MATRIKS Dan PENERAPANYA DALAM EKONOMI

Makalah Ini Disusun Guna Memenuhi Tugas Mata Kuliah Matematika Ekonomi

Dosen Pengampu : Muhamad Irpan Nurhab, S.Si.,M.Si

Disusun Oleh:

Kelompok 2

Nama	NPM
Anjas Sari	1602040005
Devi Monicha	1602040078
Feri Permadi	1602040190
Ferly Oktavianti	1602040091
Muhammad Ansori	1602040117
Siti Nur Aminah	1602040152

KELAS C

PROGRAM STUDI EKONOMI SYARIAH

FAKULTAS EKONOMI DAN BISNIS ISLAM

INSTITUT AGAMA ISLAM NEGERI (IAIN)

JURAI SIWO METRO

2018

KATA PENGANTAR

Puji syukur kehadirat Tuhan Yang Maha Esa atas segala rahmat-Nya sehingga makalah ini dapat tersusun hingga selesai. Tidak lupa kami juga mengucapkan banyak terima kasih atas bantuan dari pihak yang telah berkontribusi dengan memberikan sumbangan baik materi maupun pikirannya.

Dan harapan kami semoga makalah ini dapat menambah pengetahuan dan pengalaman bagi para pembaca. Untuk kedepannya dapat memperbaiki bentuk maupun manambah isi makalah agar menjadi lebih baik.

Karena keterbatasan pengetahuan maupun pengalaman kami.Kami yakin masih banyak kekurangan dalam makalah ini. Oleh karena itu kami sangat mengharapkan saran dan kritik yang membangun dari pembaca demi kesempurnaan makalah ini.

Metro, 08 Mei 2018

Penyususn

DAFTAR ISI

BAB I
PENDAHULUAN

A. LATAR BELAKANG

Dalam menghadapi kehidupan sehari hari tanpa disadasri seringkali manusia menghadapi persoalan, apabila ditelusuri ternyata kebanyakan masalah yang timbul merupaka masalah matematika. Dengan mengubahnya kedalam bahasa atau persamaan matematika maka persoalan tersebut akan lebih mudah diselesaikan. Tetap terkadang suatu persoalan seringa kali memuat lebih dari dua persamaan dan bebrapa variabel, sehingga manusia kesulitan untuk mencari hubungan antara variabel variabelnya.

Oleh karena itu dengan mariks, pada dasarnya merupakan alat atau instrumen yang cukup ampuh dalam memecahkan persoalan. Dengan menggunakan matriks memudahkan manusia untuk membuat analisa analisa yang mencakup hubungan variabel variabel dari suatu persoalan.

Dalam hal ini matriks dapat manganalisa serta menjadi solusi persoalan persoalan yang ada dalam ekonomi. Melalui perumusan dengan menganalisa variabel variabel yang berhubungan dan dituangkan kedalam matematika ekonomi maka masalah yang terjadi dalam eknomi dapat diselesaikan dengan ilmu matematika.

BAB II
PEMBAHASAN

A. MATRIKS

1. DEFINISI KONSEP

Matriks adalah suatu susunan atau penyajian berbentuk segi empat dari sekelompok angka, parameter, atau variabel. Angka-angka (parameter atau variabel) itu dinamakan unsur-unsur matriks. Unsur-unsur yang ditempatkan secara mendatar membentuk baris matriks, sedangkan unsur-unsur yang ditempatkan secara tegak membentuk kolom matriks. Unsur-unsur matriks biasanya diwadahi suatu tanda kurung. Antara unsur yang satu dengan yang lain tidak dipisahkan dengan tanda koma, tetapi cukup dengan memberikan jarak (ruang kosong).[1]

Banyaknya baris dan kolom secara bersama menunjukkan dimensi matriks. Suatu matriks dengan m baris n kolom dinyatakan memiliki dimensi m x n. Dalam penulisan dimensi, banyaknya baris selalu ditaruh di depan. Jika m = n matriksnya dikatakan bujur sangkar. Jika suatu matriks hanya berisi sebuah kolom, jadi dimensinya m x 1, ia dinamakan vektor kolom.

Berikut ini adalah contoh penyajian dalam bentuk matriks dari nilai-nilai ujian tengah semester, makalah, dan ujian akhir semester seorang mahasiswa untuk tiga mata kuliah yang diambil pada semester tertentu.

---

[1] Sri Mulyono, *Matematika Ekonomi Dan Bisnis*, Jakarta : Mitra Wacana Media,2017, hlm 120

	Ujian Tengah Semester	**Makalah**	**Ujian Akhir Semester**
Matematika ekonomi dan bisnis	5	6	7
Dasar akuntansi	7	8	4
Manajemen	7	5	6

Matriks ini berdimensi 3 x 3. Untuk keperluan tertentu, matriks biasanya dilambangkan dengan sebuah huruf agar menjadi lebih ringkas, misalkan simbol untuk matriks itu adalah :

$$A = (a_{ij})$$

Subscript ij menunjukkan letak unsur matriks, yaitu unsur pada baris ke i dan kolom j. Ini berarti yang dimaksud dengan a_{22} adalah unsur 8, a_{23} adalah 4 dan seterusnya.

Matriks nol, biasa diberi simbol huruf O, adalah matriks yang semua unsurnya adalah angka nol, dapat berdimensi berapapun, dan tidak perlu bujur sangkar.

Beberapa contohnya adalah :

$$(0) \qquad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (0\ 0) \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Matriks identitas adalah suatu matriks bujur sangkar dengan semua unsur pada diagonal utama dari kiri atas ke kanan bawah adalah angka 1 dan semua unsur yang lain adalah angka nol. Matriks ini biasanya dibeeri simbol huruf I, meskipun tidak selalu, dengan subscript jumlah baris atau kolomnya, sehingga :

$$13 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Matriks transpose adalah matriks yang unsur-unsur baris dan kolomnya saling di tukarkan, sehingga unsur-unsur baris pertama matriks asal menjadi unsur-unsur kolom pertama matriks transpose, dan sebaliknya. Setiap matriks pasti memiliki matriks transpose, yang simbolnya biasanya ditambahi tanda prime.

Contoh :

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ matriks *transpose*nya adalah

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

Jadi jika A_{mxn} maka a'_{mxn}

2. OPERASI MATRIKS

Jika yang sedang dibicarakan adalah angka, parameter, atau variabel yang berdiri sendiri, kata operasi dapat berarti tambah, kurang, kali, dan bagi (kecuali oleh angka nol). Karena sebuah matriks menurut definisinya adalah suatu susunan, maka cara kerja opersai angka bisa saja berbeda dengan operasi matriks dan ap yang berlaku pada operasi angka dapat saja tidak berlaku dalam operasi matriks.

Dalam setiap operasi baik untuk angka maupun matriks, selalu dilibatkan tanda sama dengan. Dua matriks A = (a_{ij}) dan B = (b_{ij}) dikatakan sama jika keduanya memiliki dimensi sama dan memiliki unsur-unsur yang sama untuk setiap posisi yang sesuai.

Contoh :

1) A = $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ B = $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ dan C = $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

Maka A = B ≠ C

2) A = $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ = $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, ini berarti x = 0 dan y = 1

TAMBAH-KURANG

Dua matriks dapat di tambahkan dan atau dikurangkan, jika mereka memiliki dimensi sama. Jika ditambahkan dan atau dikurangkan, setiap unsur dari suatu matriks ditambah dan atau dikurangi oleh unsur matriks lain posisinya yang sesuai.[2]

Contoh :

1) $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$

2) $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

Jika suatu matriks ditambah (dikurangi) matriks nol, hasilnya adalah matriks itu sendiri.

A + 0 = 0 + A = A

A – 0 = A

PERKALIAN SKALAR

Dalam membahas matriks, sebuah angka, parameter, atau variabel yang berdiri sendir dinamakan skalar. Perkalian skalar dalam sebuah

[2] M.Syahriman Yusi Imron Zahri, *Matematika Ekonomi (Teori dan Aplikasi)*, Jakarta : Mitra Wacana Media, 2017, hlm178

matriks dapat dilakukan dengan mengalikan setiap unsur matriks dengan skalar itu.

Contoh:

1) $2\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 8 \\ 12 & 16 \end{bmatrix}$

2) $-\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -3 & -4 \end{bmatrix}$

Dari dua contoh itu terlihat bahwa peran skalar adalah memperbesar(memperkecil) matriks dengan suatu kelipatan tertentu. Skalar dapat berupa bilangan pecah maupun negatif. Dalam perkalian ini jika skalar diletakan sesudah matriks, hasilya akan sam dengan skalar yang diletakkan didepan. Jadi disini berlaku hukum komunitatif k A = A k, dimana k adalah skalar.

PERKALIAN MATRIKS

Dalam menghasilkan suatu skalar dengan matriks tidak perlu syarat apapun.[3] Ini berbeda dengan erkalian antar matriks. Suatu syarat agar dua matriks dapat dikalaikan adalah bahwa banyaknya kolom matriks di depan, A_{mxn}harus sama dengan banyaknya baris matriks yang mengikuti, B_{nxp}. cara operasinya adalah dengan mengalikan setiap unsur dari vektor baris pada matriks di depan dengan setiap unsur vektor kolom matriks di belakang. Penjumlahan dari perkalian unsur baris kolom itu merupakan unsur penyusun matriks yang dihasilkan, C_{mxp}. Perkalian unsur baris kolom itu dinamakan inner products.

[3] M.Syahriman Yusi Imron Zahri, *Matematika Ekonomi (Teori dan Aplikasi)*, Jakarta : Mitra Wacana Media, 2017, hlm 124-125

Perhatikan bhwa matriks C_{mxp} memiliki baris sebanyak baris matriks di depan dan memiliki kolom sebanyak kolom matriks di belakang. Secara umum unsur-unsur hasil perkalian adalah :

$C_{ij}= \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, b_{kj}$ dimana i=1,2,...m dan j=1,2...,p

Contoh:

1) $(1\ 0)\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 8 \end{bmatrix} = (1 \times 2 + 0 \times 5\ \ 1 \times 4 + 0 \times 8) = (2\ 4)$

$A_{1x2}B_{2X2}$

2) $\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}(1\ 0) =$ tak terdefinisi karena tidak memenuhi syarat

$B_{2X2}\ A_{1X2}$

Dari kedua contoh terlihat bahwa perkalian matriks tidak mengikuti aturan komutatif, atau AB ≠ BA.

Jika syaratnya terpenuhi, perkalian suatu matriks dengan matriks nol akan menghasilkan matriks nol dengan dimensi mengikuti aturan perkalian, A_{mxn}, O_{nxp} = O_{mxp}. Jika suatu matriks identitas hasilnya adalah matriks itu sendiri, $A_{mxn}I_n$= A_{mxn}. Perkalian antar matriks matriks identitas yang memenuhi syarat akan menghasilkan matriks identitas itu sendiri,I_n I_nI_n

PEMBAGIAN

Seperti yang berlaku pada bilangan, operasi tambah, kurang dan kali dngan syarat-syarat tertentu juga berlaku pada matriks. Tetapi adalah tidak mungkin membagi suatu matriks dengan matriks yang lain.

Suatu bilangan a, jika bilangan-bilangan itu sendiri hasilnya dalah satu,a/a = 1 atau ditulis dengan cara lain a a^{-1} diman inversi atau kebalikan a. Dalam matriks, juga dikenal matriks inversi, dimana suatu matriks A, jika dikalikan matriks inverserinya, A^{-1} akan menghasilkan matriks identitas, I Atau, $A A^{-1} = A^{-1} A=1$.

3. PENULISAN SISTEM PERSAMAAN LINIER DENGAN MATRIKS

Lihat lagi matriks nilai ujian yang disajikan pada bab sebelumnya. Misalnya bobot ujian tengah, makalh, dan ujian akhir pada penentuan nilai akhir untu setiapa mata kuliah berturut-turut adalah x_1 x_2 dan x_3. Dengan demikin nilai akhir itu dihitung seperti berikut :

Matematika Ekonmi dan Bisnis $5x_1 + 6x_2 + 7 x_3 = k_1$

Dasar akuntansi $7x_1 + 8x_2 + 4x_3 = k_2$

Manajemen $7x_1 + 5x_2 + 6x_3 = k_3$

Ketiga persamaan dapat dilihat sebagai suatu sistem persamaan linier. Matriks dapat digunakan sebagai alternatif untuk menuliskan sistem persamaan. Ada tiga kelompok dalam sistem persamaan itu. Pertama adalah nilai ujian tengah semester, makalah, dan ujian akhir semester untuk setiap matakuliah, yang dinamakan parameter. Kedua adalah bobot nilai ujian tengah semester, makalah, dan ujian akhir semster, yang dinamakan variabel. Dinamakan variabel karena bobot itu dapat diuba untuk mendapatkan nilai akhir tertentu yang dikehendaki. Ketiga adalah nilai akhir untuk setiap matakuliah , yang dinamakan yang dinamakan konstanta sisi kanan. Jika masing-masing kelompok disusun ddalam bentuk matriks dan diberi simbol berturut-turut adalah A,x, dan k maka diperoleh.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 7 \\ 7 & 8 & 4 \\ 7 & 5 & 4 \end{pmatrix} \quad x = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} \qquad \text{dan } k = \begin{pmatrix} K_1 \\ K_2 \\ K_3 \end{pmatrix}$$

Dengan memanfaatkan operasi perkalian matriks, sistem persamaan itu dapat di tuliskan menjadi :

$A_{3x3}\, x_{3xl} = k_{3xl}$

Dalam bentuk matriks, sistem persamaan itu menjadi sangat ringkas.

4. UJI KEBERADAAN MATRIKS INVERSI

Telah disebutkan bahwa perkalian antara sebuah matriks dengan matriks inversinya, atau sebliknya, akan menghasilkan matriks identitas, $A.A^{-1} = A^{-1}\ A = 1$. Apakah setiap matriks memiliki matriks inversinya ? tidak. Matriks yang memiliki matriks inversi harus suatu matriks bujur sangkar. Namun kebujursangkaran belum menjamin bahwa suatu matriks selalu memiliki inversinya. Dikatakan dengan cara lain, kebujursangkaran merupakan *necessary condition,*tetapi bukan *sufficient condition* untuk keberadaan matriks inversi.

Lantas apa syarat lainnya ? *sufficient condition*nya adalah bahwa antarvektor bari (kolom) pada matriks itu bersifat bebas linier (*linierly independent*). Jika syarat kebujursangkaran dan bebas linier dipenuhi secara serentak, matriksnya dikatakan *non-singular*.

Bebas Linier

Misalkan suatu matriks A_{nxn} dilihat sebagai susunan dari vektor baris, seperti dituliskan berikut.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \cdot \\ v_n \end{pmatrix}$$

Antar vektor baris $v_1, v_2, \dots, v_n$ dikatakan tidak bebas linier (*linierly independent*) jika ada salah satu dari skalar $k_1, k_2, \dots, k_n$ yang tidak sama dengan nol, demikian hingga :

$$k_1 v_1 + k_2 v_2 + \ \dots\ k_n v_n = 0$$

dimana 0 adalah vektor nol. Jika persamaan terakhir itu dipenuhi hanya jika seluruh $k_1, k_2, \dots, k_n$ sama dengan nol, maka antar vektor baris $v_1, v_2, \dots, v_n$ dikatakan bebas linier.

Contoh :

1) Diketahui sebuah matriks $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Apakah antar vektor baris matriks itu bebas linier ?

Tidak, sebab ada skalar k_1, k_2, dan k_3 yang tidak sama dengan nol, demikian hingga :

K_1 (1 4 3) + k_2 (2 3 1) + k_3 (-1 1 2) = (0 0 0)

Yang dapat diketahui melalui perhitungan berikut.

Jika unsur-unsur vektor baris sisi kiri disamakan dengan unsur-unsur vektor baris sisi kanan, didapat :

$K_1 + k_2 – k_3 = 0$

$4k_1 + 3k_2 + k_3 = 0$

$3k_1 + k_2 + 2k_3 = 0$

Jika hasilnya dikatakan dalam k_1 diperoleh k_2 = -k dan $k_3 = -k_1$. Ini artinya terdapat sejumlah tak terbatas kombinasi nilai k_1, k_2, dan k_3 .

misalkan ditetapkan $k_1 = 1$ maka $k_2 = -1$ dan $k_3 = -1$. Jadi karena k_1, k_2, dan k_3 dapat bernilai tidak sama dengan nol, maka antar vektor baris itu tidak bebas linier.

2) Dari sebuah matriks B = $\begin{pmatrix} 10 & 4 \\ 8 & 5 \end{pmatrix}$

Apakah antar vektor baris matriks itu bebas linier ?

Jawabnya, ya, seperti yang dijelaskan berikut.

K_1 (10 4) + k_2 (8 5) = (0 0)

$10k_1 + 8k_2 = 0$

$4k_1 + 5k_2 = 0$

Penyelesaiannya adalah $k_1 = 0$ dan $k_2 = 0$

Jadi, karena semua skalar k_1 dan k_2 sama dengan nol, maka antar vektor baris itu bebas linier.[4]

DETERMINANT

Determinant adalah suatau anagka yang terkait dengan nilai matriks bujurr sangkar. Determinant biasanya diberi simbol seperti simbol matriksnya dengan dua garis tegak pada sebelum dan sesudahnya. Determinant dari matriks A biasa ditulis $|A|$. Determinan berbeda dari metriks dalam tiga hal. Pertama bahwa determinan unsur unsurnya diapit dengan sepasang garsi tegak, sedangkan matriks unsur unsurnya diapit dengan tanda kurung. Kedua, determinan senantiasa berbentuk bujuk sangkar (jumlah baris = jumlah kolom, m = m), sedangkan matriks tidak

[4] M.Syahriman Yusi Imron Zahri, *Matematika Ekonomi (Teori dan Aplikasi)*, Jakarta : Mitra Wacana Media, 2017, hlm 121-127

harus demikian. Ketiga, determinan mempunyai nilai numerik tetapi tidak demikian halnya dengan matriks. [5]

Contoh:

Matriks	*Dimensi Matriks*	*Determinant*
(a)	Satu	a
(5)	Satu	5
$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$	dua	ad-bc
$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$	dua	2.5-3.4 = -2
$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$	dua	2.3 – 3.2 = 0
$\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 8 & 24 \end{pmatrix}$	dua	2.24 – 6.8 = 0

Dua matriks terakhir pada contoh itu, jika ditemukan bahawa antar vektor barisnya tidak bebs linier. Kedua matriks itu determinannya sama dengan nol. Ternyata ada hubungan antara kebebasan linier antara vektor baris (kolom) suatu matriks dengan determinantnya. Matriks yang detrminantnya tidak sama dengan nol adalah matriks yang antar vektor baris (kolom)nya bebas linier. Dengan kata lain, matriks yang determinantnya tidak sama dengan nol adalah matriks non singular, sehingga matriks itu memiliki matriks inversi.

Determinant matriks berdimensi lebih banyak dapat ditemukan melalui perluasan determinnt matriks berdimensi dua dengan

[5] Dumairy, *Matematika Terapan Untuk Bisnis dan Ekonomi*, (Yogyakarta : BPFE, 2012), Hlm, 313

menggunakan minor, suatu konsep yang akan diterangkan berikut. Minor biasanya diberi simbol $|M_{ij}|$, adalah determinant dari sub matriks yang terbnetuk dengan menghapus baris ke i dan kolom ke j dari matriks induknya.

Suatu matriks A= $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$

Memiliki determinant yang dirumuskan sebagai:

$|A| = a_{11}|M_{11}| - a_{12}|M_{12}| + a_{13}|M_{13}|$

Contoh:

$$\begin{vmatrix} 5 & 6 & -7 \\ 7 & 8 & 4 \\ 7 & 5 & 6 \end{vmatrix} = 5\begin{vmatrix} 8 & 4 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} - 6\begin{vmatrix} 7 & 4 \\ 7 & 6 \end{vmatrix} + 7\begin{vmatrix} 7 & 8 \\ 7 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= 5(48-20) - 6(42-28) + 7(35-56)$$

$$= 140 - 84 - 147$$

$$= -91$$

Determinant yang dirumuskan seperti diatas dapat dirumuskan dengan cara lain dengan menggunakan cofactor, yang kemudian cara itu dikenal sebagai ekspasi laplace.[6] Cofactor yang biasa diberi $|C_{ij}| = (-1)^{i+j}$ $|M_{ij}|$

Jadi jik jumlah i dan j genap, $|C_{ij}| = (-1)^{i+j}|M_{ij}|$ tetapi jika jumlah nya ganjil, $|C_{ij}| = -|M_{ij}|$

Dengan demikian rumusan determinant menurut ekspansi laplace adalah:

[6] M.Syahriman Yusi Imron Zahri, *Matematika Ekonomi (Teori dan Aplikasi)*, Jakarta : Mitra Wacana Media, 2017, hlm 129

$|A| = a_{11}|C_{11}| + a_{12}|C_{12}| + a_{13}|C_{13}|$

Ekspansi laplace memperbolehkan penggunaan baris atau kolom manapun untuk mencari determinant. Pemilihan baris atau kolom yang banyak mengandung unsur nol akan memberi kemudahan. Ringkasnya, untuk matriks berdimensi nxn; determinantnya adalah:

$|A| = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}|C_{ij}|$ eksepansi dengan baris ke i

$= \sum_{i=1}^{n} a_{ij}|C_{ij}|$ eksepansi dengan baris ke j

Contoh:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 9 \\ 2 & 3 & 4 & 6 \\ 1 & 6 & 0 & -1 \\ 0 & -5 & 0 & 8 \end{vmatrix} = 0\ |C_{13}| + 4|C_{23}| + 0\ |C_{33}| + 0\ |C_{43}|$$

$$= 4\ |C23| = -4|M23| = -4\begin{vmatrix} 1 & 2 & 9 \\ 1 & 6 & -1 \\ 0 & -5 & 8 \end{vmatrix}$$

$$= -4\ (1(48-5) - 1(16+45) + 0\ (-2 - 54) = -4\ (43-61+0)$$

$$= 72$$

5. MENCARI MATRIKS INVERSI

Setiap unsur dari matriks non reguler Anxmmemiliki sebuah minor, $|M_{ij}|$, sehingga juga memiliki sebuah cofactor $|C_{ij}|$. Jika seluruh cofaktor itu secara lengkap disusun dalam bentuk matriks dengan posisi yang sesuai, diperoleh apa yang dinamakan matriks cofactor,C,yaitu:

$$C = \begin{pmatrix} |C_{11}| & |C_{12}| & \dots & |C_{1n}| \\ |C_{21}| & |C_{22}| & \dots & |C_{2n}| \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ |C_{1n}| & |C_{2n}| & \dots & |n| \end{pmatrix}$$

Matriks transpose dari matriks C dinamakan matriks Adjoint A, sehingga:

$$\text{Adj A} = C' = \begin{pmatrix} |C_{11}| & |C_{22}| & \cdots & |C_{n1}| \\ |C_{12}| & |C_{22}| & \cdots & |C_{n2}| \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ |C_{1n}| & |C_{2n}| & \cdots & |C_{nn}| \end{pmatrix}$$

Jika matriks A dikalikan matriks C' , hasilnya adalah suatu matriks berdimensi nxn , seperti berikut :

$$AC' = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}|C_{1j}| & \sum_{j=1}^{n} a_{1j}|C_{2j}| & \cdots & \sum_{j=1}^{n} a_{1j}|c_{nj}| \\ \sum_{j=1}^{n} a_{2j}|C_{1j}| & \sum_{j=1}^{n} a_{2j}|C_{2j}| & \ldots & \sum_{j=1}^{n} a_{2j}|C_{nj} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sum_{j=1}^{n} a_{nj}|C_{1j}| & \sum_{j=1}^{n} a_{nj}|C_{2j}| & \ldots & \sum_{j=1}^{n} a_{nj}|C_{nj} \end{pmatrix}$$

Unsur-unsur utama diagonal terakhir tidak lain adalah determinant dari matriks A. Sementara itu, penjumlahan dari perkalian antara setiap unsur dengan cofactor yang[7] tak sesuai (tak sebaris) akan selalu sama dengan nol. Ini berarti semua elemen yang lain adalah nol. Jadi :

$$AC' = \begin{bmatrix} |A| & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & |A| & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & |A| \end{bmatrix} = |A| \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

$$AC' = |A|\ I$$

Jika kedua sisi dibagi $|A|$, diperoleh:

$$\frac{AC'}{|A|} = I$$

Jika kedua sisi dikalikan di depan dengan A^{-1}, di dapat:

$$\frac{A^{-1}AC'}{|A|} = A^{-1}I$$

[7] M.Syahriman Yusi Imron Zahri, *Matematika Ekonomi (Teori dan Aplikasi)*, Jakarta : Mitra Wacana Media, 2017, hlm, 131

$A' = \frac{1}{|A|} C'$ atau $A' = \frac{1}{|A|}$ Adj A

Contoh:

1) Diketahui matriks A = $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$

Carilah matriks inversinya.

Karena $|A| = -2 \neq 0$ berarti matriks inversi itu ada.

Matriks concactornya adalah C = $\begin{bmatrix} 5 & -4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$sehingga Adj A = $\begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$

Jadi matriks inversinya, $A^{-1} = \frac{1}{-2}\begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5/2 & 3/2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$

2) Carilah matriks inversi dari A = $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 7 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Karena$|A| = -24 \neq 0$ berarti matriks inversinya ada

Matriks *cofactornya* C = $\begin{pmatrix} 17 & -7 & -9 \\ -3 & -3 & 11 \\ 13 & 11 & -3 \end{pmatrix}$

Sehingga matriks Ad joinnya.Adj A = $\begin{pmatrix} 17 & -3 & -13 \\ -7 & -3 & 11 \\ -9 & 3 & -3 \end{pmatrix}$

Jadi matriks inversinya, $A^{-1} = \frac{1}{|A|}$Adj A $= \frac{1}{-24}\begin{pmatrix} 17 & -3 & -13 \\ -7 & -3 & 11 \\ -9 & 3 & -3 \end{pmatrix}$

Ada cara lain untuk menentukan matriks inversi, yaitu dengan metode Eleminasi Gauss atau metode pivotal. Prosedur kerjanya seperti berikut:

1. Letakkan matriks identitas di samping kanan suatu matriks, misalnya A, yang akan dicari matriks inversinya.
2. Terapkan operasi baris pada kedua matriks sampai matris A berubah menjadi matriks identitas, karena operasi baris ini, matriks identitas

yang disebelah kanan itu akan berubah menjadi matriks inversinya yang di cari.

Logika metode itu dapat diterapkan seperti berikut.

1. Dimulai dengan menjejerkan dua matriks, yaitu A dan I.
2. Kalikan masing – masing dengan A^{-1}, hasilnya adalah A A^{-1}dan I A^{-1}
3. Akhirnya diperoleh I dan A^{-1}

Contoh:

Carilah matriks inversi dari A = $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$

Langkah – langkah metode eliminasi Gauss adalah :

\ $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Ubah a_{11} = 2 menjadi 1 melalui perkalian seluruh unsur pada baris pertama dengan 1/2.[8]

$\begin{pmatrix} 1 & 3/2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Ubah seluruh unsur yang sekolom dengan a_{11} menjadi 0, untuk unsur pada baris kedua caranya dengan mengurangkan 4 kali unsur pada baris pertama dari unsur pada baris kedua.

$\begin{pmatrix} 1 & 3/2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

Ubah a_{22} = -1 menjadi I melalui perkalian seluruh unsur baris dengan -1

$\begin{pmatrix} 1 & 3/2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$

[8] M.Syahriman Yusi Imron Zahri, *Matematika Ekonomi (Teori dan Aplikasi)*, Jakarta : Mitra Wacana Media, 2017, hlm 132

Ubah seluruh unsur yang sekolom dengan a_{22} menjadi 0, untuk unsur pada baris pertama caranya dengan mengurangkan 3/2 kali unsur baris keduadari unsur pada baris pertama.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -5/2 & 3/2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Karena matriks yang disebelah kiri telah berubah menjadi identitas, maka matriks yang di sebelah kanan adalah matriks inversi yang dicari, sehingga

$$A^{-1} = \qquad \begin{pmatrix} -5/2 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

6. MATRIKS HESSIAN DAN DETERMINANTNYA

Misalkan terdapat sebuah fungsi banyak variabel, (x1, x2, ... ,xn), kemudian dibuat matriks yang unsur - unsurnya adalah derivative parsial kedua fungsi itu dengan susunan seperti berikut:

$$\mathrm{H} = \begin{vmatrix} \mathrm{f}_{11} & \mathrm{f}_{12} & \dots & \mathrm{f}_{1n} \\ \mathrm{f}_{21} & \mathrm{f}_{22} & \dots & \mathrm{f}_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathrm{f}_{n1} & \mathrm{f}_{n2} & \dots & \mathrm{f}_{nn} \end{vmatrix}$$

Maka matriks H dinamakan *matriks Hessian*. *Determinant* dari matriks itu dinamakan *Hessian Determinant* atau cukup *Hessian* saja.Sehingga,[9]

$$|\mathrm{H}| \begin{vmatrix} \mathrm{f}_{11} & \mathrm{f}_{12} & \dots & \mathrm{f}_{1n} \\ \mathrm{f}_{21} & \mathrm{f}_{22} & \dots & \mathrm{f}_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathrm{f}_{n1} & \mathrm{f}_{n2} & \dots & \mathrm{f}_{nn} \end{vmatrix}$$

[9] M.Syahriman Yusi Imron Zahri, *Matematika Ekonomi (Teori dan Aplikasi)*, Jakarta : Mitra Wacana Media, 2017, hlm. 133

$|H| =$ Dari Hessian itu dapat dibuat beberapa sub *determinant*. Sub *determinant* dari$|H|$ yang hanya berisi unsur pertama pada diagonal utama dinamkan *minor utama pertama*, $|H_1|$, sub determinant dari $|H|$ yang berisi unsur pertama dan kedua pada diagonal utama dinamakan *minor utama kedua*,$|H|$.

Dengan penalaran serupa, *minor utama* ke n adalah *Hessian* itu sendiri, sehingga:

$$|H_1| = \ |F_{11}||H_2| \begin{vmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \end{vmatrix} \cdots |H_n| = \ |H|$$

Contoh:

Carilah *minor utama* dari suatu fungsi

$$f(x_1, x_2, x_3) = 3{x_1}^2 + \ 2{x_2}^2 - 2{x_1}^2 - 2x_1x_3 + 2x_2x_3 + {x_3}^2$$

Matriks Hessiannya adalah

$$H = \begin{pmatrix} 6 & -2 & -2 \\ -2 & 4 & 2 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Semua minor utamanya adalah

$$|H_1| = |6| = 6$$

$$|H_2| = \begin{vmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 20$$

$|H_3| = \ |H| = \{6(8-4) + 2(-4+4) - 2(-4+8)\} = 24 - 0 - 8 =$

16[10]

[10] M.Syahriman Yusi Imron Zahri, *Matematika Ekonomi (Teori dan Aplikasi)*, Jakarta : Mitra Wacana Media, 2017, hlm. 134.

B. PENERAPAN MATRIKS

1. Manfaat Matriks

Matriks dapat digunakan untuk banyak tujuan. Pertama, bentuk matriks dapat menggantikan cara penulisan sistem persamaan secara lebih ringkas. Manfaat ini makin terasa jika sistem itu melibatkan sejumlah besar persamaan dan variabel. Operasi-operasi yang diterapkan pada sistem persamaan itu, dengan sendirinya juga menjadi lebih ringkas. Kedua, bentuk matriks parameter dari suatu sistem persamaan dapat dipakai untuk menentukan keberadaan solusi unik sistem persamaan itu, sebelum solusi itu sendiri ditemukan. Ketiga, jika solusi unik suatu sistem persamaan ada, operasi matriks dapat memberikan formula soluso sistem persamaan itu. Manfaat yang pertama telah ditunjukan pada bab sebelum ini. Berikut ini akan ditunjukkan manfaat yang kedua dan ketiga. Namun demikian perlu diingatkan bahwa manfaat matriks itu hanya berlaku untuk sistem persamaan linier. Meskipun telah disebutkan bahwa banyak hubungan antar variabel dalam ekonomi bersifat non linier, ini tidak berarti bahwa manfaat matriks menjadi sangat terbatas. Sebab banyak pula hubungan non linier igu yang dapat dilinierkan, misalnya dengan modifikasi menjadi fungsi *double log*, atau dengan mempersempit *interval domain.*

2. Solusi Sistem Persamaan Linier

Berulang kali telah ditunjukkan cara penyelesaian suatu sistem persamaan dengan metode eliminasi dan subtitusi. Jika sistem persamaan itu ditulis dalam bentuk matriks, penerapan operasi matriks terhadapnya dapat memberikan formula solusi. Gunakan lagi bentuk matriks dari sistem persamaan pada bab sebelum ini, yaitu:[11]

$A\,x = k$

Di mana $A = (a_{ij})$ adalah matriks parameter persamaan, x adalah matriks variabel, dan k adalah matriks konstanta sisi kanan. Jika sistem persamaan itu memiliki solusi (matriks x ada), solusi itu dicari dengan langkah sebagai berikut:

Pada kedua sisi, kalikan didepannya dengan A^{-1}, sehingga didapat :

$A^{-1} A\,x = A^{-1}k$

$x = A^{-1}k$

Pada rumusan terakhir terlihat bahwa solusi suatu sistem persamaan ada jika matriks parameternya memiliki matriks inversi. Karena $A^{-1} = \frac{1}{|A|}\,\text{Adj } A$, maka rumusan diatas dapat diganti menjadi:

$$x = \frac{1}{|A|}\,\text{Adj } A\;k$$

Rumus terakhir ini dapat dipakai sebagai dasar untuk menemukan metode solusi lain yang dikenal dengan nama *aturan Cramer*. Metode ini sedikit lebih sederhana, karena pada formula solusinya hanya perlu determinant-determinant. Mengikuti *Cramer,* solusi persamaan matriks $Ax = k$ dapat dinyatakan sebagai berikut:

[11] M.Syahriman Yusi Imron Zahri, *Matematika Ekonomi (Teori dan Aplikasi)*, Jakarta : Mitra Wacana Media, 2017, hlm. 135

$$x_1 = \frac{|Aj|}{|A|}$$

Dimana x_1 adalah variabel ke j, $|Aj|$ adalah determinant dari matriks yang dibentuk dengan cara menempatkan matriks konstanta sisi kanan pada matriks parameter untuk mengganti unsur-unsur pada kolom ke j. Sehingga:

$$x_1 = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{1}{|A|} = \begin{vmatrix} k_1 & a_{12} & a_{13} \\ k_2 & a_{22} & a_{23} \\ k_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$x_2 = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{1}{|A|} = \begin{vmatrix} k_{11} & a_1 & a_{13} \\ k_{21} & a_2 & a_{23} \\ k_{31} & a_3 & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$x_3 = \frac{|A_3|}{|A|} = \frac{1}{|A|} = \begin{vmatrix} k_{11} & a_{12} & a_1 \\ k_{21} & a_{22} & a_2 \\ k_{31} & a_{32} & a_3 \end{vmatrix}$$

Perlu diperhatikan beda antara penyelesaian dengan menggunakan matriks inversi dan aturan Cramer.[12] Pada yang pertama seluruh nilai variabel ditemukan serentak atau sekali tembak (x yang diperoleh merupakan vektor). Pada yang kedua solusi variabel ditemukan satu demi satu (x_1 adalah skalar).

Contoh:

1) Lihat lagi contoh yang digunakan pada sub bab 9.3. Misalkan mahasiswanya cukup puas jika nilai akhir untk setiap mata kuliah

[12] M.Syahriman Yusi Imron Zahri, *Matematika Ekonomi (Teori dan Aplikasi)*, Jakarta : Mitra Wacana Media, 2017, hlm. 136.

adalah 6. Agar keinginan mahasiswa itu terpenuhi, bobot setiap tugas dapat dicari dengan dua cara seperti berikut :

Pertama, dengan menggunakan matriks inversi

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 7 \\ 7 & 8 & 4 \\ 7 & 5 & 4 \end{pmatrix} \qquad k = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$|A| = -91$, seperti telah ditunjukkan pada Bab 9.

$$C = \begin{pmatrix} 28 & -14 & -21 \\ -1 & -19 & 17 \\ -32 & 29 & -2 \end{pmatrix}$$ Sehingga Adj

$$A = \begin{pmatrix} 22 & -1 & -32 \\ -14 & -19 & 29 \\ -21 & 17 & -2 \end{pmatrix}$$

$$x = \frac{1}{-91}\begin{pmatrix} 28 & -1 & -32 \\ -14 & -19 & 29 \\ -21 & 17 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{28}{91} & 6 + \frac{1}{91} & 6 + \frac{22}{91}\ 6 \\ \frac{14}{91} & 6 + \frac{19}{91} & 6 - \frac{29}{91}\ 6 \\ \frac{21}{91} & 6 - \frac{17}{91} & 6 + \frac{2}{91}\ 6 \end{pmatrix}$$

$$x = \begin{pmatrix} 30/91 \\ 24/91 \\ 36/91 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}33 \\ 0{,}27 \\ 0{,}40 \end{pmatrix}$$

kedua, dengan aturan Cramer [13]

$$\frac{\begin{vmatrix} 6 & 6 & 7 \\ 6 & 8 & 4 \\ 6 & 5 & 6 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{(6)(28) - (6)(12) + (7)(18)}{-91} = \frac{30}{91} = 33\%$$

$$\frac{\begin{vmatrix} 5 & 6 & 7 \\ 7 & 6 & 4 \\ 7 & 6 & 6 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{(5)(12) - (6)(14) + (7)(10)}{-91} = \frac{24}{92} = 27\ \%$$

[13] M.Syahriman Yusi Imron Zahri, *Matematika Ekonomi (Teori dan Aplikasi)*, Jakarta : Mitra Wacana Media, 2017, hlm. 137.

$$\frac{\begin{vmatrix} 5 & 6 & 6 \\ 7 & 8 & 6 \\ 7 & 5 & 6 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{(5)(18)-(6)(0)+(6)(-21)}{-91} = \frac{36}{91} = 40\ \%$$

Solusi denga kedua metode adalah (harus) sama, yaitu bobot untuk ujian tengah semester, makalah dan ujian akhir semester berturut-turut adalah 33%, 27%, dan 40%. Sayangnya mahasiswa tidak bisa menentukan seenaknya bobot itu. Jadi, disini bobot merupakan variabel yang nilainya di luar kontrol pengambil keputusan.

2) Ingat lagi analisis keseimbangan pasar parsial, yang modelnya tersusun atas dua persamaan,

Q = a – b P

Q = - c + d P

Sistem persamaan itu dapat dituliskan demikian hingga semua variabel endogen ada di sebelah kiri sedangkan parameter yang tak gandeng dengan variabel ada si sebelah kanan, yaitu:

Q + b P = A

Q – d P = -c

Jika dituliskan dalam bentuk matriks, diperoleh:

$$\begin{pmatrix} 1 & b \\ 1 & -d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q \\ P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ -c \end{pmatrix}$$

Dengan aturan Cramer diperoleh:

$$Q = \frac{\begin{vmatrix} a & b \\ -c & -d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & b \\ 1 & -d \end{vmatrix}} = \frac{-ad+bc}{-d-b} = \frac{ad-bc}{d+b}$$

$$P = \frac{\begin{vmatrix} 1 & a \\ 1 & -c \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & b \\ 1 & -d \end{vmatrix}} = \frac{-c\ -c}{-d-b} = \frac{a+bc}{b+d}$$

Hasilnya sama dengan yang diperoleh sebelumnya.

3. Analisis Input Output

Analisis input-output bermaksud mengamati saling hubungan antar sektor ekonomi lewat barang dan jasa yang dihasilkan. Analisis ini di dasarkan pada suatu tabell input-output, yaitu tabel yang menerangkan arus barang dan jasa di antara semua sektor ekonomi selama periode tertentu. Baris-baris pada tabel itu mrnunjukkan alokasi output dari masing-masing sektor, sedangkan kolom-kolomnya menunjukkan komposisi input untuk menghasilkan produk total pada sektor itu.

Kerangka tabel input-output yang disederhanakan bisa dilihat pada tabel 1.a inti analisis ini adalah untuk menjawab pertanyaan: berapa nilai produk yang harus disediakan setiap sektor ekonomi agar cukup memenuhi seluruh permintaan ?.

Misalkan perekonomian dipisahkan menjadi n sektor produksi, masing-masing menghasilkan produk yang berbeda yang diukur dalam rupiah, agar dapat dibandingkan. Misalnya a_{ij} adalah nilai produk sektor i yang diperlukan untuk menghasilkan satu rupiah nilai produk sektor j.

$$a_{ij} = \frac{X_{ij}}{X_j}$$

Dimana X_{ij} adalah nilai input dari sektor i untuk menghasilkan output sektor j, X_j adlah nilai out[ut dari sektor j.

Selain diserap dari sektor-sektor ekonomi sebagai input, ada bagian output setiap sektor yang dipakai untuk memenuhi permintaan akhir, yang diberi simbol d_i. Jika output setiap sektor dapat memenuhi keperluan input bagi semua sektor produksi plus permintaan akhir, maka diperoleh sistem persamaan seperti berikut:

$X_1 = X_{11} + X_{12} + ... + X_{1n} + d_1$

$X_2 = X_{21} + X_{22} + ... + X_{2n} + d_2$

....

$X_n = X_{n1} + X_{n2} + ... + X_{nn} + d_n$

Karena $a_{ij} = \frac{X_{ij}}{X_j}$ atau $X_{ij} = a_{ij} X_j$, maka

$.a_{11} x_1 + a_{12} X_2 + ... + a_{1n} X_n + d_1 = x_1$

$.a_{21} x_1 + a_{22} X_2 + ... + a_{2n} X_n + d_2 = x_2$

....

$.a_{n1} x_1 + a_{n2} X_2 + ... + a_{nn} X_n + d_n = x_n$

Jika dituliskan dalam bentuk matriks

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \cdots \\ X_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \cdots \\ d_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \cdots \\ X_n \end{pmatrix}$$

Dituliskan dalam lambang mtriks, menjadi:

$A\ x + d = x$

$X – Ax = d$

$(1 – A\ )\ x = d$

Jika kedua sisi dikalikan dengan $(1 - A)^{-1}$ di depannya, didapat : $x = (1 - a)^{-1} d$

Matriks A dinamakan *matriks koefisien input* atau *matriks input*, $(1 - A)$ adalah *matriks teknologi* atau *matriks leon tief dan* $(1 - A)^{-1}$ adalah *matriks inversi leontief.* Matriks terakhir memainkan peran penting dalam analisis input-output. Banyak informasi penting dapat dihasilkan dari matriks ini.

Alokasi output Komposisi input	**Sektor Produksi** **1 2 ... n**	**Permintaan** **akhir**	**Output** **Total**
Sektor produksi 1 2 . . . n	$X_{11} + X_{12} + \ldots + X_{1n}$ $X_{21} + X_{22} + \ldots + X_{2n}$ .... $X_{n1}\ \ X_{n2}\ \ldots + X_{nn}$	d1 d2 dn	x1 x2 xn
Nilai Tambah Bruto	$V_1\ V_2 \ldots Vn$		
Input Total	$X_1\ \ X_2\ \ldots\ X_n$		

CONTOH:

Misalkan suatu perekonomian dipisahkan menjadi tiga sektor produksi dengan matriks koefisien input seperti berikut:

$$\begin{pmatrix} 0,3 & 0,4 & 0,1 \\ 0,5 & 0,2 & 0,6 \\ 0,1 & 0,3 & 0,1 \end{pmatrix}$$

Jika permintaan akhir untuk setiap sektor berturut-turut adalah 20, 10, dan 30, maka output yang harus dihasilkan setiap sektor untuk memenuhi seluruh permintaan dicari seperti berikut:

$$X = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}4 & 0{,}1 \\ 0{,}5 & 0{,}2 & 0{,}6 \\ 0{,}1 & 0{,}3 & 0{,}1 \end{pmatrix}\right] -1 \begin{pmatrix} 20 \\ 10 \\ 30 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{0{,}151} \begin{pmatrix} 0{,}54 & 0{,}39 & 0{,}32 \\ 0{,}51 & 0{,}62 & 0{,}47 \\ 0{,}23 & 0{,}25 & 0{,}36 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 20 \\ 10 \\ 30 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 160{,}9 \\ 202{,}0 \\ 118{,}5 \end{pmatrix}$$

Jadi output yang harus di sediakan setiap sektor berturut-turut adalah 160,9, 202,0 dan 118,5.

4. Uji Second Order Conditions

Minor utama hessian dapat digunkan sebagai alat uji apakah *second order conditionals* suatu nilai stationer dari fungsi banyak variabel terpenuhi. Misalkan ada sebuah fungsi tujuan f(x1, x2,...xn), maka *first order conditions* nilai stationernya adalah:

$Fx = f_2 = ... = f_n = 0$

Dengan menggunkan minor utama Hessian, *second order conditions* untuk nilai maksimum *second order conditionnya* adalah :

$|H_1| < 0$, $|H_2| > 0$, $H_3 < 0$ ... $(-1)^n\ |Hn| > 0$.

Hessian demikin dikatakan negative definite, untuk nilai minimum *second order conditionn*ya adalah:

$|H_1|$, $|H_2|$,... $|Hn| > 0$

Hessain ini dikatakan *positive definite.*

Jika tanda dari seluruh minor utama Hessian tidak seperti yang di dapatkan di atas, ada petunjuk bahwa tidak stationer yang diperiksa merupakan titik belok.

Contoh:

Misalkan fungsi suatu keuntungan sebuah perusahaan yang menghasilkan dua barang adalah:

$f(x_1, x_2) = (15x_1 + 18x_2 - 2x_1^{\ 2} - 2x_1x^2 - 3x_2^{\ 2})$

first order conditions untuk nilai stationers adalah:

$f_1 = 15 - 4x_1 - 2\ x_2 = 0$

$f_2 = 18 - 2x_1 - 6\ x_2 = 0$

solusi dua persamaan itu adalah $x_1 = 2{,}7$ dan $x_2 = 2{,}1$.

Second order conditionsnya adalah:

$H = \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ -2 & -6 \end{pmatrix}$

$|H_1|$= -4 $|H_2|$ = $|H|$ = 20

Karena Hessiannya merupakan *negative definite* maka *second order conditions* nilai maksimum terpenuhi. Jika yang di dapat adalah masalah optimissasi berkendala yang bertanda sam dengan, seperti:

Maksimumksn fungsi tujuan $f(x_{1,}\ x_2\ _{....}\ x_n)$ dengan kendala $g\ (x_{1,}\ x_2\ _{....}\ x_n) = 0$

Minor utama Hessian perlu dimodifikasi agar tetap dapat dipakai sebagai alat uji terpenuhinya *second order conditions.* Fungsi *lagrange* dari masalah optimalisasi berkendala itu adalah:

$L = f(x_{1,} x_{2 \dots} x_n) - \lambda\, g\, (x_{1,} x_{2 \dots} x_n)$

First order conditions untuk nilai stationernya adalah:

$L_i = L_2 = \dots = L_n = L_\lambda = 0$

Second order conditions dinyatakan dalam minor utama *bordered Hessian*, dimana *bordered Hessiannya* adalah:

$$|\overline{H}| = \begin{vmatrix} L_{11} & L_{12} & \cdots & L_{1n} & g_1 \\ L_{21} & L_{22} & \cdots & L_{2n} & g_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ L_{n1} & L_{n2} & \cdots & L_{nn} & g_n \\ g_1 & g_2 & \cdots & L_n & 0 \end{vmatrix}$$

Perhatikan bahwa unsur pembatasannya adalah derivatif persial pertama fungsi kendala.

Minor utama kedua adalah $|\overline{H}| = \begin{vmatrix} L_{11} & L_{12} & g_1 \\ L_{21} & L_{22} & g_2 \\ g_1 & g_2 & 0 \end{vmatrix}$ Disebut demikian karena yang dibatasi adalah unsur pertama dan kedua pada diagonal utama.

Minor utama ketiga adalah $|\overline{H_3}| = \begin{vmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} & g_1 \\ L_{21} & L_{22} & L_{23} & g_2 \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} & g_3 \\ g_1 & g_2 & g_3 & 0 \end{vmatrix}$

Minor utama ke n adalah $|\overline{H_2}| = |\overline{H}|$

Jika, $|\overline{H_2}|$, $|\overline{H_3}|$ ... $|\overline{H_n}| < 0$ *bordered Hessian* merupakan *positive definite*, ini merupakan *second order conditions* untuk titik minimum.

Jika, $|\overline{H_2}| > |\overline{H_3}| < 0 \; \dots (-1)^{n} |\overline{H_n}| > 0$ *bordered Hessian* merupakan *negative definite,* ini merupakan *second order conditions* untuk titik maksimum.

Jika tanda minor utama *bordered Hessian* tidak seperti yang disebutkan di atas, maka tak ada kesimpulan tentang jenis titik stasioner. Perhatikan bahwa uji tanda dimulai pada *minor utama bordered Hessian kedua*, bukan yang ke satu.

Contoh:

Ingat kembali masalah maksimisasi *utility*, u = $f(x_1,x_2) = x_1\ x_2$ dengan kendala anggaran $P_1X_1 + P_2X_2 = y$.

Fungsi *lagrange* masalah ini adalah: $L= x_1\ x_2 - \lambda\,(P_1X_1 + P_2X_2 - y)$

First order conditionsnya:

$L_1 = x_2 - \lambda P_1 = 0$

$L_2 = x_1 - \lambda P_2 = 0$

$L_\lambda = P_1\ x_1 + P_2X_2 - y = 0$

Dari ketiga persamaan di atas diperoleh :

$X_1 = \frac{y}{2p_1}$, $x_2 = \frac{y}{2p_2}$ dan $\lambda = \frac{y}{2p_{1\ P\ 2}}$

Second order conditionsnya:

$L_{11} = 0$, $L_{12} = L\ _{12} = 1$, $L_{22} = 0$,$g_1 = p_1$ dan $g_2 = p_2$

Sehingga $|\,\bar{H}| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & P_1 \\ 1 & 0 & P_2 \\ P_1 & P_2 & 0 \end{vmatrix}$

$|\ \overline{H_2}|= |\ \bar{H}|\ 0(0 - p_3^2)0 - (0 - p_1p^2) + p(p_2 - 0) = 2p_1p_2 > 0$

Karena *bordered hessian* merupakan negativ definite maka titik stasioner merupakan titik maksimum.

5. Analisis Markov

Analisis markov merupakan suatu bentuk khusus dari model prabobalistik yang lebih umum dinamakan *stochastic processes*. Analisis ini menghasilkan informasi probabillistk yang sering digunakan untuk membantu pembuatan keputusan dalam bidang bisnis dan industri, misalnya dalam masalah ganti merek, utang piutang, operasi, msin, pengawasan dan pergantian dan lain-lain.

Untuk menjelaskan cir-ciri proses makov akan diplih suatu contoh tentang masalah operasi kendaraan umum. Sebuah kendaran umum kalau tidak sedang diperbaiki tentu saja akan beroperasi. Jadi dalam konteks ini,kendaraan selalu berada pada salah satu dari dua status, yaitu narik atau mogok. Peruban dari satu statuske status yang lain pada periode (hari) beikutnya merupakansuau proses random yang dinyataka dalam probabilitas dan dinamakan probabilias transisi. Probabilitas-probabilitas ini dapatdisusu dalam bentuk matriks seperti

Dari status sekarang	Ke status (Besok)	
	Narik	**Mogok**
Narik	0,6	0,4
Mogok	0,8	0,2

Cara membaca matriks itu adalah, probabillitas kendaraan besok narik jika sekarang mook adalah 0,8 dan probabilitas besok mogok lagi adalah 0,2.

Probabilitas kendaraan besok narik ika sekarang narik adalah 0,6 dan probablitas beso mogok jika sekaang narik adalah 0,4.

Penggunaan pendekatan matriks memerlukan diperkenalkannya simbo-simbol. Misalkan probabilitas kendaraan narik pada periode ke i jika awalnya (periode 1) narik dilambangkan dengan :

Probabilitas Narik $\longrightarrow$ $N_n(i)$

Periode

Status Awal Narik

Ini berarti $N_n(2) = 0{,}6$ $M_n(2) – 0{,}4$ $N_m(2) = 0{,}8$ $M_m(2) = 0.2$ jika kendaraan narik pada hari ke I, maka berlaku probabilitas berikut ini :

$N_n(1) = 0$

$M_n(1) = 0$

Atau secara umum $N_n(i) + M_n(i) = 1$

Probabilitas kendaraan narik atapun mogol pada periode ke i + I dicari dengan rumus berikut :

$$(N_n(i+1)M_n(i+1) = (N_n(i)\ M_n(i)) \begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}4 \\ 0{,}8 & 0{,}2 \end{pmatrix}$$

Ini berarti probabilitas status selanjutnya adalah :

$$(N_n(3)\ M_n(3)) = (N_n(2)M_n(2)) \begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}4 \\ 0{,}8 & 0{,}2 \end{pmatrix} = (0{,}6\ 0{,}4 \begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}4 \\ 0{,}8 & 0{,}2 \end{pmatrix}$$

$$= 0{,}68\ 0.32$$

Dengna demikian yang sama diperoleh :

$(N_n(4)\ M_n(4)) = (0{,}664\ \ 0{,}336)$

$(N_n(5)\ M_n(5)) = (0{,}6672\ \ 0{,}3328)$

$(N_n(6)\ M_n(6)) = (0{,}6666\ \ 0{,}3334)$

$(N_n(7)\ M_n(7)) = (0{,}6667 \quad 0{,}3333)$

$(N_n(8)\ M_n(8)) = (0{,}6667 \quad 0{,}3333)$

Dalam banyak kasus, proses markov akan menuju kepada kondisi stady state artinya setelah proses berjalan selama beberapa periode probabilitas status tidak akan berubah, dan ini dinamakan probabilitas stady state. Untuk contoh diatas probabilitas stady state adalah :

$N_n(i) = 0{,}6667$ dan $M_n(i) = 0{,}3333$

Jika analisis dimulai dari ststus mogok, dapat ditunjukkan bahwa probabilitas stady state akan sama, yaitu :

$N_m(i) = 0{,}6667$ dan $M_m(i) = 0{,}3333$

Dengan demikian probabilitas steady state tidak tergantung pada status awalnya, hanya saja periode pencapaian dapat berbeda, namun ini bukan hal penting.

Probabilitas stady state dapat dicari lebih singkat seperti dijelaskan berikut. Pada kondidi stady state berarti $N_n(i + 1) = N_n(i)$ dan $M_n(i + 1) = M_p(i)$, sehingga rumus yang biasa digunakan untuk mencari probabilitas status menjadi :

$$(N_n(i)\ M_n(i)) = (N_n(i)\ M_n(i)) \begin{matrix} 0{,}6 & 0{,}4 \\ 0{,}8 & 0{,}2 \end{matrix}$$

Untuk mengurangi keruwetan, peiode i dapat dihilangkan, sehnga diperoleh dua buah persamaan, yaitu :

$N_n = 0{,}6\ N_n + 0{,}8\ M_n$

$M_{Nn\,=}\ 0{,}4\ N_n + 0{,}2\ M_n$

Degan mensubstitusikan N_n = 1- M_n ke persamaan terakhir didapat :

$M_n = 0{,}4\ (0{,}4 - M_n) + 0{,}2\ M_n$

$M_n = \frac{0{,}4}{1{,}2} = 0{,}3333$ dan $N_n = 0{,}6667$

6. Latihan Terjawab

1. Carilah solusi persamaan linier berkut dengan menggunakan matriks.

   $2\ X_1 + 12\ X_2 = 40$

   $8X_1 + 4\ X_2 = 28$

   Jawab :

   Ada tiga pilihan, yaitu :

   a) Metode Gaussian

   Pertama, tuliskan sistem persamaan itu dalam augmented matriks yaitu penggabungan matriks koefisien persamaan dengan vektor kolom konstan sisi kanan yang diletakkan disampingnya dengan batas garis.

$$\left\langle \begin{array}{cc|c} 2 & 12 & 40 \\ 8 & 4 & 28 \end{array} \right\rangle$$

   Melalui operasi berulan-ulang, arahkan matiks koefisien persamaan menjadi matriks identitas. Akhirnya diperoleh :

$$\left\langle \begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{array} \right\rangle$$

   Ini berarti solusinya adalah x_1 = 2 dan x_2 = 3.

b. Camer's Rule

$X_j = \frac{|A_j|}{|A|}$

X_j adalah variabel yang tidak diketahui.

$|A|$ adalah determinant matriks koefisien persamaan.

$|A_j|$ adalah determinant matriks yan dibentuk dari matriks A dengan mengganti kolom koefisien X_j dengan kolom konstan sisi kanan.

$A| = \begin{vmatrix} 2 & 12 \\ 8 & 4 \end{vmatrix} = 8 - 96 = -88$

$A| = \begin{vmatrix} 40 & 12 \\ 28 & 4 \end{vmatrix} = 160-336 = -176$

$A| = \begin{vmatrix} 2 & 40 \\ 8 & 28 \end{vmatrix} = 56 - 320 = -264$

Jadi $X_1 = \frac{-176}{-88} = 2$ dan $X_2 = \frac{-264}{-88} = 3$

c. Formula Inversi

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 12 \\ 8 & 4 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 40 \\ 28 \end{pmatrix} . \frac{1}{-88} \begin{pmatrix} 4 & -12 \\ -8 & 2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 40 \\ 28 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Jadi $X_1 = 2$ dan $X_2 = 3$

1. Dari model penentuan pendapatan Nasional berikut :

   $C = C_0 + b\,Y$

   $Y = C + I_0$

   Carilah nilai konsumsi dan pendapatan nasional mengunakan formula inversi.

Jawab :

Pertama, atur sedemikian rupa semua variabel berada disebelah kiri tanda =, sementara konstanta disebelah kanan agar memudahkan penulisan sistem persamaan dalam bentukl matriks.

C – b Y = C_0

-C + Y =I_0

$\begin{pmatrix} 1 - b \\ -1\ 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} C \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C\ 0 \\ I\ 0 \end{pmatrix}$

2. Dari model parsial berikut:

Q_d = 24 – 2 P

Q_S = -5 + 7 P

Carilah harga dan volume keseimbangan pasar dengan formula inversi.

Jawab:

Pasar seimbang jika Q_d=Q_s= Q. Kemudian atur demikian rupa memudahkan penulian bentuk matriks.

Q +2 P = 24

-C – 7 P = -5

$\begin{pmatrix} 1\ 2 \\ 1 - 7 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} Q \\ P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 \\ -5 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} Q \\ P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\ 2 \\ 1 - 7 \end{pmatrix}^{-1} . \begin{pmatrix} 24 \\ -5 \end{pmatrix} = -\frac{1}{9} \begin{pmatrix} -7 - 2 \\ -1\ 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 24 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 159/9 \\ 29/9 \end{pmatrix}$

Jadi, volume dan harga keseimbangan adalah 158/9 dan 2/9.

3. Apakah solusi sistem persamaan linier dengan matriks lebi efisien dibanding metode eliminasi ?

Jawab:

Dari contoh-contoh diatas jawabannya adalah tidak, apalagi jika tedapat lebih dari dua persamaan dalam sistem. Jadi disini jelas bahwa tujuan peggunaan bentk matriks adalah untuk menuliskan secara ringkas dan memperoeh formula solusi yang akn meudahkan jika dilakukan operasi-operasi selanjutnya. Dengan demikian, menemukan solusi itu sendiri bukan tujuan utama dari penggunaa matriks. Tapi jangan dilupakan bahwa penggnaan hassian matriks merupakan cara alternatif yangcukup enak untuk pengujian second order conditions, serta uji tanda definitas atau ji kecembungan (concavity) dalam masalah optimisasi.

BAB III
PENUTUP

A. KESIMPULAN

Matriks adalah suatu susunan atau penyajian berbentuk segi empat dari sekelompok angka, parameter, atau variabel. Angka-angka (parameter atau variabel) itu dinamakan unsur-unsur matriks. Unsur-unsur yang ditempatkan secara mendatar membentuk baris matriks, sedangkan unsur-unsur yang ditempatkan secara tegak membentuk kolom matriks. Unsur-unsur matriks biasanya diwadahi suatu tanda kurung. Antara unsur yang satu dengan yang lain tidak dipisahkan dengan tanda koma, tetapi cukup dengan memberikan jarak (ruang kosong).

Dalam setiap operasi baik untuk angka maupun matriks, selalu dilibatkan tanda sama dengan. Dua matriks $A = (a_{ij})$ dan $B = (b_{ij})$ dikatakan sama jika keduanya memiliki dimensi sama dan memiliki unsur-unsur yang sama untuk setiap posisi yang sesuai.

Dalam ekonomi matriks dapat digunakan untuk banyak tujuan. Pertama, bentuk matriks dapat menggantikan cara penulisan sistem persamaan secara lebih ringkas, menanalisa masalah dengan persamaan dan dalam membantu pembuatan keputusan.

DAFTAR PUSTAKA

Dumairy. *Matematika Terapan Untuk Bisnis dan Ekonomi*. Edisi Kedua. Yogyakarta: BPFE.2012.

Mulyono, Sri. *Matematika Ekonomi Dan Bisni*s. Jakarta: Mitra Wacana Media. 2017.

Zahri, Syahriman Yusi Imron. *Matematika Ekonomi (Teori dan Aplikasi)*. Jakarta : Mitra Wacana Media. 2017.