

# MECÁNICA DE FLUIDOS

Diego Alfonso Sámano Tirado  
*Ecología y Energía*  
Cuernavaca, México

Mihir Sen  
*Universidad de Notre Dame*  
Notre Dame, Indiana, EE.UU.

Versión: 15 de julio de 2009

# Índice general

<b>Prefacio</b>	<b>v</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Aplicaciones . . . . .	1
1.2. Definiciones . . . . .	1
1.3. Propiedades del flujo . . . . .	2
1.4. Propiedades del fluido . . . . .	4
1.5. Análisis dimensional . . . . .	6
1.6. Sistemas de unidades . . . . .	9
Problems . . . . .	9
<b>2. Cinemática de los fluidos</b>	<b>11</b>
2.1. Descripciones lagrangiana y euleriana . . . . .	11
2.2. Volumen de control y sistema . . . . .	11
2.3. Derivada material . . . . .	11
2.4. Teorema de Reynolds . . . . .	13
2.5. Líneas de flujo . . . . .	15
2.6. Circulación y vorticidad . . . . .	18
2.7. Tubos de corriente y tubos de vórtice . . . . .	19
2.8. Gradiente de velocidad . . . . .	19
2.9. Sistemas inerciales y no inerciales . . . . .	22
Problems . . . . .	24
<b>3. Ecuaciones de movimiento</b>	<b>27</b>
3.1. Conservación de masa . . . . .	27
3.2. Conservación de cantidad de movimiento . . . . .	28
3.2.1. Momentum lineal . . . . .	28
3.2.2. Momentum angular . . . . .	30
3.3. Conservación de energía . . . . .	30
3.4. Ecuaciones constitutivas . . . . .	32
3.4.1. Ecuación de Fourier . . . . .	33
3.4.2. Fluido ideal . . . . .	33
3.4.3. Fluido Newtoniano . . . . .	34
3.4.4. Fluidos no newtonianos . . . . .	35
3.5. Ecuaciones de movimiento de un fluido newtoniano . . . . .	35

<b>4. Teoremas especiales</b>	<b>37</b>
4.1. Teorema de Helmholtz . . . . .	37
4.2. Teorema de Kelvin . . . . .	38
4.3. Ecuación de vorticidad . . . . .	40
4.4. Ecuación de Bernoulli . . . . .	40
4.5. Ecuación de Crocco . . . . .	42
<b>5. Estática de fluidos</b>	<b>45</b>
5.1. Presión hidrostática . . . . .	45
5.2. Fluidos con autogravitación . . . . .	47
5.3. Fuerzas sobre superficies sumergidas . . . . .	48
5.4. Flotación . . . . .	51
5.5. Tensión superficial . . . . .	55
5.6. Equilibrio con aceleración uniforme . . . . .	61
<b>6. Flujo potencial</b>	<b>65</b>
6.1. Conceptos y definiciones . . . . .	65
6.2. Flujo bidimensional . . . . .	66
6.3. Flujos sencillos . . . . .	68
6.4. Flujos compuestos . . . . .	72
6.5. Flujos axisiméricos . . . . .	81
Problems . . . . .	85
<b>7. Flujo viscoso incompresible</b>	<b>87</b>
7.1. Soluciones exactas . . . . .	87
7.2. Flujo de Couette . . . . .	87
7.3. Flujo de Poiseuille . . . . .	88
7.4. Flujo entre cilindros giratorios . . . . .	90
7.5. Primer problema de Stokes . . . . .	92
7.6. Segundo problema de Stokes . . . . .	94
7.7. Capa límite . . . . .	97
7.8. Ecuaciones de la capa límite . . . . .	98
7.9. Solución de Blasius . . . . .	99
7.10. Método de la integral de momentum . . . . .	102
7.11. Separación de la capa límite . . . . .	104
<b>8. Flujo compresible</b>	<b>107</b>
8.1. Ecuaciones de flujo unidimensional . . . . .	107
8.2. Ondas acústicas . . . . .	108
8.2.1. Líquido . . . . .	110
8.2.2. Gas perfecto . . . . .	111
8.3. Propiedades de estancamiento y críticas . . . . .	111
8.4. Onda de choque . . . . .	112
8.4.1. Choque normal . . . . .	112
8.4.2. Choque oblicuo . . . . .	113
8.4.3. Flujo adiabático y sin fricción en ductos de área variable . . . . .	115
8.4.4. Flujo con transferencia de calor y sin fricción en ductos de área constante . . . . .	117
8.4.5. Flujo adiabático con fricción en ductos de área constante . . . . .	118

<b>A. Algebra y cálculo</b>	<b>121</b>
A.1. Serie de Taylor . . . . .	121
A.2. Serie binomial . . . . .	121
A.3. Regla de Leibnitz . . . . .	121
A.4. Identidades vectoriales . . . . .	121
A.5. Sistemas de coordenadas . . . . .	121
A.6. Operadores diferenciales . . . . .	123
A.7. Identidades de operadores . . . . .	123
A.8. Teoremas integrales . . . . .	124
<b>B. Ecuaciones de movimiento</b>	<b>125</b>
B.1. Vectorial . . . . .	125
B.2. Cartesiana . . . . .	125
B.3. Cilíndrica . . . . .	125
B.4. Esférica . . . . .	126
<b>C. Ecuaciones de termodinámica</b>	<b>127</b>
C.1. Leyes de termodinámica . . . . .	127
C.1.1. Primera . . . . .	127
C.1.2. Segunda . . . . .	127
C.2. Definiciones . . . . .	127
C.3. Gas perfecto . . . . .	128
<b>Bibliografía</b>	<b>129</b>



# Prefacio

Estos apuntes comenzaron a escribirse en 1975 cuando los autores trabajaban en la Facultad de Ingeniería de la *Universidad Nacional Autónoma de México*. Aunque todavía le falta mucho por hacer pensamos que aún en esta forma pueda ser útil para los estudiantes que llevan y profesores que imparten la materia. Seguiremos haciéndole cambios, por lo que agradecemos las sugerencias de los lectores. Agradecemos la ayuda de la Dra. Sara L. Moya del CENIDET por una revisión completa y el Dr. Juan Carlos Jáuregui por proporcionar una copia completa de la versión original escrita a mano.

Les agradecemos a lectores llamar nuestra atención a errores en el texto.

Diego Alfonso Sámano Tirado, Cuernavaca, México  
Mihir Sen, South Bend, Indiana, EE.UU.

Copyright ©, 2009.

# Capítulo 1

## Introducción

### 1.1. Aplicaciones

El flujo de fluidos es un fenómeno común a la vida diaria. El estudio de su mecanismo es esencialmente impulsado por entender la física involucrada, así como su control en diversas aplicaciones de ingeniería. La astrofísica, meteorología, oceanografía, aerodinámica, hidrodinámica, lubricación, ingeniería marina, turbomaquinaria, ingeniería de yacimientos e ingeniería de la combustión, son algunos de los campos donde la mecánica de fluidos se emplea. En este texto se tratarán las bases de la mecánica que son comunes a estas disciplinas. Habrá algunos ejemplos específicos no con el objeto de dar recetas para problemas en la práctica, sino con el objeto de mostrar los principios generales y su manejo.

### 1.2. Definiciones

#### *El continuo*

La materia consiste de moléculas en constante movimiento y colisión. Sin embargo, en la aproximación al continuo, se ignora la existencia de la estructura molecular y se considera una distribución continua de materia. Este punto de vista es válido si la longitud de la trayectoria libre promedio  $\Lambda$  de la molécula es mucho más pequeña que la dimensión de longitud  $l$  menor considerada en el problema físico. En otras palabras, el número de Knudsen (definido como  $\Lambda/l$ ) deberá ser mucho más pequeño que la unidad, para que la hipótesis del continuo sea válida.

#### *Fluido*

Se define el fluido como una sustancia que sufre una deformación continua cuando se le aplica un esfuerzo cortante muy pequeño. En cambio, cuando se le aplica la acción de un esfuerzo cortante pequeño a un sólido elástico no se deforma continuamente, sino que asume una configuración determinada fija. Esta distinción entre un sólido y un fluido es muy simplificada porque existen ciertos materiales que exhiben ambas características.

*Líquidos y gases*

Los fluidos se clasifican en líquidos y gases. Las fuerzas intermoleculares son mayores en los primeros, por lo que, al variar la presión o la temperatura los gases cambian fácilmente su volumen. La compresibilidad puede usarse para distinguir los líquidos de los gases; los gases son mucho más compresibles que los líquidos. Desde el punto de vista de la dinámica, no importa si el fluido es líquido o gas. Las leyes que se aplican son las mismas, pero en ocasiones, dependiendo del fluido que se trate, es posible despreciar algunos efectos y simplificar su estudio. Frecuentemente, líquidos tales como el agua pueden considerarse incompresibles.

**1.3. Propiedades del flujo**

En esta sección se definen algunas propiedades dinámicas y termodinámicas que interesan en el estudio del movimiento del fluido. Estas propiedades pueden representar un campo en el fluido, es decir, pueden tener una distribución espacial en el fluido, o bien de partícula a partícula cuando el fluido se considere de esta manera. El campo puede ser una variable escalar, vectorial o tensorial. El cálculo de estos campos en una situación determinada es un problema representativo de la mecánica de fluidos.

*Temperatura  $T$* 

Es un escalar que representa la actividad interna (escala microscópica) de una sustancia. Este concepto está ligado al transporte de energía en forma de calor. Dos regiones en contacto térmico que se encuentran a la misma temperatura no tienen transporte de calor entre ellas. Esta es la condición de equilibrio térmico que establece la ley cero de la termodinámica.

*Velocidad  $\mathbf{U}$* 

Es un vector que representa la dirección, sentido y magnitud de la rapidez de movimiento del fluido. El caso especial donde la velocidad es cero en todo el espacio considerado se estudia en la estática de los fluidos.

*Esfuerzo  $\boldsymbol{\tau}$* 

Si se toma una porción de fluido aislada se pueden considerar dos tipos de fuerzas actuando sobre esa porción: fuerzas de cuerpo y fuerzas de superficie. Las fuerzas de cuerpo son aquellas que actúan sobre el mismo sin contacto físico directo; por ejemplo: la fuerza de gravedad, la fuerza electromagnética, etc. Las fuerzas de superficie son debidas al material externo en contacto físico con la frontera de la porción considerada. En la figura 1.1 se muestra una porción aislada de fluido. Considere una fuerza  $d\mathbf{F}$  que actúa sobre un área infinitesimal  $dA$  de esa superficie, cuya dirección (de la superficie) se indica con el vector normal unitario  $\mathbf{n}$ .

La dirección de  $d\mathbf{F}$ , en general, no es la dirección de  $\mathbf{n}$ . Esta fuerza puede descomponerse en dos componentes:

$$d\mathbf{F} = dF_n \mathbf{n} + dF_t \mathbf{t}$$

donde  $\mathbf{t}$  es un vector unitario tangente al área infinitesimal. Esfuerzo se define como la fuerza que



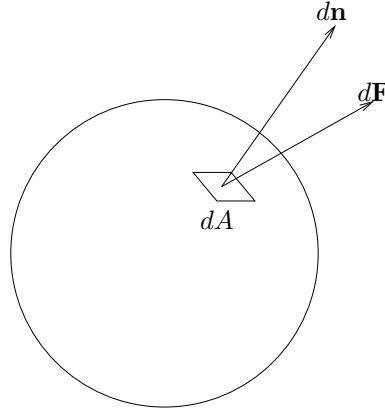


Figura 1.1: Elemento de fluido.

actúa en el área unitaria. En este caso se pueden definir dos tipos de esfuerzos:

$$\tau_n = \frac{dF_n}{dA}$$

$$\tau_t = \frac{dF_t}{dA}$$

$\tau_n$  es el esfuerzo normal,  $\tau_t$  es el esfuerzo tangencial o de corte.

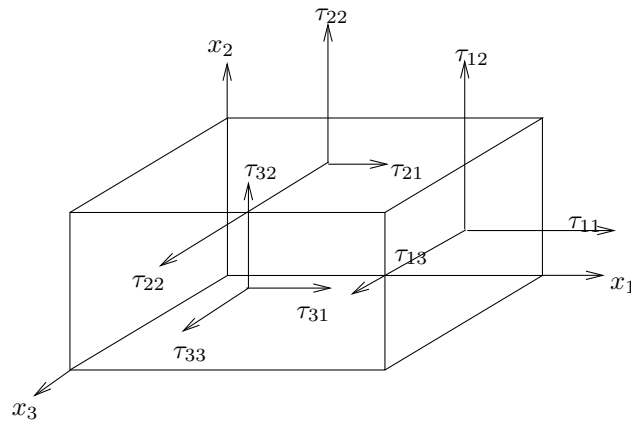


Figura 1.2: Esfuerzos sobre paralelepípedo.

Considérese un volumen infinitesimal en la forma de un paralelepípedo de lados  $dx_1, dx_2, dx_3$  como se muestra en la figura 1.2. Las fuerzas de superficie que actúan sobre cada una de las seis caras se pueden descomponer en las tres direcciones  $x_1, x_2, x_3$ . Estas fuerzas se pueden dividir entre el área correspondiente, obteniendo de esta manera los esfuerzos que actúan en cada área. Estos esfuerzos se muestran en la figura 1.2, para tres caras. En las tres caras restantes la representación

es similar. La convención de nomenclatura que se usa en la figura es la siguiente: el primer subíndice indica la cara sobre la cual actúa el esfuerzo, y el segundo subíndice su dirección.

Para especificar el estado de esfuerzos en un punto del fluido se necesitan los valores de los nueve componentes  $\tau_{ij}$ , que también se puede representar en la forma convencional de matriz.

$$\boldsymbol{\tau} = \begin{bmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \tau_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \tau_{33} \end{bmatrix}$$

Los términos diagonales representan esfuerzos normales, los restantes, esfuerzos tangenciales.

## 1.4. Propiedades del fluido

Las siguientes son algunas de las propiedades de los fluidos. Los valores de éstas pueden depender de otras variables como: temperatura, presión, etc.

### *Densidad*

La densidad  $\rho$  de un fluido es su masa por unidad de volumen. Si  $\Delta m$  es la masa de una porción de fluido dentro de un cubo de lado  $\Delta l$ , entonces el fluido tiene densidad

$$\rho = \lim_{\Delta l \rightarrow \epsilon} \frac{\Delta m}{(\Delta l)^3}$$

donde  $\epsilon$  es muy pequeña, pero de acuerdo con la consideración hecha en el continuo, es mucho más grande que la longitud de la trayectoria libre promedio de la partícula.

### *Volumen específico*

El volumen específico  $v_s$  de un fluido es su volumen por unidad de masa, o sea el recíproco de la densidad

$$v_s = \frac{1}{\rho} \tag{1.1}$$

### *Peso específico*

El peso específico  $\gamma$  es el peso por unidad de volumen del fluido

$$\gamma = \rho g$$

donde  $g$  es la aceleración debida a la gravedad.

### *Tensión superficial*

Cuando se hacen burbujas de jabón con un popote y se desea aumentar el tamaño de la burbuja, es necesario soplar más fuerte, lo que implica desarrollar un trabajo para aumentar el tamaño de la misma. En otras palabras, la energía se almacena en la superficie de la burbuja, a causa de las fuerzas intermoleculares.

El mismo efecto se observa si tenemos una película de jabón entre los alambres, como se muestra en la figura 1.3. Si se desea mantener un área de la película de jabón se necesita una fuerza. Esta fuerza representa la tensión superficial. El coeficiente de tensión superficial  $\sigma$  se define como

$$\sigma = \frac{F}{2L}$$

En este caso se tienen dos interfaces entre la solución de jabón y el aire. Por esta razón se necesita una fuerza  $F/2$  para cada superficie.

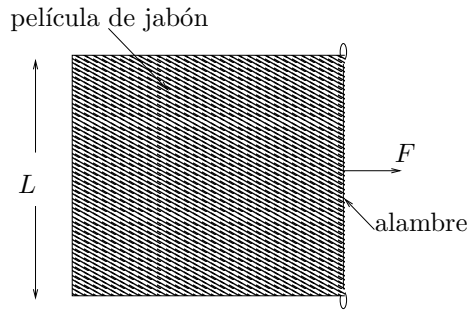


Figura 1.3: Película de jabón.

El valor de  $\sigma$  depende principalmente de la naturaleza de los fluidos que presentan interfase. Si se desea aumentar el área de la película se desplaza el alambre móvil una distancia  $l$ , lo que implica un trabajo de magnitud  $F l$ . Esta energía se almacena en las superficies.

#### *Compresibilidad*

Es el efecto de cambio de volumen con la variación de presión  $p$ . Este proceso de cambio de volumen puede ser isotérmico, isoentrópico o cualquier otro. Entonces el módulo de elasticidad volumétrico  $\beta_c$  se puede definir de varias maneras. Para un proceso isoentrópico:

$$\beta_c = -v_s \frac{\partial p}{\partial v_s}$$

Con la ayuda de (1.1) se obtiene

$$\beta_c = \rho \frac{\partial p}{\partial \rho}$$

#### *Dilatación volumétrica*

Es el efecto de cambio de volumen con la variación de temperatura  $T$  a presión constante. El coeficiente de dilatación volumétrica  $\beta_D$  se define

$$\beta_D = \frac{1}{v_s} \frac{\partial v_s}{\partial T} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial T}$$

donde la presión se mantiene constante.

*Calor específico*

Se define como el calor necesario para aumentar la temperatura de una masa unitaria un grado. Este proceso puede realizarse a volumen constante o a presión constante lo que conduce a dos valores de calor específico: calor específico a presión constante  $C_p$  y calor específico a volumen constante  $C_v$ .

*Viscosidad*

En la práctica se observa que algunos fluidos se mueven con mayor facilidad que otros. Esto se debe a fuerzas de rozamiento internas en el fluido. Este efecto se conoce como viscosidad. Una de las formas de cuantificar el efecto de la viscosidad consiste en considerar el flujo mostrado en la figura 7.1. El fluido se encuentra entre dos placas paralelas horizontales muy grandes, sin cambio de presión en la dirección  $x$ . La placa superior se mueve con respecto a la inferior con una velocidad baja  $U_0$ . Para muchos fluidos se observa que la velocidad del fluido en cada punto sólo tiene componente  $x$ , y que la variación con  $y$  es lineal como se muestra en la figura 7.1. La velocidad del fluido que está en contacto con las placas tienen la misma velocidad que éstas.

Se necesita una fuerza  $F$  para mantener la placa superior en movimiento uniforme. Esto es debido a que hay que vencer las fuerzas de rozamiento internas en el fluido. Si  $A$  representa el área de una placa, se define el coeficiente de viscosidad dinámica  $\mu$  como

$$\mu = \frac{F/A}{U_0/h}$$

El coeficiente de viscosidad cinemática  $\nu$  se define

$$\nu = \frac{\mu}{\rho}$$

Los fluidos que se comportan de la manera descrita anteriormente se llaman fluidos newtonianos.

## 1.5. Análisis dimensional

Todas las variables físicas se miden como múltiplos de ciertas cantidades llamadas unidades. Algunas unidades se expresan en términos de otras. Se pueden encontrar ciertas unidades, cuya combinación permite expresar todas las demás unidades de las variables físicas. Un ejemplo que satisface esta condición son las unidades de masa, longitud, tiempo y temperatura; otro ejemplo puede ser, las unidades de fuerza, longitud, tiempo y temperatura. La dimensión es el tipo de variable que puede medirse. En el primer ejemplo las dimensiones fundamentales son masa, longitud, tiempo y temperatura. Los dos sistemas de dimensiones fundamentales más convencionales son, por un lado  $M, L, t, T$  que representa: masa, longitud, tiempo y temperatura y  $F, L, t, T$  que representa: fuerza, longitud, tiempo y temperatura. Las dimensiones de otras variables físicas pueden expresarse en términos de las dimensiones fundamentales.

La mayor parte de las ecuaciones en las ciencias naturales son dimensionalmente homogéneas. De ésta manera se puede utilizar la ecuación misma para determinar la dimensión de uno de los parámetros si se conocen las dimensiones de los otros.

Cuadro 1.1: Dimensiones

Cantidad	Dimensiones	
	$M, L, t, T$	$F, L, t, T$
Masa	$M$	$Ft^2L^{-1}$
Longitud	$L$	$L$
Tiempo	$t$	$t$
Temperatura	$T$	$T$
Velocidad	$Lt^{-1}$	$Lt^{-1}$
Aceleracion	$Lt^{-2}$	$Lt^{-2}$
Fuerza	$MLt^{-2}$	$F$
Esfuerzo o presion	$ML^{-1}t^{-2}$	$FL^{-2}$
Densidad	$ML^{-3}$	$Ft^2L^{-4}$
Peso especifico	$ML^{-2}t^{-2}$	$FL^{-3}$
Viscosidad dinamica	$ML^{-1}t^{-1}$	$FtL^{-2}$
Viscosidad cinematica	$L^2t^{-1}$	$L^2t^{-1}$
Modulo de elasticidad volumetrica	$ML^{-1}t^{-2}$	$FL^{-2}$
Coefficiente de dilatacion volumetrica	$T^{-1}$	$T^{-1}$

*Grupos adimensionales*

Se pueden combinar las variables físicas de tal forma que resulta un grupo adimensional; por ejemplo

$$\begin{aligned} \frac{\rho UL}{\mu} &= \frac{(ML^{-3})(Lt^{-1})(L)}{(ML^{-1}t^{-1})} \\ &= M^0L^0t^0 \end{aligned}$$

Este grupo, llamado número de Reynolds, no tiene dimensiones.

*Teorema II de Buckingham*

Si  $n$  es el número de variables en el problema y  $r$  el número de dimensiones fundamentales involucradas en estas variables, entonces es posible encontrar  $n - r$  grupos adimensionales independientes. Se mostrará la manera de encontrar estos grupos adimensionales con el siguiente ejemplo. En mecánica de fluidos sin transmisión de calor, las siguientes variables pueden ser importantes: presión  $p$ , longitud  $l$ , coeficiente de viscosidad dinámica  $\mu$ , tensión superficial  $\sigma$ , velocidad del sonido  $a$ , aceleración de gravedad  $g$ , densidad  $\rho$  y velocidad  $U$ . Se desea encontrar los grupos adimensionales. El número de variables es 8. Las dimensiones de las variables en el sistema  $M, L, t, T$  son:  $[p] = ML^{-1}t^{-2}$ ,  $[l] = L$ ,  $[\mu] = ML^{-1}t^{-1}$ ,  $[\sigma] = Mt^{-2}$ ,  $[a] = Lt^{-1}$ ,  $[g] = Lt^{-2}$ ,  $[\rho] = ML^{-3}$ ,  $[U] = Lt^{-1}$ . Por convención, cuando se encierra una o más variables entre paréntesis cuadrados, se indican sus dimensiones. Como se puede observar el número de dimensiones involucradas es  $r = 3$ . Aplicando el teorema II de Buckingham se tiene:  $n - r = 8 - 3 = 5$  grupos adimensionales. Si  $\Pi$  es un número adimensional, se puede representar

$$\Pi = p^{\alpha_1} l^{\alpha_2} \mu^{\alpha_3} \sigma^{\alpha_4} a^{\alpha_5} g^{\alpha_6} \rho^{\alpha_7} U^{\alpha_8}$$

Sustituyendo las dimensiones de las variables, se tiene

$$[\Pi] = (ML^{-1}t^{-2})^{\alpha_1} (L)^{\alpha_2} (ML^{-1}t^{-1})^{\alpha_3} (Mt^{-2})^{\alpha_4} (Lt^{-1})^{\alpha_5} (Lt^{-2})^{\alpha_6} (ML^{-3})^{\alpha_7} (Lt^{-1})^{\alpha_8}$$

Pero  $\Pi$  no tiene dimensiones, entonces

$$\begin{aligned}\alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_7 &= 0 \\ -\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 + \alpha_5 + \alpha_6 - 3\alpha_7 + \alpha_8 &= 0 \\ -2\alpha_1 - \alpha_3 - 2\alpha_4 - \alpha_5 - 2\alpha_6 - \alpha_8 &= 0\end{aligned}$$

El anterior es un sistema de tres ecuaciones y ocho incógnitas, por lo que se pueden expresar tres de las incógnitas en función de las cinco restantes. Por ejemplo

$$\begin{aligned}\alpha_7 &= -\alpha_1 - \alpha_3 - \alpha_4 \\ \alpha_2 &= -\alpha_3 - \alpha_4 + \alpha_6 \\ \alpha_8 &= -2\alpha_1 - \alpha_3 - 2\alpha_4 - \alpha_5 - 2\alpha_6\end{aligned}$$

Sustituyendo estos valores en la ecuación de  $\Pi$  se tiene

$$\begin{aligned}\Pi &= p^{\alpha_1} l^{\alpha_3 - \alpha_4 - \alpha_5} \mu^{\alpha_3} \sigma^{\alpha_4} a^{\alpha_5} g^{\alpha_6} \rho^{-\alpha_1 - \alpha_3 - 2\alpha_4} U^{-2\alpha_1 - \alpha_3 - 2\alpha_4 - \alpha_5 - 2\alpha_6} \\ &= \left(\frac{p}{\rho U^2}\right)^{\alpha_1} \left(\frac{\mu}{l\rho U}\right)^{\alpha_2} \left(\frac{\sigma}{\rho l U^2}\right)^{\alpha_3} \left(\frac{a}{U}\right)^{\alpha_4} \left(\frac{lg}{U^2}\right)^{\alpha_5}\end{aligned}$$

Debido a que se consideró  $\Pi$  sin dimensiones y los exponentes  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_8$  son números sin dimensiones, los grupos entre paréntesis son adimensionales.

Los grupos que se encontraron en el ejemplo tienen nombre asignado en la mecánica de los fluidos.

$$\begin{aligned}\text{Número de Euler} &= \frac{p}{\rho U^2} \\ \text{Número de Reynolds} &= \frac{l\rho U}{\mu} \\ \text{Número de Weber} &= \frac{\rho U^2 l}{\sigma} \\ \text{Número de Mach} &= \frac{U}{a} \\ \text{Número de Froude} &= \frac{U^2}{lg}\end{aligned}$$

Si en vez de despejar  $\alpha_2, \alpha_7$ , y  $\alpha_8$  se despejan otros tres, se obtienen cinco grupos adimensionales diferentes, pero estos grupos son combinación de los primeros. Si se usa el sistema  $F, L, t, T$  el resultado es el mismo.

### *Similitud*

Muchas veces para estudiar un fenómeno experimentalmente es necesario reproducirlo en el laboratorio en una escala diferente. Por ejemplo, cuando se desea estudiar los problemas que se presentan en una presa, es más fácil construir un modelo en el laboratorio que estudiar en el prototipo. En ocasiones el modelo sirve para diseñar el prototipo que aun no se ha construido. Para diseñar un

avión se construye un modelo y se prueba en un túnel de viento. En la construcción de modelos es necesario relacionar los parámetros de éstos con el prototipo por medio de los grupos adimensionales. Cada grupo adimensional relevante debe tener el mismo valor en el modelo y en el prototipo. Muchas veces no es posible cumplir con todos los grupos adimensionales relevantes, en este caso se escogen los más importantes. Por ejemplo, en problemas donde el efecto viscoso sea muy importante, se debe escoger el número de Reynolds, donde el efecto de compresibilidad sea predominante, el número de Mach escala mejor al fenómeno. En la misma forma, los resultados de las pruebas en el modelo se transforman en información aplicable al prototipo. Esta similitud entre modelo y prototipo puede ser:

- (a) Geométrica: flujos con fronteras de la misma geometría pero escala diferente.
- (b) Cinemática: flujos donde existe semejanza en el movimiento.
- (c) Dinámica: flujos donde existe correspondencia en la distribución de esfuerzos.

## 1.6. Sistemas de unidades

Existen varios sistemas de unidades de uso común para expresar las cantidades físicas. La construcción de estos sistemas es arbitraria: se definen unidades fundamentales y a partir de estas se obtienen las unidades derivadas con las relaciones físicas correspondientes. Por ejemplo, si se escogen metros (m) y segundos (s) como unidades fundamentales de longitud y tiempo respectivamente, la unidad de velocidad queda definida en m/s. Pero también se pueden utilizar múltiplos de unidades, por ejemplo, la velocidad en kilómetros por hora (km/h).

Los sistemas comunes en ingeniería son:

- (a) Fuerza en kilogramo fuerza ( $\text{kg}_f$ ), longitud en metros (m), tiempo en segundos (s) y temperatura en grados Kelvin (K). En este sistema la masa es una unidad derivada que se obtiene a partir de la ecuación de la segunda ley de Newton para una partícula expresada como  $F = ma$ . La unidad derivada es entonces  $\text{kg}_f\text{s}^2/\text{m}$ , denominada como Unidad Técnica de Masa (UTM).
- (b) Masa en kilogramo masa ( $\text{kg}_m$ ), longitud en metros (m), tiempo en segundos (s) y temperatura en grados Kelvin (K). La fuerza es una unidad derivada y la ecuación de la segunda ley de Newton para una partícula toma la misma forma del caso anterior. La fuerza tiene las unidades fundamentales  $\text{kg}_m\text{m}/\text{s}^2$ , que en conjunto es la unidad derivada denominada Newton (N).
- (c) Masa en kilogramo masa ( $\text{kg}_m$ ), fuerza en kilogramo fuerza ( $\text{kg}_f$ ), longitud en metros (m) y temperatura en grados Kelvin (K). En este caso la ecuación de la segunda ley de Newton para una partícula no toma la misma forma debido a que no presentaría consistencia dimensional. Hay que definir una constante de proporcionalidad  $g_c$  con dimensiones, es decir,  $F = ma/g_c$ , donde  $g_c = 9.81 \text{ kg}_m\text{m}/\text{s}^2\text{kg}_f$ . En los sistemas anteriores  $g_c$  es unitario, de donde se obtiene que  $1 \text{ kg}_f = 9.81 \text{ kg}_m\text{m}/\text{s}^2 = 9.81 \text{ N}$ .

## Problemas

1. Dado el campo de velocidad

$$\mathbf{U}(x, y, z, t) = (xz^2 + y)\mathbf{i} - (yz^2)\mathbf{j} + (2xy - 3t)\mathbf{k}$$

obtenga el vector de velocidad en el punto (1,3,2), en el instante  $t = 1$  y la magnitud de la velocidad.  $[\mathbf{U}(1, 3, 2, 1) = 7\mathbf{i} - 12\mathbf{j} + 3\mathbf{k}; |\mathbf{U}| = \sqrt{202}]$

2. La distribución de las fuerzas de cuerpo por unidad de masa para el cubo en la figura 1.2 está dada por  $\mathbf{B} = 6x\mathbf{i} + 6\mathbf{j}$ . El campo de la densidad del material es  $\rho = x + y + z$ . Determine la fuerza de cuerpo total si cada lado es de una unidad de longitud. [ $5\mathbf{i} + 9\mathbf{j}$ ].
3. Encuentre la diferencia de presiones (interior y exterior) en la burbuja esférica de aire en agua de radio  $R$  y coeficiente de tensión superficial en la interfase [ $\Delta p = 2\sigma/R$ ]
4. Una fuerza  $\mathbf{F} = 10\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$  expresada en  $\text{kg}_f$  actúa sobre un área de 10 centímetros cuadrados que se localiza en el plano  $yz$ . Encuentre (a) las componentes normal y tangencial de la fuerza y sus magnitudes, (b) los esfuerzos tangencial y normal. [(a)  $F_n = 10\mathbf{i}$ ,  $F_t = 4\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ ,  $|F_n| = 10\text{kg}_f$ ,  $|F_t| = 5\text{kg}_f$ ; (b)  $\sigma_n = 1\text{kg}_f/\text{cm}^2$ ,  $\sigma_t = 0,5\text{kg}_f/\text{cm}^2$ ]
5. ¿Cuál es el incremento de presión necesario para variar el volumen en uno por ciento del volumen total de un líquido cuyo módulo de elasticidad volumétrico es  $\beta_c = 104\text{kg}_f/\text{cm}^2$ ? [ $\Delta p = 100\text{kg}_f/\text{cm}^2$ ]
6. Considere que los parámetros importantes en el flujo de fluidos en tubos son: densidad ( $\rho$ ), velocidad ( $U$ ), viscosidad ( $\mu$ ), diámetro de la tubería ( $D$ ), longitud ( $l$ ). Encuentre los grupos adimensionales. [ $\Pi_1 = \rho U D / \mu$ ,  $\Pi_2 = D / l$ ]
7. Se desea construir el modelo de un río en el cual se considera el número de Froude como el grupo adimensional más importante. El río tiene una profundidad media de 2 m, y la velocidad media del flujo es de 0.3 m/s. Si se quiere construir el modelo con una profundidad de 5 cm, encuentre la velocidad media del flujo en el mismo. [ $U = 0.047$  m/s].
8. Encontrar las unidades en que se pueden expresar:  $\mu, \nu, \sigma, \beta_c, \beta_D$ .



## Capítulo 2

# Cinemática de los fluidos

Se estudiará el movimiento de los fluidos sin importar la causa que lo origina. Se describirá la herramienta necesaria para describir este movimiento.

### 2.1. Descripciones lagrangiana y euleriana

Existen básicamente dos formas de describir el movimiento de un fluido. La primera manera llamada lagrangiana consiste en fijar la atención sobre una porción muy pequeña del fluido en movimiento. Por ejemplo, en el instante  $t = 0$  consideramos la partícula que ocupa la posición  $\mathbf{r}_0$ . Nos interesa seguir esta partícula con movimiento constante, la cual ocupa un lugar  $\mathbf{r}$  en un tiempo  $t$ . El vector de posición depende de qué partícula se haya elegido y qué tiempo haya transcurrido, o sea  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\mathbf{r}_0, t)$ . Si se tiene el valor de  $\mathbf{r}$  para todo  $\mathbf{r}_0$  y todo  $t$ , se tiene una descripción completa del flujo.

En la descripción llamada euleriana fijamos la atención en un punto  $(x, y, z)$  en el espacio. Nos interesa conocer las características del flujo como velocidad, densidad, temperatura, etc. de las partículas que pasen por este punto como función del tiempo. (Nótese que no se está siguiendo una partícula como en la descripción lagrangiana). Si se hace lo mismo para todos los puntos del espacio que ocupa el flujo, se tiene una descripción completa del flujo.

### 2.2. Volumen de control y sistema

Para aplicar las leyes físicas al flujo de un fluido es necesario definir los conceptos de *volumen de control* y de *sistema*. Se entiende por volumen de control una región fija en el espacio donde puede existir flujo de fluido a través de sus fronteras. Por esta razón, en diferentes instantes, se pueden tener diferentes partículas en el interior del volumen del control. Sistema se refiere a un conjunto de partículas en el cual permanecen siempre las mismas. Es decir, se está observando siempre una cantidad fija de materia.

### 2.3. Derivada material

El cambio con el tiempo de una variable de campo en un flujo se puede expresar en forma lagrangiana y euleriana. La rapidez de cambio siguiendo una partícula (punto de vista lagrangiano)

se llama derivada material (o total o sustancial) y se escribe  $D/Dt$ . Las letras mayúsculas se usan para enfatizar que se trata de una descripción lagrangiana. Considérese una variable de campo  $\alpha$ , que en una especificación euleriana tiene la forma  $\alpha = \alpha(x, y, z, t)$ . Siguiendo una partícula, el cambio de  $\alpha$  en un tiempo  $\delta t$  es  $(D\alpha/Dt)\delta t$ . En este tiempo  $\delta t$  la partícula se ha movido una distancia  $\delta x, \delta y, \delta z$  en las direcciones  $x, y, z$ , respectivamente.

Desde el punto de vista euleriano, el cambio de  $\alpha$  es

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} \delta t + \frac{\partial \alpha}{\partial x} \delta x + \frac{\partial \alpha}{\partial y} \delta y + \frac{\partial \alpha}{\partial z} \delta z$$

El cambio en ambas descripciones es el mismo por lo que

$$\frac{D\alpha}{Dt} \delta t = \frac{\partial \alpha}{\partial t} \delta t + \frac{\partial \alpha}{\partial x} \delta x + \frac{\partial \alpha}{\partial y} \delta y + \frac{\partial \alpha}{\partial z} \delta z$$

de donde

$$\frac{D\alpha}{Dt} = \frac{\partial \alpha}{\partial t} + \frac{\partial \alpha}{\partial x} \frac{\delta x}{\delta t} + \frac{\partial \alpha}{\partial y} \frac{\delta y}{\delta t} + \frac{\partial \alpha}{\partial z} \frac{\delta z}{\delta t}$$

Para  $\delta t$  muy pequeño,  $\delta x/\delta t, \delta y/\delta t, \delta z/\delta t$  tienden a las velocidades de la partícula en las direcciones  $x, y, z$ , que son  $u, v, w$  respectivamente. Entonces

$$\frac{D\alpha}{Dt} = \frac{\partial \alpha}{\partial t} + \frac{\partial \alpha}{\partial x} u + \frac{\partial \alpha}{\partial y} v + \frac{\partial \alpha}{\partial z} w$$

En notación indicial (en este texto, la notación indicial implica el uso de coordenadas cartesianas y una suma sobre índices repetidos):

$$\frac{D\alpha}{Dt} = \frac{\partial \alpha}{\partial t} + U_i \frac{\partial \alpha}{\partial x_i}$$

y en notación vectorial

$$\frac{D\alpha}{Dt} = \frac{\partial \alpha}{\partial t} + (\mathbf{U} \cdot \nabla) \alpha$$

En las ecuaciones anteriores el primer término de la derecha significa la rapidez de cambio  $\alpha$  en un punto (derivada local). Los otros términos representan el cambio convectivo de  $\alpha$ , es decir, el cambio a consecuencia del movimiento del fluido.

$\alpha$  es una variable de campo que puede ser escalar, vector o tensor. En el caso especial donde  $\alpha$  es la velocidad  $\mathbf{U}$

$$\begin{aligned} \frac{D\mathbf{U}}{Dt} &= \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + (\mathbf{U} \cdot \nabla) \mathbf{U} \\ \frac{DU_i}{Dt} &= \frac{\partial U_i}{\partial t} + U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \end{aligned}$$

donde el lado izquierdo representa la aceleración de la partícula. La forma  $(\mathbf{U} \cdot \nabla)$  sólo es válida en notación cartesiana, y las otras formas pueden deducirse de la ecuación (A.4). Además  $\mathbf{U} \cdot \nabla$  es una abreviación del operador  $u\partial/\partial x + v\partial/\partial y + w\partial/\partial z$ . Nótese que  $\mathbf{U} \cdot \nabla \neq \nabla \cdot \mathbf{U}$ .

## 2.4. Teorema de Reynolds

El teorema de transporte de Reynolds relaciona, la derivada lagrangiana de una integral de volumen de un sistema, con una integral en derivadas eulerianas.

Consideremos un sistema en dos instantes de tiempo  $t$  y  $t + \delta t$ . Sea  $\alpha$  alguna propiedad por unidad de volumen. El sistema puede tener un cambio de volumen y posición como se muestra en la figura 2.1.

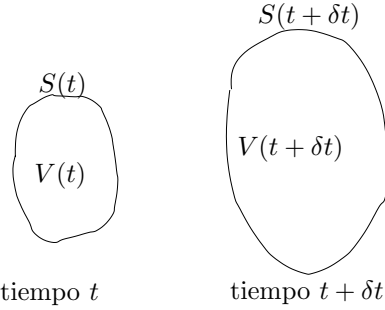


Figura 2.1: Sistema en tiempos  $t$  y  $t + \delta t$

La cantidad total de la propiedad  $\alpha$  en el sistema en el instante  $t$  es

$$\int_{V(t)} \alpha(t) dV$$

y la cantidad de  $\alpha$  en el instante  $t + \delta t$  es

$$\int_{V(t+\delta t)} \alpha(t + \delta t) dV$$

La derivada material de la cantidad total de  $\alpha$  en el sistema se puede expresar

$$\frac{D}{Dt} \int_{V(t)} \alpha(t) dV = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\delta t} \left\{ \int_{V(t+\delta t)} \alpha(t + \delta t) dV - \int_{V(t)} \alpha(t) dV \right\} \quad (2.2)$$

que se obtiene de la definición de derivada

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} \int_{V(t)} \alpha(t) dV &= \lim_{\delta t \rightarrow 0} \left[ \frac{1}{\delta t} \left\{ \int_{V(t+\delta t)} \alpha(t + \delta t) dV - \int_{V(t)} \alpha(t + \delta t) dV \right\} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\delta t} \left\{ \int_{V(t)} \alpha(t + \delta t) dV - \int_{V(t)} \alpha(t) dV \right\} \right] \quad (2.3) \end{aligned}$$

En esta ecuación

$$\lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\delta t} \left[ \int_{V(t+\delta t)} \alpha(t+\delta t) dV - \int_{V(t)} \alpha(t+\delta t) dV \right]$$

representa el integrando fijo con cambio de volumen como se muestra en la figura, y estas dos integrales se pueden reducir a

$$\lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\delta t} \int_{V(t+\delta t) - V(t)} \alpha(t+\delta t) dV \quad (2.4)$$

Si consideramos que un elemento  $dA$  de la superficie del sistema tiene dos posiciones diferentes en los dos instantes de tiempo considerados  $t$  y  $t + \delta t$ , el barrido de ésta superficie entre los dos instantes conforma el elemento de volumen  $dV$  como se muestra en la figura 2.3.

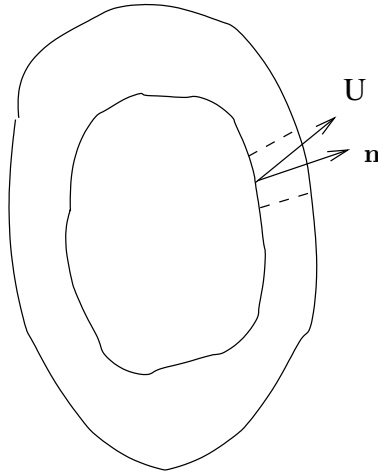


Figura 2.2: Cambio de volumen del sistema

Si  $\mathbf{n}$  es el vector normal a la superficie y  $\mathbf{U}$  representa la velocidad,  $\mathbf{U} \cdot \mathbf{n}$  será la velocidad normal a la superficie.

En el tiempo  $\delta t$  la superficie se mueve una distancia  $\mathbf{U} \cdot \mathbf{n} \delta t$  normal a la misma. Por lo que

$$dV = \mathbf{U} \cdot \mathbf{n} \delta t dA$$

La integral (2.4) se reduce a la integral sobre la superficie

$$\lim_{\delta t \rightarrow 0} \int S(t) \alpha(t+\delta t) \mathbf{U} \cdot \mathbf{n} \delta t dA$$

Tomando el límite se simplifica a

$$\int_{S(t)} \alpha(t) \mathbf{U} \cdot \mathbf{n} \delta t dA$$

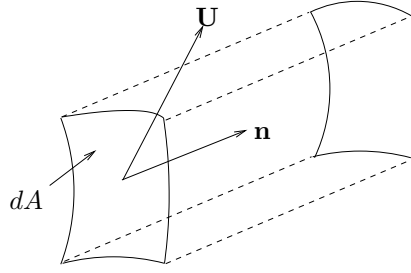


Figura 2.3: Movimiento de un elemento de área

Aplicando el teorema de Gauss (A.13), esta integral toma la forma

$$\int_{V(t)} \nabla \cdot (\alpha \mathbf{U}) dV$$

Los dos términos de la ecuación (2.3) pueden simplificarse como:

$$\begin{aligned} \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\delta t} \left[ \int_{V(t)} \alpha(t + \delta t) dV - \int_{V(t)} \alpha(t) dV \right] &= \int_{V(t)} \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\delta t} [\alpha(t + \delta t) - \alpha(t)] dV \\ &= \int_{V(t)} \frac{\partial \alpha}{\partial t} dV \end{aligned}$$

Con estas simplificaciones (2.3) toma la forma

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} \int_{V(t)} \alpha(t) dV &= \int_{V(t)} \left[ \frac{\partial \alpha}{\partial t} + \nabla \cdot (\alpha \mathbf{U}) \right] dV \\ &= \int_{V(t)} \left[ \frac{\partial \alpha}{\partial t} + \frac{\partial(\alpha U_i)}{\partial x_i} \right] dV \end{aligned}$$

## 2.5. Líneas de flujo

Existen tres tipos de líneas de flujo de uso común. Estas son: líneas de corriente, líneas de trayectoria y líneas de emisión.

### *Líneas de corriente*

Son líneas cuya tangente es en todos los puntos paralela al vector velocidad en un instante. El flujo donde las líneas de corriente no cambian con el tiempo se llama flujo permanente. En este caso el campo de velocidad no depende del tiempo. Consideremos una línea de corriente en la figura 2.4 con un elemento diferencial  $ds$ .

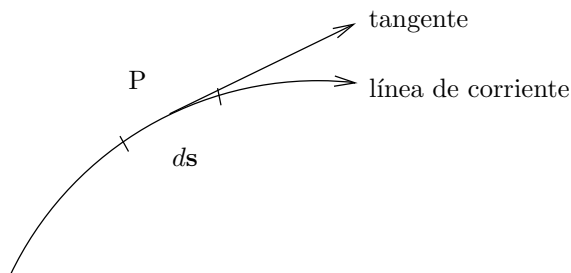


Figura 2.4: Elemento de una línea de corriente.

Este elemento tiene componentes  $dx, dy, dz$  en los ejes cartesianos  $x, y, z$ , respectivamente. Por la definición de línea de corriente, la velocidad  $\mathbf{U}$  del flujo en el punto  $P$  es paralela a la dirección de  $ds$ . Los componentes de  $\mathbf{U}$  son  $u, v, w$ . El vector unitario en la dirección del elemento  $ds$

$$\frac{ds}{ds} = \frac{dx}{ds}\mathbf{i} + \frac{dy}{ds}\mathbf{j} + \frac{dz}{ds}\mathbf{k}$$

debe ser igual al vector unitario de  $\mathbf{U}$

$$\frac{\mathbf{U}}{U} = \frac{u}{U}\mathbf{i} + \frac{v}{U}\mathbf{j} + \frac{w}{U}\mathbf{k}$$

donde  $ds$  y  $U$  son las magnitudes de  $ds$  y  $\mathbf{U}$ , respectivamente. Entonces

$$\begin{aligned}\frac{dx}{ds} &= \frac{u}{U} \\ \frac{dy}{ds} &= \frac{v}{U} \\ \frac{dz}{ds} &= \frac{w}{U}\end{aligned}$$

que implica

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w} \quad (2.7)$$

Esta es la ecuación de la línea de corriente en términos del campo de velocidad.

Una línea de corriente es entonces una curva imaginaria que conecta una serie de puntos en el espacio en un instante dado, de tal forma que todas las partículas que están sobre la curva en ese instante tienen velocidades cuyos vectores son tangentes a la misma. De aquí las líneas de corriente indican la dirección del movimiento de las partículas que se encuentran a lo largo de ellas, en el instante dado.

#### *Líneas de trayectoria*

La línea de trayectoria es la que describe una partícula en el flujo. Si  $\mathbf{r}$  indica la posición de una partícula, su velocidad es

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{U} \quad (2.8)$$

De la solución de esta ecuación se obtienen las ecuaciones paramétricas de las líneas de trayectoria.

*Líneas de emisión*

Una línea de emisión consiste de todos aquellos elementos de fluidos que en algún instante pasaron a través de un cierto punto del espacio. Si inyectamos continuamente un colorante en un punto en el flujo, la huella del colorante en cualquier instante representa una línea de emisión. El humo que sale de una chimenea es un ejemplo.

Resolviendo para un instante dado la ecuación (2.8), para las partículas que han pasado por  $\mathbf{r}_0$  se obtiene la ecuación de la línea de emisión. El método para determinar las ecuaciones de las líneas de flujo se muestra en el siguiente ejemplo.

*Ejemplo*

Dado el campo de velocidad bidimensional:  $\mathbf{U} = x\mathbf{i} - (y + t)\mathbf{j}$  calcule las ecuaciones de (a) la línea de corriente en  $t = 0$  que pasa por (1,1); (b) la línea de trayectoria de la partícula que tiene la posición (1,1) en  $t = 0$ ; (c) la línea de emisión cuando  $t = 0$  de las partículas que pasaron por (1,1).  
(a)

$$\frac{dx}{x} = -\frac{dy}{y+t}$$

de (2.7). La solución es

$$\ln x = -\ln(y+t) + \ln c$$

ó

$$x(y+t) = c$$

Para (1,1) y  $t = 0$  tenemos  $c = 1$ , de donde

$$x(y+t) = 1$$

es la ecuación de la línea de corriente.

(b) De (2.8) se establece

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= x \\ \frac{dy}{dt} &= -(y+t)\end{aligned}$$

La solución es

$$x = c_1 e^t \tag{2.9a}$$

$$y = c_2 e^{-t} + t - 1 \tag{2.9b}$$

para (1,1) y  $t = 0$ ;  $c_1 = 1$  y  $c_2 = 2$ .

De donde las ecuaciones paramétricas de la línea de trayectoria son

$$\begin{aligned}x &= e^t \\ y &= 2e^{-t} + t - 1\end{aligned}$$

Eliminando  $t$  se obtiene la ecuación de esta línea

$$y = \frac{2}{x} + \ln x - 1$$

(c) Las ecuaciones (2.9) representan la posición de una partícula. Consideremos la posición de las partículas que han pasado por (1,1) cuando  $t = \tau$  ( $\tau$  es una variable y depende de cada partícula). Sustituyendo estas condiciones en las ecuaciones (2.9) se obtiene  $c_1 = e^{-\tau}$ ;  $c_2 = (2 - \tau)e^{\tau}$ .

Las ecuaciones paramétricas de las líneas de emisión para un tiempo  $t$  son

$$\begin{aligned} x &= e^{t-\tau} \\ y &= (2 - \tau)e^{\tau-t} + t - 1 \end{aligned}$$

Para  $t = 0$ , tienen la forma

$$\begin{aligned} x &= e^{-\tau} \\ y &= (2 - \tau)e^{\tau} - 1 \end{aligned}$$

Eliminando  $t$  se obtiene la ecuación de la línea de emisión

$$y = \frac{2 + \ln x}{x} - 1$$

Puede observarse que las tres líneas de flujo son distintas. Para un caso de flujo permanente, las ecuaciones para las tres líneas de flujo serían iguales.

## 2.6. Circulación y vorticidad

La circulación contenida en una curva cerrada dentro del flujo, como en la figura 2.5, se define como la integral alrededor de la curva, de la componente de la velocidad tangente a la curva. Si  $ds$  representa un elemento de un contorno  $C$  y  $\mathbf{U}$  la velocidad en ese punto, la circulación es

$$\Gamma = \oint_C \mathbf{U} \cdot ds$$

Por convención esta integral se hace en sentido contrario a las manecillas del reloj.

Aplicando el teorema de Stokes

$$\Gamma = \int_A (\nabla \times \mathbf{U}) \cdot \mathbf{n} dA \quad (2.10)$$

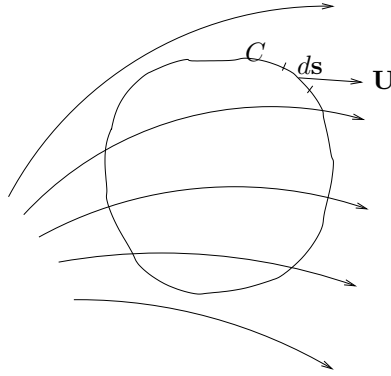
donde  $A$  es una superficie de la cual  $C$  es la frontera,  $\mathbf{n}$  es el vector unitario normal al elemento  $dA$  de la superficie.

La vorticidad se define como el rotacional del vector velocidad, o

$$\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{U} \quad (2.11a)$$

$$\begin{aligned} \omega_i &= \varepsilon_{jki} \frac{\partial U_j}{\partial x_k} \\ &= \frac{\partial U_k}{\partial x_j} - \frac{\partial U_j}{\partial x_k} \end{aligned} \quad (2.11b)$$



Figura 2.5: Circulación alrededor un contorno  $C$ .

De (2.10)

$$\Gamma = \int_A \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n} dA$$

En el caso especial, en que  $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}$ , el flujo se llama *irrotacional*. En este caso la circulación para cualquier contorno arbitrario es también cero.

## 2.7. Tubos de corriente y tubos de vórtice

Un tubo de corriente es aquel cuyas paredes están formadas por líneas de corriente. Por la definición de líneas de corriente, no existirá flujo a través de la pared del tubo de corriente. Si la sección del tubo es infinitesimal, éste se llama hilo de corriente.

Por analogía con línea de corriente, se define línea de vórtice como aquella cuya tangente es en todos los puntos paralela al vector vorticidad en un instante. También se define un tubo de vórtice como aquel cuyas paredes están formadas por líneas de vórtice. Si la sección del tubo es infinitesimal, éste se llama hilo de vórtice. En la figura 2.6(a) se muestra un segmento de tubo de corriente en las secciones 1 y 2. En la figura 2.6(b) se muestra de forma similar un tubo de vórtice.

## 2.8. Gradiente de velocidad

Un elemento de fluido en un flujo puede sufrir: traslación, rotación, cambio de forma lineal y angular. En un flujo donde el vector velocidad es igual en todos los puntos (flujo uniforme) sólo existe traslación del elemento. Pero en un flujo no uniforme existe además rotación y cambio de forma lineal y angular. A esto se le llama gradiente de velocidad. Entonces, el tensor de gradiente de velocidad ( $\mathbf{D}$  o  $D_{ij}$ ) queda definido

$$D_{ij} = \frac{\partial U_i}{\partial x_j}$$

$$\mathbf{D} = \nabla \mathbf{U}$$

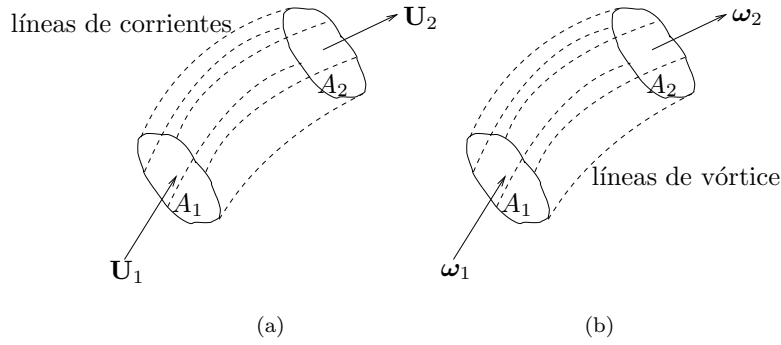


Figura 2.6: Tubos de (a) corriente y (b) vórtice.

Cualquier tensor puede descomponerse en la parte simétrica y la parte antisimétrica. Por lo cual

$$D_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right)$$

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{U} + (\nabla \mathbf{U})^T) + \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{U} - (\nabla \mathbf{U})^T)$$

donde  $(\nabla \mathbf{U})^T$  representa el tensor transpuesto de  $\nabla \mathbf{U}$ .

Llamemos

$$e_{ij} = \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \quad \text{tensor de rapidez de deformación}$$

$$\Omega_{ij} = \frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \quad \text{tensor de vorticidad}$$

o bien

$$\mathbf{e} = \nabla \mathbf{U} + (\nabla \mathbf{U})^T$$

$$\mathbf{\Omega} = \nabla \mathbf{U} - (\nabla \mathbf{U})^T$$

que implica

$$D_{ij} = \frac{1}{2} e_{ij} + \frac{1}{2} \Omega_{ij}$$

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2} \mathbf{e} + \frac{1}{2} \mathbf{\Omega}$$

### Rapidez de rotación

Considérese un elemento en el plano  $x_1, x_2$  que solo tiene rotación. La figura 2.7(b) muestra la configuración un tiempo  $\delta t$  después de la de 2.7(a). La línea AB tiene una velocidad angular  $\partial U_2 / \partial x_1$  en el sentido contrareloj. La línea AD tiene una velocidad angular  $\partial U_1 / \partial x_2$  en el sentido del reloj. El promedio de la rapidez de rotación del elemento en el sentido contrareloj es  $(\partial U_2 / \partial x_1 - \partial U_1 / \partial x_2) / 2$ .

De la ecuación (2.11) se ve que la cantidad entre paréntesis es la componente de la vorticidad en el eje  $x_3$ , que es perpendicular al elemento mostrado.

$$\omega_3 = \frac{\partial U_2}{\partial x_1} - \frac{\partial U_1}{\partial x_2}$$

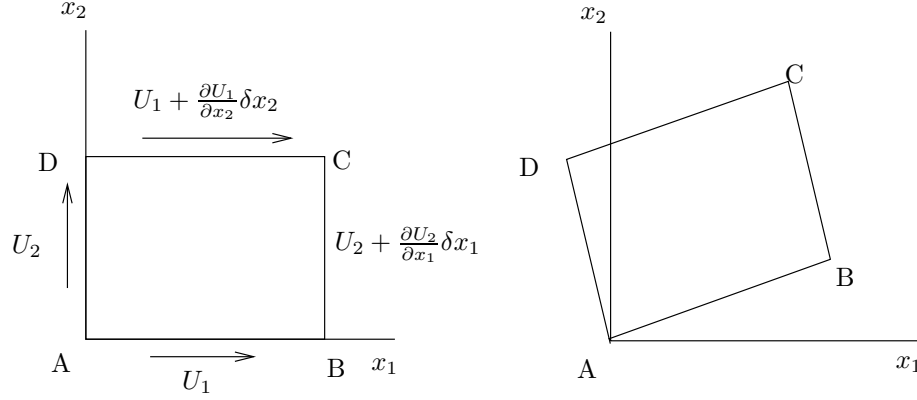


Figura 2.7: Rotación de un elemento de tamaño  $\delta x_1 \times \delta x_2$ .

En el espacio tridimensional el elemento girará sobre los tres ejes, y la rapidez de rotación sobre cualquier eje es la mitad de la componente de la vorticidad en este eje. Además, se observa que el tensor antisimétrico

$$\mathbf{\Omega} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial U_1}{\partial x_2} - \frac{\partial U_2}{\partial x_1} & \frac{\partial U_1}{\partial x_3} - \frac{\partial U_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial U_2}{\partial x_1} - \frac{\partial U_1}{\partial x_2} & 0 & \frac{\partial U_2}{\partial x_3} - \frac{\partial U_3}{\partial x_2} \\ \frac{\partial U_3}{\partial x_1} - \frac{\partial U_1}{\partial x_3} & \frac{\partial U_3}{\partial x_2} - \frac{\partial U_2}{\partial x_3} & 0 \end{bmatrix}$$

tiene el vector correspondiente

$$\left( \frac{\partial U_3}{\partial x_2} - \frac{\partial U_2}{\partial x_3} \right) \mathbf{i} + \left( \frac{\partial U_1}{\partial x_3} - \frac{\partial U_3}{\partial x_1} \right) \mathbf{j} + \left( \frac{\partial U_2}{\partial x_1} - \frac{\partial U_1}{\partial x_2} \right) \mathbf{k}$$

que es el vector de vorticidad  $\boldsymbol{\omega}$ . El tensor  $\mathbf{\Omega}$  es entonces el tensor de vorticidad.

#### Rapidez de deformación

Considérese ahora que el elemento en la figura 2.8(a) no tiene rotación pero cambia su forma geométrica. Después de un tiempo  $\delta t$  el elemento tiene la configuración 2.8(b).

De la figura

$$\frac{d\theta_1}{dt} = \frac{\partial U_2}{\partial x_1}$$

$$\frac{d\theta_2}{dt} = \frac{\partial U_1}{\partial x_2}$$

La suma representa la rapidez de cambio de forma del elemento  $(\partial U_2/\partial x_1 + \partial U_1/\partial x_2)$  en este plano.

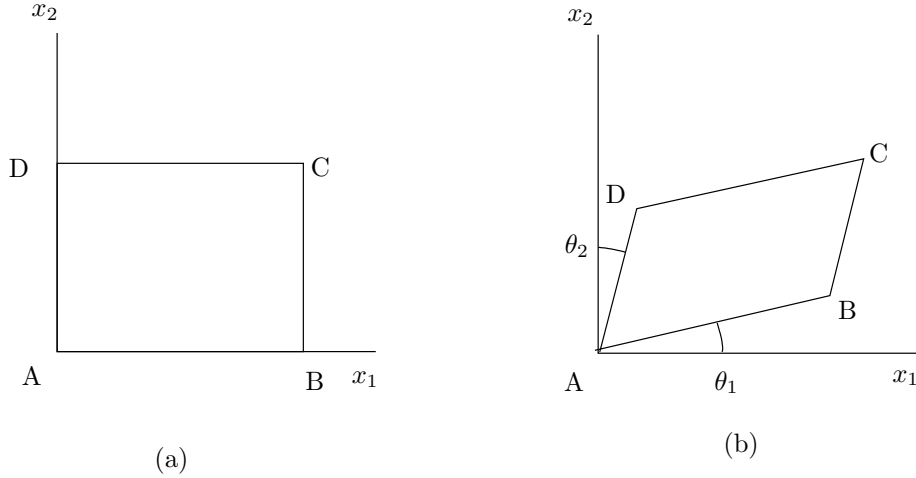


Figura 2.8: Deformación de un elemento de tamaño  $\delta x_1 \times \delta x_2$ .

Figura 2.9: figura 2.8.2

En un espacio tridimensional, los elementos del tensor representan la rapidez de cambio de forma o la rapidez de corte de un elemento tridimensional:

$$\mathbf{e} = \begin{bmatrix} 2\frac{\partial U_1}{\partial x_1} & \frac{\partial U_1}{\partial x_2} + \frac{\partial U_2}{\partial x_1} & \frac{\partial U_1}{\partial x_3} + \frac{\partial U_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial U_2}{\partial x_1} + \frac{\partial U_1}{\partial x_2} & 2\frac{\partial U_2}{\partial x_2} & \frac{\partial U_2}{\partial x_3} + \frac{\partial U_3}{\partial x_2} \\ \frac{\partial U_3}{\partial x_1} + \frac{\partial U_1}{\partial x_3} & \frac{\partial U_3}{\partial x_2} + \frac{\partial U_2}{\partial x_3} & 2\frac{\partial U_3}{\partial x_3} \end{bmatrix}$$

Los términos diagonales representan el cambio de forma lineal. El resto, el cambio de forma angular. El tensor  $\mathbf{e}$  se llama tensor de rapidez de deformación.

## 2.9. Sistemas inerciales y no inerciales

A veces se miden las variables de campo con respecto a un sistema de coordenadas en movimiento. Estas variables tienen relación con respecto a otro sistema fijo. En este último sistema, la segunda ley de Newton para una partícula:  $\mathbf{F} = m d\mathbf{U}/dt$ , es válida. Esto puede servir para definir el sistema fijo también llamado inercial. Las variables de campo escalares son invariantes con respecto al sistema escogido. A continuación se analizará la transformación de otras variables.

Considérese un sistema inercial  $S_I$  y otro sistema no inercial  $S_N$ . El origen de  $S_N$  tiene posición  $\mathbf{r}_0$  y velocidad  $\mathbf{U}_0$  con respecto a  $S_I$  y sus ejes de coordenadas tienen una velocidad angular  $\boldsymbol{\Omega}$  con respecto a  $S_I$ . Los subíndices  $I$  y  $N$  se refieren a las variables medidas en los sistemas inercial y no inercial respectivamente. La posición de un punto queda determinada por

$$\mathbf{r}_I = \mathbf{r}_0 + \mathbf{r}_N \quad (2.16)$$

En coordenadas cartesianas

$$\mathbf{r}_N = x_{iN} \mathbf{i}_{iN} \quad (2.17)$$

La derivada con respecto al tiempo de (2.16) es:

$$\frac{d\mathbf{r}_I}{dt} = \frac{d\mathbf{r}_0}{dt} + \frac{d\mathbf{r}_N}{dt} \quad (2.18)$$

De (2.17):

$$\frac{d\mathbf{r}_N}{dt} = \left( \frac{dx_{iN}}{dt} \right) \mathbf{i}_{iN} + x_{iN} \left( \frac{d\mathbf{i}_{iN}}{dt} \right)$$

$\mathbf{i}_{iN}$  son las bases del sistema  $S_N$ , que por el movimiento de los ejes tienen derivadas con respecto al tiempo. En la figura 2.10 se muestran las posiciones del vector  $\mathbf{i}_{iN}$  en un instante  $t$  y otro  $t + \delta t$ .

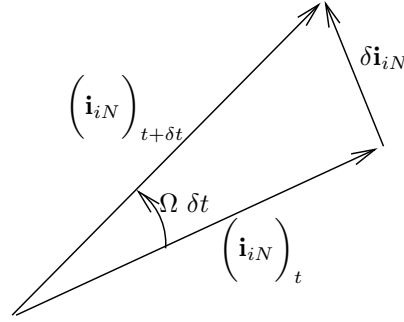


Figura 2.10: Rotación del vector unitario.

En la figura (2.10) el vector diferencia

$$\delta \mathbf{i}_{iN} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{i}_{iN} \delta t$$

de donde

$$\frac{d\mathbf{i}_{iN}}{dt} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{i}_{iN}$$

entonces

$$\frac{d\mathbf{r}_N}{dt} = \mathbf{U} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_N \quad (2.19)$$

y de (2.18)

$$\mathbf{U}_I = \mathbf{U}_0 + \mathbf{U}_N + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_N$$

Derivando con respecto al tiempo se obtiene la aceleración

$$\frac{d\mathbf{U}_I}{dt} = \frac{d\mathbf{U}_0}{dt} + \frac{d\mathbf{U}_N}{dt} + \frac{d\boldsymbol{\Omega}}{dt} \times \mathbf{r}_N + \boldsymbol{\Omega} \times \frac{d\mathbf{r}_N}{dt} \quad (2.20)$$

Pero

$$\mathbf{U}_N = U_{iN} \mathbf{i}_{iN}$$

De manera similar que en (2.19)

$$\frac{d\mathbf{U}_N}{dt} = \mathbf{a}_N + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{U}_N \quad (2.21)$$

utilizando (2.19) y (2.21) en (2.20) se tiene

$$\mathbf{a}_I = \mathbf{a}_0 + \mathbf{a}_N + 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{U}_N + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_N) + \frac{d\boldsymbol{\Omega}}{dt} \times \mathbf{r}_N$$

donde

$$\mathbf{a}_0 = \frac{d\mathbf{U}_0}{dt}$$

En esta ecuación se observa que la aceleración  $\mathbf{a}_I$  medida en  $S_I$  no es igual a la aceleración  $\mathbf{a}_N$  medida en  $S_N$ . El término  $2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{U}_N$  se llama la aceleración de Coriolis y el término  $\boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_N)$  la aceleración centrípeta.

Para un flujo de un fluido, la aceleración de una partícula corresponde a la derivada material y se puede escribir

$$\frac{D\mathbf{U}_I}{Dt} = \mathbf{a}_0 + \frac{D\mathbf{U}_N}{Dt} + 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{U}_N + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_N) + \frac{d\boldsymbol{\Omega}}{dt} \times \mathbf{r}_N \quad (2.22)$$

## Problemas

1. Obtenga la forma de la derivada material en coordenadas cilíndricas.
2. Calcule la aceleración de una partícula en el punto (1,3,2) y  $t = 1$  para

$$\mathbf{U}(x, y, z, t) = (xz^2 + y)\mathbf{i} - (yz^2)\mathbf{j} + (2xy - 3t)\mathbf{k}$$

$$[28\mathbf{i} + 12\mathbf{j} + 15\mathbf{k}]$$

3. Considere el flujo bidimensional definido por  $\mathbf{U} = x(1 + 2t)\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ . Determine (a) en el tiempo  $t = 0$ , la línea de corriente que pasa por (1,1); (b) La línea de la trayectoria de partícula que pasa por (1,1) en  $t = 0$ ; (c) la línea de emisión en el tiempo  $t = 0$  de las partículas que pasaron por (1,1). Dibuje las tres líneas. [(a)  $x = y$ ; (b)  $x = y1 + \ln y$ ; (c)  $x = y1 - \ln y$ ]
4. Muestre que en coordenadas polares las líneas de corriente son la solución de

$$\frac{dr}{U_r} = \frac{rd\theta}{U_\theta}$$

5. En el flujo plano:  $U_r = U_0 \cos(1 - a^2/r^2)$ ;  $U_\theta = -U_0 \sin \theta(1 + a^2/r^2)$ , encuentre la línea de corriente que pasa por  $(r, \theta) = (2a, \pi/2)$ . [ $r/(r^2 - a^2) = (2/3a) \sin \theta$ ]
6. Considere el flujo bidimensional  $\mathbf{U} = (1 + x)\mathbf{i} + (x + y)\mathbf{j}$  Determine : las líneas de flujo que pasan por (1,1). [ $y = (x^3 + 5)/(3(1 + x))$ ]
7. Calcule el vector vorticidad del flujo en

$$\mathbf{U}(x, y, z, t) = (xz^2 + y)\mathbf{i} - (yz^2)\mathbf{j} + (2xy - 3t)\mathbf{k}$$

$$\text{en el punto } (1,3,2). [14\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}]$$

8. Para un flujo laminar entre dos placas paralelas estacionarias, la velocidad del fluido está dada por  $\mathbf{U} = U_0[1 - (z/b)^2]\mathbf{i}$ . Encuentre y grafique la distribución de vorticidad. [ $-U_0(2z/b^2)\mathbf{j}$ ]
9. Para el flujo

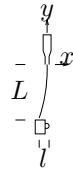
$$\mathbf{U} = (2x + 3y + 6z)\mathbf{i} + (x + 2y)\mathbf{j} + (x - 2y - 4z)\mathbf{k}$$

determine: (a) el campo de vorticidad; (b) la circulación alrededor de un cuadrado con vértices en (0,0,0), (1,0,0), (1,1,0) y (0,1,0). [(a)  $-2\mathbf{i} + 5\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ ; (b)  $-2$ ]

10. Para el flujo del problema 9 encuentre (a) el tensor de vorticidad, (b) el tensor de rapidez de deformación, (c) el tensor de gradiente de velocidad.

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 5 \\ -2 & 0 & 2 \\ -5 & -2 & 0 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 4 & 4 & 7 \\ 4 & 4 & -2 \\ 7 & -2 & -8 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & -4 \end{bmatrix}$$

11. En el flujo del problema 8 encuentre las componentes del tensor de rapidez de deformación que existen. [ $e_{13} = e_{31} = -U_0 2z/b^2$ ]
12. Verifique que el flujo del problema 5 es irrotacional para  $r > a$ .
13. Viviendo en un sistema de referencia el cual es casi inercial estamos acostumbrados a sostener nuestro vaso mas o menos directamente debajo de la botella invertida mientras se sirve la cerveza. Para una separación vertical dada  $L$ , ¿donde debe poner su vaso cuando viaja en un tren acelerado  $a$ ?



14. Se deja caer una masa desde una torre de 100m de altura en la ciudad de México. Tomando en cuenta la aceleración de la gravedad y la aceleración de Coriolis debida a la rotación de la tierra, encuentre la desviación de la masa con respecto a una vertical cuando llega al piso. [6.183 cm]
15. Una masa se hace girar atada a un cordel con una velocidad angular de 120 rev/min, calcular su aceleración en un sistema inercial si el cordel tiene una longitud de 1m desde el centro de giro a la masa. [158 m/s<sup>2</sup>].
16. Sobre una ruleta que gira a 1 rad/seg, una pelota que se encuentra en la posición  $\mathbf{r} = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$  m tiene una velocidad  $\mathbf{U} = 2\mathbf{i}$  m/s con respecto a la ruleta. Encuentre la velocidad y aceleración en un sistema fijo en el instante que ambos sistemas coinciden. [ $-\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$ ;  $-4\mathbf{i} + \mathbf{j}$ ]





## Capítulo 3

# Ecuaciones de movimiento

### 3.1. Conservación de masa

La masa no se crea ni se destruye, sino que se conserva. Este principio es uno de los básicos en el estudio del movimiento de los fluidos. Se desarrollará este concepto en forma de ecuaciones diferenciales e integrales.

Considérese un volumen de control de forma arbitraria en el flujo. Por el principio de conservación de masa, la suma de la rapidez de variación de la masa dentro del volumen y la salida neta de masa a través de la superficie del volumen es cero.

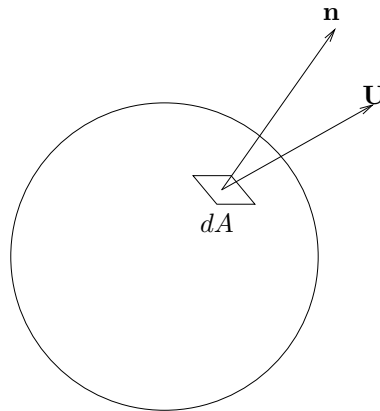


Figura 3.1: Elemento de fluido.

Por lo tanto la forma integral es

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dV + \int_A \rho \mathbf{U} \cdot \mathbf{n} dA = 0 \quad (3.1)$$

Transformando la segunda integral con el teorema de la divergencia de Gauss (A.13), e introduciendo

la derivada dentro de la primera integral (el volumen  $V$  es independiente del tiempo)

$$\int_V \left[ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{U}) \right] dV = 0$$

Como el volumen  $V$  es arbitrario esta ecuación es válida para cualquier volumen. Esto implica que el integrando es cero.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{U}) = 0 \quad (3.2a)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho U_j) = 0 \quad (3.2b)$$

Esta es la forma diferencial de la conservación de masa. A estas ecuaciones se les llama ecuaciones de continuidad.

Desarrollando (3.2) y utilizando la derivada material la ecuación de continuidad se puede escribir

$$\begin{aligned} \frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{U} &= 0 \\ \frac{D\rho}{Dt} + \rho \frac{\partial U_j}{\partial x_j} &= 0 \end{aligned}$$

Para un flujo incompresible ( $\rho = \text{constante}$ ) la ecuación de continuidad se simplifica a

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{U} &= 0 \\ \frac{\partial U_j}{\partial x_j} &= 0 \end{aligned}$$

## 3.2. Conservación de cantidad de movimiento

### 3.2.1. Momentum lineal

Esta es la consideración de la segunda ley de Newton: la suma de las fuerzas sobre una partícula es igual a la rapidez de variación de su momentum lineal. En el estudio de medios continuos este concepto lagrangiano se transforma a una forma euleriana para facilitar su manejo.

Considérese un sistema con un campo de velocidad  $\mathbf{U}$ , fuerzas de cuerpo por unidad de masa  $\mathbf{f}$  y fuerzas superficiales por unidad de área representadas por el vector  $\mathbf{P}$ . Aplicando la segunda ley de Newton a este sistema

$$\frac{D}{Dt} \int_V \rho \mathbf{U} dV = \int_A \mathbf{P} dA + \int_V \rho \mathbf{f} dV \quad (3.5a)$$

$$\frac{D}{Dt} \int_V \rho U_i dV = \int_A P_i dA + \int_V \rho f_i dV \quad (3.5b)$$

El vector  $\mathbf{P}$  está relacionado con el tensor de esfuerzos  $\boldsymbol{\tau}$  definido en la sección 1.4. De la figura 1.2 se observa que la componente total en la dirección 1,  $P_1$ , es la suma de las fuerzas en la dirección 1 en las caras 1,2 y 3. Entonces  $P_1 = \tau_{11}n_1 + \tau_{21}n_2 + \tau_{31}n_3$ . Generalizando:

$$\mathbf{P} = \boldsymbol{\tau} \mathbf{n} \quad (3.6a)$$

$$P_{ij} = \tau_{ji}n_j \quad (3.6b)$$

Se puede simplificar la forma integral de la ecuación (3.5), aplicando el teorema de Reynolds en el lado izquierdo y (3.6) en la primera integral del lado derecho

$$\begin{aligned} \int_V \left[ \frac{\partial(\rho \mathbf{U})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{U} \mathbf{U}) \right] &= \int_A \boldsymbol{\tau} \mathbf{n} \, dA + \int_V \rho \mathbf{f} \, dV \\ \int_V \left[ \frac{\partial(\rho U_i)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} (\rho U_i U_k) \right] &= \int_A \tau_{ji} n_j \, dA + \int_V \rho f_i \, dV \end{aligned}$$

Aplicando el teorema de Gauss (A.13) a la primera integral del lado derecho

$$\begin{aligned} \int_V \left[ \frac{\partial(\rho \mathbf{U})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{U} \mathbf{U}) \right] dV &= \int_A \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} \, dA + \int_V \rho \mathbf{f} \, dV \\ \int_V \left[ \frac{\partial(\rho U_i)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} (\rho U_i U_k) \right] dV &= \int_A \frac{\partial \tau_{ji}}{\partial x_j} \, dA + \int_V \rho f_i \, dV \end{aligned}$$

Debido a que el volumen  $V$  es arbitrario:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho \mathbf{U})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{U} \mathbf{U}) &= \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \rho \mathbf{f} \\ \frac{\partial(\rho U_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho U_i U_k)}{\partial x_k} &= \frac{\partial \tau_{ji}}{\partial x_j} + \rho f_i \end{aligned}$$

O bien

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{U} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{U} \nabla \cdot (\rho \mathbf{U}) + (\rho \mathbf{U} \cdot \nabla) \mathbf{U} &= \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \rho \mathbf{f} \\ \rho \frac{\partial U_i}{\partial t} + U_i \frac{\partial \rho}{\partial t} + U_i \frac{\partial(\rho U_k)}{\partial x_k} + \rho U_k \frac{\partial U_i}{\partial x_k} &= \frac{\partial \tau_{ji}}{\partial x_j} + \rho f_i \end{aligned}$$

El segundo y tercer término es un múltiplo de la ecuación de continuidad (3.2). Entonces

$$\rho \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + (\rho \mathbf{U} \cdot \nabla) \mathbf{U} = \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \rho \mathbf{f} \quad (3.11a)$$

$$\rho \frac{\partial U_i}{\partial t} + \rho U_k \frac{\partial U_i}{\partial x_k} = \frac{\partial \tau_{ji}}{\partial x_j} + \rho f_i \quad (3.11b)$$

Esta es la forma diferencial de la conservación de momentum. Usando la derivada material

$$\begin{aligned} \rho \frac{D\mathbf{U}}{Dt} &= \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \rho \mathbf{f} \\ \rho \frac{DU_i}{Dt} &= \frac{\partial \tau_{ji}}{\partial x_j} + \rho f_i \end{aligned}$$

Esta expresión muestra el balance entre la aceleración por unidad de volumen del lado izquierdo y las fuerzas de superficie y las de cuerpo respectivamente del lado derecho.

### 3.2.2. Momentum angular

La conservación del momentum angular implica que la suma de los momentos de las fuerzas que actúan sobre un sistema es igual a la rapidez de cambio del momentum angular. Esta relación es útil en algunos problemas que involucran rotación del fluido, por ejemplo, turbomaquinaria.

El momento del momentum lineal (momentum angular) con respecto al origen del elemento de masa  $\rho dV$  del sistema es  $\rho \mathbf{r} \times \mathbf{U} dV$ , donde es  $\mathbf{r}$  el vector de posición de este elemento. La fuerza  $\mathbf{P} dA$  sobre un elemento de la superficie del sistema tiene un momento  $\mathbf{r} \times \mathbf{P} dA$  y la fuerza de cuerpo sobre el elemento de masa  $\rho dV$  del sistema tiene un momento  $\rho \mathbf{r} \times \mathbf{f} dA$ . Según la conservación de momentum angular para todo el sistema es

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} \int_V \rho \mathbf{r} \times \mathbf{U} dV &= \int_A \mathbf{r} \times \mathbf{P} dA + \int_V \rho \mathbf{r} \times \mathbf{f} dA \\ \frac{D}{Dt} \int_V \rho \varepsilon_{ijk} r_i U_j dV &= \int_A \varepsilon_{ijk} r_i P_j dA + \int_V \rho \varepsilon_{ijk} r_i f_j dA \end{aligned}$$

Sustituyendo  $\mathbf{P}$  de (3.6)

$$\frac{D}{Dt} \int_V \rho \mathbf{r} \times \mathbf{U} dV = \int_A \mathbf{r} \times (\boldsymbol{\tau} \mathbf{n}) dA + \int_V \rho \mathbf{r} \times \mathbf{f} dA \quad (3.14a)$$

$$\frac{D}{Dt} \int_V \rho \varepsilon_{ijk} r_i U_j dV = \int_A \varepsilon_{ijk} r_i \tau_{lj} n_l dA + \int_V \rho \varepsilon_{ijk} r_i f_j dV \quad (3.14b)$$

Esta es la forma integral de la ecuación de momentum angular. La forma diferencial correspondiente muestra que el tensor de esfuerzo  $\boldsymbol{\tau}$  es simétrico.

### 3.3. Conservación de energía

La primera ley de la termodinámica establece la conservación de la energía. Si se considera un sistema, el cambio de energía del sistema es la suma de la entrada de energía en forma de calor y de trabajo. La energía del sistema comprende la energía interna y la energía cinética. La energía interna por unidad de masa es  $e$ . Considerando un elemento de volumen  $dV$  del sistema,  $\rho e dV$  es su energía interna y  $\rho \mathbf{U} \cdot \mathbf{U} dV/2$  su energía cinética. Considerando un elemento de superficie del sistema  $dA$ ,  $\mathbf{q} \cdot \mathbf{n} dA$  representa la rapidez de salida de calor, donde  $\mathbf{q}$  es el vector de flujo de calor. El trabajo se efectúa por las fuerzas de cuerpo y las fuerzas de superficie. El vector  $\mathbf{P} dA$  representa la fuerza de superficie sobre el elemento  $dA$  y  $\mathbf{U} \cdot \mathbf{P} dA$  la rapidez con la que realiza este trabajo. El vector  $\rho \mathbf{f} dV$  es la fuerza de cuerpo sobre el elemento  $dV$  y  $\mathbf{U} \cdot \rho \mathbf{f} dV$  la rapidez del trabajo realizado por la fuerza del cuerpo.

Entonces, considerando la rapidez del cambio de energía del sistema

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} \int_V \left\{ \rho e + \frac{1}{2} \rho \mathbf{U} \cdot \mathbf{U} \right\} dV &= \int_A \mathbf{U} \cdot \mathbf{P} dA + \int_V \mathbf{U} \cdot \rho \mathbf{f} dV - \int_A \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} dA \\ \frac{D}{Dt} \int_V \left\{ \rho e + \frac{1}{2} \rho U_i U_i \right\} dV &= \int_A U_i P_i dA + \int_V U_i \rho f_i dV - \int_A q_i n_i dA \end{aligned}$$

donde por convención el vector se toma positivo hacia afuera con respecto al sistema.

Sustituyendo de (3.6) y utilizando el teorema de Reynolds

$$\begin{aligned} \int_V \left[ \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \rho e + \frac{1}{2} \rho \mathbf{U} \cdot \mathbf{U} \right\} + \nabla \cdot \left\{ \rho e + \frac{1}{2} \rho \mathbf{U} \cdot \mathbf{U} \right\} \mathbf{U} \right] dV \\ = \int_A \mathbf{U} \cdot (\boldsymbol{\tau} \mathbf{n}) dA + \int_V \mathbf{U} \cdot \rho \mathbf{f} dV - \int_A \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} dA \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_V \left[ \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \rho e + \frac{1}{2} \rho U_i U_i \right\} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left\{ \rho e + \frac{1}{2} U_i U_i \right\} U_k \right] dV \\ = \int_A U_i \tau_{ki} n_k dA + \int_V U_i \rho f_i dV - \int_A q_i n_i dA \end{aligned}$$

Utilizando el teorema de Gauss (A.13)

$$\begin{aligned} \int_V \left[ \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \rho e + \frac{1}{2} \rho \mathbf{U} \cdot \mathbf{U} \right\} + \nabla \cdot \left\{ \rho e + \frac{1}{2} \rho \mathbf{U} \cdot \mathbf{U} \right\} \mathbf{U} \right] dV \\ = \int_V \nabla \cdot (\mathbf{U} \cdot \boldsymbol{\tau}) dV + \int_V \mathbf{U} \cdot \rho \mathbf{f} dV - \int_V \nabla \cdot \mathbf{q} dV \quad (3.17a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_V \left[ \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \rho e + \frac{1}{2} \rho U_i U_i \right\} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left\{ \rho e + \frac{1}{2} U_i U_i \right\} U_k \right] dV \\ = \int_V \frac{\partial (U_i \tau_{ki})}{\partial x_k} dV + \int_V U_i \rho f_i dV - \int_V \frac{\partial q_i}{\partial x_i} dV \quad (3.17b) \end{aligned}$$

Puesto que  $V$  es un volumen arbitrario se establece

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \rho e + \frac{1}{2} \rho \mathbf{U} \cdot \mathbf{U} \right\} + \nabla \cdot \left\{ \rho e + \frac{1}{2} \rho \mathbf{U} \cdot \mathbf{U} \right\} \mathbf{U} &= \nabla \cdot (\mathbf{U} \cdot \boldsymbol{\tau}) + \mathbf{U} \cdot \rho \mathbf{f} - \nabla \cdot \mathbf{q} \\ \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \rho e + \frac{1}{2} \rho U_i U_i \right\} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left\{ \rho e + \frac{1}{2} U_i U_i \right\} U_k &= \frac{\partial (U_i \tau_{ki})}{\partial x_k} + U_i \rho f_i - \frac{\partial q_i}{\partial x_i} \end{aligned}$$

Desarrollando las expresiones anteriores

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial e}{\partial t} + \rho \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2} \mathbf{U} \cdot \mathbf{U} \right) + e \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \mathbf{U} \right) + \frac{1}{2} \mathbf{U} \cdot \mathbf{U} \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \mathbf{U} \right) + \rho \mathbf{U} \cdot \nabla e + \rho \mathbf{U} \cdot \nabla \left( \frac{1}{2} \mathbf{U} \cdot \mathbf{U} \right) \\ = \mathbf{U} \cdot \nabla \boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{\tau} : \nabla \mathbf{U} + \mathbf{U} \cdot \rho \mathbf{f} - \nabla \cdot \mathbf{q} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial e}{\partial t} + \rho \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2} U_i U_i \right) + e \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} \rho U_k \right) + \frac{1}{2} \mathbf{U} \cdot \mathbf{U} \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} \rho U_k \right) + \rho U_k \frac{\partial e}{\partial x_k} + \rho U_k \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \frac{1}{2} U_i U_i \right) \\ = U_i \frac{\partial \tau_{ki}}{\partial x_k} + \tau_{ki} \frac{\partial U_i}{\partial x_k} + U_i \rho f_i - \frac{\partial q_i}{\partial x_i} \end{aligned}$$

Por continuidad, ecs. (3.2):

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial e}{\partial t} + \rho \mathbf{U} \cdot \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \rho \mathbf{U} \cdot \nabla e + \rho \mathbf{U} \cdot (\mathbf{U} \cdot \nabla \mathbf{U}) &= \mathbf{U} \cdot \nabla \boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{\tau} : \nabla \mathbf{U} + \mathbf{U} \cdot \rho \mathbf{f} - \nabla \cdot \mathbf{q} \\ \rho \frac{\partial e}{\partial t} + \rho U_i \frac{\partial U_i}{\partial t} + \rho U_k \frac{\partial e}{\partial x_k} + \rho U_k (U_i \frac{\partial U_i}{\partial x_k}) &= U_i \frac{\partial \tau_{ki}}{\partial x_k} + \tau_{ki} \frac{\partial U_i}{\partial x_k} + U_i \rho f_i - \frac{\partial q_i}{\partial x_i} \end{aligned}$$

Esta es la ecuación de conservación de energía total. Sin embargo, la conservación de la energía mecánica se obtiene multiplicando escalarmente las ecuaciones (3.11) por la velocidad

$$\begin{aligned} \rho \mathbf{U} \cdot \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \rho \mathbf{U} \cdot (\mathbf{U} \cdot \nabla \mathbf{U}) &= \mathbf{U} \cdot (\nabla \cdot \boldsymbol{\tau}) + \mathbf{U} \cdot \rho \mathbf{f} \\ \rho U_i \frac{\partial U_i}{\partial t} + \rho U_k (U_i \frac{\partial U_i}{\partial x_k}) &= U_i (\frac{\partial \tau_{ki}}{\partial x_k}) + U_i \rho f_i \end{aligned}$$

Restando estas ecuaciones a las anteriores

$$\rho \frac{\partial e}{\partial t} + \rho \mathbf{U} \cdot \nabla e = \boldsymbol{\tau} : \nabla \mathbf{U} - \nabla \cdot \mathbf{q} \quad (3.22a)$$

$$\rho \frac{\partial e}{\partial t} + \rho U_k \frac{\partial e}{\partial x_k} = \tau_{ki} \frac{\partial U_i}{\partial x_k} - \frac{\partial q_i}{\partial x_i} \quad (3.22b)$$

Esta es la forma diferencial de la conservación de energía interna. Usando la derivada material:

$$\begin{aligned} \rho \frac{De}{Dt} &= \boldsymbol{\tau} : \nabla \mathbf{U} - \nabla \cdot \mathbf{q} \\ &= \tau_{ki} \frac{\partial U_i}{\partial x_k} - \frac{\partial q_i}{\partial x_i} \end{aligned}$$

El lado izquierdo representa la rapidez de cambio de energía interna, el primer término del lado derecho la acción del esfuerzo sobre la deformación y el último término el efecto de la transmisión de calor.

### 3.4. Ecuaciones constitutivas

Hasta ahora se tienen las ecuaciones de conservación, pero no se ha especificado de que material se trata. Según el material que se estudie el comportamiento será diferente. Las ecuaciones anteriores son aplicables en general, pero para aplicarlas a un problema específico, habrá que introducir la información relacionada con la naturaleza del material en estudio. Esta relación que se busca es la ecuación constitutiva del material.

Las ecuaciones (3.2), (3.11) y (3.22) constituyen un sistema de cinco ecuaciones escalares con las variables incógnitas:  $\rho$ ,  $U_i$  (tres componentes),  $\tau_{ij}$  (nueve elementos),  $e$ ,  $q_i$  (tres componentes). La fuerza de cuerpo  $f_i$  depende de factores externos del material, y se estima de acuerdo con el fenómeno físico que produce dicha fuerza. Si se pueden escribir  $\tau_{ij}$  y  $q_i$  en términos de las otras variables incógnitas, se tendrá un sistema determinado. Se busca entonces, dos ecuaciones constitutivas que relacionen

$$\tau_{ij} = \tau_{ij}(\rho, U_i, e) \quad (3.24)$$

$$q_i = q_i(\rho, U_i, e) \quad (3.25)$$

Un material polar es aquel en el que existen momentos de cuerpo (por ejemplo los momentos por unidad de volumen causados por ciertos efectos magnéticos). En un material no polar, la derivación de ecuación (3.14) es válida, en donde se obtiene que el tensor de esfuerzo es simétrico.

Según el postulado de estado en termodinámica, es posible establecer para algunas sustancias las relaciones

$$p = p(\rho, T) \quad (3.26)$$

$$e = e(\rho, T) \quad (3.27)$$

Estas relaciones dependen del fluido que se trate. Para el caso especial de un gas perfecto (3.26) toma la forma

$$p = \rho RT$$

y (3.27)

$$e = \int_{T_0}^T C_v dT$$

donde  $R$  es la constante del gas,  $T_0$  una temperatura de referencia y  $p$  la presión.

En general, las ecuaciones constitutivas (3.24) y (3.25) se pueden expresar como función de la temperatura

$$\begin{aligned} \tau_{ij} &= \tau_{ij}(\rho, U_i, T) \\ q_i &= q_i(\rho, U_i, T) \end{aligned}$$

### 3.4.1. Ecuación de Fourier

Si  $q_i$  es debido sólo a la conducción, la ecuación de Fourier establece

$$\begin{aligned} q &= -k\nabla T \\ q_i &= -k \frac{\partial T}{\partial x_i} \end{aligned}$$

donde  $k$  es el coeficiente de transmisión de calor por conducción. El signo menos es debido a que el flujo de calor es en sentido contrario al crecimiento de la temperatura.

### 3.4.2. Fluido ideal

Un fluido ideal es aquel en el cual el tensor de esfuerzos es isotrópico.  $\tau_{ij}$  es un múltiplo de que es el único tensor isotrópico de segundo orden. Por lo tanto

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau} &= -p\boldsymbol{\delta} \\ \tau_{ij} &= -p\delta_{ij} \end{aligned}$$

donde  $\boldsymbol{\delta}$  es el tensor identidad y  $p$  es la presión en el fluido y el signo negativo indica que la presión es un esfuerzo normal (de compresión).

La ecuación de conservación de momentum se reduce a

$$\rho \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \rho \mathbf{U} \cdot \nabla \mathbf{U} = -\nabla p + \rho \mathbf{f} \quad (3.30a)$$

$$\rho \frac{\partial U_i}{\partial t} + \rho U_k \frac{\partial U_i}{\partial x_k} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \rho f_i \quad (3.30b)$$

A estas ecuaciones se les llama ecuaciones de Euler. La de energía interna se reduce a

$$\rho \frac{\partial e}{\partial t} + \rho \mathbf{U} \cdot \nabla e = -p \nabla \cdot \mathbf{U} - \nabla \cdot \mathbf{q} \quad (3.31a)$$

$$\rho \frac{\partial e}{\partial t} + \rho U_k \frac{\partial e}{\partial x_k} = -p \frac{\partial U_i}{\partial x_i} - \frac{\partial q_i}{\partial x_i} \quad (3.31b)$$

### 3.4.3. Fluido Newtoniano

En un fluido viscoso además de los esfuerzos normales existen esfuerzos cortantes debidos a la viscosidad. La ecuación constitutiva para el fluido newtoniano toma la forma

$$\boldsymbol{\tau} = -p\boldsymbol{\delta} + \lambda\boldsymbol{\delta}\nabla \cdot \mathbf{U} + \mu(\nabla\mathbf{U} + (\nabla\mathbf{U})^T) \quad (3.32a)$$

$$\tau_{ij} = -p\delta_{ij} + \lambda\delta_{ij}\frac{\partial U_k}{\partial x_k} + \mu\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i}\right) \quad (3.32b)$$

Esta ecuación constitutiva satisface las siguientes restricciones: (a) cuando el fluido está en reposo el esfuerzo es debido solamente a la presión ejercida por él mismo; (b)  $\tau_{ij}$  está linealmente relacionado con  $e_{ij}$  y no depende de la rotación  $\Omega_{ij}$ ; y (c) el fluido es isotrópico.

En la ecuación constitutiva  $\lambda$  y  $\mu$  son coeficientes de viscosidad y son propiedades del fluido. Para el flujo unidimensional referido en la sección 1.4, donde  $\mathbf{U} = u(y)\mathbf{i}$ , el tensor de esfuerzo es

$$\boldsymbol{\tau} = \begin{bmatrix} -p & \mu \frac{\partial u}{\partial y} & 0 \\ \mu \frac{\partial u}{\partial y} & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{bmatrix} \quad (3.33)$$

El valor del elemento  $\tau_{12}$  permite calcular el coeficiente de viscosidad  $\mu$ . El coeficiente de viscosidad  $\lambda$  es difícil de determinar. La siguiente consideración simplifica el problema y permite poner el valor de  $\lambda$  en función de  $\mu$ . La suma de los esfuerzos normales es:

$$\text{tr } \boldsymbol{\tau} = -3p + (3\lambda + 2\mu)\nabla \cdot \mathbf{U}$$

$$\tau_{ii} = -3p + (3\lambda + 2\mu)\frac{\partial U_i}{\partial x_i}$$

Si se considera que el promedio de los esfuerzos normales  $\tau_{ii}/3$  no depende de la viscosidad

$$3\lambda + 2\mu = 0$$

Un fluido que satisface esta relación se llama fluido de Stokes e incluye gases monoatómicos. Esta relación se aproxima al comportamiento de otros gases.

Para un fluido incompresible usando la ecuación de continuidad (3.2) la ecuación constitutiva se reduce a

$$\boldsymbol{\tau} = -p\boldsymbol{\delta} + \mu(\nabla\mathbf{U} + (\nabla\mathbf{U})^T)$$

$$\tau_{ij} = -p\delta_{ij} + \mu\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i}\right)$$

Se observa que la relación es independiente del valor de  $\lambda$ .



### 3.4.4. Fluidos no newtonianos

Los fluidos que no cumplen con la ecuación constitutiva newtoniana (3.32) se llaman fluidos no newtonianos. La mayoría de los fluidos que se encuentran comunmente son no newtonianos, por ejemplo: la sangre, la pintura, etc. Cada uno de estos fluidos tienen su propia ecuación constitutiva que se determina experimentalmente.

## 3.5. Ecuaciones de movimiento de un fluido newtoniano

Aunque en la naturaleza la mayoría de los fluidos son no newtonianos, el caso newtoniano es el más sencillo de los fluidos viscosos. Además su estudio se justifica debido a que en muchos fenómenos que interesan en ingeniería se trata con aire o agua, cuyo comportamiento es newtoniano.

Sustituyendo la ecuación constitutiva (3.32) en las ecuaciones de movimiento, se obtiene:

*Conservación de masa*

$$\begin{aligned}\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{U}) &= 0 \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho U_j) &= 0\end{aligned}$$

*Conservación de momentum (ecuaciones de Navier-Stokes)*

$$\rho \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + (\rho \mathbf{U} \cdot \nabla) \mathbf{U} = -\nabla p + \nabla(\lambda \nabla \cdot \mathbf{U}) + \nabla [\mu(\nabla \mathbf{U}) + (\nabla \mathbf{U})^T] \rho \mathbf{f} \quad (3.37a)$$

$$\rho \frac{\partial U_i}{\partial t} + \rho U_k \frac{\partial U_i}{\partial x_k} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \lambda \frac{\partial U_k}{\partial x_k} \right) \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \mu \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \right] + \rho f_i \quad (3.37b)$$

*Conservación de energía*

Empleando además la ecuación de Fourier (3.4.9) y (3.4.10)

$$\rho \frac{\partial e}{\partial t} + \rho \mathbf{U} \cdot \nabla e = -p \nabla \cdot \mathbf{U} + \lambda (\nabla \cdot \mathbf{U})^2 + \mu [\nabla \mathbf{U} + (\nabla \mathbf{U})^T] : \nabla \mathbf{U} + \nabla \cdot (k \nabla T) \quad (3.38a)$$

$$\rho \frac{\partial e}{\partial t} + \rho U_k \frac{\partial e}{\partial x_k} = -p \frac{\partial U_k}{\partial x_k} + \lambda \left( \frac{\partial U_k}{\partial x_k} \right)^2 + \mu \left[ \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_k} \right] \frac{\partial U_j}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left( k \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) \quad (3.38b)$$

Estas ecuaciones junto con las relaciones  $p = p(\rho, T)$  y  $e = e(\rho, T)$  forman un sistema de siete ecuaciones escalares con las siete incógnitas:  $\rho$ ,  $U_i$  (tres),  $p$ ,  $e$  y  $T$ .

*Función de disipación*

En las ecuaciones (3.38) los términos de viscosidad

$$\begin{aligned}\Phi &= \lambda (\nabla \cdot \mathbf{U})^2 + \mu [\nabla \mathbf{U} + (\nabla \mathbf{U})^T] : \nabla \mathbf{U} \\ &= \lambda \left( \frac{\partial U_k}{\partial x_k} \right)^2 + \mu \left[ \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_k} \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right]\end{aligned}$$

representan la rapidez de disipación de energía por unidad de volumen debido a los efectos viscosos. El escalar  $\Phi$  se llama la función de disipación.

#### *Condiciones de frontera*

Para resolver estas ecuaciones diferenciales parciales se necesitan establecer las condiciones de frontera. Las condiciones de frontera más usuales para la velocidad son:

- (a) La condición de no resbalamiento que implica que el fluido tiene la misma velocidad de la frontera que confina el flujo.
- (b) Para un flujo no confinado, la velocidad del fluido muy lejos de la región de perturbación del flujo es la velocidad de la corriente libre.

Cuando se incluyen efectos térmicos es necesario especificar la temperatura en las fronteras o bien el flujo de calor.

#### *Condiciones iniciales*

En el caso de flujo no permanente se necesitan especificar las condiciones iniciales ( $t = 0$ ) del fluido, tales como la distribución de velocidad y temperatura.

# Capítulo 4

## Teoremas especiales

Las ecuaciones de movimiento del capítulo 3 son generales. Sin embargo, existen formas especiales de estas ecuaciones y en algunos casos, formas simplificadas que son más prácticas de manejar.

### 4.1. Teorema de Helmholtz

La definición del vector vorticidad

$$\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{U}$$

permite establecer

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\omega} = 0$$

que indica que el vector  $\boldsymbol{\omega}$  es solenoidal. Entonces, para un volumen  $V$  arbitrario

$$\int_V \nabla \cdot \boldsymbol{\omega} \, dV = 0$$

Usando el teorema de Gauss (A.13), la integral anterior se convierte en una integral sobre la superficie que encierra el volumen  $V$

$$\int_V \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n} \, dA = 0 \tag{4.1}$$

Considerando el tubo de vórtice mostrado en la figura 4.1,  $\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n}$  es cero en las paredes, debido a que las forman líneas de vórtice. Por lo tanto (4.1) implica

$$\Gamma_1 = \Gamma_2 \tag{4.2}$$

donde

$$\Gamma_1 = - \int_{A_1} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n} \, dA$$
$$\Gamma_2 = - \int_{A_2} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n} \, dA$$

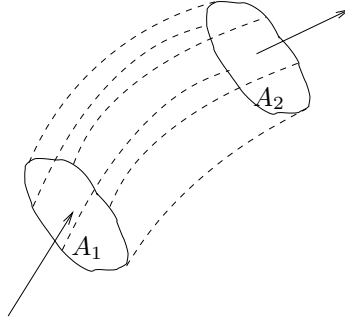


Figura 4.1: Tubo de vórtice

Si  $\omega_1$  y  $\omega_2$  representan el promedio de vorticidad sobre las áreas  $A_1$  y  $A_2$  respectivamente, (4.2) se puede escribir

$$\omega_1 A_1 = \omega_2 A_2$$

Este resultado es válido para cualquier tipo de fluido, y significa que los tubos de vórtice son cerrados (como los anillos de humo) o terminan en alguna frontera.

## 4.2. Teorema de Kelvin

Este teorema se desarrolla para un fluido no viscoso y un campo conservativo de fuerzas de cuerpo

$$f_i = \frac{\partial G}{\partial x_i}$$

donde  $G$  es el potencial del campo conservativo.

Considérese una curva material  $C$  (formado por partículas). La rapidez de cambio de circulación siguiendo esta curva es

$$\frac{D\Gamma}{Dt} = \frac{D}{Dt} \oint_C U_i dx_i \quad (4.3)$$

$$= \oint_C \left[ \frac{DU_i}{Dt} dx_i + U_i \frac{D(dx_i)}{Dt} \right] \quad (4.4)$$

donde la derivada material se intercambia con la integral porque esta se hace sobre una curva material.

$ds$  representa un elemento de la curva  $C$ , y  $dx_i$  sus componentes.  $dx_i$  cambia con el tiempo debido a que el elemento  $ds$  se estira y cambia de dirección. Además, la rapidez de cambio  $D(dx_i)/Dt$  es la diferencia de velocidad en los extremos de  $ds$  en esa dirección. Por esto

$$\frac{D(dx_i)}{Dt} = dU_i \quad (4.5)$$

La ecuación de movimiento para este fluido es

$$\frac{DU_i}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx_i} + \frac{\partial G}{\partial x_i} \quad (4.6)$$

Sustituyendo (4.5) y (4.6) en (4.4), se tiene

$$\begin{aligned} \frac{D\Gamma}{Dt} &= \oint_C \left[ -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} dx_i + \frac{\partial G}{\partial x_i} dx_i + U_i dU_i \right] \\ &= \oint_C \left[ -\frac{dp}{\rho} + dG + \frac{1}{2} d(U_i U_i) \right] \end{aligned}$$

donde  $dp$  y  $dG$  representan la variación espacial de  $p$  y  $G$ , respectivamente. La integral sobre una trayectoria cerrada  $\oint_C d\phi = 0$ , donde  $\phi$  es cualquier cantidad escalar. Por lo que

$$\frac{D\Gamma}{Dt} = -\oint_C \frac{dp}{\rho} \quad (4.7)$$

*Flujo incompresible*

Si la densidad  $\rho$  es constante, (4.7) se reduce a

$$\frac{D\Gamma}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \oint_C dp$$

y por la razón antes expuesta

$$\frac{D\Gamma}{Dt} = 0$$

*Flujo barotrópico*

Para un flujo barotrópico  $p$  es una función explícita de  $\rho$ ,

$$p = p(\rho)$$

Entonces (4.7) se escribe

$$\begin{aligned} \frac{D\Gamma}{Dt} &= -\oint_C \frac{p'(\rho)}{\rho} d\rho \\ &= -\oint_C d[p(\ln \rho)] \end{aligned}$$

Por la misma razón

$$\frac{D\Gamma}{Dt} = 0$$

Entonces, el teorema de Kelvin establece que para un fluido incompresible o barotrópico, además no viscoso y con campo de fuerzas conservativo, la circulación alrededor de una curva material no varía con el tiempo, aunque ésta cambie su forma.

### 4.3. Ecuación de vorticidad

Para un fluido incompresible, en un campo de fuerzas conservativo, las ecuaciones de Navier-Stokes toman la forma

$$\rho \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \rho(\mathbf{U} \cdot \nabla)\mathbf{U} = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{U}$$

Usando la identidad (A.9), la ecuación se escribe

$$\rho \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \rho \nabla \frac{|\mathbf{U}|^2}{2} - \rho \mathbf{U} \times (\nabla \times \mathbf{U}) = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{U}$$

Tomando el rotacional de esta ecuación y empleando la definición de vorticidad

$$\rho \frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} - \rho \nabla \times (\mathbf{U} \times \boldsymbol{\omega}) = \mu \nabla^2 \boldsymbol{\omega} \quad (4.8)$$

donde se considera que los operadores diferenciales son intercambiables y que el rotacional de un gradiente es cero. De la identidad (A.10)

$$\begin{aligned} \nabla \times (\mathbf{U} \times \boldsymbol{\omega}) &= \mathbf{U}(\nabla \cdot \boldsymbol{\omega}) - \boldsymbol{\omega}(\nabla \cdot \mathbf{U}) - (\mathbf{U} \cdot \nabla)\boldsymbol{\omega} + (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla)\mathbf{U} \\ &= -(\mathbf{U} \cdot \nabla)\boldsymbol{\omega} + (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla)\mathbf{U} \end{aligned}$$

por la condición de incompresibilidad y que el vector es solenoidal. La ecuación (4.8) toma entonces la forma

$$\begin{aligned} \rho \frac{D\boldsymbol{\omega}}{Dt} &= \rho \frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} + \rho(\mathbf{U} \cdot \nabla)\boldsymbol{\omega} \\ &= \rho(\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla)\mathbf{U} + \mu \nabla^2 \boldsymbol{\omega} \end{aligned} \quad (4.9)$$

Esta ecuación de vorticidad establece que la rapidez de cambio de la vorticidad de un elemento de fluido depende del gradiente de velocidad y de su difusión por efectos viscosos.

### 4.4. Ecuación de Bernoulli

Considérese un fluido no viscoso y fuerzas de cuerpo conservativas. Bajo estas consideraciones, en casos específicos las ecuaciones de cantidad tienen una integral sencilla para un instante de tiempo dado. A esta integral se le llama ecuación de Bernoulli. Las ecuaciones de Euler (3.30) toman la forma

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \nabla \frac{|\mathbf{U}|^2}{2} - \mathbf{U} \times \boldsymbol{\omega} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nabla G \quad (4.10)$$

Tomando el producto escalar del término de presión con elemento arbitrario  $d\mathbf{r}$  y usando la relación

$$\begin{aligned} d\mathbf{r} \cdot \nabla( ) &= dx_i \frac{\partial}{\partial x_i}( ) \\ &= d( ) \end{aligned} \quad (4.11)$$

de donde  $d( )$  es un operador diferencial en espacio, se tiene

$$\begin{aligned} d\mathbf{r} \cdot \frac{1}{\rho} \nabla p &= \frac{dp}{\rho} \\ &= d \int \frac{dp}{\rho} \end{aligned}$$

donde la integral se hace en el espacio para un instante dado. Usando (4.11) nuevamente

$$d\mathbf{r} \cdot \frac{1}{\rho} \nabla p = d\mathbf{r} \cdot \nabla \int \frac{dp}{\rho}$$

Como  $d\mathbf{r}$  es arbitrario

$$\frac{1}{\rho} \nabla p = \nabla \int \frac{dp}{\rho}$$

Sustituyendo en (4.10)

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \nabla \left[ \int \frac{dp}{\rho} + \frac{|\mathbf{U}|^2}{2} - G \right] = \mathbf{U} \times \boldsymbol{\omega}$$

La integración espacial de esta ecuación es fácil para los siguientes casos.

#### *Flujo permanente*

La ecuación (4.7) se reduce a

$$\nabla \left[ \int \frac{dp}{\rho} + \frac{|\mathbf{U}|^2}{2} - G \right] = \mathbf{U} \times \boldsymbol{\omega}$$

El producto escalar de  $\mathbf{U}$  con esta ecuación es

$$\mathbf{U} \cdot \nabla \left[ \int \frac{dp}{\rho} + \frac{|\mathbf{U}|^2}{2} - G \right] = 0$$

donde el vector  $\mathbf{U} \times \boldsymbol{\omega}$  es un vector normal a  $\mathbf{U}$  y  $\mathbf{U} \cdot \mathbf{U} \times \boldsymbol{\omega} = 0$ . La ecuación anterior representa la derivada material para flujo permanente, o sea

$$\frac{D}{Dt} \left[ \int \frac{dp}{\rho} + \frac{|\mathbf{U}|^2}{2} - G \right] = 0$$

Esto implica que la cantidad entre paréntesis es constante siguiendo la trayectoria de una partícula o bien

$$\int \frac{dp}{\rho} + \frac{|\mathbf{U}|^2}{2} - G = B$$

a lo largo de una línea de flujo.

#### *Flujo irrotacional*

En este caso el vector vorticidad es cero

$$\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{U} = 0$$

Usando la identidad (A.7)

$$\nabla \times \nabla \phi = 0$$

se ve que el vector velocidad puede expresarse en términos de un escalar  $\phi$  llamado potencial de velocidad.

$$\mathbf{U} = \nabla\phi \quad (4.12)$$

(cualquier múltiplo de  $\phi$  satisface la identidad por lo que en ocasiones aparece  $\mathbf{U} = -\nabla\phi$ ).

La ecuación (4.10) toma la forma

$$\nabla \left\{ \frac{\partial\phi}{\partial t} + \int \frac{dp}{\rho} + \frac{|\nabla\phi|^2}{2} - G \right\} = 0$$

Esto implica que la cantidad entre paréntesis es constante en el espacio pero puede variar con el tiempo o sea

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} + \int \frac{dp}{\rho} + \frac{|\nabla\phi|^2}{2} - G = B(t) \quad (4.13)$$

Para incluir  $B(t)$  en el lado izquierdo se define

$$\phi' = \phi - \int B(t) dt$$

de donde

$$\frac{\partial\phi'}{\partial t} = \frac{\partial\phi}{\partial t} - B(t)$$

y la ecuación (4.13) toma la forma

$$\frac{\partial\phi'}{\partial t} + \int \frac{dp}{\rho} + \frac{|\nabla\phi|^2}{2} - G = 0$$

para todo el espacio. De la relación  $\nabla\phi' = \nabla\phi$  se ve que la relación (4.12) no se altera.

En general la ecuación de Bernoulli no es una ecuación de energía. Es la integral (parcial, en un instante dado) de la ecuación de momentum. Sin embargo para flujos permanentes e isoentrópicos es idéntica a la ecuación de energía.

## 4.5. Ecuación de Crocco

Esta ecuación relaciona la vorticidad de un flujo con la entropía del fluido. Considerando un flujo permanente, no viscoso, sin fuerzas de cuerpo, la ecuación de Euler se puede escribir

$$\nabla \frac{|\mathbf{U}|^2}{2} - \mathbf{U} \times \boldsymbol{\omega} = -\frac{1}{\rho} \nabla p \quad (4.14)$$

La identidad del (C.2b) es

$$T ds = dh - \frac{1}{\rho} dp$$

Usando la relación (4.11) donde  $\phi$  es ahora una diferencial total porque se trata de un flujo permanente, la identidad se escribe

$$d\mathbf{r} \cdot (T\nabla s) = d\mathbf{r} \cdot \left( \nabla h - \frac{1}{\rho} \nabla p \right)$$



Por la arbitrariedad del vector  $d\mathbf{r}$  se tiene

$$T\nabla s = \nabla h - \frac{1}{\rho}\nabla p$$

Sustituyendo esta relación en (4.14) obtenemos la ecuación de Crocco

$$\nabla \left\{ h + \frac{|\mathbf{U}|^2}{2} \right\} = T\nabla s + \mathbf{U} \times \boldsymbol{\omega} \quad (4.15)$$

*Flujo isoentrópico*

La ecuación de energía (3.31) para este caso se reduce a

$$\rho \frac{De}{Dt} = -p\nabla \cdot \mathbf{U} \quad (4.16)$$

De la definición de entalpía  $h = e + p/\rho$

$$\frac{Dh}{Dt} = \frac{De}{Dt} - \frac{p}{\rho^2} dp + \frac{1}{\rho} dp$$

Sustituyendo en (3.31)

$$\rho \frac{Dh}{Dt} = \frac{Dp}{Dt} - \frac{p}{\rho} \left[ \frac{D\rho}{Dt} + \rho\nabla \cdot \mathbf{U} \right]$$

Por continuidad, ecuación (3.2)

$$\rho \frac{Dh}{Dt} = \frac{Dp}{Dt} \quad (4.17)$$

Tomando el producto escalar con la ecuación de Euler

$$\rho \frac{D\mathbf{U}}{Dt} = -\nabla p$$

se tiene

$$\rho \frac{D}{Dt} \left( \frac{1}{2} |\mathbf{U}|^2 \right) = -\mathbf{U} \cdot \nabla p \quad (4.18)$$

La suma de (4.17) y (4.18) es

$$\begin{aligned} \rho \frac{D}{Dt} \left( h + \frac{1}{2} |\mathbf{U}|^2 \right) &= \frac{Dp}{Dt} - \mathbf{U} \cdot \nabla p \\ &= 0 \end{aligned}$$

para flujo permanente. La cantidad

$$h_0 = h + \frac{|\mathbf{U}|^2}{2}$$

se llama entalpía de estancamiento y es constante a lo largo de una línea de flujo.

$$\frac{Dh_0}{Dt} = 0$$

$h_0$  puede tener valores diferentes para cada línea de flujo. La ecuación de Crocco (4.15) se escribe

$$\nabla h_0 = T\nabla s + \mathbf{U} \times \boldsymbol{\omega} \quad (4.19)$$

El gradiente de  $h_0$  solo tiene componentes perpendiculares a las líneas de flujo, también  $\mathbf{U} \times \boldsymbol{\omega}$ . Esto implica que la entropía varía en las direcciones normales a la línea de flujo.

Si  $\mathbf{t}$ ,  $\mathbf{n}$  y  $\mathbf{b}$  representan los vectores unitarios en la dirección tangente, normal y binormal a la línea de flujo como se muestra en la figura 4.2, la ecuación (4.19) tiene componentes

$$0 = 0$$

$$\frac{\partial h_0}{\partial n} = T \frac{\partial s}{\partial n} - |\mathbf{U}| \omega_b$$

$$\frac{\partial h_0}{\partial b} = T \frac{\partial s}{\partial b} - |\mathbf{U}| \omega_n$$

respectivamente. Si la entropía y la entalpía son constantes en todo el espacio el flujo es irrotacional.

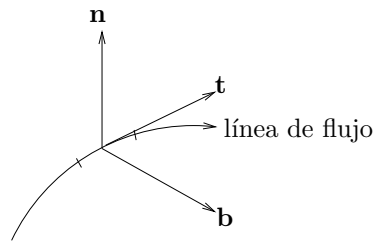


Figura 4.2: Vectores unitarios.

# Capítulo 5

## Estática de fluidos

En este capítulo se estudiará el comportamiento de los fluidos en reposo (hidrostática)

### 5.1. Presión hidrostática

Para un fluido en reposo y considerando un sistema de coordenadas fijo al fluido, la velocidad  $\mathbf{U}$  del fluido es cero. En este caso la ecuación de continuidad (3.2), las ecuaciones de conservación de momentum (3.11) y la de conservación de energía (3.22) se reducen a

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (5.1)$$

$$\nabla p = \rho \mathbf{f} \quad (5.2)$$

$$\rho \frac{\partial e}{\partial t} = \nabla \cdot (k \nabla T) \quad (5.3)$$

La primera ecuación denota que la densidad no varía con el tiempo, la segunda, que el cambio de presión es a causa de las fuerzas de cuerpo y la tercera, que la rapidez del cambio de energía interna es a causa de la transmisión de calor por conducción. La ecuación (5.2) es la única que involucra presión. Para determinar la distribución de presión hidrostática se necesita la solución de ésta.

#### *Campo gravitacional unidimensional*

Si la fuerza de cuerpo es  $\mathbf{f} = -g\mathbf{k}$ , donde  $\mathbf{k}$  es un vector unitario y sustituyendo en (5.2) se tiene

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g$$

siendo la presión constante en las otras direcciones. Si se conoce la variación de la densidad se puede integrar la ecuación. Algunos ejemplos son:

(a) Densidad y gravedad constantes. La integral es

$$p = -\rho g z + p_0 \quad (5.4)$$

donde  $p_0$  es la presión en  $z = 0$ .

(b) Atmósfera isotérmica de gas perfecto. En este caso

$$p = \rho RT_0$$

donde  $RT_0$  es constante. Sustituyendo en (5.4)

$$\frac{dp}{p} = -\frac{g}{RT_0} dz$$

cuya integral para gravedad constante es

$$p = p_0 \exp\left(-\frac{gz}{RT_0}\right)$$

La distribución de densidad es entonces

$$\rho = \frac{p_0}{RT_0} \exp\left(-\frac{gz}{RT_0}\right)$$

(c) Atmósfera politrópica de gas perfecto. En este caso

$$p = k\rho^n$$

y

$$p = \rho RT$$

donde  $k$  y  $n$  son constantes.

De (5.4) se obtiene

$$\frac{dp}{p^{1/n}} = -\frac{g dz}{k^{1/n}}$$

Integrando

$$p = p_0 \left[ 1 - \frac{n-1}{n} \frac{1}{p_0^{(n-1)/n}} \frac{gz}{k^{1/n}} \right]^{n/(n-1)}$$

entonces la densidad es

$$\rho = \left(\frac{p_0}{k}\right)^{1/n} \left[ 1 - \frac{n-1}{n} \frac{1}{p_0^{(n-1)/n}} \frac{gz}{k^{1/n}} \right]^{1/(n-1)}$$

y la temperatura

$$T = \frac{p_0}{R} \left(\frac{k}{p_0}\right)^{1/n} \left[ 1 - \frac{n-1}{n} \frac{1}{p_0^{(n-1)/n}} \frac{gz}{k^{1/n}} \right]$$

*Campo gravitacional con simetría esférica*

Considerando una atmósfera alrededor de un planeta de radio  $R_p$  y masa  $M_p$ , la aceleración de gravedad a una distancia  $r$  del centro del planeta es

$$g = \frac{GM_p}{r^2}$$

donde  $G$  es la constante gravitacional.

La ecuación (5.4) en coordenadas esféricas se simplifica para este caso

$$\frac{dp}{r} = -\frac{\rho GM_p}{r^2}$$

Si se considera una atmósfera isotérmica de gas perfecto la ecuación anterior toma la forma

$$\frac{dp}{r} = -\frac{GM_p}{RT_0} \frac{dr}{r^2}$$

Integrando

$$p = p_0 \exp \left[ \frac{GM_p}{RT_0} \left\{ \frac{1}{R_p} - \frac{1}{r} \right\} \right]$$

donde  $p_0$  es la presión en  $r = R_p$ .

## 5.2. Fluidos con autogravitación

Considérese un fluido con simetría esférica y densidad  $\rho(r)$ . Para la fuerza sobre un elemento de fluido a una distancia  $r_1$ , del origen, se establece que: (i) no depende de la masa del fluido para  $r > r_1$ , (ii) toda la masa para  $r < r_1$  se puede considerar concentrada en el origen. Con estas consideraciones, la fuerza por unidad de masa del fluido debida a la gravitación del mismo fluido es

$$f(r) = \frac{4\pi G}{r^2} \int_0^r \rho(r_1) r_1^2 dr_1$$

actuando hacia el origen.

Sustituyendo en la ecuación (5.2) en coordenadas esféricas, la componente radial es

$$\frac{dp}{dr} = -\rho(r) \frac{4\pi G}{r^2} \int_0^r \rho(r_1) r_1^2 dr_1$$

Derivando con respecto a  $r$  y reordenando

$$\frac{d^2 p}{dr^2} - \frac{1}{\rho} \left( \frac{dp}{dr} \right)^2 + \frac{2}{r} \frac{dp}{dr} + 4\pi G \rho^2 = 0 \quad (5.5)$$

Esta es una ecuación no lineal de segundo orden con dos incógnitas,  $p$  y  $\rho$ . Para resolverla se necesita una relación entre  $p$  y  $\rho$ . Un caso especial es la relación politrópica

$$p = k\rho^n$$

Sustituyendo en la ecuación diferencial (5.5) se obtiene

$$\frac{d^2 p}{dr^2} - \frac{1}{np} \left( \frac{dp}{dr} \right)^2 + \frac{2}{r} \frac{dp}{dr} + \frac{4\pi G}{k^{2/n}} p^{2/n} = 0$$

Las condiciones de frontera apropiadas son:

(i)  $(dp/dr)_{r=0} = 0$  por la simetría de la presión con respecto al origen.

(ii)  $p(0)$  es finita.

Para algunos valores de  $n$  existen soluciones en forma cerrada. Por ejemplo, para  $n = 1, 2$

$$\frac{d^2 p}{dr^2} - \frac{5}{6p} \left( \frac{dp}{dr} \right)^2 + \frac{2}{r} \frac{dp}{dr} + \frac{4\pi G}{k^{5/3}} p^{5/3} = 0$$

la solución es

$$p = \frac{p_0}{\left\{ 1 - \left( \frac{2\pi G p_0^{2/3}}{9k^{5/3}} \right) r^2 \right\}^3}$$

donde  $p_0$  es la presión en el origen. La solución puede verificarse por sustitución. Para la densidad se tiene

$$\rho = \frac{\rho_0}{\left\{ 1 - \left( \frac{2\pi G p_0^{4/5}}{9k} \right) r^2 \right\}^{5/2}}$$

donde

$$\rho_0 = \left( \frac{P_0}{k} \right)^{5/6}$$

La masa total es

$$\begin{aligned} M &= 4\pi \int_0^\infty \rho(r) r^2 dr \\ &= \frac{18}{\sqrt{2\pi}} \frac{p_0^{3/2}}{G^{3/2} \rho_0^2} \end{aligned}$$

Considerando un gas perfecto la distribución de temperatura es

$$T = \frac{T_0}{\left\{ 1 - \left( \frac{2\pi G p_0^{2/3}}{9k^{5/3}} \right) r^2 \right\}^{1/2}}$$

### 5.3. Fuerzas sobre superficies sumergidas

La fuerza que ejerce la presión sobre un elemento de superficie es perpendicular a este. Si  $dA$  es el elemento de la superficie  $A$  y  $\mathbf{n}$  un vector unitario normal a la superficie dirigido hacia afuera, la fuerza sobre este elemento es

$$d\mathbf{F} = -p\mathbf{n} dA$$

de donde, la fuerza total sobre la superficie es

$$\mathbf{F} = - \int_A p\mathbf{n} dA$$

Las componentes de estas fuerzas son

$$F_i = - \int_A p n_i dA$$

donde  $n_1, n_2, n_3$  son los cosenos directores.

*Fuerzas sobre superficies planas*

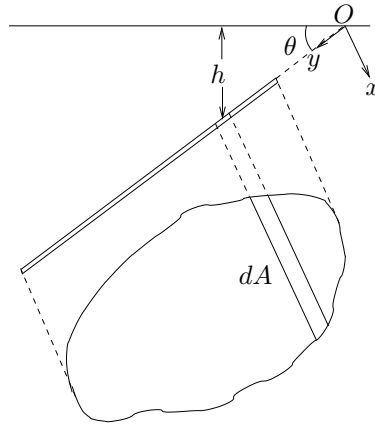


Figura 5.1: Fuerzas sobre una superficie sumergida.

La figura 5.1 muestra una superficie plana sumergida en un fluido de densidad constante. La presión sobre el elemento de área  $dA$  es

$$dF = p dA$$

Si se considera la presión en la superficie libre como cero, la presión a una profundidad  $h$  es

$$p = \rho g h$$

En términos de  $y$

$$p = \rho g y \sen \theta$$

y la fuerza sobre el área sumergida es

$$F = \rho g \sen \theta \int_A y dA$$

Las coordenadas del centroide son

$$x_c = \frac{\int x dA}{A}$$

$$y_c = \frac{\int y dA}{A}$$

entonces, la fuerza total toma la forma

$$\begin{aligned} F &= \rho g \operatorname{sen} \theta y_c A \\ &= p_c A \end{aligned}$$

donde  $p_c$  es la presión en el centroide.

El centro de presión es el punto  $(x', y')$  donde la fuerza total  $F$  causa un momento equivalente al de la distribución de fuerzas hidrostáticas. Tomando momentos con respecto al origen 0 (figura 5.1)

$$\begin{aligned} Fx' &= \rho g \operatorname{sen} \theta \int_A xy \, dA \\ Fy' &= \rho g \operatorname{sen} \theta \int_A y^2 \, dA \end{aligned}$$

Usando las definiciones de momento de inercia  $I_{xx}$  y producto de inercia  $I_{xy}$

$$\begin{aligned} I_{xx} &= \int_A y^2 \, dA \\ I_{xy} &= \int_A xy \, dA \end{aligned}$$

se tiene

$$\begin{aligned} x' &= x_c + \frac{I_{xy}}{y_c A} \\ y' &= y_c + \frac{I_{xx}}{y_c A} \end{aligned}$$

Si se trabaja con coordenadas  $\xi, \eta$  que pasan por el centroide del área y paralelas a  $x, y$ , el momento y el producto de inercia en estas nuevas coordenadas son

$$\begin{aligned} I_{\xi\xi} &= I_{xx} - Ay_c^2 \\ I_{\xi\eta} &= I_{xy} - Ax_c y_c \end{aligned}$$

de donde

$$\begin{aligned} x' &= \frac{I_{xy}}{y_c A} \\ y' &= \frac{I_{xx}}{y_c A} \end{aligned}$$

Se puede observar que el centro de presiones siempre es más profundo que el centroide.



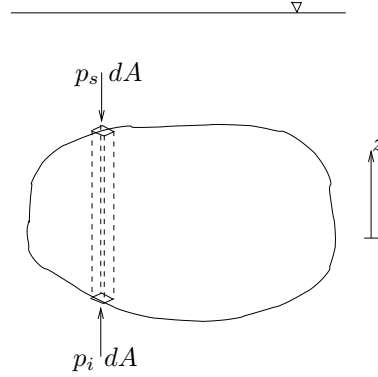


Figura 5.2: Fuerzas sobre un cuerpo sumergido.

## 5.4. Flotación

### *Leyes de flotación*

Cuando un cuerpo se encuentra sumergido en un fluido experimenta una fuerza llamada de flotación. Considérese el cuerpo de la figura 5.1 en un campo vertical de gravedad y en un fluido de densidad constante.

Si las presiones en las superficies superior e inferior son  $p_s$  y  $p_i$ , la fuerza total sobre un prisma de sección  $dA$  como el mostrado en la figura 5.2 es

$$dF = (p_i - p_s) dA$$

con dirección ascendente. Si  $h_s$  y  $h_i$  son las distancias desde la superficie libre hasta un punto sobre las superficies superior e inferior del cuerpo respectivamente,

$$dF = \rho g (h_i - h_s) dA$$

La fuerza de flotación total es

$$\begin{aligned} F &= \rho g \int (h_i - h_s) dA \\ &= \rho g V \end{aligned}$$

donde  $V$  es el volumen del cuerpo,  $\rho g V$  representa el peso del fluido desplazado por el cuerpo. Este es el principio de Arquímedes.

El momento causado por la presión hidrostática es equivalente al momento de la fuerza total de flotación actuando sobre el centro de flotación

$$\begin{aligned} F x' &= \rho g \int x (h_i - h_s) dA \\ &= \rho g \int x dV \end{aligned}$$

de donde

$$x' = \frac{x dV}{V}$$

De manera similar

$$y' = \frac{y dV}{V}$$

De aquí se concluye que la fuerza de flotación pasa por el centroide del volumen desplazado por el cuerpo.

### *Estabilidad*

Se dice que un cuerpo está en equilibrio estable si ante cualquier desplazamiento pequeño aparecen fuerzas que tienden a restablecer la posición inicial. En el caso de un cuerpo completamente sumergido en un fluido es condición necesaria y suficiente para que el equilibrio sea estable, que el centro de gravedad del cuerpo esté por debajo del centro de flotación. Por ejemplo, el caso de un globo como el que se muestra en la figura 5.3 es estable. Figura 5.3(a) muestra la posición en equilibrio y 5.3(b) la posición desplazada en la cual se observa que la fuerza de flotación  $F$  y el peso  $P$  causan un momento de restauración.

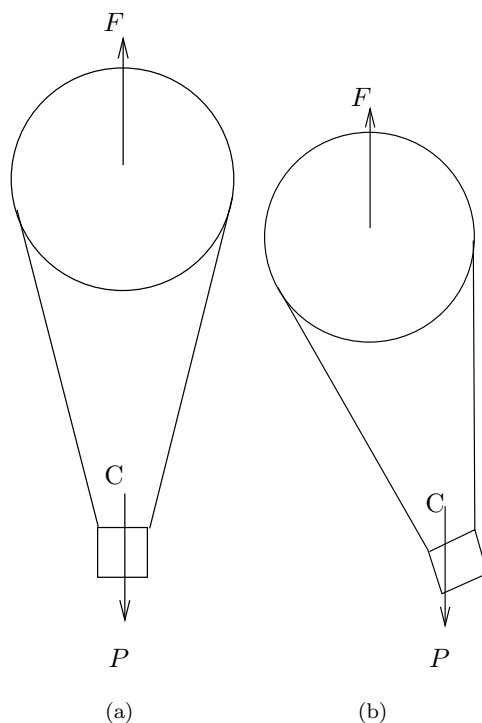


Figura 5.3: Globo (a) en equilibrio y (b) perturbado.

Para cuerpos parcialmente sumergidos, el centro de flotación se mueve con el desplazamiento angular del cuerpo. El peso  $P$  y la fuerza de flotación  $F$  producen un momento, y la dirección de este momento determina si este cuerpo es estable. Por ejemplo, en la figura 5.4 el movimiento del

centro de flotación es lo suficientemente grande como para causar un momento de restauración. En este caso el cuerpo está en equilibrio estable. En la figura 5.5 se muestra otro cuerpo en el cual para el mismo desplazamiento angular, el movimiento del centro de flotación no presenta un momento de restauración, sino un momento que tiende a continuar el desplazamiento. Este cuerpo está en equilibrio inestable.

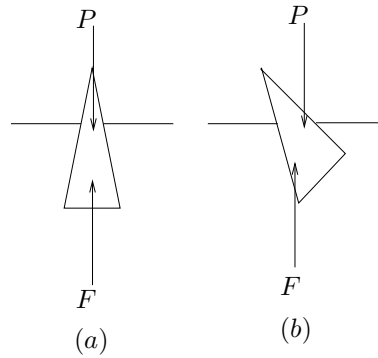


Figura 5.4: Cuerpo flotante estable.

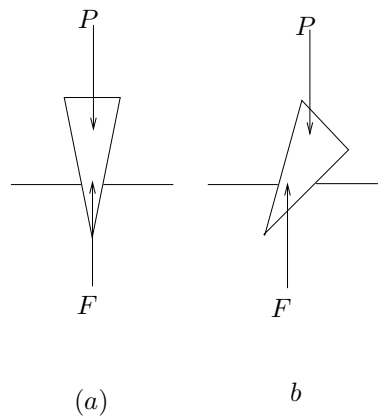


Figura 5.5: Cuerpo flotante inestable.

Para predecir la estabilidad del equilibrio de un cuerpo en flotación se hace el siguiente análisis cuantitativo. El cuerpo de la figura 5.6 está en una posición desplazada un ángulo  $\delta\theta$ . El centro de flotación para la posición de equilibrio es  $C$ , y para la nueva posición del cuerpo es  $C'$ . El centro de gravedad del cuerpo es  $G$ . Al girar el cuerpo, la cantidad de líquido desplazado por el ADE es la misma que abandona ABC. Virtualmente se puede considerar que existe una fuerza ascendente en la sección ADE,  $\delta F$  debido al líquido adicional desplazado. De la misma manera en la sección ABC existe una fuerza descendente  $\delta F$ . Estas fuerzas forman un par  $T$ . La fuerza de flotación  $F$  en  $C$ , es equivalente a la fuerza  $F$  en  $C'$  y el par  $T$ . Por lo que el movimiento del centro de flotación  $\delta l$  se

calcula tomando momentos con respecto a C

$$\delta l = \frac{T}{F} \quad (5.12)$$

donde la fuerza  $F$  es igual al peso  $P$  del cuerpo debido al equilibrio estático. De la figura

$$\overline{MC'} = \frac{\delta l}{\text{sen } \delta\theta} \quad (5.13)$$

Se observa que si el punto M está por encima de G, el momento causado por la fuerza de flotación  $F$  y el peso  $P$  es un momento restaurador y el equilibrio del cuerpo flotando es estable. A la distancia  $\overline{MG}$  se le llama altura metacéntrica y es la base para este criterio de estabilidad. Cuando existe estabilidad

$$\overline{MC'} > \overline{GC'}$$

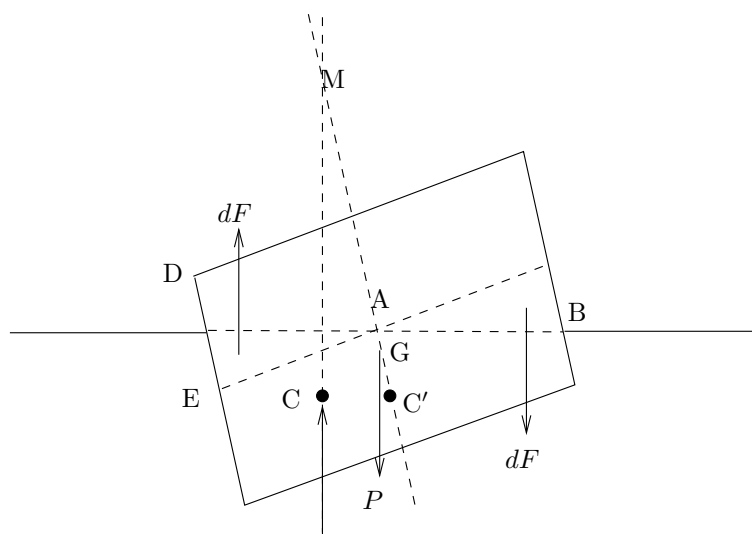


Figura 5.6: Estabilidad de un cuerpo flotante.

Para determinar la altura metacéntrica, se calculará primero el par  $T$ . Se escogen dos volúmenes  $dV$  correspondientes, en las secciones ABC y ADE. Estos volúmenes se encuentran a una distancia  $x$  del punto A y son de sección horizontal  $dA$ . Por lo que

$$dV = x \text{ sen } \delta\theta \, dA$$

Cada volumen  $dV$  tiene una fuerza asociada  $dF$ :

$$dF = \rho g x \text{ sen } \delta\theta \, dA$$

El par debido a estas fuerzas es

$$dT = 2\rho g x^2 \text{ sen } \delta\theta \, dA$$

Integrando

$$T = 2\rho g \operatorname{sen} \delta\theta \int_0^L x^2 dA$$

donde  $L = \overline{AC} = \overline{AE}$ . Considerando el momento de inercia  $I$  de la sección horizontal del cuerpo, al nivel de la superficie libre,

$$I = 2 \int_0^L x^2 dA \quad (5.14)$$

Por lo que

$$T = \rho g \operatorname{sen} \delta\theta I$$

Sustituyendo (5.14) en (5.12) y usando  $F = P$

$$\delta l = \frac{\rho g \operatorname{sen} \delta\theta I}{P}$$

Sustituyendo en (5.13)

$$\overline{MC'} = \frac{\rho g I}{P} \frac{\operatorname{sen} \delta\theta}{\delta\theta}$$

la que para ángulos pequeños se reduce a

$$\overline{MC'} = \frac{\rho g I}{P}$$

La altura metacéntrica es entonces

$$\begin{aligned} \overline{MG} &= \overline{MC'} - \overline{GC'} \\ &= \frac{\rho g I}{P} - \overline{GC'} \end{aligned} \quad (5.15)$$

Los valores positivos de  $\overline{MG}$  en esta relación implican que M estará por encima de G, y el cuerpo estará en equilibrio estable. Si  $\overline{MG}$  es cero coinciden los puntos G y M y la estabilidad del equilibrio del cuerpo es indiferente. Si el valor de  $\overline{MG}$  en la relación (5.15) es negativo, G está por encima de M y el equilibrio es inestable.

Se debe recordar que este análisis es para ángulos de giro  $\delta\theta$  muy pequeños y sin considerar otras fuerzas, como la del viento, etc., que puedan modificar la estabilidad del cuerpo.

## 5.5. Tensión superficial

En las interfases entre dos medios inmiscibles como entre aire y agua, agua y aceite, agua y vidrio, etc., existen fuerzas de tensión. Para dos medios 1 y 2 la fuerza de tensión superficial por unidad de longitud es  $\sigma_{12}$ . Este fenómeno ocurre en situaciones estáticas o dinámicas.

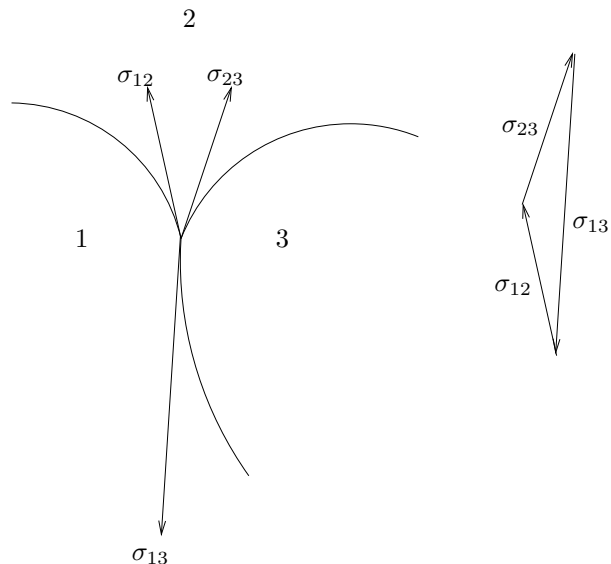


Figura 5.7: Tres fluidos en contacto.

### Contacto entre tres medios

Considérese tres medios en contacto como se muestra en la figura 5.7, con la tangente a la línea de contacto entre los tres medios normal al plano del dibujo. En la figura también se muestran las fuerzas sobre un elemento de la línea de contacto. Si esta línea está en equilibrio estático, las fuerzas forman un triángulo. Si las fuerzas no están en equilibrio, la fuerza resultante tratará de mover la línea de contacto.

Si uno de los medios es un cuerpo sólido dos de esas fuerzas están alineadas, como se muestra en la figura 5.8. En equilibrio, las componentes horizontales de las fuerzas son

$$\sigma_{12} \cos \alpha = \sigma_{23} - \sigma_{13}$$

Si el medio 2 es un gas y además  $\sigma_{23} - \sigma_{13} < 0$ , entonces  $\alpha > \pi/2$  y se dice que este líquido no moja al sólido. Por ejemplo, para mercurio y vidrio en aire, ver la figura 5.9. Pero si  $\sigma_{23} - \sigma_{13} > 0$  entonces  $\alpha < \pi/2$  y se dice que el líquido moja al sólido. Por ejemplo agua y vidrio en aire, como en la figura 5.10. Si  $|\sigma_{23} - \sigma_{13}| > \sigma_{12}$  no existe forma estable.

En la figura 5.8 en ausencia de otras fuerzas no hay equilibrio en la dirección vertical. Pero se observa que en muchos casos sí existe tal equilibrio. Esto implica que existe una distribución de presión estática que se debe tomar en cuenta en el balance de fuerzas.

### Tubos capilares

Cuando un tubo de vidrio se introduce en agua se observa que ésta sube. Este fenómeno se llama capilaridad y ocurre también entre placas de vidrio con una separación muy pequeña. Pero si se introduce el mismo tubo en mercurio, la superficie baja, debido también al efecto de tensión superficial. El efecto de capilaridad se estudia considerando el equilibrio en la columna de líquido elevada. En la figura 5.11,  $H$  representa la altura de la columna y  $\alpha$  el ángulo de contacto entre

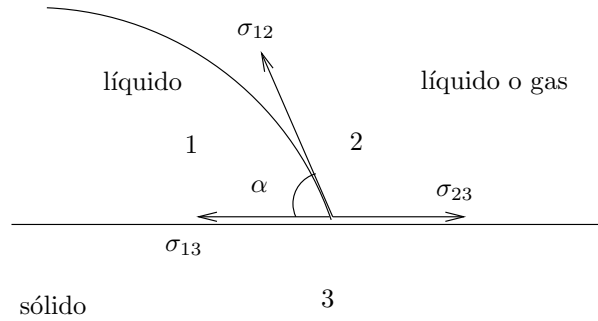


Figura 5.8: Dos fluidos en contacto con un sólido.

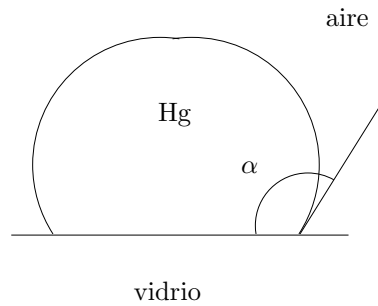


Figura 5.9: Gota de mercurio sobre vidrio.

el líquido y el tubo. El peso de esta columna menos su fuerza debida al gas desplazado, está en equilibrio con la componente vertical de la tensión superficial.

$$(\rho_l - \rho_g)g\pi R^2 H = 2\pi R\sigma \cos \alpha$$

donde  $\rho_l$  y  $\rho_g$  son las densidades del líquido y del gas respectivamente,  $R$  es el radio del tubo y  $\sigma$  el coeficiente de tensión superficial entre el tubo y el líquido. Si  $\rho_l \gg \rho_g$

$$H = \frac{2\sigma \cos \alpha}{\rho_l g R}$$

Para  $\alpha > \pi/2$  (por ejemplo el caso de mercurio en un tubo de vidrio)  $H$  es negativa.

### Interfase

En la interfase entre dos medios fluidos en general existe una diferencia de presiones entre los fluidos para balancear las fuerzas de tensión superficial. Considérese un elemento de superficie de la interfase en equilibrio como se muestra en la figura 5.12. La diferencia de presiones causa una fuerza  $\Delta p dl_1 dl_2$ . Los ejes 1 y 2 se escogieron de tal manera que los centros de curvatura  $O_1$  y  $O_2$  en los planos de cada eje sean colineales con el centro  $O$ . A estos ejes se les llama ejes principales.

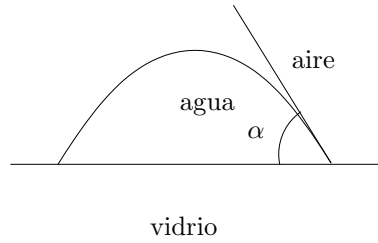


Figura 5.10: Gota de agua sobre vidrio.

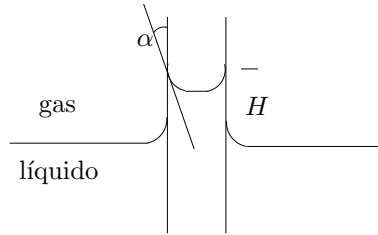


Figura 5.11: Efecto capilar en un tubo.

Las componentes verticales de las fuerzas actuando sobre los lados AB y CD (figura 5.12) son

$$\begin{aligned} dF_2 &= 2\sigma \, dl_2 \, \text{sen} \frac{d\alpha_1}{2} \\ &= \sigma \, dl_2 \, d\alpha_1 \\ &= \sigma \, dl_2 \frac{dl_1}{R_1} \end{aligned}$$

donde se ha considerado el ángulo  $d\alpha_1$  muy pequeño. De manera similar

$$dF_1 = \sigma dl_1 \frac{dl_2}{R_2}$$

La suma de  $dF_1$  y  $dF_2$  se balancean con la fuerza debida a la presión para que exista equilibrio. De donde

$$\Delta p = \sigma \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$$

$R_1$  y  $R_2$  son los radios de curvatura en los planos de los ejes principales. Pero se puede mostrar que para otro sistema de ejes ortogonales  $x, y$  en la interfase los nuevos radios de curvatura  $R_x$  y  $R_y$  satisfacen la igualdad

$$\frac{1}{R_x} + \frac{1}{R_y} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

por lo cual

$$\Delta p = \sigma \left( \frac{1}{R_x} + \frac{1}{R_y} \right)$$



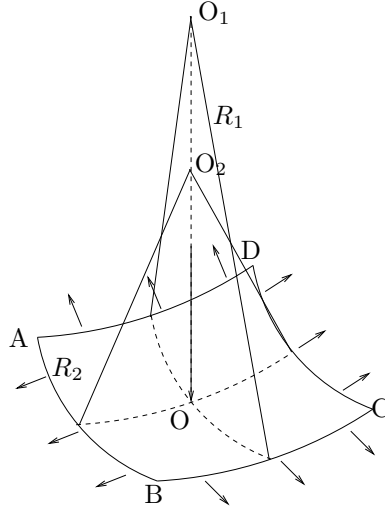


Figura 5.12: Interfase con tensión superficial.

*Interfase bidimensional de pendiente pequeña*

Si la interfase en la figura 5.13 es bidimensional, uno de los radios de curvatura es infinito, por lo que

$$\Delta p = \frac{\sigma}{R}$$

Si a la interfase le asignamos una función  $\eta(x)$  que la describa, entonces, el radio de curvatura se puede escribir

$$\frac{1}{R} = \frac{\eta''(x)}{\{1 + (\eta'(x))^2\}^{3/2}}$$

Expandiendo esta ecuación usando la serie de Taylor (A.1)

$$\frac{1}{R} = \eta''(x) \left\{ 1 - \frac{3}{2}(\eta'(x))^2 \frac{\left(\frac{3}{2}\right) \left(\frac{3}{2} + 1\right)}{2} (\eta'(x))^4 - \dots \right\}$$

Para pendientes  $\eta'(x)$  muy pequeñas

$$\frac{1}{R} = \eta''(x)$$

Por ejemplo, se considera el caso de un líquido que presenta una superficie libre en un recipiente grande como se muestra en la figura 5.14. Dentro del líquido

$$\frac{\partial p}{\partial y} = -\rho g$$

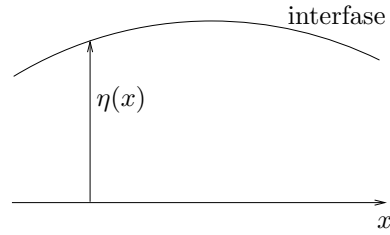


Figura 5.13: Interfase bidimensional.

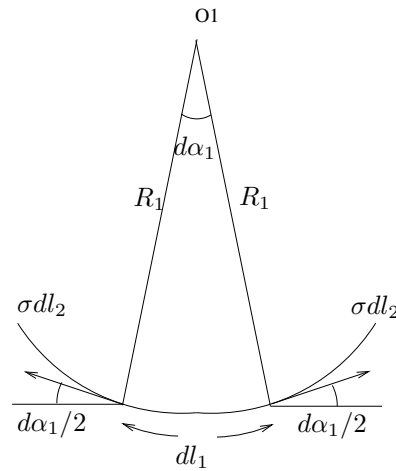


Figura 5.14: Interfase con tensión superficial.

donde  $\rho$  es la densidad del líquido. Integrando

$$p = p_0 - \rho g y$$

donde  $p_0$  es la presión en  $y = 0$ .

En la superficie  $y = \eta(x)$

$$p(\eta) = p_0 - \rho g \eta \quad (5.16)$$

Si la presión en el gas es  $p_0$

$$p_0 - p(\eta) = \sigma \eta'' \quad (5.17)$$

donde se ha usado la aproximación de pendiente muy pequeña.

Sustituyendo (5.16) en (5.17)

$$\eta'' - \frac{\rho g \eta}{\sigma} = 0$$

La solución de esta es

$$\eta(x) = Ae^{kx} + Be^{-kx}$$

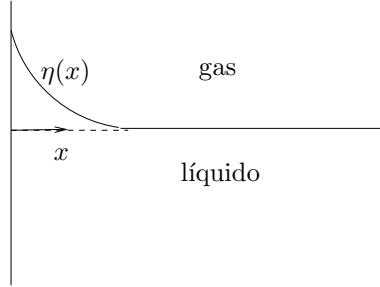


Figura 5.15: Forma de superficie libre.

donde  $k = (\rho g / \sigma)^{1/2}$ . Aplicando las condiciones de frontera:

$$\begin{aligned}\eta'(0) &= \alpha - \frac{\pi}{2} \\ \eta'(x) &= 0 \quad \text{cuando } x \rightarrow \infty\end{aligned}$$

se tiene

$$\eta(x) = \frac{1}{k} \left( \frac{\pi}{2} - \alpha \right) e^{-kx}$$

## 5.6. Equilibrio con aceleración uniforme

Si se tiene un fluido de densidad constante con aceleración, sin deformación, o sea como un cuerpo rígido, el problema se puede resolver desde un punto de vista estático. Sin deformación, no hay fuerzas viscosas y las ecuaciones de Navier-Stokes se reducen a

$$\frac{D\mathbf{U}}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \mathbf{f} \quad (5.19)$$

Si  $\mathbf{U}(x, y, z, t)$  describe el movimiento como un cuerpo rígido, entonces

$$\frac{D\mathbf{U}}{Dt} = \mathbf{a}(x, y, z, t)$$

es la aceleración del mismo; (5.19) toma la forma

$$\nabla p = \rho(\mathbf{f} - \mathbf{a}) \quad (5.20)$$

Esta forma es muy similar a (5.2), y significa que los métodos de hidrostática son aplicables a este problema.

Por ejemplo, considérese un recipiente cilíndrico vertical, girando a una velocidad  $\omega$ . El recipiente tiene un líquido de densidad constante, el cual antes de girar tenía una profundidad  $h$ . Se supone que ha transcurrido el tiempo suficiente para que todo el fluido gire como un sólido. Ecuación (5.20) para este problema en coordenadas cilíndricas, es

$$\begin{aligned}\frac{\partial p}{\partial z} &= -\rho g \\ \frac{\partial p}{\partial r} &= \rho \omega^2 r\end{aligned}$$

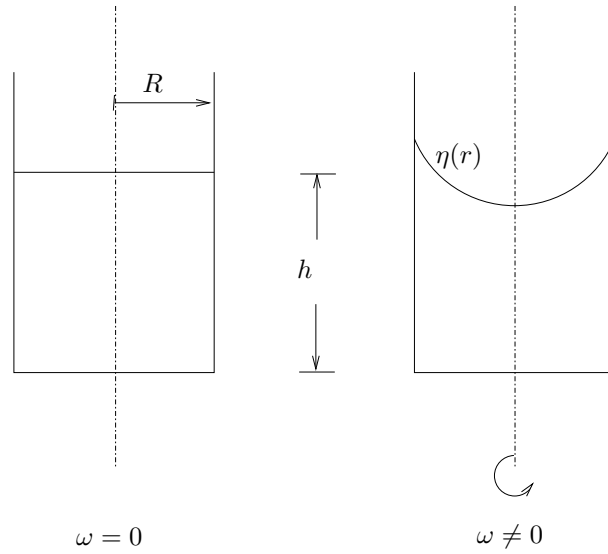


Figura 5.16: Superficie libre bajo rotación.

La función  $p(r, z)$  es la solución de

$$\begin{aligned} dp &= \frac{\partial p}{\partial r} dr + \frac{\partial p}{\partial z} dz \\ &= \rho\omega^2 r dr - \rho g dz \end{aligned}$$

Para la superficie libre la presión es constante y  $z = \eta(r)$ , entonces

$$0 = \rho\omega^2 r dr - \rho g d\eta$$

o bien,

$$\frac{d\eta}{dr} = \frac{\omega^2 r}{g}$$

La solución de esta ecuación es

$$\eta(r) = \frac{\omega^2 r^2}{2g} + c$$

La constante  $c$  se evalúa considerando que el volumen girando es igual al volumen antes de girar  $\pi R^2 h$ .

$$\pi R^2 h = \int_0^R 2\pi r \eta(r) dr$$

que da como resultado:

$$c = h - \frac{\omega^2 R^2}{4g}$$

La superficie libre, es entonces

$$\eta(r) = h + \frac{\omega^2}{4g} \left( r^2 - \frac{R^2}{2} \right)$$



# Capítulo 6

## Flujo potencial

### 6.1. Conceptos y definiciones

Para un fluido no viscoso e incompresible, las ecuaciones de continuidad y conservación de momentum son

$$\nabla \cdot \mathbf{U} = 0 \quad (6.1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + (\mathbf{U} \cdot \nabla) \mathbf{U} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \mathbf{f} \quad (6.2)$$

La condición de frontera de no resbalamiento no se puede cumplir debido a la falta de viscosidad. Así sólo se considera la condición de que no existe flujo a través de las fronteras. Por esto la frontera es una línea de corriente del flujo.

Si existe un flujo irrotacional el teorema de Kelvin garantiza que en este caso el flujo seguirá siendo irrotacional. Bajo estas condiciones el vector  $\boldsymbol{\omega}$  de vorticidad será cero en todo el espacio en todo tiempo:

$$\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{U} = 0$$

Usando la identidad (A.7)

$$\nabla \times \nabla \phi = 0$$

implica que

$$\mathbf{U} = \nabla \phi \quad (6.3)$$

donde  $\phi$  es un escalar llamado *potencial de velocidad*. Sustituyendo en (6.1), se tiene la ecuación de Laplace:

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad (6.4)$$

La ecuación (6.2) tiene la integral

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} \nabla \phi \cdot \nabla \phi - G = 0 \quad (6.5)$$

que es la ecuación de Bernoulli para todo el espacio.

## 6.2. Flujo bidimensional

Para flujo bidimensional (6.3) es

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x}; \quad v = \frac{\partial \phi}{\partial y} \quad (6.6a)$$

$$u_r = \frac{\partial \phi}{\partial r}; \quad u_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \quad (6.6b)$$

en coordenadas cartesianas y polares, respectivamente.

La ecuación (6.4) toma la forma

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0 \quad (6.7a)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} = 0 \quad (6.7b)$$

La ecuación (6.1) es

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (6.8a)$$

$$\frac{\partial}{\partial r} (r u_r) + \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} = 0 \quad (6.8b)$$

Se observa que si se define un escalar  $\psi$ , tal que

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}; \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (6.9a)$$

$$u_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}; \quad u_\theta = -\frac{\partial \psi}{\partial r} \quad (6.9b)$$

la ecuación (6.8) se satisface íntegramente. A la función  $\psi(x, y)$ , o  $\psi(r, \theta)$ , se le llama la *función de corriente*. Satisface continuidad para el flujo bidimensional, incluyendo el flujo rotacional.

Se puede verificar las siguientes propiedades de  $\phi$  y  $\psi$  :

(a) En general

$$d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy \quad (6.10)$$

$$= -v dx + u dy \quad (6.11)$$

En las líneas de  $\psi = \text{constante}$ ,  $d\psi = 0$  y

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v}$$

que es la ecuación de una línea de corriente. O sea que para una línea de corriente,  $\psi = \text{constante}$ .

(b) La línea AB en la figura 6.1 es una línea arbitraria entre dos líneas de corriente. Considerando un elemento diferencial de esta línea de componentes  $dx$  y  $dy$ , el gasto por el lado  $dx$  es  $v dx$  en sentido ascendente, y por el lado  $dy$  es  $u dy$  hacia la derecha, todo por espesor unitario. El gasto total a través de la línea AB es



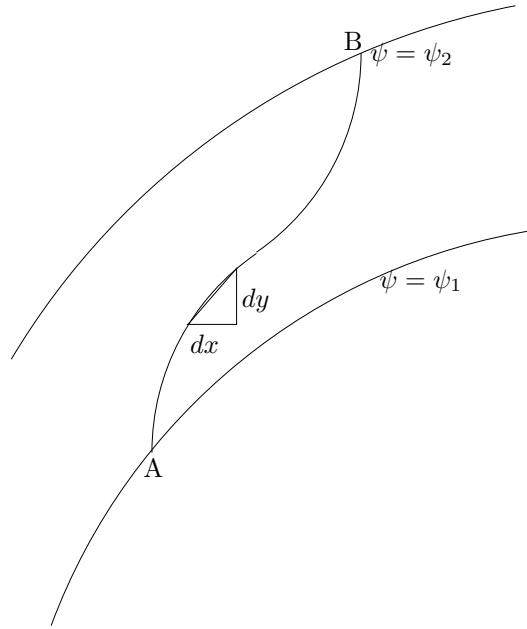


Figura 6.1: Flujo entre dos líneas de corriente.

$$Q = \int_A^B u \, dy - \int_A^B v \, dx$$

De (6.11)

$$\begin{aligned} Q &= \int_A^B d\psi \\ &= \psi_2 - \psi_1 \end{aligned}$$

O sea, el gasto por espesor unitario entre dos líneas de corriente es igual a la diferencia de los valores  $\psi$ .

(c) También

$$\begin{aligned} d\phi &= \frac{\partial \phi}{\partial x} \, dx + \frac{\partial \phi}{\partial y} \, dy \\ &= u \, dx + v \, dy \end{aligned}$$

y para una línea  $\phi = \text{constante}$ ,  $d\phi = 0$ , y

$$\left( \frac{\partial y}{\partial x} \right)_\phi = -\frac{u}{v}$$

Pero de (6.11) las líneas de  $\psi = \text{constante}$  tienen la pendiente:

$$\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{\psi} = -\frac{v}{u}$$

y

$$\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{\phi} \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{\psi} = -1$$

lo que indica que las líneas  $\phi = \text{constante}$  (equipotenciales) son ortogonales a las líneas de  $\psi = \text{constante}$  (líneas de corriente).

(d) De (6.6) y (6.9):

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}; \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (6.12a)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}; \quad \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = -\frac{\partial \psi}{\partial r} \quad (6.12b)$$

Estas relaciones entre  $\phi$  y  $\psi$  son las condiciones de Cauchy-Riemann.

(e) La condición de irrotacionalidad para flujos bidimensionales es

$$\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

Sustituyendo las ecuaciones (6.9) se tiene

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0 \quad (6.13)$$

Esto indica que la función de corriente también es una función armónica (como  $\phi$ ).

### 6.3. Flujos sencillos

Es posible proponer potenciales de velocidad o funciones de corriente que satisfagan la ecuación de Laplace. Algunos de los flujos más útiles se discutirán a continuación.

*Flujo uniforme*

Si

$$\psi = U_0(-x \sin \alpha + y \cos \alpha) \quad (6.14)$$

las líneas de  $\psi$  constante son líneas rectas paralelas e inclinadas un ángulo  $\alpha$  con respecto al eje  $x$ . Si se sustituye  $\psi$  en la ecuación en (6.13) se observa que la satisface. El campo de velocidad se obtiene de (6.9) y es

$$\begin{aligned} u &= U_0 \cos \alpha \\ v &= U_0 \sin \alpha \end{aligned}$$

Este es un flujo uniforme de magnitud  $U_0$ . De las ecuaciones (6.12)

$$\begin{aligned}\frac{\partial \phi}{\partial x} &= U_0 \cos \alpha \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} &= U_0 \sin \alpha\end{aligned}$$

Integrando la primera ecuación

$$\phi = U_0 x \cos \alpha + f(y)$$

donde  $f(y)$  es una función arbitraria de  $y$ . Diferenciando con respecto a  $y$  e igualando con la segunda ecuación

$$f'(y) = U_0 \sin \alpha$$

De donde

$$f(y) = U_0 y \sin \alpha + C$$

donde  $C$  es una constante arbitraria; por lo que

$$\phi = U_0 x \cos \alpha + U_0 y \sin \alpha + C \quad (6.15)$$

Por conveniencia se tomó  $C = 0$ .

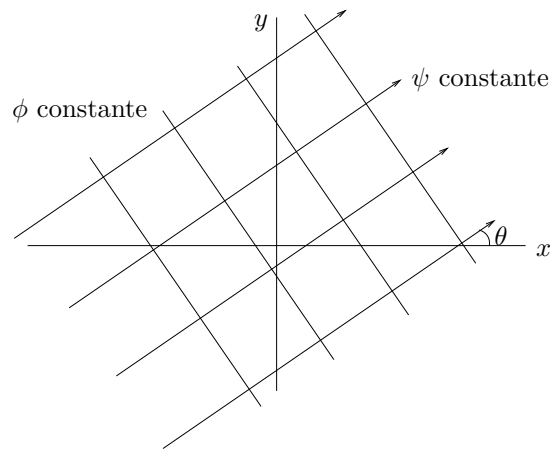


Figura 6.2: Flujo uniforme.

#### *Fuente y sumidero*

Considérese la función armónica:

$$\psi = C\theta$$

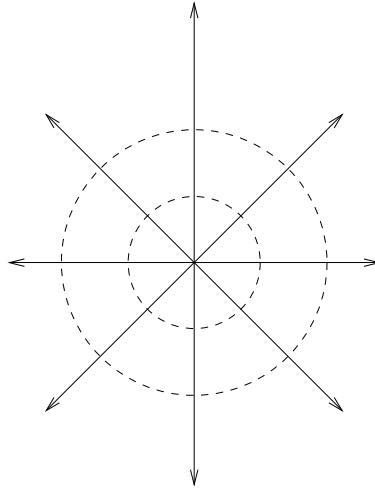


Figura 6.3: Fuente potencial.

donde  $C$  es una constante. Las líneas de corriente son rectas radiales como se muestra en la figura 6.3.

El campo de velocidad se obtiene de las ecuaciones (6.9)

$$\begin{aligned}u_r &= \frac{C}{r} \\u_\theta &= 0\end{aligned}$$

Este es un flujo radialmente saliente para  $C > 0$ . A este flujo se le llama una fuente. Si  $C < 0$  el flujo es radialmente entrante y a este flujo se le llama sumidero. Se observa que en ambos casos en el origen la velocidad  $u_r$  es infinita. Este punto se llama punto de singularidad. Estas singularidades no pueden ocurrir en flujos reales por que la velocidad tiene que ser finita.

De las ecuaciones (6.12)

$$\begin{aligned}\frac{\partial \phi}{\partial r} &= \frac{C}{r} \\ \frac{\partial \phi}{\partial \theta} &= 0\end{aligned}$$

por lo que

$$\phi = C \ln r$$

#### *Vórtice libre*

Si se considera la función armónica

$$\psi = K \ln r$$

donde  $K$  es una constante. Las líneas de corriente son círculos concéntricos mostrados en la figura 6.4.

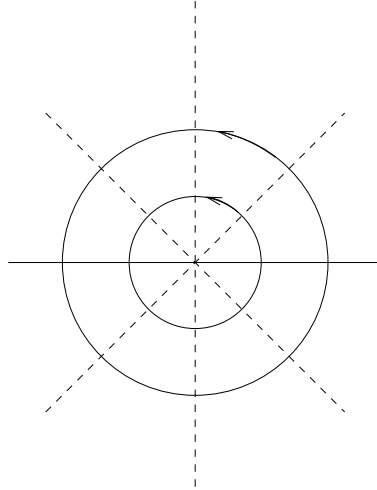


Figura 6.4: Vórtice potencial.

De las ecuaciones (6.9)

$$u_r = 0$$

$$u_\theta = -\frac{K}{r}$$

Este flujo representa un vórtice, donde  $K > 0$  indica flujo en el sentido del reloj. Se observa que en este caso también el origen es un punto de singularidad. De las ecuaciones (6.12)

$$\frac{\partial \phi}{\partial r} = 0$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial \theta} = -K$$

de donde

$$\phi = -K\theta$$

*Flujo en una esquina*

Considérese la función armónica

$$\psi = U_0 r^n \sin n\theta$$

donde  $U_0$  y  $n$  son constantes. La línea de corriente  $\psi = 0$  es la línea formada por  $\theta = 0$  y  $\theta = \pi/n$ . En flujos potenciales cualquier línea de corriente puede representar una frontera, este flujo mostrado representa el flujo en la esquina formada por la línea  $\psi = 0$ .

De las ecuaciones (6.9)

$$u_r = U_0 r^{n-1} n \cos n\theta$$

$$u_\theta = -U_0 r^{n-1} n \sin n\theta$$

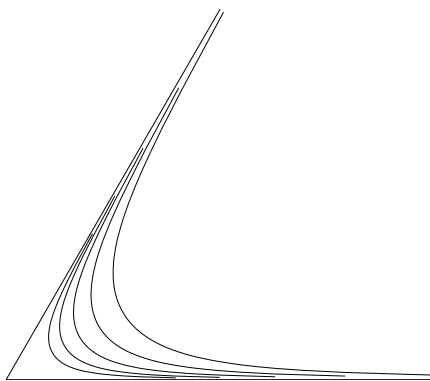


Figura 6.5: Flujo potencial en una esquina.

De las ecuaciones (6.12)

$$\frac{\partial \phi}{\partial r} = U_0 r^{n-1} n \cos n\theta$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial \theta} = U_0 r^{n-1} n \operatorname{sen} n\theta$$

por lo que

$$\phi = U_0 r^n \cos n\theta$$

En la figura 6.5 se muestra el flujo interno a una esquina, aunque tanto  $\psi$  como  $\phi$  son válidas también en la región externa, que es el flujo exterior a la esquina.

## 6.4. Flujos compuestos

$\psi$  y  $\phi$  satisfacen la ecuación de Laplace. Esta ecuación es lineal, por lo que la combinación lineal de varias soluciones de  $\psi$  o de  $\phi$  es también una solución. A continuación se tratarán de algunos flujos útiles que se obtienen por la combinación de los flujos ya discutidos.

### *Doblete*

Considérese un sumidero en el punto  $(x, y) = (a, 0)$  y una fuente de igual magnitud en  $(-a, 0)$ . El valor de  $\phi$  en el punto P es la suma de  $\phi$  debido al sumidero y  $\phi$  debido a la fuente. Usando la constante  $C$  para la fuente y  $-C$  para el sumidero

$$\phi = C(\ln r_2 - \ln r_1)$$

Pero

$$r_1^2 = r^2 + a^2 - 2ra \cos \theta \tag{6.16a}$$

$$r_2^2 = r^2 + a^2 + 2ra \cos \theta \tag{6.16b}$$

entonces

$$\begin{aligned}\phi &= \frac{C}{2} [\ln(r^2 + a^2 + 2ra \cos \theta) - \ln(r^2 + a^2 - 2ra \cos \theta)] \\ &= \frac{C}{2} \left[ \ln \left\{ (r^2 + a^2) \left( 1 + \frac{2ra \cos \theta}{r^2 + a^2} \right) \right\} - \ln \left\{ (r^2 + a^2) \left( 1 - \frac{2ra \cos \theta}{r^2 + a^2} \right) \right\} \right] \\ &= \frac{C}{2} \left[ \ln \left( 1 + \frac{2ra \cos \theta}{r^2 + a^2} \right) - \ln \left( 1 - \frac{2ra \cos \theta}{r^2 + a^2} \right) \right]\end{aligned}$$

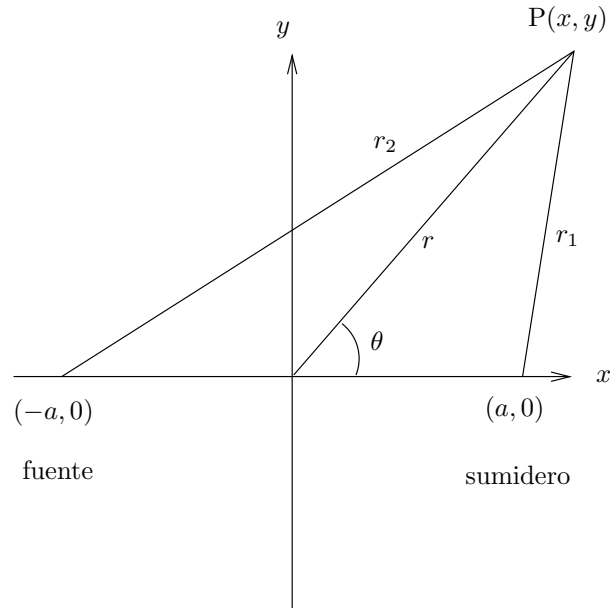


Figura 6.6: Posición de fuente y sumidero.

Usando la serie de Taylor (A.1)

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$$

para  $|x| \leq 1$ . Cuando  $a \rightarrow 0$

$$\begin{aligned}\ln \left( 1 + \frac{2ar \cos \theta}{r^2 + a^2} \right) &= \frac{2ar \cos \theta}{r^2 + a^2} - \frac{1}{2} \left( \frac{2ar \cos \theta}{r^2 + a^2} \right)^2 + \frac{1}{3} \left( \frac{2ar \cos \theta}{r^2 + a^2} \right)^3 - \dots \\ \ln \left( 1 - \frac{2ar \cos \theta}{r^2 + a^2} \right) &= -\frac{2ar \cos \theta}{r^2 + a^2} - \frac{1}{2} \left( \frac{2ar \cos \theta}{r^2 + a^2} \right)^2 - \frac{1}{3} \left( \frac{2ar \cos \theta}{r^2 + a^2} \right)^3 - \dots\end{aligned}$$

Entonces

$$\phi = C \left[ \frac{2ar \cos \theta}{r^2 + a^2} + \frac{1}{3} \left( \frac{2ar \cos \theta}{r^2 + a^2} \right)^3 + \dots \right]$$

Si se fija el valor de  $C$  cuando  $a \rightarrow 0$ , entonces  $\phi = 0$  en el límite. En este caso la fuente y el sumidero se anulan y no existe flujo, pero si se varia  $C$  de tal forma que

$$aC = \frac{1}{2} \mu$$

cuando  $a \rightarrow 0$ , donde  $\mu$  es una constante, entonces en el límite

$$\phi = \frac{\mu \cos \theta}{r} \quad (6.17)$$

El campo de velocidad es

$$u_r = -\frac{\mu \cos \theta}{r^2}$$

$$u_\theta = -\frac{\mu \operatorname{sen} \theta}{r^2}$$

el cual tiene singularidad en  $r = 0$ .

De las ecuaciones (6.12)

$$\frac{\partial \psi}{\partial \theta} = -\frac{\mu \cos \theta}{r}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial r} = \frac{\mu \operatorname{sen} \theta}{r^2}$$

y

$$\psi = -\frac{\mu \operatorname{sen} \theta}{r} \quad (6.18)$$

En coordenadas cartesianas donde

$$r \operatorname{sen} \theta = y$$

$$r \cos \theta = x$$

$$r^2 = x^2 + y^2$$

Ecuación (6.18) tiene la forma

$$\psi = -\frac{\mu y}{x^2 + y^2}$$

La línea de corriente  $\psi = \psi_1$  (constante) es

$$x^2 + y^2 + \frac{\mu}{\psi_1} y = 0$$

Esta línea es una circunferencia con centro en el eje  $y$ . Algunas líneas de corriente se muestran en la figura 6.7.



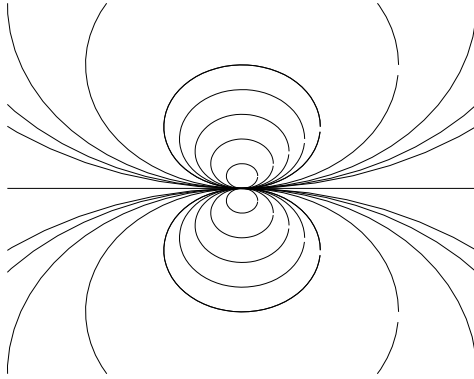


Figura 6.7: Líneas de corriente para un doblete.

*Flujo alrededor de un cilindro sin circulación*

Considérese un flujo uniforme ( $\alpha = 0$ ) y un doblete en el origen. Este flujo compuesto tiene

$$\begin{aligned}\phi &= U_0 x + \frac{\mu \cos \theta}{r} \\ \psi &= U_0 y - \frac{\mu \operatorname{sen} \theta}{r}\end{aligned}$$

que se obtienen de (6.14), (6.15), (6.17) y (6.18).

La línea de corriente para  $\psi = 0$  esta dada por

$$U_0 y - \frac{\mu \operatorname{sen} \theta}{r} = 0$$

y en forma polar

$$\left( U_0 r - \frac{\mu}{r} \right) \operatorname{sen} \theta = 0$$

La solución de esta ecuación son las líneas  $\theta = 0$  y  $\theta = \pi$  y el círculo de radio  $\sqrt{\mu/U_0}$  con centro en el origen. Llamaremos  $a = \sqrt{\mu/U_0}$ , y  $\psi$  tiene la forma

$$\psi = U_0 r \operatorname{sen} \theta \left( 1 - \frac{a^2}{r^2} \right)$$

y

$$\phi = U_0 r \cos \theta \left( 1 + \frac{a^2}{r^2} \right)$$

Cualquier línea de corriente puede considerarse como una frontera debido a que no existe flujo normal a línea y ésta es la condición de frontera no viscosa. En este caso si se toma la circunferencia

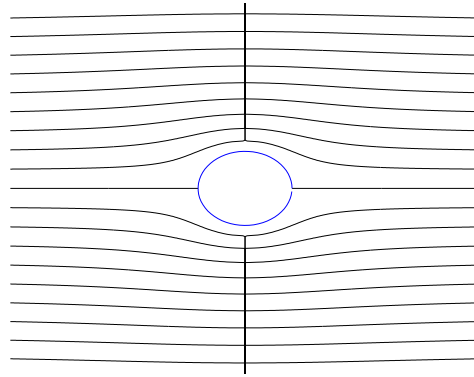


Figura 6.8: Flujo potencial alrededor de un cilindro.

de radio  $a$  como la frontera, el flujo fuera de este círculo representa el flujo alrededor de un cilindro normal a éste. Se observa que ahora la singularidad está dentro del cilindro, y por esto fuera de la región de flujo.

De (6.6) el campo de velocidad es

$$u_r = U_0 \cos \theta \left( 1 - \frac{a^2}{r^2} \right)$$

$$u_\theta = -U_0 \sin \theta \left( 1 + \frac{a^2}{r^2} \right)$$

Para  $r$  muy grande

$$u_r = U_0 \cos \theta$$

$$u_\theta = -U_0 \sin \theta$$

que en coordenadas cartesianas son

$$u = U_0$$

$$v = 0$$

Esto indica que el flujo muy alejado del cilindro (corriente libre) es un flujo uniforme en la dirección  $x$  de velocidad  $U_0$ .

En la superficie del cilindro,  $r = a$ , las velocidades son

$$u_r = 0$$

$$u_\theta = -2U_0 \sin \theta$$

En los puntos  $\theta = 0$  y  $\theta = \pi$  del cilindro las velocidades son

$$u_r = 0$$

$$u_\theta = 0$$

A estos puntos se les llama punto de estancamiento.

De la ecuación (6.5) para flujo permanente y sin fuerzas de cuerpo, se tiene el campo de presión. Si  $p_0$  es la presión en un punto muy alejado del cilindro

$$p = p_0 - \frac{1}{2}\rho U_0^2 \left[ 2\frac{a^2}{r^2} (2\sin^2 \theta - 1) + \frac{a^4}{r^4} \right]$$

En la superficie del cilindro,  $r = a$ , se tiene

$$p \Big|_{r=a} = p_0 - \frac{1}{2}\rho U_0^2 [4\sin^2 \theta - 1]$$

Esta presión actuando sobre la superficie del cilindro, tiene una fuerza resultante. La componente de esta fuerza en la dirección de la corriente libre se llama fuerza de arrastre y la componente normal a ésta se llama fuerza de sustentación.

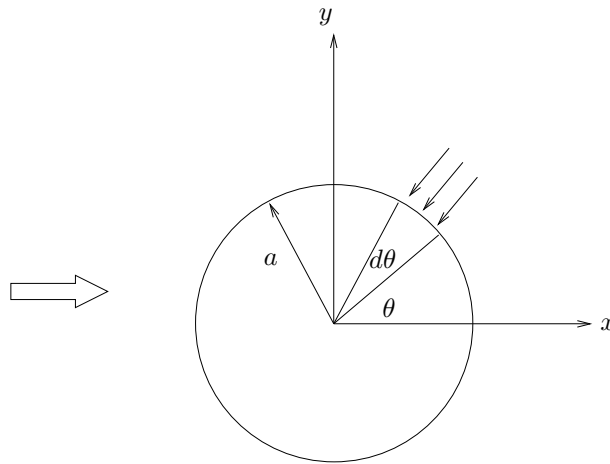


Figura 6.9: Fuerza de presión sobre el cilindro.

Considérese un elemento de área del cilindro de radio  $a$  y longitud  $L$  mostrado en la figura (6.9). El área de este elemento es

$$dA = la \, d\theta$$

y la fuerza sobre este elemento es

$$dF = \left[ p_0 - \frac{1}{2}\rho U_0^2 (4\sin^2 \theta - 1) \right] la \, d\theta$$

que tiene dirección radial. Las componentes en  $x, y$  son

$$dF_x = - \left[ p_0 - \frac{1}{2}\rho U_0^2 (4\sin^2 \theta - 1) \right] la \, \cos \theta \, d\theta$$

$$dF_y = - \left[ p_0 - \frac{1}{2}\rho U_0^2 (4\sin^2 \theta - 1) \right] la \, \sin \theta \, d\theta$$

La fuerza total será la integral sobre toda la superficie. La fuerza en la dirección  $x$  será la de arrastre  $F_A$  y es

$$\begin{aligned} F_A &= -la \int_0^{2\pi} \left[ p_0 - \frac{1}{2} \rho U_0^2 (4 \operatorname{sen}^2 \theta - 1) \right] \cos \theta \, d\theta \\ &= -la \int_0^{2\pi} \left[ p_0 \int_0^{2\pi} \cos \theta \, d\theta - 2\rho U_0^2 \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2 \theta \cos \theta \, d\theta + \frac{1}{2} U_0^2 \int_0^{2\pi} \cos \theta \, d\theta \right] \cos \theta \, d\theta \\ &= 0 \end{aligned}$$

La fuerza en la dirección  $y$  será la de sustentación ( $F_S$ ) y es

$$\begin{aligned} F_S &= -la \int_0^{2\pi} \left[ p_0 \int_0^{2\pi} \operatorname{sen} \theta \, d\theta - 2\rho U_0^2 \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^3 \theta \, d\theta + \frac{1}{2} \rho U_0^2 \int_0^{2\pi} \operatorname{sen} \theta \, d\theta \right] \cos \theta \, d\theta \\ &= 0 \end{aligned}$$

En un flujo potencial no existen fuerzas sobre un cilindro. Esto es contradictorio con la experiencia, donde se observa que existe una fuerza de arrastre en un cilindro inmerso en un flujo uniforme. Esta contradicción es la paradoja de D'Alembert. La discrepancia entre esta teoría y la práctica se debe a efectos viscosos que no se han considerado.

En el caso del cilindro el flujo potencial es simétrico con respecto a ambos ejes. Pero para otros cuerpos donde el flujo es asimétrico con respecto a cualquiera de los ejes, existirá una fuerza resultante.

#### *Flujo alrededor de un cilindro con circulación*

Considérese un flujo compuesto por un flujo uniforme, un doblete y un vórtice libre. El potencial de velocidad y la función de corriente son

$$\begin{aligned} \phi &= U_0 x + \frac{\mu \cos \theta}{r} - K\theta \\ \psi &= U_0 y - \frac{\mu \operatorname{sen} \theta}{r} + K \ln r \end{aligned}$$

En coordenadas polares

$$\psi = \left( U_0 r - \frac{\mu}{r} \right) \operatorname{sen} \theta + K \ln r$$

Para  $r = \sqrt{\mu/U_0} = a$ , se tiene

$$\psi = K \ln a = \text{constante}$$

$r = a$  es entonces una línea de corriente.

El potencial de velocidad y la función de corriente toman la forma

$$\phi = U_0 r \left( 1 + \frac{a^2}{r^2} \right) \cos \theta - K\theta \quad (6.26a)$$

$$\psi = U_0 r \left( 1 - \frac{a^2}{r^2} \right) \operatorname{sen} \theta + K \ln r \quad (6.26b)$$

Tomando la línea de corriente con  $\psi = K \ln a$  como una frontera, se tiene un flujo alrededor de un cilindro. De (6.6) o (6.9) se tiene el campo de velocidad

$$u_r = U_0 \cos \theta \left( 1 - \frac{a^2}{r^2} \right) \quad (6.27a)$$

$$u_\theta = -U_0 \sin \theta \left( 1 + \frac{a^2}{r^2} \right) - \frac{K}{a} \quad (6.27b)$$

Para  $r$  muy grande, el flujo uniforme  $U_0$ . En la superficie del cilindro,  $r = a$ , las velocidades son

$$u_r = 0$$

$$u_\theta = -2U_0 \sin \theta - \frac{K}{a}$$

Para estas velocidades en la superficie, la circulación sobre la superficie del cilindro es

$$\Gamma = -a \int_0^{2\pi} \left( 2U_0 \sin \theta + \frac{K}{a} \right) d\theta$$

$$= 2\pi K$$

El signo menos indica que la circulación es en el sentido de las manecillas del reloj. Sustituyendo este resultado en (6.26) se tiene

$$\phi = U_0 r \left( 1 + \frac{a^2}{r^2} \right) \cos \theta + \frac{\Gamma}{2\pi} \theta$$

$$\psi = U_0 r \left( 1 - \frac{a^2}{r^2} \right) \sin \theta - \frac{\Gamma}{2\pi} \ln r$$

Los puntos de estancamiento (donde la velocidad es cero) del flujo, en la superficie del cilindro satisfacen

$$-2U_0 \sin \theta_e + \frac{\Gamma}{2\pi a} = 0$$

de donde

$$\theta_e = \arcsen \frac{\Gamma}{4\pi U_0 a} \quad (6.30)$$

Considérense los siguientes casos. Cuando  $\Gamma = 0$ , se reduce al flujo alrededor de un cilindro sin circulación como en la figura 6.8. Para  $0 < \Gamma < 4\pi U_0 a$ , existen dos valores de  $\theta_e$  para el punto de estancamiento como se muestra en la figura 6.10. Si  $\Gamma = 4\pi U_0 a$ , los dos puntos de estancamiento se juntan, y para  $\Gamma > 4\pi U_0 a$  no existe solución de (6.30) y el punto de estancamiento no está en la superficie del cilindro.

De la ecuación (6.5) para flujo permanente y sin fuerzas de cuerpo se tiene el campo de presión.

$$p = p_0 - \frac{1}{2} \rho U_0^2 \left[ 2 \frac{a^2}{r^2} (2 \sin^2 \theta - 1) + \frac{a^4}{r^4} + \frac{\Gamma^2}{4\pi^2 r^2 U_0^2} - \frac{\Gamma}{\pi r U_0} \sin \theta \left( 1 + \frac{a^2}{r^2} \right) \right]$$

donde  $p_0$  y  $U_0$  son la presión y la velocidad en un punto alejado del cilindro. En la superficie del cilindro  $r = a$ , se tiene

$$p \Big|_{r=a} = p_0 - \frac{1}{2} \rho U_0^2 \left[ 4 \sin^2 \theta - 1 + \frac{\Gamma^2}{4\pi^2 a^2 U_0^2} - \frac{2\Gamma}{\pi a U_0} \sin \theta \right]$$

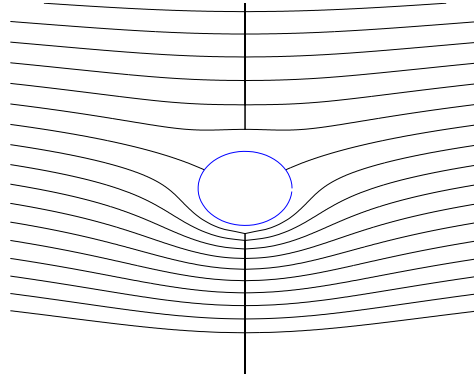


Figura 6.10: Flujo alrededor de cilindro rotando con  $0 < \Gamma < 4\pi U_0 a$ .

La fuerza de arrastre es

$$F_A = -al \int_0^{2\pi} \left[ p_0 - \frac{1}{2} \rho U_0^2 \left( 4 \operatorname{sen}^2 \theta - 1 + \frac{\Gamma^2}{4\pi^2 a^2 U_0^2} - \frac{2\Gamma}{\pi a U_0} \operatorname{sen} \theta \right) \right] \cos \theta \, d\theta$$

$$= 0$$

y la fuerza de sustentación es

$$F_S = -al \int_0^{2\pi} \left[ p_0 - \frac{1}{2} \rho U_0^2 \left( 4 \operatorname{sen}^2 \theta - 1 + \frac{\Gamma^2}{4\pi^2 a^2 U_0^2} - \frac{2\Gamma}{\pi a U_0} \operatorname{sen} \theta \right) \right] \operatorname{sen} \theta \, d\theta$$

$$= -\frac{\rho \Gamma U_0 l}{\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2 \theta \, d\theta$$

$$= -\rho U_0 \Gamma l \tag{6.31}$$

En las figuras (6.5) y (6.6) la dirección de la circulación es tal que  $\Gamma$  es negativa. La fuerza de sustentación es positiva, o sea ascendente. El hecho de que la circulación alrededor de un flujo potencial produzca una sustentación es importante para el estudio de alas. A la ecuación (6.31) se le llama ley de Kutta-Joukowski. La sección de las alas de los aviones son de tal forma que produzcan una circulación alrededor de esta sección la cual da una fuerza que sostiene el avión. En el caso del cilindro con circulación se produce ésta debido a la rotación del cilindro. Por efectos viscosos la superficie del cilindro tiende a arrastrar el fluido produciendo la circulación. En el caso de alas, los efectos de los flujos reales y la geometría de la misma producen la circulación necesaria sin movimiento giratorio del ala.

Es necesario aclarar que aunque el flujo tiene una circulación alrededor de una curva que incluya al cilindro, el flujo es potencial. El rotacional del vector velocidad es

$$\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{U}$$

$$= \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial}{\partial r} (r u_\theta) - \frac{\partial}{\partial \theta} (u_r) \right] \mathbf{e}_z$$

Sustituyendo (6.27), se tiene

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\omega} &= \frac{1}{r} \left[ -U_0 \operatorname{sen} \theta + U_0 \operatorname{sen} \theta \frac{a^2}{r^2} + U_0 \operatorname{sen} \theta \left( 1 - \frac{a^2}{r^2} \right) \right] \mathbf{e}_z \\ &= 0\end{aligned}$$

fuera del origen. lo cual verifica que el flujo es potencial.

## 6.5. Flujos axisiméricos

En esta sección se estudiarán flujos potenciales en tres dimensiones con simetría con respecto a un eje. Para flujo irrotacional

$$\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{U} = 0$$

De donde se puede definir

$$\mathbf{U} = \nabla \phi \quad (6.32)$$

donde  $\phi$  es el potencial de velocidad. Sustituyendo en la ecuación para flujos incompresibles (6.2), se tiene la ecuación de Laplace

$$\nabla^2 \phi = 0$$

la cual en coordenadas esféricas es

$$\nabla^2 \phi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \operatorname{sen} \theta_1} \frac{\partial}{\partial \theta_1} \left( \operatorname{sen} \theta_1 \frac{\partial \phi}{\partial \theta_1} \right) + \frac{1}{r^2 \operatorname{sen} \theta_1} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta_2^2}$$

Si no existe variación de  $\phi$  con respecto a  $\theta_2$  el flujo es axisimétrico y la ecuación se reduce

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} \right) + \frac{1}{\operatorname{sen} \theta_1} \frac{\partial}{\partial \theta_1} \left( \operatorname{sen} \theta_1 \frac{\partial \phi}{\partial \theta_1} \right) = 0 \quad (6.33)$$

En estas coordenadas, (6.32) tiene las componentes

$$u_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} \quad (6.34a)$$

$$u_{\theta_1} = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta_1} \quad (6.34b)$$

Entonces la ecuación de continuidad (6.32) para estas coordenadas es

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 u_r) + \frac{1}{r \operatorname{sen} \theta_1} \frac{\partial}{\partial \theta_1} (\operatorname{sen} \theta_1 u_{\theta_1}) = 0$$

Si se define

$$u_r = \frac{1}{r^2 \operatorname{sen} \theta_1} \frac{\partial \psi_s}{\partial \theta_1} \quad (6.35a)$$

$$u_{\theta_1} = -\frac{1}{r \operatorname{sen} \theta_1} \frac{\partial \psi_s}{\partial r} \quad (6.35b)$$

la ecuación (6.33) se satisface. A  $\psi_s$  se le llama la función de corriente de Stokes.

Si se sustituye (6.35) en la condición de irrotacionalidad

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\omega} &= \nabla \times \mathbf{U} \\ &= \frac{1}{r^2 \operatorname{sen} \theta_1} \begin{vmatrix} \mathbf{e}_r & \mathbf{e}_{\theta_1} & \mathbf{e}_{\theta_2} \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta_1} & \frac{\partial}{\partial \theta_2} \\ u_r & ru_{\theta_1} & 0 \end{vmatrix} \\ &= 0\end{aligned}$$

se reduce a

$$r^2 \frac{\partial^2 \psi_s}{\partial r^2} + \operatorname{sen} \theta_1 \frac{\partial}{\partial \theta_1} \left( \frac{1}{\operatorname{sen} \theta_1} \frac{\partial \psi_s}{\partial \theta_1} \right) = 0 \quad (6.36)$$

La función de corriente de Stokes satisface esta ecuación (que no es la ecuación de Laplace).

La línea  $\psi_s$  constante es una línea de corriente que se demuestra de la siguiente manera. Para una línea de corriente

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v}$$

Si  $x$  es el eje de simetría, entonces

$$\begin{aligned}x &= r \cos \theta_1; & u &= u_r \cos \theta_1 - u_{\theta_1} \operatorname{sen} \theta_1 \\ y &= r \operatorname{sen} \theta_1; & v &= u_r \operatorname{sen} \theta_1 + u_{\theta_1} \cos \theta_1\end{aligned}$$

La ecuación de la línea de corriente es

$$\frac{-r \operatorname{sen} \theta_1 d\theta_1 + \cos \theta_1 dr}{u_r \cos \theta_1 - u_{\theta_1} \operatorname{sen} \theta_1} = \frac{r \cos \theta_1 d\theta_1 + \cos \theta_1 dr}{u_r \operatorname{sen} \theta_1 + u_{\theta_1} \cos \theta_1}$$

que se reduce a

$$ru_r d\theta_1 = u_{\theta_1} dr \quad (6.38)$$

La derivada total de  $\psi_s$  es

$$d\psi_s = \frac{\partial \psi_s}{\partial r} dr + \frac{\partial \psi_s}{\partial \theta_1} d\theta_1$$

Sustituyendo (6.33) en la ecuación anterior para  $\psi_s$  constante, se tiene

$$0 = -u_r r \operatorname{sen} \theta_1 dr + r^2 \operatorname{sen} \theta_1 u_r d\theta_1$$

que se reduce a (6.33), lo que indica que la línea de  $\psi_s$  constante es una línea de corriente.

### Flujos sencillos

A continuación se trata con algunas funciones  $\phi$  y  $\psi_s$  que satisfacen (6.33) y (6.36)



*Flujo uniforme*

Sea la función armónica

$$\phi = U_0 r \cos \theta$$

El campo de velocidad, de las ecuaciones (6.34), es

$$\begin{aligned} u_r &= U_0 \cos \theta_1 \\ u_{\theta_1} &= -U_0 \operatorname{sen} \theta_1 \end{aligned}$$

De (6.35) se obtiene

$$\psi_s = \frac{U_0 r^2}{2} \operatorname{sen}^2 \theta_1$$

*Fuente y sumidero*

Dada la función armónica

$$\phi = -\frac{m}{r}$$

donde  $m$  es constante, el campo de velocidad es

$$\begin{aligned} u_r &= \frac{m}{r^2} \\ u_{\theta_1} &= 0 \end{aligned}$$

y la función de corriente de Stokes es

$$\psi_s = -m \cos \theta_1$$

$m$  positiva representa una fuente y  $m$  negativa representa un sumidero.

*Flujos compuestos*

Las ecuaciones (6.33) y (6.36) son lineales, por lo que la combinación lineal de las soluciones de  $\phi$  y  $\psi_s$  es también una solución.

*Doblete*

Considérese una fuente en el punto  $(a, \pi)$  y un sumidero de igual magnitud en  $(a, 0)$ . El potencial de velocidad del flujo resultante es

$$\begin{aligned} \phi &= m \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \\ &= -m \left( \frac{r_1 - r_2}{r_1 r_2} \right) \end{aligned}$$

Para  $a \ll r$ , se pueden usar las reglas del triángulo (6.16) y la serie binomial (A.2) para obtener

$$\begin{aligned} r_1 &= r \left[ 1 + \left( \frac{a^2 - 2ra \cos \theta}{r^2} \right) \right]^{1/2} \\ &= r \left[ 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{a^2 - 2ra \cos \theta}{r^2} \right) - \frac{1}{8} \left( \frac{a^2 - 2ra \cos \theta}{r^2} \right)^2 + \dots \right] \end{aligned}$$

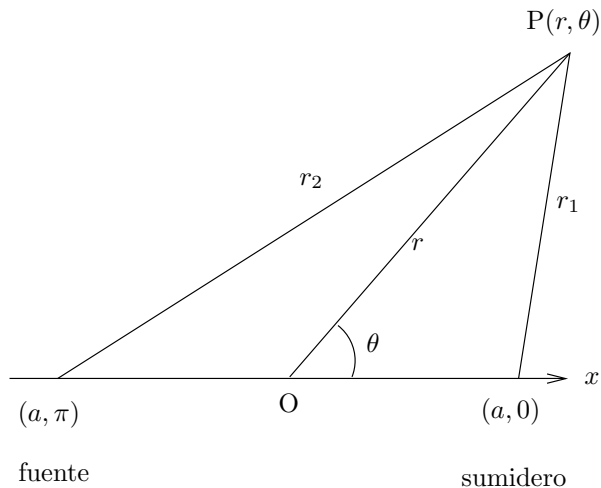


Figura 6.11: Posición de fuente y sumidero en el doblete axisimétrico.

y

$$r_2 = r \left[ 1 + \left( \frac{a^2 + 2ra \cos \theta}{r^2} \right) \right]^{1/2}$$

$$= r \left[ 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{a^2 + 2ra \cos \theta}{r^2} \right) - \frac{1}{8} \left( \frac{a^2 + 2ra \cos \theta}{r^2} \right)^2 + \dots \right]$$

de donde

$$r_1 - r_2 \approx -2a \cos \theta$$

tal que

$$\phi = m \frac{2a \cos \theta_1}{r_1 r_2}$$

Cuando  $a \rightarrow 0$ , pero que el valor  $ma$  sea constante ( $\mu/2$ )

$$\phi = \frac{\mu \cos \theta_1}{r^2}$$

El campo de velocidad es

$$u_r = -\frac{2\mu \cos \theta_1}{r^3}$$

$$u_{\theta_1} = -\frac{\mu \operatorname{sen} \theta_1}{r^3}$$

que representa el flujo debido a un doblete en el origen. La función de corriente de Stokes es

$$\psi_s = -\frac{\mu \operatorname{sen}^2 \theta_1}{r}$$

*Flujo alrededor de una esfera*

Considérese un flujo compuesto de un flujo uniforme y un doblete en el origen. En este flujo

$$\psi_s = \left( \frac{U_0 r^2}{2} - \frac{\mu}{r} \right) \text{sen}^2 \theta_1$$

La línea de corriente  $\psi_s = 0$  corresponde a

$$\left( \frac{U_0 r^2}{2} - \frac{\mu}{r} \right) \text{sen}^2 \theta_1 = 0$$

cuya solución es  $\theta_1 = 0$ ,  $\theta_1 = \pi$  o

$$r = \left( \frac{2\mu}{U_0} \right)^{1/3}$$

Si se considera esta línea de corriente como una frontera el flujo representa el flujo alrededor de una esfera. Llamando

$$a = \left( \frac{2\mu}{U_0} \right)^{1/3}$$

se tiene

$$\psi_s = \frac{U_0 r^2}{2} \text{sen}^2 \theta_1 \left( 1 - \frac{a^2}{r^2} \right)$$

y el campo de velocidad es

$$u_r = U_0 \cos \theta_1 \left( 1 - \frac{a^2}{r^2} \right)$$

$$u_{\theta_1} = -U_0 \text{sen} \theta_1 \left( 1 + \frac{a^3}{2r^3} \right)$$

y el potencial de velocidad es

$$\phi = U_0 r \cos \theta_1 \left( 1 + \frac{a^3}{2r^3} \right)$$

## Problemas

1. Encontrar el potencial de la velocidad de un flujo generado por una línea de sumideros de intensidad uniforme. Determinar la distribución de presiones y los puntos de estancamiento (componentes de velocidad cero).
2. Demuestre que las líneas de corriente y las de trayectoria coinciden para el flujo

$$u_i = \frac{x_i}{1+t}$$

3. Demostrar que el potencial de velocidad  $\phi$  y la función de corriente de los siguientes flujos satisfacen la ecuación de Laplace: (a) flujo rectilíneo bidimensional, (b) flujo fuente, (c) doblete.
4. El potencial de velocidad para un flujo tridimensional con simetría axial es

$$\phi = \frac{c}{r^2} \cos \theta_1$$

en donde  $c$  es una constante. Obtener la correspondiente función de corriente.

5. Investigue el flujo correspondiente al potencial:

$$\phi = -k(x^2 + y^2 - 2z^2)$$

Encuentre la distribución de presiones y los puntos de estancamiento.



# Capítulo 7

## Flujo viscoso incompresible

En este capítulo se discutirá el flujo de fluidos incompresibles con viscosidad newtoniana. Las ecuaciones para este caso son:

$$\nabla \cdot \mathbf{U} = 0 \quad (7.1)$$

$$\rho \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \rho (\mathbf{U} \cdot \nabla) \mathbf{U} = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{U} + \rho \mathbf{f} \quad (7.2)$$

Estas cuatro ecuaciones escalares para las cuatro variables escalares  $u$ ,  $v$ ,  $w$  y  $p$  son casos especiales de la ecuación de continuidad (3.1.5) y las ecuaciones de conservación de momentum (3.5.1) para fluidos incompresibles. Estas ecuaciones más las condiciones de frontera para cualquier problema constituyen un sistema cerrado.

Debido a la no linealidad de en de la ecuación (7.2) este sistema de ecuaciones en general no tiene una solución analítica. En algunos casos particulares es posible obtener la solución analítica. En otros casos se necesitan hacer simplificaciones o algunas aproximaciones para obtener soluciones analíticas, por ejemplo, en un flujo con bajo número de Reynolds donde es posible despreciar el término no lineal. Para números de Reynolds más altos, una aproximación es dividir el flujo en dos regiones, una capa viscosa cerca de la frontera del flujo y el resto, de flujo no viscoso.

### 7.1. Soluciones exactas

Para algunos problemas específicos, el término no lineal es idénticamente cero y las ecuaciones tienen soluciones analíticas o exactas. A continuación se describen algunos de estos problemas.

### 7.2. Flujo de Couette

Considérense dos placas planas paralelas infinitas separadas una distancia  $h$  entre las cuales existe un fluido. Una de las placas se mueve con una velocidad  $U_0$  con respecto a la otra y en una dirección paralela a la misma.

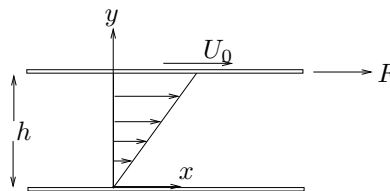


Figura 7.1: Flujo entre placas paralelas.

Las ecuaciones en coordenadas cartesianas están en el Apéndice B.2. Escogiendo los ejes mostrados en la figura 7.1 se pueden hacer las siguientes consideraciones: el flujo será solo en la dirección del eje  $x$  ( $v = w = 0$ ), la presión

es constante, flujo permanente ( $\partial/\partial t = 0$ ), sin fuerzas de cuerpo ( $f_x = f_y = f_z = 0$ ), la velocidad  $\mathbf{U}$  no depende de la coordenada  $z$ .

De la ecuación de continuidad (B.1) resulta que

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

De esta manera las ecuaciones de Navier-Stokes (B.2) se reducen a

$$\frac{d^2 u}{dy^2} = 0$$

donde la derivada total sustituye la derivada parcial, porque  $u$  es solo función de  $y$ . Integrando dos veces

$$\frac{du}{dy} = C_1 \quad (7.3)$$

$$u = C_1 y + C_2 \quad (7.4)$$

Las constantes  $C_1$  y  $C_2$  se determinan de las condiciones de frontera. Para este problema son:

(a)  $u = U_0$  en  $y = h$

(b)  $u = 0$  en  $y = 0$

por la condición de no resbalamiento.

Sustituyendo estas condiciones en la solución (7.4)

$$U_0 = C_1 h + C_2$$

$$C_2 = 0$$

de donde

$$C_1 = \frac{U_0}{h}$$

$$C_2 = 0$$

El campo de velocidades es entonces

$$u = U_0 \frac{y}{h}$$

$$v = 0$$

$$w = 0$$

El tensor de esfuerzos según (3.33) es

$$\boldsymbol{\tau} = \begin{bmatrix} -p & \frac{\mu U_0}{h} & 0 \\ \frac{\mu U_0}{h} & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{bmatrix}$$

Se observa que  $\boldsymbol{\tau}$  es independiente de la posición.

### 7.3. Flujo de Poiseuille

Considérese un tubo infinito de sección circular de radio  $r_0$  a través del cual se mueve un fluido. El movimiento del fluido se debe a la acción de la variación de la presión a lo largo del eje longitudinal  $z$ . Para este caso es conveniente considerar las ecuaciones en coordenadas cilíndricas. El fluido se mueve en el sentido longitudinal ( $u_\theta = u_r = 0$ ), y  $u_z$  por simetría no depende de  $\theta$ . El flujo es permanente y sin fuerzas de cuerpo.

La ecuación de continuidad (B.3) se reduce a

$$\frac{\partial u_z}{\partial z} = 0$$

y las ecuaciones de Navier-Stokes (B.4) a

$$0 = \frac{\partial p}{\partial r}$$

$$0 = \frac{\partial p}{\partial \theta}$$

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u_z}{\partial r} \right)$$

La presión varía sólo con la coordenada  $z$  y la velocidad  $u_z$  con  $r$ . La ecuación anterior se puede escribir con derivadas ordinarias.

$$0 = -r \frac{\partial p}{\partial z} + \mu \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u_z}{\partial r} \right)$$

Integrando con respecto a  $r$

$$C_1 = -\frac{r^2}{2} \frac{dp}{dz} + \mu r \frac{du_z}{dr}$$

de donde

$$\frac{du_z}{dr} = \frac{r}{2\mu} \frac{dp}{dz} + \frac{C_1}{\mu r}$$

y la segunda integral es

$$u_z = \frac{r^2}{4\mu} \frac{dp}{dz} + \frac{C_1}{\mu} \ln r + C_2$$

Para  $r = 0$ ,  $u_z$  es infinita, excepto si se escoge  $C_1 = 0$ . En las paredes  $r = r_0$ , por la condición de no resbalamiento  $u_z = 0$ , por lo que

$$C_2 = -\frac{r_0^2}{4\mu} \frac{dp}{dz}$$

El campo de velocidad es

$$u_z = -\frac{1}{4\mu} \frac{dp}{dz} (r_0^2 - r^2)$$

$$u_r = 0$$

$$u_\theta = 0$$

$u_z > 0$  con la disminución de presión a lo largo de  $z$ .

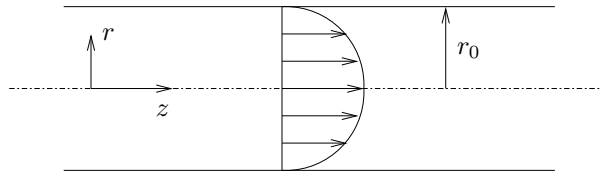


Figura 7.2: Flujo en un tubo.

La velocidad máxima  $(u_z)_{max}$  ocurre en el centro del tubo.

$$(u_z)_{max} = -\frac{1}{4\mu} \frac{dp}{dz} r_0^2$$

Se define la velocidad media  $\bar{u}_z$  como aquella velocidad uniforme sobre la sección transversal del tubo que produce el mismo gasto  $Q$ .

$$Q = \pi r_0^2 \bar{u}_z$$

$$= \int_0^{r_0} 2\pi r u_z dr$$

de donde

$$\bar{u}_z = -\frac{1}{2r_0^2\mu} \frac{dp}{dz} \int_0^{r_0} (r_0^2 r - r^3) dr$$

$$= -\frac{r_0^2}{8\mu} \frac{dp}{dz}$$

$$= \frac{1}{2} (u_z)_{max}$$

La caída de presión  $\Delta p$  a lo largo del tubo por una longitud  $L$  es

$$\Delta p = \frac{8\mu L \bar{u}_z}{r_0^2}$$

En términos del diámetro del tubo  $D$

$$\Delta p = \frac{32\mu L \bar{u}_z}{D^2} \quad (7.6)$$

Si se expresa  $\Delta p$  en términos de un factor de rozamiento  $f$

$$\Delta p = f \frac{L}{D} \frac{\rho \bar{u}_z^2}{2}$$

entonces, comparando con (7.6)

$$f = \frac{64}{Re}$$

donde el número de Reynolds es

$$Re = \frac{\rho D \bar{u}_z}{\mu}$$

## 7.4. Flujo entre cilindros giratorios

Considérense dos cilindros concéntricos infinitos de radios  $r_1$  y  $r_2$  (donde  $r_2 > r_1$ ), girando a velocidades angulares  $\omega_1$  y  $\omega_2$  respectivamente.

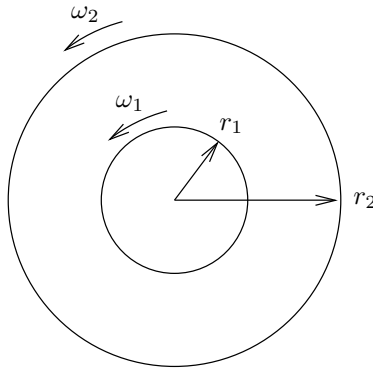


Figura 7.3: Flujo entre cilindros giratorios.

Usando coordenadas cilíndricas la única componente de la velocidad es la velocidad tangencial  $u_\theta$  ( $u_r = u_z = 0$ ) y es independiente del eje  $z$ . El flujo es permanente, sin fuerzas de cuerpo y por simetría la presión no varía con  $\theta$ .

La ecuación de continuidad (B.3) se reduce a

$$\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} = 0$$

y las ecuaciones de Navier- Stokes (B.4) a

$$\begin{aligned} -\rho \frac{u_\theta^2}{r} &= -\frac{\partial p}{\partial r} \\ 0 &= \mu \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \right) - \frac{u_\theta}{r^2} \right\} \\ 0 &= -\frac{\partial p}{\partial z} \end{aligned}$$



La presión  $p$  y la velocidad  $u_\theta$  son sólo función de  $r$ , y las derivadas se pueden escribir como derivadas ordinarias

$$\frac{dp}{dr} = \rho \frac{u_\theta^2}{r} \quad (7.7)$$

$$\frac{d}{dr} \left( r \frac{du_\theta}{dr} \right) = \frac{u_\theta}{r} \quad (7.8)$$

Esta ecuación se puede escribir también en la forma

$$\frac{d^2 u_\theta}{dr^2} + \frac{d}{dr} \left( \frac{u_\theta}{r} \right) = 0$$

Integrando

$$\frac{du_\theta}{dr} + \frac{u_\theta}{r} = C_1$$

o bien

$$r \, du_\theta + u_\theta \, dr = C_1 r \, dr$$

cuya integral es

$$r u_\theta = \frac{C_1}{2} r^2 + C_2$$

de donde

$$u_\theta = \frac{C_1}{2} r + \frac{C_2}{r} \quad (7.9)$$

Las condiciones de frontera son:

(a)  $u_\theta = \omega_1 r_1$  cuando  $r = r_1$

(b)  $u_\theta = \omega_2 r_2$  cuando  $r = r_2$

por la condición de no resbalamiento. Utilizando estas condiciones en (7.9) se obtiene

$$\omega_1 r_1 = \frac{C_1}{2} r_1 + \frac{C_2}{r_1}$$

$$\omega_2 r_2 = \frac{C_1}{2} r_2 + \frac{C_2}{r_2}$$

de donde

$$C_1 = 2 \left( \frac{\omega_1 r_1^2 - \omega_2 r_2^2}{r_1^2 - r_2^2} \right) \quad (7.10)$$

$$C_2 = -r_1^2 r_2^2 \left( \frac{\omega_1 - \omega_2}{r_1^2 - r_2^2} \right) \quad (7.11)$$

y el campo de velocidades es

$$u_\theta = \left( \frac{\omega_1 r_1^2 - \omega_2 r_2^2}{r_1^2 - r_2^2} \right) r - \frac{r_1^2 r_2^2}{r} \left( \frac{\omega_1 - \omega_2}{r_1^2 - r_2^2} \right) \quad (7.12)$$

$$u_r = 0 \quad (7.13)$$

$$u_z = 0 \quad (7.14)$$

La variación de presión se obtiene de la integración de (7.7)

$$p = \rho \int \frac{u_\theta^2}{2} dr + C$$

Sustituyendo (7.12) en la integral anterior e integrando resulta la ecuación

$$p(r) = \frac{\rho}{(r_2^2 - r_1^2)^2} \left[ (\omega_2^2 r_2^2 - \omega_1 r_1^2) \frac{r^2}{2} - 2(\omega_2 - \omega_1)(\omega_2^2 r_2^2 - \omega_1^2 r_1^2) \ln r - (\omega_2 - \omega_1)^2 \frac{r_1^4 r_2^4}{4r^2} \right] + C$$

La constante de integración  $C$  se calcula si se conoce el valor de la presión en un punto.

El esfuerzo cortante sobre el cilindro interior es

$$\begin{aligned}\tau_1 &= \mu \left. \frac{du_\theta}{dr} \right|_{r=r_1} \\ &= \mu \left\{ \frac{\omega_1 r_1^2 - \omega_2 r_2^2}{r_1^2 - r_2^2} + r_2 \frac{\omega_1 - \omega_2}{r_1^2 - r_2^2} \right\}\end{aligned}$$

El par por unidad de longitud sobre el cilindro interior es

$$\begin{aligned}M_1 &= 2\pi r_1 \tau_1 \quad \text{mal!} \\ &= 2\pi \mu r_1 \left\{ \frac{\omega_1 r_1^2 - \omega_2 r_2^2}{r_1^2 - r_2^2} + r_2 \frac{\omega_1 - \omega_2}{r_1^2 - r_2^2} \right\}\end{aligned}$$

## 7.5. Primer problema de Stokes

Considere una placa infinita en un fluido inicialmente en reposo. En el instante  $t = 0$  la placa comienza a moverse sobre su mismo plano con una velocidad constante  $U_0$ . La figura 7.4 muestra el perfil de velocidades a diferentes instantes del tiempo.

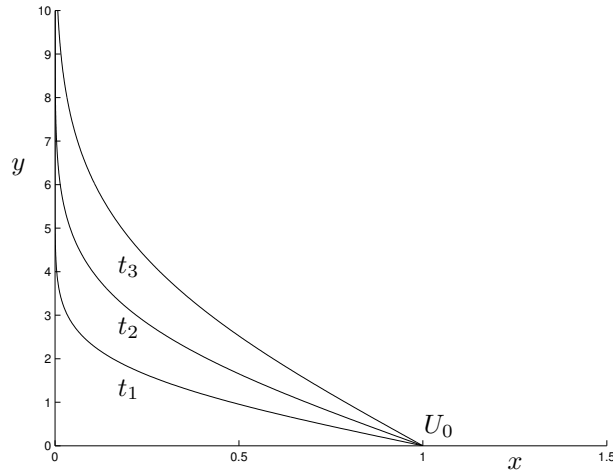


Figura 7.4: Primer problema de Stokes;  $t_3 > t_2 > t_1$

El flujo será solo en la dirección de  $x$  ( $v = w = 0$ ), la presión es constante, sin fuerzas de cuerpo ( $f_x = f_y = f_z = 0$ ) y la velocidad  $u$  solo depende del tiempo  $t$  y de la coordenada  $y$ . Las ecuaciones de movimiento se reducen a

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (7.15)$$

Un método de solución de este tipo de ecuaciones es por similitud. En este método se escoge una variable de similitud  $\eta(y, t)$  de tal manera que la ecuación diferencial parcial de  $u(y, t)$  se convierte en una ecuación diferencial ordinaria de  $u(\eta)$ .

Para especificar el método se escogerá  $\eta$  de una forma general

$$\eta = y^\alpha t^\beta$$

donde  $\alpha$  y  $\beta$  son constantes. La solución de la ecuación es  $u = u(\eta)$ . Entonces las derivadas son

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} &= u'(\eta) y^\alpha \beta t^{\beta-1} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \alpha^2 t^{2\beta} y^{2\alpha-2} u''(\eta) + \alpha(\alpha-1) t^\beta y^{\alpha-2} u'(\eta)\end{aligned}$$

Sustituyendo en (7.15) y simplificando se tiene

$$\frac{1}{\nu} \frac{y^2}{t} \beta u'(\eta) = \alpha^2 t^\beta y^\alpha u''(\eta) + \alpha(\alpha - 1)u'(\eta) \quad (7.16)$$

donde se escribió  $\nu = \mu/\rho$ .

$\alpha$  y  $\beta$  se escogen de tal forma que la ecuación quede sólo en función de la variable independiente  $\eta$ . Existen varias posibilidades para esto, pero los valores

$$\alpha = 1$$

$$\beta = -\frac{1}{2}$$

proporcionan la forma más sencilla a la ecuación diferencial ordinaria que resulta de (7.16). Esta es

$$u''(\eta) + \frac{1}{2\nu}\eta u'(\eta) = 0$$

donde  $\eta = y/\sqrt{t}$ . Esta ecuación se puede escribir

$$\frac{d}{d\eta} \{\ln(u'(\eta))\} = -\frac{1}{2\nu}\eta$$

Integrando se tiene

$$\ln u'(\eta) = -\frac{1}{4\nu}\eta^2 + \ln C_1$$

o bien

$$u'(\eta) = C_1 \exp\left(-\frac{1}{4\nu}\eta^2\right)$$

cuya integral es

$$u(\eta) = C_1 \int_0^\eta \exp\left(-\frac{1}{4\nu}\xi^2\right) d\xi + C_2$$

Entonces la solución de (7.15) es

$$u(y, t) = C_1 \int_0^{y/\sqrt{t}} \exp\left(-\frac{1}{4\nu}\xi^2\right) d\xi + C_2 \quad (7.17)$$

Las condiciones de frontera son

(a)  $u(0, t) = U_0$  para  $t > 0$

(b)  $u(y, 0) = 0$  para  $y \geq 0$

Sustituyendo la condición (a) en (7.17) se obtiene

$$C_2 = U_0$$

La condición inicial (b) da

$$0 = C_1 \int_0^\infty \exp\left(-\frac{\xi^2}{4\nu}\right) d\xi + U_0$$

Haciendo cambio de variable

$$\zeta = \frac{1}{2\sqrt{\nu}}\xi$$

$$C_1 = -\frac{U_0}{2\sqrt{\nu} \int_0^\infty e^{-\zeta^2} d\zeta}$$

La integral

$$\int_0^\infty e^{-\zeta^2} d\zeta = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

de donde

$$C_1 = -\frac{U_0}{\sqrt{\nu\pi}}$$

El campo de velocidad es

$$u(y, t) = U_0 \left\{ 1 - \frac{1}{\sqrt{\nu\pi}} \int_0^{y/\sqrt{4\nu t}} \exp\left(-\frac{\xi^2}{4\nu}\right) d\xi \right\} \quad (7.18)$$

Escribiendo en términos de  $\zeta$  ya definida se tiene

$$\begin{aligned} u(y, t) &= U_0 \left\{ 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{y/2\sqrt{\nu t}} e^{-\zeta^2} d\zeta \right\} \\ v &= 0 \\ w &= 0 \end{aligned}$$

La integral

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-\zeta^2} d\zeta = \operatorname{erf}(x)$$

es una función de  $x$  llamada función de error normalizada. Esta función se puede encontrar tabulada en los manuales de matemáticas. De esta manera la ecuación se puede escribir

$$u(y, t) = U_0 \left\{ 1 - \operatorname{erf}\left(\frac{y}{2\sqrt{\nu t}}\right) \right\} \quad (7.19)$$

En la figura 7.4 se muestran perfiles de velocidad para diferentes tiempos, que corresponden a la ecuación (7.19). Se observa que la velocidad  $u$  varía de su valor máximo  $U_0$  en la placa hasta el valor cero alejado de la placa de una manera asintótica. En la medida que transcurre el tiempo el efecto del movimiento de la placa se nota en una región mayor. La ecuación (7.15) es una ecuación de difusión de la velocidad  $u$  (momentum por unidad de masa) en la coordenada  $y$  con el tiempo.

La ecuación de vorticidad (4.9) en este caso toma la forma

$$\rho \frac{\partial \omega_z}{\partial t} = \mu \frac{\partial^2 \omega_z}{\partial y^2}$$

de donde  $\omega_z$  es la única componente de la vorticidad. Esta ecuación es también una ecuación de difusión de  $\omega_z$ . La solución de ésta se puede obtener de (7.18). Por la definición de vorticidad (2.11)

$$\begin{aligned} \omega_z &= \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \\ &= \frac{\partial u}{\partial y} \end{aligned}$$

debido a que  $v = 0$ . Derivando (7.18)

$$\omega_z = -\frac{U_0}{\sqrt{\pi\nu t}} \exp\left(-\frac{y^2}{4\nu t}\right) \quad (7.20)$$

La ventaja de escribir las ecuaciones en función de la variable de similaridad es que los perfiles de velocidad mostrados en la figura 7.4 y los correspondientes a la ecuación (7.20) se reducen a una sola curva en ambos casos. Por ejemplo los perfiles de velocidad tienen la forma mostrada en la figura 7.5, donde la ordenada es  $y/2\sqrt{\nu t}$  en vez de  $y$ .

Se puede encontrar una región donde el efecto de la placa es notorio. El espesor de esta región se nota de la figura 7.5 y es del orden de  $\sqrt{\nu t}$ . La relación exacta entre este espesor y  $\sqrt{\nu t}$  depende de la definición precisa de esta región.

## 7.6. Segundo problema de Stokes

Considere una placa infinita oscilando en su mismo plano en un fluido. Por las mismas consideraciones del problema anterior la ecuación que describe el flujo es

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (7.21)$$

Otro método de solución para este tipo de ecuaciones es el método de separación de variables. Se propone la solución  $u$  como un producto de una función solo de  $t$  con otra función solo de  $y$ . Sea

$$u(y, t) = Y(y)T(t) \quad (7.22)$$

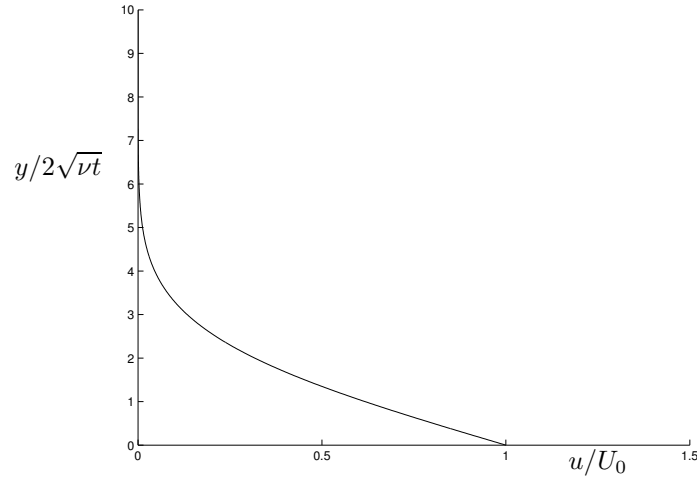


Figura 7.5: Colapso de perfiles.

Sustituyendo en (7.21) y ordenando

$$\frac{1}{T} \frac{dT}{dt} = \nu \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2}$$

En esta ecuación el lado izquierdo es una función únicamente de  $t$  y el lado derecho otra función de  $y$ . Para que se cumpla la igualdad cada lado debe ser igual a una misma constante puesto que  $y$  y  $t$  son variables independientes. De esta manera se tienen dos ecuaciones

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} \frac{dT}{dt} &= k \\ \nu \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} &= k \end{aligned}$$

donde  $k$  es una constante. Ordenando se tiene

$$\frac{dT}{dt} - kT = 0 \quad (7.23)$$

$$\frac{d^2 Y}{dy^2} - \frac{k}{\nu} Y = 0 \quad (7.24)$$

Estas dos ecuaciones ordinarias se pueden resolver para  $T(t)$  y  $Y(y)$ , y el producto debe cumplir con las condiciones de frontera para  $u$ , que para este caso son

(a)  $u = U_0 \cos nt$  para  $y = 0$ , donde la constante  $n$  es la frecuencia de oscilación de la placa.

(b)  $u$  finita para  $y \rightarrow \infty$ .

Con respecto al valor de  $k$ , se puede mostrar que para valores reales y cero, la ecuación no satisface las condiciones de frontera como se muestra abajo. Se pueden tener los siguientes casos:

(i)  $k = 0$ . Las soluciones de (7.23) y (7.24) son

$$\begin{aligned} T(t) &= C_1 \\ Y(y) &= C_2 y + C_3 \end{aligned}$$

Por (7.22) la solución de  $u$  es

$$u(y, t) = C_1(C_2 y + C_3)$$

Esta forma de la solución no puede cumplir con la condición de frontera (a).

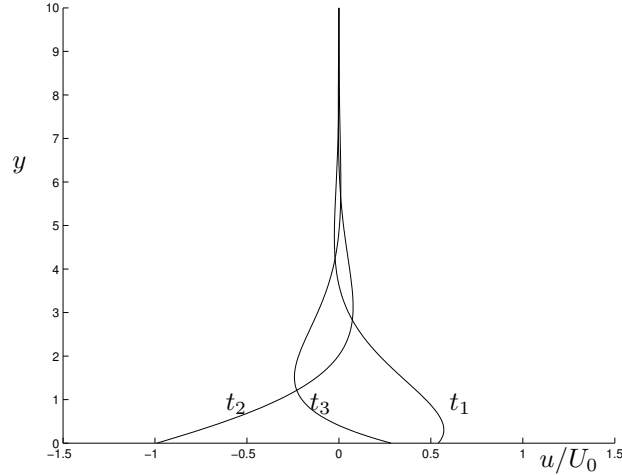


Figura 7.6: Perfiles de velocidad para el segundo problema de Stokes a diferentes instantes de tiempo.

(ii)  $k$  real y diferente de cero. Las soluciones de (7.23) y (7.24) son

$$T(t) = C_1 e^{kt}$$

$$Y(y) = C_2 e^{y\sqrt{k/\nu}} + C_3 e^{-y\sqrt{k/\nu}}$$

de donde

$$u(y, t) = C_1 e^{kt} \left( C_2 e^{y\sqrt{k/\nu}} + C_3 e^{-y\sqrt{k/\nu}} \right)$$

Esta solución es una exponencial en el tiempo y no es compatible con la oscilación que se necesita según la condición de frontera (a).

(iii)  $k$  imaginaria. Tomando  $k = i\lambda$  (donde  $\lambda$  es real y positiva, las soluciones de (7.23) y (7.24) son

$$T(t) = C_1 e^{i\lambda t}$$

$$Y(y) = C_2 e^{y\sqrt{i\lambda/\nu}} + C_3 e^{-y\sqrt{i\lambda/\nu}}$$

además

$$\sqrt{i} = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$$

por lo que

$$u(y, t) = e^{i\lambda t} \left\{ A e^{y(1+i)\sqrt{\lambda/2\nu}} + B e^{-y(1+i)\sqrt{\lambda/2\nu}} \right\}$$

donde  $A = C_1 C_2$  y  $B = C_1 C_3$ . También se puede escribir

$$u(y, t) = e^{i\lambda t} \left\{ A e^{i(\lambda t + y\sqrt{\lambda/\nu})} + C_3 e^{-i(\lambda t + y\sqrt{\lambda/\nu})} \right\}$$

Para que se cumpla la condición de frontera (b)

$$A = 0$$

La condición de frontera (a), también se puede escribir como

$$u = U_0 e^{int}$$

para  $y = 0$ ; donde, por convención se considera solo la parte real de la función  $e^{int}$ . Sustituyendo esta condición de frontera se tiene

$$U_0 e^{int} = B e^{i\lambda t}$$

de donde

$$\begin{aligned} B &= U_0 \\ \lambda &= n \end{aligned}$$

Entonces, el campo de velocidad es

$$u(y, t) = U_0 e^{-y\sqrt{n/2\nu}} \cos\left(nt - \sqrt{\frac{n}{2\nu}}y\right) \quad (7.25)$$

$$v = 0 \quad (7.26)$$

$$w = 0 \quad (7.27)$$

La solución representa una oscilación del fluido con la misma frecuencia que la excitación de la placa. La amplitud es máxima en la placa y disminuye de una manera exponencial. El ángulo de fase también varía de una manera lineal con  $y$ . El perfil de velocidades para un instante se muestra en la figura 7.6. El efecto notorio del movimiento de la placa se localiza en una región cuyo espesor es del orden de  $\sqrt{\nu/n}$  como se ve en la ecuación (7.25).

## 7.7. Capa límite

En los problemas de flujos viscosos anteriores se obtuvieron soluciones exactas, pero en general no siempre es posible lograr esto. Para flujos con números de Reynolds más o menos altos, se acostumbra usar la técnica propuesta por Prandtl. En esta aproximación se considera que el flujo cerca de una frontera se puede dividir en dos regiones:

- Próximo al cuerpo los efectos viscosos son importantes y hay que considerar el término viscoso. A esta región se le llama capa límite.
- Fuera de la capa límite el gradiente de la velocidad es pequeño y aunque el coeficiente de viscosidad sea el mismo, el término viscoso es despreciable. Por esta razón esta región se puede considerar como no viscosa.

Determinar donde termina una región y comienza la otra depende de la definición precisa que se emplee para esto. Además en algunos casos, debido a la geometría del flujo no existe la región no viscosa, como por ejemplo los flujos internos de Poiseuille y Couette.

Las formas más comunes de definir el espesor de la capa límite son las siguientes:

- (i) Espesor de la capa límite  $\delta$ . El espesor  $\delta$  se define como la distancia de la frontera al punto donde la velocidad es 0.99 de la velocidad en la región no viscosa (llamada corriente libre). En ocasiones se usa otro porcentaje en lugar de 0.99 (como por ejemplo 0.95).
- (ii) Espesor de desplazamiento  $\delta^*$ . En la figura 7.7(a) se muestra el perfil de velocidades de un flujo viscoso cercano a una frontera. La figura 7.7(b) muestra un flujo hipotético en el cual la velocidad es cero para  $0 < y < \delta^*$ , y para  $y \geq \delta^*$  el flujo es uniforme y su velocidad es la de la corriente libre  $U_0$ .

Si en ambos casos el déficit de gasto con respecto a la corriente libre  $U_0$  es el mismo, la distancia  $\delta^*$  es el espesor de desplazamiento. O sea, las áreas sombreadas son iguales. De tal manera

$$\begin{aligned} \int_0^\infty (U_0 - u) dy &= \int_0^{\delta^*} U_0 dy \\ &= U_0 \delta^* \end{aligned}$$

de donde

$$\delta^* = \int_0^\infty \left(1 - \frac{u}{U_0}\right) dy$$

- (iii) Espesor de momentum  $\theta$ . Supóngase en la figura 7.7(b), que la región de velocidad cero se extiende hasta una distancia  $\theta$ . Si el déficit de flujo de momentum en ambos casos con respecto a la corriente libre  $U_0$  es el mismo, la distancia  $\theta$  es el espesor de momentum. De esta forma

$$\begin{aligned} \rho \int_0^\infty u(U_0 - u) dy &= \rho \int_0^\theta U_0^2 dy \\ &= \rho U_0^2 \theta \end{aligned}$$

de donde

$$\theta = \int_0^\infty \frac{u}{U} \left(1 - \frac{u}{U_0}\right) dy$$

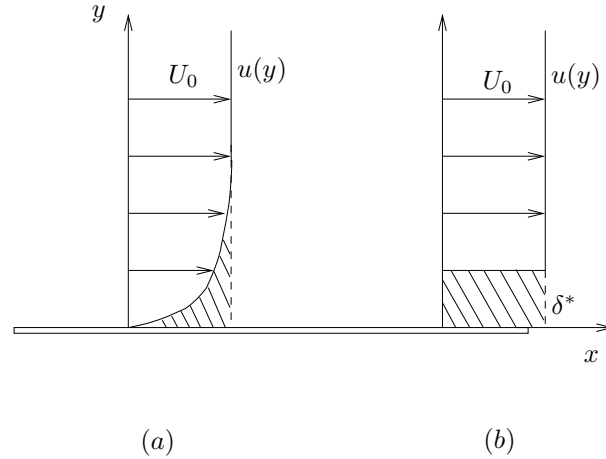


Figura 7.7: Definición del espesor de desplazamiento; (a) perfil de velocidad en la capa límite, (b) perfil equivalente desplazado.

## 7.8. Ecuaciones de la capa límite

Considérese una frontera plana (o un pequeño segmento de una frontera curva) en un flujo. Por efectos viscosos existe una capa límite. En la figura 7.8, la distancia entre la línea punteada y la frontera representa el espesor de la capa límite  $\delta$ . La capa límite comienza en  $x = 0$ , donde  $\delta = 0$ . O sea, es el lugar donde el flujo encuentra la frontera y los efectos viscosos empiezan a sentirse. Corriente abajo la capa límite se desarrolla y el espesor  $\delta$  crece con  $x$ .

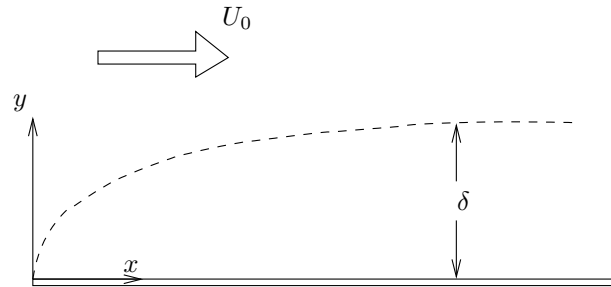


Figura 7.8: Estructura de la capa límite.

Las ecuaciones de movimiento para un flujo bidimensional, permanente, incompresible y sin fuerzas de cuerpo de (B.1) y (B.2) son:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (7.28)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (7.29)$$

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \quad (7.30)$$

Se considera una sección de la capa límite suficientemente alejada de  $x = 0$ . En esta sección la distancia  $x$  es muy grande comparado con  $\delta$ , y el flujo es casi unidimensional. Por lo que

$$u \gg v \quad (7.31)$$



La derivada  $\partial/\partial x$  es del orden de  $1/x$  y la derivada  $\partial/\partial y$  del orden  $1/\delta$ , entonces

$$\frac{\partial}{\partial y} \gg \frac{\partial}{\partial x} \quad (7.32)$$

Empleando estas aproximaciones las ecuaciones de movimiento se simplifican. Se observa que cada término de (7.30) excepto el de presión es mucho más pequeño que su correspondiente a (7.30). Entonces estos términos en (7.30) son despreciables en este conjunto de ecuaciones. A esta aproximación corresponde

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0$$

O sea, que la presión es casi constante a lo ancho de la capa límite. Y la presión es sólo función de  $x$ , determinada por el flujo externo no viscoso.

La ecuación de continuidad (7.28) indica que las desigualdades (7.31) y (7.32) son de la misma magnitud. Esto asegura que los términos de la izquierda de la ecuación (7.30) son del mismo orden. En el lado derecho se desprecia  $\partial^2 u/\partial x^2$  con respecto a  $\partial^2 u/\partial y^2$ . Respecto al término de presión se ignora su variación, puesto que depende del flujo externo. Las ecuaciones se reducen a

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0 \\ u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial x} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \end{aligned}$$

Estas ecuaciones de la capa límite se llaman también las ecuaciones de Prandtl.

## 7.9. Solución de Blasius

La solución de Blasius se refiere a un flujo unidimensional uniforme sobre una placa plana. Si el flujo se extiende hasta el infinito sobre la placa, la presión es independiente de  $x$ . Las ecuaciones de movimiento tienen la forma

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0 \\ u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial x} &= \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \end{aligned}$$

Las condiciones de frontera correspondientes son

- (a)  $u = v = 0$  para  $y = 0$
- (b)  $u = U_0$  para  $y \rightarrow \infty$

Las dos ecuaciones se reducen a una sola empleando la función de corriente que se define

$$\begin{aligned} u &= \frac{\partial \psi}{\partial y} \\ v &= -\frac{\partial \psi}{\partial x} \end{aligned}$$

La ecuación de continuidad se satisface idénticamente y la segunda ecuación a

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \nu \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} \quad (7.33)$$

Esta ecuación diferencial parcial se reduce a una ecuación diferencial ordinaria empleando la variable de similaridad:

$$\eta = \frac{y}{\sqrt{\nu x / U_0}} \quad (7.34)$$

y la solución

$$\psi(x, y) = \sqrt{\nu U_0 x} f(\eta)$$

Las derivadas presentes en (7.33) son las siguientes

$$\begin{aligned}\frac{\partial \psi}{\partial x} &= -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\nu U_0}{x}} \eta f'(\eta) + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\nu U_0}{x}} f \\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} &= -\frac{U_0}{2x} \eta f'' \\ \frac{\partial \psi}{\partial y} &= U_0 f' \\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} &= U_0 \sqrt{\frac{U_0}{\nu x}} f'' \\ \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} &= \frac{U_0^2}{\nu x} f'''\end{aligned}$$

Sustituyendo en (7.33)

$$U_0 f' \left\{ -\frac{U_0}{2x} \eta f'' \right\} - \left\{ -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\nu U_0}{x}} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\nu U_0}{x}} f \right\} U_0 \sqrt{\frac{U_0}{\nu x}} f'' = \nu \frac{U_0^2}{\nu x} f'''$$

que se simplifica a la ecuación diferencial ordinaria no lineal

$$f''' + \frac{1}{2} f f'' = 0 \quad (7.35)$$

Las condiciones de frontera se transforman de la siguiente manera.

(a) Cuando  $y = 0$ ,  $\eta = 0$ . Además

$$\begin{aligned}u &= \frac{\partial \psi}{\partial y} \\ &= U_0 f' \\ &= 0\end{aligned}$$

de donde

$$f(0) = 0$$

También

$$\begin{aligned}v &= -\frac{\partial \psi}{\partial x} \\ &= -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\nu U_0}{x}} \eta f'(\eta) + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\nu U_0}{x}} f \\ &= 0\end{aligned}$$

por lo que

$$f(0) = 0$$

(b) Cuando  $y \rightarrow \infty$ ,  $\eta \rightarrow \infty$ . Y de

$$\begin{aligned}u &= U_0 f' \\ &= U_0\end{aligned}$$

se obtiene

$$f'(\eta) = 1$$

cuando  $\eta \rightarrow \infty$ .

La ecuación (7.35) es diferencial ordinaria pero no lineal. Esta se puede resolver con métodos numéricos. La solución se muestra gráficamente en la figura 7.9.

La velocidad  $u$  en términos de esta solución  $f(\eta)$  es

$$u = U_0 f'(\eta)$$

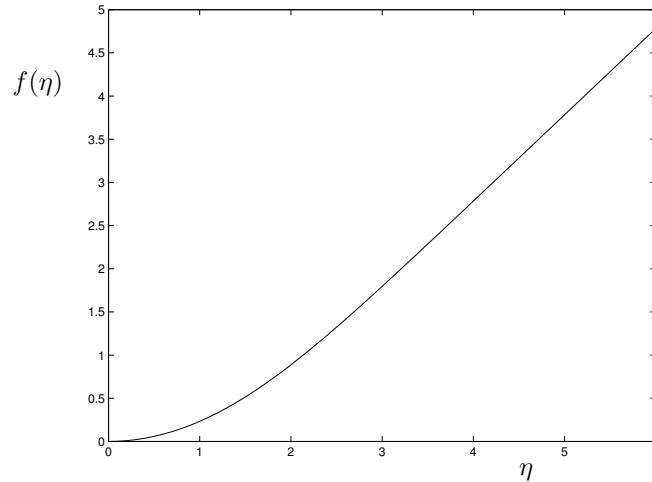


Figura 7.9: Función de Blasius.

El perfil de velocidades correspondiente a esta solución aparece en la figura 7.10. Experimentos han confirmado los resultados teóricos.

El esfuerzo de corte en la superficie de la placa es

$$\begin{aligned}\tau_0(x) &= \mu \frac{\partial u(x, 0)}{\partial y} \\ &= \mu \sqrt{\frac{U_0^3}{\nu x}} f''(0)\end{aligned}$$

En forma adimensional

$$\frac{\tau_0(x)}{\frac{1}{2}\rho U_0^2} = \frac{2f''(0)}{\sqrt{Re_x}}$$

donde

$$Re_x = \frac{U_0 x}{\nu}$$

y  $f''(0) = 0,332$ , calculado por métodos numéricos.

La fuerza de arrastre por unidad de ancho hasta  $x = L$  en la placa, es

$$\begin{aligned}F_A &= \int_0^L \tau_0(x) dx \\ &= 2\mu \sqrt{\frac{U_0^3 L}{\nu}} f''(0)\end{aligned}$$

De la solución graficada en la figura 7.10 se observa que  $u = 0,99U_0$  cuando  $\eta = 5$ ; sustituyendo en (7.34) y arreglando se tiene

$$\frac{\delta}{x} = 5,0 Re_x^{-1/2}$$

Sustituyendo la solución numérica de  $u$  en (7.9) y (7.10) se obtiene

$$\begin{aligned}\frac{\delta^*}{x} &= 1,72 Re_x^{-1/2} \\ \frac{\theta}{x} &= 0,664 Re_x^{-1/2}\end{aligned}$$

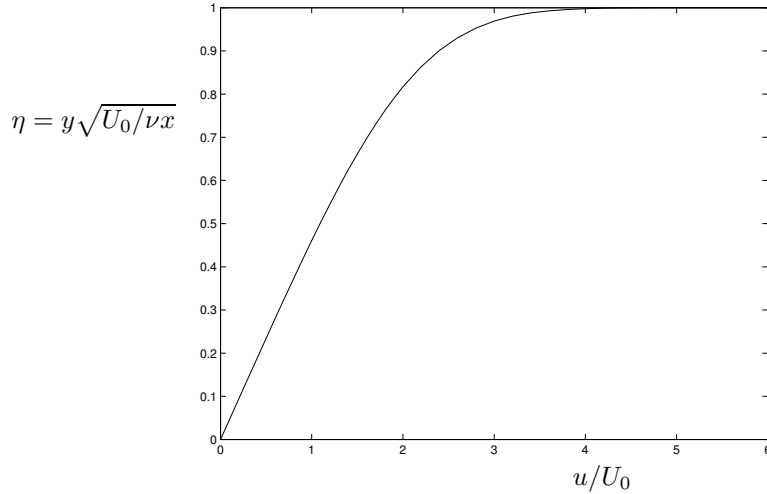


Figura 7.10: Perfil de velocidad.

Estos resultados muestran que

$$\delta = 2,9\delta^*$$

$$\delta = 7,5\theta$$

Se nota también que el espesor de la capa límite crece con  $x^{1/2}$ .

## 7.10. Método de la integral de momentum

Este método debido a von Karman aplicado a una placa plana proporciona resultados aproximados. Las ecuaciones de la capa límite para una placa plana son

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0 \\ u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \end{aligned}$$

El término  $u \partial u / \partial x$  se puede transformar en

$$\begin{aligned} u \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}(u^2) - u \frac{\partial u}{\partial x} \\ &= \frac{\partial}{\partial x}(u^2) + u \frac{\partial v}{\partial y} \end{aligned}$$

utilizando la ecuación de continuidad.

La ecuación de conservación de momentum es

$$\frac{\partial}{\partial x}(u^2) + u \frac{\partial v}{\partial y} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

o bien

$$\frac{\partial}{\partial x}(u^2) + \frac{\partial}{\partial y}(uv) = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

Integrando esta ecuación de  $y = 0$  a  $y = \delta$

$$\int_0^\delta \frac{\partial}{\partial x}(u^2) dy + uv \Big|_0^\delta = \nu \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_0^\delta \quad (7.36)$$

Usando las condiciones de frontera

$$uv \Big|_0^\delta = U_0 u(x, \delta)$$

Considerando que el gradiente de la velocidad en  $y = \delta$  es prácticamente nulo y que el esfuerzo en la placa es  $\tau_0$ , se tiene

$$\frac{\partial u}{\partial y} \Big|_0^\delta = -\frac{\tau_0}{\mu}$$

Integrando la ecuación de continuidad desde  $y = 0$  a  $y = \delta$ :

$$\int_0^\delta \frac{\partial u}{\partial x} dy + v \Big|_0^\delta = 0$$

de donde

$$v(x, \delta) = - \int_0^\delta \frac{\partial u}{\partial x} dy$$

Ahora la ecuación (7.36) se reduce a

$$\int_0^\delta \frac{\partial}{\partial x} (u^2) dy - U_0 \int_0^\delta \frac{\partial u}{\partial y} dy = -\frac{\tau_0}{\rho} \quad (7.37)$$

Aplicando la regla de Leibnitz (A.3) a este caso

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \int_0^\delta u^2 dy &= \int_0^\delta \frac{\partial}{\partial x} (u^2) dy + U_0^2 \frac{d\delta}{dx} \\ \frac{d}{dx} \int_0^\delta u dy &= \int_0^\delta \frac{\partial u}{\partial x} dy + U_0 \frac{d\delta}{dx} \end{aligned}$$

Sustituyendo en (7.37)

$$\frac{d}{dx} \int_0^\delta u^2 dy - U_0 \frac{d}{dx} \int_0^\delta u dy = -\frac{\tau_0}{\rho}$$

o bien

$$\frac{d}{dx} \int_0^\delta u(U_0 - u) dy = \frac{\tau_0}{\rho} \quad (7.38)$$

Ésta es la ecuación de la integral de momentum. Físicamente representa que el cambio de momentum de la capa límite es la fuerza de arrastre sobre la placa. Para encontrar el espesor de la capa límite se utiliza esta ecuación de la siguiente manera.

Se propone un perfil de velocidad en la capa límite de la forma

$$\frac{u}{U_0} = a_0 + a_1 \frac{y}{\delta} + a_2 \frac{y^2}{\delta^2}$$

Esta forma debe satisfacer las siguientes condiciones

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= 0 \\ u(x, \delta) &= U_0 \\ \frac{\partial u(x, \delta)}{\partial y} &= 0 \end{aligned}$$

de donde

$$\begin{aligned} 0 &= a_0 \\ 1 &= a_0 + a_1 + a_2 \\ 0 &= a_1 + 2a_2 \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} a_0 &= 0 \\ a_1 &= 2 \\ a_2 &= -1 \end{aligned}$$

El perfil de velocidad es entonces

$$\frac{u}{U_0} = 2\frac{y}{\delta} - \frac{y^2}{\delta^2}$$

En (7.38) la integral del lado izquierdo es

$$\int_0^\delta u(U_0 - u) dy = \frac{2}{15}\delta U_0^2$$

Además

$$\begin{aligned}\tau_0 &= \nu \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=0} \\ &= 2\mu \frac{U_0}{\delta}\end{aligned}$$

Sustituyendo en (7.38)

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{2}{15}\delta U_0^2 \right) = 2\nu \frac{U_0}{\delta}$$

o bien

$$\delta d\delta = 15\nu \frac{dx}{U_0}$$

Integrando, con la condición  $\delta = 0$ , cuando  $x = 0$ , se tiene

$$\delta = \left( 30 \frac{\nu x}{U_0} \right)^{1/2}$$

En forma adimensional

$$\frac{\delta}{x} = 5,48 Re_x^{-1/2}$$

resultado muy próximo al obtenido en la solución de Blasius.

El método de la integral de momentum se ha ilustrado con un polinomio de segundo orden. Las tres constantes de este polinomio se obtuvieron debido a tres condiciones. Si se emplea un polinomio de más alto orden, los resultados son mejores, pero también son necesarias más condiciones sobre la velocidad  $u$  para calcular el valor de las constantes del polinomio. Por ejemplo, de la ecuación de conservación de momentum se observa que si en la pared  $u = v = 0$ , entonces  $\partial^2 u / \partial y^2 = 0$  para  $y = 0$ . Otra condición que puede emplearse para mejorar el perfil en  $y = \delta$  es  $\partial^2 u / \partial y^2 = 0$ . Las derivadas de la ecuación de conservación de momentum se pueden emplear para obtener más condiciones si se necesitan.

## 7.11. Separación de la capa límite

En el flujo alrededor de un cilindro se forma una capa límite junto a la superficie. La presión en la capa límite se determina por el flujo potencial fuera de esta capa. Despreciando por el momento la existencia de la capa límite, el flujo potencial alrededor del cilindro es como se muestra en la figura 6.8. En este flujo, la presión sobre la superficie del cilindro disminuye del punto A al punto B. De B a C la presión aumenta hasta que recupera su valor en el punto A.

En un flujo viscoso la capa límite tiene un gradiente de presión entre A y B negativo. O sea, que las fuerzas de presión se presentan en el sentido del flujo. Pero entre B y C las fuerzas de presión tienen sentido contrario al flujo. O sea que se tiene un gradiente positivo. En ocasiones este gradiente puede ser suficientemente grande como para forzar que el fluido adyacente al cilindro se mueva en dirección contraria a la corriente libre como se muestra en la figura 7.11.

En el punto (a) la capa límite se separa de la superficie del cilindro. En (b) la capa límite ya está separada y entre ésta y la superficie del cilindro existe un flujo secundario en sentido contrario al flujo principal. En el punto de separación existe la siguiente condición

$$\frac{\partial u(x, 0)}{\partial y} = 0$$

Este fenómeno de separación de la capa límite puede ocurrir en cualquier flujo que tenga un gradiente de presiones positivo (adverso). Por ejemplo, hay peligro de separación en un difusor y es común que se presente atrás de cuerpos en movimiento relativo con un fluido.

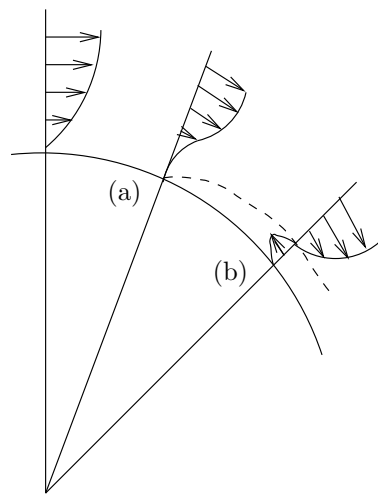


Figura 7.11: Separación de flujo alrededor de un cilindro.





# Capítulo 8

## Flujo compresible

En los capítulos anteriores se ha tratado con fluidos incompresibles. Sin embargo, existen algunos fenómenos que se deben a la compresibilidad del fluido. Aquí se estudiarán estos fenómenos, para lo cual se consideran estos efectos en las ecuaciones de movimiento. Con el objeto de simplificar las ecuaciones se despreciará la viscosidad (pero a veces tomando en cuenta la fuerza de fricción), la conducción térmica del fluido (pero a veces incluyendo la transferencia de calor del exterior), y las fuerzas de cuerpo.

### 8.1. Ecuaciones de flujo unidimensional

#### *Volumen de control*

Considérese el flujo compresible a través de un ducto de área variable. Se muestra un volumen de control en la figura 8.1 entre secciones 1 y 2. Las ecuaciones (3.1), (3.5) y (3.17) en forma unidimensional son:

$$\text{Masa} \quad \dot{m} = \rho_1 u_1 A_1 = \rho_2 u_2 A_2 \quad (8.1a)$$

$$\text{Momentum} \quad p_1 A_1 - p_2 A_2 - F_{\text{fr}} = \dot{m}(u_2 - u_1) \quad (8.1b)$$

$$\text{Energía} \quad \dot{Q} + \dot{W} + \dot{m} \left( h_1 + \frac{u_1^2}{2} - h_2 - \frac{u_2^2}{2} \right) = 0 \quad (8.1c)$$

donde 1 y 2 son la entrada y la salida del volumen de control, respectivamente.  $F_{\text{fr}}$  es la fuerza de fricción,  $\dot{m}$  es el flujo másico,  $\dot{Q}$  y  $\dot{W}$  son el flujo de calor y trabajo al volumen de control.

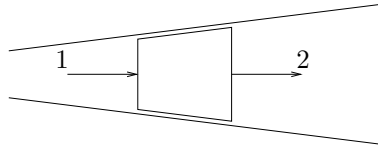


Figura 8.1: Flujo en un ducto con área variable con un volumen de control entre 1 y 2 indicado.

La forma diferencial para un volumen de control infinitesimal puede obtenerse escribiendo  $\rho_1 = \rho$ ,  $u_1 = u$ ,  $p_1 = p$ ,  $A_1 = A$  en la sección 1, y  $\rho_2 = \rho + d\rho$ ,  $u_2 = u + du$ ,  $p_2 = p + dp$ ,  $A_2 = A + dA$  en la 2. La ecuación (8.1a) es

$$uA \, d\rho + \rho A \, du + \rho u \, dA = 0$$

donde se han despreciado los productos de diferenciales. Dividiendo entre  $\rho u A$  se tiene

$$\frac{d\rho}{\rho} + \frac{du}{u} + \frac{dA}{A} = 0 \quad (8.2)$$

Las fuerzas son

$$\sum F = pA + \left(p + \frac{dp}{2}\right) dA - (p + dp)(A + dA) - \tau_0 P dx$$

donde  $P$  es el perímetro de la sección y  $\tau_0$  el esfuerzo de cortante en la pared. La presión en la superficie lateral se asume igual a  $p + dp/2$ . Usando el factor de fricción  $f$ , se tiene

$$\tau_0 = \frac{1}{8} f \rho u^2$$

donde  $f$  depende del número de Reynolds local y de la rugosidad de la pared. La ecuación (8.1b) para el volumen de control infinitesimal es entonces

$$dp + \rho u du + f \frac{\rho u^2}{2D_h} dx = 0 \quad (8.3)$$

donde  $D_h$  es el diámetro hidráulico definido por  $D_h = 4A/P$ .

Despreciando la transferencia de trabajo en la ecuación de energía, y escribiendo de transferencia de calor como  $\dot{Q} = q' dx$ , donde  $q'$  es el flujo de calor por unidad de longitud, (8.1c) se convierte a

$$-\frac{q'}{\dot{m}} dx + dh + u du = 0$$

o bien

$$d\left(h + \frac{u^2}{2}\right) = \frac{q' dx}{\dot{m}} \quad (8.4)$$

donde  $\dot{m} = \rho u A$ .

### De las ecuaciones diferenciales

Las ecuaciones diferenciales de la sección 3.5 en forma unidimensional son

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) = 0 \quad (8.5a)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (8.5b)$$

$$\rho \frac{\partial e}{\partial t} + \rho u \frac{\partial e}{\partial x} = -\rho \frac{\partial u}{\partial x} \quad (8.5c)$$

Es necesario incluir la ecuación de conservación de energía (8.5c) debido a que con la de masa (8.5a) y la de momentum (8.5b) se tienen dos ecuaciones y tres incógnitas,  $\rho$ ,  $u$  y  $p$ . Introduciendo la ecuación de estado de un gas perfecto

$$p = \rho R T \quad (8.6)$$

y

$$e = C_v T \quad (8.7)$$

se tienen ahora cinco ecuaciones en  $\rho$ ,  $u$ ,  $p$ ,  $e$  y  $T$ . La entalpía puede calcularse mediante

$$h = C_p T \quad (8.8)$$

Se asume en este capítulo (excepto únicamente en la sección 8.2.1), que se trata de un gas perfecto. Además el calor específico a volumen constante se tomará invariable.

## 8.2. Ondas acústicas

Si se le da al fluido un disturbio pequeño en la presión este se propaga en el espacio en forma de ondas. Estas fluctuaciones de presión en un punto causan fluctuaciones correspondientes de velocidad, densidad y temperatura, relacionadas por las ecuaciones de movimiento.

Para flujo barotrópico

$$\rho = \rho(p)$$

de donde

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{dp}{d\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x}$$

y la ecuación (8.5b) se puede escribir

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{dp}{d\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0 \quad (8.9)$$

A un fluido en reposo con densidad  $\rho_0$ , presión  $p_0$ , uniformes, se le perturba  $u'$  en velocidad,  $\rho'$  en densidad y  $p'$  en presión. Entonces, la velocidad, la presión y la densidad son

$$\begin{aligned} u &= u' \\ p &= p_0 + p' \\ \rho &= \rho_0 + \rho' \end{aligned}$$

Sustituyendo en (8.5a) y (8.9)

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + u' \frac{\partial \rho'}{\partial x} + (\rho_0 + \rho') \frac{\partial u'}{\partial x} = 0 \quad (8.10)$$

$$\frac{\partial u'}{\partial t} + u' \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{1}{\rho_0 + \rho'} \frac{dp}{d\rho} \frac{\partial \rho'}{\partial x} = 0 \quad (8.11)$$

Haciendo la expansión de  $(\rho_0 + \rho')^{-1}$  usando la serie binomial (A.2), se tiene

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho_0 + \rho'} &= \frac{1}{\rho_0} \left( 1 + \frac{\rho'}{\rho_0} \right)^{-1} \\ &= \frac{1}{\rho_0} \left[ 1 - \frac{\rho'}{\rho_0} + \left( \frac{\rho'}{\rho_0} \right)^2 + \dots \right] \end{aligned}$$

y  $dp/d\rho$  con la serie de Taylor (A.1)

$$\frac{dp}{d\rho} = \left( \frac{dp}{d\rho} \right)_0 + (\rho - \rho_0) \left( \frac{d^2 p}{d\rho^2} \right)_0 + \frac{(\rho - \rho_0)^2}{2!} \left( \frac{d^3 p}{d\rho^3} \right)_0 + \dots$$

donde el subíndice cero se refiere a las condiciones en reposo. Puesto que las fluctuaciones son muy pequeños los términos cuadráticos, cúbicos, etc., de estas son despreciables con respecto a las fluctuaciones. Este proceso de linealización reduce (8.10) y (8.11) a

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial u'}{\partial x} = 0 \quad (8.12)$$

$$\frac{\partial u'}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0} \left( \frac{dp}{d\rho} \right)_0 \frac{\partial \rho'}{\partial x} = 0 \quad (8.13)$$

Derivando (8.12) con respecto a  $t$  y (8.13) con respecto a  $x$ , se tiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2} + \rho_0 \frac{\partial^2 u'}{\partial x \partial t} &= 0 \\ \frac{\partial^2 u'}{\partial x \partial t} + \frac{1}{\rho_0} \left( \frac{dp}{d\rho} \right)_0 \frac{\partial \rho'}{\partial x^2} &= 0 \end{aligned}$$

Eliminando  $u'$  de ambas ecuaciones

$$\frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \rho'}{\partial x^2} \quad (8.14)$$

donde

$$c = \sqrt{\left( \frac{dp}{d\rho} \right)_0} \quad (8.15)$$

La solución de (8.14) es de la forma

$$\rho'(x, t) = f(x - ct) + g(x + ct)$$

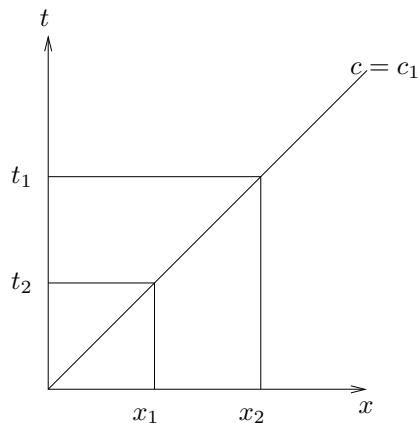


Figura 8.2: Desplazamiento de onda acústica.

donde  $f$  y  $g$  son funciones arbitrarias. La solución se puede verificar sustituyendo en (8.14).

Considérese la primera parte de la solución  $f(x - ct)$ . El valor de esta función es constante para  $x - ct = K$  constante, lo que representa una línea recta en el plano  $x - t$ , con pendiente  $1/c$ . En la figura 8.2 se muestra esta línea para una  $K$  específica, las posiciones en las cuales  $\rho' = f(K)$  depende del tiempo. Para  $t = t_1$  esta posición es  $x_1$  y para  $t = t_2$  es  $x_2$ . O sea que el punto donde  $\rho'$  es constante se desplaza con velocidad  $c$  en el sentido positivo de  $x$ . Esta es una onda de  $\rho'$ . De la misma forma  $g(x + ct)$  representa una onda de  $\rho'$  que se desplaza con velocidad  $c$  en el sentido negativo de  $x$ . Por esta razón a la ecuación (8.14) se le llama ecuación de onda.

Eliminando  $\rho'$  entre (8.10) y (8.11) se tiene

$$\frac{\partial^2 u'}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u'}{\partial x^2}$$

Esto indica que la perturbación de la velocidad  $u'$  se propaga también en forma de onda. Y puesto que se consideró el flujo como barotrópico, la presión es únicamente una función de la densidad y la presión se propaga en forma de onda. La velocidad de propagación de estas ondas es la velocidad acústica  $c$ , que se puede calcular de (8.15).

### 8.2.1. Líquido

Considérese un volumen  $V$  de líquido cuyo módulo de compresibilidad es  $K$ , entonces:

$$K = -\frac{dp}{dV/V}$$

donde  $dV$  es el cambio de volumen por cambio de presión. Pero

$$\frac{dV}{V} = -\frac{d\rho}{\rho}$$

por lo tanto

$$\frac{dp}{d\rho} = \frac{K}{\rho}$$

y la velocidad acústica es:

$$c = \sqrt{\frac{K}{\rho_0}}$$

Para agua a  $15^\circ\text{C}$ ,  $c = 1430$  m/s.

### 8.2.2. Gas perfecto

Se puede asumir que el proceso es isoentrópico debido a que las fluctuaciones en la ondas acústicas son tan rápidas que la transmisión de calor es despreciable y que desde el principio se ha despreciado la disipación viscosa de energía. De la (C.10a)

$$\frac{p}{\rho^\gamma} = K$$

donde  $K$  es una constante y  $\gamma$  es la relación de calores específicos. Derivando

$$\begin{aligned} \frac{dp}{d\rho} &= \gamma \rho^{\gamma-1} K \\ &= \gamma \frac{p}{\rho} \\ &= \gamma RT \end{aligned}$$

Usando la ecuación de estado (8.6), la velocidad acústica es:

$$\begin{aligned} c &= \sqrt{\gamma \frac{p_0}{\rho_0}} \\ &= \sqrt{\gamma RT_0} \end{aligned} \quad (8.16)$$

Para aire a 27°C,  $c = 348$  m/s.

La velocidad acústica no necesariamente es constante en un fluido, sino depende de las propiedades en cada punto del fluido. Se calculó la velocidad acústica para un fluido en reposo. Sin embargo, el análisis para la velocidad acústica en un fluido en movimiento uniforme, es el mismo sobre un marco de referencia que se mueve con el fluido. La velocidad acústica es la calculada anteriormente, pero relativa al flujo. La velocidad del flujo en un punto comparada con la velocidad acústica en el mismo punto, se define como número de Mach  $M$ . O sea:

$$M = \frac{U}{c} \quad (8.17)$$

donde  $U$  es la magnitud de la velocidad es el punto considerado.

De la definición de módulo de compresibilidad  $K$  se nota que para fluidos incompresibles,  $K$  tiende a ser infinito. De (8.15) se observa que la velocidad acústica también tiende a infinito, y en (8.17) el número de Mach a cero. Sin embargo, como no existen fluidos perfectamente incompresibles el número de Mach solamente podrá ser pequeño. Entonces el número de Mach es un índice de la importancia de la compresibilidad en un flujo. Para números de Mach hasta 0.2 ó 0.3, dependiendo de la precisión que se requiera, el flujo se puede tomar como incompresible.

Para números de Mach más altos que los mencionados anteriormente, los efectos de la compresibilidad son importantes. estos flujos compresibles se dividen en dos grupos:

- (i) Flujos subsónicos,  $M < 1$ . El flujo donde el número de Mach es menor que uno en todas partes.
- (ii) Flujos supersónicos,  $M > 1$ . El número de Mach es superior a uno en todas partes.

## 8.3. Propiedades de estancamiento y críticas

Para un flujo permanente de área variable, pero sin fricción y sin transferencia de calor, las ecuaciones (8.1) entre puntos 1 y 2 en la figura 8.1 se simplifican a

$$\rho_1 u_1 A_1 = \rho_2 u_2 A_2 \quad (8.18a)$$

$$p_1 + \rho_1 u_1^2 = p_2 + \rho_2 u_2^2 \quad (8.18b)$$

$$h_1 + \frac{u_1^2}{2} = h_2 + \frac{u_2^2}{2} \quad (8.18c)$$

Las propiedades termodinámicas obtenidas al reducir la velocidad del flujo a cero mediante un proceso adiabático sin fricción se define como las de estancamiento (indicado por el subíndice 0). Por eso en el caso de la entalpía, la (8.18c) proporciona

$$h_0 = h + \frac{u^2}{2} \quad (8.19)$$

De (8.8) la temperatura de estancamiento es

$$T_0 = T + \frac{u^2}{2c_p} \quad (8.20)$$

Se puede escribir ésta en términos del número de Mach como

$$\frac{T_0}{T} = 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \quad (8.21)$$

ya que  $u^2/c_p T = u^2(\gamma - 1)/\gamma RT = (\gamma - 1)u^2/c^2 = (\gamma - 1)M^2$ .

Además por la isentropía de proceso (C.10)

$$\begin{aligned} \frac{p_0}{p} &= \left(\frac{T_0}{T}\right)^{\gamma/(\gamma-1)} \\ &= \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right)^{\gamma/(\gamma-1)} \end{aligned} \quad (8.22)$$

$$\begin{aligned} \frac{\rho_0}{\rho} &= \left(\frac{T_0}{T}\right)^{1/(\gamma-1)} \\ &= \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right)^{1/(\gamma-1)} \end{aligned} \quad (8.23)$$

Las propiedades críticas (indicadas por \*) son las obtenidas cuando se cambie la velocidad del flujo a través de un proceso isentrópico hasta llegar a la sónica. Para  $M = 1$ , (8.21), (8.22) and (8.23) se reducen a

$$\frac{T_0}{T^*} = \frac{\gamma + 1}{2} \quad (8.24a)$$

$$\frac{p_0}{p^*} = \left(\frac{\gamma + 1}{2}\right)^{\gamma/(\gamma-1)} \quad (8.24b)$$

$$\frac{\rho_0}{\rho^*} = \left(\frac{\gamma + 1}{2}\right)^{1/(\gamma-1)} \quad (8.24c)$$

## 8.4. Onda de choque

En la sección 8.2 se estudió la propagación de diferencias de presión pequeñas. Aquí se trata de ondas de choque donde sí hay diferencias no pequeñas.

### 8.4.1. Choque normal

Considérese el caso que se muestra en la figura 8.3 donde la onda es normal al flujo.

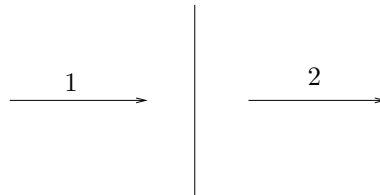


Figura 8.3: Onda de choque.

En la ausencia de transferencia de trabajo y calor, (8.1c) y (8.19) indican que las entalpía y temperatura de estancamiento son iguales en ambos lados del choque, o sea

$$T_{01} = T_{02}$$

Usando (8.21)

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{2 + (\gamma - 1)M_1^2}{2 + (\gamma - 1)M_2^2} \quad (8.25)$$

Ya que  $T_2/T_1 = (\rho_1/\rho_2)(p_2/p_1) = (u_2/u_1)(p_2/p_1) = (M_2/M_1)(p_2/p_1)\sqrt{(T_2/T_1)}$ , se tiene

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{M_1}{M_2} \sqrt{\frac{2 + (\gamma - 1)M_1^2}{2 + (\gamma - 1)M_2^2}} \quad (8.26)$$

Además,  $\rho_2/\rho_1 = (p_2/p_1)(T_1/T_2)$ , por lo que

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{M_1}{M_2} \sqrt{\frac{2 + (\gamma - 1)M_2^2}{2 + (\gamma - 1)M_1^2}}$$

Para la presión de estancamiento

$$\frac{p_{02}}{p_{01}} = \left( \frac{p_{02}/p_2}{p_{01}/p_1} \right) \frac{p_2}{p_1}$$

tal que

$$\frac{p_{02}}{p_{01}} = \frac{M_1}{M_2} \left[ \frac{2 + (\gamma - 1)M_1^2}{2 + (\gamma - 1)M_2^2} \right]^{(\gamma+1)/[2(\gamma-1)]} \quad (8.27)$$

Se tiene  $\rho u^2 = (p/RT)u^2 = \gamma p u^2/c^2$ , y la (8.18b) reduce a

$$p_1 + \gamma p_1 M_1^2 = p_2 + \gamma p_2 M_2^2$$

de donde

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{1 + \gamma M_1^2}{1 + \gamma M_2^2}$$

Combinando con la (8.26)

$$\frac{M_1 \sqrt{2 + (\gamma - 1)M_1^2}}{1 + \gamma M_1^2} = \frac{M_2 \sqrt{2 + (\gamma - 1)M_2^2}}{1 + \gamma M_2^2}$$

Ésta puede resolverse para dar  $M_1 = M_2$  (sin choque) o

$$M_2 = \sqrt{\frac{2 + (\gamma - 1)M_1^2}{2\gamma M_1^2 - (\gamma - 1)}} \quad (8.28)$$

Equación (8.28) puede sustituirse en (8.25)–(8.27) para dar  $T_2/T_1$ ,  $p_2/p_1$ ,  $\rho_2/\rho_1$  and  $p_{02}/p_{01}$  en términos de  $M_1$  o  $M_2$ . Así se tiene

$$\begin{aligned} \frac{p_2}{p_1} &= 1 + \frac{2\gamma}{\gamma + 1} (M_1^2 - 1) \\ \frac{\rho_2}{\rho_1} &= \frac{(\gamma + 1)M_1^2}{(\gamma - 1)M_1^2 + 2} \end{aligned}$$

El choque es un proceso con cambio de entropía. Las relaciones (C.7) y (C.8) pueden integrarse a

$$\frac{s_2 - s_1}{R} = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \ln \left[ \frac{2 + (\gamma - 1)M_1^2}{(\gamma + 1)M_1^2} \right] + \frac{1}{\gamma - 1} \ln \left[ \frac{2\gamma M_1^2 - (\gamma - 1)}{\gamma + 1} \right]$$

La figura 8.4 muestra que  $s_2 - s_1 < 0$  si  $M_1 < 1$ , lo que violaría la segunda ley de termodinámica. El choque de flujo subsónico a supersónico entonces no es posible.

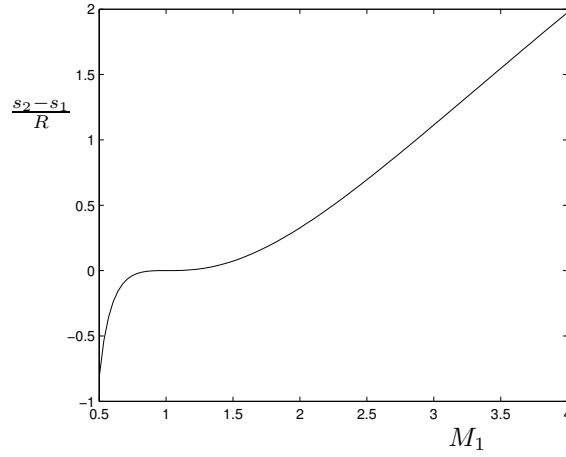
### 8.4.2. Choque oblicuo

Se muestra en la figura 8.5 una onda oblicua en la cual el flujo se desvía a través del ángulo  $\delta$ . La velocidad tangencial es la misma en ambos lados del choque, tal que

$$u_1 \cos \beta = u_2 \cos(\beta - \delta) \quad (8.29)$$

La velocidad normal sufre un choque como se describió en la sección anterior. Se pueden usar las relaciones de choque normal siempre y cuando se sustituyan  $M_1 \sin \beta$  por el número de Mach del lado 1 y  $M_2 \sin(\beta - \delta)$  del lado 2. Entonces

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{(\gamma + 1)M_1^2 \sin^2 \beta}{(\gamma - 1)M_1^2 \sin^2 \beta + 2}$$

Figura 8.4: Cambio de entropía como función de  $M_1$ .

De continuidad

$$\rho_1 u_1 \sin \beta = \rho_2 u_2 \sin(\beta - \delta)$$

y la (8.29) se reduce a

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{\tan \beta}{\tan(\beta - \delta)}$$

Igualando las dos expresiones para  $\rho_2/\rho_1$  y simplificando, se tiene

$$M_1^2 = \frac{2 \cos(\beta - \delta)}{\sin \beta [\sin(2\beta - \delta) - \gamma \sin \delta]}$$

Para valores de  $M_1$  y  $\delta$  dados, dos valores se  $\beta$  son posibles. Una es el choque fuerte y el otro débil.

El número de Mach en 2 es

$$M_2 = \frac{1}{\sin(\beta - \delta)} \sqrt{\frac{2 + (\gamma - 1)M_1^2 \sin^2 \beta}{2\gamma M_1^2 \sin^2 \beta - (\gamma - 1)}}$$

Las relaciones entre presión, densidad, temperatura, temperatura de estancamiento y presión de estancamiento son

$$\begin{aligned} \frac{p_2}{p_1} &= 1 + \frac{2\gamma}{\gamma + 1} (M_1^2 \sin^2 \beta - 1) \\ \frac{\rho_2}{\rho_1} &= \frac{(\gamma + 1)M_1^2 \sin^2 \beta}{(\gamma - 1)M_1^2 \sin^2 \beta + 2} \\ \frac{T_2}{T_1} &= [2 + (\gamma - 1)M_1^2 \sin^2 \beta] \frac{2\gamma M_1^2 \sin^2 \beta - (\gamma - 1)}{(\gamma + 1)^2 M_1^2 \sin^2 \beta} \\ \frac{T_{02}}{T_{01}} &= 1 \\ \frac{p_{02}}{p_{01}} &= \left[ \frac{(\gamma + 1)M_1^2 \sin^2 \beta}{2 + (\gamma - 1)M_1^2 \sin^2 \beta} \right]^{\gamma/(\gamma-1)} \left[ \frac{\gamma + 1}{2\gamma M_1^2 \sin^2 \beta - (\gamma - 1)} \right]^{1/(\gamma-1)} \end{aligned}$$



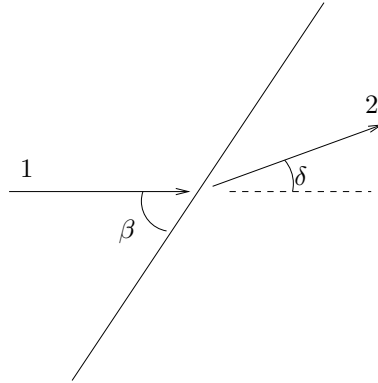


Figura 8.5: Choque oblicuo

### 8.4.3. Flujo adiabático y sin fricción en ductos de área variable

Termodinámicamente el proceso es isentrópico. De (8.2)

$$\begin{aligned}
 \frac{du}{u} + \frac{dA}{A} &= -\frac{d\rho}{\rho} \\
 &= u \frac{du}{dp} d\rho \quad \text{de (8.3)} \\
 &= u^2 \frac{d\rho}{dp} \frac{du}{u} \\
 &= \frac{u^2}{c^2} \frac{du}{u} \\
 &= M^2 \frac{du}{u} \quad \text{de (8.17)}
 \end{aligned}$$

se tiene

$$\frac{du}{u} = \frac{1}{M^2 - 1} \frac{dA}{A}$$

También  $du/u = -dp/\rho u^2$ , lo que conduce a

$$\frac{dp}{\rho u^2} = \frac{1}{1 - M^2} \frac{dA}{A}$$

Se tiene además  $dp/\rho u^2 = (c^2/u^2)(d\rho/\rho) = (1/M^2)(d\rho/\rho)$ , por lo que

$$\frac{d\rho}{\rho} = \frac{M^2}{1 - M^2} \frac{dA}{A}$$

De manera similar

$$\frac{dM}{M} = \frac{2 + (\gamma - 1)M^2}{2(M^2 - 1)} \frac{dA}{A}$$

De la ecuación de estado

$$\frac{dT}{T} = \frac{dp}{p} - \frac{d\rho}{\rho}$$

Ya que  $\rho u^2/p = \rho \gamma R T M^2/p = \gamma M^2$ , se tiene

$$\frac{dT}{T} = (\gamma - 1) \frac{M^2}{1 - M^2} \frac{dA}{A}$$

	$M < 1$ (subsonic)	$M > 1$ (supersonic)
$dA < 0$ (convergente)	$du > 0$ $dM > 0$ $dp < 0$ $d\rho < 0$ $dT < 0$ $dp_0 = 0$ $d\rho_0 = 0$ $dT_0 = 0$ $ds = 0$	$du < 0$ $dM < 0$ $dp > 0$ $d\rho > 0$ $dT > 0$ $dp_0 = 0$ $d\rho_0 = 0$ $dT_0 = 0$ $ds = 0$
$dA > 0$ (divergente)	$du < 0$ $dM < 0$ $dp > 0$ $d\rho > 0$ $dT > 0$ $dp_0 = 0$ $d\rho_0 = 0$ $dT_0 = 0$ $ds = 0$	$du > 0$ $dM > 0$ $dp < 0$ $d\rho < 0$ $dT < 0$ $dp_0 = 0$ $d\rho_0 = 0$ $dT_0 = 0$ $ds = 0$

Cuadro 8.1: Flujo en ducto con área variable

La tabla 8.1 muestra los cambios de velocidad, presión, densidad y número de Mach en ductos convergentes ( $dA < 0$ ) y divergentes ( $dA > 0$ ). Se nota que el comportamiento de flujos subsónicos y supersónicos son diferentes. Un ducto donde la velocidad disminuye a lo largo de él es una tobera, y cuando aumenta es un difusor.

Igualando el flujo másico en cualquier sección al que se obtendría en condiciones condiciones,  $\rho u A = \rho^* u^* A^*$ , tal que

$$\begin{aligned}
\frac{A}{A^*} &= \frac{\rho^* u^*}{\rho u} = \frac{\rho^* \rho_0 u^*}{\rho_0 \rho u} \\
&= \frac{\rho^* \rho_0 \sqrt{\gamma R T^*}}{\rho_0 \rho u} \\
&= \frac{\rho^* \rho_0 \sqrt{\gamma R T^*}}{\rho_0 \rho u} \sqrt{\frac{T^*}{T_0}} \sqrt{\frac{T_0}{T}} \\
&= \frac{1}{M} \left[ \frac{2}{\gamma + 1} \left( 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right) \right]^{(\gamma+1)/[2(\gamma-1)]} \quad (8.30)
\end{aligned}$$

donde se han usado (8.21), (8.23), (8.24c), y (8.24a). Se muestra en la figura 8.6 que el área  $A$  tiene un mínimo en  $M = 1$  donde  $A_{min} = A^*$ .

De

$$\begin{aligned}
\dot{m} = \rho u A &= \frac{p}{RT} \frac{u}{c} \sqrt{\gamma R T} A = p M \sqrt{\frac{\gamma}{RT}} A \\
&= p_0 \sqrt{\frac{\gamma}{RT_0}} \left( \frac{2}{\gamma + 1} \right)^{(\gamma+1)/[2(\gamma-1)]} A^*
\end{aligned}$$

se tiene

$$\dot{m}_{max} = \sqrt{\gamma \left( \frac{2}{\gamma + 1} \right)^{(\gamma+1)/(\gamma-1)}} A^* \rho_0 \sqrt{RT_0}$$

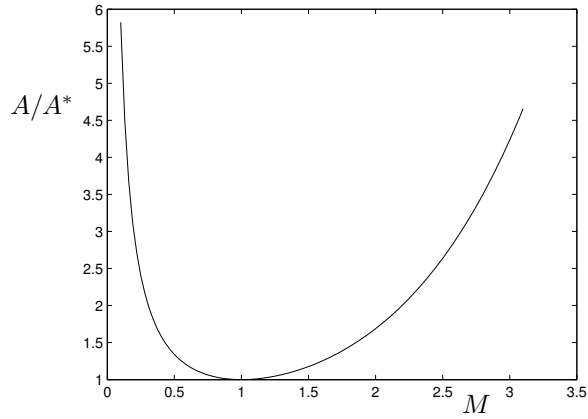


Figura 8.6: Variación de área con el número de Mach

#### 8.4.4. Flujo con transferencia de calor y sin fricción en ductos de área constante

Sean 1 y 2 dos secciones a lo largo de un ducto de área constante donde hay transferencia de calor pero no fricción. La (8.1b) se convierte en

$$p_1 + \rho_1 u_1^2 = p_2 + \rho_2 u_2^2$$

Ya que  $\rho u^2 = (p/RT)u^2 = \gamma p M^2$ , se tiene

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{1 + \gamma M_1^2}{1 + \gamma M_2^2}$$

Usando (8.22), la presión de estancamiento es

$$\frac{p_{02}}{p_{01}} = \left( \frac{1 + \gamma M_1^2}{1 + \gamma M_2^2} \right) \left( \frac{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_2^2}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2} \right)^{\gamma/(\gamma-1)}$$

Similarmente, se pueden mostrar que

$$\begin{aligned} \frac{T_2}{T_1} &= \left( \frac{1 + \gamma M_1^2}{1 + \gamma M_2^2} \right)^2 \left( \frac{M_2}{M_1} \right)^2 \\ \frac{T_{02}}{T_{01}} &= \left( \frac{1 + \gamma M_1^2}{1 + \gamma M_2^2} \right)^2 \left( \frac{M_2}{M_1} \right)^2 \left( \frac{2 + (\gamma-1)M_2^2}{2 + (\gamma-1)M_1^2} \right) \\ \frac{\rho_2}{\rho_1} &= \left( \frac{1 + \gamma M_2^2}{1 + \gamma M_1^2} \right) \left( \frac{M_1}{M_2} \right)^2 \\ \frac{u_2}{u_1} &= \left( \frac{1 + \gamma M_1^2}{1 + \gamma M_2^2} \right)^2 \left( \frac{M_2}{M_1} \right)^3 \\ \frac{s_2 - s_1}{R} &= \ln \left[ \left( \frac{1 + \gamma M_1^2}{1 + \gamma M_2^2} \right)^{(\gamma+1)/(\gamma-1)} \left( \frac{M_2}{M_1} \right)^{2\gamma/(\gamma-1)} \right] \end{aligned}$$

La tabla 8.2 muestra los cambios en las variables del flujo para casos subsónico y supersónico con calentamiento o enfriamiento.

La (8.1c) es

$$h_1 + \frac{u_1^2}{2} + \dot{Q} = h_2 + \frac{u_2^2}{2}$$

	$M < 1$ (subsónico)	$M > 1$ (supersónico)
$\dot{Q} < 0$ (enfriamiento)	$du < 0$ $dM < 0$ $dp > 0$ $d\rho > 0$ $*$ $dp_0 > 0$ $d\rho_0 > 0$ $dT_0 < 0$ $ds < 0$	$du > 0$ $dM > 0$ $dp < 0$ $d\rho < 0$ $dT < 0$ $dp_0 > 0$ $d\rho_0 > 0$ $dT_0 < 0$ $ds < 0$
$\dot{Q} > 0$ (calentamiento)	$du > 0$ $dM > 0$ $dp < 0$ $d\rho < 0$ $**$ $dp_0 < 0$ $d\rho_0 < 0$ $dT_0 > 0$ $ds > 0$	$du < 0$ $dM < 0$ $dp > 0$ $d\rho > 0$ $dT > 0$ $dp_0 < 0$ $d\rho_0 < 0$ $dT_0 > 0$ $ds > 0$

Cuadro 8.2: Flujo en ducto con transferencia de calor; \*  $dT < 0$  para  $M < \gamma^{-1/2}$ ,  $dT > 0$  para  $M > \gamma^{-1/2}$ ; \*\*  $dT > 0$  para  $M < \gamma^{-1/2}$ ,  $dT < 0$  para  $M > \gamma^{-1/2}$

de donde

$$h_{02} - h_{01} = \dot{Q}$$

y

$$c_p(T_{02} - T_{01}) = \dot{Q}$$

Entonces

$$\begin{aligned} \frac{\dot{Q}}{c_p T_1} &= \frac{T_{01}}{T_1} \left( \frac{T_{02}}{T_{01}} - 1 \right) \\ &= \left( 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_1^2 \right) \left[ \left( \frac{M_2^2}{M_1^2} \right) \left( \frac{1 + \gamma M_1^2}{1 + \gamma M_2^2} \right)^2 \left( \frac{2 + (\gamma - 1) M_2^2}{2 + (\gamma - 1) M_1^2} \right) - 1 \right] \end{aligned}$$

El máximo calor es transferido cuando  $M_2 = 1$ . Por eso

$$\frac{\dot{Q}_{max}}{c_p T_{ent}} = \frac{(M_{ent}^2 - 1)^2}{2M_{ent}^2(\gamma + 1)}$$

donde  $T_{ent}$  and  $M_{ent}$  son la temperatura y número de Mach, respectivamente, en la entrada. La línea  $T(s)$  el la de Rayleigh como se muestra en la figura 8.7.

### 8.4.5. Flujo adiabático con fricción en ductos de área constante

Sean ahora 1 y 2 dos secciones a lo largo de un ducto de área constante y sin fricción pero con transferencia de calor. La ecuación de energía (8.1c) es

$$h_1 + \frac{u_1^2}{2} = h_2 + \frac{u_2^2}{2}$$

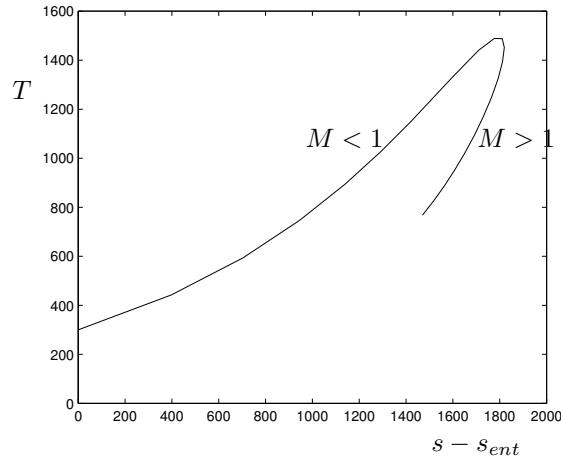


Figura 8.7: Línea de Rayleigh.

tal que

$$\frac{T_{02}}{T_{01}} = 1$$

Entonces

$$\begin{aligned} \frac{T_2}{T_1} &= \frac{T_{01}/T_1}{T_{02}/T_2} \\ &= \frac{2 + (\gamma - 1)M_1^2}{2 + (\gamma - 1)M_2^2} \end{aligned}$$

al usar (8.21).

De manera similar

$$\begin{aligned} \frac{p_2}{p_1} &= \left(\frac{M_1}{M_2}\right) \left(\frac{2 + (\gamma - 1)M_1^2}{2 + (\gamma - 1)M_2^2}\right)^{1/2} \\ \frac{p_{02}}{p_{01}} &= \left(\frac{M_1}{M_2}\right) \left(\frac{2 + (\gamma - 1)M_2^2}{2 + (\gamma - 1)M_1^2}\right)^{(\gamma+1)/[2(\gamma-1)]} \\ \frac{\rho_2}{\rho_1} &= \left(\frac{M_1}{M_2}\right) \left(\frac{2 + (\gamma - 1)M_1^2}{2 + (\gamma - 1)M_2^2}\right)^{-1/2} \\ \frac{s_2 - s_1}{R} &= \ln \left[ \left(\frac{M_2}{M_1}\right) \left(\frac{2 + (\gamma - 1)M_1^2}{2 + (\gamma - 1)M_2^2}\right)^{(\gamma+1)/[2(\gamma-1)]} \right] \end{aligned}$$

En la tabla 8.3 se muestran cambios en las variables en la dirección del flujo en flujos subsónico y supersónico. El cambio del número de Mach con distancia  $x$  de la entrada es

$$\frac{f dx}{D_h} = \frac{4}{\gamma M^2} \frac{1 - M^2}{2 + (\gamma - 1)M^2} \frac{dM}{M}$$

lo que puede integrarse a

$$\frac{\bar{f} x}{D_h} = \left[ -\frac{1}{\gamma M^2} - \frac{\gamma + 1}{2\gamma} \ln \left( \frac{2M^2}{2 + (\gamma - 1)M^2} \right) \right]_{M_{ent}}^M$$

$M < 1$ (subsónico)	$M > 1$ (supersónico)
$du > 0$	$du < 0$
$dM > 0$	$dM < 0$
$dp < 0$	$dp > 0$
$d\rho < 0$	$d\rho > 0$
$dT < 0$	$dT > 0$
$dp_0 < 0$	$dp_0 < 0$
$d\rho_0 < 0$	$d\rho_0 < 0$
$dT_0 = 0$	$dT_0 = 0$
$ds > 0$	$ds > 0$

Cuadro 8.3: Flujo en ducto con fricción

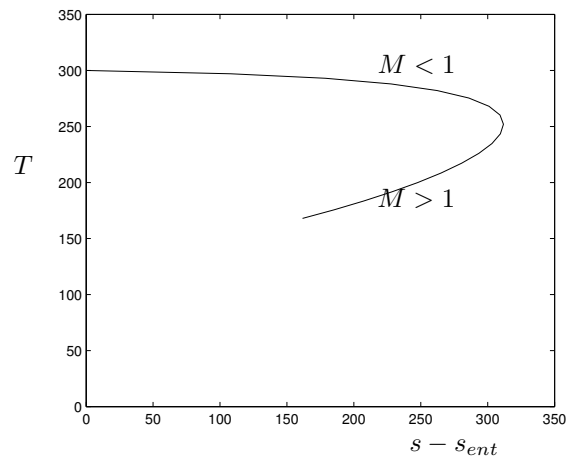


Figura 8.8: Línea de Fanno.

donde  $\bar{f}$  es el promedio de  $f$ , y  $M = M_{ent}$  en  $x = 0$ . Si  $L_{max}$  es la longitud necesaria para alcanzar la velocidad sónica, se tiene que

$$\frac{\bar{f}L_{max}}{D_h} = \frac{1 - M_{ent}^2}{\gamma M_{ent}^2} + \frac{\gamma + 1}{2\gamma} \ln \frac{(\gamma + 1)M_{ent}^2}{2 + (\gamma - 1)M_{ent}^2}$$

La línea  $T(s)$  en este caso es la de Fanno en la figura 8.8.

# Apéndice A

## Algebra y cálculo

### A.1. Serie de Taylor

Expandiendo la función  $f(x)$  alrededor de  $x = \bar{x}$ ,

$$f(\bar{x} + x) = f(\bar{x}) + (x - \bar{x})f'(\bar{x}) + \frac{1}{2!}(x - \bar{x})^2 f''(\bar{x}) + \frac{1}{3!}(x - \bar{x})^3 f'''(\bar{x}) + \dots \quad (\text{A.1})$$

### A.2. Serie binomial

$$(1 + x)^n = 1 + nx + \frac{1}{2!}n(n-1)x^2 + \frac{1}{3!}n(n-1)(n-2)x^3 + \dots \quad (\text{A.2})$$

### A.3. Regla de Leibnitz

$$\frac{d}{dx} \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, y) dy = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} dy + f(x, \beta) \frac{d\beta}{dx} - f(x, \alpha) \frac{d\alpha}{dx} \quad (\text{A.3})$$

### A.4. Identidades vectoriales

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) &= \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \\ \mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) &= (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C} = (\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}) \times \mathbf{A} \\ (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{D}) &= (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{D}) - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{D})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}) \\ (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times (\mathbf{C} \times \mathbf{D}) &= \mathbf{B}[\mathbf{A} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{D})] - \mathbf{A}[\mathbf{B} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{D})] = \mathbf{C}[\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{D})] - \mathbf{D}[\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C})] \end{aligned}$$

### A.5. Sistemas de coordenadas

Cartesiano

$$\begin{aligned} h_1 &= 1 & h_2 &= 1 & h_3 &= 1 \\ x_1 &= x & x_2 &= y & x_3 &= z \end{aligned}$$

Cilíndrico

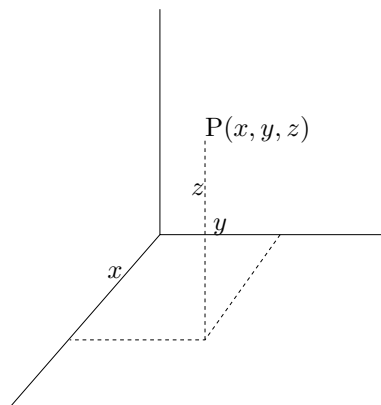


Figura A.1: Sistema cartesiano

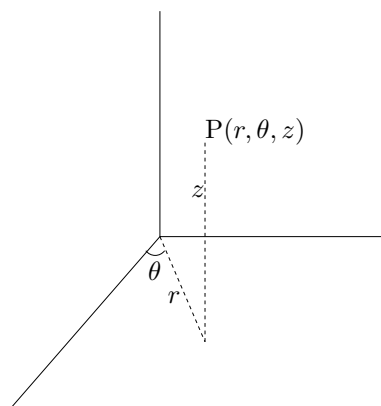


Figura A.2: Sistema cilíndrico

$$\begin{aligned} h_1 &= 1 & h_2 &= r & h_3 &= 1 \\ x_1 &= r & x_2 &= \theta & x_3 &= z \end{aligned}$$

Esférico

Figura A.3: Sistema esférico

$$\begin{aligned} h_1 &= 1 & h_2 &= r & h_3 &= r \operatorname{sen} \theta_1 \\ x_1 &= r & x_2 &= \theta_1 & x_3 &= \theta_2 \end{aligned}$$



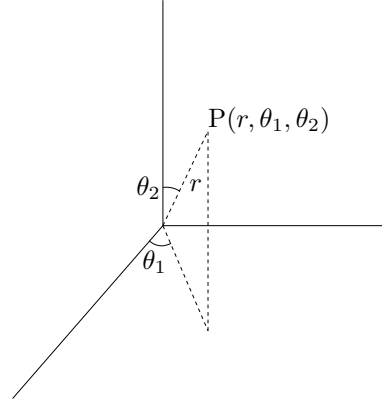


Figura A.4: Sistema esférico

## A.6. Operadores diferenciales

*Gradiente*

$$\nabla\phi = \frac{1}{h_1} \frac{\partial\phi}{\partial x_1} \mathbf{i}_1 + \frac{1}{h_2} \frac{\partial\phi}{\partial x_2} \mathbf{i}_2 + \frac{1}{h_3} \frac{\partial\phi}{\partial x_3} \mathbf{i}_3$$

*Divergencia*

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[ \frac{\partial}{\partial x_1} (h_2 h_3 A_1) + \frac{\partial}{\partial x_2} (h_3 h_1 A_2) + \frac{\partial}{\partial x_3} (h_1 h_2 A_3) \right]$$

*Rotacional*

$$\nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \begin{vmatrix} h_1 \mathbf{i}_1 & h_2 \mathbf{i}_2 & h_3 \mathbf{i}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ h_1 A_1 & h_2 A_2 & h_3 A_3 \end{vmatrix}$$

*Laplaciano*

$$\nabla^2 \phi = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[ \frac{\partial\phi}{\partial x_1} \left( \frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial\phi}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial\phi}{\partial x_2} \left( \frac{h_3 h_1}{h_2} \frac{\partial\phi}{\partial x_2} \right) + \frac{\partial\phi}{\partial x_3} \left( \frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial\phi}{\partial x_3} \right) \right]$$

*Derivada material*

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{U_1}{h_1} \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{U_2}{h_2} \frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{U_3}{h_3} \frac{\partial}{\partial x_3} \quad (\text{A.4})$$

donde la velocidad es  $\mathbf{U} = (U_1, U_2, U_3)$ .

## A.7. Identidades de operadores

$$\nabla^2 \mathbf{A} = (\nabla \cdot \nabla) \mathbf{A} \quad (\text{A.5})$$

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0 \quad (\text{A.6})$$

$$\nabla \times (\nabla \phi) = 0 \quad (\text{A.7})$$

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} \quad (\text{A.8})$$

$$(\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{A} = \nabla \left( \frac{|\mathbf{A}|^2}{2} \right) - \mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{A}) \quad (\text{A.9})$$

$$\nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{A}(\nabla \cdot \mathbf{B}) - \mathbf{B}(\nabla \cdot \mathbf{A}) - (\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{B} + (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{A} \quad (\text{A.10})$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot \nabla \times \mathbf{A} - \mathbf{A} \cdot \nabla \times \mathbf{B} \quad (\text{A.11})$$

$$\nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{A} + (\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{B} + \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{A}) + \mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{B}) \quad (\text{A.12})$$

## A.8. Teoremas integrales

*Teorema de Stokes*

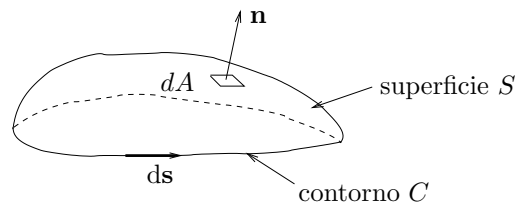


Figura A.5: Diagrama para el teorema de Stokes

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \int_S (\nabla \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{n} dA$$

*Teorema de divergencia de Gauss*

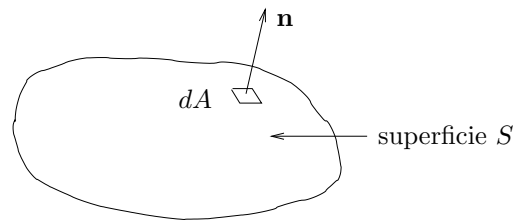


Figura A.6: Diagrama para el teorema de Gauss

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{B} = \int_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dA \quad (\text{A.13})$$

*Teorema de Green*

$$\begin{aligned} \int_V \nabla \phi \cdot \nabla \psi dV &= \int_A \phi \nabla \psi \cdot \mathbf{n} dA - \int_V \phi \nabla^2 \psi dV \\ &= \int_A \psi \nabla \phi \cdot \mathbf{n} dA - \int_V \phi \nabla^2 \psi dV \end{aligned}$$

*Teorema del gradiente*

$$\int_V \nabla \phi dV = \int_A \phi \mathbf{n} dA$$

# Apéndice B

## Ecuaciones de movimiento

Las siguientes ecuaciones son para un fluido incompresible y coeficiente de viscosidad constante en las formas mas comunes.

### B.1. Vectorial

Continuidad

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0$$

Navier-Stokes

$$\rho \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) = \rho \mathbf{f} - \nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{u}$$

### B.2. Cartesiana

Velocidad

$$\mathbf{u} = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + w\mathbf{k}$$

Continuidad

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (\text{B.1})$$

Navier-Stokes

$$\rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) = \rho g_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \quad (\text{B.2a})$$

$$\rho \left( \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) = \rho g_y - \frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) \quad (\text{B.2b})$$

$$\rho \left( \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) = \rho g_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \quad (\text{B.2c})$$

### B.3. Cilíndrica

Velocidad

$$\mathbf{U} = u_r \mathbf{e}_r + u_\theta \mathbf{e}_\theta + u_z \mathbf{e}_z$$

Continuidad

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial (r \rho u_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial (\rho u_\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial (\rho u_z)}{\partial z} = 0 \quad (\text{B.3})$$

Navier-Stokes

$$\begin{aligned} \rho \left( \frac{\partial u_r}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta^2}{r} + u_z \frac{\partial u_r}{\partial z} \right) \\ = \rho g_r - \frac{\partial p}{\partial r} + \mu \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} [r u_r] \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_r}{\partial \theta^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} \right\} \end{aligned} \quad (\text{B.4a})$$

$$\begin{aligned} \rho \left( \frac{\partial u_\theta}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r u_\theta}{r} + u_z \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \right) \\ = \rho g_\theta - \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \mu \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} [r u_\theta] \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial z^2} \right\} \end{aligned} \quad (\text{B.4b})$$

$$\begin{aligned} \rho \left( \frac{\partial u_z}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) \\ = \rho g_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \right\} \end{aligned} \quad (\text{B.4c})$$

## B.4. Esférica

Velocidad

$$\mathbf{U} = u_r \mathbf{e}_r + u_{\theta_1} \mathbf{e}_{\theta_1} + u_{\theta_2} \mathbf{e}_{\theta_2}$$

Continuidad

$$\frac{1}{r^2} \left( r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r \sin \theta_1} \frac{\partial}{\partial \theta_1} (u_{\theta_1} \sin \theta_1) + \frac{1}{r \sin \theta_1} \frac{\partial}{\partial \theta_1} (u_{\theta_1}) = 0$$

Navier-Stokes

# Apéndice C

## Ecuaciones de termodinámica

### C.1. Leyes de termodinámica

#### C.1.1. Primera

$$\Delta e + \Delta e_c + \Delta e_p = \delta q + \delta w$$

donde  $e$  es la energía interna,  $e_c$  la energía cinética,  $e_p$  la energía potencial,  $\delta q$  y  $\delta w$  el calor y el trabajo, respectivamente, que entra al sistema, todos por unidad de masa.

#### C.1.2. Segunda

$$T ds \geq \delta q$$

donde  $T$  es la temperatura,  $s$  la entropía específica. Para un proceso reversible

$$T ds = \delta q$$

### C.2. Definiciones

Entalpía

$$h = e + \frac{p}{\rho}$$

donde  $h$  es la entalpía,  $p$  es la presión, y  $\rho$  es la densidad.

Calores específicos

$$C_v = \frac{\partial e}{\partial T}$$

$$C_p = \frac{\partial h}{\partial T}$$

donde  $C_v$  y  $C_p$  son los calores específicos a volumen y presión constantes, respectivamente.

Ecuaciones  $T ds$

$$T ds = de - \frac{p}{\rho^2} d\rho \tag{C.2a}$$

$$= dh - \frac{1}{\rho} dp \tag{C.2b}$$

### C.3. Gas perfecto

Ecuación de estado

$$p = \rho RT$$

Relaciones

$$C_v = \frac{de}{dT} \quad (\text{C.3})$$

$$C_p = \frac{dh}{dT} \quad (\text{C.4})$$

$$\gamma = \frac{C_p}{C_v} \quad (\text{C.5})$$

$$R = C_p - C_v \quad (\text{C.6})$$

$$ds = C_v \frac{dT}{T} - R \frac{d\rho}{\rho} \quad (\text{C.7})$$

$$= C_p \frac{dT}{T} - R \frac{dp}{p} \quad (\text{C.8})$$

$$(\text{C.9})$$

Para un proceso isentrópico

$$\frac{p}{\rho^\gamma} = K_1 \quad (\text{C.10a})$$

$$pT^{\gamma/(\gamma-1)} = K_2 \quad (\text{C.10b})$$

$$\frac{T}{\rho^{\gamma-1}} = K_3 \quad (\text{C.10c})$$

donde  $K_1$ ,  $K_2$  y  $K_3$  son constantes.

# Bibliografía

- [1] R. ARIS, *Vectors, Tensors and the Equations of Fluid Mechanics*, Prentice- Hall, 1962.
- [2] G. BATCHELOR, *An introduction to fluid Dynamics*, Cambridge Univ. Press, 1970.
- [3] P. BRADSHAW, *Experimental fluid Mechanics*, Pergamon Press, Oxford, 1964.
- [4] R. CAMPBELL, *Foundations of fluid flows theory*, Addison-Wesley, 1973.
- [5] R. COURANT AND K. FRIEDRICHS, *Supersonic Flow and Shock Waves*, Interscience, 1948.
- [6] I. CURRIE, *Fundamental Mechanics of Fluid*, McGraw-Hill, 1974.
- [7] R. DAUGHERTY AND A. INGERSOLL, *Fluid Mechanics with Engineering Aplicatons*, McGraw-Hill, 1954.
- [8] W. DURAND, *Aerodynamic Theory*, Springer, 1934.
- [9] M. V. DYKE, *Perturbation Methods in Fluid Mechanics*, Academic Press, 1964.
- [10] J. FOX AND A. McDONALD, *Introduction to Fluid Mechanics*, John Wiley, 1973.
- [11] S. GOLDSTEIN, *Modern Developments in Fluid Dinamics, Vol. I y II*, Dover, 1965.
- [12] H. GREENSPAN, *The Theory of Rotating Fluids*, Cambridg Univ. Press, 1968.
- [13] HANSEN, *Mecánica de Fluidos*, Limusa-Wiley, 1971.
- [14] J. HINZE, *Turbulence*, Mc-Graw-Hill, 1965.
- [15] W. HUNGHERS, *Dinámica de los Fluidos*, McGraw-Hill, 1970.
- [16] J.DAILY, J.W., AND D. HARLEMAN, *Fluid Dynamics*, Addison-Wesley, 1996.
- [17] J. JEANS, *The Dynamical Theory of Gases*, Dover, 1954.
- [18] J. JOHN AND W. HABERMAN, *Introduction to Fluid Mechanics*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1988.
- [19] S. KAPLAN, *Fluid Mechanics*, Academic Press, 1967.
- [20] J. K. D. KATZ, *Fluid Dynamics and Heat Transfer*, Mc-Graw Hill, 1958.
- [21] W. KAUFMANN, *Fluid Mechanics*, Mc Graw-Hill, 1963.
- [22] B. KINSMAN, *Wind Waves*, Prentice-Hall, 1965.
- [23] A. KUETHE AND J. SCHETZER, *Foundations of Aerodynamics*, John Wiley, 1950.
- [24] H. LAMB, *Hydrodynamics*, Dover, 1945.
- [25] L. LANDAU AND E.M.LIFSHITZ, *Fluid Mechanics*, Pergamon press, 1959.
- [26] H. LIEPMAN AND A. ROSHKO, *Elements of Gasdynamics*, John Wiley, 1957.
- [27] C. LIN, *Hydrodynamic Instability*, Cambridge Univ. Press, 1955.
- [28] C. MATAIX, *Mecánica de Fluidos y Máquinas Hidráulicas*, Harper & Row, 1970.
- [29] R. MEYER, *Introduction to Mathematical Fluid Dynamics*, Wiley-Interscience, 1971.
- [30] L. MILNE-THOMPSON, *Theoretical Hydrodynamics*, MacMillan, 1950.
- [31] R. PAO, *Fluid Mechanics*, John Wiley, 1961.
- [32] O. PHILLIPS, *Dynamics of the Opper Ocean*, Cambridge Univ. Press, 1966.
- [33] L. PRANDTL, *Fluid Dynamics*, Hafner, 1952.
- [34] L. PRANDTL AND O. TIETJENS, *Fundamentals of Hydro- and Aero-Mechanics*, Dover, 1957.

- [35] J. ROBERTSON, *Hydrodynamics in Theory and Application*, Prentice-Hall, 1965.
- [36] H. ROUSE, *Elementary Mechanics of Fluids*, John Wiley, 1946.
- [37] I. SHAMES, *Mecánica de Fluidos*, Mc.Graw-Hill, 1962.
- [38] A. SHAPIRO, *The Dynamics and Thermodynamics of Compressive Fluid Flow, Vols. I y II*, Ronald Press, 1953.
- [39] J. STOKER, *Water Waves*, Interscience, 1957.
- [40] V. STREETER AND E. WYLIE, *Fluid Mechanics*, McGraw-Hill, 1975.
- [41] W. SWANSON, *Fluid Mechanics*, Holt, Rinehart, and Winston, 1970.
- [42] B. THWAITES, *Incompressible Aerodynamics*, Oxford, 1960.
- [43] H. VALLENTINE, *Applied Hydrodynamics*, Butterworths, 1959.
- [44] J. VENNARD, *Elementary Fluid Mechanics*, John Wiley, 1954.
- [45] C. YIH, *Fluid Mechanics*, McGraw-Hill, 1969.