Materi UTS

Matematika Ekonomi

Semester Gasal 2016-2017

Pengajar: Hazrul Iswadi

Daftar Isi

Matematika Ekonomi

Pendahuluan

1

Materi Kuliah Sebelum UTS

1	Konsep dasar matematika, arti Matematika, Tujuan dan Manfaat matematika, Persamaan , Logaritma dan eksponen.
2	Pertidaksamaan; Himpunan, Jenis Bilangan, Jenis Himpunan dan Operasi himpunan.
3	Relasi & Fungsi, Jenis fungsi, Fungsi komposisi dan Invers fungsi Fungsi linier dari Fungsi biaya (TC) dan penerimaan (TR), BEP dan perhitungan laba/rugi ;

2

4	Fungsi Demand dan Supply, ME, perhitungan Excess D dan S dan perhitungan beban pajak & Subsidi
5	Perhitungan limit : berbagai bentuk Tak Tentu & perhitungan nilai limit dan pengertian turunan fungsi; rumus-rumus turunan
6	Aplikasi Turunan fungsi dalam perhitungan Gradien garis singgung, titik Stasioner, nilai ekstrim, titik Belok dan titik Sadel
7	Matriks, jenis matriks, Operasi matriks : tambah, kurang perkalian dan perpangkatan matriks, perhitungan Determinan, dan invers matriks

3

Buku Rujukan

- ❖**Pengantar Matematika Ekonomi**, Edisi ke-13 Ernerst F. Haeussler dkk, Jilid 1 dan 2, Penerbit Erlangga.
- ❖**Fundamental Methods of Mathematics for Business and Economic**, Vol. 1&2, Alpha C. Chiang dkk., Penerbit Salemba Empat, Mc Graw Hill (dpt dibeli di Uranus).
- ❖ **Matematika Ekonomi**: Hussain Bumulo dkk
- ❖ **Matematika Keuangan**, Edisi 3 Revisi, Budi Frensidy, Penerbit salemba empat.

4

Penilaian:

30% Asisten +
10 % tes/kuis +
60% Ujian

Jadwal tes/kuis akan ditentukan kemudian.

5

Sumber slide matematika ekonomi

- Beberapa sumber untuk mendapat slide:
  - **http://www.hazrul-iswadi.com**
  - **http://uls.ubaya.ac.id**
- Pastikan akun gooaya anda telah aktif, pengumuman dan komunikasi dilakukan melalui e-mail gooaya anda.

6

Info tentang UTS

- Sifat : tertutup, rumus diberikan, boleh menggunakan kalkulator (tidak boleh HP).
- Bentuk dan jumlah soal :
  - ➢Benar / salah : 10 nomor
  - ➢Essay : kerjakan 5 dari 7 soal
- Untuk jawaban soal B/S,
  - ➢ Jika jawaban benar (B), cukup ditulis benar saja tidak perlu diberi alasan.
  - ➢Jika jawaban salah (S) maka harus dilengkapi dengan alasan. Apabila hasil akhir salah tapi konsep benar maka dapat nilai 50%

7

Matematika Ekonomi

Konsep Dasar

Bab I: Konsep Dasar Matematika

- Pengertian Matematika
- Manfaat belajar matematika
- Peranan matematika dalam ilmu ekonomi
- Pengertian dasar dalam matematika
- Model matematika
- Tahapan penyelesaian masalah matematika

What is Math ?

- MATEMATIKA berasal dari :
  kata benda : Mathema = pengetahuan
  kata kerja : Manthanein = Belajar

  Belajar : upaya atau kegiatan yang dilakukan secara SADAR/ teratur / terencana untuk mendapatkan pengetahun / ketrampilan
- Ilmu tentang cara mempelajari pengetahuan
- Ilmu tentang bilangan, bentuk serta terapannya
- Ilmu tentang himpunan

Tujuan dan Manfaat Matematika

Tujuan pendidikan Matematika :

a). Mempersiapkan mahasiswa agar sanggup menghadapi perubahan-perubahan keadaan dalam dunia nyata yang selalu berubah,melalui latihan bertindak secara logis, analitis-sintesis, kritis, objektif dan kreatif, cermat, konsisten dan tangkas.

b). Mempersiapkan mahasiswa agar dapat menggunakan matematika secara fungsional di dalam kehidupan sehari-hari dan dalam menghadapi pengembangan ilmu pengetahuan.

Tujuan dan Manfaat Matematika

Manfaat belajar Matematika:

1). Sebagai salah satu pola berfikir yang jelas, objektif dan efektif, sehingga melatih daya ingat dan daya pikir.

2). Sebagai alat bantu yang sangat berguna untuk melaku-kan perhitungan dan pertimbangan dalam menetapkan keputusan

3). Sebagai ilmu pengetahuan untuk dikembangkan lebih lanjut.

Peranan matematika dalam ilmu Ekonomi

- Hubungan-hubungan antara berbagai faktor ekonomi dapat dinyatakan secara lebih singkat dan jelas
- Perubahan-perubahan dari faktor-faktor kuantitatif mudah dihitung dan dilukiskan dalam bentuk tabel/diagram
- Definisi dan asumsi dapat dirumuskan secara tegas
- Penarikan kesimpulan lebih sistematis
- Memperlihatkan secara gamblang keterbatasan dan kemungkinan penggunaan analisis ilmu ekonomi

Beberapa pengertian dasar matematika

❖ Tetapan: simbol objek tertentu

❖ Variabel: simbol sembarang objek

- Diskrit
- Kontinu
- Bebas
- Tak bebas
- Endogen
- Eksogen

❖ Parameter: konstan yang belum diberi nilai

Model Matematika

Model ialah struktur atau bentuk hubungan yang merupakan perwujudan dari alam pikiran terhadap suatu masalah.

Dalam model matematika terdapat himpunan persamaan atau pertidaksamaan yang mengandung variabel dan konstan.

Model Matematika

Contoh:

Ada tiga orang *A*, *B* dan *C* yang harus membagi uang sejumlah Rp. 28 juta dengan syarat: bahwa uang *A* : uang *B* = 2 : 3 sedangkan uang *B* : uang *C* = 4 : 5, maka hitunglah masing-masing uang yang akan diterima *A* , *B* dan *C*.
Buatkan dulu model matematika dan penyelesaiannya.

Tahapan penyelesaian masalah matematika

❖ Memahami persoalan

- Konstanta, variabel, atau parameter?
- Hubungan antara objek di atas

❖ Apa yang ditanyakan?

❖ Menyelesaikan masalah

- Cara/rumus apa?
- Model penyelesaian
- Solusi

❖ Memeriksa atau mengevaluasi Solusi

Contoh Model Matematika

Seorang pembuat furnitur mengumpulkan data, seperti yang terlihat pada Tabel 1, yang memberikan besarnya biaya *C* dalam memproduksi *x* buah kursi.

Tabel 1

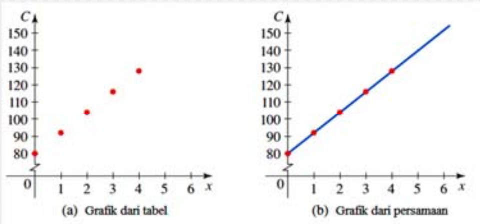
x (kursi)	*C* (dolar)
0	80
1	92
2	104
3	116
4	128

(a) Tentukan model linear untuk biaya *C* dalam membuat *x* kursi.
(b) Gambarkan grafik persamaan yang diperoleh dari (a).
(c) Apa bentuk grafik yang dihasilkan di (b).

(a) Hubungan antara biaya dengan jumlah kursi yang diproduksi

$$C = \overbrace{80}^{\text{Biaya awal (atau biaya tetap)}} + \overbrace{12x}^{\text{Tambahan \$ 12 tiap kursi yang diproduksi}}$$

(b) Dengan menggambar pasangan terurut titik diperoleh plot berikut



(c) Biaya pembuatan kursi bertambah secara tetap ketika jumlah kursi yang diproduksi bertambah.

13

Hal-hal yang harus diperhatikan dalam menyelesaikan soal :

1). Perhatikan urutan tingkatan operasi hitung : mulai dari yang ada dalam kurung, lalu pangkat, kali/ bagi dan tambah/ kurang

2). Mana variabel dan bagaimana hubungannya

3). Gunakan rumus yang tepat pada soal yang sesuai.

14

Jenis-jenis persamaan :

Antara lain

- Persamaan linier ;   Persamaan kuadrat
- Persamaan rasional ; Persamaan eksponen
- Persamaan logaritma

15

Persamaan Linier

Bentuk umum :

$ax + b = 0$

dengan a dan b konstanta.

Contoh :

Tentukan x yang memenuhi

$3x = 24 + x$

16

Persamaan Kuadrat (PK)

Bentuk umum :

$ax^2 + bx + c = 0$

dengan a, b, dan c adalah konstanta

Akar persamaan kuadrat adalah x_1 dan x_2 yang memenuhi persamaan tersebut.

❖ **Sifat Akar :**

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \quad x_1 x_2 = \frac{c}{a}$$

17

D disebut *diskriminan*, yakni penentu akar PK

$$D = b^2 - 4ac$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$$ ➪ Rumus ABC

- Jika $D > 0$ maka akar persamaan kuadrat adalah dua akar riil berlainan
- Jika $D = 0$, maka akar persamaan adalah akar riil kembar ;kalau D = suatu kuadrat, akar-akarnya akan RASIONAL
- Jika $D < 0$ maka akar persamaan adalah tidak riil (Tidak ada akar RIIL / nyata)

18

Soal

Selesaikan soal-soal berikut :

1. Jika salah satu akar PK : $3x^2 = ax + 12$ adalah 3, maka hitung harga a dan akar lainnya.
2. Mana diantara PK berikut ini yang tidak mempunyai akar REAL :
   a). $3x^2 = 4x + 5$; b). $2x^2 = 7x - 1$; c). $x^2 = 12$
   d). $2x^2 = 6x - 7$; e). $4x^2 + 3 = 7x$
3. Hitung x yang memenuhi :

a. $\dfrac{2x-3}{x+1} = \dfrac{3x-4}{x+4}$

b. $\sqrt{2x^2 - 9} = 6 - x$

Persamaan eksponen

Persamaan yang melibatkan bentuk eksponen atau perpangkatan.

Contoh : 1) $3^{2x} = 81$

2) $2^{(x+2)} = 123/71$

Beberapa rumus perpangkatan

1. $a^p a^q = a^{p+q}$
2. $\dfrac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$
3. $a^0 = 1$
4. $\dfrac{1}{a^m} = a^{-m}$
5. $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$
6. $a^m b^m = (ab)^m$
7. $(a^p)^q = a^{pq}$

Soal

Hitung x yang memenuhi :

1) $5^{2x} = 125$

2) $16^{x+4} = \dfrac{1}{\sqrt[3]{64}}$

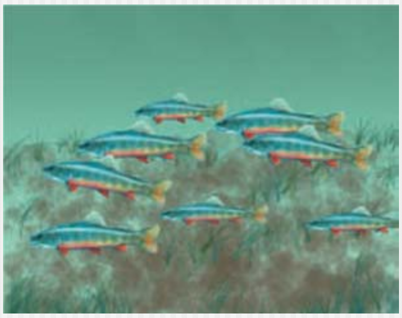
3) $2(4^{3-x}) = \sqrt{\left(\dfrac{1}{8}\right)^{x-2}}$

4) $2\,(4^{x-6}) = 8^{x-4}$

5) $\sqrt{9^{2x+4}} = \left(\dfrac{1}{3}\right)^{-3x+2}$

Pupolasi Ikan

Banyaknya ikan dalam danau Minnesota dimodelkan dengan fungsi $f(t) = 12e^{0,012t}$, dengan t diukur dalam tahun dan $f(t)$ diukur dalam jutaan.



Persamaan Logaritma

Persamaan yang melibatkan bentuk logaritma

Contoh : ${}^{3}\log\,(2x + 1) = 2$

${}^{x}\log\,(4x - 3) = 2$

Hubungan eksponen dan logaritma

Jika ${}^{a}\log b = c$ maka $b = a^c$

dengan syarat : $a > 0$, $b > 0$ dan $a \neq 1$

Beberapa rumus logaritma

1) $a^{{}^{a}\log b} = b$

2) ${}^{a}\log b = \dfrac{1}{{}^{b}\log a}$

3) ${}^{a}\log b = \dfrac{{}^{p}\log b}{{}^{p}\log a}$

4) $\log a^{n} = n \log a$

5) $\log a + \log b = \log (ab)$

6) $\log a - \log b = \log \left(\dfrac{a}{b}\right)$

Soal

1) Hitung x dari :

   a. ${}^{2}\log x = 3$

   b. ${}^{x}\log (x+2) = 2$

   c. ${}^{3}\log^{2} x - {}^{3}\log x^{4} + {}^{3}\log 81 = 0$

   d. ${}^{x}\log (x+12) - 3\ {}^{x}\log 4 + 1 = 0$

   e. $(3x + 1)^{5} = 100$

2) Jika ${}^{3}\log 7 = a$ dan ${}^{5}\log 9 = b$, maka nyatakan dalam a dan b nilai dari ${}^{7}\log 125$

Matematika Ekonomi

Pertidaksamaan;
Bilangan dan Himpunan

2

Pertidaksamaan

1. **Bentuk pertidaksamaan**
2. **Sifat pertidaksamaan**
3. **Harga mutlak**
4. **Penyelesaian pertidaksamaan**

3

Bentuk Pertidaksamaan

1. Linier : $3x + 9 < x + 15$
2. Non linier
   - ~ kuadratis : $3x^2 + x > 3x - 8$
   - ~ pecahan : $\frac{3x-4}{x} < x - 2$
   - ~ irasional : $\sqrt{x^2 - 2x} > x - 3$
   - ~logaritma : ${}^{(2x-3)}\log 5 > 0$
3. Dua variabel atau lebih

4

Sifat-sifat pertidaksamaan :

1. Kalau a < b dan b < c , maka a < c
2. Ruas kiri dan kanan pertidaksamaan boleh ditambah / dikurangi dengan bilangan yang sama.
   a > b → a ± p > b ± p
3. Kalau a > b dan p > 0 → a p > b p
4. Kalau a > b dan p < 0 → a p **<** b p
   (karena dikali bilangan **negatif**, maka **tanda pertidaksamaan dibalik**)
   Contoh : **- ½ x > 3** (kedua ruas dikalikan -2)
   x < -6

5

Nilai mutlak

Definisi Nilai Mutlak

$$|x| = \begin{cases} x, x \geq 0 \\ -x, x < 0 \end{cases}$$

Sifat-sifat Nilai Mutlak

1. $|x| \geq 0$
2. $|-x| = |x|$
3. $|x|^2 = |x^2| = x^2$
4. $|x| = |y| \Leftrightarrow x^2 = y^2 \Leftrightarrow x = \pm y$
5. $|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$
6. $|x| \geq a \Leftrightarrow a \leq x$ atau $x \leq -a$

6

Langkah Umum Penyelesaian Pertidaksamaan yang berbentuk $\frac{A(x)}{B(x)} < \frac{C(x)}{D(x)}$

1. Tentukan lebih dahulu pada daerah mana saja pertidaksamaan dapat terdefinisi.
2. Buat salah satu ruas (biasanya kanan) sama dengan nol, dan tidak menghilangkan bagian penyebut yang mengandung x, sehingga bentuk umum pertidaksamaan berubah bentuk menjadi

$$\frac{R(x)}{S(x)} < 0$$

7

Langkah Umum Penyelesaian Pertidaksamaan yang berbentuk $\frac{A(x)}{B(x)} < \frac{C(x)}{D(x)}$

3. $R(x)$ dan $S(x)$ diuraikan atas faktor linier atau kuadrat definit positif.
4. Menentukan nilai batas.
5. Menggambarkan selang dengan nilai batas dan tanda selang.
6. Menentukan Himpunan Penyelesaian

8

Himpunan penyelesaian (HP) pertidaksamaan

Misalkan diketahui pertidaksamaan $A(x) < 0$

Maka himpunan penyelesaian pertidaksamaan ini ada 5 kemungkinan :

1). Satu interval
2). Beberapa interval
3). Himpunan kosong (tidak ada jawaban) misalnya : $2x^2 < 3x - 6$
4). Semua bilangan real x memenuhi misalnya : $3x^2 > 2x - 5$
5). Semua bilangan real x kecuali x tertentu misalnya $x^2 > 4x - 4$

9

Soal: dapatkan HP dari :

$$\frac{x^2 - 7}{2x - 4} \le 3$$

Jawab:

Daerah definisi : $x \neq 2$

Kedua ruas dikurangi 3 $\quad \frac{x^2 - 7}{2x - 4} - 3 \le 0$

Samakan penyebutnya $\quad \frac{x^2 - 7 - 3(2x - 4)}{2x - 4} \le 0$

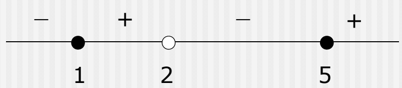
Sederhanakan $\quad \frac{x^2 - 6x + 5}{2x - 4} \le 0$

10

Uraikan menjadi faktor-faktor linier $\quad \frac{(x-5)(x-1)}{2(x-2)} \le 0$

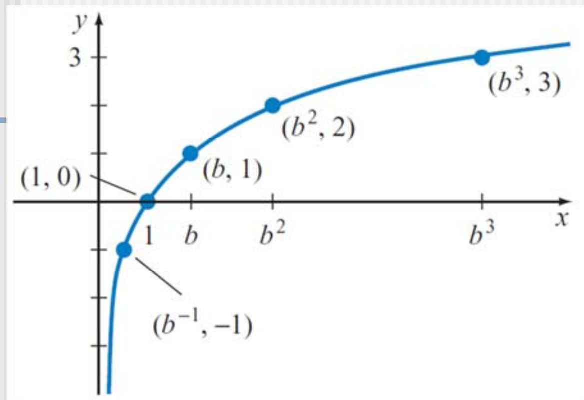
Tentukan nilai batas $\quad x = 5, x = 1, x = 2$

Gambar garis bilangan beserta tandanya



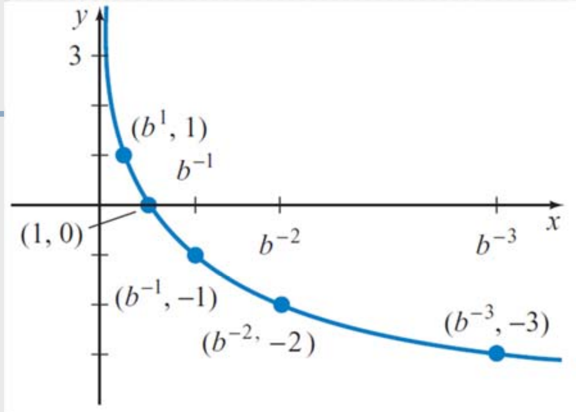
Sehingga HP $= \{x \mid x \le 1 \text{ atau } 2 < x \le 5\}$

11



$f(x) = \log_b x, b > 1$

12



$f(x) = \log_b x,\ 0 < b < 1$

Hal-hal yang harus diperhatikan dalam pertidaksamaan logaritma

Jika ${}^{b}\log x > 0$, maka yang mungkin terjadi :

($b > 1$ dan $x > 1$) atau ($0 < b < 1$ dan $0 < x < 1$)

Jika ${}^{b}\log x < 0$, maka yang mungkin terjadi :

($b > 1$ dan $0 < x < 1$) atau ($0 < b < 1$ dan $x > 1$)

Soal

Hitung batas-batas x jika :

1) ${}^{(2x-3)}\log 5 > 0$
2) ${}^{(2x+1)}\log (6-2x) < 0$

Soal Latihan

Tentukan HP Pertidaksamaan berikut

1. $2x-3 < 3x+2$
2. $x^2 - 12 \le 4x$
3. $x^2 - 2x > -2$
4. $-4x > 5 + 3x^2$
5. $|3x - 9| \ge 3$
6. $|2x - 6| > 4 - x$
7. $\frac{3x-2}{4} < 1 \le \frac{2-x}{3}$
8. $\frac{(x-5)^2}{-3+4x} < -1$
9. $\frac{x^2-3}{2x-4} \le 3$
10. $\frac{2x^2 - x}{x-2} \ge 3$

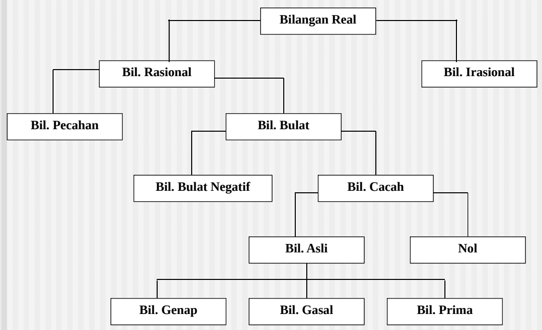
11. Agar PK : $2x^2 = a - ax$ akan mempunyai 2 akar yang berlainan, maka dapatkan batas-batas harga a.

12. Agar PK $2x^2 = (a - 2)x + a$ mempunyai dua akar yang berlainan, maka dapatkan batas harga a

Bilangan dan Himpunan

- Bilangan real
- Pengertian himpunan
- Jenis-jenis himpunan
- Operasi himpunan
- Hubungan antara dua himpunan
- Aturan dalam himpunan
- Anggota himpunan

Pohon Bilangan



Himpunan

- ✓ Dua cara menyatakan himpunan
  1. Daftar atau tabulasi
  2. Rumusan atau deskriptif
- ✓ Jenis-jenis himpunan
  1. Berhingga 2. Tak berhingga
  3. Semesta 4. Kosong
  5. Komplemen 6. Kuasa
  7. Bagian 8. Penyelesaian

Operasi Himpunan

1. Operasi gabungan

   $A \cup B = C$ berarti jika $x \in C$ maka $x \in A$ atau $x \in B$

2. Operasi irisan

   $A \cap B = C$ berarti jika $x \in C$ maka $x \in A$ dan $x \in B$

3. Operasi Selisih

   $A - B = C$ berarti jika $x \in C$ maka $x \in A$ dan $x \notin B$

   $A - B = A \cap B'$

Hubungan antara dua himpunan

1. $A = B$ berlaku

   a. $A \subset B$ dan $B \subset A$

   b. $A - B = \varnothing$ (himpunan kosong)

   c. $A \cap B = A$ atau $A \cap B = B$

2. A ekivalen dengan B ($A \sim B$)

   berarti $n(A) = n(B)$, tetapi $A \neq B$

Hubungan antara dua himpunan

3. $A \neq B$, ada tiga kemungkinan :

   a. $A \subset B$ dan $B \not\subset A$, berlaku :

   (i) $A \cup B = B$

   (ii) $A \cap B = A$

   (iii) $A - B = \varnothing$

   b. A *disjoint* B akan berlaku :

   (i) $A \cap B = \varnothing$

   (ii) $A - B = A$

   (iii) $B - A = B$

   c. $A \cap B \neq \varnothing$

Aturan / hukum dalam Himpunan

- Komutatif

  $A \cup B = B \cup A$

  $A \cap B = B \cap A$

- Asosiatif

  $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C = (A \cup C) \cup B$

  $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C = (A \cap C) \cap B$

Aturan/hukum dalam Himpunan

- Distributif

  $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

  $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

- Absorbsi :

  $A \cup (A \cap B) = A$

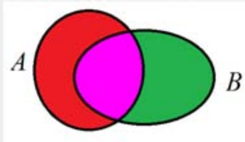
  $A \cap (A \cup B) = A$

- De Morgan

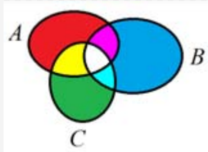
  $(A \cup B)' = A' \cap B'$ dan $(A \cap B)' = A' \cup B'$

Aturan dalam menghitung jumlah anggota dalam himpunan

1). $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

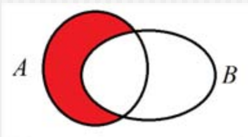


2). $n(P \cup Q \cup R) = n(P) + n(Q) + n(R) + n(P \cap Q \cap R) - n(P \cap Q) - n(P \cap Q) - n(Q \cap R)$

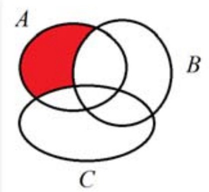


Aturan dalam menghitung jumlah anggota dalam himpunan

3). $n(A - B) = n(A) - n(A \cap B)$

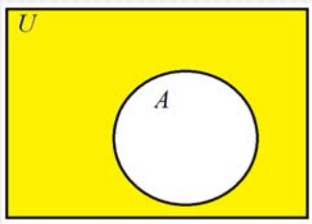


4). $n(A - (B \cup C) = n(A) + n(A \cap B \cap C) - n(A \cap B) - n(A \cap C)$



Aturan dalam menghitung jumlah anggota dalam himpunan

5). $n(A^c) = n(U) - n(A) \rightarrow A^c$ = komplemen A



Hal-hal yang harus diperhatikan dalam menghitung banyaknya anggota himpunan :

Banyaknya anggota himpunan yang dihitung paling rendah nol (tidak boleh pecahan dan negatif)

Hendaknya gunakan diagram Venn

Anggota himpunan yang dihitung terletak di bagian mana dari diagran Venn

Kalau diketahui himpunan Universal U, maka anggota himpunan yang dihitung harus < n(U)

Kalau dketahui misalnya n(A) = p, maka p ini akan terbagi dalam beberapa bagian.
Jika perlu gunakan rumus.

Menghitung batas maksimum dan minimum

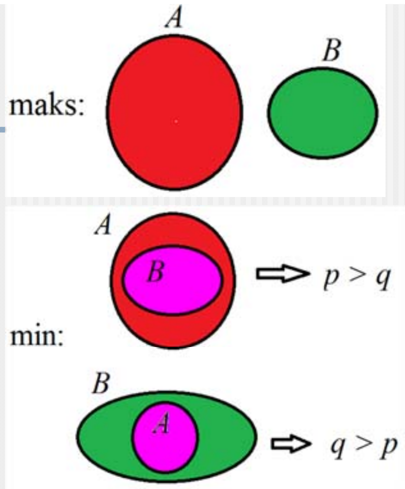
Jika diketahui n(A) = p dan n(B) = q, maka batas maksimum dan minimum dari jumlah anggota himpunan dari hasil operasi berikut :

Operasi	maksimum	minimum
$n(A \cup B)$	p+q	p kalau p > q q kalau q > p
$n(A \cap B)$	p kalau p < q q kalau q < p	0
n(A-B)	p	p – q kalau p >q 0 kalau p ≤ q
n(B-A)	q	q - p kalau q >p 0 kalau q ≤ p

Diagram Ven

untuk

$n(A \cup B)$



Contoh :

Diketahui n(A) = 56 ; n(B) = 34, maka :

batas maksimum dan minimum dari :

	max.		min
$n(A \cup B)$=	56 + 34 = 90	dan	56
$n(A \cap B)$=	34	dan	0
n(A-B)=	56	dan	56-34 = 22
n(B-A)=	34	dan	0 (sebab 34 < 56)

Soal

Jika n(A) = 22 ; n(B) = 67; n(C) = 39, maka dapatkan batas maksimum dan minimum dari operasi :

1). $n(B - (A \cap C))$

2). $n((A \cup C) - B)$

Soal-soal latihan Himpunan :

1. Jika diketahui himpunan semesta
U = {x : bilangan bulat -4 < x < 9} dan himpunan bagiannya A ={0 < x < 6} dan B = { x < 2 atau x >4}, maka dapatkan :

a). A U B

b). A' – B

c). A U B'

d). $A' \cap B$

Soal-soal latihan Himpunan :

2. Dari 400 responden karyawan perusahaan PQR yang ditanyai terhadap pemakaian 3 jenis barang A, B dan C, diperoleh data : ada 30% responden yang tidak mengenal ketiga barang ini. Jika diketahui bahwa ada 125 resp.yang senang barang A, 150 resp. yang senang barang B dan 130 resp.yang senang barang C dan diantara resp.ini ternyata ada 65 resp. yang senang barang A dan B, 50 resp. yang senang barang A dan C dan 45 resp. yang senang barang B dan C, maka dengan menggunakan Diagram Venn :

a). Berapa resp. yang senang ketiga jenis barang ini ?

b). Berapa resp. yang hanya senang dua jenis barang ini.

c). Berapa resp. yang TIDAK senang barang A atau C saja

Matematika Ekonomi

FUNGSI

Definisi Fungsi (1)

Dalam kehidupan sehari-hari, fungsi berarti :

1. tugas seseorang
2. cara sesuatu bekerja
3. cara sesuatu digunakan
4. tujuan dibuatnya sesuatu

Definisi Fungsi (2)

Sedangkan pengertian dalam Matematika :

Fungsi dari himpunan A ke himpunan B adalah aturan yang mengkaitkan **setiap unsur** dalam himpunan A dengan suatu unsur ***unik/tunggal*** di himpunan B
Secara simbol, fungsi ditulis dengan

$$f : A \to B \quad \text{atau } y = f(x).$$

Himpunan semua nilai x di A disebut *domain* dan himpunan semua nilai fungsi yang dihasilkan disebut *range*.

Jenis-jenis Fungsi (1)

1. Fungsi konstan, $f(x) = 10$
2. Fungsi tunggal, $y = 2x + 3$
3. Fungsi berkorespondensi satu-satu, $n(A) = n(B)$
4. Fungsi identitas, $f(x) = x$

Jenis-jenis Fungsi (2)

5. Fungsi Aljabar : fungsi yang variabel-variabelnya dihubungkan oleh +, - , x , : , pangkat, dan atau akar
   Macam-macamnya :
   - fungsi polinomial, $y = x + 3$, $y = x^3 + 2x^2 + 5$
   - fungsi pecahan,
     $$y = \frac{x}{x+1},\ y = \frac{3x+2}{x^2-1}$$
   - fungsi irasional,
     $$y = \sqrt{3x+4}$$

Jenis-jenis Fungsi (3)

6. Fungsi transenden : fungsi yang tidak tergolong fungsi aljabar

   Macamnya :

   – Goniometri, $y = \sin x$
   – Eksponen, $y = 3^x$
   – logaritma, $y = \log x$
   – Syklometris, $y = \arccos x$
   – Hiperbolis , $y = \sinh x$

7

Jenis-jenis Fungsi (4)

7. Fungsi berdasarkan hubungan antar variabel

   a. Fungsi eksplisit : $y = x^2 - 4x + 5$

   b. Fungsi implisit : $f(x,y) = x^3 - 2xy^2 + 3xy + 5$

   c. Fungsi dalam bentuk parameter

$$\begin{cases} x = t^2 - 3t \\ y = 4t + 2 \end{cases}$$

8

Jenis-jenis Fungsi (5)

8. Fungsi berdasarkan banyaknya variabel

   a. Fungsi satu variabel : $x = 8$

   b. Fungsi dua variabel : $y = x^2 + 3x$

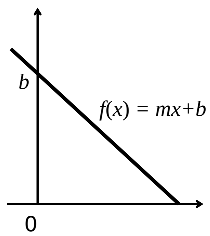
   c. Fungsi lebih dari 2 variabel (multivariable)
   $z = x^2 + 3xy + y^3 + 5x - 2y + 8$

9. Fungsi berbentuk interval

9

Fungsi linier

Gambar:



Beberapa bentuk fungsi linier:

1. $y = mx + b$
2. $px + qy = r$
3. $\frac{x}{m} + \frac{y}{n} = 1$

10

Fungsi linier

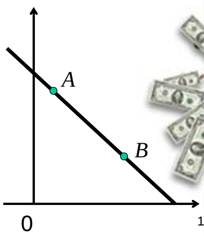
Persamaan garis dari 2 titik $A(x_1,y_1)$ dan $B(x_2,y_2)$

Cara I : $\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$

Cara II :
hitung dulu gradien m

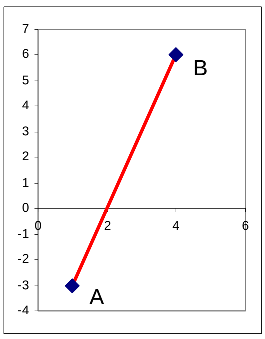
$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

sehingga $y = m(x - x_1) + y_1$



11

Tentukan persamaan garis yang melalui titik A(1,-3) dan B(4,6)



Terlebih dahulu hitung gradien

$$m = \frac{6-(-3)}{4-1} = 3$$

sehingga persamaan garis AB adalah :

$y = 3(x-1)+(-3)$
$= 3x-3-3$
$= 3x- 6$

12

Fungsi kuadrat

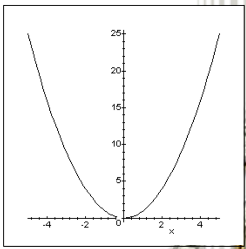
Bentuk umum fungsi kuadrat:

$f(x) = ax^2 + bx + c$

Nilai yang penting dari fungsi kuadrat adalah:

$D = b^2 - 4ac$

D disebut diskriminan



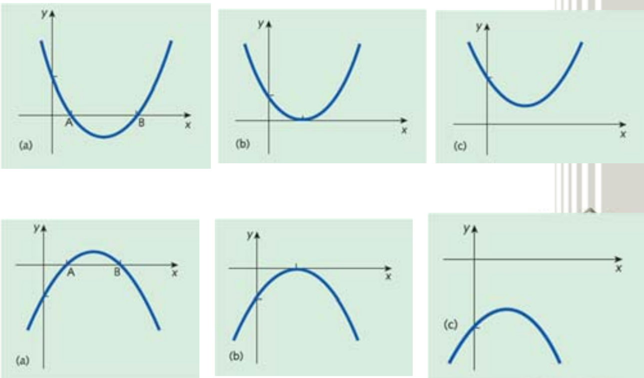
Grafik $y = x^2$

13

Beberapa fakta seputar fungsi kuadrat : $y = ax^2 + bx + c$

- Jika $D > 0$ maka kurva memotong sumbu x di dua tempat
- Jika $D = 0$ maka kurva menyinggung sumbu x
- Jika $D < 0$ maka kurva tidak akan memotong sumbu x
- Sumbu simetri adalah $x = -\dfrac{b}{2a}$

14



15

Beberapa fakta seputar fungsi kuadrat-lanjutan

- Nilai a menyatakan arah kecekungan
  - $a > 0$, cekung ke atas
  - $a < 0$, cekung ke bawah
- Titik potong dengan sumbu y adalah $(0, c)$
- Titik puncak adalah $P\left(-\dfrac{b}{2a}, -\dfrac{D}{4a}\right)$

16

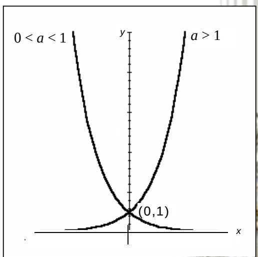
Fungsi eksponensial

Bentuk umum fungsi eksponensial:

$f(x) = ka^x$

Dengan a dan k konstanta. a sering disebut basis eksponen

Sifat eksponen pada pertemuan I bisa dipakai pada fungsi eksponensial ini



Grafik fungsi eksponen

17

Fungsi logaritma

Bentuk umum fungsi logaritma:

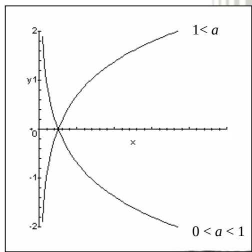
$f(x) = {}^a\log x$

Dengan a disebut basis logaritma.

Hubungan logaritma dengan eksponen :

Jika ${}^a\log b = c$ maka $b = a^c$

(a dan b positif dan $a \neq 1$)



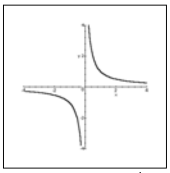
Grafik fungsi logaritma

18

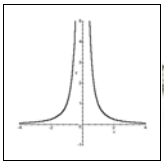
Fungsi rasional

Bentuk umum fungsi rasional: $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$

Dengan $P(x)$ dan $Q(x)$ berbentuk suku banyak



Grafik $y = \dfrac{1}{x}$



Grafik $y = \dfrac{1}{x^2}$

19

Komposisi fungsi

Fungsi komposisi dari fungsi f dan g, ditulis $f \circ g$, adalah fungsi yang memiliki aturan

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)),$$

asalkan $R_f \cap D_g \neq \varnothing$

20

Contoh :

Diketahui : $f(x) = 4x - 2$ dan $g(x) = x^2+3$, maka tentukan :

a. $(f \mathbf{o}\, g)(x)$

b. $(g \mathbf{o}\, f)(x)$

c. $(f \mathbf{o}\, g)(2)$

d. $(g \mathbf{o}\, f)(2)$

e. hitung x agar $(g \mathbf{o}\, f)(x) = 7$

21

Invers fungsi

Andaikan $y = f(x)$ adalah fungsi yang berkorespondensi satu-satu.
Invers fungsi f, ditulis f^{-1} atau $y = f^{-1}(x)$, adalah fungsi yang memenuhi aturan

$$f(f^{-1}(x)) = f^{-1}(f(x)) = I(x) = x,$$

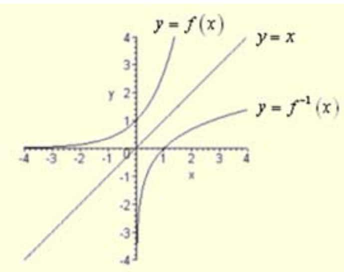
untuk setiap $x \in D_f$

Ini berarti jika $a = f(b)$ maka berlaku $b = f^{-1}(a)$

22

Grafik Invers Fungsi

- Jika grafik fungsi $f(x)$ dan $f^{-1}(x)$ digambarkan dalam satu sumbu koordinat maka grafiknya simetri terhadap garis $y = x$.



Invers fungsi rasional

Invers dari fungsi :

$$y = f(x) = \frac{ax+b}{px+q}$$

adalah :

$$y = f^{-1}(x) = \frac{-qx+b}{px-a}$$

(Buktikan !)

24

Soal

1. Diketahui $f(x) = 5x^2 - 2$ dan $g(x) = \sqrt{2x-1}$
   Tentukan *f*(*g*(1))

2. Diketahui $f(x) = \dfrac{2x}{3x-2}$ dan $g(x) = 2x+1$

   Jika *g*(*f* (*x*)) = 3, maka tentukan nilai *x*

3. Jika $f(x) = \dfrac{3x-2}{2x-3}$ maka nilai $f^{-1}(x)$

   saat *x* = 3 adalah 4 (betul / salah)

25

Beberapa jenis fungsi pada ilmu ekonomi

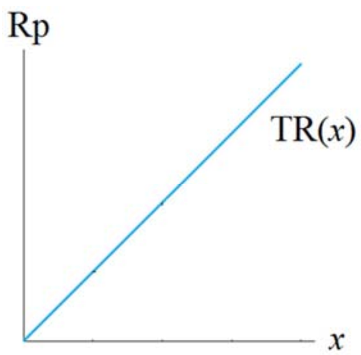
- **Fungsi penerimaan** (*total revenue*/TR) adalah hubungan fungsional antara jumlah uang yang diterima penjual barang dengan banyaknya suatu jenis barang yang terjual

  TR(*x*), dengan *x* adalah banyaknya barang

  TR(*x*) tidak mengandung faktor konstan

  Contoh : TR(*x*) = 5000*x*

26



27

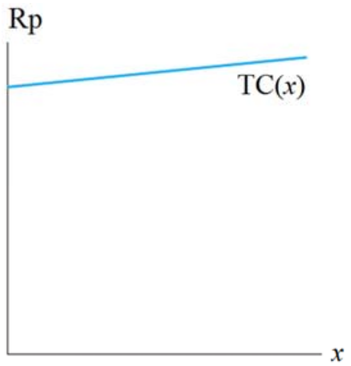
Beberapa jenis fungsi pada ilmu ekonomi (2)

- **Fungsi biaya** (*total cost*/TC) adalah hubungan fungsional antara jumlah seluruh biaya untuk membuat suatu jenis barang dengan banyaknya barang yang diproduksi dalam suatu jangka waktu tertentu.

  TC(*x*), dengan *x* adalah banyaknya barang

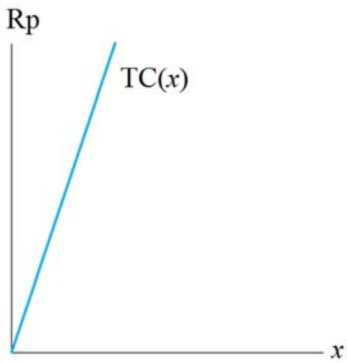
  Contoh : TC(*x*) = 3000*x* + 600.000

28



Biaya tetap (*fixed cost*) besar, biaya berubah (*variable cost*) kecil

29



Tidak ada biaya tetap, biaya berubah besar

30

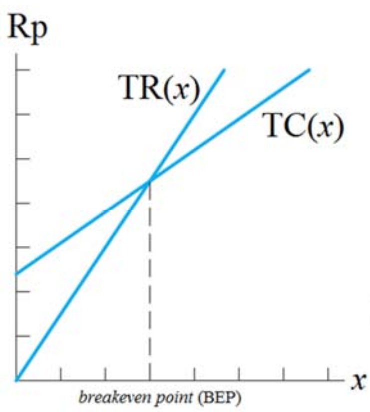
Hubungan antara TR(x) dan TC(x)

Jika diketahui TR(x) dan TC(x) dengan x adalah jumlah suatu jenis barang dalam suatu periode tertentu, maka pada x tertentu dapat terjadi hubungan sbb :

- TR(x) = TC(x) → *breakeven point* (BEP)
- TR(x) > TC(x) → LABA,

  besarnya laba = TR(x) – TC(x)
- TR(x) < TC(x) → RUGI

31



32

Contoh :

1. Diketahui data :

Produk (x)	Biaya (TC(x))
100	800.000
300	1.200.000

Dapatkan fungsi biaya TC(x) sebagai fungsi linier

33

Jawab :

1. TC(x) sebagai fungsi linier → TC(x) = $mx + b$

   hitung gradiennya (m)

$$m = \frac{1.200.000 - 800.000}{300 - 100} = \frac{400.000}{200} = 2000$$

Jadi TC(x) = 2000(x - 100) + 800.000
= 2000x + 600.000

34

2. Jika diketahui harga jual barang pada contoh 1 adalah Rp. 5.000 per unit maka :

a. dapatkan fungsi TR(x)

b. Berapa unit barang yang harus terjual agar tercapai BEP

a. jika ingin mencapai Laba Rp. 2 juta, maka berapa unit barang yang harus terjual ?

35

Jawab :

2. Dari contoh 1, diperoleh TC(x) = 2000x + 600000

a. Karena harga jual barang per unit adalah p = 5000

   maka TR(x) = px = 5000x

b. BEP (breakeven point) terjadi saat

   TR(x) = TC(x)
   5000x= 2000x + 600000
   3000x = 600000
   x = **200** unit

36

c. Agar laba Rp. 2 juta, maka :

$TR(x) – TC(x) = 2000000$

$5000x – (2000x + 600000) = 2000000$

$3000x = 2600000$

$x =$ **866,7**

Jadi untuk mencapai laba Rp. 2 juta banyaknya barang yang harus terjual adalah 867 unit

3. Jika fungsi biaya untuk x unit barang adalah $TC(x) = 4000x + 800.000$ dan kalau harga jual barang ini tiap unit adalah Rp 9.000, maka BEP akan terjadi bila barang tersebut terjual sebanyak 160 unit (B/S)

4. Diketahui TC untuk x unit barang adalah $TC(x) = 6000x + 1.200.000$, kalau pada saat penjualan barang ini sejumlah 500 unit diharapkan diperoleh laba Rp 800.000 maka harga jual tiap unit barang harus sama dengan Rp 20.000 (B/S)

Matematika Ekonomi

Fungsi Demand dan Supply

2

Pokok Bahasan

1. Jenis Fungsi Demand dan Supply
2. Perhitungan Market Equilibrium (ME)
3. Excess Demand dan Excess Supply
4. Pengaruh beban pajak t dan r%
5. Pengaruh Subsidi
6. Fungsi Konsumsi dan Tabungan

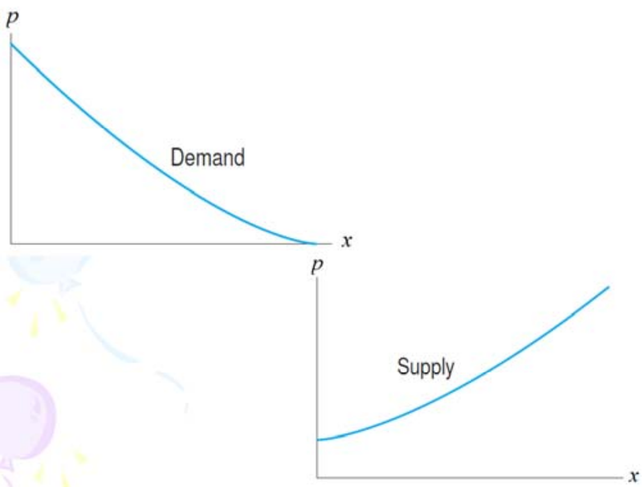
3

FUNGSI DEMAND & SUPPLY

Fungsi ini adalah hubungan antara banyaknya barang yang diminta (Demand) atau yang ditawarkan (Supply) dengan tingkat harga (Price), bentuknya bisa linier atau non-linier.

Bentuk :	Demand (D)	Supply (S)
Linier	$p = 1400\text{-}2x$ $x = 700\text{-}0{,}5p$	$p = 400\text{+}2x$ $x = 0{,}5p\ \text{-}200$
Non linier	$p = 0{,}5x^2\ \text{-}50x\ \text{+}1200$	$p = 0{,}1x^2 + 60$

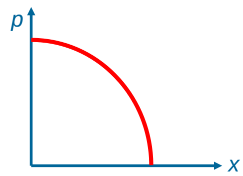
4



Fungsi permintaan kuadratis

1. D: $x = ap^2 + bp + c$, $a < 0$, $b \le 0$, $c > 0$
2. D: $p = ax^2 + bx + c$,
   Kalau $a > 0$, maka $b < 0$, $c > 0$ dan $D \ge 0$
   Kalau $a < 0$, maka $b \le 0$ dan $c > 0$

Ilustrasi fungsi permintaan bentuk kuadratis untuk $a < 0$

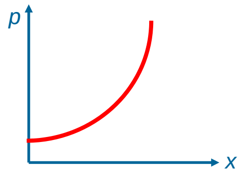


6

Fungsi Penawaran Kuadratis

1. S: $x = ap^2 + bp + c$, $a > 0$, b sebarang, $c > 0$
2. S: $p = ax^2 + bx + c$, $a > 0$, $b \geq 0$, $c > 0$

Ilustrasi fungsi penawaran bentuk kuadratis



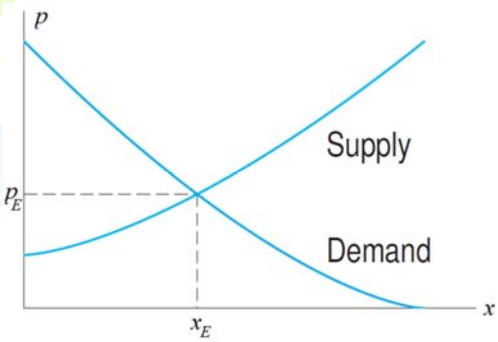
7

Market Equilibrium (ME)

Market Equilibrium (ME = keseimbangan pasar) terjadi pada saat $D = S$, yakni saat

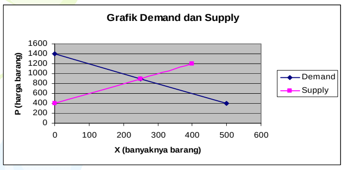
- $p_D = p_S$ (untuk menghitung x_E) atau
- $x_D = x_S$ (untuk menghitung p_E)

8



9

Contoh



Diketahui fungsi :
Demand : $p = 1400 - 2x$
Supply : $p = 400 + 2x$

ME terjadi saat D = S
$1400 - 2x = 400 + 2x$
$-4x = -1000$
$x_E = 250$ unit

price equilibrium
$p_E = 1400 - 2(250)$
$= 900$

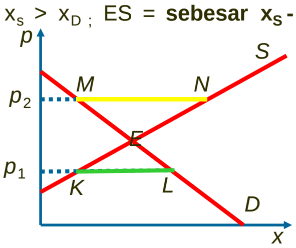
Jadi ME = (250, 900)

10

Excess Demand dan Excess Supply

Excess Demand: Jika pada tingkat harga $p_1 < p_E$, terjadi $x_s < x_D$; ED = sebesar $x_D - x_S$

Excess Supply: Jika pada tingkat harga $p_2 > p_E$, akan terjadi $x_s > x_D$; ES = **sebesar $x_S - x_D$**



11

Contoh

Diketahui : D : $p = 1400 - 2x$,
S : $p = 400 + 2x$
Dari contoh sebelumnya, diperoleh ME = (250, 900)

Kalau $p = 1000$, maka
D : $1000 = 1400 - 2x$
$2x = 400$
$x_D = 200$

S : $1000 = 400 + 2x$
$2x = 600$
$x_S = 300$

Ternyata $x_S > x_D \rightarrow$ Exc. Supply $= x_S - x_D = 100$

12

Contoh

Sebaliknya kalau $p = 700$

D : $700 = 1400 - 2x$
$2x = 700$
$x_D = 350$

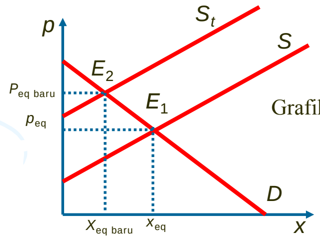
S : $700 = 400 + 2x$
$2x = 300$
$x_S = 150$

Ternyata $x_D > x_S \rightarrow$ Exc. Demand $= x_D - x_S = 200$

Soal
Hitung p kalau terjadi Exc. Supply = 60 unit.

Pengaruh Beban Pajak terhadap Fungsi Supply

1. Beban Pajak t satuan rupiah per unit barang
   Fungsi D diassumsikan TIDAK berubah, hanya S berubah menjadi S_t
   a. S: $p = f(x)$, maka S_t: $p = f(x) + t$
   b. S: $x = f(p)$, maka S_t: $x = f(p-t)$



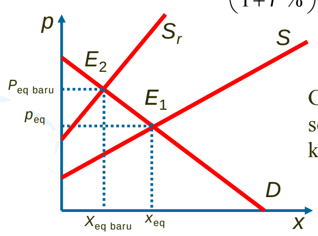
Grafik S_t sejajar S

Pengaruh Beban Pajak terhadap Fungsi Supply-lanjutan

2. Beban Pajak r % dari harga barang per unit

a). $S : p = f(x) \rightarrow \quad S_r : p = \left(1 + \frac{r}{100}\right).f(x)$

b). $S : x = f(p) \rightarrow \quad S_r : x = f\left(\frac{p}{1+r\%}\right) = f\left(\frac{100p}{100+r}\right)$



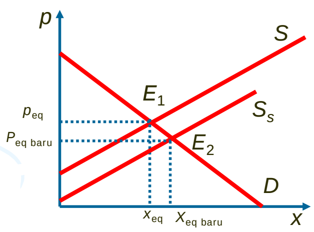
Grafik S_r tidak sejajar S, makin ke kanan makin melebar

Perhitungan Total Tax dan beban pajak

	Pajak t	Pajak r %
Total tax	$T = x_t t$	$T = \frac{r}{100+r} p_r x_r$
Beban pajak yang ditanggung konsumen	$T_d = (p_t - p_E)\, x_t$	$T_d = (p_r - p_E)\, x_r$
Beban pajak yang ditanggung supplier	$T_s = T - T_d$	$T_s = T - T_d$

Pengaruh Subsidi terhadap Market Equilibrium

Pengaruh subsidi akan membuat ME berubah dengan turunnya harga, karena S setelah subsidi sebesar s menjadi S_s : $p = f(x) - s$



Fungsi Konsumsi dan Fungsi Tabungan

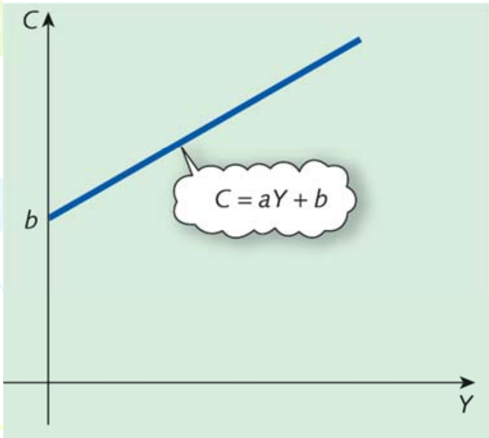
Fungsi konsumsi
Notasi : $C = f(Y)$, jika linier $C = ay + b$

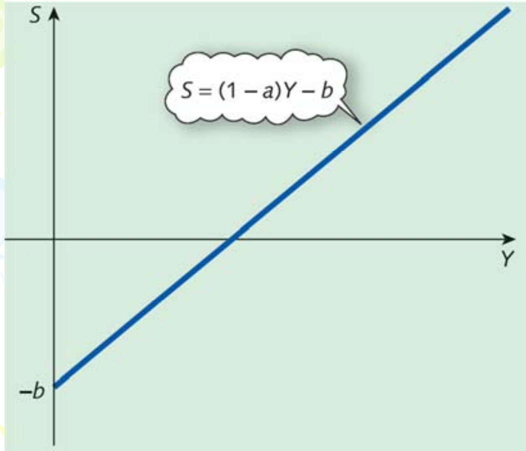
Marginal Propensity to consume (MPC):

$$MPC = \frac{\Delta C}{\Delta Y}$$

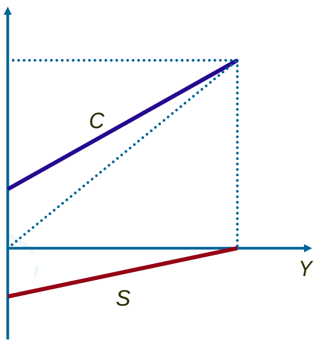
Fungsi tabungan : $S = Y - C$

Marginal Propensity to save (MPS):
MPS = 1 – MPC;
Soal : Jika MPC = 3 MPS, hitung MPC dan MPS





Grafik Fungsi Konsumsi dan Fungsi Tabungan



SOAL

1. Diketahui fungsi Supply : $p = 0{,}25x^2+2x+160$, dan Demand : $x = 80 - 0{,}2p$, maka ME terjadi pada saat $p = 240$. (B/S) Alasan :
2. Diketahui fungsi D : $x = 700 – 0{,}5p$ dan S: $p = 2x + 400$;
   a). Hitung ME
   b). Kalau terhadap barang ini pemerintah membebani pajak 25% dari harga barang, maka dapatkan ME baru dan berapa % beban pajak yang ditanggung konsumen
   c). Kalau terhadap barang ini pemerintah memberi subsidi Rp. 40 tiap unit barang, hitung ME baru dan jumlah subsidi yang harus pemerintah berikan.

3. Diketahui fungsi D dan S terhadap suatu jenis barang :
   D: $x = 180 - p$ dan S : $p = 0{,}5x +60$
   a). Hitung ME
   b). Jika $p = 90$, hitung apa yang terjadi ?
   c). Jika barang ini dibebani pajak $t = 30$, hitung ME baru setelah tax dan berapa % beban pajak yang ditanggung konsumen.
4. Diketahui fungsi D dan S terhadap suatu jenis barang :
   D : $p = -0{,}5x^2 - 200x +2400$ dan S : $x = 0{,}2p -240$
   a). Hitung ME
   b). Jika $p = 1800$, hitung apa yang terjadi ?
   c). Jika barang ini dibebani pajak $t = 500$, hitung ME baru setelah tax dan berapa % beban pajak yang ditanggung konsumen.

Matematika Ekonomi

Limit & Turunan Fungsi

Definisi Limit

Perhatikan fungsi $f(x) = \dfrac{2x^2 - 5x - 3}{x - 3}$, $x \neq 3$.

Berapa nilai fungsi f saat nilai x mendekati 3?

Nilai fungsi f di sekitar $x = 3$

x	2,9	2,99	2,999	……	**3**	…….	3,001	3,01	3,1
$f(x)$	6,9	6,98	6,998	……	**?**	…….	7,002	7,02	7,2

Ditulis, $\lim_{x \to 3} f(x) = 7$ atau $\lim_{x \to 3} \dfrac{2x^2 - 5x - 3}{x - 3} = 7$

Definisi Limit-lanjutan

$\lim_{x \to a} f(x) = L$ berarti jika x semakin dekat ke a, tapi tidak sama dengan a, maka nilai $f(x)$ semakin dekat dengan L.

Sifat-sifat Limit

1. Jika q konstanta maka $\lim_{x \to a} q = q$
2. $\lim_{x \to a} x = a$

Jika $\lim_{x \to a} f(x) = L$ dan $\lim_{x \to a} g(x) = M$ maka

3. $\lim_{x \to a} \{f(x) \pm g(x)\} = \lim_{x \to a} f(x) \pm \lim_{x \to a} g(x) = L \pm M$

Sifat-sifat Limit-lanjutan

4. $\lim_{x \to a} \{f(x)g(x)\} = \lim_{x \to a} f(x) \lim_{x \to a} g(x) = LM$
5. $\lim_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)} = \dfrac{L}{M}$, asalkan $M \neq 0$
6. $\lim_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \to a} f(x)} = \sqrt[n]{L}$

$dimana\ L \geq 0$ untuk n genap.

Penyelesaian Limit

1. substitusi langsung, jika nilainya tertentu, bukan bentuk TAK TENTU

Jika nilainya merupakan salah satu bentuk tak tentu, maka diselesaikan dengan cara :

2. memfaktorkan
3. mengalikan dengan bentuk satu
4. dalil L'Hopital

Contoh

Hitung

1. $\lim\limits_{x\to 1}\sqrt{5x^4+3x^2+2x+15}$
2. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt[5]{2x^2-4x+1}}{\sqrt{2x}+\sqrt[3]{2x^2}}$

Limit bentuk tak tentu

Ada empat jenis bentuk tak tentu:

1. $\dfrac{0}{0}$
2. $\dfrac{\pm\infty}{\pm\infty}$
3. $\pm\infty\mp\infty$
4. $1^{\pm\infty}$

Tahapan Penyelesaian Limit bentuk tak tentu

- Mengubah limit bentuk tak tentu menjadi limit bentuk tertentu.
  Pengubahan limit bentuk tak tentu seringkali dilakukan dengan cara:
  - mengalikan dengan bentuk sekawan
  - menghilangkan faktor penyebab bentuk tak tentu dengan memfaktorkan.

  Lalu substitusikan nilai x pada bentuk terakhir
  - khusus bentuk 1^{∞} gunakan sifat bilangan e
- Gunakan cara L'Hopital, memakai turunan fungsi pada pembilang & penyebut

Contoh 1 :

$$\lim_{x\to 3}\frac{2x^2-3x+2}{4x-10}=\frac{18-9+2}{12-10}$$
$$=\frac{11}{2}$$
$$=5,5$$

Contoh 2 :

$$\lim_{x\to 3}\frac{2x^2-4x-6}{4x-12}\left(=\frac{0}{0}\right)$$ faktorkan

$$=\lim_{x\to 3}\frac{\cancel{(x-3)}(2x+2)}{4\cancel{(x-3)}}$$ hilangkan faktor penyebab tak tentu

$$=\lim_{x\to 3}\frac{2x+2}{4}$$ substitusikan nilai $x=3$

$$=\frac{2(3)+2}{4}=2$$

Contoh 3 :

$$\lim_{x\to\infty}\frac{6x^2-4x+8}{4x^2+10}\left(=\frac{\infty}{\infty}\right)$$

Kalikan dgn bentuk satu (seperpangkat tertinggi)

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{6x^2-4x+8}{4x^2+10}\;\frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^2}}$$

sederhanakan

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{6-\frac{4}{x}+\frac{8}{x^2}}{4+\frac{10}{x^2}}$$

Hitung untuk x→∞

$$=\frac{6-0+0}{4+0}=\frac{3}{2}$$

Contoh 4 :

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{4x+2}{4x-6}\right)^{3x}\left(=1^{\infty}\right)$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{8}{4x-6}\right)^{3x}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{8}{4x-6}\right)^{\left(\frac{4x-6}{8}\right)\left(\frac{8}{4x-6}\right)(3x)}$$

$$=e^{\lim_{x\to\infty}\frac{24x}{4x-6}}=e^{24/4}=e^{6}$$

Ingat bentuk :

$$e=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{f(x)}\right)^{f(x)}$$

Untuk $\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$

Contoh 5 :

$$\lim_{x\to 4}\frac{x-\sqrt{3x+4}}{2x-8}\left(=\frac{0}{0}\right)$$

Kalikan bentuk satu (sekawan)

$$=\lim_{x\to 4}\frac{x-\sqrt{3x+4}}{2x-8}\;\frac{x+\sqrt{3x+4}}{x+\sqrt{3x+4}}$$

sederhanakan

$$=\lim_{x\to 4}\frac{x^2-(3x+4)}{(2x-8)(x+\sqrt{3x+4})}$$

faktorkan

$$=\lim_{x\to 4}\frac{(x-4)(x+1)}{2(x-4)(x+\sqrt{3x+4})}$$

Hilangkan pembuat taktentu

$$=\lim_{x\to 4}\frac{(x+1)}{2(x+\sqrt{3x+4})}$$

substitusikan

$$=\frac{5}{2(4+\sqrt{16})}=\frac{5}{16}$$

Soal Limit

Hitung

1. $\lim_{x\to 3}\dfrac{2x^2-5x-3}{x-3}$
2. $\lim_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x}-3}{x-9}$
3. $\lim_{x\to 2}\dfrac{2x^2-3x-2}{3x-6}$
4. $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{6x+16}-4}{5x}$
5. $\lim_{x\to 1}\dfrac{(1-2x)^3}{(x-5)^2}$
6. $\lim_{k\to 0}\dfrac{(y+k)^2-y^2}{k}$
7. $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+3x}-\sqrt{x^2-2x}\right)$
8. $\lim_{x\to+\infty}\left[\dfrac{x^2+2x}{x^2+1}\right]^{3x}$

Kekontinuan fungsi di satu titik tertentu

Syarat kekontinuan fungsi $y = f(x)$ di titik dengan absis $x = c$

1. $f(c)$ = ada , misalkan = L

2. $\lim_{x\to c} f(x)$ ada, misalkan = M

3. L = M

Contoh :

Diketahui fungsi *f* didefinisikan sebagai :

$$f(x)=\begin{cases}-x+2, & x\le 0\\ 2ax+b, & 0<x<1\\ -1, & x\ge 1\end{cases}$$

Hitung a dan b agar fungsi *f* kontinu di $x = 0$ dan di $x = 1$

Jawab :

di $x = 0$:

1. $f(0) = 2$
2. $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-}(-x+2) = 2$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}(2ax+b) = b$

Agar $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ ada, haruslah :

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$

$b = 2$

di $x = 1$:

1. $f(1) = -1$
2. $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-}(2ax+b)$
$= 2a+2$

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = -1$

Agar $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ ada, haruslah :

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$

$2a+2 = -1$

$a = -\frac{3}{2}$

Hasil Bagi Differensi

Hasil bagi differensi dari $y = f(x)$ kalau x berubah dari x_1 ke x_2 adalah

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Contoh

Jika $y = f(x) = 3x^2 - 4x + 6$ dan kita ingin menghitung besarnya perubahan rata-rata harga y kalau x berubah dari 3 menjadi 5, maka kita hitung dulu :

$y_1 = f(3) = 27 - 12 + 6 = 21$ dan

$y_2 = f(5) = 75 - 20 + 6 = 61$,

sehingga besarnya perubahan rata-rata :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{61-21}{5-3} = 20$$

Ini berarti mulai dari 3 sampai dengan 5, harga y naik rata-rata sebesar 20 unit.

Definisi Turunan

Turunan fungsi f adalah fungsi yang diperoleh melalui proses limit berikut :

$$f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Hasil ini disebut turunan pertama $y = f(x)$ (jika limitnya ada)

Notasi yang sering digunakan:

$f'(x)$ atau y', $\frac{df}{dx}$ atau $\frac{dy}{dx}$, $D_x(f)$

Rumus-rumus Turunan

Fungsi	Turunannya
$y = c$	$y' = 0$
$y = ax + b$	$y' = a$
$y = x^n$	$y' = n\,x^{n-1}$
$y = U + V$	$y' = U' + V'$
$y = UV$	$y' = U'V + UV'$
$y = U/V$	$y' = (U'V - UV')/V^2$
$y = e^x$	$y' = e^x$
$y = e^u$	$y' = e^u\,u'$
$y = a^x$	$y' = a^x \ln a$
$y = \ln x$	$y' = 1/x$
$y = \ln U$	$y' = U'/U$
$y = {}^a\log x$	$y' = 1/(x \ln a)$

Turunan fungsi bentuk Parameter & Fungsi Implisit

Fungsi bentuk Parameter : $\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$

maka $y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy\;/\;dt}{dx\;/\;dt} = \frac{g'(t)}{f'(t)}$

Fungsi Implisit : $F(x, y) = c$

maka $y' = \frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y}$

Dimana F_x adalah turunan parsial $F(x,y)$ ke x dan F_y adalah turunan parsial $F(x,y)$ ke y

Turunan kedua dan seterusnya

Jika turunan pertama $y' = f'(x) = \frac{dy}{dx}$

maka turunan kedua $y'' = f''(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d^2y}{dx^2}$

dan seterusnya untuk turunan ketiga, keempat,…

Contoh : $y = f(x) = x^3 - 6x^2 + 5x + 10$, maka

$y' = 3x^2 - 12x + 5$

$y'' = 6x - 12$

$y^{(3)} = 6$

$y^{(4)} = 0$

Matematika Ekonomi

Aplikasi Turunan Fungsi

2

Aplikasi Turunan pertama fungsi

1. Menghitung gradien garis singgung
2. Menentukan titik Stationer
3. Menentukan arah grafik yang monoton naik atau monoton turun
4. Menghitung fungsi Marginal pada fungsi Revenue dan Biaya.

3

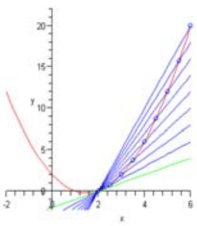
1. Gradien Garis Singgung

Langkah menentukan persamaan garis singgung fungsi $y = f(x)$ di titik P dengan absis $x = a$:

- hitung $y = f(a) = b$
- hitung gradien $m = f'(a)$
- buat persamaan garis singgung : $y = m(x - a) + b$

Contoh

Tentukan persamaan singgung kurva $f(x) = x^2 - 3x + 2$ di titik P(2,0)



Persamaan kurva: $f(x) = x^2 - 3x + 2$

Turunan pertama : $f'(x) = 2x - 3$

Gradien di titik P(2,0) adalah:

$$f'(2) = 2(2) - 3 = 1$$

Garis singgung kurva di P

$$y - 0 = 1(x - 2) \Rightarrow y = x - 2$$

2. Titik Stationer $y' = 0$ (ada akar real)

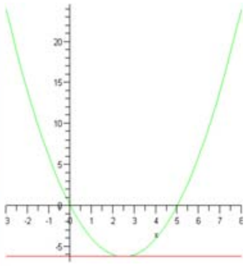
Langkah menentukan titik stationer fungsi $y = f(x)$

1. hitung x dari $f'(x) = 0$, apakah ada akar real ? Jika ada $x = c$
2. hitung $y = f(c) = d$
3. Titik Stationer A(c,d)

Catatan: Jika $f'(x) = 0$ **tidak ada akar real** maka $y = f(x)$ tidak mempunyai titik stationer

Contoh

Tentukan titik stationer fungsi $f(x) = x^2-5x$



Turunan pertama : $f'(x) = 2x - 5$

Akar turunan pertama:

$2x - 5 = 0$

$x = 2,5$

$y = f(2,5) = 2,5^2 - 5(2,5) = -6,25$

Jadi titik stationer kurva adalah A(2,5; -6,25)

7

3. Grafik monoton

- Grafik fungsi $f(x)$ akan monoton NAIK pada interval x jika $f'(x) > 0$
- Grafik fungsi $f(x)$ akan monoton TURUN pada interval x jika $f'(x) < 0$

8

Contoh

Diketahui fungsi: $y = x^2 - 5x$. Tentukan pada interval mana grafik fungsi tersebut monoton naik dan turun !

Jawab :

$y' = 2x - 5$

Grafik monoton naik pada

saat $y' > 0$

$2x - 5 > 0$

$x > 2,5$

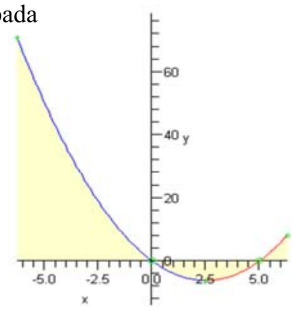
9

Grafik monoton turun pada

saat $y' < 0$

$2x - 5 < 0$

$x < 2,5$



10

4. Fungsi marginal

Pada fungsi biaya atau Revenue :

Marginal = turunan fungsi biaya atau revenue

Contoh :

Jika diketahui $TC(x) = x^2 + 40x + 5000$,

maka marginal cost : $MC(x) = TC'(x) = 2x + 40$

11

Aplikasi Turunan Kedua fungsi

1. Menentukan bagian grafik yang terbuka ke atas atau ke bawah (kecekungan grafik fungsi)
2. Menghitung titik ekstrim Maksimum dan Minimum
3. Menghitung titik Belok

12

1. Kecekungan

- Bagian grafik yang terbuka ke atas (cekung ke atas) : syaratnya : $y'' > 0 \rightarrow$ hitung interval x (kalau ada);

  Bagian grafik yang terbuka ke bawah (cekung ke ke bawah) : syaratnya : $y'' < 0 \rightarrow$ hitung interval x (kalau ada);

13

2. Menghitung Titik Ekstrim: Maksimum dan Minimum

Langkah-langkah :

1. Tentukan nilai x yang memenuhi $y' = f'(x) = 0$, misalkan $x = a$;
2. Hitung $y''(a) = f''(a)$, jika :
   - $f''(a) > 0$ maka $(a, f(a))$ adalah titik Minimum
   - $f''(a) < 0$ maka $(a, f(a))$ adalah titik Maksimum
   - $f''(a) = 0$ maka tidak ada titik ekstrim, hanya TITIK SADEL.

14

3. Titik Belok

- Titik Belok $\rightarrow$ $y'' = f''(x) = 0 \rightarrow$ Hitung x (kalau ada); misalkan $x = c$; syarat $y' = f(c) \neq 0$

15

Signs of f' and f''	Properties of the Graph of f	General Shape of the Graph of f
$f'(x) > 0$ $f''(x) > 0$	f increasing f concave upward	
$f'(x) > 0$ $f''(x) < 0$	f increasing f concave downward	
$f'(x) < 0$ $f''(x) > 0$	f decreasing f concave upward	
$f'(x) < 0$ $f''(x) < 0$	f decreasing f concave downward	

Contoh

Diketahui fungsi: $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 22$
Tentukan pada interval mana grafik fungsi tersebut cekung keatas dan cekung kebawah.

Jawab :

Turunan pertama :

$$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9$$

Turunan kedua :

$$f''(x) = 6x - 6$$

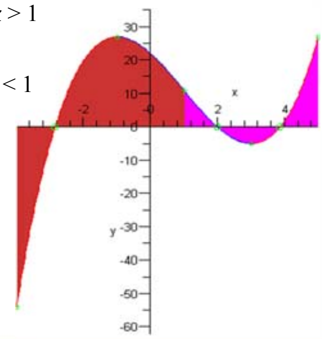
17

Cekung ke atas saat:

$y'' > 0 \rightarrow 6x - 6 > 0 \rightarrow x > 1$

Cekung ke bawah saat:

$y'' < 0 \rightarrow 6x - 6 < 0 \rightarrow x < 1$



18

Contoh

Diketahui $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 22$. Tentukan nilai ekstrim fungsi tersebut

Jawab

Akar turunan pertama:
$y' = 3x^2 - 6x - 9 = 0$ ialah
$x_1 = -1$ dan $x_2 = 3$

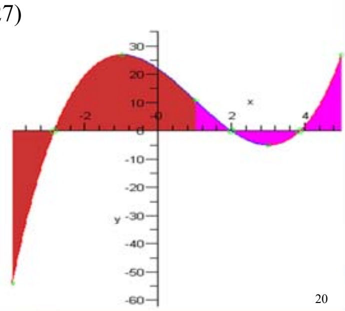
Sedangkan turunan kedua adalah
$y'' = 6x - 6$

19

---

untuk $x = -1$
$y'' = -12 < 0 \rightarrow y_{max} = -1-3+9+22 = 27$
Titik maksimum P(-1,27)

untuk $x = 3$
$y'' = 12 > 0 \rightarrow y_{min} = -5$
Titik minimum Q(3,-5)



20

Menghitung titik Belok

Cara menentukan titik belok:
- $y'' = f''(x) = 0$
- Hitung x (kalau ada); misalkan $x = c$;
- Titik $(c, f(c))$ adalah titik belok jika $y' = f'(c) \neq 0$

21

Contoh

Diketahui fungsi : $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 22$
Tentukan koordinat titik belok fungsi tersebut !

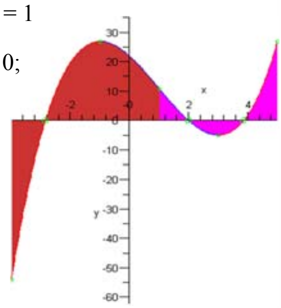
Jawab:

Syarat Titik Belok :
- $f'(x) \neq 0$
- $f''(x) = 0$

22

$f'(x) = y' = 3x^2 - 6x - 9$
$f''(x) = y'' = 6x - 6 = 0 \rightarrow x = 1$

untuk $x = 1$; $y = 11$ dan $y' \neq 0$;
sehingga titik belok R(1,11)



23

Latihan

Tentukan titik ekstrim, titik sadel dan titik belok (jika ada)

dari : $y = x^3 - 6x^2 + 12x - 5$

24

Latihan

Diketahui $G(x) = 3x^5 - 5x^3 + 1$

Tentukan (jika ada)

a. titik ekstrim

b. titik sadel dan titik belok

c. Interval grafik monoton naik dan turun

d. Interval grafik fungsi cekung atas dan cekung bawah

25

Menggambar grafik

Hal-hal yang perlu diperhatikan dalam menggambar grafik fungsi:

- Batas-batas interval
- Titik potong sumbu *x* atau *y*
- Kemonotonan
- Kecekungan
- Titik Ekstrim
- Titik belok atau sadel
- Garis asimtot

26

Aplikasi diferensial

1. Perhitungan laju
2. Nilai ekstrim
3. Elastisitas

Jika $y = f(x)$, maka elastisitas fungsi dari y ke x adalah

$$E_{y\to x} = \frac{f'(x)}{f(x)/x} = \frac{xf'(x)}{f(x)}$$

Jika $x = f(p)$ adalah fungsi permintaan atau penawaran, maka

$$E_{x\to p} = \frac{f'(p)}{x/p} = \frac{pf'(p)}{x} = \frac{pf'(p)}{f(p)}$$

27

Aplikasi diferensial-lanjutan

4. Tingkat pertumbuhan

Jika $y = f(t)$, maka tingkat pertumbuhan adalah

$$r_y = \frac{dy/dt}{y} = \frac{f'(t)}{f(t)}$$

Dalam bentuk persentase

$$r_y = \left(\frac{f'(t)}{f(t)}\right)100\%$$

28

Matematika Ekonomi

MATRIKS

Definisi Matriks

Notasi Matriks

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & . & . & a_{2n} \\ . & . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & . & . & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Matriks ini berdimensi m x n.

Matriks ini dapat ditulis sebagai $A = (a_{ij})$,

$i = 1, 2, \ldots, m$ dan $j = 1, 2, \ldots, n$.

a_{ij} adalah elemen baris ke-i kolom ke-j

Jenis-jenis Matriks

1. Matriks baris → matriks yang terdiri dari satu baris saja
   Contoh :
   $$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

2. Matriks kolom → matriks yang terdiri dari satu kolom saja
   Contoh :
   $$\begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 4 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Jenis-jenis Matriks (2)

3. Matriks nol → matriks yang semua elemennya nol
   Contoh :
   $$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

4. Matriks bujur sangkar (BS)→ matriks yang jumlah baris dan kolomnya sama
   Contoh :
   $$\begin{bmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 4 & 6 & 3 \\ 23 & 3 & 9 \end{bmatrix}$$
   a_{11}, a_{22}, a_{33} disebut sebagai elemen diagonal

Jenis-jenis Matriks (3)

5. Matriks transpose → matriks yang diperoleh dengan mempertukarkan baris dengan kolom
   Contoh :
   $$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ -4 & 1 & 0 & 8 \end{bmatrix} \qquad A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 2 & 3 & 1 \\ 5 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 8 \end{bmatrix}$$

6. Matriks negatif → suatu matriks yang diperoleh dengan mengalikan semua elemennya dengan -1
   Contoh :
   $$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ -4 & 1 & 0 & 8 \end{bmatrix} \qquad -A = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -5 & -1 \\ -2 & -3 & -4 & -1 \\ 4 & -1 & 0 & -8 \end{bmatrix}$$

Jenis-jenis Matriks (4)

7. Matriks diagonal→ matriks BS yang semua elemennya nol kecuali elemen diagonalnya.
   Contoh :

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

8. Matriks skalar → matriks diagonal yang semua elemen diagonalnya sama
   Contoh :

$$S = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Jenis-jenis Matriks (5)

9. Matriks satuan → matriks diagonal yang semua elemen diagonalnya 1
   Contoh :

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

10. Matriks simetris → matriks BS yang mempunyai sifat $A = A^T$
   Contoh :

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Jenis-jenis Matriks (5)

11. Matriks silang → matriks BS yang mempunyai sifat $-A = A^T$
   Contoh :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -4 \\ -2 & 0 & -3 \\ 4 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

12. Matriks singular → matriks BS yang determinannya sama dengan nol
   Contoh :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 6 & -3 & 6 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Jenis-jenis Matriks (6)

13. Matriks nonsingular → matriks BS yang determinannya tidak sama dengan nol
   Contoh :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & -1 \end{bmatrix}$$

14. Invers matriks → matriks bujursangkar yang memenuhi $A\,A^{-1} = I$
   Contoh :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ \frac{-3}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

Jenis-jenis Matriks (7)

15. Matriks idempoten → matriks BS yang mempunyai sifat $A^2 = A$
   Contoh :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & \frac{1}{2} \\ -4 & -1 \end{bmatrix}$$

16. Matriks nilpoten matriks BS yang mempunyai sifat $A^2 = 0$; $|A|=0$
   Contoh :

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 9 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}$$

Jenis-jenis Matriks (8)

17. Matriks ortogonal : matriks BS yang inversnya = matriks semula atau kuadrat matriks ini = I
   Contoh :

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$$

18. Matriks triangular → matriks BS yang semua elemen diatas / dibawah elemen diagonal = 0
   Contoh :

$$U = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad L = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Matriks segitiga atas   Matriks segitiga bawah

Jenis-jenis Matriks (9)

19. Minor Matriks diperoleh dari matriks BS yang dihapus satu baris dan satu kolom
Contoh :

$$A=\begin{bmatrix}2 & -1 & 2\\ 6 & -3 & 6\\ -1 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

Minor baris ke-3 kolom ke-1 dihitung dari matriks yang diperoleh dengan menghapus baris ke-3 dan kolom ke-1 dari matriks A, yaitu

$$\begin{bmatrix}-1 & 2\\ -3 & 6\end{bmatrix}$$

KEGUNAAN MATRIKS

1). Untuk menyajikan data agar lebih mudah dihitung.

2). Memudahkan pembuatan analisa tentang hubungan antara variabel-variabel dan mengolah nilai variabel-variabel ini dalam persamaan matriks.

3). Untuk menyelesaikan masalah ***Multiple-Regression, Linear Programming*** dan masalah lainnya dalam Riset Operasional.

4). Untuk menyelesaikan persamaan linier yang simultan.

5). Dapat dipakai untuk memanipulasi tampilan data agar dapat dirahasiakan sehingga tidak mudah data asli disalahgunakan oleh pihak lain.

Operasi-operasi Matriks

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 5 & 1\\ 2 & 3 & 4 & 1\\ -4 & 1 & 0 & 8\end{bmatrix} \quad B=\begin{bmatrix}3 & 3 & 1 & 3\\ 4 & -3 & -4 & 7\\ 0 & 2 & 3 & 4\end{bmatrix}$$

1. Penjumlahan dua matriks

$$A+B=\begin{bmatrix}1+3 & 2+3 & 5+1 & 1+3\\ 2+4 & 3+(-3) & 4+(-4) & 1+7\\ -4+0 & 1+2 & 0+3 & 8+4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4 & 5 & 6 & 4\\ 6 & 0 & 0 & 8\\ -4 & 3 & 3 & 12\end{bmatrix}$$

Operasi-operasi Matriks-lanjutan

2. Pengurangan dua matriks

$$A-B=\begin{bmatrix}1-3 & 2-3 & 5-1 & 1-3\\ 2-4 & 3-(-3) & 4-(-4) & 1-7\\ -4-0 & 1-2 & 0-3 & 8-4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2 & -1 & 4 & -2\\ -2 & 6 & 8 & -6\\ -4 & -1 & -3 & 4\end{bmatrix}$$

3. Perkalian dengan bilangan

$$2A=\begin{bmatrix}2(1) & 2(2) & 2(5) & 2(1)\\ 2(2) & 2(3) & 2(4) & 2(1)\\ 2(-4) & 2(1) & 2(0) & 2(8)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 4 & 10 & 2\\ 4 & 6 & 8 & 2\\ -8 & 2 & 0 & 16\end{bmatrix}$$

Operasi-operasi Matriks-lanjutan 1

4. Perkalian dua matriks A x B hanya dapat dikalikan, kalau
banyaknya kolom A = banyaknya baris B;
perkalian matriks tidak komutatif; AB ≠ BA

$$A=\begin{bmatrix}5 & 3 & -2\\ 1 & 2 & 4\end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix}3 & 2\\ 8 & -1\\ 0 & 5\end{bmatrix}$$

$$A \times B = \begin{bmatrix}5 & 3 & -2\\ 1 & 2 & 4\end{bmatrix} \times \begin{bmatrix}3 & 2\\ 8 & -1\\ 0 & 5\end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix}5x3 + 3x8 + (-2)x0 & 5x2 + 3x(-1) + (-2)x5\\ 1x3 + 2x8 + 4x0 & 1x2 + 2x(-1) + 4x5\end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix}39 & -3\\ 19 & 20\end{bmatrix}$$

Perpangkatan matriks bujur sangkar :

A^n dimana n = 2, 3 …. n bilangan bulat; Hasil perpangkatannya ***bukan*** matriks yang elemennya perpangkatan dari tiap elemen semula, kecuali A adalah matriks diagonal

Jika diketahui $A=\begin{bmatrix}2 & 3 & 1\\ 0 & 4 & 2\\ 3 & 1 & 5\end{bmatrix}$, maka dapatkan A^2

$$A^2 = A.A = \begin{bmatrix}2 & 3 & 1\\ 0 & 4 & 2\\ 3 & 1 & 5\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}2 & 3 & 1\\ 0 & 4 & 2\\ 3 & 1 & 5\end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix}2x2 + 3x0 + 1x3 & 2x3 + 3x4 + 1x1 & 2x1 + 3x2 + 1x5\\ 0x2 + 4x0 + 2x3 & 0x3 + 4x4 + 2x1 & 0x1 + 4x2 + 2x5\\ 3x2 + 1x0 + 5x3 & 3x3 + 1x4 + 5x1 & 3x1 + 1x2 + 5x5\end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix}7 & 19 & 13\\ 6 & 18 & 18\\ 21 & 18 & 30\end{bmatrix} \rightarrow \text{hasilnya bukan kuadrat elemen A}$$

Determinan : Perhitungan Determinan hanya ada pada matriks bujur sangkar yang hasilnya : Pos., Negatif atau Nol

Notasi:

$$\text{DetA}=|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdot & \cdot & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \cdot & \cdot & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdot & \cdot & a_{mn} \end{vmatrix}$$

◇ matriks 2x2:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

19

Determinan-lanjutan 1

◇ matriks 3x3 (aturan Sarrus):

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

$$- \quad - \quad - \qquad + \quad + \quad +$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

20

Determinan-lanjutan 2

◇ Matriks ukuran 4x4 atau lebih dihitung dengan cara Laplace atau cara CHI'OS:
Cara Laplace : diuraikan menurut elemen salah satu baris (kolom)

$$|A| = a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + \cdots + a_{1n}C_{1n}$$

dihitung menurut elemen baris pertama

a_{ij}: unsur/elemen matriks pada baris ke-*i* dan kolom ke-*j*

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij} = \text{kofaktor dari } a_{ij}$$

M_{ij} = Minor dari a_{ij} = Determinan dari sub matriks yang dihapus baris ke-*i* dan kolom ke-*j*

21

Determinan dapat digunakan untuk :

•Untuk menilai apakah suatu matriks bujursangkar adalah matriks singular (determinannya = 0) ataukah matriks Non-singular (det. ≠ 0)

•Untuk menghitung Invers matriks Non-singular dengan cara Adjoint.

•Untuk menyelesaikan persamaan Linier Simultan (PLS) dengan aturan CRAMER .

22

Determinan-lanjutan 3

◇ Cara Chi'os: dihitung berdasarkan determinan 2 x 2 sebanyak $(n-1)^2$

Contoh dan penjelasan dapat dilihat di buku teks

Sifat-sifat Determinan

◇ det(*A*) = 0, jika:

a. semua elemen baris/kolom = 0

b. dua baris/kolom sama nilai dan susunannya

c. satu baris(kolom) adalah kelipatan baris (kolom) yang lainnya.

Sifat-sifat lainnya baca dari buku Teks

23

Invers Matriks

Jika terdapat matriks non Singular A_{nxn} dan B_{nxn} sedemikian hingga

$$AB = BA = I_n$$

Maka matriks *B* disebut invers dari *A dan sebaliknya A adalah invers B*

Seringkali ditulis $B = A^{-1} \rightarrow A = B^{-1}$

◇ Untuk matriks 2x2:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{d}{ad-bc} & \frac{-b}{ad-bc} \\ \frac{-c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{bmatrix}$$

24

Invers Matriks-lanjutan

- matriks dimensi 3x3 atau lebih, gunakan cara Adjoint :

$$A^{-1} = \frac{adj(A)}{\det(A)}$$

dengan:

$adj(A) = C^T$,

dimana C^T = transpose dari matriks kofaktor A (matriks yang berisi semua kofaktor-kofaktor dari matriks A)

25

CARA MENDAPATKAN INVERS MATRIKS A

Jika $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 5 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, dapatkan A^{-1}

1). Hitung dulu $|A| = -5$ (cara SARRUS)

2). Matriks kofaktor C

$$C = \begin{bmatrix} |M_{11}| & -|M_{12}| & |M_{13}| \\ -|M_{21}| & |M_{22}| & -|M_{23}| \\ |M_{31}| & -|M_{32}| & |M_{33}| \end{bmatrix}$$

26

$$C = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -8 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ -10 & 17 & -1 \end{bmatrix}$$

27

3). Invers A $= A^{-1} = \frac{1}{|A|}$ x Adjoint A

Adjoint A = transpose C

$$\text{Jadi } A^{-1} = \frac{1}{-5} \text{ x } \begin{bmatrix} 5 & 0 & -10 \\ -8 & -2 & 17 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1{,}6 & 0{,}4 & -3{,}4 \\ 0{,}2 & -0{,}2 & 0{,}2 \end{bmatrix}$$

28

Sifat – sifat Invers

- Diketahui A dan C ; A adalah non singular dan kalau A B = C,

$A^{-1} A B = A^{-1} C$

$B = A^{-1} C$

Diketahui P dan R ; R adalah Non singular dan kalau : D R = P,

$D R R^{-1} = P R^{-1}$

$D = P R^{-1}$

29

Sifat – sifat Invers

Jika A dan B adalah matriks non singular, maka

1. $(A^{-1})^{-1} = A$
2. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
3. $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$
4. Jika $|A| = p$, maka $|A^{-1}| = 1/p$

30

Dari operasi matriks : A x B = C,
diketahui B dan C dan B adalah
matriks non singular, yakni :

$$B = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \text{ dan } C = \begin{bmatrix} 27 & 20 \\ 15 & 10 \\ 36 & 28 \end{bmatrix}$$

maka dapatkan matriks A

Jawab : Hitung dulu Invers B =

$$B^{-1} = \frac{1}{10 - 12} . \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1{,}5 & -2{,}5 \end{bmatrix}$$

$$\text{maka } A = C \text{ x } B^{-1} = \begin{bmatrix} 27 & 20 \\ 15 & 10 \\ 36 & 28 \end{bmatrix} \text{x} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1{,}5 & -2{,}5 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} -27 + 30 & 54 - 50 \\ -15 + 15 & 30 - 25 \\ -36 + 42 & 72 - 70 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 5 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}$$