MATHÉMATIQUES

TOUT LE COURS EN FICHES

Licence 1 • CAPES

MATHÉMATIQUES

TOUT LE COURS EN FICHES

Licence 1 • CAPES

Claire David
Maître de conférences à l'UPMC (université Pierre-et-Marie-Curie), Paris

Sami Mustapha
Professeur à l'UPMC (université Pierre-et-Marie-Curie), Paris

DUNOD

Tout le catalogue sur
www.dunod.com

ÉDITEUR DE SAVOIRS

Illustration de couverture : © delabo - Fotolia.com

5 rue Laromiguière, 75005 Paris
www.dunod.com

ISBN 978-2-10-059992-9

Table des matières

Partie 2
Algèbre

Partie 3
Analyse

Avant-propos

Cet ouvrage est destiné aux étudiants du cycle L1 des filières universitaires scientifiques, ou des classes préparatoires. Il se base sur nos cours donnés en première année de Licence à l'UPMC (université Pierre et Marie Curie).

Face aux demandes croissantes de nos étudiants, qui recherchaient un ouvrage de référence complet mais abordable, ainsi que des exercices d'application corrigés, nous nous sommes lancés dans la conception de ce livre qui, nous l'espérons, sera un outil utile pour les générations d'étudiants à venir.

Cet ouvrage est donc le fruit d'un compromis : dans ce volume condensé, nous avons essayé de donner suffisamment d'éléments recouvrant l'ensemble des mathématiques de première année. Cet ouvrage correspond aussi à l'arrivée des nouveaux programmes universitaires et des classes préparatoires. Pour mieux assurer la jonction avec les mathématiques enseignées au lycée, nous avons opté, pour la première partie d'analyse, relative à l'étude des fonctions, à une présentation de type « Calculus », inspirée de l'esprit des « textbooks » anglo-saxons, qui permet d'aborder plus facilement le reste du programme, plus « classique », sur les suites et le calcul intégral. Pour l'algèbre, la présentation reprend celle de l'ouvrage *Calcul Vectoriel* (Collection *Sciences Sup*), en allant un peu plus loin : $\mathbb{R}^n$, réduction, espaces vectoriels.

Malgré tout le soin apporté à la rédaction, nous demandons l'indulgence du lecteur pour les éventuelles imperfections qui pourraient subsister ; qu'il n'hésite pas à nous les signaler.

Claire David
Claire.David@upmc.fr

Sami Mustapha
sam@math.jussieu.fr

Remerciements

Nous remercions vivement toutes les personnes dont la relecture et les remarques ont contribué à améliorer la version initiale du manuscrit :

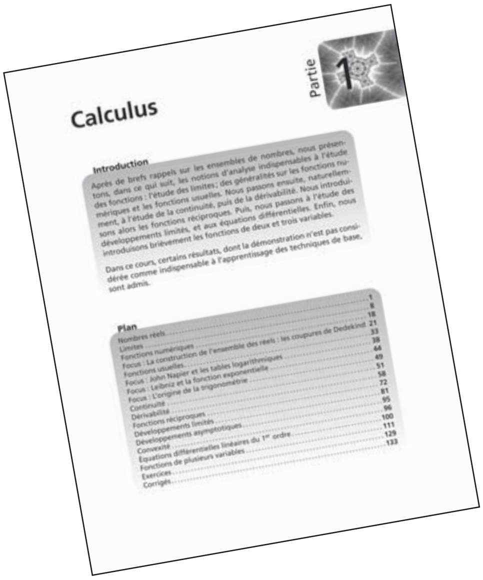
les membres du comité de lecture, pour leur relecture extrêmement minutieuse et leurs remarques très pertinentes ;

- Sylvie Benzoni, Université Claude Bernard Lyon 1, Institut Camille Jordan.
- Laurent Di Menza, Université de Reims, Laboratoire de Mathématiques de Reims (LMR).
- Jean-Pierre Escofier, Université de Rennes, Institut Mathématique de Rennes.
- Sandrine Gachet, Professeur de Mathématiques, Lycée Gustave Eiffel, Dijon.
- Chloé Mullaert, Professeur de Mathématiques, Lycée Paul Valéry, Paris.
- Laure Quivy, ENS Cachan et Université Paris XIII, Centre de Mathématiques et leurs applications (CMLA).
- Lamia Attouche, étudiante à l'UPMC, Paris.
- Alexis Prel, étudiant à l'UPMC, Paris.

mais aussi Albert Cohen, Ramona Anton, Sylvie Delabrière, Patrick Polo, Adnène Benabdesselem, Matthieu Solnon, Eugénie Poulon, Daniel Hoehener, Julien Piera Vest.

Comment utiliser cet ouvrage ?

Un découpage
en trois grandes parties :
Calculus, Algèbre, Analyse

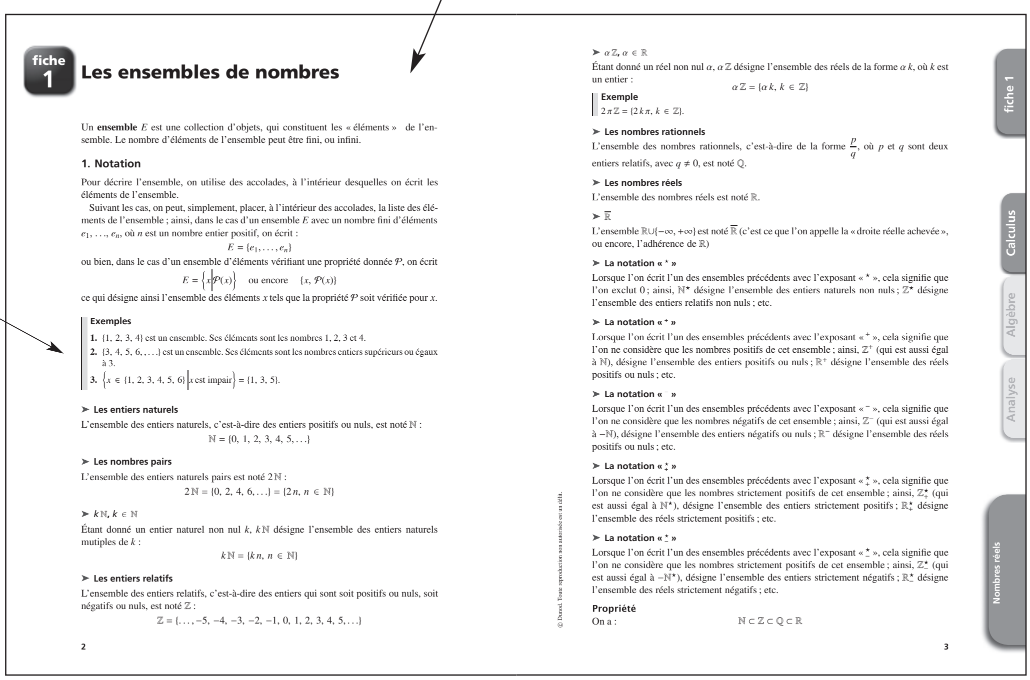


110 fiches de cours
Les notions essentielles du cours

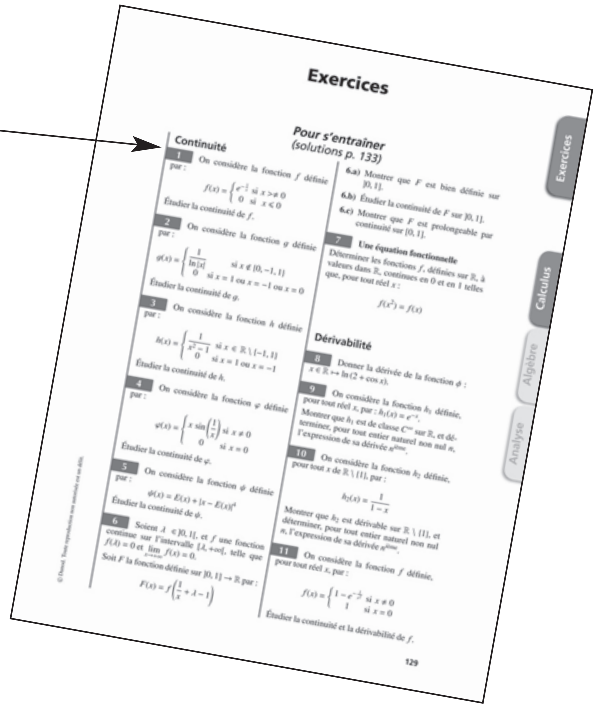
Un repérage facile

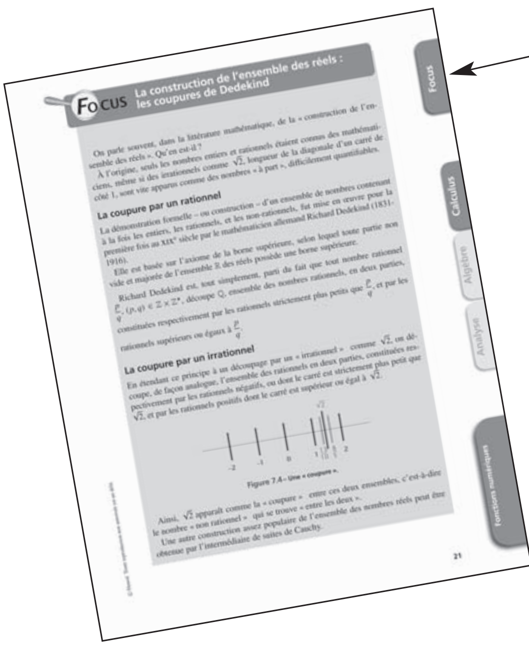
De très nombreux exemples

Les fiches sont regroupées par thème



Des exercices corrigés pour s'entraîner





Des focus pour découvrir des applications des mathématiques ou approfondir un point du cours

Partie 1

Calculus

Introduction

Après de brefs rappels sur les ensembles de nombres, nous présentons, dans ce qui suit, les notions d'analyse indispensables à l'étude des fonctions : l'étude des limites ; des généralités sur les fonctions numériques et les fonctions usuelles. Nous passons ensuite, naturellemment, à l'étude de la continuité, puis de la dérivabilité. Nous introduisons alors les fonctions réciproques. Puis, nous passons à l'étude des développements limités, et aux équations différentielles. Enfin, nous introduisons brièvement les fonctions de deux et trois variables.

Dans ce cours, certains résultats, dont la démonstration n'est pas considérée comme indispensable à l'apprentissage des techniques de base, sont admis.

Plan

fiche 1 Les ensembles de nombres

Un **ensemble** E est une collection d'objets, qui constituent les « éléments » de l'ensemble. Le nombre d'éléments de l'ensemble peut être fini, ou infini.

1. Notation

Pour décrire l'ensemble, on utilise des accolades, à l'intérieur desquelles on écrit les éléments de l'ensemble.

Suivant les cas, on peut, simplement, placer, à l'intérieur des accolades, la liste des éléments de l'ensemble ; ainsi, dans le cas d'un ensemble E avec un nombre fini d'éléments $e_1, \ldots, e_n$, où n est un nombre entier positif, on écrit :

$$E = \{e_1, \ldots, e_n\}$$

ou bien, dans le cas d'un ensemble d'éléments vérifiant une propriété donnée $\mathcal{P}$, on écrit

$$E = \left\{x \middle| \mathcal{P}(x)\right\} \quad \text{ou encore} \quad \{x, \mathcal{P}(x)\} \quad \text{ou encore} \quad \{x\,;\, \mathcal{P}(x)\}$$

ce qui désigne ainsi l'ensemble des éléments x tels que la propriété $\mathcal{P}$ soit vérifiée pour x.

Exemples

1. $\{1, 2, 3, 4\}$ est un ensemble. Ses éléments sont les nombres 1, 2, 3 et 4.
2. $\{3, 4, 5, 6, , \ldots\}$ est un ensemble. Ses éléments sont les nombres entiers supérieurs ou égaux à 3.
3. $\left\{x \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \middle| x \text{ est impair}\right\} = \{1, 3, 5\}$.

➤ Les entiers naturels

L'ensemble des entiers naturels, c'est-à-dire des entiers positifs ou nuls, est noté $\mathbb{N}$:

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$$

➤ Les nombres pairs

L'ensemble des entiers naturels pairs est noté $2\mathbb{N}$:

$$2\mathbb{N} = \{0, 2, 4, 6, \ldots\} = \{2n, n \in \mathbb{N}\}$$

➤ $k\mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}$

Étant donné un entier naturel k, $k\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des entiers naturels mutiples de k :

$$k\mathbb{N} = \{kn, n \in \mathbb{N}\}$$

➤ Les entiers relatifs

L'ensemble des entiers relatifs, c'est-à-dire des entiers qui sont soit positifs ou nuls, ou négatifs ou nuls, est noté $\mathbb{Z}$:

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$$

➤ $\alpha\mathbb{Z}$, $\alpha \in \mathbb{R}$

Étant donné un réel α, $\alpha\mathbb{Z}$ désigne l'ensemble des réels de la forme αk, où k est un entier :

$$\alpha\mathbb{Z} = \{\alpha k,\ k \in \mathbb{Z}\}$$

Exemple

$2\pi\mathbb{Z} = \{2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$.

➤ **Les nombres rationnels**

L'ensemble des nombres rationnels, c'est-à-dire de la forme $\dfrac{p}{q}$, où p et q sont deux entiers relatifs, avec $q \neq 0$, est noté $\mathbb{Q}$.

➤ **Les nombres réels**

L'ensemble des nombres réels est noté $\mathbb{R}$.

➤ $\overline{\mathbb{R}}$

L'ensemble $\mathbb{R}\cup\{-\infty, +\infty\}$ est noté $\overline{\mathbb{R}}$ (c'est ce que l'on appelle la « droite réelle achevée », ou encore, l'adhérence de $\mathbb{R}$)

➤ **La notation « * »**

Lorsque l'on écrit l'un des ensembles précédents avec l'exposant « * », cela signifie que l'on exclut 0 ; ainsi, $\mathbb{N}^\star$ désigne l'ensemble des entiers naturels non nuls ; $\mathbb{Z}^\star$ désigne l'ensemble des entiers relatifs non nuls ; etc.

➤ **La notation « $^+$ »**

Lorsque l'on écrit l'un des ensembles précédents avec l'exposant « $^+$ », cela signifie que l'on ne considère que les nombres positifs de cet ensemble ; ainsi, $\mathbb{Z}^+$ (qui est aussi égal à $\mathbb{N}$), désigne l'ensemble des entiers positifs ou nuls ; $\mathbb{R}^+$ désigne l'ensemble des réels positifs ou nuls ; etc.

➤ **La notation « $^-$ »**

Lorsque l'on écrit l'un des ensembles précédents avec l'exposant « $^-$ », cela signifie que l'on ne considère que les nombres négatifs de cet ensemble ; ainsi, $\mathbb{Z}^-$ (qui est aussi égal à $-\mathbb{N}$), désigne l'ensemble des entiers négatifs ou nuls ; $\mathbb{R}^-$ désigne l'ensemble des réels positifs ou nuls ; etc.

➤ **La notation « $^\star_+$ »**

Lorsque l'on écrit l'un des ensembles précédents avec l'exposant « $^\star_+$ », cela signifie que l'on ne considère que les nombres strictement positifs de cet ensemble ; ainsi, $\mathbb{Z}^\star_+$ (qui est aussi égal à $\mathbb{N}^\star$), désigne l'ensemble des entiers strictement positifs ; $\mathbb{R}^\star_+$ désigne l'ensemble des réels strictement positifs ; etc.

➤ **La notation « $^\star_-$ »**

Lorsque l'on écrit l'un des ensembles précédents avec l'exposant « $^\star_-$ », cela signifie que l'on ne considère que les nombres strictement positifs de cet ensemble ; ainsi, $\mathbb{Z}^\star_-$ (qui est aussi égal à $-\mathbb{N}^\star$), désigne l'ensemble des entiers strictement négatifs ; $\mathbb{R}^\star_-$ désigne l'ensemble des réels strictement négatifs ; etc.

Propriété

On a :

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

où le symbole $\subset$ signifie « inclus dans ».

2. Les ensembles

➤ Ensemble vide

Un ensemble ne contenant aucun élément est appelé **ensemble vide**, et noté $\emptyset$.

> **Exemple**
>
> $\{n \in 3\mathbb{N},\ n \text{ pair}\}$ ne contient aucun nombre : c'est l'ensemble vide.

➤ Intersection d'ensembles

Étant donnés deux ensembles E_1 et E_2, leur **intersection**, notée $E_1 \cap E_2$, est l'ensemble des éléments qui appartiennent à la fois à E_1 et à E_2 :

$$E_1 \cap E_2 = \{x,\ x \in E_1 \text{ et } x \in E_2\}$$

➤ Union d'ensembles

Étant donnés deux ensembles E_1 et E_2, leur **union**, notée $E_1 \cup E_2$, est l'ensemble des éléments qui appartiennent à E_1, ou à E_2 :

$$E_1 \cup E_2 = \{x,\ x \in E_1 \text{ ou } x \in E_2\}$$

➤ Différence de deux ensembles

Étant donnés deux ensembles E_1 et E_2, leur **différence**, notée $E_1 \setminus E_2$, est l'ensemble E_1 privé de E_2 :

$$E_1 \setminus E_2 = \{x,\ x \in E_1 \text{ et } x \notin E_2\}$$

> **Exemples**
>
> **1.** $\mathbb{R} \setminus \{1, 2\}$ est l'ensemble des réels différents de 1 et de 2.
>
> **2.** $\mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$ est l'ensemble des réels qui ne sont pas multiples de π.

➤ Complémentaire d'un ensemble

Étant donnés deux ensembles E_1 et E_2 tels que E_2 soit inclus dans E_1 (que l'on écrit $E_2 \subset E_1$), l'ensemble $E_1 \setminus E_2$ est le complémentaire de E_2 dans E_1, noté $\complement_{E_1} E_2$:

$$\complement_{E_1} E_2 = E_1 \setminus E_2$$

> **Exemple**
>
> $$\complement_{\mathbb{R}} \{0\} = \mathbb{R}^\star$$

➤ Produit cartésien de deux ensembles

Étant donnés deux ensembles E_1 et E_2, leur **produit cartésien**, noté $E_1 \times E_2$, est l'ensemble des couples d'éléments de la forme (x_1, x_2), où le premier élément x_1 appartient à E_1, et le second, x_2, à E_2 :

$$E_1 \times E_2 = \{(x_1, x_2),\ x_1 \in E_1 \text{ et } x_2 \in E_2\}$$

> **Exemples**
>
> **1.** $\mathbb{R}^2 = \{(x_1, x_2),\ x_1 \in \mathbb{R} \text{ et } x_2 \in \mathbb{R}\}$ est l'ensemble des couples de réels.
>
> **2.** $\mathbb{N}^2 = \{(n_1, n_2),\ n_1 \in \mathbb{N} \text{ et } n_2 \in \mathbb{N}\}$ est l'ensemble des couples d'entiers naturels.

➤ Produit cartésien de trois ensembles

Étant donnés trois ensembles E_1, E_2 et E_3, leur **produit cartésien**, noté $E_1 \times E_2 \times E_3$, est l'ensemble des triplets d'éléments de la forme (x_1, x_2, x_3), où le premier élément x_1 appartient à E_1, le second, x_2, à E_2, et le troisième, x_3, à E_3 :

$$E_1 \times E_2 \times E_3 = \{(x_1, x_2, x_3)\,,\ x_1 \in E_1,\ x_2 \in E_2 \text{ et } x_3 \in E_3\}$$

➤ Produit cartésien de n ensembles, $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$

Étant donnés un entier naturel $n \geqslant 2$, et n ensembles $E_1, \ldots, E_n$, leur **produit cartésien**, noté $E_1 \times \ldots \times E_n$, est l'ensemble des $n-$uplets d'éléments de la forme $(x_1, \ldots, x_n)$, où $x_1 \in E_1, \ldots, x_n \in E_n$:

$$E_1 \times \ldots \times E_n = \{(x_1, \ldots, x_n)\,,\ x_1 \in E_1,\ \ldots,\ x_n \in E_n\}$$

➤ Application

Étant donnés deux ensembles E et F, une **application** φ de E dans F associe, à chaque élément de E, un et un seul élément de F. E est l'ensemble de départ, F, celui d'arrivée.

Pour tout élément x de E, l'unique élément de F ainsi mis en relation avec x par l'application φ est noté $\varphi(x)$, et appelé image de x. x est un antécédent de $\varphi(x)$. On écrit :

$$\begin{aligned} \varphi : E &\to F \\ x &\mapsto \varphi(x) \end{aligned}$$

Exemples

1.

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{N} &\to \mathbb{N} \\ x &\mapsto x \end{aligned}$$

est une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$, appelée application identité de $\mathbb{N}$.

2.

$$\begin{aligned} \psi : \mathbb{Q} &\to \mathbb{Q} \\ x &\mapsto 2\,x \end{aligned}$$

est une application de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{Q}$.

➤ Fonction

Étant donnés deux ensembles de nombres E et F, une *fonction* f de E dans F associe, à chaque élément x de E, au plus un élément de F appelé alors image de x par f (ce qui signifie donc que tous les éléments de E n'ont pas nécessairement une image par f). E est l'ensemble de départ, F, celui d'arrivée. L'ensemble des éléments de E possédant une image par f est appelé domaine de définition de f, et noté $\mathcal{D}_f$. Elle permet de définir une application de $\mathcal{D}_f$ dans F.

Exemple

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{1}{1-x} \end{aligned}$$

est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, dont le domaine de définition est $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. Elle permet de définir une application de $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ dans $\mathbb{R}$.

fiche 2

Intervalles, voisinages, bornes

L’ensemble des nombres réels est habituellement représenté sous la forme d’une droite graduée, appelée **droite des réels**, où il faut pouvoir se repérer. À cet effet, on introduit les notions d’intervalle et de voisinage d’un point.

Figure 2.1 – La droite des réels.

1. Intervalles

➤ Intervalle fermé et borné (ou segment)

On appelle intervalle fermé et borné (ou segment) tout ensemble de la forme

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R},\ a \leqslant x \leqslant b\} \quad , \quad (a, b) \in \mathbb{R}^2,\ a \leqslant b$$

➤ Intervalle ouvert

On appelle intervalle ouvert tout ensemble de la forme

$$]a, b[= \{x \in \mathbb{R},\ a < x < b\} \quad , \quad (a, b) \in \mathbb{R}^2,\ a < b$$

ou $\quad]-\infty, b[= \{x \in \mathbb{R},\ x < b\} \quad , \quad b \in \mathbb{R}$

ou encore $\quad]a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R},\ a < x\} \quad , \quad a \in \mathbb{R}$

où $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ est l’ensemble des couples de réels.

➤ Intervalle ouvert et borné

On appelle intervalle ouvert et borné tout ensemble de la forme

$$]a, b[= \{x \in \mathbb{R},\ a < x < b\} \quad , \quad (a, b) \in \mathbb{R}^2,\ a < b$$

➤ Intervalle semi-ouvert et borné

On appelle intervalle semi-ouvert et borné tout ensemble de la forme

$$[a, b[= \{x \in \mathbb{R},\ a \leqslant x < b\} \quad , \quad (a, b) \in \mathbb{R}^2,\ a < b$$

ou $\quad]a, b] = \{x \in \mathbb{R},\ a < x \leqslant b\} \quad , \quad (a, b) \in \mathbb{R}^2,\ a < b$

➤ Intervalle fermé

Par convention, tout ensemble de la forme

$$[a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R},\ x \geqslant a\} \quad , \quad a \in \mathbb{R}$$

ou $\quad]-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R},\ x \leqslant b\} \quad , \quad b \in \mathbb{R}$

est considéré comme étant un intervalle fermé.

➤ Ensemble vide

L’ensemble, noté $\emptyset$, qui ne contient aucun nombre réel, est aussi un intervalle, appelé ensemble vide.

➤ Singleton

On appelle singleton un ensemble ne contenant qu’un seul élément, et qui est donc de la forme $\{a\}$, où a est un nombre réel.

➤ **Intervalle**

On appelle intervalle de $\mathbb{R}$ l'un des ensembles définis ci-dessus, ou bien $\mathbb{R}$ tout entier.

Un singleton est un intervalle fermé (le singleton $\{a\}$ est donc assimilé à l'intervalle fermé $[a, a]$).

➤ **Adhérence d'un intervalle**

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Son adhérence $\bar{I}$ est l'ensemble tel que :

- si I est un segment, alors $\bar{I} = I$;
- si I est de la forme $]a, b[$ ou $]a, b]$ ou $[a, b[$, $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, alors $\bar{I} = [a, b]$;
- si I est de la forme $]a, +\infty[$ ou $[a, +\infty[$, $a \in \mathbb{R}$, alors $\bar{I} = [a, +\infty[\cup\{+\infty\}$;
- si I est de la forme $]-\infty, a[$ ou $]-\infty, a]$, $a \in \mathbb{R}$, alors $\bar{I} =]-\infty, a] \cup \{-\infty\}$;
- si I l'ensemble vide $\emptyset$, alors $\bar{I} = \emptyset$.

2. Voisinage

➤ **Voisinage d'un point**

On appelle voisinage d'un point a de $\mathbb{R}$ un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ contenant un intervalle ouvert de la forme $]a - \eta, a + \eta[$, où η est un réel strictement positif et tel que $\eta < a$.

On peut étendre la notion de voisinage à $+\infty$ ou $-\infty$; ainsi, un voisinage de $+\infty$ est une partie de $\mathbb{R}$ contenant un intervalle ouvert de la forme $]x_0, +\infty[$, où x_0 est un nombre réel quelconque. De même, un voisinage de $-\infty$ est une partie de $\mathbb{R}$ contenant un intervalle ouvert de la forme $]-\infty, x_0[$, où x_0 est un nombre réel quelconque.

3. Les intervalles de $\mathbb{R}$

Dans ce qui suit, a, b, x_0 sont des réels tels que $a < b$. Le tableau suivant reprend les différents types d'intervalles de $\mathbb{R}$.

$[a, b]$	Segment
$]a, b[$	Intervalle ouvert et borné
$]a, b]$	Intervalle semi-ouvert et borné (ouvert à gauche, fermé à droite)
$[a, b[$	Intervalle semi-ouvert et borné (fermé à gauche, ouvert à droite)
$\emptyset$	Ensemble vide
$\{a\}$	Singleton
$]x_0, +\infty[$	Voisinage de $+\infty$
$[x_0, +\infty[$	
$]-\infty, x_0[$	Voisinage de $-\infty$
$]-\infty, x_0]$	
$]-\infty, +\infty[$	$\mathbb{R}$ tout entier

fiche 2

Calculus

Algèbre

Analyse

Nombres réels

fiche 3 Limite d'une fonction en un point

1. Limite finie d'une fonction en un point

Soient f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, a un point de I, et ℓ un réel.

On dit que f **admet pour limite (finie)** ℓ **en** a si, lorsque x devient très proche de a, $f(x)$ devient lui aussi très proche de ℓ, ce qui se traduit mathématiquement par le fait que pour tout réel ε strictement positif, il existe un réel η strictement positif tel que :

$$\forall\, x \in I,\ 0 < |x - a| < \eta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

On écrit : $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$ ou $\lim\limits_{a} f = \ell$.

> **Exemple**
>
> On considère la fonction qui, à tout x de $]-1, 1[$, associe $\sqrt{1 - x^2}$. Alors :
>
> $$\lim_{x \to 1} \sqrt{1 - x^2} = 0$$

➤ Notation 0^+

Soient f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, et a un point de I.

On dit que f **tend vers** 0^+ **en** a si, lorsque x devient très proche de a, $f(x)$ tend vers zéro, mais en restant positif, ce qui se traduit mathématiquement par le fait que pour tout réel ε strictement positif, il existe un réel η strictement positif tel que :

$$\forall\, x \in I,\ 0 < |x - a| < \eta \Rightarrow 0 \leqslant f(x) < \varepsilon$$

On écrit : $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0^+$ ou $\lim\limits_{a} f = 0^+$.

Lorsque $+\infty$ est une borne de I, on dit que f **tend vers** 0^+ **en** $+\infty$ si, lorsque x devient très grand, $f(x)$ tend vers zéro, mais en restant positif, ce qui se traduit mathématiquement par le fait que pour tout réel ε strictement positif, il existe un réel A strictement positif tel que :

$$\forall\, x \in I,\ x > A \Rightarrow 0 \leqslant f(x) < \varepsilon$$

On écrit : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0^+$ ou $\lim\limits_{+\infty} f = 0^+$.

Lorsque $-\infty$ est une borne de I, on dit que f **tend vers** 0^+ **en** $-\infty$ si, lorsque x devient très grand en valeur absolue, mais en restant à valeurs négatives, $f(x)$ tend vers zéro, mais en restant positif, ce qui se traduit mathématiquement par le fait que pour tout réel ε strictement positif, il existe un réel A strictement positif tel que :

$$\forall\, x \in I,\ x < -A \Rightarrow 0 \leqslant f(x) < \varepsilon$$

On écrit : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0^+$ ou $\lim\limits_{-\infty} f = 0^+$.

Exemple

$$\lim_{x\to 0} x^2 = 0^+$$

On utilisera aussi la notation 0^+ pour indiquer que l'on tend vers zéro par valeurs supérieures.

➤ Notation 0^-

Soient f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, et a un point de I.

On dit que f **tend vers** 0^- **en** a si, lorsque x devient très proche de a, $f(x)$ tend vers zéro, mais en restant négatif, ce qui se traduit mathématiquement par le fait que pour tout réel ε strictement positif, il existe un réel η strictement positif tel que :

$$\forall x \in I,\ 0 < |x - a| < \eta \Rightarrow -\varepsilon < f(x) \leqslant 0$$

On écrit : $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0^-$ ou $\lim\limits_{a} f = 0^-$.

Lorsque $+\infty$ est une borne de I, on dit que f **tend vers** 0^- **en** $+\infty$ si, lorsque x devient très grand, $f(x)$ tend vers zéro, mais en restant négatif, ce qui se traduit mathématiquement par le fait que pour tout réel ε strictement positif, il existe un réel A strictement positif tel que :

$$\forall x \in I,\ x > A \Rightarrow -\varepsilon < f(x) \leqslant 0$$

On écrit : $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 0^-$ ou $\lim\limits_{+\infty} f = 0^-$.

Lorsque $-\infty$ est une borne de I, on dit que f **tend vers** 0^- **en** $-\infty$ si, lorsque x devient très grand en valeur absolue, mais en restant à valeurs négatives, $f(x)$ tend vers zéro, mais en restant négatif, ce qui se traduit mathématiquement par le fait que pour tout réel ε strictement positif, il existe un réel A strictement positif tel que :

$$\forall x \in I,\ x < -A \Rightarrow -\varepsilon < f(x) \leqslant 0$$

On écrit : $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = 0^-$ ou $\lim\limits_{-\infty} f = 0^-$.

Exemple

$$\lim_{x\to 0} -x^4 = 0^-$$

On utilisera aussi la notation 0^- pour indiquer que l'on tend vers zéro par valeurs inférieures.

Exemple

$$\lim_{x\to 0^-} x^3 = 0^-$$

➤ Notation a^+, $a \in \mathbb{R}$

a étant un réel, la notation a^+ signifie que l'on tend vers a par valeurs supérieures.

➤ Notation a^-, $a \in \mathbb{R}$

a étant un réel, la notation a^- signifie que l'on tend vers a par valeurs inférieures.

2. Limite infinie d'une fonction en un point

Soient f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, et a un point de I.

On dit que f **admet pour limite « plus l'infini (on note $+\infty$) » en** a si, lorsque x devient très proche de a, $f(x)$ devient très grand, ce qui se traduit mathématiquement par le fait que pour tout réel A strictement positif, il existe un réel η strictement positif tel que :

$$\forall\, x \in I,\ 0 < |x - a| < \eta \Rightarrow f(x) > A$$

On écrit alors : $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$ ou $\lim\limits_{a} f(x) = +\infty$.

On dit que f **admet pour limite « moins l'infini (on note $-\infty$) » en** a si, lorsque x devient très proche de a, $f(x)$ devient très grand en valeur absolue, mais en étant à valeurs négatives, ce qui se traduit mathématiquement par le fait que pour tout réel A strictement positif, il existe un réel η strictement positif tel que :

$$\forall\, x \in I,\ 0 < |x - a| < \eta \Rightarrow f(x) < -A$$

On écrit : $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$ ou $\lim\limits_{a} f = -\infty$.

Exemple

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} = +\infty$$

3. Limite finie à droite (ou par valeurs supérieures)

Soient f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, a un point de I, et ℓ un réel.

On dit que f **admet pour limite (finie)** ℓ **à droite en** a (ou encore, par valeurs supérieures) si, lorsque x devient très proche de a, en restant plus grand que a, $f(x)$ devient lui aussi très proche de ℓ, ce qui se traduit mathématiquement par le fait que pour tout réel ε strictement positif, il existe un réel η strictement positif tel que :

$$\forall\, x \in I,\ 0 < x - a < \eta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

On écrit : $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \ell$ ou $\lim\limits_{a^+} f = \ell$.

Exemple

$$\lim_{x \to 1^+} \left(2 + \sqrt{x - 1}\right) = 2$$

4. Limite finie à gauche (ou par valeurs inférieures)

Soient f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, a un point de I, et ℓ un réel.

On dit que f **admet pour limite (finie)** ℓ **à gauche en** a (ou encore, par valeurs inférieures) si, lorsque x devient très proche de a, en restant plus petit que a, $f(x)$ devient lui aussi très proche de ℓ, ce qui se traduit mathématiquement par le fait que pour tout réel ε strictement positif, il existe un réel η strictement positif tel que :

$$\forall\, x \in I,\ -\eta < x - a < 0 \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

On écrit : $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \ell$ ou $\lim\limits_{a^-} f = \ell$.

5. Limite infinie à droite (ou par valeurs supérieures)

Soient f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, et a un point de I.

On dit que f **admet pour limite** $+\infty$ **à droite en** a (ou encore, par valeurs supérieures) si, lorsque x devient très proche de a, en restant plus grand que a, $f(x)$ devient très grand, ce qui se traduit mathématiquement par le fait que pour tout réel A strictement positif, il existe un réel η strictement positif tel que :

$$\forall\, x \in I,\ 0 < x - a < \eta \Rightarrow f(x) > A$$

On écrit : $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = +\infty$ ou $\lim\limits_{a^+} f = +\infty$.

On dit que f **admet pour limite** $-\infty$ **à droite en** a (ou encore, par valeurs supérieures) si, lorsque x devient très proche de a, en restant plus grand que a, $f(x)$ devient très grand en valeur absolue, mais en étant à valeurs négatives, ce qui se traduit mathématiquement par le fait que pour tout réel A strictement positif, il existe un réel η strictement positif tel que :

$$\forall\, x \in I,\ 0 < x - a < \eta \Rightarrow f(x) < -A$$

On écrit : $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = -\infty$ ou $\lim\limits_{a^+} f = -\infty$.

6. Limite infinie à gauche (ou par valeurs inférieures)

Soient f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, et a un point de I.

On dit que f **admet pour limite** $+\infty$ **à gauche en** a (ou encore, par valeurs inférieures) si, lorsque x devient très proche de a, en restant plus grand que a, $f(x)$ devient très grand, ce qui se traduit mathématiquement par le fait que pour tout réel A strictement positif, il existe un réel η strictement positif tel que :

$$\forall\, x \in I,\ -\eta < x - a < 0 \Rightarrow f(x) > A$$

On écrit : $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = +\infty$ ou $\lim\limits_{a^-} f = +\infty$.

On dit que f **admet pour limite** $-\infty$ **à gauche en** a (ou encore, par valeurs inférieures) si, lorsque x devient très proche de a, en restant plus grand que a, $f(x)$ devient très grand en valeur absolue, mais en étant à valeurs négatives, ce qui se traduit mathématiquement par le fait que pour tout réel A strictement positif, il existe un réel η strictement positif tel que :

$$\forall\, x \in I,\ \eta < x - a < 0 \Rightarrow f(x) < -A$$

On écrit : $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = +\infty$ ou $\lim\limits_{a^-} f = +\infty$.

fiche 3

Calculus

Algèbre

Analyse

Limites

fiche 4 Limite d'une fonction en $+\infty$ ou $-\infty$

1. Limite finie d'une fonction en l'infini

Soient f une fonction définie sur un intervalle de la forme $[a, +\infty[$ de $\mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$, et ℓ un réel.

On dit que f **admet pour limite (finie)** ℓ **en « plus l'infini (on note** $+\infty$**) »** si, lorsque x devient très grand, $f(x)$ devient très proche de ℓ, ce qui se traduit mathématiquement par le fait que pour tout réel ε strictement positif, il existe un réel « seuil », A, strictement positif tel que :

$$\forall\, x \in [a, +\infty[,\ x > A \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

On écrit alors : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$ ou $\lim\limits_{+\infty} f = \ell$.

Si f est définie sur un intervalle de la forme $]-\infty, a]$ de $\mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$, et si ℓ désigne encore un réel, on dit que f **admet pour limite (finie)** ℓ **en « moins l'infini (on note** $-\infty$**) »** si, lorsque x devient très grand en valeur absolue, mais en étant à valeurs négatives, $f(x)$ devient très proche de ℓ, ce qui se traduit mathématiquement par le fait que pour tout réel ε strictement positif, il existe un réel A, strictement positif tel que :

$$\forall\, x \in]-\infty, a],\ x < -A \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

On écrit alors : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \ell$ ou $\lim\limits_{-\infty} f = \ell$.

Exemple

$$\lim_{x \to +\infty} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}\right) = 1$$

2. Limite infinie d'une fonction en plus l'infini

Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $[a, +\infty[$ de $\mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$.

On dit que f **admet pour limite** $+\infty$ **en « plus l'infini »** si, lorsque x devient très grand, $f(x)$ devient lui aussi très grand, ce qui se traduit mathématiquement par le fait que pour tout réel B strictement positif, il existe un réel « seuil », A, strictement positif tel que :

$$\forall\, x \in [a, +\infty[,\ x > A \Rightarrow f(x) > B$$

On écrit alors : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ ou $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$.

On dit que f **admet pour limite** $-\infty$ **en « plus l'infini »** si, lorsque x devient très grand, $f(x)$ devient très grand en valeur absolue, mais en étant à valeurs négatives, ce qui se traduit mathématiquement par le fait que pour tout réel B strictement positif, il existe un réel « seuil », A, strictement positif tel que :

$$\forall\, x \in [a, +\infty[,\ x > A \Rightarrow f(x) < -B$$

On écrit alors : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ ou $\lim\limits_{+\infty} f = -\infty$.

3. Limite infinie d'une fonction en moins l'infini

Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $]-\infty, a]$ de $\mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$.

On dit que f **admet pour limite** $+\infty$ **en « moins l'infini »** si, lorsque x devient très grand en valeur absolue, mais en étant à valeurs négatives, $f(x)$ devient lui aussi très grand, ce qui se traduit mathématiquement par le fait que pour tout réel B strictement positif, il existe un réel réel A, strictement positif tel que :

$$\forall\, x \in]-\infty, a],\ x < -A \Rightarrow f(x) > B$$

On écrit alors : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ ou $\lim\limits_{-\infty} f = +\infty$.

On dit que f **admet pour limite** $-\infty$ **en « moins l'infini »** si, lorsque x devient très grand en valeur absolue, en étant négatif, $f(x)$ devient aussi très grand en valeur absolue, en étant négatif, ce qui se traduit mathématiquement par le fait que pour tout réel B strictement positif, il existe un réel A, strictement positif tel que :

$$\forall\, x \in]-\infty, a],\ x < -A \Rightarrow f(x) < -B$$

On écrit alors : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ ou $\lim\limits_{-\infty} f = -\infty$.

4. Forme indéterminée

On appelle **forme indéterminée** une limite que l'on ne sait pas déterminer ; cela correspond donc à des quantités ne l'on peut pas quantifier **de façon exacte**, comme, par exemple, le quotient de $+\infty$ avec $+\infty$.

fiche 5 Propriétés des limites Opérations sur les limites

1. Propriétés des limites

➤ Unicité de la limite

Soient f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, et a dans $\bar{I}$. Si f possède une limite en a, celle-ci est unique.

- Soient f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, a un point de I, et ℓ dans $\overline{\mathbb{R}}$.

  Alors, si f est définie dans un voisinage à gauche de a, et dans un voisinage à droite de a :
$$\lim_{x \to a} f(x) = \ell \Leftrightarrow \lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x) = \ell$$
- Soient f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, et a dans $\bar{I}$; m et M sont deux réels. Alors :
  - si $\lim\limits_{x \to a} f(x) < M$, il existe un voisinage de a tel que, pour tout x de ce voisinage :
$$f(x) < M$$
  - si $\lim\limits_{x \to a} f(x) > m$, il existe un voisinage de a tel que, pour tout x de ce voisinage :
$$f(x) > m$$

➤ Limites et comparaison

Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, et a dans $\bar{I}$; m et M sont deux réels. Alors, **si f et g ont des limites finies en** a, et s'il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de a tel que, pour tout x de ce voisinage,
$$f(x) \leqslant g(x)$$
on a : $\lim\limits_{x \to a} f(x) \leqslant \lim\limits_{x \to a} g(x)$

➤ Limites et minoration

Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, et a dans $\bar{I}$. S'il existe un voisinage de a tel que, pour tout x de ce voisinage,
$$f(x) \leqslant g(x)$$
et si, de plus, $\lim\limits_{x \to a} g(x) = -\infty$

alors : $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$

➤ Limites et majoration

Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, et a dans $\bar{I}$. S'il existe un voisinage de a tel que, pour tout x de ce voisinage, $f(x) \geqslant g(x)$, et si $\lim\limits_{x \to a} g(x) = +\infty$, alors :
$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$$

➤ Théorème des gendarmes

Soient f et g et h trois fonction définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, et a dans $\bar{I}$; ℓ est un réel. S'il existe un voisinage de a tel que, pour tout x de ce voisinage, $f(x) \leqslant h(x) \leqslant g(x)$, et si, de plus, $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} g(x) = \ell$, alors : $\lim\limits_{x \to a} h(x) = \ell$

2. Opérations sur les limites

➤ Limite d'une somme de fonctions

Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, et a dans $\bar{I}$; ℓ et ℓ' sont deux réels finis. Alors :

$\lim\limits_{x \to a} f(x)$	$\lim\limits_{x \to a} g(x)$	$\lim\limits_{x \to a} (f(x) + g(x))$
ℓ	ℓ'	$\ell + \ell'$
ℓ	$+\infty$	$+\infty$
ℓ	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$-\infty$	Forme indéterminée

➤ Limite d'un produit de fonctions

Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, et a dans $\bar{I}$; ℓ et ℓ' sont deux réels. Alors :

$\lim\limits_{x \to a} f(x)$	$\lim\limits_{x \to a} g(x)$	$\lim\limits_{x \to a} f(x)\,g(x)$
ℓ	ℓ'	$\ell\,\ell'$
ℓ, avec $\ell > 0$	$+\infty$	$+\infty$
ℓ, avec $\ell > 0$	$-\infty$	$-\infty$
ℓ, avec $\ell < 0$	$+\infty$	$-\infty$
ℓ, avec $\ell < 0$	$-\infty$	$+\infty$
0	$+\infty$	Forme indéterminée
0	$-\infty$	Forme indéterminée

➤ Limite d'un quotient de fonctions

Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, et a dans $\bar{I}$; ℓ et ℓ' sont deux réels. Alors :

$\lim\limits_{x \to a} f(x)$	$\lim\limits_{x \to a} g(x)$	$\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$
ℓ	ℓ', avec $\ell' \neq 0$	$\dfrac{\ell}{\ell'}$
ℓ	$+\infty$	0
ℓ	$-\infty$	0
ℓ, avec $\ell > 0$	0^+	$+\infty$
ℓ, avec $\ell > 0$	0^-	$-\infty$
ℓ, avec $\ell < 0$	0^+	$-\infty$
ℓ, avec $\ell < 0$	0^-	$+\infty$
$+\infty$	$+\infty$	Forme indéterminée
$+\infty$	$-\infty$	Forme indéterminée
$-\infty$	$+\infty$	Forme indéterminée
$-\infty$	$-\infty$	Forme indéterminée

fiche 6 Notations de Landau

1. Négligeabilité

Définition

Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, et a dans $\bar{I}$.

On suppose que g ne s'annule pas dans un voisinage de a. On dit que f est **négligeable** devant g au voisinage de a si

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

On note alors

$$f(x) \underset{x \to a}{=} o\,(g(x)) \quad \text{ou} \quad f \underset{a}{=} o\,(g)$$

On dit que f est un « petit o » de g au voisinage de a.

La notation « petit o » , de même que la notation « grand O » , qui sera vue plus loin, est appelée **notation de Landau**, en hommage au mathématicien Edmund Landau[1]. Leur paternité est visiblement assez controversée, et reviendrait, a priori, à Paul Bachmann[2].

Exemple

On considère les fonctions f et g définies, pour tout réel x, par

$$f(x) = x^2 \quad , \quad g(x) = x^4$$

Alors, comme $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x^2} = 0$, on en déduit : $f \underset{+\infty}{=} o(g)$.

Pour traduire le fait qu'une fonction f possède une limite nulle en a, $a \in \mathbb{R}$, ou, éventuellement, $a = +\infty$ ou $a = -\infty$, on écrit aussi :

$$f(x) \underset{x \to a}{=} o(1)$$

2. Domination

Définition

Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, et a dans $\bar{I}$. On suppose que g ne s'annule pas dans un voisinage de a, sans, pour autant, que $g(a)$ soit non nul.

1. Edmund Georg Hermann Landau (1877-1938), mathématicien allemand, spécialiste de théorie des nombres.
2. Paul Bachmann (1837-1920), mathématicien allemand lui aussi, et également spécialiste de théorie des nombres.