Mathématique financière

Sous le thème

Les annuités variables : cas

Des annuités en suite géométrique

Présenter par :

- AHLAM TAYEBI

- MERYEM BENJELOUN

- WIAM SABAI

1EM1

encadré par :

M. KH BENMLIH

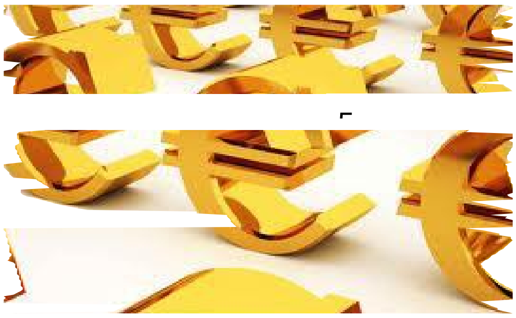
Année universitaire : 2013/2014

Remerciement

Au moment ou nous préparons notre mini projet, nous aimerions remercier des personnes qui nous aidés ; depuis le début de travail,

nous avons l'honneur de remercie l'encadrent MONSIEUR K.BENMLIH, alors nous voudrions également remercie MONSIEUR Y.CHETIOUI qui nous encourage.

SOMMAIRE :



I. Généralités sur les annuités :

a. A quoi servent les annuités :

En général, un prêt n'est pas remboursé en une seule fois. Les remboursements sont étalés sur plusieurs périodes.

De même, un capital est rarement constitué en un seul versement, mais plus souvent en une succession de versement. Il faut alors savoir calculer les intérêts dans ces cas :

- On appelle suite d'annuité une succession de versement, pour créer ou rembourser un capital.
- Caractéristiques d'une suite d'annuités :
  - La périodicité
  - Le nombre de versement
  - Le montant de chaque versement
  - La date de chaque versement

b. Les annuités variables :

Les annuités variables sont des montants différents de chaque année. La part de l'amortissement de l'emprunt reste constante mais la part relative aux intérêts décroit selon un échéancier déterminé à l'avance. Par exemple : la valeur acquise d'une suite d'annuités de montant variable, le calcul de la valeur acquise par les divers versements s'effectue en additionnant les valeurs acquises de chacun d'eux, ce qui donne les formules de calcul suivantes :

- $V_n \ f = \sum_{i=0}^{n} a_i x (1+t)^{(n-i)}$ annuités de fin de période.

- $V_0^f = \sum_{i=0}^{n} a_i x (1+t)^{(n-i-1)}$ annuités de début de période.

Avec : $a_i = montant\ de\ versement.$

$n = nombre\ de\ versement.$

$t\ taux\ d\ 'intérêt\ périodique\ (identique\ pour\ toutes\ les\ périodes)$

Exemples :

Explique la différence entre les annuités constantes et les annuités variables.

- Vous placez 200 dh tous les mois sur un compte-épargne : la suite d'annuité est constante de terme 200 dh .
- Vous placez 100 dh le 1^{er} janvier, 200 dh le 1^{er} février et 300 dh le 1^{er} mars : la suite d'annuité est variable. Le premier terme est 100 dh , le deuxième terme est 200 dh et le dernier terme est 300 dh.

✓ Bref :

- Si les termes sont égaux, c'est-à-dire si tous les versements sont de même montant la suite d'annuités est dite constante.
- Une suite d'annuités qui n'est pas constante est dite variable.

c. Annuité en suite arithmétique :

Une suite arithmétique de terme générale u_n est définie par la donnée du premier terme u_0 . La raison r, et le numéro n du terme considéré.

Nous obtenus ainsi l’expression :

$$u_n = u_0 + n.r$$

Considérons désormais la somme de plusieurs termes d’une suite arithmétique.

Soit S la somme de n terme définie par :

$$S = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots\ldots + u_{n-1} + u_n$$

Soit : $u_0 + (u_0 + r) + (u_0 + 2r) + \ldots\ldots + (u_0 + (n-1)r) + (u_0 + nr)$

Du fait de la commutativité, cette somme peut être exprimée en sens inverse :

$$S = u_0 ¿ + nr) + (u_0 + (n-1)r) + \ldots\ldots + (u_0 + 2r) + (u_0 + r) + u_0$$

En additionnant les deux équations, nous obtenus donc :

$$2S = 2(n+1).u_0 + (n+1).r$$

Soit : $$S = (n+1)u_0 + \frac{(n+1).r}{2}$$

C’est ainsi qu’en connaissant uniquement le premier terme d’une suite ainsi que le nombre de termes et la raison de la suite nous pouvons connaitre la somme.

d. Annuité en suite géométrique :

Nous définissons une suite géométrique de terme général u_n par la donnée de son premier terme u_0 de la raison q et du numéro du nième terme n.

Nous obtenus donc l'expression : $u_n = u_0 + q^n$

Là aussi nous pouvons déterminer la somme d'une suite de n termes d'une suite géométrique. Tout d'abord, considérons l'expression suivante appelée somme télescopique :

$$(1 - x)(1 + x + x^2 + x^3 + \ldots.. + x^{n-1} + x^n)$$

Soit : $1 - x^{n-1}$

Ainsi : $(1 - x)(1 + x + x^2 + x^3 + \ldots\ldots + x^{n-1} + x^n) = 1 - x^{n-1}$

Nous pouvons ainsi formaliser le tout par :

$$(1 - x) \sum_{k=0}^{n} x^k = 1 - x^{n-1}$$

Et isoler la somme des puissances croissantes de X :

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n-1}}{1-x} = \frac{1-x^{n-1}}{1-x} \times \frac{-1}{-1} = \frac{x^{n-1}-1}{x-1}$$

Ainsi en appliquant cette formule aux suites géométriques, où $u_n = u_0 \times q^n$

Soit S la somme des termes d'une suite géométrique de puissances croissantes :

$$S = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots\ldots + u_{n-1} + u_n$$

Soit après remplacement par leurs formules explicites :

$$S = u_0 + u_0 \times q + \begin{matrix}0\\ ¿\\ u_{¿}\end{matrix} \times q^2 + \ldots\ldots + u_0 \times q^n$$

Suit après simplification:

$$u_0 \sum_{k=0}^{n} q^n = u_0 \frac{q^{n+1}-1}{q-1}$$

e. Rappel : formule

Bref :

- Annuité en suite arithmétique :

$$S = (x+1) \quad u_0 \frac{(x+1)r}{2}$$

- Annuité en suite géométrique :

$$S = u_0 \sum_{k=0}^{n} q^k = u_0 \frac{q^{n+1}-1}{q-1}$$

II. Valeur acquise par des annuités en suite géométrique :

a. Cas : début de période

Encore appelée valeur future représente le montant capitalisé période après période des versements effectués. En ce qui concerne d'abord les annuités constantes, les formules de calcul sont :

$a \times (1+t) \times \frac{(1+t)^n - 1}{t}$ (annuités de début de période).

Avec : a = montant du versement périodique constant.

n = nombre de période de versement

t = taux d'intérêt périodique pouvant être proportionnel (pour les brèmes de crédit, sauf ceux liés à l'épargne logement) où actuariel (pour les placements).

Donc : pour les annuités de montant variable, le calcul de la valeur acquise par les divers versements s'effectue en additionnant les valeurs acquises de chacun d'eux, ce qui donne les formules de calcul suivantes :

$$v_n^d = \sum_{i=1}^{n} a_i \times (1+t)^{(n-i+1)}$$ (annuités de début de période).

- Si le dernier versement est place au début de la dernière période.

Avec : a_i =montant du i^e versement.

n ¿ nombre de versements.

t =taux d'intérêt périodique (identique pour toutes les périodes).

b. Cas : fin de période :

$$v_n^f = \sum_{i=1}^{n} a_i \times (1+t)^{(n-i)}$$ (annuités de fin de période).

- Si le dernier versement est place à la fin de la dernière période.

III. Valeur actuelle par des annuités en suite géométrique :

a. Cas : début de période :

Encore appelée valeur présente ; représente le montant en valeur « d'Aujourd'hui » des divers versements périodiques effectués dans le futur pour les annuités de montant variable, le calcul de la valeur actuelle des divers versements s'effectue en additionnant les valeurs actuelles de chacun d'eux. Ce qui donne les formules de calcul suivantes :

- Si le 1^{er} versement est placé au début de la première période :

$$v_0^d = \sum_{i=1}^{n} a_i \times (1+t)^{-i+1}$$

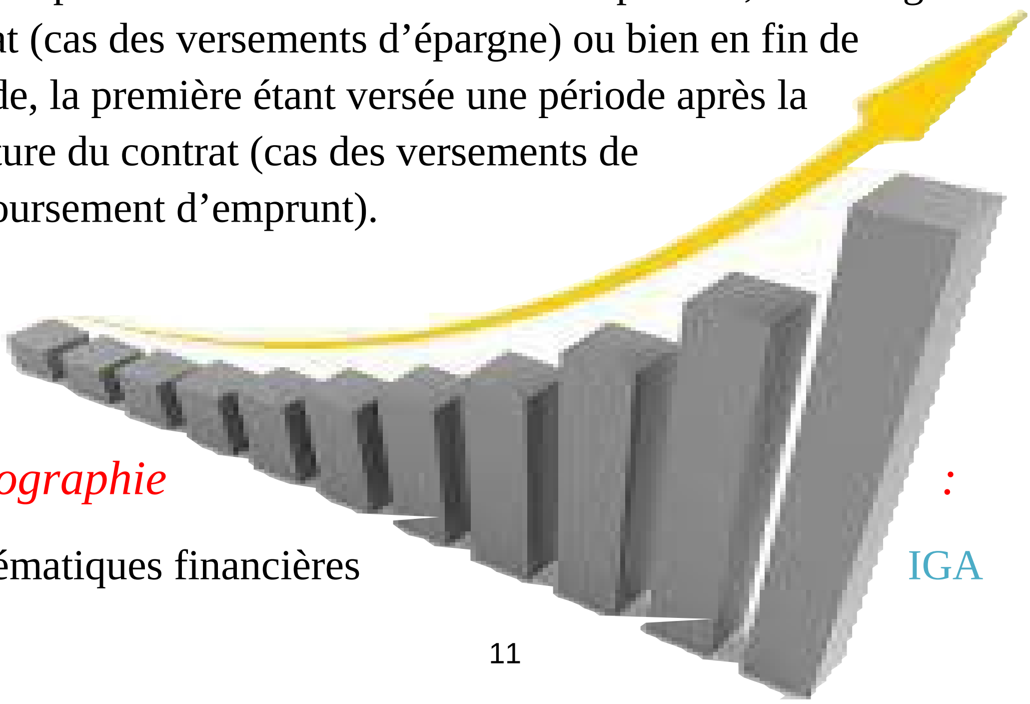
$b.$ Cas : fin de période :

- Si le 1^{er} versement est placé à la fin de la première période :

$$v_0^f = \sum_{i=1}^{n} a_i \times (1+t)^{-i}$$

IV. Conclusion :

A travers la définition des annuités qui correspondants à des sommes (constantes ou variables) versés à intervalles réguliers (par périodicité fixe à l'année, au semestre, au trimestre, au mois..) par conséquent les annuités peuvent être versées en début de période, dès la signature du contrat (cas des versements d'épargne) ou bien en fin de période, la première étant versée une période après la signature du contrat (cas des versements de remboursement d'emprunt).



V Bibliographie :

Mathématiques financières IGA

Webographie : Microsoft encarta : les annuités variables en suite géométriques.

www.franceinfo.fr/.../le-contrat-d'assurance-vie-a-**annuites-variables**-...

optimindwinter.com/.../optimind_dossier_technique_n_8-**variable_an**

www.latribune.fr/.../assurance-

vie-un-nouveau-contrat-a-**annuites**-**var**.