Rp 9.500

Jumlah sumbangan (Rp)	Banyaknya warga
2.500	4
5.000	3
7.800	4
10.000	2
15.000	7

25. Simpangan baku dari sekelompok data tunggal : 3, 6, 4, 7, 5 adalah …(no. 27, Uan. 01-02)
a. $\frac{1}{2}$
b. $\frac{1}{2}\sqrt{2}$
c. $\frac{1}{2}\sqrt{3}$
d. $\sqrt{2}$
e. $\sqrt{3}$

11 MENGGUNAKAN KONSEP LIMIT FUNGSI DAN TURUNAN FUNGSI DALAM PENYELESAIAN MASALAH

1. Menentukan turunan fungsi aljabar
2. Menghitung nilai maksimum atau nilai minimum suatu fungsi aljabar

11.1 Turunan Fungsi Alajabar

Bentuk Umum : $y = F(x)$ maka $y' = f(x)$

Rumus-rumus yang ada :

a. $f(x) = a.x^n$ maka $f'(x) = a.n.x^{n-1}$

b. f(x) = a.x maka f'(x) = a

c. f(x) = a maka f'(x) = 0

d. f(x) = u . v maka f'(x) = u'.v + u.v'

e. $f(x) = \frac{u}{v}$ maka $f'(x) = \frac{u'.v - u.v'}{v^2}$

11.2 Limit Fungsi Aljabar

Limit fungsi f(x) untuk $x \to a$ $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$

Apabila bentuk fungsinya $\frac{f(x)}{g(x)}$ ada tiga (3) kemungkinan hasil hitungannya, yaitu :

- Hasilnya hitungan $\frac{0}{a} = 0$
- Hasilnya hitungan $\frac{a}{0} = \infty$ (tak terdefini sikan)
- Hasilnya hitungan $\frac{0}{0} \neq 1 \neq 0$ harus diselesaikan dengan cara :
  memfaktorkan atau dengan turunan (diferensial).

Limit fungsi f(x) untuk $x \to \infty$

Apabila bentuk fungsinya $\frac{f(x)}{g(x)}$ ada tiga (3) kemungkinan hasil hitungannya, yaitu :

- Pangkat terbesar pembilang < penyebut → hasilnya 0

Contoh : $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{3x^2 + 4x - 12}{2x^3 - 3x + 5} = 0$

- Pangkat terbesar pembilang > penyebut → hasilnya ∞

Contoh : $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{3x^3 + 4x - 12}{5x^2 - 3x + 5} = \infty$

- Pangkat terbesar pembilang = penyebut → hasilnya konstantanya

Contoh : $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{4x^2 + 4x - 12}{7x^2 - 3x + 5} = \frac{4}{7}$

11.3 Fungsi naik dan fungsi turun

Grafik fungsi f '(x) dikatakan naik apabila terpenuhi f '(x) > 0

Grafik fungsi f '(x) dikatakan turun apabila terpenuhi f '(x) < 0

Contoh;
Tentukan interval x agar fungsi $f(x) = 6 - x - x^2$
a. naik
b. turun

Penyelesaian:
$f(x) = 6 - x - x^2$
$f'(x) = -1 - 2x$
a. syarat fungsi naik adalah f '(x) > 0, berarti
$-1 - 2x > 0$
$-2x > 1$
$x < -1/2$

Jadi $f(x) = 6 - x - x^2$ naik pada interval $x < -\frac{1}{2}$

a. Syarat fungsi turun adalah f '(x) < 0
$-1 - 2x < 0$
$-2x < 1$
$x > -1/2$

Jadi $f(x) = 6 - x - x^2$ turun pada interval $x > -\frac{1}{2}$

11.4 Titik stasioner dan jenisnya

Sebuah titik akan stasioner jika syarat f '(x) = 0

1. Jika $f'(a) = 0$, $f'(a^-) < 0$ dan $f'(a^+) > 0$ maka titik (a, f(a)) adalah titik balik maksimum
2. Jika $f'(a) = 0$, $f'(a^-) > 0$ dan $f'(a^+) < 0$ maka titik (b, f(b)) adalah titik balik minimum
3. Jika $f'(a) = 0$, $f'(a^-) > 0$ dan $f'(a^+) > 0$ maka titik (a, f(a)) adalah titik belok horizontal

contoh;
Tentukan titik-titik stasioner dan jenis-jenisnya jika $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x$

Penyelesaian;
$f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x$
$f'(x) = 6x^2 - 18x + 12$
nilai stasioner akan dicapai untuk f '(x) = 0
$6x^2 - 18x + 12 = 0$
$6(x - 1)(x - 2) = 0$
$x = 1$ atau $x = 2$
untuk x = 1 maka nilai stasionernya adalah $f(1) = 2 \cdot 1^3 - 9 \cdot 1^2 + 12 \cdot 1 = 5$
titik stasionernya adalah (1, 5)

$f'(1^-) > 0$ (positif)
$f'(1^+) < 0$ (negative)
jadi titik (1, 5) merupakan titik balik maksimum

untuk x = 2 maka nilai stasionernya adalah $f(2) = 2 \cdot 2^3 - 9 \cdot 2^2 + 12 \cdot 2 = 4$
titik stasionernya adalah (2, 4)

$f'(2^-) < 0$ (negative)
$f'(2^+) > 0$ (positif)
jadi titik (2, 4) merupakan titik balik minimum

11.4 Memahami kecepatan sesaat suatu benda bergerak sebagai fungsi turunan

Jika Δt mendekati nol, maka diperoleh hasil bagi defferensial yang disebut laju perubahan jarak terhadap waktu yang dinotasikan sebagai

Vt = $\dfrac{ds}{dt} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta s}{\Delta t}$

Apabila perubahan waktu Δt membawa akibat perubahan kecepatan, maka laju perubahan kecepatan terhadap waktu disebut percepatan yang dinotasikan sebagai;

At = $\dfrac{dv}{dt} = \dfrac{d^2 s}{dt^2}$ (turunan kedua dari panjang lintasan benda bergerak)

Contoh:

Sebuah peluru ditembakkan ke atas dengan kecepatan awal 100 m/dt, sehingga peluru melaju sesuai persamaan s = 100t – 5t^2 . dengan s menyatakan panjang lintasan peluru saat meluncur setelah t detik. Tentukan;

a. Tinggi peluru setelah 5 detik,
b. Rumus kecepatan peluru pada saat t detik,
c. Waktu yang dibutuhkan hingga peluru tidak lagi mampu menambah kecepatan,
d. Tinggi peluru saat tidak mampu menambah kecepatan,
e. Percepatan setelah t detik.

Penyelesaian;

a. tinggi peluru saat 5 detik adalah s (5) = 100 . 5 – 5 . 5^2 = 375 meter
b. Rumus kecepatan sesaat v = $\dfrac{ds}{dt} = 100 - 10t$
c. Peluru tidak lagi mampu menambah kecepatan berarti kecepatan = 0
   100 – 10t = 0
   10t = 100
   t = 10
   jadi setelah melaju selama 10 detik peluru tidak lagi mampu menambah kecepatan.
d. Tinggi saat v = 0
   s (10) = 100 . 10 – 5 . 10^2 = 500 meter
e. Percepatan setelah t detik
   $a = \dfrac{dv}{dt} = -10\, m/dt^2$ (karena nilai a negatif berarti peluru mengalami perlambatan).

Latihan Soal

1. Hitunglah $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{(4-x).(2x+3)^2}{(3-3x)^3}$ = …

   A. 4/27 B. 4/9 C. – 1/3 D. – 4/27 E. – 4/3

2. Hitunglah $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{(5x^3+5x+11)}{(4-2x)^3}$ = ….

   A. 5/4 B. 11/2 C. – 5/8 D. – 5/4 E. -11/2

3. Hitunglah $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{3.\tan 2x}{\sin 5x}$ = ….

A. 3/5 B. 4/5 C. 6/5 D. 6 E. 10

4. Hitunglah $\lim_{x \to 0} \frac{4.\sin 3x}{5\tan 4x}$ = ….
A. 4 B. 1 C. ¾ D. 4/5 E. 3/5

5. $\lim_{x\to 2} \frac{2x^2-3x-2}{x-2}$ adalah ….
A. 0 B. 1 C. 3 D. 5 E. 7

6. $\lim_{x\to\infty} \frac{4x^2+7x+5}{3-x+2x^2}$ = …..
A. ∞ B. 0 C. 4/3 D. 2 E. 4

7. $\lim_{x\to 0} \frac{x}{x^2+x}$ = ….
A. 0 B. 1/3 C. 1/2 D. 1 E.∞

8. $\lim_{x\to 3} \frac{2x^2-5x-3}{x-3}$ = …..
A. 0 B. 4 C. 6 D. 7 E. 12

9. $\lim_{x\to -3} \frac{x^2-9}{x+3}$ = ….
A. 9 B. 6 C. 3 D. -3 E. -6

10. Nilai dari $\lim_{x\to -1} \frac{2x^2-5x-7}{x^2+3x+2}$ = …..
A. –9 B. –7 C. –3 ½ D. –2 ½ E. 2

11. Nilai dari $\lim_{x\to 2} \frac{2x^2-3x-2}{x-2}$ = ….
A. 0 B. 1 C. 3 D. 5 E. 7

12. Nilai dari $\lim_{x\to 3} \frac{2x^2-3x-9}{x^2-x-6}$ = ….
A. 18 B. 9/5 C. 2 D. ½ E. 0

13. $\lim_{x\to\infty} \frac{(2x+3)^3}{(x-1)\left(x^2+x+1\right)}$ = ….

A. 1 B. 2 C. 4 D. 6 E. 8

14. $\lim_{x\to\infty} \frac{(2x-3)^3}{4x^3+3x+1}$ =….
A. 0 B. ½ C. 1 D. 2 E. ~

15. $\lim_{x\to\infty} \frac{5x^3+4x}{10x^3-1}$ = ….
A. ∞ B. 2 C. 1 D. $\frac{1}{2}$ E. 0

16. Turunan pertama dari f(x) = $2x^3$ + 4x – 5 dititik x = -1 adalah ….
A. -19 B. -14 C. 17 D. -2 E. -1

17. Jarak S meter yang ditempuh oleh benda bergerak dalam t detik dinyatakan oleh S = t^2 + 2t. Kecepatan benda setelah bergerak 5 detik adalah ….

A. 35 m/det B. 20 m/det C. 15 m/det D. 12 m/det E. 11 m/det

18. Nilai maksimum dari fungsi kuadrat f(x) = $-x^2 + 2x + 15$ adalah ….
A. -32 B. -16 C. 1 D. 16 E. 32

19. Turunan pertama dari f(x) = $(3x^2 – x).2x$ adalah ….
A. $18x^2 – 4x$ B. $5x^2 – x$ C. $6x^2 – 2x$ D. $12x^2 – 2x$ E. $6x^3 – 2x$

20. Sebuah kotak tertutup volumenya 36 dm3, alas kotak berbentuk persegi panjang dengan panjang tiga kali lebarnya. Jika kotak tersebut dibuat dengan luas permukaan sekecil mungkin, maka panjang kotak adalah ….
A.2 dm B. 3 dm C. 4 dm D. 6 dm E. 8 dm

21. Diketahui f(x) = $4x^3 – 2x^2 + 3x +7$, jika f'(x) turunan pertama dari f(x). Nilai dari f'(3) adalah….
A. 99 B. 97 C. 91 D. 63 E. 36

22. Sebuah peluru ditembakkan vertical dengan persamaan persamaan lintasan h(t) = $150t – 5t^2$. Tinggi maksimum peluru adalah ….
A. 925 m B. 1015 m C. 1025 m D. 1125 m E. 1225 m

23. Turunan pertama dari f(x) = $3x^2 + x - \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}$ adalah ….
A. $6x+1+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}$ C. $6x+1+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}$ E. $6x+1-\frac{1}{x^2}+\frac{4}{x^3}$
B. $6x+1+\frac{1}{x^2}-\frac{4}{x^3}$ D. $6x+1-\frac{1}{x^2}-\frac{4}{x^3}$

24. Luas bahan minimum yang digunakan untuk membuat kotak dengan volume 72 dm^2 yang panjang alasnya dua kali lebarnya adalah ….
A. 720 dm^2 B. 180 dm^2 C. 144 dm^2 D. 108 dm^2 E. 96 dm^2

25. Sebuah kotak tertutup volumenya 36 dm3, alas berbentuk persegi panjang dengan ukuran panjangnya tiga kali lebarnya. Jika kotak tersebut dibuat dengan luas permukaan seminimal mungkin maka panjang kotak tersebut adalah ….
A. 2 dm B. 3 dm C. 4 dm D. 6 dm E. 8 dm

12 MENGGUNAKAN KONSEP INTEGRAL DALAM PENYELESAIAN MASALAH

1. Menghitung integral tak tentu dan tentu dari fungsi aljabar
2. Menghitung luas daerah antara dua kurva
3. Menghitung volume benda putar

12.1 Bentuk Umum Integral

Jika $F'(x) = \dfrac{d\,F(x)}{dx} = f(x)$ maka $\int f(x)dx = F(x) + C$

12.2 Integral fungsi aljabar

Jika $f(x) = \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$ maka $f'(x) = (n+1)\dfrac{x^{(n+1)-1}}{n+1}$ atau $f'(x) = x^n$

Jadi secara aljabar berlaku:

$\int x^n\,dx = \dfrac{1}{n+1}x^{n+1} + C$, dengan n ≠ - 1

Contoh;

1. $\int 3$ dx
2. $\int 3x$ dx
3. $\int 3x^2 dx$
4. $\int \dfrac{dx}{x^2}$
5. $\int \sqrt{x}$ dx
6. $\int \dfrac{2}{x\sqrt{x}}$ dx

Jawab

1. $\int 3$ dx = 3x + C
2. $\int 3x$ dx = $\dfrac{3}{2}x^2$ + C
3. $\int 3x^2 dx$ = $\dfrac{3}{3}x^3$ + C = x^3 + C
4. $\int \dfrac{dx}{x^2}$ = $\int x^{-2}$ dx = $\dfrac{1}{-2+1}x^{-2+1}$ + C = -1 x^{-1} + C = - $\dfrac{1}{x}$ + C
5. $\int \sqrt{x}$ dx = $\int x^{\frac{1}{2}}$ dx = $\dfrac{2}{3}$ $x^{\frac{3}{2}}$ + C = $\dfrac{2}{3}$ $\sqrt{x^3}$ + C

6. $\int \frac{2}{x\sqrt{x}}$ dx = $\int \frac{2}{x^{\frac{3}{2}}}$ dx = $\int 2x^{\frac{-3}{2}}$ dx = $-4x^{\frac{-1}{2}}$ + C = $\frac{-4}{\sqrt{x}}$ + C

12.3 Sifat/sifat Integral

$\int (f(x) \pm g(x))$ dx = $\int f(x)$ dx $\pm$ $\int g(x)$ dx

$\int cf(x)$ dx = c $\int f(x)$ dx , di mana c adalah konstanta.

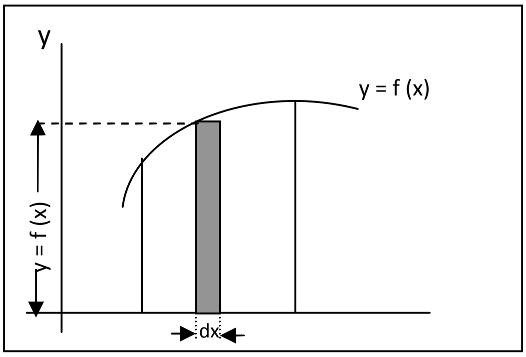
Contoh;

$$\begin{aligned}\int \left(3x^2 + 2x - 4\right)dx &= \int 3x^2\, dx + \int 2x\, dx - \int 4\, dx \\ &= 3\int x^2\, dx + 2\int x\, dx - \int 4\, dx \\ &= 3.\frac{1}{3}x^3 + 2.\frac{1}{2}x^2 - 4x + C \\ &= x^3 + x^2 - 4x + C\end{aligned}$$

12.4 Penggunaan Integral

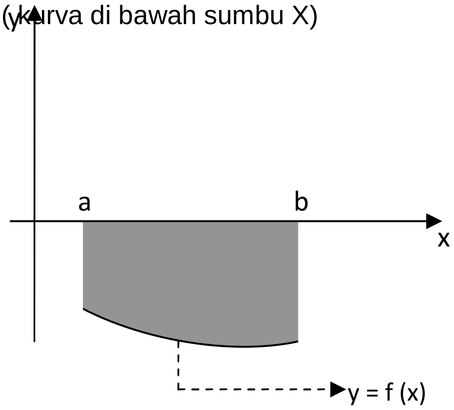
1. Menghitung Luas Daerah di Bawah Kurva y = f(x), Sumbu X, garis x = a dan garis x = b

a. Jika f(x) > 0 (kurva di atas sumbu X)



$$L = \int_a^b f(x)\, dx$$

b. Jika f(x) < 0 (kurva di bawah sumbu X)

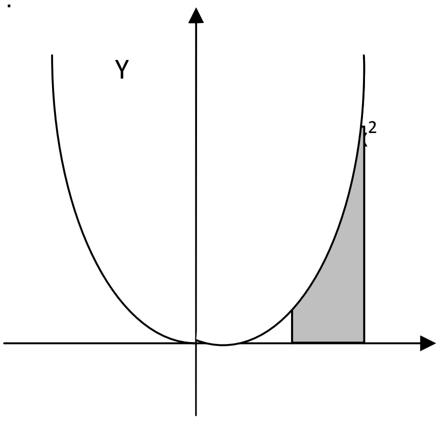


$$L = -\int_a^b f(x)\, dx \quad \text{atau} \quad L = \int_b^a f(x)\, dx$$

Contoh

1). Hitunglah luas daerah yang dibatasi oleh kurva $y = x^2$, sumbu X, garis x = 3 dan x = 6 !

Jawab :



$$L = \int_3^6 x^2 \, dx$$

$$= \left[\tfrac{1}{3} x^3\right]_3^6$$

$$= \left[\tfrac{1}{3}.6^3\right] - \left[\tfrac{1}{3}.3^3\right]$$

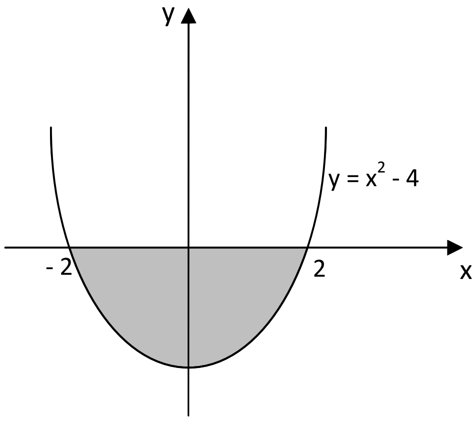
$$= \left[\tfrac{1}{3}.216\right] - \left[\tfrac{1}{3}.27\right]$$

= 72 – 9

= 63 satuan luas

2). Hitunglah luas daerah yang dibatasi oleh kurva $y = x^2 - 4$ dan sumbu X !

Jawab :



Titik potong dengan sumbu X adalah :

$x^2 - 4 = 0$

(x – 2). (x + 2) = 0

x = 2 atau x = - 2

$$L = -\int_{-2}^{2} (x^2 - 4) \, dx$$

$$= -\left[\tfrac{1}{3} x^3 - 4x\right]_{-2}^{2}$$

$$= -\left[(\tfrac{1}{3}.2^3 - 4.2) - (\tfrac{1}{3}.(-2)^3 - 4(-2))\right]$$

$$= -\left[(\tfrac{8}{3} - 8) - (-\tfrac{8}{3}. + 8)\right]$$

$$= -\left[\tfrac{8}{3} - 8 + \tfrac{8}{3} - 8\right]$$

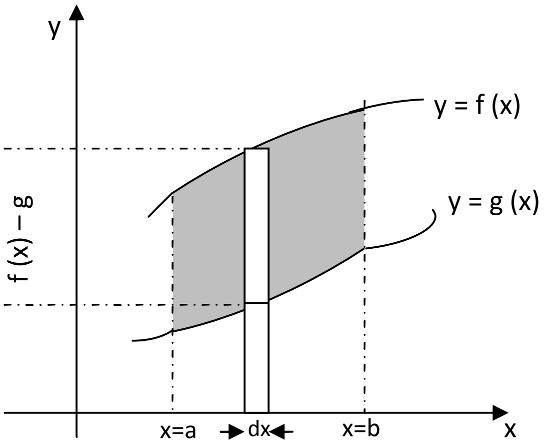
$= -\left[\frac{16}{3} - 16\right]$

$= -\left[5\tfrac{1}{3} - 16\right]$

$= -\left[-10\tfrac{2}{3}\right]$

$= 10\tfrac{2}{3}$ satuan luas

2. Menghitung Luas Daerah Antara Dua Kurva $y_1 = f(x)$ dan $y_2 = g(x)$

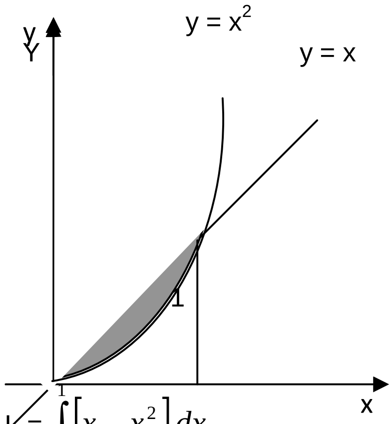


Luas daerah yang dibatasi oleh kurva $y_1 = f(x)$ dan $y_2 = g(x)$ pada interval $a \le x \le b$ dengan f(x) > g(x) dapat ditentukan dengan rumus :

$$L = \int_a^b \left[f(x) - g(x)\right] dx$$

Contoh :

Hitunglah luas daerah yang dibatasi oleh kurva $y = x^2$ dan garis y = x !



$y = x^2$ dan $y = x$

Titik potongnya :

$x^2 = x$

$x^2 - x = 0$

$x.(x - 1) = 0$

x = 0 atau x = 1

Jadi batas integralnya 0 sampai 1

Jadi $L = \int_0^1 \left[x - x^2\right] dx$

$= \left[\tfrac{1}{2}.x^2 - \tfrac{1}{3}.x^3\right]_0^1$

$= \left[\tfrac{1}{2}.1^2 - \tfrac{1}{3}.1^3\right] - \left[0 - 0\right]$

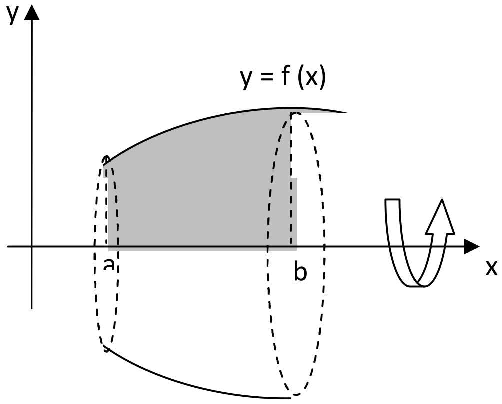
$= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right)$

$= \frac{3-2}{6}$

$= \frac{1}{6}$ satuan luas

4. Menghitung Volume Benda Putar Daerah Yang Dibatasi Kurva y = f(x), Sumbu X, Garis x = a dan Garis x = b

a. Perputaran Mengelilingi Sumbu X

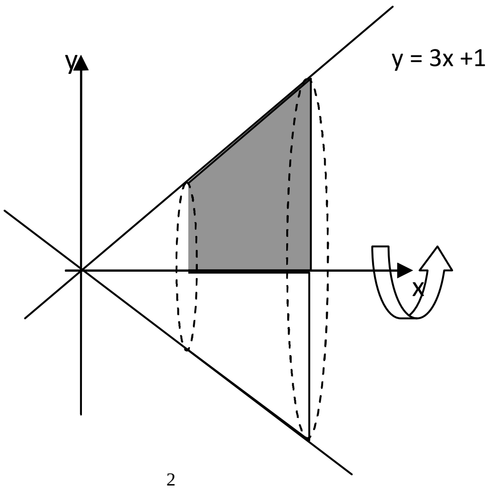


Volume benda putar yang terjadi jika daerah dibatasi oleh kurva y = f(x), sumbu X , garis x = a dan garis x = b diputar mengelilingi sumbu X sejauh 360^o adalah :

V = $\pi \int_a^b [f(x)]^2 \, dx$	atau	V = $\pi \int_a^b y^2 \, dx$

Contoh :
Hitunglah volume benda putar yang terjadi jika daerah dibatasi oleh kurva y = 3x + 1 , sumbu X, garis x = 1 dan garis x = 2 diputar mengelilingi sumbu X sejauh 360^o !

Jawab

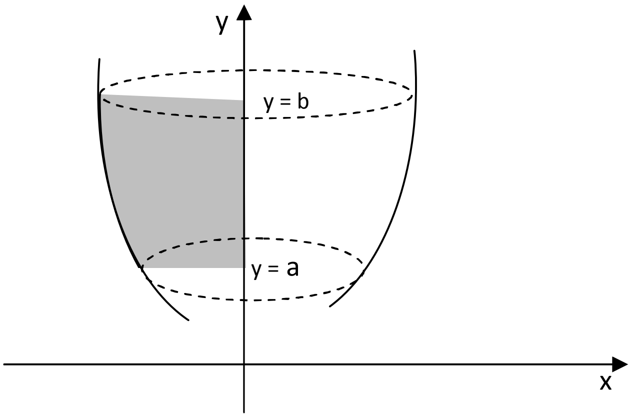


V $\quad = \pi \int_1^2 [3x+1]^2 \, dx$

$\quad = \pi \int_1^2 \left[9x^2 + 6x + 1\right] dx$

= π $\left[3x^3 + 3x^2 + x\right]_1^2$
= π $\left[(3.2^3 + 3.2^2 + 2) - (3.1^3 + 3.1^2 + 1)\right]$
= π $\left[(3.8 + 3.4 + 2) - (3.1 + 3.1 + 1)\right]$
= π $\left[(24 + 12 + 2) - (3 + 3 + 1)\right]$
= π $\left[(38) - (7)\right]$
= 31 π satuan volume

b. Perputaran Mengelilingi Sumbu Y



Volume benda putar yang terjadi jika daerah dibatasi oleh kurva x = f(y), sumbu Y , garis y = a dan garis y = b diputar mengelilingi sumbu Y sejauh 360^o adalah :

$$V = \pi \int_a^b \left[f(y)\right]^2 \, dy \quad \text{atau} \quad V = \pi \int_a^b x^2 \, dy$$

Contoh :
Hitunglah volume benda putar yang terjadi jika daerah dibatasi oleh kurva y = 4-x^2, sumbu Y, garis y = 0 dan garis y = 2 diputar mengelilingi sumbu Y sejauh 360^o!
Jawab :
Kurva y = 4-x^2 ⇒ x^2 = 4 - y

V = π $\int_0^2 x^2 \, dy$
= π $\int_0^2 \left[4 - y\right] dy$
= π $\left[4y - \frac{1}{2}y^2\right]_0^2$
= π $\left[(4.2 - \frac{1}{2}.2^2) - (4.0 - \frac{1}{2}.0^2)\right]$
= π $\left[(8 - 2) - (0 - 0)\right]$
= π $\left[\ 6 - 0\ \right]$
= 6 π satuan volume

1. Menghitung Volume Benda Putar Daerah Yang Dibatasi Dua Kurva y_1= f(x) dan y_2= g(x), Garis x = a dan Garis x = b

a. Perputaran Mengelilingi Sumbu X

Volume benda putar yang terjadi jika daerah dibatasi oleh dua kurva y_1= f(x) dan y_2= g(x), garis x = a dan garis x = b diputar mengelilingi sumbu X sejauh 360^o dengan $y_1{}^2 \rangle\ y_2{}^2$ adalah :

$$V = \pi \int_a^b \left[f(x)^2 - g(x)^2 \right] dx \quad \text{atau} \quad V = \pi \int_a^b \left[y_1{}^2 - y_2{}^2 \right] dx$$

Contoh :
Hitung volume benda putar yang terjadi jika daerah yang dibatasi oleh kurva y = 2x dab y = 2x^2 diputar mengelilingi sumbu X sejauh 360^o !
Jawab :
Titik potong dua garis dicari dulu yaitu :

$$\left.\begin{aligned} y &= 2x^2 \\ y &= 2x \end{aligned}\right\} \Rightarrow 2x^2 = 2x$$

$x^2 = x$
$x^2 - x = 0$
$x(x - 1) = 0$
$x = 0$ atau $x = 1$

Jadi batas integralnya 0 sampai 1

$$V = \pi \int_0^1 \left[y_1{}^2 - y_2{}^2 \right] dx$$

$$= \pi \int_0^1 \left[(2x)^2 - (2x^2)^2 \right] dx$$

$$= \pi \int_0^1 \left[4x^2 - 4x^4 \right] dx$$

$$= \pi \left[\tfrac{4}{3}x^3 - \tfrac{4}{5}x^5 \right]_0^1$$

$$= \pi \left[(\tfrac{4}{3}.1^3 - \tfrac{4}{5}.1^5) - (\tfrac{4}{3}.0^3 - \tfrac{4}{5}.0^5) \right]$$

$$= \pi \left[\frac{4}{3} - \frac{4}{5} \right]$$

$$= \pi \left(\frac{20 - 12}{15} \right)$$

$$= \frac{8}{15}\pi \text{ satuan volume}$$

b. Perputaran Mengelilingi Sumbu Y

Volume benda putar yang terjadi jika daerah dibatasi oleh dua kurva $x_1 = f(y)$ dan $x_2 = g(y)$, garis y = a dan garis y = b diputar mengelilingi sumbu Y sejauh 360^o dengan $x_1{}^2 \rangle\ x_2{}^2$ adalah :

$$V = \pi \int_a^b \left[f(y)^2 - g(y)^2 \right] dy \quad \text{atau}$$

$$V = \pi \int_a^b \left[x_1{}^2 - x_2{}^2 \right] dy$$

Contoh :

Hitunglah volume benda putar yang terjadi jika daerah dibatasi oleh kurva $y = \sqrt{x}$ dan y = x jika diputar mengelilingi sumbu Y sejauh 360^o !

Jawab :

$y = \sqrt{x} \;\Rightarrow\; x = y^2$

$y = x \;\Rightarrow\; x = y$

Titik potongnya : $y^2 = y$

$y^2 - y = 0$

y (y -1) = 0

y = 0 ayau y = 1

Jadi batas integralnya 0 sampai 1

$$V = \pi \int_0^1 \left[x_1{}^2 - x_2{}^2 \right] dy$$

$$= \pi \int_0^1 \left[y^2 - (y^2)^2 \right] dy$$

$$= \pi \int_0^1 \left[y^2 - y^4 \right] dy$$

$$= \pi \left[\tfrac{1}{3} y^3 - \tfrac{1}{5} y^5 \right]_0^1$$

$$= \pi \left[(\tfrac{1}{3}.1^3 - \tfrac{1}{5}.1^5) - (\tfrac{1}{3}.0^3 - \tfrac{1}{5}.0^5) \right]$$

$$= \pi \left[(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}) - (0) \right]$$

$$= \pi \left(\frac{5-3}{15} \right)$$

$$= \frac{2}{15}\pi \text{ satuan volume}$$

Latihan Soal

1. Integralkanlah $\int (4x^2\sqrt{x} - 3x\sqrt{x} + 8\sqrt{x})\, dx = \ldots$

A. $\frac{8}{7}x^{\frac{7}{2}} - \frac{6}{5}x^{\frac{5}{2}} + \frac{16}{3}x^{\frac{3}{2}} + c$

B. $\frac{8}{7}x^{\frac{5}{2}} - \frac{6}{5}x^{\frac{3}{2}} + \frac{16}{3}x^{\frac{1}{2}} + c$

C. $4x^{\frac{7}{2}} - 3x^{\frac{5}{2}} + 8x^{\frac{3}{2}} + c$

D. $4x^{\frac{7}{2}} - \frac{6}{5}x^{\frac{5}{2}} + \frac{16}{3}x^{\frac{3}{2}} + c$

E. $\frac{7}{8}x^{\frac{7}{2}} - \frac{5}{6}x^{\frac{5}{2}} + \frac{3}{16}x^{\frac{3}{2}} + c$

2. $\int (x^2 - 1)^2\, dx$ = ….

A. $\frac{1}{5}x^5 - \frac{2}{3}x^3 + x + C$

B. $4x^3 - 4x + 1 + C$

C. $\frac{1}{5}x^5 - \frac{2}{3}x^3 + C$

D. $\frac{1}{5}x^3 - 2x^2 + x + C$

E. $4x^3 - 4x + C$

3. $\int x(\sqrt{x} - 2)^2\, dx$ = ….

A. $\frac{1}{3}x^3 - \frac{8}{5}x\sqrt{x} + 2x + C$

C. $\frac{1}{3}x^3 - 10x^2\sqrt{x} + 2x^2 + C$

E. $\frac{1}{3}x^3 - \frac{8}{5}x^2\sqrt{x} + 2x^2 + C$

B. $\frac{1}{3}x^3 - \frac{8}{5}x\sqrt{x} + 2x + C$ D. $\frac{1}{3}x^3 - 10x\sqrt{x} + 2x + C$

4. $\int (\cos x + \sin 2x)dx$ = ….

A. sin x – ½ cos 2x + c C. sin x + ½ cos 2x + c E. –sin x – ½ cos 2x + c
B. sin x + 2 cos 2x + c D. –sin x + 2 cos 2x + c

5. $\int(4x^3 - \frac{1}{2x^2} + 5x\sqrt{x})$ dx adalah ….

A. $4x^4 + \frac{1}{2x} + 5x^2\sqrt{x}$ + c **D**. $x^4 - \frac{1}{2x} + 2x^2\sqrt{x}$ + c
B. $x^4 + \frac{1}{2x} + 5x^2\sqrt{x}$ + c **E**. $x^4 - \frac{1}{2x} + 5x^2\sqrt{x}$ +c
C. $x^4 + \frac{1}{2x} + 2x^2\sqrt{x}$ + c

6. $\int (10x^4 + 3x^2)dx$ = ….

A. $10x^5 + 3x^3 + C$ C. $\frac{5}{2}x^5 + x^3 + C$ E. $2x^5 + 3x^3 + C$
B. $\frac{5}{2}x^5 + 3x^3 + C$ D. $2x^5 + 3x^3 + C$

7. Nilai $\int (x^2 + 2)\, dx$ adalah ….

A. $\frac{1}{3}x^3 + 2x + C$ B. $\frac{1}{2}x^3 + 2x + C$ C. $\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + C$
D. $2x^3 + 2x + C$ E. $\frac{1}{3}x^3 + 2x + C$

8. Hitunglah $\int_{-2}^{2} (x+2)^2 .3x \, dx$ = ….

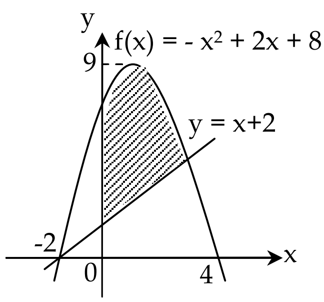
A. 24 B. 32 C. 36 D. 54 E. 64

9. $\int_{-1}^{2} (-x^2 + 2x + 2)dx$ = ….

A. 4 B. 4 ½ C. 4 2/3 D. 6 E. 6 2/3

Luas daerah yang diarsir di samping adalah …sat luas

A. 9 ½ D. 13 ½
B.11 ½ E. 14 ½
C. 12 ½



10. Volume benda putar yang terjadi dari garis y – x - 3 = 0, garis x = 2, garis x = 4 dan diputar terhadap sumbu-x adalah … satuan volum.

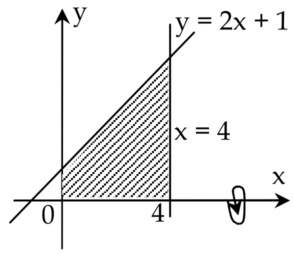
A. 54 $\frac{2}{3}\pi$ B. 58 $\frac{2}{3}\pi$ C. 60 $\frac{2}{3}\pi$ D. 62 $\frac{2}{3}\pi$ E. 64 $\frac{2}{3}\pi$

11. Perhatikan gambar disamping ! Volume benda putar yang terjadi adalah … satuan volum.

    A. $98\frac{1}{3}\pi$ D. $121\frac{1}{3}\pi$

    B. $102\frac{1}{3}\pi$ E. $122\frac{1}{3}\pi$

    C. $112\frac{1}{3}\pi$



12. Luas daerah yang dibatasi oleh kurva fungsi $y = x^2 - 6x + 5$, garis x= 2, garis x= 5 dan sumbu x adalah ….

    A. 7. 2/3 sat luas C. 8 . 2/3 sat luas E. 9 sat luas
    B. 8 sat luas D. 8 ½ sat luas

13. $\int_1^2 (\frac{2}{x^3} - \frac{1}{x^2})dx$ = ….

    A. 1/8 B. 1/4 C. 3/4 D. 7/4 E. 9/4

14. Luas daerah yang dibatasi oleh kurva $y = -x^2 + 2x + 3$ dan sumbu x adalah …..

    A. $5\frac{1}{3}$ sat luas B. 6 sat luas C. $7\frac{1}{3}$ sat luas D. 9 sat luas E. $10\frac{1}{3}$ sat luas

15. Volum benda putar yang terjadi bila daerah antara kurva y = sin x dan sumbu x diputar mengelilingi sumbu x dari x = ¼ π sampai dengan x = π adalah ….

    A. $\frac{1}{8}\pi(2\pi - 3)$ B. $\frac{1}{8}\pi(3\pi + 2)$ C. $\frac{1}{8}\pi(3\pi - 2)$

    D. $\frac{1}{8}\pi(2\pi + 3)$ E. $\frac{1}{8}\pi(4\pi - 4)$

16. Daerah yang dibatasi y = $\sqrt{x}$; sumbu x, x = 0 dan x = 4 diputar mengelilingi sumbu x sejauh satu putaran.Isi benda putar yang terjadi adalah … satuan volume.

    A. 4π B. 5π C. 6π D. 7π E. 8π

17. Volum benda putar yang terjadi jika daerah yang dibatasi oleh kurva *y* = 3*x* – 2, garis *x* = 1 dan garis *x* = 3 diputar mengelilingi sumbu *X* adalah … satuan volum.

    A. 34π B. 38π C. 46π D. 50π E. 52π

18. $\int (x^2 - 1)^2 dx = \ldots$ (no. 38, Uan 97-98)

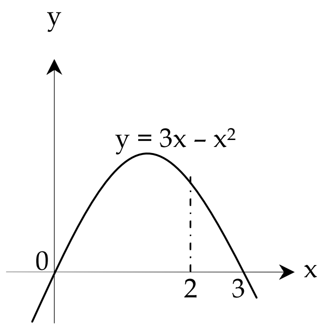
    a. $\frac{1}{5}x^5 - \frac{2}{3}x^3 + x + c$ c. $4x^3 - 4x + 1 + c$ e. $\frac{1}{5}x^5 - 2x^3 + x + c$

    b. $\frac{1}{5}x^5 - \frac{2}{3}x^3 + c$ d. $4x^3 - 4x + c$

19. Luas daerah yang diarsir pada gambar adalah … satuan luas. (no. 39, Uan 97-98)

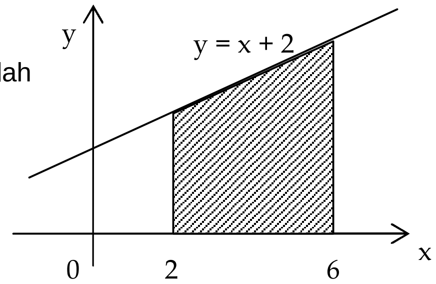
    a. $6\frac{2}{3}$ c. $4\frac{1}{2}$ e. $\frac{1}{3}$

    b. $4\frac{2}{3}$ d. $3\frac{1}{3}$



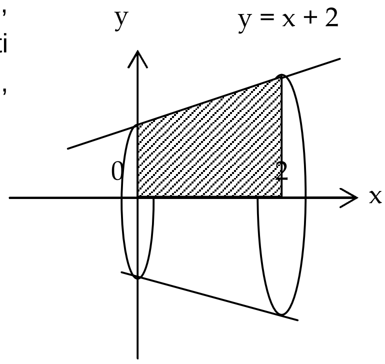
20. Usaha (W) untuk memindahkan benda dari kedudukan S_1 ke S_2 dirumuskan oleh W = $\int_{S1}^{S2} F\,ds$. Jika S_1 = 1 meter, S_2 = 3 meter, F = 200 meter, maka nilai W adalah … (no. 38, Uan 98-99)
a. 100 joule b. 200 joule c. 400 joule d. 600 joule e. 800 joule

21. Luas daerah yang diarsir pada gambar di samping adalah … (no. 39, Uan 98-99)
a. 8 satuan luas
b. 12 satuan luas
c. 22 satuan luas
d. 24 satuan luas



22. Hasil dari $\int_{-1}^{2}(4x^3 + 2x + 4)dx$ adalah … (no. 39, Uan 99-00)
a. 24 b. 26 c. 28 d. 30 e. 32

23. Sebuah kerucut terpancung yang dibentuk oleh garis y = x + 2, sumbu x, x = 0, x = 2. Diputar 360° mengelilingi sumbu x seperti gambar di samping. Volume kerucut itu adalah … sat volume (no. 40, Uan 99-00)
a. $18\frac{2}{3}\pi$ d. $20\frac{2}{3}\pi$
b. $19\frac{3}{5}\pi$ e. 24 π
c. $20\frac{1}{2}\pi$



24. $\int_{1}^{2}\left(\frac{2}{x^3}-\frac{1}{x^2}\right)dx$ = … (no. 38 Uan 00-01)
a. $\frac{1}{8}$ b. $\frac{1}{4}$ c. $\frac{3}{4}$ d. $1\frac{3}{4}$ e. $\frac{9}{4}$

25. Luas daerah yang dibatasi oleh parabola y = x^2 -6x + 9 dan garis y = x – 1 adalah … satuan luas. (no. 39, Uan 00-01)
a. 4 b. 4½ c. 16 d. 20½ e. 31

26. Diketahui f(x) = $\frac{1}{x-1}$ dan g(x) = x – 2, maka $(gof)^{-1}(x)$ adalah … (no.37, Uan 01-02)
a. $\frac{x+3}{x-2}$ b. $\frac{x-3}{x-2}$ c. $\frac{x+3}{x+2}$ d. $\frac{x+2}{x-2}$ e. (x+3)(x+2)

27. $\int x(\sqrt{x}-2)^2\,dx$ adalah … (no. 38, Uan 01-02)
a. $\frac{1}{3}x^3-\frac{8}{5}x\sqrt{x}+2x+c$ c. $\frac{1}{3}x^3-\frac{8}{5}x^2\sqrt{x}+2x^2+c$ e. $\frac{1}{3}x^2-10x\sqrt{x}+2x+c$
b. $\frac{1}{3}x^3-10x^2\sqrt{x}+2x^2+c$ d. $\frac{1}{3}x^2-\frac{8}{5}x\sqrt{x}+2x+c$

28. Luas daerah yang dibatasi kurva y = - x2 + 2x + 3 dan sumbu-x adalah … satuan luas. (no. 39, Uan 01-02)
a. $5\frac{1}{3}$ b. 6 c. $7\frac{1}{3}$ d. 9 e. $10\frac{2}{3}$

29. Volum benda putar yang terjadi bila daerah antara kurva y = sin x dan sumbu-x diputar mengelilingi sumbu-x dari x = $\frac{1}{4}\pi$ sampai dengan x = π adalah … satuan volume. (no. 40, Uan 01-02)

    a. $\frac{1}{8}\pi(2\pi - 3)$ b. $\frac{1}{8}\pi(3\pi + 2)$ c. $\frac{1}{8}\pi(3\pi - 2)$ d. $\frac{1}{8}\pi(2\pi + 3)$ e. $\frac{1}{8}\pi(4\pi - 4)$

30. Volume benda putar yang terjadi jika daerah yang dibatasi oleh kurva y = x + 2, x = 0 dan x = 3 diputar mengelilingi sumbu x seperti pada gambar disamping adalah ….. satuan isi. (no. 40, Uan 02-03)

    a. 10 π c. 21 π e. 39 π
    b. 15 π d. 33 π