

MATHÉMATIQUES

TOUT LE COURS EN FICHES

Licence 1 • CAPES

MATHÉMATIQUES

TOUT LE COURS EN FICHES

Licence 1 • CAPES

— Claire David

Maître de conférences à l'UPMC (université Pierre-et-Marie-Curie), Paris

— Sami Mustapha

Professeur à l'UPMC (université Pierre-et-Marie-Curie), Paris

DUNOD

Tout le catalogue sur
www.dunod.com



Illustration de couverture : © delabo - Fotolia.com

Le pictogramme qui figure ci-contre mérite une explication. Son objet est d'alerter le lecteur sur la menace que représente pour l'avenir de l'écrit, particulièrement dans le domaine de l'édition technique et universitaire, le développement massif du photocopillage.

Le Code de la propriété intellectuelle du 1^{er} juillet 1992 interdit en effet expressément la photocopie à usage collectif sans autorisation des ayants droit. Or, cette pratique s'est généralisée dans les établissements

d'enseignement supérieur, provoquant une baisse brutale des achats de livres et de revues, au point que la possibilité même pour

les auteurs de créer des œuvres nouvelles et de les faire éditer correctement est aujourd'hui menacée.

Nous rappelons donc que toute reproduction, partielle ou totale, de la présente publication est interdite sans autorisation de l'auteur, de son éditeur ou du Centre français d'exploitation du

droit de copie (CFC, 20, rue des Grands-Augustins, 75006 Paris).



© Dunod, 2014

5 rue Laromiguière, 75005 Paris

www.dunod.com

ISBN 978-2-10-059992-9

Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes de l'article L. 122-5, 2° et 3° a), d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (art. L. 122-4).

Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

Table des matières

Avant-propos	X
Comment utiliser cet ouvrage ?	XII

Partie 1 Calculus

Nombres réels	1
Fiche 1 Les ensembles de nombres	2
Fiche 2 Intervalles, voisinages, bornes	6
Limites	8
Fiche 3 Limite d'une fonction en un point	8
Fiche 4 Limite d'une fonction en $+\infty$ ou $-\infty$	12
Fiche 5 Propriétés des limites – Opérations sur les limites	14
Fiche 6 Notations de Landau	16
Fonctions numériques	18
Fiche 7 Domaine de définition d'une fonction, graphe	18
Focus <i>La construction de l'ensemble des réels : les coupures de Dedekind</i>	21
Fiche 8 Comment définir une fonction ?	22
Fiche 9 Majorations et minorations	24
Fiche 10 Fonctions monotones	26
Fiche 11 Parité, imparité	28
Fiche 12 Symétries	30
Fiche 13 Fonctions périodiques	32
Fonctions usuelles	33
Fiche 14 Fonctions puissances entières	33
Fiche 15 Fonctions polynômes et fonction valeur absolue	35
Focus <i>John Napier et les tables logarithmiques</i>	38
Fiche 16 La fonction logarithme népérien	39
Fiche 17 La fonction exponentielle	41
Fiche 18 Fonctions puissances « non entières »	43
Focus <i>Leibniz et la fonction exponentielle</i>	44
Fiche 19 Fonctions circulaires	45
Fiche 20 Fonctions hyperboliques	47
Focus <i>L'origine de la trigonométrie</i>	49
Continuité	51
Fiche 21 Continuité d'une fonction en un point	51
Fiche 22 Fonctions continues sur un intervalle	55
Dérivabilité	58
Fiche 23 Dérivabilité en un point	58

Fiche 24	Dérivabilité sur un intervalle	61
Fiche 25	Dérivées successives	65
Fiche 26	Théorème des accroissements finis et théorème de Rolle	67
Fiche 27	Formule de Taylor-Lagrange	71
Fonctions réciproques		72
Fiche 28	Fonctions réciproques	72
Fiche 29	Les fonctions trigonométriques inverses	75
Fiche 30	Les fonctions hyperboliques inverses	79
Développements limités		81
Fiche 31	Développements limités	81
Fiche 32	Formule de Taylor-Young	84
Fiche 33	Développements limités usuels	89
Fiche 34	Opérations algébriques et composition des développements limités	92
Développements asymptotiques		95
Fiche 35	Développements asymptotiques	95
Convexité		96
Fiche 36	Convexité	96
Équations différentielles linéaires du 1^{er} ordre		100
Fiche 37	Équations différentielles linéaires du 1 ^{er} ordre homogènes	100
Fiche 38	Équations différentielles linéaires du 1 ^{er} ordre avec second membre	103
Fonctions de plusieurs variables		111
Fiche 39	Topologie	111
Fiche 40	Fonctions de plusieurs variables	117
Fiche 41	Les systèmes de coordonnées usuelles	119
Fiche 42	Limites, continuité et dérivation	121
Exercices		129
Corrigés		133

Partie 2 Algèbre

Le plan complexe – Les nombres complexes		161
Focus	<i>Les nombres complexes</i>	162
Fiche 43	Le corps des nombres complexes	164
Fiche 44	Représentation géométrique des nombres complexes	167
Fiche 45	Inversion des nombres complexes	170
Fiche 46	Propriétés fondamentales des nombres complexes	172
Fiche 47	Complément : les polynômes de Tchebychev	174
Fiche 48	Racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité, racines $n^{\text{ièmes}}$ complexes	177
Fiche 49	Factorisation des polynômes dans le corps \mathbb{C}	180
Fiche 50	Fractions rationnelles et décomposition en éléments simples	185

Fiche 51	Transformations du plan : translations, homothéties	196
Fiche 52	Transformations du plan : rotations	198
Fiche 53	Transformations du plan : similitudes	200
Focus	<i>Transformations complexes, fractales, et représentations de la nature</i>	204
Matrices		206
Fiche 54	Matrices de taille 2×2	206
Fiche 55	Déterminant de matrices de taille 2×2	208
Fiche 56	Matrices de taille 3×3	210
Fiche 57	Déterminant de matrices de taille 3×3	213
Fiche 58	Matrices de taille $m \times n$	216
Fiche 59	Opérations sur les matrices	218
Fiche 60	Matrices remarquables	220
Fiche 61	Introduction aux déterminants de matrices de taille $n \times n$	224
Fiche 62	Inversion des matrices carrées	226
Focus	<i>L'origine des matrices</i>	230
Focus	<i>Les matrices et leurs applications</i>	232
Fiche 63	Systèmes linéaires	234
Fiche 64	Vecteurs	238
Fiche 65	Barycentres	242
Fiche 66	Droites, plans	246
Fiche 67	Produit scalaire	249
Focus	<i>Produit scalaire, espaces fonctionnels et calcul numérique</i>	253
Fiche 68	Produit vectoriel	254
Fiche 69	Aires et volumes	256
Focus	<i>Géométrie euclidienne – ou non ? Encore des matrices !</i>	258
Transformations linéaires du plan		260
Fiche 70	Bases et transformations linéaires du plan	260
Fiche 71	Changement de base en dimension 2, et déterminant d'une application linéaire	264
Fiche 72	Conjugaison – Matrices semblables de taille 2×2	266
Fiche 73	Opérateurs orthogonaux en dimension 2	268
Fiche 74	Rotations vectorielles du plan	270
Transformations linéaires de l'espace		273
Fiche 75	Bases de l'espace \mathbb{R}^3	273
Fiche 76	Transformations linéaires de l'espace \mathbb{R}^3	274
Fiche 77	Changement de base en dimension 3	278
Fiche 78	Conjugaison – Matrices semblables de taille 3×3	280
Fiche 79	Opérateurs orthogonaux de l'espace \mathbb{R}^3	282
Fiche 80	Rotations vectorielles de l'espace \mathbb{R}^3	284
L'espace \mathbb{R}^n		286
Fiche 81	Vecteurs en dimension $n, n \geq 2$	286

Fiche 82	Espace engendré par une famille de vecteurs – Sous-espaces vectoriels de \mathbb{R}^n	288
Fiche 83	Transformations linéaires de l'espace \mathbb{R}^n	291
Fiche 84	Changement de base	295
Fiche 85	Conjugaison – Matrices semblables de taille $n \times n$	297
Fiche 86	Réduction des matrices carrées	299
Focus	<i>Groupe spécial orthogonal et cristallographie</i>	303
Focus	<i>Diagonalisation – La toupie de Lagrange (et de Michèle Audin)</i>	305
Espaces vectoriels		306
Fiche 87	Les espaces vectoriels	306
Fiche 88	Sous-espaces vectoriels	310
Fiche 89	Somme de sous-espaces vectoriels	312
Fiche 90	Projecteurs, symétries	313
Exercices		315
Corrigés		323

Partie 3 Analyse

Suites		367
Fiche 91	Qu'est-ce qu'une suite ? L'espace des suites et opérations sur les suites	368
Fiche 92	Les différents types de suites	371
Focus	<i>Suites arithmético-géométriques et finance</i>	376
Fiche 93	Étude d'une suite	377
Fiche 94	Majorants, minorants d'une suite réelle – Croissance et décroissance	380
Fiche 95	Techniques d'étude des suites réelles	382
Fiche 96	Convergence	384
Fiche 97	Convergence des suites monotones	387
Fiche 98	Opérations sur les limites de suites	389
Fiche 99	Convergence des suites homographiques réelles	392
Fiche 100	Suites extraites	397
Fiche 101	Suites de Cauchy	399
Fiche 102	Comparaison des suites réelles	401
Focus	<i>Suites et systèmes dynamiques – L'attracteur de Hénon</i>	405
Intégrales		406
Fiche 103	Qu'est-ce qu'une intégrale ?	406
Fiche 104	Intégrale d'une fonction en escaliers	408
Fiche 105	Intégrale d'une fonction continue par morceaux	413
Fiche 106	Calcul intégral	419
Fiche 107	Primitives de fractions rationnelles	425
Fiche 108	Calcul approché d'intégrales	427

Focus	<i>Intégrale de Riemann vs intégrale de Lebesgue</i>	434
Exercices		436
Corrigés		442
Annexes	Formulaire de trigonométrie	470
	Dérivées usuelles	472
	Dérivées des fonctions réciproques usuelles	473
	Primitives usuelles	474
	Limites usuelles des fonctions puissances	475
	Rang d'une matrice	476
Bibliographie		477
Index		479

Avant-propos

Cet ouvrage est destiné aux étudiants du cycle L1 des filières universitaires scientifiques, ou des classes préparatoires. Il se base sur nos cours donnés en première année de Licence à l'UPMC (université Pierre et Marie Curie).

Face aux demandes croissantes de nos étudiants, qui recherchaient un ouvrage de référence complet mais abordable, ainsi que des exercices d'application corrigés, nous nous sommes lancés dans la conception de ce livre qui, nous l'espérons, sera un outil utile pour les générations d'étudiants à venir.

Cet ouvrage est donc le fruit d'un compromis : dans ce volume condensé, nous avons essayé de donner suffisamment d'éléments recouvrant l'ensemble des mathématiques de première année. Cet ouvrage correspond aussi à l'arrivée des nouveaux programmes universitaires et des classes préparatoires. Pour mieux assurer la jonction avec les mathématiques enseignées au lycée, nous avons opté, pour la première partie d'analyse, relative à l'étude des fonctions, à une présentation de type « Calculus », inspirée de l'esprit des « textbooks » anglo-saxons, qui permet d'aborder plus facilement le reste du programme, plus « classique », sur les suites et le calcul intégral. Pour l'algèbre, la présentation reprend celle de l'ouvrage *Calcul Vectoriel* (Collection *Sciences Sup*), en allant un peu plus loin : \mathbb{R}^n , réduction, espaces vectoriels.

Malgré tout le soin apporté à la rédaction, nous demandons l'indulgence du lecteur pour les éventuelles imperfections qui pourraient subsister ; qu'il n'hésite pas à nous les signaler.

Claire David
Claire.David@upmc.fr

Sami Mustapha
sam@math.jussieu.fr

Remerciements

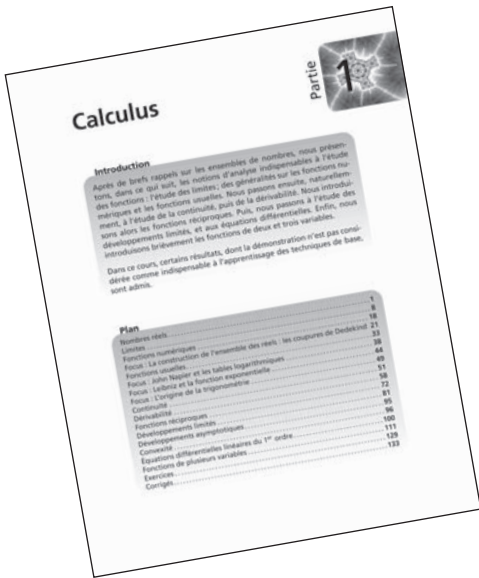
Nous remercions vivement toutes les personnes dont la relecture et les remarques ont contribué à améliorer la version initiale du manuscrit :

les membres du comité de lecture, pour leur relecture extrêmement minutieuse et leurs remarques très pertinentes ;

- Sylvie Benzoni, Université Claude Bernard Lyon 1, Institut Camille Jordan.
- Laurent Di Menza, Université de Reims, Laboratoire de Mathématiques de Reims (LMR).
- Jean-Pierre Escofier, Université de Rennes, Institut Mathématique de Rennes.
- Sandrine Gachet, Professeur de Mathématiques, Lycée Gustave Eiffel, Dijon.
- Chloé Mullaert, Professeur de Mathématiques, Lycée Paul Valéry, Paris.
- Laure Quivy, ENS Cachan et Université Paris XIII, Centre de Mathématiques et leurs applications (CMLA).
- Lamia Attouche, étudiante à l'UPMC, Paris.
- Alexis Prel, étudiant à l'UPMC, Paris.

mais aussi Albert Cohen, Ramona Anton, Sylvie Delabrière, Patrick Polo, Adnène Benabdesselem, Matthieu Solnon, Eugénie Poulon, Daniel Hoehener, Julien Piera Vest.

Comment utiliser cet ouvrage ?



Un découpage en trois grandes parties : Calculus, Algèbre, Analyse

110 fiches de cours
Les notions essentielles du cours

fiche 1 **Les ensembles de nombres**

Un ensemble E est une collection d'objets, qui constituent les « éléments » de l'ensemble. Le nombre d'éléments de l'ensemble peut être fini, ou infini.

1. Notation

Pour décrire l'ensemble, on utilise des accolades, à l'intérieur desquelles on écrit les éléments de l'ensemble.

Suivant les cas, on peut, simplement, placer, à l'intérieur des accolades, la liste des éléments de l'ensemble ; ainsi, dans le cas d'un ensemble E avec un nombre fini d'éléments e_1, \dots, e_n , où n est un nombre entier positif, on écrit :

$$E = \{e_1, \dots, e_n\}$$

ou bien, dans le cas d'un ensemble d'éléments vérifiant une propriété donnée \mathcal{P} , on écrit

$$E = \left\{ x \mid \mathcal{P}(x) \right\} \text{ ou encore } \{x, \mathcal{P}(x)\}$$

ce qui désigne ainsi l'ensemble des éléments x tels que la propriété \mathcal{P} soit vérifiée pour x .

Exemples

- $\{1, 2, 3, 4\}$ est un ensemble. Ses éléments sont les nombres 1, 2, 3 et 4.
- $\{0, 4, 5, 6, \dots\}$ est un ensemble. Ses éléments sont les nombres entiers supérieurs ou égaux à 3.
- $\{x \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \mid x \text{ est impair}\} = \{1, 3, 5\}$.

> Les entiers naturels
L'ensemble des entiers naturels, c'est-à-dire des entiers positifs ou nuls, est noté \mathbb{N} :

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$$

> Les nombres pairs
L'ensemble des entiers naturels pairs est noté $2\mathbb{N}$:

$$2\mathbb{N} = \{0, 2, 4, 6, \dots\} = \{2n, n \in \mathbb{N}\}$$

> $k\mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}$
Étant donné un entier naturel non nul k , $k\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des entiers naturels multiples de k :

$$k\mathbb{N} = \{kn, n \in \mathbb{N}\}$$

> Les entiers relatifs
L'ensemble des entiers relatifs, c'est-à-dire des entiers qui sont soit positifs ou nuls, soit négatifs ou nuls, est noté \mathbb{Z} :

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$$

> $\alpha\mathbb{Z}$, $\alpha \in \mathbb{R}$
Étant donné un réel non nul α , $\alpha\mathbb{Z}$ désigne l'ensemble des réels de la forme αk , où k est un entier :

$$\alpha\mathbb{Z} = \{\alpha k, k \in \mathbb{Z}\}$$

Exemple
 $2\pi\mathbb{Z} = \{2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

> Les nombres rationnels
L'ensemble des nombres rationnels, c'est-à-dire de la forme $\frac{p}{q}$, où p et q sont deux entiers relatifs, avec $q \neq 0$, est noté \mathbb{Q} .

> Les nombres réels
L'ensemble des nombres réels est noté \mathbb{R} .

> $\overline{\mathbb{R}}$
L'ensemble $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ est noté $\overline{\mathbb{R}}$ (c'est ce que l'on appelle la « droite réelle achevée », ou encore, l'adhérence de \mathbb{R}).

> La notation « * »
Lorsque l'on écrit l'un des ensembles précédents avec l'exposant « * », cela signifie que l'on exclut 0 ; ainsi, \mathbb{N}^* désigne l'ensemble des entiers naturels non nuls ; \mathbb{Z}^* désigne l'ensemble des entiers relatifs non nuls ; etc.

> La notation « - »
Lorsque l'on écrit l'un des ensembles précédents avec l'exposant « - », cela signifie que l'on ne considère que les nombres strictement positifs de cet ensemble ; ainsi, \mathbb{Z}^+ (qui est aussi égal à \mathbb{N}^*), désigne l'ensemble des entiers positifs ou nuls ; \mathbb{R}^+ désigne l'ensemble des réels positifs ou nuls ; etc.

> La notation « > »
Lorsque l'on écrit l'un des ensembles précédents avec l'exposant « > », cela signifie que l'on ne considère que les nombres strictement positifs de cet ensemble ; ainsi, $\mathbb{Z}^>$ (qui est aussi égal à \mathbb{N}^*), désigne l'ensemble des entiers strictement positifs ; $\mathbb{R}^>$ désigne l'ensemble des réels strictement positifs ; etc.

> La notation « < »
Lorsque l'on écrit l'un des ensembles précédents avec l'exposant « < », cela signifie que l'on ne considère que les nombres strictement négatifs de cet ensemble ; ainsi, $\mathbb{Z}^<$ (qui est aussi égal à $-\mathbb{N}^*$), désigne l'ensemble des entiers strictement négatifs ; $\mathbb{R}^<$ désigne l'ensemble des réels strictement négatifs ; etc.

Propriété
On a : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

Un repérage facile

Les fiches sont regroupées par thème

De très nombreux exemples

Des exercices corrigés pour s'entraîner

Exercices

Pour s'entraîner (solutions p. 123)

Continuité

1. On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

Étudier la continuité de f .

2. On considère la fonction φ définie par :

$$\varphi(x) = \begin{cases} \frac{1}{\ln|x|} & \text{si } x \in]0, -1, [\\ 0 & \text{si } x = 1 \text{ ou } x = -1 \text{ ou } x = 0 \end{cases}$$

Étudier la continuité de φ .

3. On considère la fonction θ définie par :

$$\theta(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2-1} & \text{si } x \in \mathbb{R}, [1, -1, [\\ 0 & \text{si } x = 1 \text{ ou } x = -1 \end{cases}$$

Étudier la continuité de θ .

4. On considère la fonction ψ définie par :

$$\psi(x) = \begin{cases} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Étudier la continuité de ψ .

5. On considère la fonction ϕ définie par :

$$\phi(x) = E(x) + |x - E(x)|^n$$

Étudier la continuité de ϕ .

6. Soient $A \in]0, 1[$, et f une fonction continue sur l'intervalle $]A, +\infty[$, telle que $f(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$. Soit F la fonction définie sur $]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ par :

$$F(x) = f\left(\frac{1}{x} + 1\right)$$

Étudier la continuité et la dérivabilité de f .

6.a) Montrer que F est bien définie sur $]0, 1[$.

6.b) Étudier la continuité de F sur $]0, 1[$.

6.c) Montrer que F est prolongeable par continuité sur $]0, 1[$.

Une équation fonctionnelle

7. Déterminer les fonctions f , définies sur \mathbb{R} , à valeurs dans \mathbb{R} , continues en 0 et en 1 telles que, pour tout réel x :

$$f(x^2) = f(x)$$

Dérivabilité

8. Donner la dérivée de la fonction θ :

$$x \in \mathbb{R} \Rightarrow \theta(x) = \cos(x)$$

9. On considère la fonction h_1 définie, pour tout réel x , par $h_1(x) = e^{-x}$. Montrer que h_1 est de classe C^∞ sur \mathbb{R} , et décrire, pour tout entier naturel non nul n , l'expression de sa dérivée $h_1^{(n)}$.

10. On considère la fonction h_2 définie, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, par :

$$h_2(x) = \frac{1}{1-x}$$

Montrer que h_2 est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, et déterminer, pour tout entier naturel non nul n , l'expression de sa dérivée $h_2^{(n)}$.

11. On considère la fonction f définie, pour tout réel x , par :

$$f(x) = \begin{cases} 1 - e^{-x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Étudier la continuité et la dérivabilité de f .

129

Focus La construction de l'ensemble des réels : les coupures de Dedekind

On parle souvent, dans la littérature mathématique, de la « construction de l'ensemble des réels ». Qu'en est-il ? À l'origine, seuls les nombres entiers et rationnels étaient connus des mathématiciens, même si des irrationnels comme $\sqrt{2}$, longueur de la diagonale d'un carré de côté 1, sont vite apparus comme des nombres « à part », difficilement quantifiables.

La coupure par un rationnel

La démonstration formelle – ou construction – d'un ensemble de nombres contenant à la fois les entiers, les rationnels, et les non-rationnels, fut mise en œuvre pour la première fois au XIX^e siècle par le mathématicien allemand Richard Dedekind (1818-1901).

Elle est basée sur l'axiome de la borne supérieure, selon lequel toute partie non vide et majorée de l'ensemble \mathbb{R} des réels possède une borne supérieure.

Richard Dedekind est, tout simplement, parti du fait que tout nombre rationnel $\frac{p}{q}$ ($p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0$), découpe \mathbb{Q} , ensemble des nombres rationnels, en deux parties, constituées respectivement par les rationnels strictement plus petits que $\frac{p}{q}$ et par les rationnels supérieurs ou égaux à $\frac{p}{q}$.

La coupure par un irrationnel

En étendant ce principe à une « coupure » comme $\sqrt{2}$, ou à un nombre « non rationnel », l'ensemble des rationnels en deux parties, constituées respectivement par les rationnels strictement plus petits que $\sqrt{2}$ et par les rationnels supérieurs ou égaux à $\sqrt{2}$.

Figure 7.A - Une « coupure ».

Ainsi, $\sqrt{2}$ apparaît comme la « coupure » entre ces deux ensembles, c'est-à-dire le nombre « non rationnel » qui se trouve « entre les deux ».

Une autre construction assez populaire de l'ensemble des nombres réels peut être obtenue par l'intermédiaire de suites de Cauchy.

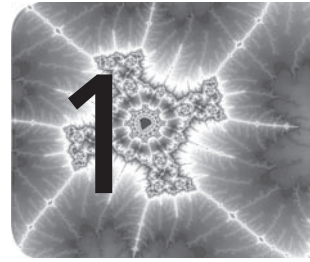
121

Des focus pour découvrir des applications des mathématiques ou approfondir un point du cours

Calculus

Partie

1



Introduction

Après de brefs rappels sur les ensembles de nombres, nous présentons, dans ce qui suit, les notions d'analyse indispensables à l'étude des fonctions : l'étude des limites ; des généralités sur les fonctions numériques et les fonctions usuelles. Nous passons ensuite, naturellement, à l'étude de la continuité, puis de la dérivabilité. Nous introduisons alors les fonctions réciproques. Puis, nous passons à l'étude des développements limités, et aux équations différentielles. Enfin, nous introduisons brièvement les fonctions de deux et trois variables.

Dans ce cours, certains résultats, dont la démonstration n'est pas considérée comme indispensable à l'apprentissage des techniques de base, sont admis.

Plan

Nombres réels	1
Limites	8
Fonctions numériques	18
<i>Focus : La construction de l'ensemble des réels : les coupures de Dedekind</i>	21
Fonctions usuelles	33
<i>Focus : John Napier et les tables logarithmiques</i>	38
<i>Focus : Leibniz et la fonction exponentielle</i>	44
<i>Focus : L'origine de la trigonométrie</i>	49
Continuité	51
Dérivabilité	58
Fonctions réciproques	72
Développements limités	81
Développements asymptotiques	95
Convexité	96
Équations différentielles linéaires du 1 ^{er} ordre	100
Fonctions de plusieurs variables	111
Exercices	129
Corrigés	133

Les ensembles de nombres

Un **ensemble** E est une collection d'objets, qui constituent les « éléments » de l'ensemble. Le nombre d'éléments de l'ensemble peut être fini, ou infini.

1. Notation

Pour décrire l'ensemble, on utilise des accolades, à l'intérieur desquelles on écrit les éléments de l'ensemble.

Suivant les cas, on peut, simplement, placer, à l'intérieur des accolades, la liste des éléments de l'ensemble ; ainsi, dans le cas d'un ensemble E avec un nombre fini d'éléments e_1, \dots, e_n , où n est un nombre entier positif, on écrit :

$$E = \{e_1, \dots, e_n\}$$

ou bien, dans le cas d'un ensemble d'éléments vérifiant une propriété donnée \mathcal{P} , on écrit

$$E = \left\{ x \mid \mathcal{P}(x) \right\} \quad \text{ou encore} \quad \{x, \mathcal{P}(x)\} \quad \text{ou encore} \quad \{x; \mathcal{P}(x)\}$$

ce qui désigne ainsi l'ensemble des éléments x tels que la propriété \mathcal{P} soit vérifiée pour x .

Exemples

1. $\{1, 2, 3, 4\}$ est un ensemble. Ses éléments sont les nombres 1, 2, 3 et 4.
2. $\{3, 4, 5, 6, \dots\}$ est un ensemble. Ses éléments sont les nombres entiers supérieurs ou égaux à 3.
3. $\left\{ x \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \mid x \text{ est impair} \right\} = \{1, 3, 5\}$.

► Les entiers naturels

L'ensemble des entiers naturels, c'est-à-dire des entiers positifs ou nuls, est noté \mathbb{N} :

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$$

► Les nombres pairs

L'ensemble des entiers naturels pairs est noté $2\mathbb{N}$:

$$2\mathbb{N} = \{0, 2, 4, 6, \dots\} = \{2n, n \in \mathbb{N}\}$$

► $k\mathbb{N}, k \in \mathbb{N}$

Étant donné un entier naturel k , $k\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des entiers naturels multiples de k :

$$k\mathbb{N} = \{kn, n \in \mathbb{N}\}$$

► Les entiers relatifs

L'ensemble des entiers relatifs, c'est-à-dire des entiers qui sont soit positifs ou nuls, ou négatifs ou nuls, est noté \mathbb{Z} :

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$$

► $\alpha\mathbb{Z}, \alpha \in \mathbb{R}$

Étant donné un réel α , $\alpha\mathbb{Z}$ désigne l'ensemble des réels de la forme αk , où k est un entier :

$$\alpha\mathbb{Z} = \{\alpha k, k \in \mathbb{Z}\}$$

Exemple

$$2\pi\mathbb{Z} = \{2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}.$$

► Les nombres rationnels

L'ensemble des nombres rationnels, c'est-à-dire de la forme $\frac{p}{q}$, où p et q sont deux entiers relatifs, avec $q \neq 0$, est noté \mathbb{Q} .

► Les nombres réels

L'ensemble des nombres réels est noté \mathbb{R} .

► $\overline{\mathbb{R}}$

L'ensemble $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ est noté $\overline{\mathbb{R}}$ (c'est ce que l'on appelle la « droite réelle achevée », ou encore, l'adhérence de \mathbb{R})

► La notation « \star »

Lorsque l'on écrit l'un des ensembles précédents avec l'exposant « \star », cela signifie que l'on exclut 0 ; ainsi, \mathbb{N}^\star désigne l'ensemble des entiers naturels non nuls ; \mathbb{Z}^\star désigne l'ensemble des entiers relatifs non nuls ; etc.

► La notation « $+$ »

Lorsque l'on écrit l'un des ensembles précédents avec l'exposant « $+$ », cela signifie que l'on ne considère que les nombres positifs de cet ensemble ; ainsi, \mathbb{Z}^+ (qui est aussi égal à \mathbb{N}), désigne l'ensemble des entiers positifs ou nuls ; \mathbb{R}^+ désigne l'ensemble des réels positifs ou nuls ; etc.

► La notation « $-$ »

Lorsque l'on écrit l'un des ensembles précédents avec l'exposant « $-$ », cela signifie que l'on ne considère que les nombres négatifs de cet ensemble ; ainsi, \mathbb{Z}^- (qui est aussi égal à $-\mathbb{N}$), désigne l'ensemble des entiers négatifs ou nuls ; \mathbb{R}^- désigne l'ensemble des réels positifs ou nuls ; etc.

► La notation « \dagger »

Lorsque l'on écrit l'un des ensembles précédents avec l'exposant « \dagger », cela signifie que l'on ne considère que les nombres strictement positifs de cet ensemble ; ainsi, \mathbb{Z}_\dagger^\star (qui est aussi égal à \mathbb{N}^\star), désigne l'ensemble des entiers strictement positifs ; \mathbb{R}_\dagger^\star désigne l'ensemble des réels strictement positifs ; etc.

► La notation « \ddagger »

Lorsque l'on écrit l'un des ensembles précédents avec l'exposant « \ddagger », cela signifie que l'on ne considère que les nombres strictement négatifs de cet ensemble ; ainsi, $\mathbb{Z}_\ddagger^\star$ (qui est aussi égal à $-\mathbb{N}^\star$), désigne l'ensemble des entiers strictement négatifs ; $\mathbb{R}_\ddagger^\star$ désigne l'ensemble des réels strictement négatifs ; etc.

Propriété

On a :
$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

où le symbole \subset signifie « inclus dans ».

2. Les ensembles

► Ensemble vide

Un ensemble ne contenant aucun élément est appelé **ensemble vide**, et noté \emptyset .

Exemple

$\{n \in 3\mathbb{N}, n \text{ pair}\}$ ne contient aucun nombre : c'est l'ensemble vide.

► Intersection d'ensembles

Étant donnés deux ensembles E_1 et E_2 , leur **intersection**, notée $E_1 \cap E_2$, est l'ensemble des éléments qui appartiennent à la fois à E_1 et à E_2 :

$$E_1 \cap E_2 = \{x, x \in E_1 \text{ et } x \in E_2\}$$

► Union d'ensembles

Étant donnés deux ensembles E_1 et E_2 , leur **union**, notée $E_1 \cup E_2$, est l'ensemble des éléments qui appartiennent à E_1 , ou à E_2 :

$$E_1 \cup E_2 = \{x, x \in E_1 \text{ ou } x \in E_2\}$$

► Différence de deux ensembles

Étant donnés deux ensembles E_1 et E_2 , leur **différence**, notée $E_1 \setminus E_2$, est l'ensemble E_1 privé de E_2 :

$$E_1 \setminus E_2 = \{x, x \in E_1 \text{ et } x \notin E_2\}$$

Exemples

1. $\mathbb{R} \setminus \{1, 2\}$ est l'ensemble des réels différents de 1 et de 2.
2. $\mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$ est l'ensemble des réels qui ne sont pas multiples de π .

► Complémentaire d'un ensemble

Étant donnés deux ensembles E_1 et E_2 tels que E_2 soit inclus dans E_1 (que l'on écrit $E_2 \subset E_1$), l'ensemble $E_1 \setminus E_2$ est le complémentaire de E_2 dans E_1 , noté $\complement_{E_1} E_2$:

$$\complement_{E_1} E_2 = E_1 \setminus E_2$$

Exemple

$$\complement_{\mathbb{R}} \{0\} = \mathbb{R}^*$$

► Produit cartésien de deux ensembles

Étant donnés deux ensembles E_1 et E_2 , leur **produit cartésien**, noté $E_1 \times E_2$, est l'ensemble des couples d'éléments de la forme (x_1, x_2) , où le premier élément x_1 appartient à E_1 , et le second, x_2 , à E_2 :

$$E_1 \times E_2 = \{(x_1, x_2), x_1 \in E_1 \text{ et } x_2 \in E_2\}$$

Exemples

1. $\mathbb{R}^2 = \{(x_1, x_2), x_1 \in \mathbb{R} \text{ et } x_2 \in \mathbb{R}\}$ est l'ensemble des couples de réels.
2. $\mathbb{N}^2 = \{(n_1, n_2), n_1 \in \mathbb{N} \text{ et } n_2 \in \mathbb{N}\}$ est l'ensemble des couples d'entiers naturels.

► Produit cartésien de trois ensembles

Étant donnés trois ensembles E_1 , E_2 et E_3 , leur **produit cartésien**, noté $E_1 \times E_2 \times E_3$, est l'ensemble des triplets d'éléments de la forme (x_1, x_2, x_3) , où le premier élément x_1 appartient à E_1 , le second, x_2 , à E_2 , et le troisième, x_3 , à E_3 :

$$E_1 \times E_2 \times E_3 = \{(x_1, x_2, x_3), x_1 \in E_1, x_2 \in E_2 \text{ et } x_3 \in E_3\}$$

► Produit cartésien de n ensembles, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$

Étant donné un entier naturel $n \geq 2$, et n ensembles E_1, \dots, E_n , leur **produit cartésien**, noté $E_1 \times \dots \times E_n$, est l'ensemble des n -uplets d'éléments de la forme (x_1, \dots, x_n) , où $x_1 \in E_1, \dots, x_n \in E_n$:

$$E_1 \times \dots \times E_n = \{(x_1, \dots, x_n), x_1 \in E_1, \dots, x_n \in E_n\}$$

► Application

Étant donnés deux ensembles E et F , une **application** φ de E dans F associe, à chaque élément de E , un et un seul élément de F . E est l'ensemble de départ, F , celui d'arrivée.

Pour tout élément x de E , l'unique élément de F ainsi mis en relation avec x par l'application φ est noté $\varphi(x)$, et appelé image de x . x est un antécédent de $\varphi(x)$. On écrit :

$$\begin{aligned} \varphi : E &\rightarrow F \\ x &\mapsto \varphi(x) \end{aligned}$$

Exemples

1.

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{N} &\rightarrow \mathbb{N} \\ x &\mapsto x \end{aligned}$$

est une application de \mathbb{N} dans \mathbb{N} , appelée application identité de \mathbb{N} .

2.

$$\begin{aligned} \psi : \mathbb{Q} &\rightarrow \mathbb{Q} \\ x &\mapsto 2x \end{aligned}$$

est une application de \mathbb{Q} dans \mathbb{Q} .

► Fonction

Étant donnés deux ensembles de nombres E et F , une **fonction** f de E dans F associe, à chaque élément x de E , au plus un élément de F appelé alors image de x par f (ce qui signifie donc que tous les éléments de E n'ont pas nécessairement une image par f). E est l'ensemble de départ, F , celui d'arrivée. L'ensemble des éléments de E possédant une image par f est appelé domaine de définition de f , et noté \mathcal{D}_f . Elle permet de définir une application de \mathcal{D}_f dans F .

Exemple

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{1}{1-x} \end{aligned}$$

est une fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , dont le domaine de définition est $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. Elle permet de définir une application de $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ dans \mathbb{R} .

Intervalles, voisinages, bornes

L'ensemble des nombres réels est habituellement représenté sous la forme d'une droite graduée, appelée **droite des réels**, où il faut pouvoir se repérer. À cet effet, on introduit les notions d'intervalle et de voisinage d'un point.



Figure 2.1 – La droite des réels.

1. Intervalles

► Intervalle fermé et borné (ou segment)

On appelle intervalle fermé et borné (ou segment) tout ensemble de la forme

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R}, a \leq x \leq b\} \quad , \quad (a, b) \in \mathbb{R}^2, a \leq b$$

► Intervalle ouvert

On appelle intervalle ouvert tout ensemble de la forme

$$]a, b[= \{x \in \mathbb{R}, a < x < b\} \quad , \quad (a, b) \in \mathbb{R}^2, a < b$$

ou $] -\infty, b[= \{x \in \mathbb{R}, x < b\}$, $b \in \mathbb{R}$

ou encore $]a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R}, a < x\}$, $a \in \mathbb{R}$

où $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ est l'ensemble des couples de réels.

► Intervalle ouvert et borné

On appelle intervalle ouvert et borné tout ensemble de la forme

$$]a, b[= \{x \in \mathbb{R}, a < x < b\} \quad , \quad (a, b) \in \mathbb{R}^2, a < b$$

► Intervalle semi-ouvert et borné

On appelle intervalle semi-ouvert et borné tout ensemble de la forme

$$[a, b[= \{x \in \mathbb{R}, a \leq x < b\} \quad , \quad (a, b) \in \mathbb{R}^2, a < b$$

ou $]a, b] = \{x \in \mathbb{R}, a < x \leq b\}$, $(a, b) \in \mathbb{R}^2, a < b$

► Intervalle fermé

Par convention, tout ensemble de la forme

$$[a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R}, x \geq a\} \quad , \quad a \in \mathbb{R}$$

ou $] -\infty, b] = \{x \in \mathbb{R}, x \leq b\}$, $b \in \mathbb{R}$

est considéré comme étant un intervalle fermé.

► Ensemble vide

L'ensemble, noté \emptyset , qui ne contient aucun nombre réel, est aussi un intervalle, appelé ensemble vide.

► Singleton

On appelle singleton un ensemble ne contenant qu'un seul élément, et qui est donc de la forme $\{a\}$, où a est un nombre réel.

► Intervalle

On appelle intervalle de \mathbb{R} l'un des ensembles définis ci-dessus, ou bien \mathbb{R} tout entier.



Un singleton est un intervalle fermé (le singleton $\{a\}$ est donc assimilé à l'intervalle fermé $[a, a]$).

► Adhérence d'un intervalle

Soit I un intervalle de \mathbb{R} . Son adhérence \bar{I} est l'ensemble tel que :

- si I est un segment, alors $\bar{I} = I$;
- si I est de la forme $]a, b[$ ou $]a, b]$ ou $[a, b[$, $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, alors $\bar{I} = [a, b]$;
- si I est de la forme $]a, +\infty[$ ou $[a, +\infty[$, $a \in \mathbb{R}$, alors $\bar{I} = [a, +\infty[\cup \{+\infty\}$;
- si I est de la forme $] - \infty, a[$ ou $] - \infty, a]$, $a \in \mathbb{R}$, alors $\bar{I} =] - \infty, a] \cup \{-\infty\}$;
- si I l'ensemble vide \emptyset , alors $\bar{I} = \emptyset$.

2. Voisinage

► Voisinage d'un point

On appelle voisinage d'un point a de \mathbb{R} un sous-ensemble de \mathbb{R} contenant un intervalle ouvert de la forme $]a - \eta, a + \eta[$, où η est un réel strictement positif et tel que $\eta < a$.



On peut étendre la notion de voisinage à $+\infty$ ou $-\infty$; ainsi, un voisinage de $+\infty$ est une partie de \mathbb{R} contenant un intervalle ouvert de la forme $]x_0, +\infty[$, où x_0 est un nombre réel quelconque. De même, un voisinage de $-\infty$ est une partie de \mathbb{R} contenant un intervalle ouvert de la forme $] - \infty, x_0[$, où x_0 est un nombre réel quelconque.

3. Les intervalles de \mathbb{R}

Dans ce qui suit, a, b, x_0 sont des réels tels que $a < b$. Le tableau suivant reprend les différents types d'intervalles de \mathbb{R} .

$[a, b]$	Segment
$]a, b[$	Intervalle ouvert et borné
$]a, b]$	Intervalle semi-ouvert et borné (ouvert à gauche, fermé à droite)
$[a, b[$	Intervalle semi-ouvert et borné (fermé à gauche, ouvert à droite)
\emptyset	Ensemble vide
$\{a\}$	Singleton
$]x_0, +\infty[$	Voisinage de $+\infty$
$] - \infty, x_0[$	Voisinage de $-\infty$
$] - \infty, +\infty[$	\mathbb{R} tout entier

Limite d'une fonction en un point

1. Limite finie d'une fonction en un point

Soient f une fonction définie sur un intervalle I de \mathbb{R} , à valeurs dans \mathbb{R} , a un point de I , et ℓ un réel.

On dit que f **admet pour limite (finie) ℓ en a** si, lorsque x devient très proche de a , $f(x)$ devient lui aussi très proche de ℓ , ce qui se traduit mathématiquement par le fait que pour tout réel ε strictement positif, il existe un réel η strictement positif tel que :

$$\forall x \in I, 0 < |x - a| < \eta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

On écrit : $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$ ou $\lim_a f = \ell$.

Exemple

On considère la fonction qui, à tout x de $] -1, 1[$, associe $\sqrt{1 - x^2}$. Alors :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{1 - x^2} = 0$$

► Notation 0^+

Soient f une fonction définie sur un intervalle I de \mathbb{R} , à valeurs dans \mathbb{R} , et a un point de I .

On dit que f **tend vers 0^+ en a** si, lorsque x devient très proche de a , $f(x)$ tend vers zéro, mais en restant positif, ce qui se traduit mathématiquement par le fait que pour tout réel ε strictement positif, il existe un réel η strictement positif tel que :

$$\forall x \in I, 0 < |x - a| < \eta \Rightarrow 0 \leq f(x) < \varepsilon$$

On écrit : $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0^+$ ou $\lim_a f = 0^+$.

Lorsque $+\infty$ est une borne de I , on dit que f **tend vers 0^+ en $+\infty$** si, lorsque x devient très grand, $f(x)$ tend vers zéro, mais en restant positif, ce qui se traduit mathématiquement par le fait que pour tout réel ε strictement positif, il existe un réel A strictement positif tel que :

$$\forall x \in I, x > A \Rightarrow 0 \leq f(x) < \varepsilon$$

On écrit : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0^+$ ou $\lim_{+\infty} f = 0^+$.

Lorsque $-\infty$ est une borne de I , on dit que f **tend vers 0^+ en $-\infty$** si, lorsque x devient très grand en valeur absolue, mais en restant à valeurs négatives, $f(x)$ tend vers zéro, mais en restant positif, ce qui se traduit mathématiquement par le fait que pour tout réel ε strictement positif, il existe un réel A strictement positif tel que :

$$\forall x \in I, x < -A \Rightarrow 0 \leq f(x) < \varepsilon$$

On écrit : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0^+$ ou $\lim_{-\infty} f = 0^+$.

Exemple

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0^+$$



On utilisera aussi la notation 0^+ pour indiquer que l'on tend vers zéro par valeurs supérieures.

► Notation 0^-

Soient f une fonction définie sur un intervalle I de \mathbb{R} , à valeurs dans \mathbb{R} , et a un point de I .

On dit que f **tend vers 0^- en a** si, lorsque x devient très proche de a , $f(x)$ tend vers zéro, mais en restant négatif, ce qui se traduit mathématiquement par le fait que pour tout réel ε strictement positif, il existe un réel η strictement positif tel que :

$$\forall x \in I, 0 < |x - a| < \eta \Rightarrow -\varepsilon < f(x) \leq 0$$

On écrit : $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0^-$ ou $\lim_a f = 0^-$.

Lorsque $+\infty$ est une borne de I , on dit que f **tend vers 0^- en $+\infty$** si, lorsque x devient très grand, $f(x)$ tend vers zéro, mais en restant négatif, ce qui se traduit mathématiquement par le fait que pour tout réel ε strictement positif, il existe un réel A strictement positif tel que :

$$\forall x \in I, x > A \Rightarrow -\varepsilon < f(x) \leq 0$$

On écrit : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0^-$ ou $\lim_{+\infty} f = 0^-$.

Lorsque $-\infty$ est une borne de I , on dit que f **tend vers 0^- en $-\infty$** si, lorsque x devient très grand en valeur absolue, mais en restant à valeurs négatives, $f(x)$ tend vers zéro, mais en restant négatif, ce qui se traduit mathématiquement par le fait que pour tout réel ε strictement positif, il existe un réel A strictement positif tel que :

$$\forall x \in I, x < -A \Rightarrow -\varepsilon < f(x) \leq 0$$

On écrit : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0^-$ ou $\lim_{-\infty} f = 0^-$.

Exemple

$$\lim_{x \rightarrow 0} -x^4 = 0^-$$



On utilisera aussi la notation 0^- pour indiquer que l'on tend vers zéro par valeurs inférieures.

Exemple

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} x^3 = 0^-$$

► Notation a^+ , $a \in \mathbb{R}$

a étant un réel, la notation a^+ signifie que l'on tend vers a par valeurs supérieures.

► Notation a^- , $a \in \mathbb{R}$

a étant un réel, la notation a^- signifie que l'on tend vers a par valeurs inférieures.

2. Limite infinie d'une fonction en un point

Soient f une fonction définie sur un intervalle I de \mathbb{R} , à valeurs dans \mathbb{R} , et a un point de I .

On dit que f **admet pour limite « plus l'infini (on note $+\infty$) » en a** si, lorsque x devient très proche de a , $f(x)$ devient très grand, ce qui se traduit mathématiquement par le fait que pour tout réel A strictement positif, il existe un réel η strictement positif tel que :

$$\forall x \in I, 0 < |x - a| < \eta \Rightarrow f(x) > A$$

On écrit alors : $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ ou $\lim_a f(x) = +\infty$.

On dit que f **admet pour limite « moins l'infini (on note $-\infty$) » en a** si, lorsque x devient très proche de a , $f(x)$ devient très grand en valeur absolue, mais en étant à valeurs négatives, ce qui se traduit mathématiquement par le fait que pour tout réel A strictement positif, il existe un réel η strictement positif tel que :

$$\forall x \in I, 0 < |x - a| < \eta \Rightarrow f(x) < -A$$

On écrit : $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$ ou $\lim_a f = -\infty$.

Exemple

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} = +\infty$$

3. Limite finie à droite (ou par valeurs supérieures)

Soient f une fonction définie sur un intervalle I de \mathbb{R} , à valeurs dans \mathbb{R} , a un point de I , et ℓ un réel.

On dit que f **admet pour limite (finie) ℓ à droite en a** (ou encore, par valeurs supérieures) si, lorsque x devient très proche de a , en restant plus grand que a , $f(x)$ devient lui aussi très proche de ℓ , ce qui se traduit mathématiquement par le fait que pour tout réel ε strictement positif, il existe un réel η strictement positif tel que :

$$\forall x \in I, 0 < x - a < \eta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

On écrit : $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \ell$ ou $\lim_{a^+} f = \ell$.

Exemple

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} (2 + \sqrt{x - 1}) = 2$$

4. Limite finie à gauche (ou par valeurs inférieures)

Soient f une fonction définie sur un intervalle I de \mathbb{R} , à valeurs dans \mathbb{R} , a un point de I , et ℓ un réel.

On dit que f **admet pour limite (finie) ℓ à gauche en a** (ou encore, par valeurs inférieures) si, lorsque x devient très proche de a , en restant plus petit que a , $f(x)$ devient lui aussi très proche de ℓ , ce qui se traduit mathématiquement par le fait que pour tout réel ε strictement positif, il existe un réel η strictement positif tel que :

$$\forall x \in I, -\eta < x - a < 0 \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

On écrit : $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \ell$ ou $\lim_{a^-} f = \ell$.

5. Limite infinie à droite (ou par valeurs supérieures)

Soient f une fonction définie sur un intervalle I de \mathbb{R} , à valeurs dans \mathbb{R} , et a un point de I .

On dit que f **admet pour limite $+\infty$ à droite en a** (ou encore, par valeurs supérieures) si, lorsque x devient très proche de a , en restant plus grand que a , $f(x)$ devient très grand, ce qui se traduit mathématiquement par le fait que pour tout réel A strictement positif, il existe un réel η strictement positif tel que :

$$\forall x \in I, 0 < x - a < \eta \Rightarrow f(x) > A$$

On écrit : $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$ ou $\lim_{a^+} f = +\infty$.

On dit que f **admet pour limite $-\infty$ à droite en a** (ou encore, par valeurs supérieures) si, lorsque x devient très proche de a , en restant plus grand que a , $f(x)$ devient très grand en valeur absolue, mais en étant à valeurs négatives, ce qui se traduit mathématiquement par le fait que pour tout réel A strictement positif, il existe un réel η strictement positif tel que :

$$\forall x \in I, 0 < x - a < \eta \Rightarrow f(x) < -A$$

On écrit : $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$ ou $\lim_{a^+} f = -\infty$.

6. Limite infinie à gauche (ou par valeurs inférieures)

Soient f une fonction définie sur un intervalle I de \mathbb{R} , à valeurs dans \mathbb{R} , et a un point de I .

On dit que f **admet pour limite $+\infty$ à gauche en a** (ou encore, par valeurs inférieures) si, lorsque x devient très proche de a , en restant plus grand que a , $f(x)$ devient très grand, ce qui se traduit mathématiquement par le fait que pour tout réel A strictement positif, il existe un réel η strictement positif tel que :

$$\forall x \in I, -\eta < x - a < 0 \Rightarrow f(x) > A$$

On écrit : $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty$ ou $\lim_{a^-} f = +\infty$.

On dit que f **admet pour limite $-\infty$ à gauche en a** (ou encore, par valeurs inférieures) si, lorsque x devient très proche de a , en restant plus grand que a , $f(x)$ devient très grand en valeur absolue, mais en étant à valeurs négatives, ce qui se traduit mathématiquement par le fait que pour tout réel A strictement positif, il existe un réel η strictement positif tel que :

$$\forall x \in I, \eta < x - a < 0 \Rightarrow f(x) < -A$$

On écrit : $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty$ ou $\lim_{a^-} f = -\infty$.

Limite d'une fonction en $+\infty$ ou $-\infty$

1. Limite finie d'une fonction en l'infini

Soient f une fonction définie sur un intervalle de la forme $[a, +\infty[$ de \mathbb{R} , $a \in \mathbb{R}$, et ℓ un réel.

On dit que f **admet pour limite (finie) ℓ en « plus l'infini (on note $+\infty$) »** si, lorsque x devient très grand, $f(x)$ devient très proche de ℓ , ce qui se traduit mathématiquement par le fait que pour tout réel ε strictement positif, il existe un réel « seuil », A , strictement positif tel que :

$$\forall x \in [a, +\infty[, x > A \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

On écrit alors : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$ ou $\lim_{+\infty} f = \ell$.

Si f est définie sur un intervalle de la forme $] -\infty, a]$ de \mathbb{R} , $a \in \mathbb{R}$, et si ℓ désigne encore un réel, on dit que f **admet pour limite (finie) ℓ en « moins l'infini (on note $-\infty$) »** si, lorsque x devient très grand en valeur absolue, mais en étant à valeurs négatives, $f(x)$ devient très proche de ℓ , ce qui se traduit mathématiquement par le fait que pour tout réel ε strictement positif, il existe un réel A , strictement positif tel que :

$$\forall x \in] -\infty, a], x < -A \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

On écrit alors : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \ell$ ou $\lim_{-\infty} f = \ell$.

Exemple

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} \right) = 1$$

2. Limite infinie d'une fonction en plus l'infini

Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $[a, +\infty[$ de \mathbb{R} , $a \in \mathbb{R}$.

On dit que f **admet pour limite $+\infty$ en « plus l'infini »** si, lorsque x devient très grand, $f(x)$ devient lui aussi très grand, ce qui se traduit mathématiquement par le fait que pour tout réel B strictement positif, il existe un réel « seuil », A , strictement positif tel que :

$$\forall x \in [a, +\infty[, x > A \Rightarrow f(x) > B$$

On écrit alors : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ ou $\lim_{+\infty} f = +\infty$.

On dit que f **admet pour limite $-\infty$ en « plus l'infini »** si, lorsque x devient très grand, $f(x)$ devient très grand en valeur absolue, mais en étant à valeurs négatives, ce qui se traduit mathématiquement par le fait que pour tout réel B strictement positif, il existe un réel « seuil », A , strictement positif tel que :

$$\forall x \in [a, +\infty[, x > A \Rightarrow f(x) < -B$$

On écrit alors : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ ou $\lim_{+\infty} f = -\infty$.

3. Limite infinie d'une fonction en moins l'infini

Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $] -\infty, a]$ de \mathbb{R} , $a \in \mathbb{R}$.

On dit que f **admet pour limite $+\infty$ en « moins l'infini »** si, lorsque x devient très grand en valeur absolue, mais en étant à valeurs négatives, $f(x)$ devient lui aussi très grand, ce qui se traduit mathématiquement par le fait que pour tout réel B strictement positif, il existe un réel A , strictement positif tel que :

$$\forall x \in] -\infty, a], x < -A \Rightarrow f(x) > B$$

On écrit alors : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ ou $\lim_{-\infty} f = +\infty$.

On dit que f **admet pour limite $-\infty$ en « moins l'infini »** si, lorsque x devient très grand en valeur absolue, en étant négatif, $f(x)$ devient aussi très grand en valeur absolue, en étant négatif, ce qui se traduit mathématiquement par le fait que pour tout réel B strictement positif, il existe un réel A , strictement positif tel que :

$$\forall x \in] -\infty, a], x < -A \Rightarrow f(x) < -B$$

On écrit alors : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ ou $\lim_{-\infty} f = -\infty$.

4. Forme indéterminée

On appelle **forme indéterminée** une limite que l'on ne sait pas déterminer ; cela correspond donc à des quantités que l'on ne peut pas quantifier **de façon exacte**, comme, par exemple, le quotient de $+\infty$ avec $+\infty$.

Propriétés des limites

Opérations sur les limites

1. Propriétés des limites

► Unicité de la limite

Soient f une fonction définie sur un intervalle I de \mathbb{R} , à valeurs dans \mathbb{R} , et a dans \bar{I} . Si f possède une limite en a , celle-ci est unique.

- Soient f une fonction définie sur un intervalle I de \mathbb{R} , à valeurs dans \mathbb{R} , a un point de I , et ℓ dans $\bar{\mathbb{R}}$.

Alors, si f est définie dans un voisinage à gauche de a , et dans un voisinage à droite de a :

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \ell$$

- Soient f une fonction définie sur un intervalle I de \mathbb{R} , à valeurs dans \mathbb{R} , et a dans \bar{I} ; m et M sont deux réels. Alors :

- si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) < M$, il existe un voisinage de a tel que, pour tout x de ce voisinage :

$$f(x) < M$$

- si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) > m$, il existe un voisinage de a tel que, pour tout x de ce voisinage :

$$f(x) > m$$

► Limites et comparaison

Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle I de \mathbb{R} , à valeurs dans \mathbb{R} , et a dans \bar{I} ; m et M sont deux réels. Alors, **si f et g ont des limites finies en a** , et s'il existe un voisinage \mathcal{V} de a tel que, pour tout x de ce voisinage,

$$f(x) \leq g(x)$$

on a : $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow a} g(x)$

► Limites et minoration

Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle I de \mathbb{R} , à valeurs dans \mathbb{R} , et a dans \bar{I} . S'il existe un voisinage de a tel que, pour tout x de ce voisinage,

$$f(x) \leq g(x)$$

et si, de plus, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = -\infty$

alors : $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$

► Limites et majoration

Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle I de \mathbb{R} , à valeurs dans \mathbb{R} , et a dans \bar{I} . S'il existe un voisinage de a tel que, pour tout x de ce voisinage, $f(x) \geq g(x)$, et si

$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = +\infty$, alors :

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$$

► Théorème des gendarmes

Soient f et g et h trois fonction définies sur un intervalle I de \mathbb{R} , à valeurs dans \mathbb{R} , et a dans \bar{I} ; ℓ est un réel. S'il existe un voisinage de a tel que, pour tout x de ce voisinage, $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$, et si, de plus, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \ell$, alors : $\lim_{x \rightarrow a} h(x) = \ell$

2. Opérations sur les limites

► Limite d'une somme de fonctions

Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle I de \mathbb{R} , à valeurs dans \mathbb{R} , et a dans \bar{I} ; ℓ et ℓ' sont deux réels finis. Alors :

$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$	$\lim_{x \rightarrow a} g(x)$	$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x))$
ℓ	ℓ'	$\ell + \ell'$
ℓ	$+\infty$	$+\infty$
ℓ	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$-\infty$	Forme indéterminée

► Limite d'un produit de fonctions

Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle I de \mathbb{R} , à valeurs dans \mathbb{R} , et a dans \bar{I} ; ℓ et ℓ' sont deux réels. Alors :

$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$	$\lim_{x \rightarrow a} g(x)$	$\lim_{x \rightarrow a} f(x) g(x)$
ℓ	ℓ'	$\ell \ell'$
ℓ , avec $\ell > 0$	$+\infty$	$+\infty$
ℓ , avec $\ell > 0$	$-\infty$	$-\infty$
ℓ , avec $\ell < 0$	$+\infty$	$-\infty$
ℓ , avec $\ell < 0$	$-\infty$	$+\infty$
0	$+\infty$	Forme indéterminée
0	$-\infty$	Forme indéterminée

► Limite d'un quotient de fonctions

Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle I de \mathbb{R} , à valeurs dans \mathbb{R} , et a dans \bar{I} ; ℓ et ℓ' sont deux réels. Alors :

$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$	$\lim_{x \rightarrow a} g(x)$	$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$
ℓ	ℓ' , avec $\ell' \neq 0$	$\frac{\ell}{\ell'}$
ℓ	$+\infty$	0
ℓ	$-\infty$	0
ℓ , avec $\ell > 0$	0^+	$+\infty$
ℓ , avec $\ell > 0$	0^-	$-\infty$
ℓ , avec $\ell < 0$	0^+	$-\infty$
ℓ , avec $\ell < 0$	0^-	$+\infty$
$+\infty$	$+\infty$	Forme indéterminée
$+\infty$	$-\infty$	Forme indéterminée
$-\infty$	$+\infty$	Forme indéterminée
$-\infty$	$-\infty$	Forme indéterminée

Notations de Landau

1. Négligeabilité

Définition

Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle I de \mathbb{R} , à valeurs dans \mathbb{R} , et a dans \bar{I} .

On suppose que g ne s'annule pas dans un voisinage de a . On dit que f est **négligeable** devant g au voisinage de a si

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

On note alors

$$f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} o(g(x)) \quad \text{ou} \quad f \underset{a}{=} o(g)$$

On dit que f est un « petit o » de g au voisinage de a .



La notation « petit o », de même que la notation « grand O », qui sera vue plus loin, est appelée **notation de Landau**, en hommage au mathématicien Edmund Landau¹. Leur paternité est visiblement assez controversée, et reviendrait, a priori, à Paul Bachmann².

Exemple

On considère les fonctions f et g définies, pour tout réel x , par

$$f(x) = x^2 \quad , \quad g(x) = x^4$$

Alors, comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$, on en déduit : $f \underset{+\infty}{=} o(g)$.



Pour traduire le fait qu'une fonction f possède une limite nulle en a , $a \in \mathbb{R}$, ou, éventuellement, $a = +\infty$ ou $a = -\infty$, on écrit aussi :

$$f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} o(1)$$

2. Domination

Définition

Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle I de \mathbb{R} , à valeurs dans \mathbb{R} , et a dans \bar{I} . On suppose que g ne s'annule pas dans un voisinage de a , sans, pour autant, que $g(a)$ soit non nul.

1. Edmund Georg Hermann Landau (1877-1938), mathématicien allemand, spécialiste de théorie des nombres.
2. Paul Bachmann (1837-1920), mathématicien allemand lui aussi, et également spécialiste de théorie des nombres.