MECANIQUE

A- MECANIQUE (présentation)

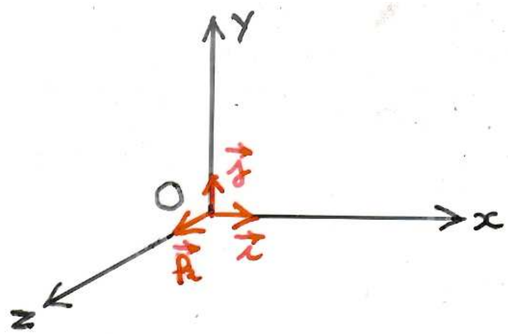
1. Système mécanique matériel

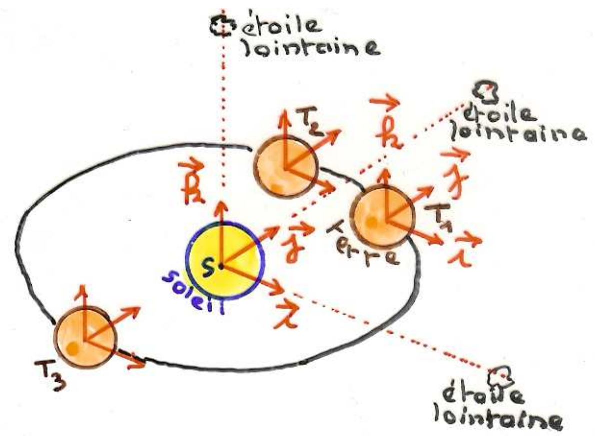
Corps solide indéformable ou ensemble de corps auxquels on s'intéresse.

2. Référentiel

2_A. référentiel espace

Repère d'espace $O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}$.
Système d'axes lié à la terre.
Le choix d'un repère permettra une mise en équation simple.





(1) repère héliocentrique ($S,\vec{i},\vec{j},\vec{k}$), galiléen*
Sera galiléen, tout référentiel qui a un mouvement de translation rectiligne et uniforme par rapport à (1).

(2) repère géocentrique ($T,\vec{i},\vec{j},\vec{k}$)
Sur une courte durée (T_1 à T_2), le mouvement d'un solide est pratiquement rectiligne uniforme.
Ce n'est plus le cas sur une longue durée (T_1 à T_3).
(2) est considéré comme galiléen sur une courte durée malgré que son mouvement ne soit pas une translation rectiligne uniforme très rigoureux.

De plus le référentiel terrestre tourne autour de l'axe des pôles, mais celle-ci peut être négligée sur une courte durée (quelques minutes)

*Galilée (1564-1642), physicien et astronome italien, fondateur des raisonnements de la mécanique,...

2_B. référentiel temps

Origine des temps et unité de temps.

3. STATIQUE

3_A. définition

Etude des conditions pour lesquelles un corps est immobile.
A l'instant initial t = 0, le corps est immobile.

3_B. conditions d'équilibre

a- Forces $\sum \vec{F}_{extérieures} = \vec{0}$

La somme des forces extérieures appliquées au corps est nulle.

b- Moments $\sum \overrightarrow{M}_{\vec{F}_{extérieures}} = \vec{0} \quad ou \quad \sum M_{\vec{F}_{extérieures}/\Delta} = 0$

La somme vectorielle des moments des forces extérieures par rapport à un point quelconque est nulle, ou la somme algébrique des moments des forces extérieures par rapport à l'axe Δ est nulle.

3_C. applications

Projetés sur les trois axes, ces deux équations donnent six équations algébriques indépendantes. (au plus six inconnues)

En général, $\sum \vec{F} = \vec{0}$ sera projetée sur deux axes contenus dans un plan, où se trouvent les forces extérieures, et $\sum M_{\vec{F}/\Delta} = \vec{0}$ sera projetée sur un axe Δ perpendiculaire à ce plan.

Au total, trois équations algébriques (trois inconnues).

Exemple :

Solide sur un plan horizontal, sur un plan incliné,...(avec ou sans frottements)
Arc-boutement, échelle, potence, console,...

4. MOUVEMENT

4_A. exemples

Un corps aura un mouvement de translation quand tous les points ont la même trajectoire et la même vitesse.

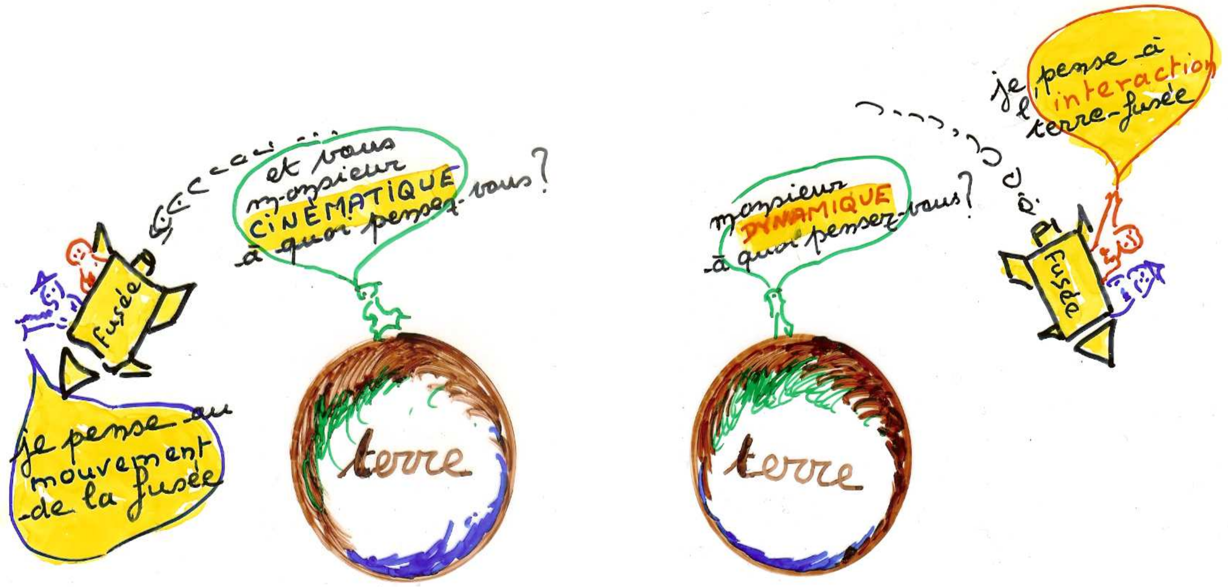
Un corps aura un mouvement de rotation autour d'un axe Δ, quand chaque point a une trajectoire circulaire centrée sur l'axe.

Exemples :

- mouvement rectiligne (la trajectoire est une droite)
- mouvement circulaire (la trajectoire est un cercle)
- mouvement curviligne (la trajectoire est une courbe)
- mouvement sinusoïdal, rectiligne ou circulaire, (*élongation, vitesse et accélération varient « sinusoïdalement »).*

4$_B$. CINEMATIQUE

Etude du mouvement d'un corps dans son rapport avec le temps, sans se préoccuper des causes.
On parlera : repère, temps, position, vitesse et accélération.



4$_C$. DYNAMIQUE

a- définition

Etude du mouvement d'un corps connaissant les forces extérieures qui lui sont appliquées.
On établira les relations fondamentales :

b- Forces

$$\sum \vec{F}_{extérieures} = m.\vec{a}$$

$\vec{a}$: accélération (m.s^{-2})
m : masse du corps kg)

c- Moments

$$\sum M_{\vec{F}_{extérieures}/\Delta} = J_{\Delta}.\frac{d^2\alpha}{dt^2}$$

$\frac{d^2\alpha}{dt^2}$: accélération angulaire (rad.s^{-2})

J_{Δ} : moment d'inertie du corps (kg.m^2)

$\sum M_{\vec{F}_{extérieures}/\Delta}$: somme algébrique des moments des forces extérieures par rapport à l'axe de rotation pour un solide en rotation autour d'un axe fixe Δ (N.m)

5. Définitions et relations

5$_A$. point matériel

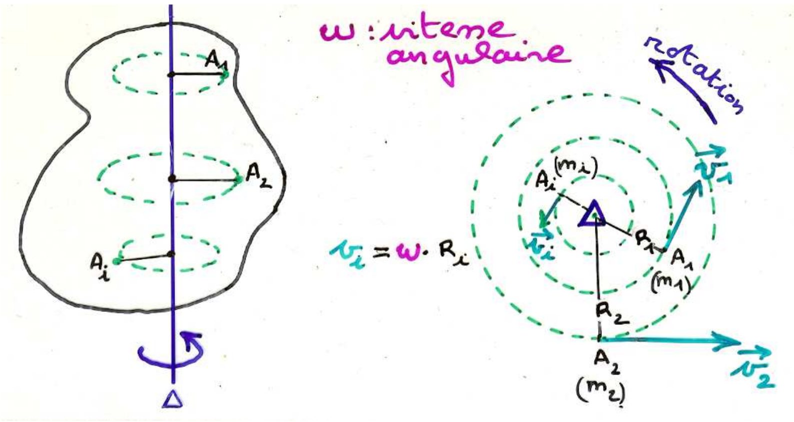
Solide de masse m, pouvant être assimilé à un point.

5$_B$. solide parfait

Il a une masse constante.
Il ne subit aucune déformation.

5$_C$. moment d'inertie J d'un solide

Solide en rotation autour d'un axe fixe Δ.



Energie cinétique du solide :

$$E_c = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i . v_i^2 = \frac{1}{2} \omega^2 \sum_{i=1}^{n} m_i . R_i^2$$

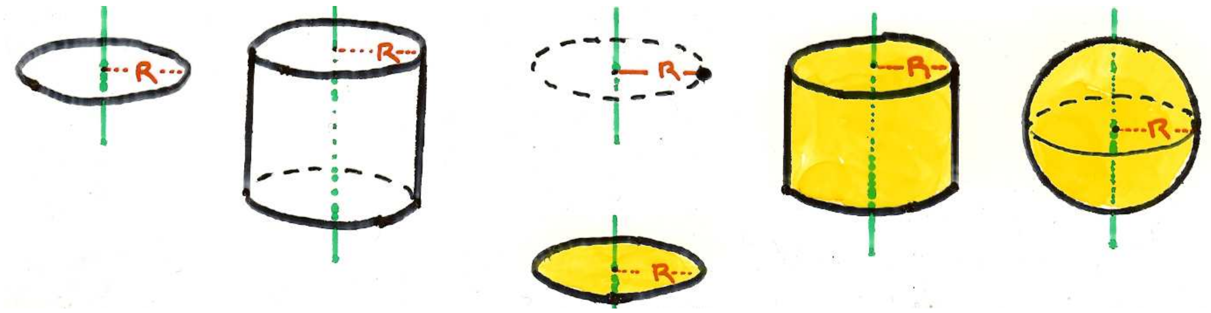
$$E_c = \frac{1}{2} J . \omega^2$$

ω (rad.s^{-1})

$$J = \sum_{i=1}^{n} m_i . R_i^2$$

R, rayon (m)
m, masse (kg)
J (kg.m^2)

Point matériel
J = M.R^2



Anneau circulaire	Cylindre creux	Disque	Cylindre plein	Sphère
J = M.R^2	J = M.R^2	J = $\frac{1}{2}$ M.R^2	J = $\frac{1}{2}$ M.R^2	J = $\frac{2}{5}$ M.R^2

5$_D$. accélération

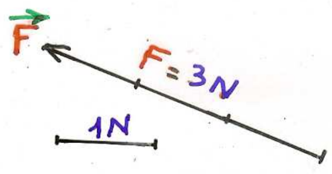
Variation de la vitesse en intensité.
Positive et constante, la vitesse augmente (*mouvement uniformément accéléré).*
Négative et constante, la vitesse décroit (décélération) (*mouvement uniformément décéléré).*
Nulle, vitesse uniforme (*le vecteur vitesse peut varier en conservant la* même *intensité).*

5$_E$. action mécanique et vecteur-force

On appelle force, toute action mécanique capable :
- de modifier l'état de repos ou l'état de mouvement d'un corps.
- de déformer un corps.
- de compenser d'autres actions mécaniques.

L'action mécanique est modélisée par un VECTEUR-FORCE qui a pour caractéristiques :

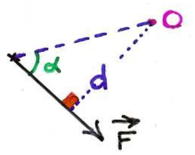
- point d'application
- direction
- sens
- intensité (newton, N), norme, valeur, module.



Exemples :
- action mécanique de contact
- action mécanique à distance (*champ de pesanteur, champ électrique, champ magnétique*).
- force extérieure : elle est crée par un corps situé à l'extérieur du solide.

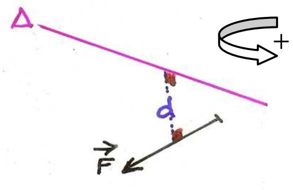
5$_F$. moment d'une force par rapport à...

a...un <u>point O</u>



$\overrightarrow{M_{\vec{F}}} = \overrightarrow{OA} \wedge \vec{F}$ = OA.F.sinα
(grandeur vectorielle)

b...un <u>axe Δ</u>

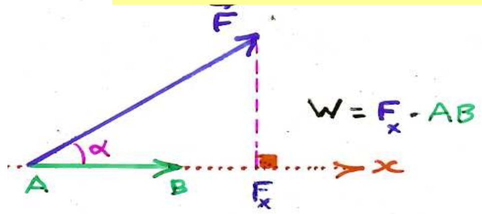


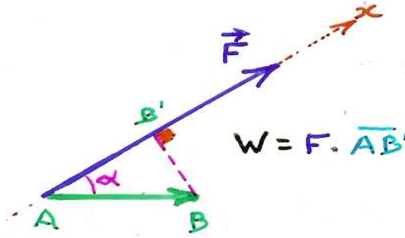
$M_{\vec{F}/\Delta} = \pm F.d$
(grandeur algébrique, N.m)

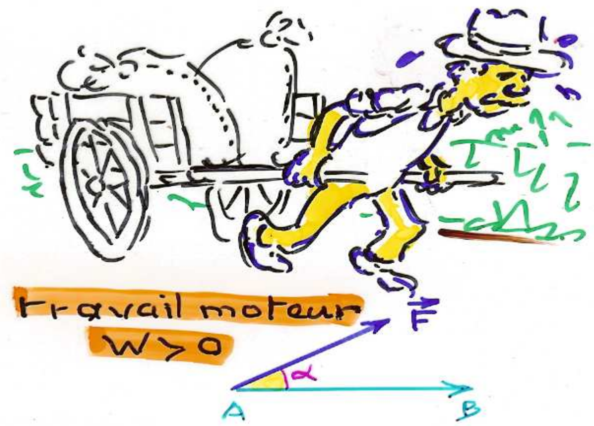
5_G. travail…

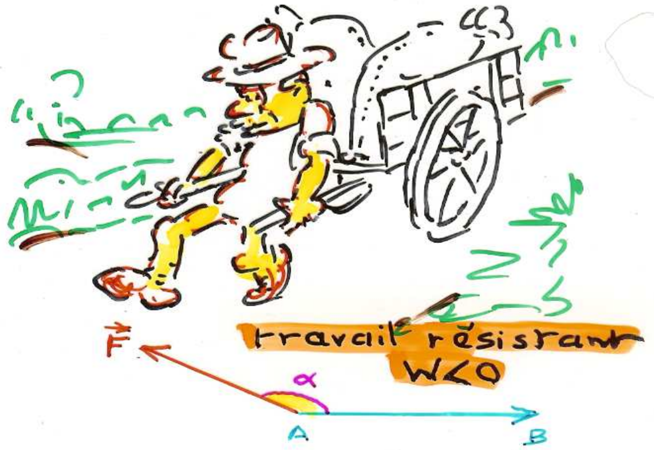
a- d'une force

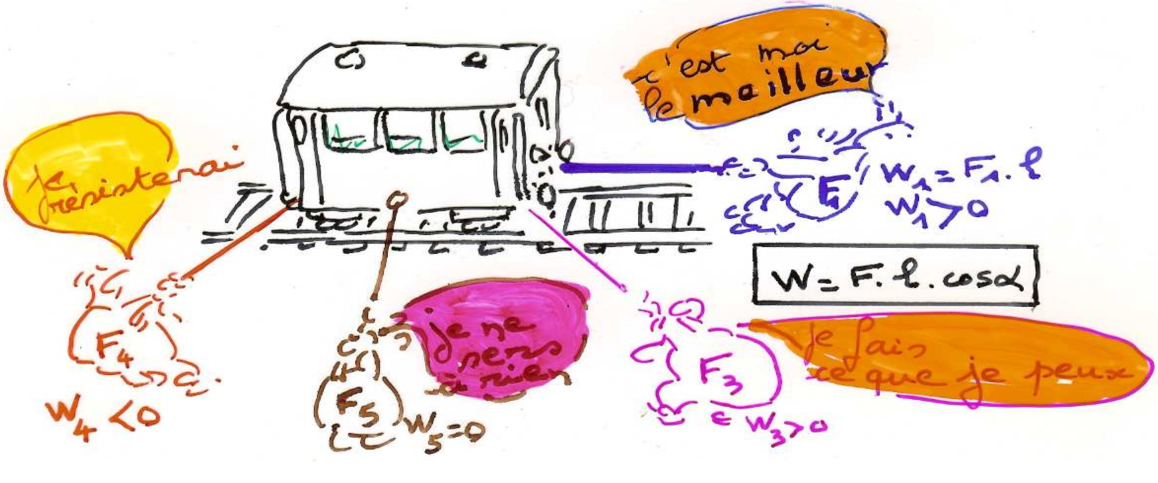
$$W_{A \to B}^{\vec{F}_{extérieure}} = \vec{F}.\overrightarrow{AB} = F.AB.\cos\alpha$$



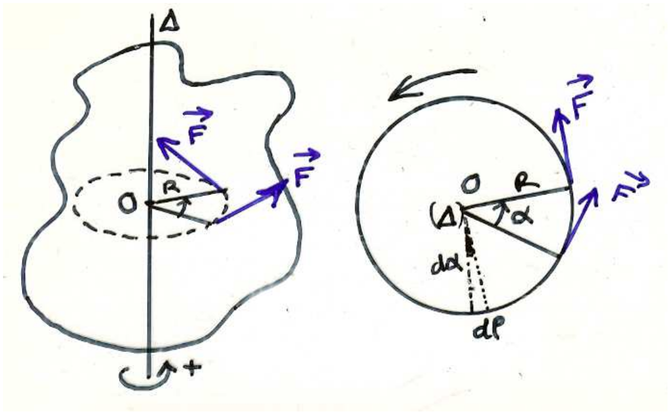








b- d'une force appliquée à un solide en rotation

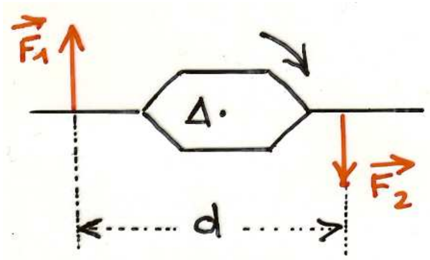


$$dW = \vec{F}.\vec{dl} = F.dl = F.R.d\alpha$$
$$dW = M_{\vec{F}/\Delta}.d\alpha$$

$$W = \int_0^\alpha dW = M_{\vec{F}/\Delta}\int_0^\alpha d\alpha$$

$$W_\alpha^{\vec{F}_{extérieure}} = M_{\vec{F}/\Delta}.\alpha$$

c- d'un couple de moment constant



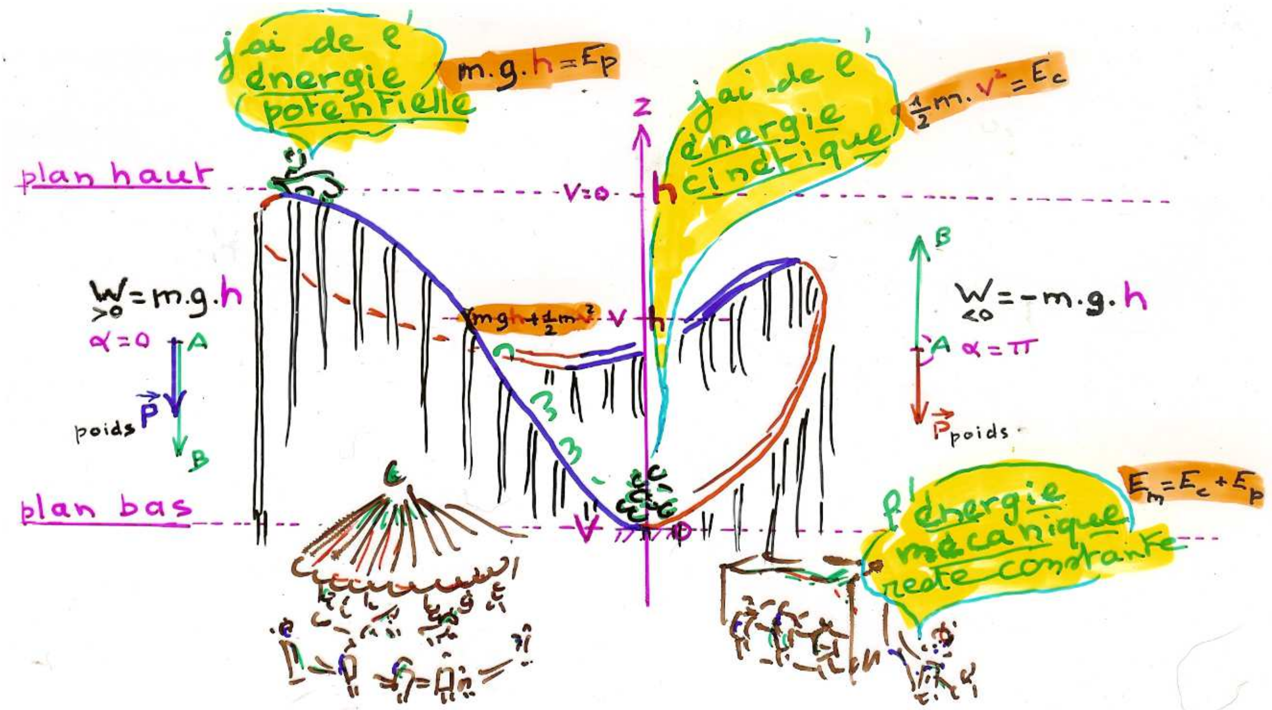
$F_1 = F_2 = F$

$M_{C/\Delta} = \pm F.d$

$W_C = M_C.\alpha$

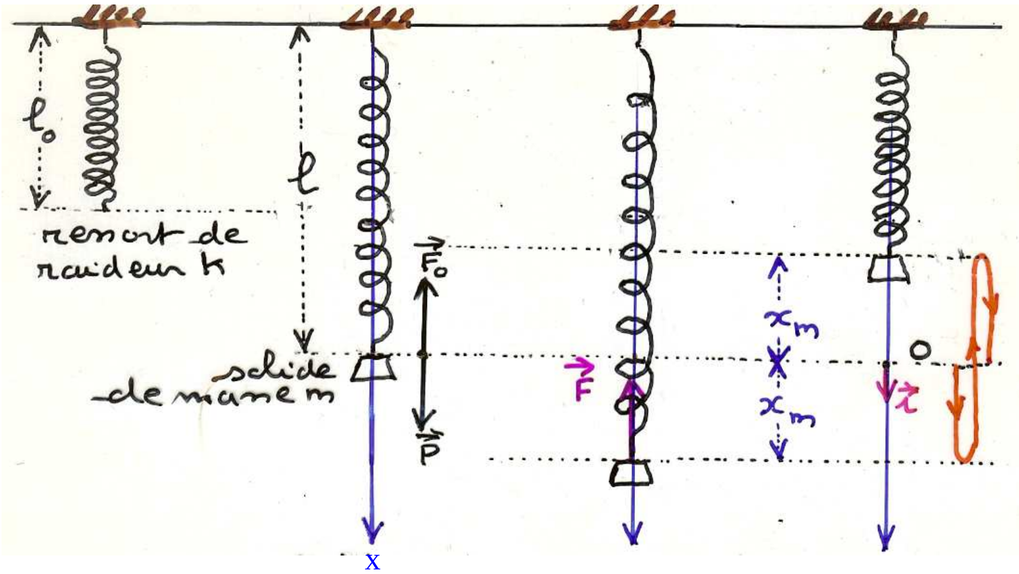
5H. énergies

a- pesanteur



Energie mécanique (constante) = Energie cinétique ($\frac{1}{2}m.v^2$) + Energie potentielle de pesanteur ($m.g.h$)

b- ressort



statique dynamique

Energie mécanique (constante) = Energie cinétique ($\frac{1}{2}m.v^2$) + Energie potentielle élastique ($\frac{1}{2}k.x^2$)

c- solide en rotation

$$E_c = \frac{1}{2}J.\omega^2$$

5$_I$. puissance…

a…d'une force

$$P_{moyenne} = \frac{W^{\vec{F}}_{A\to B}}{\Delta t}$$

Δt : temps pour la force pour aller de A vers B

$$P_{instantanée} = \lim_{\Delta t\to 0} P_{moyenne} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{W^{\vec{F}}}{\Delta t} = \frac{dW}{dt} = \frac{\vec{F}.\vec{dl}}{dt} = \vec{F}.\frac{\vec{dl}}{dt} = \vec{F}.\vec{v}$$

$$P_{instantanée} = \vec{F}.\vec{v} = F.V.\cos\alpha \quad (P_i = F.v,\ si\ \alpha = 0)$$

b…d'une force appliquée à un solide en rotation ou d'un couple

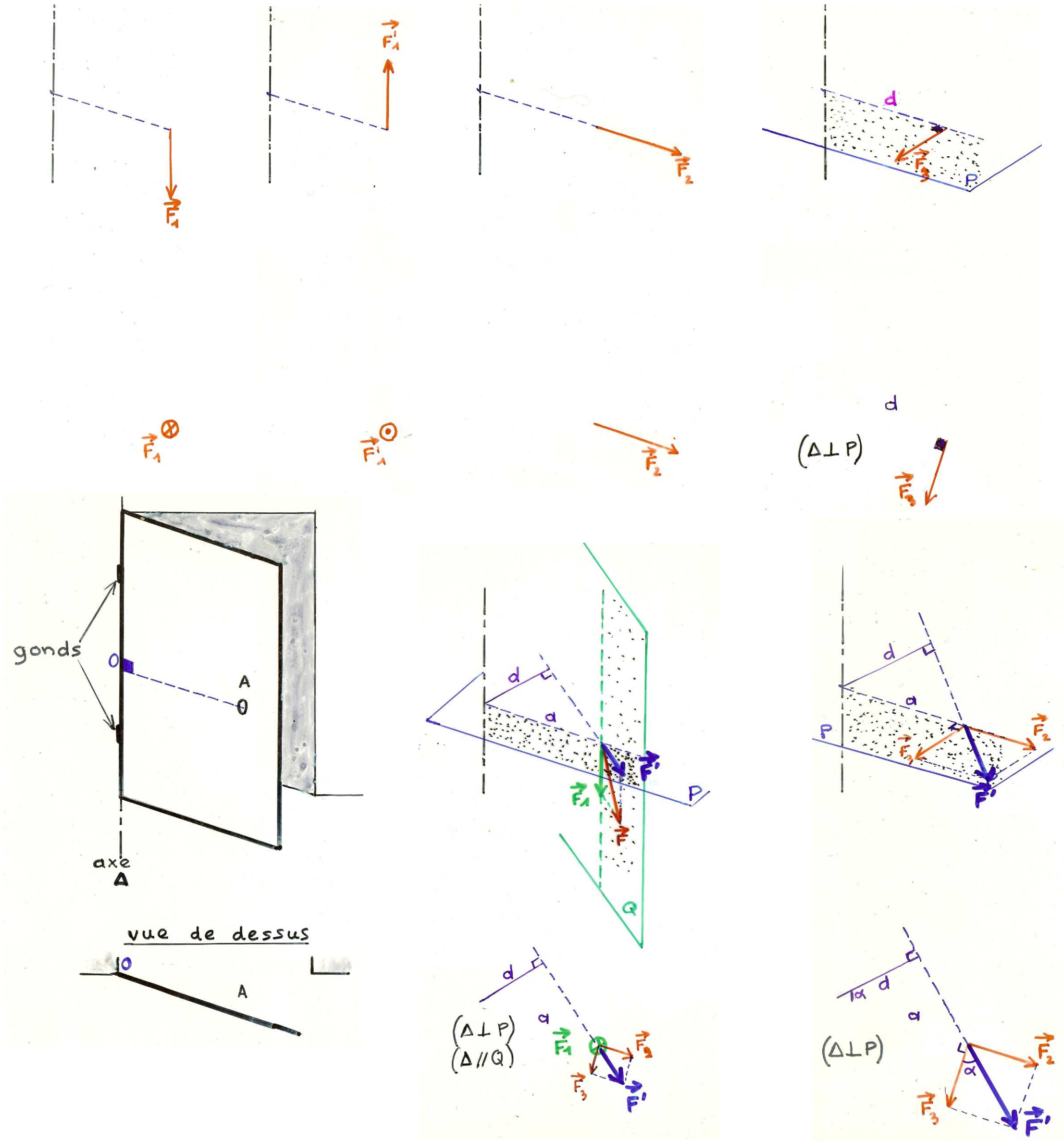
$$P_m = \frac{W}{\Delta t}$$

$$P_i = \lim_{\Delta t\to 0} P_m = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{W}{\Delta t} = \frac{dW}{dt} = \frac{M.d\alpha}{dt} = M.\frac{d\alpha}{dt} = M.\omega$$

$$P_i = M.\omega$$

6. Porte

Dans chaque situation, préciser « l'effet »de la force sur son immobilisme ou sa rotation.



1. $M_{\overrightarrow{F_1}/\Delta} = 0$ et $M_{\overrightarrow{F_1'}/\Delta} = 0$
3. $M_{\overrightarrow{F_2}/\Delta} = 0$
4. $M_{\overrightarrow{F_3}/\Delta} = F_3.d$
5. $\overrightarrow{F'} = \overrightarrow{F_2} + \overrightarrow{F_3}$

$$M_{\overrightarrow{F_2}/\Delta} + M_{\overrightarrow{F_3}/\Delta} = M_{\overrightarrow{F'}/\Delta} = M_{\overrightarrow{F_3}/\Delta} = F_3.a = F'.d$$

6. $\vec{F} = \overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F'} = \overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} + \overrightarrow{F_3}$

$$M_{\overrightarrow{F_1}/\Delta} + M_{\overrightarrow{F_2}/\Delta} + M_{\overrightarrow{F_3}/\Delta} = M_{\overrightarrow{F'}/\Delta} = M_{\overrightarrow{F_3}/\Delta} = F_3.a = F'.d$$

B- STATIQUE

1. Conditions d'équilibre d'un solide

1$_A$. Forces

$$\boxed{\sum \vec{F}_{extérieures} = \vec{0}}$$

La somme des forces extérieures qui lui sont appliquées est nulle.
Ces forces seront, en général coplanaires.
En projetant la relation sur deux axes (Ox et Oy) orthogonaux, on obtient deux équations.
(S'il n'y a que trois forces, leurs droites d'action concourent en un même point)

Exemples de forces : poids, réaction, tension,...

1$_B$. Moments

$$\boxed{\sum M_{\vec{F}/\Delta} = 0} \quad +$$

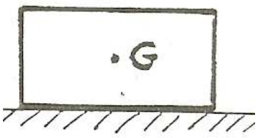
La somme algébrique des moments des forces extérieures par rapport à l'axe Δ est nulle.
On obtient une équation.
Ce qui fait **trois équations**, qui nous permettent de trouver trois inconnues au maximum.
On utilise parfois $\sum \overrightarrow{M}_{\vec{F}} = \vec{0}$, la somme vectorielle des moments des forces par rapport à un point quelconque est nulle.

2. Résolution d'un problème

a) Bien repérer le solide en équilibre.
b) Bien repérer les forces extérieures à ce solide.
c) Bien lire l'énoncé pour, en fonction du nombre d'inconnue(s)...1, 2, 3 ou plus et ainsi choisir les équations qui conviennent, en précisant l'axe Δ choisi si nécessaire.

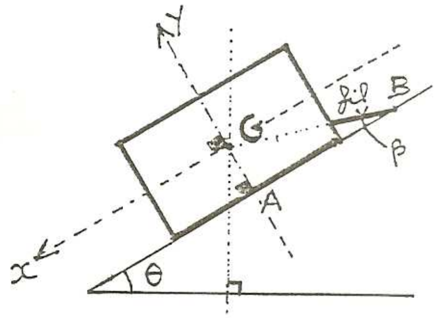
3. Exercices

Exercice 1 : Le solide repose sur un plan horizontal.

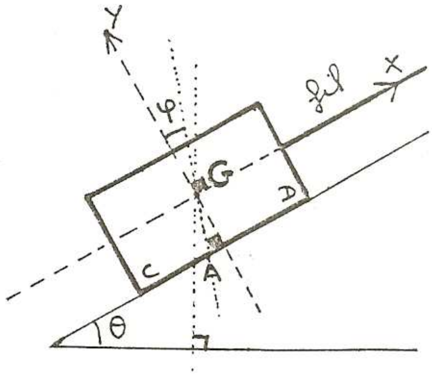


1) Sans frottement :
Quelles sont les forces mises en jeu ?
2) Avec frottement :
Même question si on exerce une action sur ce solide.
Préciser :
- les conditions de glissement
- l'angle de frottement
- le coefficient de frottement de glissement
- le cône d'équilibre.
3) L'arc-boutement :
Quelle condition doit-on avoir pour que l'on ait toujours équilibre ?

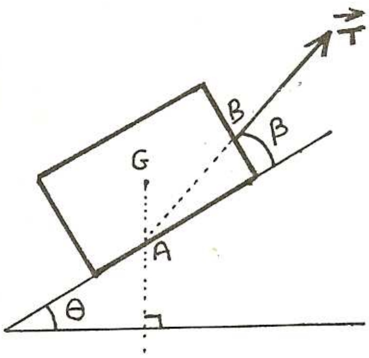
Exercice 2 : Le solide repose sur un plan incliné.



1) Sans frottement.
a- Quelles sont les forces mises en jeu sur ce solide ?
b- Exprimer littéralement les intensités R et T en fonction de P, θ et .β.
(*données : m = 10 kg ; θ = 23 ; AB = 1,10 m ; AG = 13 cm*
g = 9,81 m.s^{-2})
c- Connaissez-vous une autre méthode pour trouver ce résultat ?



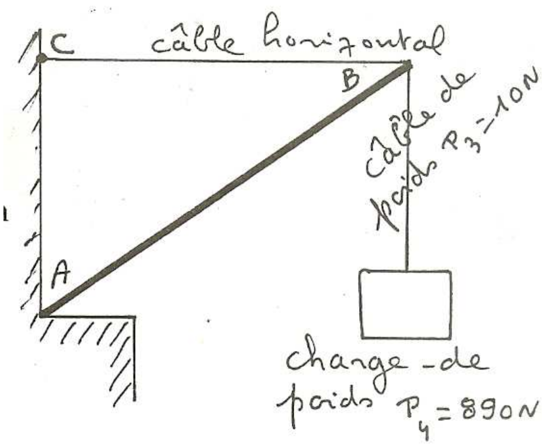
2) Avec frottement.
a- Préciser pour quel angle θ on a équilibre.
(on désigne par k le coefficient de frottement de glissement qui se développe au contact du solide et du plan incliné)
b- Si θ = 30° et k = 0,3, l'équilibre est-il possible ?
c- Exprimer F en fonction de m, g, θ et φ à l'équilibre.
d- Que se passe-t-il si θ = φ ?



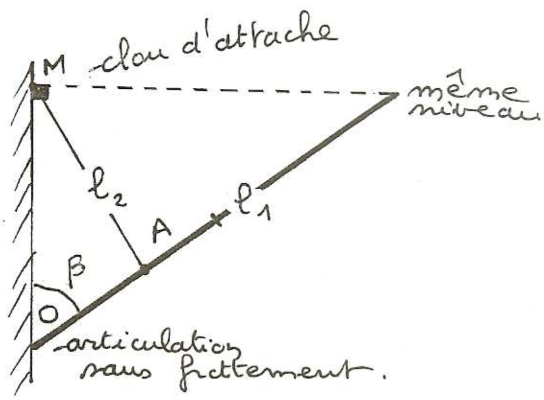
3) Avec frottement.
a- Exprimer T en fonction de P, θ, β, et φ l'angle de frottement à l'équilibre.
b- Calculer T.
(données : P = 1000 N ; θ = 10°; β = 25° et φ = 18°)
c- Pour quelle valeur de β, T est-elle minimale ?

Exercice3 : potence

On considère une potence constituée d'une barre homogène AB (*longueur ℓ_1 = 3,50 m et intensité du poids P_1 = 200 N)* et d'un câble horizontal (*longueur ℓ_2 = 2,00 m et de poids négligeable devant la tension*).
1) Calculer l'intensité de la tension du câble.
2) Donner les caractéristiques de la réaction du support en A.



Exercice 4 : tableau accroché



1) Montrer que le point d'attache A, à l'arrière du tableau doit être situé à une distance déterminée du point le plus bas du tableau.

2) Evaluer en fonction de ℓ_1 et ℓ_2 l'angle β que fait le tableau avec la verticale.

3) En déduire que ℓ_2 est comprise entre deux valeurs que l'on exprimera en fonction de ℓ_1.

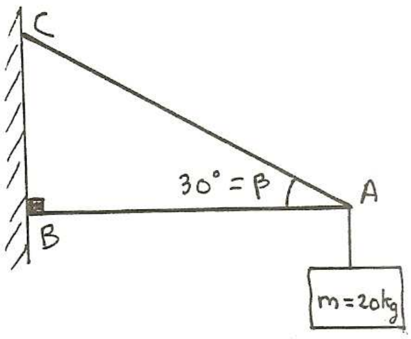
Exercice 5 : Console

Vérifier que :

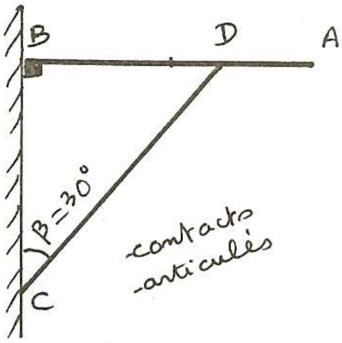
1) ...la barre AC est soumise à une traction dont on calculera l'intensité.

2) ...la barre AB est soumise à une compression dont on calculera l'intensité.

(les barres ont des poids négligeables devant les forces)



Exercice 6 : Console



On désire étudier les efforts aux liaisons dans la console.
On dispose d'une barre AB horizontale de longueur ℓ et d'une barre CD oblique de longueur $\frac{4}{3}\ell$.

Le poids des deux barres est négligeable.

1) Calculer les efforts en B, C et D.

2) Vérifier ce résultat par une construction graphique.

Exercice 7 : Console mobile

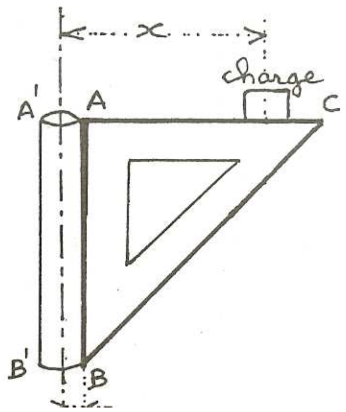
Elle est constituée d'un triangle rectangle isocèle ABC, de poids négligeable devant la charge P portée sur AC.

(AB = AC = ℓ)

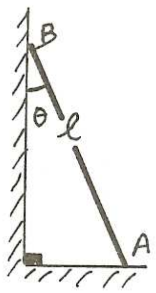
Elle est installée sur un tuyau de diamètre d = 2 r.

Soit k le coefficient de frottement de glissement entre la console et le tuyau.

Calculer la distance minimale x à l'axe du tuyau pour laquelle la charge P peut être supportée sans qu'il y ait glissement de la console.



Exercice 8 : Echelle simple



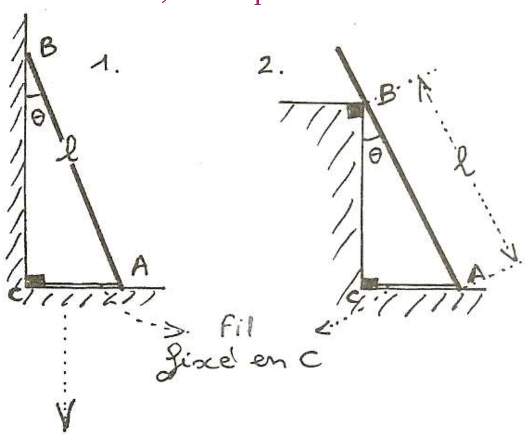
1) Sur parois lisses

a- échelle seule

Montrer que si les contacts se font sans frottement, il est impossible d'appuyer obliquement contre un mur vertical. (soit P le poids de l'échelle)

b- échelle avec fil

Dans les exemples exprimer la réaction en A et B, ainsi que la tension du fil en fonction de P, ℓ et θ.



2) Sur sol rugueux

a- Calculer l'angle de frottement φ pour maintenir juste l'échelle en équilibre.
En déduire les réactions en A et B.
(ℓ = 5 m, P = 250 N et θ = 30°)

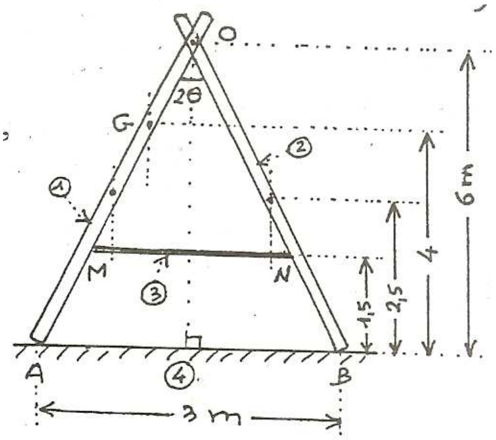
b- Le poids de l'échelle étant négligeable, quelle est la condition pour que l'homme de poids P_1 = 1000 N, monte jusqu'en haut de l'échelle ?
Si θ = 30°, calculer la hauteur maximale à laquelle l'homme peut monter sans que l'échelle ne glisse.

c- Même question, le poids de l'échelle n'est plus négligeable (P_2 = 250 N).

d- Même question, quand le contact en A est rugueux.

Exercice 9 : Echelle double

Sur sol lisse, avec un homme dessus en G.



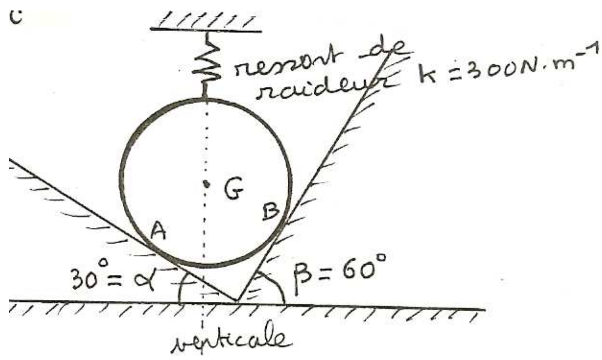
Elle est constituée de deux échelles simples articulées en O, de longueur ℓ et de même poids p = 100 N.
Il n'y a aucun frottement en O, A et B.
L'homme a un poids P = 900 N.

Calculer les intensités :
$F_{4/1}$; $F_{4/2}$; $F_{3/2}$ et $F_{1/2}$.

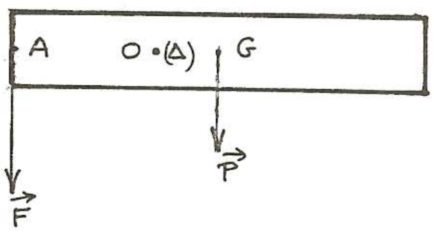
Exercice 10 : Sphère

1) Démontrer qu'une sphère ne peut pas être en équilibre sur un plan incliné.

2) Une sphère homogène de poids d'intensité P = 30 N repose sans frottement sur deux plans.
Calculer l'intensité des réactions R_A et R_B exercées par les supports en A et B, l'allongement du ressort étant de 30 mm.



Exercice 11 : Barre homogène



Elle est en équilibre, calculer la réaction en O.
(ℓ = 10 m ; P = 100 N et AO = 3 m)

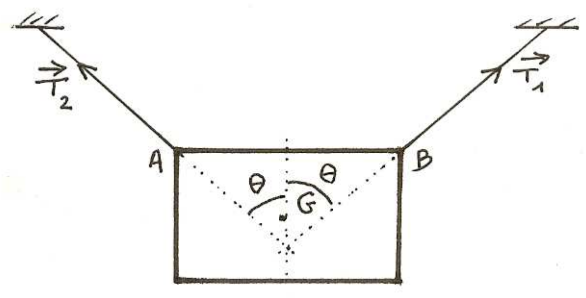
Exercice 12 :

Un solide de centre de gravité G, peut tourner autour d'un axe de rotation Δ passant par O.
Expliquer les trois sortes d'équilibre, en positionnant O.

- stable
- indifférent
- instable

Exercices divers 13 :

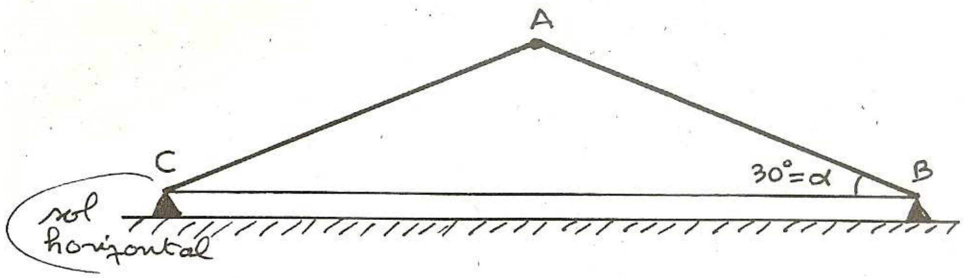
1)



Un solide de masse m = 4 kg est suspendue
à deux cordes.

1) Exprimer P, T_1 et T_2 en fonction de θ.
2) Les calculer pour θ = 50°.

2) Ferme



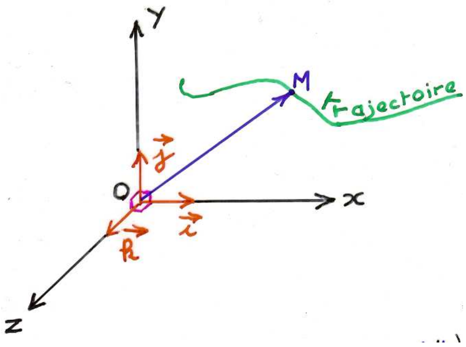
Une ferme supportée en A un poids d'intensité 3000 N.
1) Calculer les réactions en B et C.
2) Vérifier que les barres sont soumises chacune à une compression et que la barre BC est soumise à une traction.
3) Calculer les intensités de ces dernières en supposant que le poids des barres est négligeable devant les autres forces et que les contacts en B et C sont sans frottement.

C- CINEMATIQUE : position, vitesse et accélération

1. Vecteur position

1A. trajectoire

M est la position du point à l'instant t.
M (x, y, z) : coordonnées cartésiennes.



La trajectoire représente l'ensemble des positions occupées par le point M.

1B. vecteur

$$\overrightarrow{OM} = x.\vec{i} + y.\vec{j} + z.\vec{k}$$
$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_x} + \overrightarrow{OM_y} + \overrightarrow{OM_z}$$
$$\left\|\overrightarrow{OM}\right\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

1C. équations horaires et cartésienne du mouvement de M

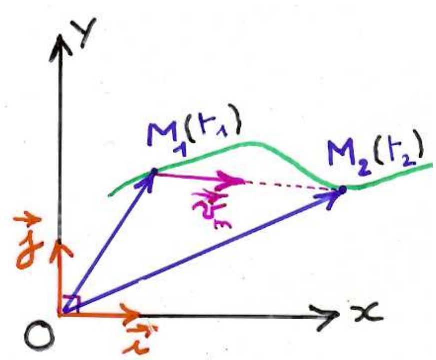
- dans l'espace : x = f(t) , y = g(t) et z = h(t)
- dans le plan : x = f(t) et y = g(t)
- rectiligne : x = f(t)

Sauf exception, l'étude portera sur des mouvements plans.

Equations horaires du mouvement plan de M : x = f(t) et y = g(t) Equation cartésienne : y = f(x)

2. Vecteur vitesse

2A. vitesse moyenne

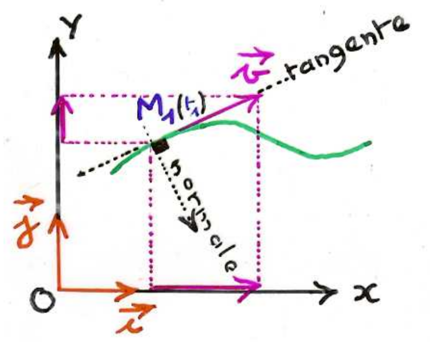


Entre les instants t_1 et t_2 : $\overrightarrow{v_m} = \dfrac{\overrightarrow{M_1M_2}}{t_2 - t_1}$ $\qquad v_m = \dfrac{\overset{\frown}{M_1M_2}}{t_2 - t_1}$

$$\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1} \text{ et } t_2 - t_1 = \Delta t$$

2_B. vitesse instantanée

à l'instant t_1.



$$\overrightarrow{v_{t_1}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{M_1M_2}}{t_2 - t_1} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \overrightarrow{OM}}{\Delta t}$$

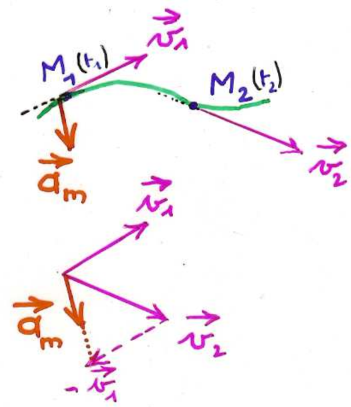
$$\overrightarrow{v_{t_1}} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(x.\vec{i} + y.\vec{j}\right) = \frac{dx}{dt}.\vec{i} + \underbrace{\frac{d\vec{i}}{dt}}_{0}.x + \frac{dy}{dt}.\vec{j} + \underbrace{\frac{d\vec{j}}{dt}}_{0}.y$$

$$\overrightarrow{v_{t_1}} = \dot{x}.\vec{i} + \dot{y}.\vec{j} = v_x.\vec{i} + v_y.\vec{j}$$

$$(\dot{x} = v_x \; et \; \dot{y} = v_y : dérivées \; premières)$$

$$\boxed{v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}}$$

3. Vecteur accélération



3_A. accélération moyenne

Entre les instants t_1 et t_2.

$$\overrightarrow{a_m} = \frac{\overrightarrow{v_2} - \overrightarrow{v_1}}{t_2 - t_1} = \frac{\overrightarrow{\Delta v}}{\Delta t} \qquad a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

3_B. accélération instantanée

a- coordonnées cartésiennes

à l'instant t_1.

$$\overrightarrow{a_{t_1}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{\Delta v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\left(\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right)}{dt} = \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2}.\vec{i} + \frac{d^2y}{dt^2}.\vec{j}$$

$$\overrightarrow{a_{t_1}} = \frac{dv_x}{dt}.\vec{i} + \frac{dv_y}{dt}.\vec{j} = \ddot{x}.\vec{i} + \ddot{y}.\vec{j} = a_x.\vec{i} + a_y.\vec{j}$$

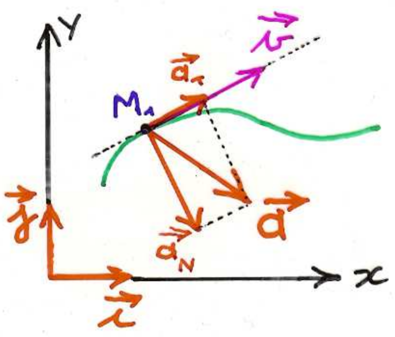
$$(\ddot{x} = a_x \; et \; \ddot{y} = a_y : dérivées \; secondes)$$

$$\boxed{a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} \quad \text{en coordonnées } \underline{\text{cartésiennes}}}$$

L'accélération instantanée $\overrightarrow{a_{t_1}}$ se décompose en deux composantes (tangentielle et normale) :

b- accélération tangentielle

$\overrightarrow{a_T}$ $\quad a_T = \dfrac{dv}{dt}$

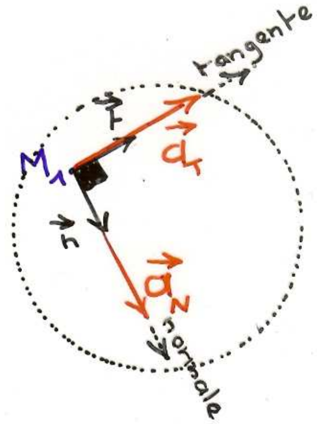


c- accélération normale

$\overrightarrow{a_N}$ $\quad a_N = \dfrac{v^2}{R}$

R : <u>rayon de courbure</u> de la trajectoire au point

d- représentation et valeurs



1) $\overrightarrow{a_T} = \dfrac{dv}{dt}.\vec{t}$

Elle est orientée dans le <u>sens</u> du <u>mouvement</u>, quand <u>v augmente</u>.
Elle est orientée en <u>sens inverse</u> du <u>mouvement</u>, quand <u>v diminue</u>.

Elle est <u>nulle</u> quand <u>v</u> est <u>constante</u> ($\dfrac{dv}{dt} = 0$).

2) $\overrightarrow{a_N} = \dfrac{v^2}{R}.\vec{n}$

Elle est <u>nulle</u> quand le mouvement est <u>rectiligne</u>.
Elle est <u>non nulle</u> dans tous les <u>autres mouvements</u> (*circulaire*,...).

$a = \sqrt{a_T^2 + a_N^2}$ en coordonnées <u>curvilignes</u>

<u>Exercice 1</u> :
Un point mobile M, se déplace dans un plan muni d'un repère cartésien (Ox, Oy).
On a choisi un instant origine.

Les lois horaires du mouvement sont, en unités S.I : $x = \dfrac{t^2}{2} \quad et \quad y = 1 - t^2$.

1) Marquer quelques positions occupées par M pendant l'intervalle de temps [0 s ; 1 s].
(<u>Echelle</u> : 6,4 cm pour 1 m sur Ox et 5 cm pour 1 m sur Oy)
2) a-Déterminer l'équation cartésienne de la trajectoire dans le repère (Ox, Oy).
b- Quelle est la nature de ce mouvement ?
3) a- Déterminer le vecteur vitesse et le vecteur accélération de M, à un instant quelconque.
b- Que peut-on dire du vecteur accélération ?
c- Représenter ces vecteurs sur le graphique, en précisant l'échelle choisie.
4) Déterminer la vitesse et l'accélération de m à la date t = 0,5 s.
5) Quelle est la nature (de façon plus précise) de ce mouvement ?

D- CINEMATIQUE : exemples de mouvements

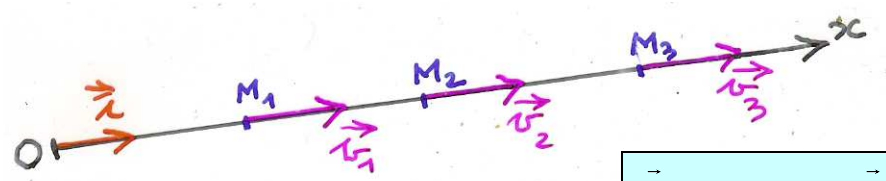
1. Résolution des exercices

Pour la recherche de l'équation horaire du mouvement, l'application des lois va nous conduire aux coordonnées de l'accélération.
On va ensuite devoir remonter jusqu'aux coordonnées du vecteur position.

$$fonction : A.t^2 + B.t + C \underset{primitive}{\overset{dérivée\ première}{\rightleftarrows}} 2A.t + B \underset{primitive}{\overset{dérivée\ seconde}{\rightleftarrows}} 2A$$

(les constantes B et C seront déterminées par les conditions initiales du mouvement)

2. Mouvement rectiligne uniforme



$\vec{v}$ = constante et $\vec{a} = \vec{0}$

$v_1 = v_2 = v_3$

Conditions initiales : t = 0 ; $\overrightarrow{OM}_0 = x_0.\vec{i}$; $\vec{v} = v.\vec{i}$

A l'instant t : $\overrightarrow{OM} = x.\vec{i}$; $\vec{v} = v.\vec{i}$

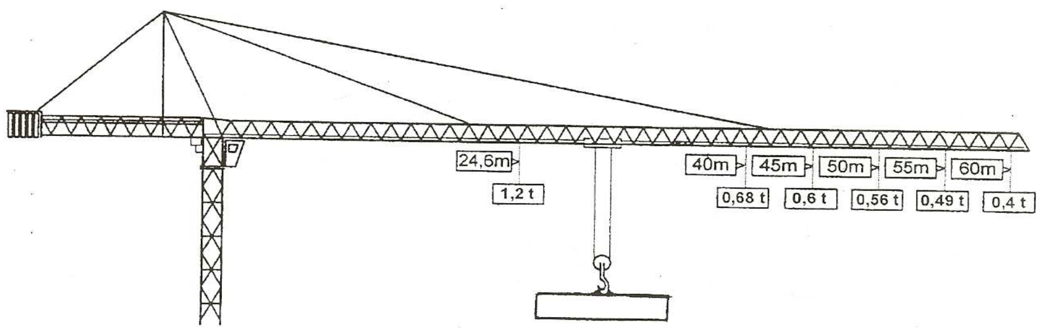
Equation horaire du mouvement : x = f(t)

$$position : \frac{1}{2}A.t^2 + B.t + C \leftarrow vitesse : A.t + B \leftarrow accélération : A$$

$$position : \quad x = v.t + x_0 \leftarrow vitesse : \quad v \leftarrow accélération : 0$$

a = 0
v = constante
$x = v.t + x_0$ (x_0 : position initiale) $x_2 - x_1 = v.(t_2 - t_1)$
x (m) ; v ($m.s^{-1}$) ; a ($m.s^{-2}$)

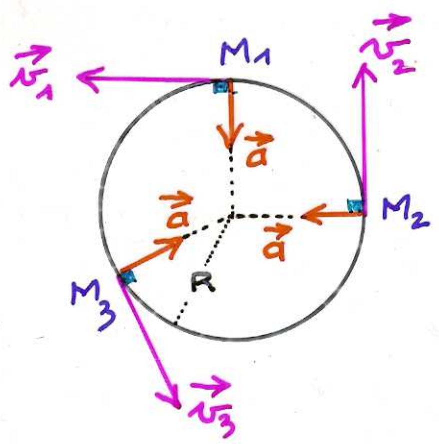
Exercice 2 :



Un entrepreneur de bâtiment a loué une grue pour le levage de panneaux lors d'une construction de MOB.
La position du centre d'inertie G du panneau est repéré sur un axe vertical orienté vers le haut.
La flèche de la grue est située à une hauteur h = 21 m.
Le panneau repose sur le sol.
Au bout de quatre secondes, à une hauteur de 1,6 m, G s'élève avec un mouvement rectiligne uniforme à la vitesse de 0,8 $m.s^{-1}$ pendant 15 s.

1) Ecrire et déterminer les équations horaires du mouvement.
2) Quelle est la hauteur du panneau à la fin de cette phase de montée ?
3) Représenter (échelles au choix) les diagrammes des vitesses v = g(t) et des espaces x = f(t).

3. Mouvement circulaire uniforme



La vitesse $\vec{v}$ varie : $\vec{v_1} \neq \vec{v_2} \neq \vec{v_3}$.
Son intensité reste constante : $v_1 = v_2 = v_3 = v$.

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \neq 0$$

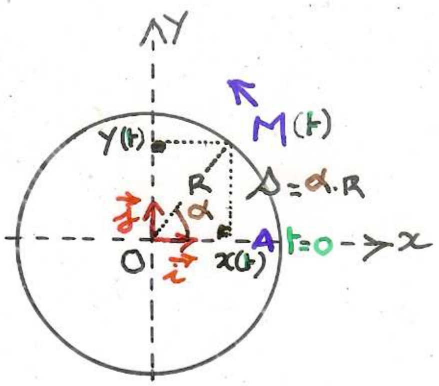
$$a_T = \frac{dv}{dt} = 0 \quad et \quad a_N = a = \frac{v^2}{R}$$

C'est un mouvement <u>accéléré</u> : accélération <u>centripète</u> constante.

C'est un mouvement <u>**périodique**</u> de période $T = \frac{2\pi}{\omega}$ ($f = \frac{1}{T}$)

et de <u>**vitesse angulaire**</u> ω.constante ($\frac{d\alpha}{dt}$ = $\dot{\alpha}$).

(α = ω t ; ω en $rad.s^{-1}$ et α en rad)



Le point M peut être repéré par :

1) ses <u>coordonnées cartésiennes</u> (x,y) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
2) son abscisse curviligne : $s = \overset{\frown}{AM} = \alpha.R$.
3) son abscisse angulaire : $\alpha = \left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM}\right)$.

$$x = R.\cos\alpha \quad et \quad y = R.\sin\alpha$$

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \dot{x} = -\omega.R.\sin\omega t \;\; et \;\; v_y = \frac{dy}{dt} = \dot{y} = \omega.R.\cos\omega t$$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{\omega^2.R^2} = \omega.R$$

$$a_x = \ddot{x} = -\omega^2.R.\cos\omega t \;\; et \;\; a_y = \ddot{y} = -\omega^2.R.\sin\omega t$$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{\omega^4.R^2} = \omega^2.R$$

<u>Equation horaire du mouvement</u> : α = f(t)

$$position : \frac{1}{2}A.t^2 + B.t + C \leftarrow \qquad vitesse : A.t + B \leftarrow \qquad accélération : A$$

$$position\ angulaire : \alpha = \dot{\alpha}.t + \alpha_0 \leftarrow vitesse\ angulaire : \dot{\alpha} \leftarrow accélération\ angulaire : 0 = \ddot{\alpha}$$

Période T (s) ; Fréquence f (Hz) : $f = \frac{1}{T}$

Abscisse angulaire : $\alpha = \omega.t + \alpha_0$ (α_0 : abscisse initiale) $\alpha_2 - \alpha_1 = \omega.(t_2 - t_1)$

ω ($\dot{\alpha}$): vitesse angulaire constante ($rad.s^{-1}$)

α : abscisse angulaire (rad)

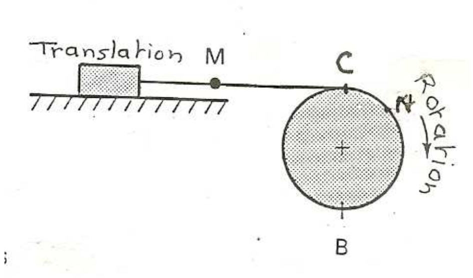
$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi.f$$

Accélération angulaire : $\ddot{\alpha} = 0$

Abscisse curviligne : s = α.R
Vitesse linéaire constante v ($m.s^{-1}$) : v = ω.R

Accélération centripète constante a ($m.s^{-2}$) : $a = \frac{v^2}{R} = \omega^2.R$

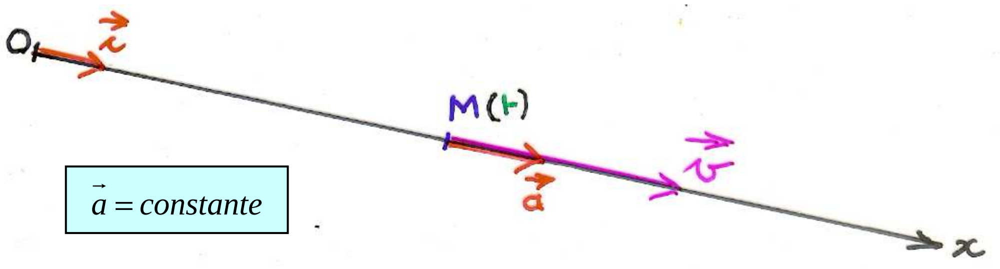
Exercice 3 :



Un moteur actionne un cylindre qu'il fait tourner à la vitesse angulaire constante de 20 tr.min^{-1}.
Sur ce cylindre, de rayon R = 10 cm, s'enroule un câble inextensible, tendu à l'une de ses extrémités par une charge qu'il entraîne.
Ce câble ne glisse pas sur le cylindre.
1) Quelle est la nature du mouvement de M, ainsi que celui de N.
2) Déterminer pour N :la vitesse angulaire en rad.s^{-1}, la vitesse en m.s^{-1} et l'accélération centripète en m.s^{-2}.
3) Déterminer l'accélération et la vitesse de M.

Exercice 4 :
Un point a une trajectoire circulaire de rayon R.
Son vecteur accélération centripète est a = 50 m.s^{-2}.
1) Montrer que le mouvement est uniforme.
2) La période du mouvement est T = 0,4π s, quel est le rayon du cercle trajectoire ?

4. Mouvement rectiligne uniformément varié



a = constante

Conditions initiales : t = 0 ; $\overrightarrow{OM}_0 = x_0.\vec{i}$; $\vec{v}_0 = v_0.\vec{i}$; $\vec{a} = a.\vec{i}$

A l'instant t : $\overrightarrow{OM} = x.\vec{i}$; $\vec{v} = v.\vec{i}$; $\vec{a} = a.\vec{i}$

Equation horaire du mouvement : x = f(t)

$$position : \frac{1}{2}A.t^2 + B.t + C \leftarrow vitesse : A.t + B \leftarrow accélération : A$$

$$x = \frac{1}{2}a.t^2 + v_0.t + x_0 \leftarrow \qquad v = a.t + v_0 \leftarrow \qquad a$$

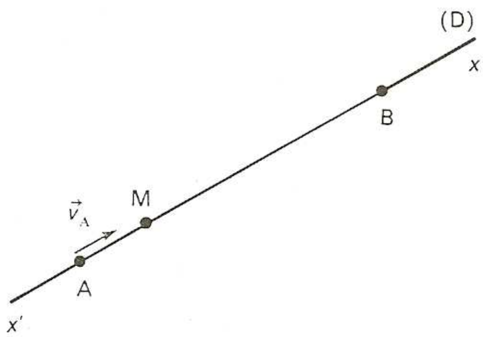
a = constante
v = a.t + v_0
x = $\frac{1}{2}$ a.t^2+ v_0.t + x_0 (x_0 : position initiale et v_0 : vitesse initiale)
mouvement accéléré : $\vec{a}$ *et* $\vec{v}$ sont de même sens
mouvement retardé : $\vec{a}$ *et* $\vec{v}$ sont de sens contraires
$v_2^2 - v_1^2 = 2a.(x_2 - x_1)^*$ et $v_2 - v_1 = a.(t_2 - t_1)$

$$*t = \frac{v - v_0}{a}$$

$$x - x_0 = \frac{1}{2}a\left(\frac{v-v_0}{a}\right)^2 + v_0\left(\frac{v-v_0}{a}\right) \; ; \; x - x_0 = \frac{1}{2}\frac{(v - v_0)^2}{a} + v_0\left(\frac{v-v_0}{a}\right)$$

$$2a.(x - x_0) = (v - v_0)^2 + 2v_0.(v - v_0) = v^2 - 2v.v_0 + v_0^2 + 2v_0.v - 2v_0^2 = v^2 - v_0^2$$

Exercice 5 :



Un solide glisse sur un banc à coussin d'air incliné par rapport à l'horizontale.
On s'intéresse au mouvement d'un point M de ce solide.
Ce point reste sur la droite (D) orientée de x' vers x.
De A, on lance le point M à la vitesse $\overrightarrow{v_A}$.
$\overrightarrow{v_A}$ est un vecteur de même direction et sens que $\overrightarrow{x'x}$, de module v_A = 0,8 m.s^{-1}.
Le mouvement de M est uniformément varié.
1) Calculer l'accélération de M, sachant que le mobile rebrousse chemin en B, situé à la distance 1,6 m.
2) Quel est le temps mis pour aller de A vers B ?
3) A quel endroit le mobile se trouve-t-il cinq secondes après le départ de A ?

Exercice 6 :
Une locomotive, initialement immobile, démarre sur une voie rectiligne avec une accélération constante a = 1 m.s^{-2}.
Lorsque sa vitesse est 108 km.h^{-1}, elle garde cette vitesse pendant 20 s.
1) Quelle distance a-t-elle parcourue au total ?
2) Tracer le diagramme des espaces du mouvement, c'est-à-dire la représentation graphique de la loi horaire.
Alors que la locomotive avance à la vitesse de 108 km.h^{-1}, le mécanicien actionne le frein.
La décélération est constante et vaut 4 m.s^{-2}.
La locomotive parcourt 112,5 m en ligne droite.
3) Calculer la durée de ce freinage et la vitesse finale de la locomotive.

5. Mouvement circulaire uniformément varié

- accélération angulaire : $\ddot{\alpha}$ (rad.s^{-2})
- vitesse angulaire : $\dot{\alpha}$ (ω) (rad.s^{-1})
- abscisse angulaire : α (rad)
- abscisse curviligne : s (m)
- vitesse linéaire : v (m.s^{-1})
- accélérations linéaires tangentielle et normale : a_T et a_N (m.s^{-2})
- rayon du cercle trajectoire : R (m)

Equation horaire du mouvement : α = f(t)

$$position : \frac{1}{2}A.t^2 + B.t + C \leftarrow vitesse : A.t + B \leftarrow accélération : A$$

$$\ddot{\alpha} = \frac{d^2\alpha}{dt^2}$$

$$\alpha = \frac{1}{2}\ddot{\alpha}.t^2 + \dot{\alpha}_0.t + \alpha_0 \leftarrow \qquad \dot{\alpha} = \ddot{\alpha}.t + \dot{\alpha}_0 \leftarrow \qquad \ddot{\alpha}$$

$\ddot{\alpha}$ = constante

$\dot{\alpha} = \ddot{\alpha}.t + \dot{\alpha}_0$

$\alpha = \frac{1}{2}\ddot{\alpha}.t^2 + \dot{\alpha}_0.t + \alpha_0$ (α_0 : abscisse angulaire initiale et $\dot{\alpha}_0$: vitesse angulaire initiale)

$\dot{\alpha}_2^2 - \dot{\alpha}_1^2 = 2\ddot{\alpha}.(\alpha_2 - \alpha_1)^*$ et $\dot{\alpha}_2 - \dot{\alpha}_1 = \ddot{\alpha}.(t_2 - t_1)$

$s = \alpha.R$

$v = \dot{\alpha}.R$ = ω.R

$a_N = \omega^2.R = \frac{v^2}{R}$ et $a_T = \ddot{\alpha}.R$

Exercice 7 :

La tête de marteau décrit, dans un plan vertical, un quart de cercle de centre O et de rayon R, pour venir frapper le clou (R =50,0 cm).

La position initiale du centre de masse G du marteau est à la verticale du point O.

A l'instant t = 0, le marteau est dans la position de la figure et sa vitesse est nulle.

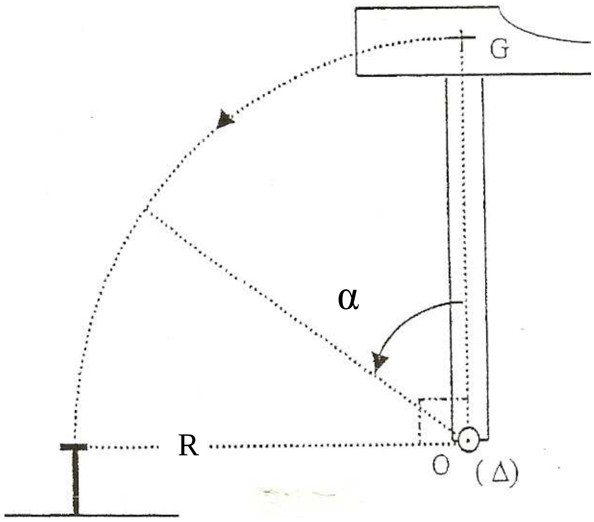
L'accélération angulaire constante est $\ddot{\alpha}$ = 200 rad.s^{-2}.

1) Ecrire l'équation horaire angulaire du mouvement, α = f(t).

2) Calculer la durée jusqu'à l'impact avec le clou.

3) Calculer la vitesse angulaire à la fin du mouvement lorsque le marteau frappe le clou.

4) Calculer la vitesse linéaire du centre de masse au moment de l'impact, ainsi que ses accélérations normales et tangentielles.



6. Mouvement rectiligne sinusoïdal (harmonique)

$x = x_m.\cos(\omega t - \varphi)$

φ : phase à l'origine, t = 0, (rad)

ω : pulsation (rad.s^{-1})

ωt - φ : phase à l'instant t (rad)

x_m : amplitude (m)

x : élongation (m)

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi.f$$

f: fréquence (Hz), nombre de périodes par seconde

T : période (s)

$$v = \frac{dx}{dt} = \dot{x} = -\omega.x_m.\sin(\omega.t - \varphi))$$

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x} = -\omega^2.x_m.\cos(\omega.t - \varphi) = -\omega^2.x$$

$x = x_m.\cos(\omega.t - \varphi)$

$v = -\omega.\ x_m.\sin(\omega.t - \varphi)$

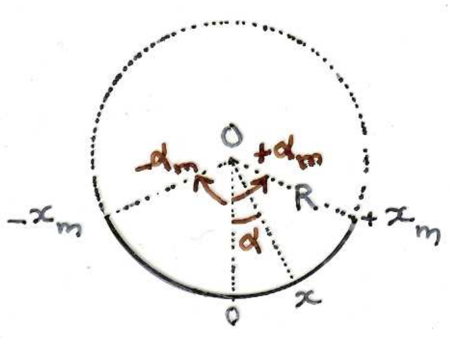
$a = -\omega^2.x$

Equation différentielle : $\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2.x = 0$ $\qquad \omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi.f$

La solution de l'équation différentielle est : $x = x_m.\cos(\omega.t - \varphi)$

Exercice 8 :
Un point matériel, M, animé d'un mouvement rectiligne sinusoïdal, décrit un segment AB.
La fréquence du mouvement est f = 20 Hz.
A la date t = 0 ; le mobile passe par le milieu de AB, en se déplaçant de A vers B à la vitesse 0,5 $m.s^{-1}$.
1) Déterminer la loi horaire du mouvement et la longueur du segment AB.
2) Quelle est l'accélération algébrique du mobile, lorsqu'il rebrousse chemin en A ?

7. Mouvement circulaire sinusoïdal



$$\alpha = \frac{\overset{\frown}{x}}{R} \text{ (rad)}$$

$$\alpha_m = \frac{\overset{\frown}{x_m}}{R}$$

(ω_0 : pulsation)

Elongation linéaire

$x = x_m.\cos(\omega_0.t-\varphi) = \alpha.R$

Vitesse linéaire

$$v = \frac{dx}{dt} = -\omega_0.\ x_m.\sin(\omega_0\ t-\varphi)$$

$v = \omega.R = = -\omega_0.R.\ \alpha_m.\sin(\omega_0\ t-\varphi)$

Accélération

$$a_T = \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega_0^2.x_m.\cos(\omega_0.t-\varphi) = -\omega_0^2.x$$

$$a_T = -\omega_0^2.R.\alpha_m.\cos(\omega_0.t-\varphi) = -\ddot{\alpha}.R$$

$$a_N = \frac{v^2}{R} = \omega_0^2.R$$

Elongation angulaire

$$\alpha = \alpha_m.\cos(\omega_0.t-\varphi)$$

Vitesse angulaire

$$\dot{\alpha} = \frac{d\alpha}{dt} = \omega = -\omega_0.\alpha_m.\sin(\omega_0.t-\varphi)$$

Accélération angulaire

$$\ddot{\alpha} = \frac{d^2\alpha}{dt^2} = -\omega_0^2.\alpha_m.\cos(\omega_0.t-\varphi) = -\omega_0^2.\alpha$$

Equations différentielles

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2.x = 0$$

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \omega_0^2.\alpha = 0$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = 2\pi.f_0$$

Les solutions de ces équations différentielles sont : $x = x_m.\cos(\omega_0.t-\varphi)$ et $\alpha = \alpha_m.\cos(\omega_0.t-\varphi)$

E- DYNAMIQUE : lois et principes

1. Principe de l'inertie

Dans un référentiel galiléen, le centre d'inertie (a) d'un solide isolé (b) ou pseudo-isolé (c) a un mouvement rectiligne uniforme (d) ou est immobile (e).

a- Point du solide, G. Il est souvent confondu avec le centre de gravité (centre de masse).

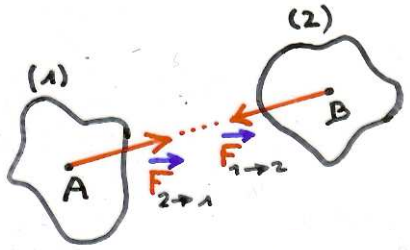
b- Le solide n'est soumis à aucune force extérieure.

c- Le solide est soumis à des forces extérieures telle que $\sum \vec{F}_{extérieures} = \vec{0}$.

d- $\vec{v}_G = \overrightarrow{constante}$.

e- $\vec{v}_G = \vec{0}$.

2. Principe de l'action et de la réaction

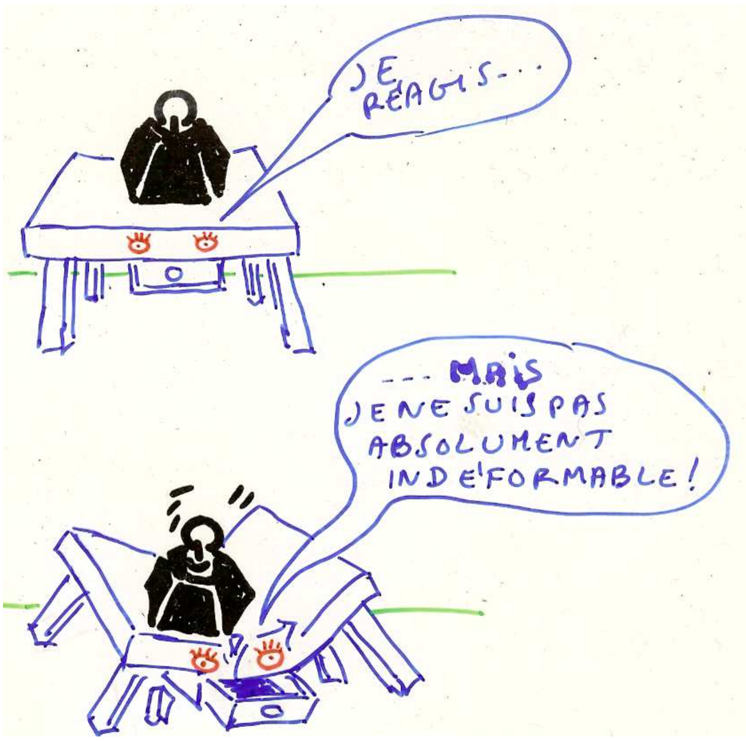


Lorsqu'un corps (1) exerce sur un corps (2) une action mécanique $\vec{F}_{1\to2}$ localisée en B, le corps (2) exerce sur le corps (1) une action mécanique $\vec{F}_{2\to1}$ localisée en A.
Ces deux forces sont **opposées**.

$$\boxed{\vec{F}_{2\to1} = -\vec{F}_{1\to2}}$$

Application : Réaction d'un support

$\vec{R} = -\vec{P}$



3. Relations fondamentales de la dynamique

3$_A$. Forces

Dans un référentiel galiléen, la somme des forces extérieures appliquées à un solide est égale au produit de la masse du solide par l'accélération de son centre d'inertie.

$$\sum \vec{F}_{extérieures} = m.\vec{a}_G$$

Solide ponctuel : $\sum \vec{F}_{extérieures} = m.\vec{a}$

Cette relation ne permet de prévoir que le mouvement du centre d'inertie G, sauf pour le mouvement de translation.

3$_B$. Moments

Pour un solide en rotation autour d'un axe fixe Δ

Dans un référentiel galiléen, la somme algébrique des moments des forces extérieures par rapport à l'axe de rotation Δ est égale au produit du moment d'inertie du solide par son accélération angulaire $\ddot{\alpha}$.

$$\sum M_{\vec{F}_{extérieures}/\Delta} = J_\Delta.\ddot{\alpha}$$

3$_C$. unités

m (kg); a (m.s^{-2}); F (N); M (N.m); J (kg.m^2); $\ddot{\alpha} = \dfrac{d^2\alpha}{dt^2}$ (rad.s^{-2})

4. Théorème de l'énergie cinétique

Dans un référentiel galiléen, la **variation** de l'**énergie cinétique** entre l'état final et l'état initial, est égale à la somme des travaux des forces et des travaux des couples extérieurs au système.

$$\Delta E_C = E_{C_{t_2}} - E_{C_{t_1}} = \sum W^{\vec{F}}_{t_1 \to t_2} + \sum W_C$$

(théorème utilisé, surtout, pour calculer les vitesses)

$W^{\vec{F}}_{A\to B} = \vec{F}.\vec{AB}$ pour la translation et pour la rotation $W^{\vec{F}_{extérieure}}_{\alpha} = M_{\vec{F}/\Delta}.\alpha$

et pour un couple

$$W_C = M_C.\alpha$$

5. Résolution des exercices

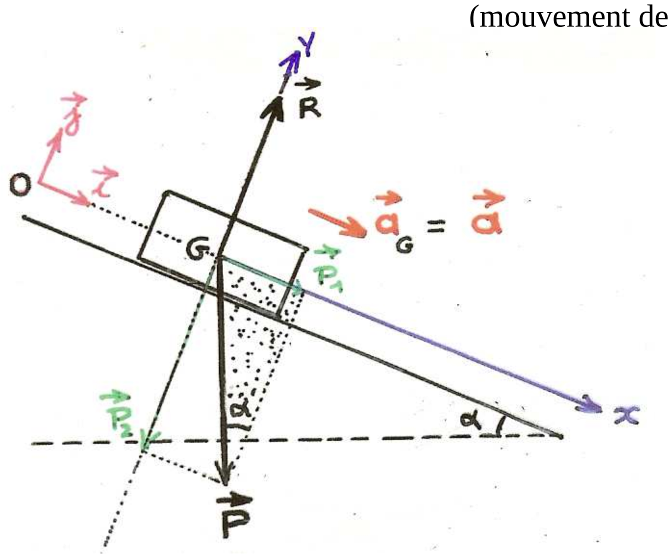
1. Définir le système en translation ou en rotation.
2. Faire le bilan des forces extérieures appliquées au système.
3. Faire un schéma.
4. Préciser le référentiel galiléen dans lequel on travaille.
Faire le choix d'un repère d'espace et le choix d'un repère de temps.
5. Appliquer :
a- la **relation fondamentale**, en la **projetant** sur des axes (Ox, Oy,...)
(ou) b- le **théorème** de l'**énergie cinétique**.

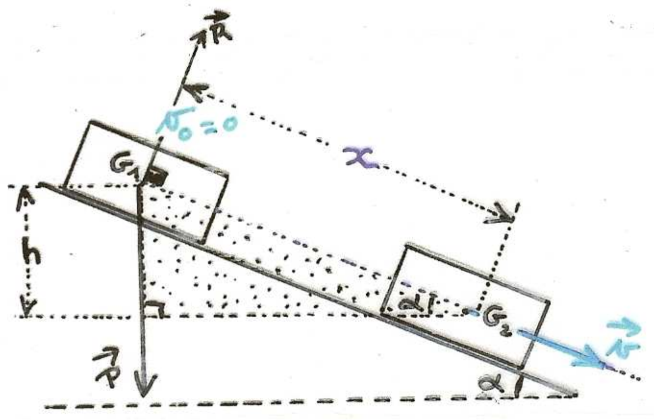
F- DYNAMIQUE : exemples de mouvements

1. Mouvement d'un solide sur un plan

1_A. glissement sans frottement

(mouvement de translation)





Relation fondamentale

$$\sum \vec{F} = \vec{P} + \vec{R} = m.\vec{a}$$

Projetons cette relation :

- sur l'axe $(O,\vec{i})$

$P_1 + 0 = m.a$
$P.\sin\alpha = m.a$
$m.g.\sin\alpha = m.a$
$a = g.\sin\alpha$

- sur l'axe $(O,\vec{j})$

$-P_2 + R = 0$
$R = P_2 = P.\cos\alpha$

Théorème de l'énergie cinétique

$$\Delta E_C = E_{C2} - E_{C1} = \frac{1}{2}m.v^2 - 0$$

$$\sum W_{\vec{F}_{extérieures}} = W_{\vec{P}} + W_{\vec{R}} = P.h + 0 = m.g.x.\sin\alpha$$

$$\frac{1}{2}m.v^2 = m.g.x.\sin\alpha$$

$$v^2 = 2g.x.\sin\alpha$$

1_B. glissement avec frottement

(mouvement de translation)

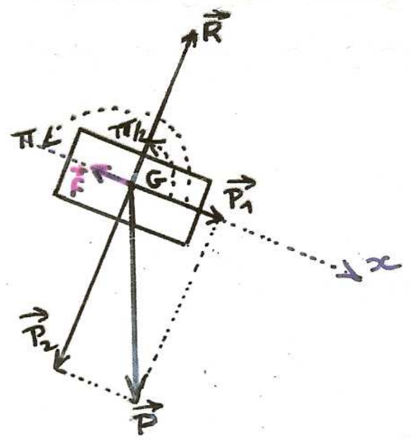
Le plan est rugueux ($\vec{f}$: force de frottement)

1. $\sum \vec{F} = \vec{P} + \vec{R} + \vec{f} = m.\vec{a}$

Projection sur l'axe $(O,\vec{j})$

$P_1 + 0 - f = m.a$
$m.g.\sin\alpha - f = m.a$

$$a = g.\sin\alpha - \frac{f}{m}$$



Mouvement uniformément varié

2.

$$\Delta E_C = E_{C2} - E_{C1} = \frac{1}{2}m.v^2 - 0$$

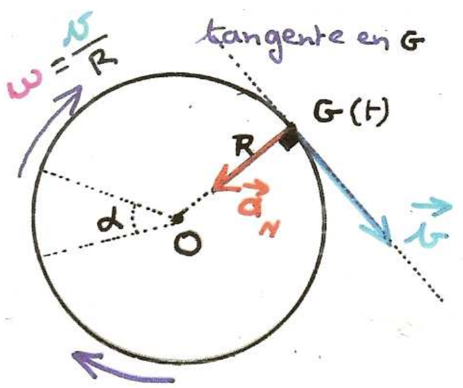
$$\sum W_{\vec{F}_{ext}} = W_{\vec{P}} + W_{\vec{R}} + W_{\vec{f}} = W_{\vec{P}} + 0 - f.x$$

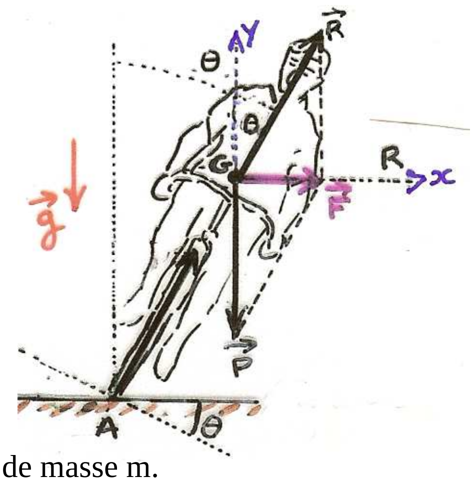
$$\frac{1}{2}m.v^2 = m.g.x.\sin\alpha - f.x$$

$$\boxed{v^2 = 2.\left(g.\sin\alpha - \frac{f}{m}\right).x}$$

1$_C$. mouvement circulaire uniforme

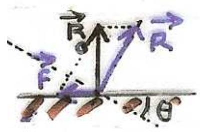
(cycliste, voiture...dans un virage)





R : rayon de courbure.
G : centre de gravité du système (cycliste + vélo) de masse m.
L'axe Gx est dirigé vers le centre O de la trajectoire.

Pour prendre le virage, le cycliste doit incliner son plan de symétrie d'un angle θ.
Sur un <u>sol lisse</u>, la réaction $\vec{R}_0$ serait normale au sol, le cycliste déraperait sous l'action de $\vec{f}$.
La piste doit être inclinée, avec $\vec{R}$: réaction inclinée exercée par le sol sur les pneus perpendiculaire au sol.



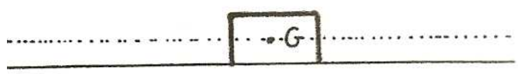
Sur un <u>sol rugueux</u>, θ < φ, φ étant l'angle de frottement.

$\vec{F}$: force centripète, d'intensité constante : $F = m.a = m.\frac{v^2}{R} = m.\omega^2.R$

<u>Calcul de θ</u> :
Loi fondamentale : $\sum \vec{F} = \vec{P} + \vec{R} = m.\vec{a}$

- projection sur Ox : 0 + R.sinθ = m.a
- projection sur Oy : -P + R.cosθ = 0
- R.sinθ = m.a et R.cosθ = P = m.g $\boxed{\tan\theta = \frac{a}{g} = \frac{v^2}{R.g}}$

<u>Exercice 1 :</u> (g = 9,8 m.s^{-2})



Une automobile a une masse totale de 1 t.
La résistance, opposée à l'avancement due aux frottements solides et à la résistance de l'air, équivaut à une force d'intensité égale à 500 N.
La voiture roule en ligne droite sur une route horizontale à vitesse constante.
(*On admet que la force de frottement est constante et est toujours présente quand le véhicule est en mouvement)*

1) Quelle est l'intensité de la force motrice $\vec{F}$?

L'automobile roulant à 72 km.h^{-1} sur une route rectiligne horizontale, le conducteur freine pour l'arrêter.

La voiture s’arrête sur 100 m.

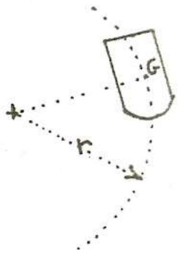
2) Déterminer l’intensité de la force de freinage supposée constante.

(*quand on freine, on admet que le moteur est débrayé. En réalité, le chauffeur rétrograde et le moteur par « frein moteur » participe au freinage)*

Après être repartie, l’automobile prend un virage de rayon de courbure R (r) = 100 m à la vitesse constante v = 72 $km.h^{-1}$.

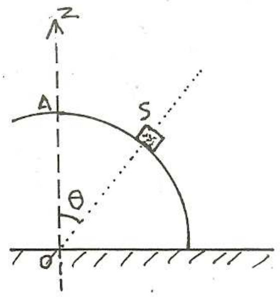
Ce virage est relevé d’un angle θ par rapport à l’horizontale, si bien que la réaction du sol est normale au sol.

3) Déterminer θ.



2. Mouvement d’un solide sur un cylindre

Exercice 2 :



Un petit solide S de masse m, part, pratiquement sans vitesse du sommet A d’un demi-cylindre de rayon r et de centre O, collé sur un plan horizontal.

Les frottements sont négligeables.

1) Exprimer les vitesses de S, en fonction de r, de l’intensité de la pesanteur g et de θ = $\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OS}\right)$.

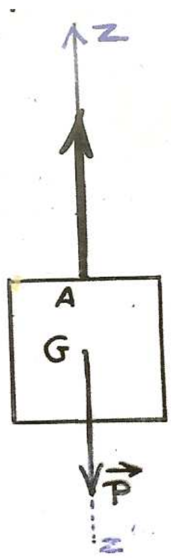
2) Donner une expression de l’intensité de la réaction R, en fonction de θ, r, g et m.

Lorsque S dépasse une position S_0, S décolle du cylindre.

3) déterminer cette position.

4) Avec quelle intensité de force , F, le solide appuie-t-il sur le demi-cylindre avant d’atteindre S_0 ?

3. Tension d’un cable



La tension $\vec{T}$ c’est la force qu’il faudrait appliquer, *si on coupe le câble*, pour que le solide conserve le mouvement qu’il avait avant la coupure.

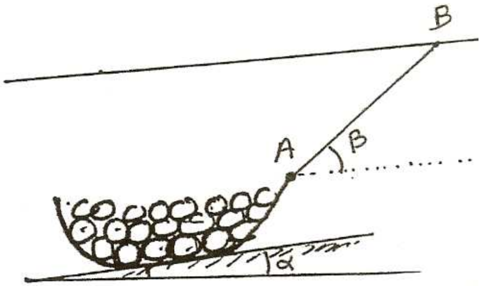
$$\sum \vec{F} = \vec{P} + \vec{R} = m.\vec{a}$$

Projection sur z'z : -P + T = m.a

T = m.a + m.g = m.(a+g)

- a > 0 : mouvement rectiligne uniformément accéléré.
- a < 0 : mouvement rectiligne uniformément décéléré.
- a = 0 : mouvement rectiligne uniforme.

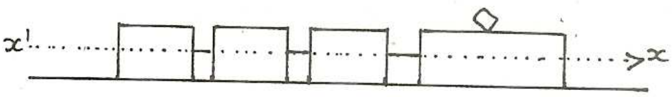
Exercice 3 :



Un traineau de masse totale m = 200 kg monte une côte de pente 10 %.
Les forces de frottement représentent 0,2 N par kilogramme en mouvement.
Ce traineau est tiré par un fil AB relié en B au câble d'un remonte-pente.
Tout au long du mouvement, AB fait un angle β = 30° avec la pente.
Partant à vitesse nulle, le traineau d'un mouvement uniformément varié, arrive à la vitesse v = 5 m. s^{-1} en 25 m.
Quelle est la tension du fil AB au cours de ce mouvement ? (g = 10 m.s^{-2})

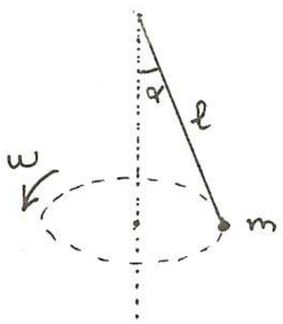
(si on appelle α l'angle de la côte avec l'horizontale, la pente de cette côte est tan α)

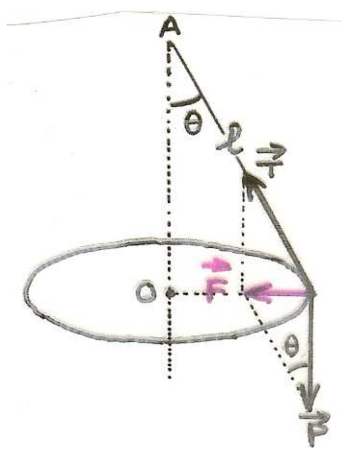
Exercice 4 :



Une locomotive de masse M = 100 t remorque trois wagons, chacun a une masse m égale à 20 t.
Le déplacement s'effectue sur une voie rectiligne et horizontale.
L'intensité de la force motrice développée par les moteurs de la locomotive est de $1{,}6.10^5$ N.
Les résistances dues aux frottements sont évaluées à 500 N par tonne en mouvement.
1) Quelle est la nature du mouvement du train ?
2) Déterminer la tension T subie par l'attelage qui relie la locomotive au premier wagon.
Le premier et le deuxième wagon sont reliés par un dynamomètre.
3) Quelle valeur lit-on sur le dynamomètre ?
Le deuxième et le dernier wagons sont reliés par un ressort, de longueur à vide ℓ = 30 cm, de constante de raideur k = 2.10^5 N.m^{-1}.
4) Quelle est la longueur ℓ de ce ressort ?

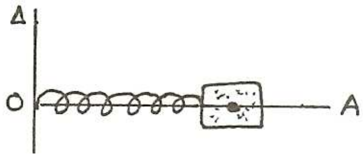
Exercice 5 :





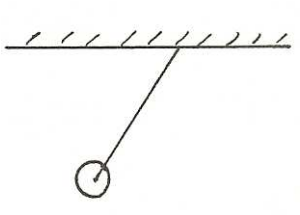
Une masse ponctuelle, m = 50 g, est entraînée dans un mouvement circulaire uniforme, par un fil de longueur ℓ = 10 cm qui décrit, de ce fait, un cône d'axe vertical, de demi-angle au sommet α (θ).
La vitesse angulaire est égale à 1,72 tr.min^{-1}.
Déterminer α et la tension du fil.

Exercice 6 :



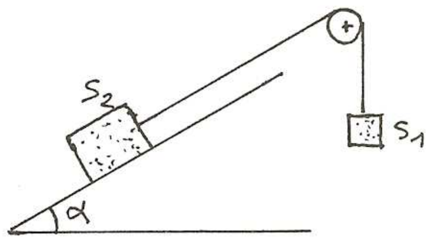
Sur un axe vertical Δ, en O est soudée une tige horizontale OA.
Cette tige tourne à la vitesse angulaire constante ω autour de Δ.
En O est fixée l'extrémité d'un ressort enfilé sur OA.
L'autre extrémité retient un solide S, de masse m et de dimensions négligeables, qui peut glisser sans frottements le long de OA.
S se stabilise par rapport à OA, le ressort est alors allongé de b.
Evaluer b en fonction de m, ℓ_0 (*longueur à vide du ressort)*, k (*constante de raideur du ressort)* et ω.

Exercice 7 :



Au plafond d'un wagon est accroché une petite sphère de masse m = 100 g, par l'intermédiaire d'un fil de masse négligeable.
Le wagon, en mouvement rectiligne horizontal, a une accélération constante a = 2 $m.s^{-2}$.
Déterminer l'inclinaison α du pendule par rapport à la verticale, ainsi que la tension du fil.

Exercice 8 :



Deux solides, S_1 et S_2, de masses m_1 et m_2, sont reliés par un fil inextensible de masse négligeable passant sur une poulie sans frottement de masse négligeable.
S_2 peut glisser sans frottement le long d'une ligne de plus grande pente d'un plan incliné d'un angle α = 30° par rapport à l'horizontale.
Le brin de fil fixé à S_2 est parallèle à la ligne de plus grande pente.
S_1 abandonné sans vitesse prend un mouvement vertical.
1) Calculer l'accélération.
2) Quel est le sens et quelle la nature de ce mouvement ?

(m_1 = 200 g ; m_2 = 300 g)

4. Mouvement et champ de pesanteur

4_A. poids

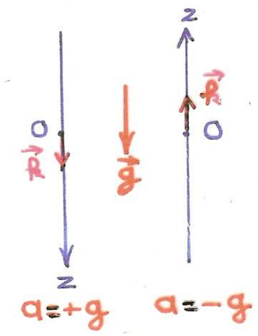
Au cours de son évolution le solide n'est soumis qu'à la seule action de son **poids**, appliqué en G, son centre de gravité.

$$\vec{P} = m.\vec{g} \quad \vec{g} : \textit{accélération de la pesanteur}$$

(les forces de frottement et la poussée d'Archimède sont négligeables)

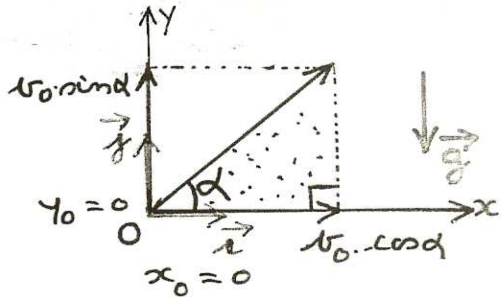
4$_B$. mouvement suivant la verticale

Le solide possède une accélération $\vec{a}$.
Mouvement rectiligne uniforme.



4$_C$. mouvement suivant une parabole

Mouvement plan.
A t = 0, on lance le solide d'un point O (*origine des coordonnées)* avec une vitesse $\vec{v}_0$.



a- <u>Mouvement suivant </u>Ox :
mouvement uniforme, $a_x = 0$

$$v_x = v_0.\cos\alpha \text{ et } x = v_x.t = v_0.\cos\alpha.t = x$$

$$\left(t = \frac{x}{v_0.\cos\alpha} \right)$$

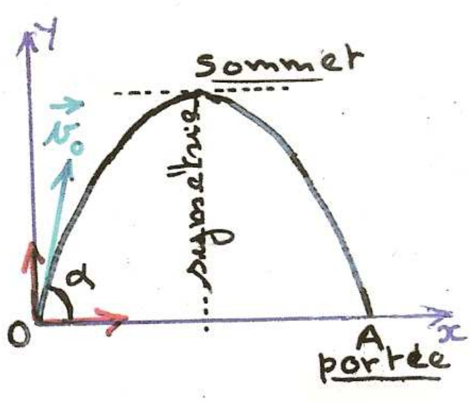
b- <u>Mouvement suivant Oy </u>:
mouvement uniformément varié, $a_y = -g$
$v_y = -g.t+v_0.\sin\alpha$

$$\left(y = \frac{1}{2} a_y.t^2 + v_y.t + y_0 \right)$$

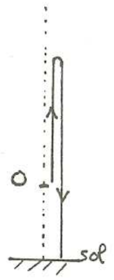
$$y = -\frac{1}{2} g.t^2 + v_0.\sin\alpha.t + 0 = -\frac{1}{2} g.\left(\frac{x}{v_0.\cos\alpha} \right)^2 + v_0.\sin\alpha.\frac{x}{v_0.\cos\alpha}$$

$$y = -\frac{g}{2v_0^2.\cos^2\alpha}.x^2 + \tan\alpha$$ équation d'une <u>parabole.</u>

<u>Portée </u>: y = 0 ; $v_A = v_0$
$\Delta E_C = W_{\vec{P}} = E_{CA} - E_{CO} = 0$



Exercice 9 :



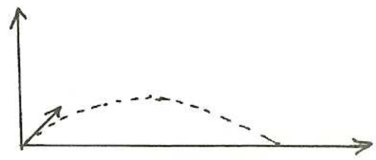
D'un point O situé à 8 m au-dessus du sol, on lance verticalement à la date t = 0, une bille vers le haut avec une vitesse initiale v_0 = 10 $m.s^{-1}$.

1) A quelle hauteur au-dessus de O la pierre monte-t-elle ?
2) Quelle est la durée mise par la bille pour aller de O au sol ?

Exercice 10 :

A la date t = 0, d'un point O, on lance verticalement vers le haut, une balle à la vitesse 8 $m.s^{-1}$.
Une seconde plus tard, du même point O, on lance toujours verticalement, vers le haut, une deuxième balle à la vitesse 6 $m.s^{-1}$.
On néglige les dimensions de la balle.
Préciser où et quand elles se rencontrent.

••Exercice 11 :



Un dispositif permet de lancer une bille à la vitesse v_0 = 16 $m.s^{-1}$.
La bille part d'un point O, vers le haut, suivant une direction faisant l'angle α avec la verticale.

1) Déterminer les lois horaires du mouvement.
2) Quelle est l'équation de la trajectoire ?
3) a- Pendant combien de temps la bille s'élève-t-elle avant de descendre ?
   b- Quelle est sa vitesse à la fin de cette phase ascendante ?
   (α = 50°)
4) Quelle est l'altitude maximale atteinte par la bille, comptée à partir de son point de départ O ?

La bille retombe sur l'axe Ox en P.

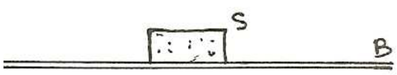
5) a- Déterminer la distance OP.
   b- Pour quelle valeur de α, OP est-elle maximale ?

Soit Q un point de l'axe Ox d'abscisse x_0 = 10 m.

6) Montrer qu'il y a deux angles de tir α_1 et α_2 permettant d'atteindre Q.

$$\left(\frac{1}{\sin^2\alpha} = \frac{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} = 1 + \cot g^2\alpha\right)$$

••Exercice 12 :



Un solide S, de petite dimension, repose sur une plaque plane B en bois.
L'action de la plaque sur le solide S est une force $\vec{R}$ qui peut s'incliner au maximum de l'angle α = 30° (angle de frottement) par rapport à la plaque.
La plaque B horizontale est en translation rectiligne horizontale accélérée, d'accélération $\vec{a}$ par rapport à la terre.

1) Quelle valeur maximale ne doit pas dépasser a pour que S reste en équilibre sur la plaque ?

La plaque B glisse sur une table à coussin d'air inclinée de β par rapport à l'horizontale.
Les frottements de la plaque contre l'air sont négligeables.
Le solide repose toujours sur la plaque B.
Soit $\vec{a}$ l'accélération du solide (B, S).

2) a- Montrer que $\vec{a} - \vec{g}$ est un vecteur perpendiculaire à la table, donc à la plaque, en raisonnant dans le repère du laboratoire.

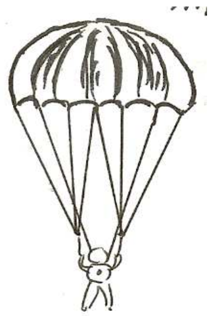
b- En étudiant l'équilibre du solide S dans un repère lié à B, en déduire que l'action $\vec{R}$ de la plaque B sur S est perpendiculaire à la plaque.

La plaque B, horizontale, tourne à la vitesse constante 70 $tr.min^{-1}$ autour d'un axe Δ, fixe par rapport à la terre.
Le solide S repose sur la plaque, il est situé à la distance d = 10 cm de l'axe Δ.

3) Montrer qu'il reste en équilibre sur S.

Exercices divers 13 :

1.

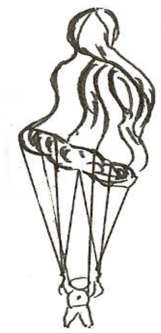


Le parachutiste de masse M = 80 kg porte un équipement de masse m = 20 kg.
Il saute d'un hélicoptère, avec une vitesse initiale pratiquement nulle, le plancher étant à la hauteur H = 300 m au-dessus du sol.

a- Il descend verticalement avec une vitesse constante $v_1 = 7\ m.s^{-1}$.
Calculer :

a_1 la valeur R de l'intensité de la force de résistance $\vec{R}$ de l'air s'exerçant alors sur le parachute et le parachutiste au cours de la chute.

a_2 même question si avec un équipement différent mais de même masse, la vitesse de chute est $v_2 = 7\ m.s^{-1}$.



b- La résistance de l'air est constante et égale aux six dixièmes de la valeur du poids.
On suppose que le parachute se met en torche et n'effectue que partiellement son office.
La valeur de la R prend maintenant une valeur constante R = 0,6 P.

b_1 déterminer la nature du mouvement du centre d'inertie du système parachutiste-équipement.

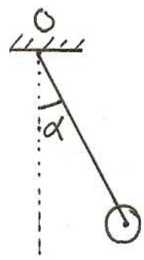
b_2 Au bout de combien de temps, après le départ, le parachutiste arrivera-t-il au sol ? Avec quelle vitesse ?

2.

Le pendule est constitué d'une bille métallique de masse m, de dimensions négligeables, attachée à l'extrémité d'un fil de longueur ℓ = 1 m et de masse négligeable.
L'autre extrémité du fil est fixée en un point O.
On écarte le pendule, fil tendu, d'un angle $\alpha_0 = 60°$, et on le lâche.

a- déterminer la valeur de la vitesse v de la bille quand le pendule passe par sa position d'équilibre verticale de O.

b- même question (v') quand l'abscisse angulaire est $\alpha' = 30°$.



3.

Un corps tombe vers le bas sans vitesse initiale d'une hauteur de 1000 m.
On néglige la résistance de l'air.

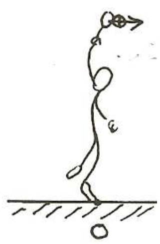
a- Combien de temps dure la chute ?
- A quelle vitesse arrivera-t-il au sol ?

b- Même question...mais avec une vitesse initiale de $3\ m.s^{-1}$.

•4.

Le joueur de tennis est au service.
On néglige la résistance de l'air.
On considère la balle comme un objet ponctuel.
Pour effectuer un service :
- Le joueur lance la balle verticalement vers le haut à partir d'un point situé à 1,6 m au-dessus du sol.
- La balle s'élève et atteint son altitude maximale B à 0,4 m au-dessus du point de lancement.

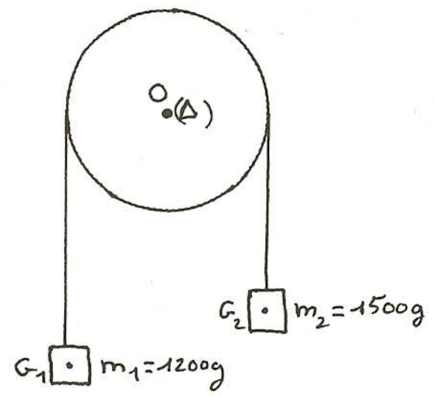
a- Etudier le mouvement vertical de la balle sur un axe dirigé vers le haut et dont l'origine O est au-dessus du sol.
- Avec quelle vitesse v_0 le joueur a-t-il lancé la balle ?
- Quel temps la balle met-elle pour aller du point de lancement à l'altitude maximale ?



Le joueur frappe la balle avec sa raquette quand elle atteint son altitude maximale.
La balle part alors avec un vecteur vitesse $\vec{v}_1$ horizontal.
Le joueur souhaite que la balle passe 10 cm au-dessus du filet situé à 12 m du point de service et dont la hauteur est de 90 cm.

b- Etudier le mouvement de la balle, le point est choisi comme origine des temps).
- Quelle est la nature de la trajectoire ?
- Quelle doit être la valeur de v_1 pour que le service soit réussi comme le souhaite le joueur ?
- Quelle doit être la valeur de v_2 au passage de la balle au-dessus du filet ?
- A quelle distance de O la balle frappe-t-elle le sol ? – avec quelle valeur v_3?
- Evaluer le temps approximatif dont l'adversaire dispose pour se préparer à renvoyer la balle de service.

5. Machine d'Atwood

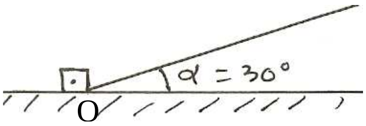


Poulie de masse négligeable, mobile autour d'un axe Δ perpendiculaire au plan de la figure en O.

a- Démontrer que les deux corps solides de masses m_1 et m_2 sont animés de mouvements de translation uniformément accélérées dont on calculera l'intensité de l'accélération.

b- Calculer l'intensité de la tension du fil.

6.
L'objet de masse m = 2,5 kg, sans vitesse initiale, glisse... :



a...sans frottement sur un plan incliné, d'une hauteur h = 3 m.
- Déterminer l'équation de la trajectoire du centre de masse G du solide.
- Quelle est sa vitesse en O ?
- Au bout de combien de temps le solide atteint O ?

b...en réalité le mouvement est accéléré avec $a = 2{,}3\ m.s^{-2}$.
- Calculer l'intensité de la résultante des forces de frottement.

7.
Sur un plan incliné (α = 30°), un solide de masse m = 300 g arrive en O avec une vitesse de $2{,}4\ m.s^{-1}$.

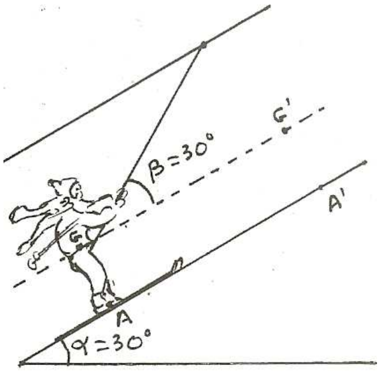
a- A quelle hauteur maximale va-t-il monter si on néglige les forces de frottements.

En réalité, la hauteur maximale est de 15 cm.

b- En déduire l'intensité de la force de frottement résultante supposée constante.

5. Mouvement : travail, énergie et puissance

Exercice 14 :



Un skieur de masse m = 80,0 kg est tiré par un remonte-pente.

Son centre d'inertie G passe de G en G' à la vitesse constante $\vec{v}$ (v = 5,0 m.s^{-1}).

1) Quel est la nature du mouvement du skieur ?

Calculer son énergie cinétique.

La pente fait un angle α avec le plan horizontal.

La perche fait un angle β avec la pente.

Les forces de frottement s'exerçant sur le skieur sont supposées nulles.

2) Calculer :

a- Les intensités respectives de la tension $\vec{T}$ de la perche et de la réaction $\vec{R}$ de la piste.

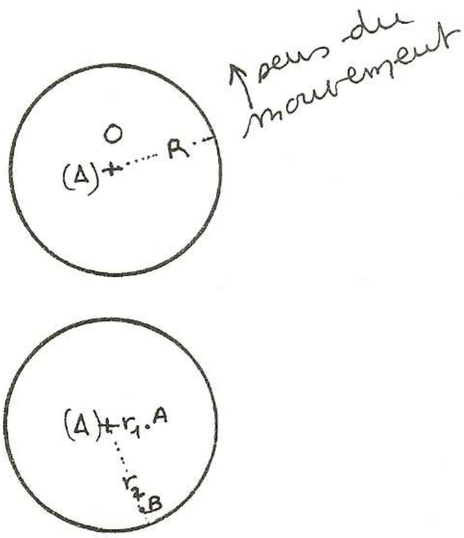
b- Les travaux respectifs des forces appliquées au skieur, celui-ci se déplace de A vers A' distants de 100 m.

Préciser dans chaque cas si le travail est moteur ou résistant.

3) L'énergie cinétique du skieur varie-t-elle lors du déplacement ?

Que peut-on dire de la somme des travaux des forces appliquées au skieur lors du déplacement AA' ?

Exercice 15 :



Un disque de masse m = 1,0 kg, de rayon R = 20,0 cm et de centre O, tourne à la vitesse constante n = 25,0 tr.min^{-1}, autour d'un axe Δ passant par son centre et perpendiculaire à son plan.

1) Quelle est la nature du mouvement du disque ?

Calculer :

2) La vitesse angulaire de rotation du disque en rad.s^{-1}.

3) La période et la fréquence du mouvement.

4) Le moment d'inertie du disque par rapport à l'axe Δ.

On colle deux pastilles A_1 et A_2 de masses respectives m_1 = 50,0 g et m_2 = 80,0 g considérées comme ponctuelles, sur le disque, à des distances respectives r_1 = 5,0 cm et r_2 = 15,0 cm de l'axe Δ.

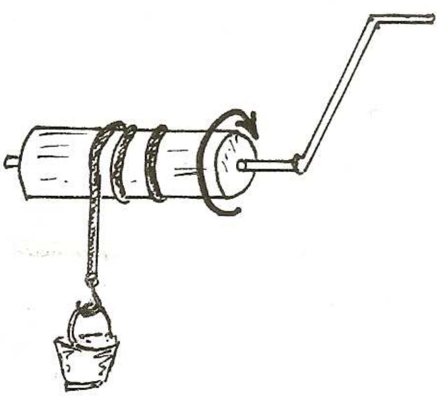
5) Donner les caractéristiques des vitesses de A_1 et A_2.

6) Calculer le moment d'inertie J' du système disque-billes par rapport à l'axe Δ.

Par un dispositif extérieur, on maintient constante l'énergie cinétique du système.

7) Calculer sa vitesse angulaire de rotation en rad.s^{-1} et tr.min^{-1}.

Exercice 16 :



Un treuil est constitué d'un cylindre de rayon r et de masse M, sur l'axe horizontal duquel est fixée une manivelle de longueur L.

Une corde s'enroule sur le cylindre.

A l'extrémité de cette corde, est accroché un seau de masse m qui peut être mis en mouvement lorsqu'on exerce une force $\vec{F}$ à l'extrémité de la manivelle.

(M = 20,0 kg ; r = 10,0 cm ; L = 50,0 cm ; m = 10,0 kg ; masses de la corde et de la manivelle négligeables devant celle cylindre)

Le cylindre est homogène et de moment d'inertie $J = \frac{1}{2}M.r^2$ par rapport à son axe de révolution.

Les frottements sont négligeables.

1) Quelle est l'intensité de la force $\vec{F}$ à exercer perpendiculairement à la manivelle pour monter un seau à vitesse constante ?

2) Calculer :

a- Les travaux effectués par $\vec{F}$ et par la tension $\vec{T}$ de la corde s'exerçant sur le treuil, lorsque le seau monte lentement d'une hauteur h = 10,0 m.

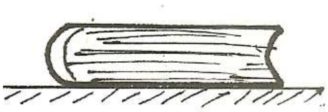
b- La somme des travaux des forces appliquées au treuil lors de cette ascension.

3) Calculer l'énergie cinétique du système cylindre-manivelle lorsqu'il tourne à la vitesse angulaire constante n = 120 $tr.min^{-1}$.

L'énergie cinétique varie-t-elle au cours de la rotation ?

Exercice 17 :

1) Un livre de masse m = 0,300 kg est lancé sur une table horizontale.

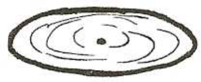


Au moment où il est lancé, le livre est animé d'un mouvement de translation de vitesse $\vec{v}$ (v = 5,0 $m.s^{-1}$).
Son centre d'inertie parcourt la distance d = AA' = 2,1 m avant que le livre s'immobilise.
Il s'exerce sur le livre une force de frottement que l'on supposera colinéaire à la direction du déplacement et de valeur constante.

a- Montrer que son sens est nécessairement opposé au déplacement.

b- Calculer sa valeur.

2) Une platine de tourne-disque, de moment d'inertie par rapport à l'axe de rotation Δ J = $11.10^{-3}kg.m^2$, tourne à la vitesse constante de 33,3 $tr.min^{-1}$.



Le courant qui alimente le moteur est coupé.
La platine effectue alors n = 10 tours avant de s'immobiliser.
Quel est le moment du couple de frottement qui s'exerce sur le système au niveau de l'axe de rotation ?

Exercice 18 :

Un objet de masse m = 2,5 kg est placé au pied de la tour Eiffel.

Calculer l'énergie potentielle du système terre-objet en prenant successivement pour état de référence :
1) L'objet au niveau de la mer.
2) L'objet au pied de la tour Eiffel.
3) L'objet au sommet de la tour Eiffel.

- altitude de Paris : 26 m

- hauteur de la tour Eiffel : 326 m

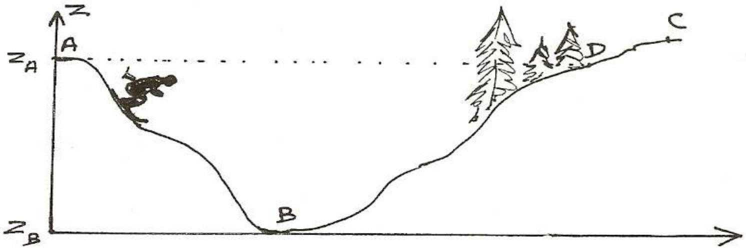
Exercice 19 :

Un skieur veut aller de A en C.

Sa vitesse en A est $\vec{v}_A$.

La piste est verglacée et le skieur ne s'aide pas de ses bâtons.

Le point B est à la cote zéro sur un axe vertical orienté vers le haut.



1) Avec quelle vitesse passera-t-il au point D dont la cote est la même que celle de A ?

2) Peut-il atteindre C ?

Avec quelle vitesse y arrivera-t-il ?

Données :

Masse du skieur et de son équipement : 90 kg

$v_A = 8{,}00\ m.s^{-1}$

Cote de A : $z_A = 10{,}0\ m$

Cote de C : $z_C = 12{,}0\ m$

Exercice 20 :

Un cycliste pesant avec son vélo 900 N se déplace sur une route horizontale à la vitesse de 24 km.h^{-1}.

La force de frottement a pour intensité 15 N.

Calculer :

1) le travail effectué par le cycliste par km de route.

2) la puissance développée dans ces conditions.

3) la puissance qu'il doit développer si, en conservant la même vitesse, il gravit une côte dont la pente est 2%.

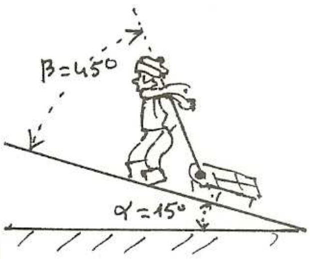
Exercice 21 :

Un lugeur décide de remonter sa luge.

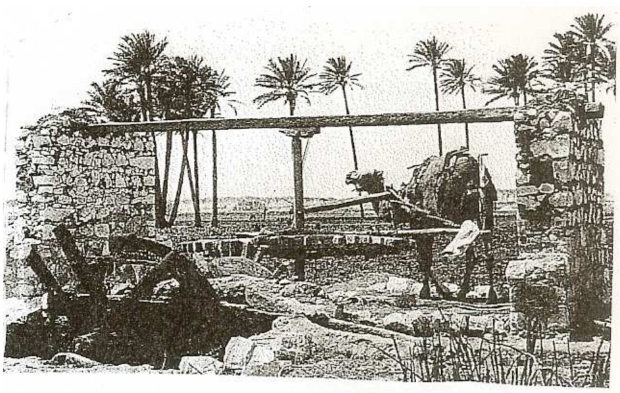
Pour cela il exerce une force constante $\vec{F}$ (F = 50 N).

Il tire sa luge à un instant donné en ayant une vitesse de 0,5 m.s^{-1}.

Calculer la puissance instantanée de $\vec{F}$ à cet instant.



Exercice 22 :



Un chameau fait fonctionner une noria.

Pour cela il exerce une force $\vec{F}$ perpendiculairement à la perche qui le lie à l'axe de rotation Δ.

Soit ℓ la distance de la droite d'action de $\vec{F}$ à l'axe de rotation.

1) Faire un schéma vu de dessus.

2) Calculer le moment de $\vec{F}$ par rapport à l'axe de rotation.(F = 400 N ; ℓ = 2 m).

3) Calculer le travail effectué par le chameau quand il effectue n = 10 tours en 5 minutes à vitesse régulière.

En déduire la puissance développée.

Exercice 23 :

Un couple s'exerçant sur l'arbre d'un moteur a un moment constant M = 2,5 10^3 N.m.
Calculer la puissance du moteur lorsque la vitesse de rotation de l'arbre est n = 100 $tr.min^{-1}$.

6. Mouvement sinusoïdaux et oscillateur mécanique

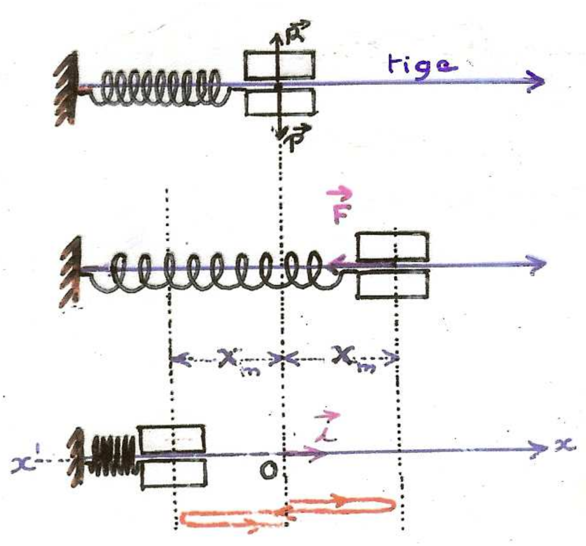
6_A. oscillateur mécanique

Un **oscillateur mécanique** est un système animé de mouvements périodiques autour d'une position d'équilibre.

6_B. mouvement rectiligne

a- pendule élastique horizontal

a_1- mise en évidence



Ressort de constante de raideur k ($N.m^{-1}$)
Solide de masse m (kg)

Statique : position d'équilibre

$\sum \vec{F} = 0 \quad \vec{P} + \vec{R} = 0$

Dynamique : mouvement...
Frottements négligeables.

$\vec{F}$: **force de rappel**, qui tend constamment à ramener le solide dans la position initiale.

$$\vec{F} = -k.x_{\vec{i}}$$

x_m :étirements et compressions maximums.
x : élongation.

a_2- étude du mouvement

$$\sum \vec{F} = \vec{P} + \vec{R} + \vec{F} = m.\vec{a}$$

Projection algébrique sur x'x : 0 + 0 - k.x= m.a

m.a + k.x = 0

$$\left(a = \frac{dv}{dt} \quad v = \frac{dx}{dt} \quad a = \frac{d^2x}{dt^2} \right)$$

Equation différentielle du mouvement : $m.\frac{d^2x}{dt^2} + k.x = 0$

$$x = x_m.\cos(\omega_0.t - \varphi)$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

x_m et φ dépendent des conditions initiales : t = 0 ; $x_0 = x_m$; $v_0 = \frac{dx}{dt} = -\omega_0.x_m.\sin(\omega_0.t - \varphi) = 0$; φ = 0

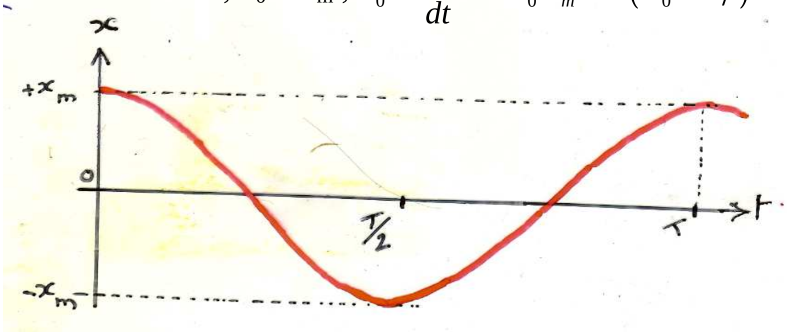
$x = x_m.\cos\omega_0.t$

t : temps

ω_0 :pulsation propre

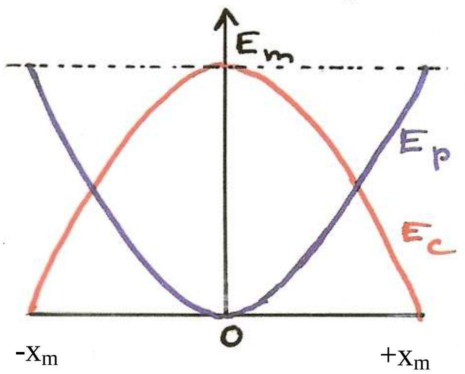
$$\omega_0 = 2\pi.f_0 = \frac{2\pi}{T_0}$$

x_m : amplitude
x : élongation



a_3- énergie mécanique

Elle est constante et elle se conserve pour un oscillateur non amorti.
Il y a transformation mutuelle entre l'énergie cinétique et l'énergie potentielle élastique.



$$E_m = \frac{1}{2}m.v^2 + \frac{1}{2}k.x^2 = \frac{1}{2}m.\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2}k.x^2$$

Dérivons :

$$\frac{1}{2}m.2.\frac{dx}{dt}.\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{1}{2}k.2.x.\frac{dx}{dt} = m.\frac{dx}{dt}.\frac{d^2x}{dt^2} + k.x.\frac{dx}{dt} = \frac{dx}{dt}.\left(m.\frac{d^2x}{dt^2} + k.x\right) = 0$$

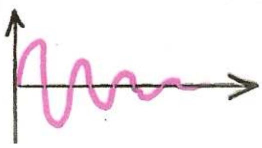
Solutions :

$$\frac{dx}{dt} = 0 \text{ et } m.\frac{d^2x}{dt^2} + k.x = 0$$

$$\left(\frac{1}{2}k.x^2 \ : \ \Delta E_{potentielle} = W_{force\ intérieure} = \int_0^x dW = \int_0^x F.dx = \int_0^x -k.x.dx = -k\int_0^x x.dx = -k.\left(\frac{1}{2}x^2\right)_0^x = -\frac{1}{2}k.x^2\right)$$

a_4- forces de frottement

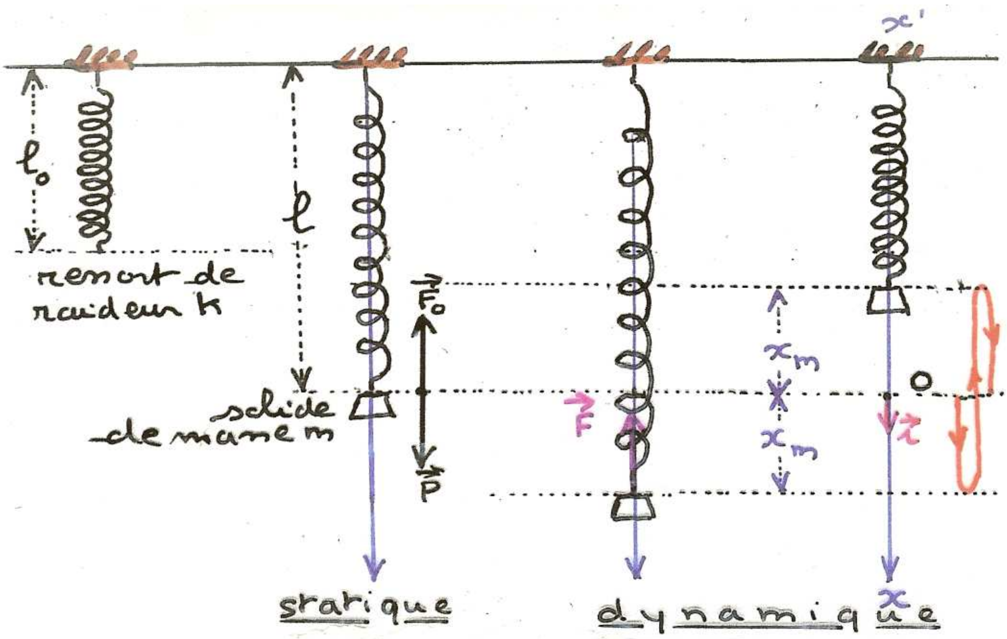
En réalité, il y a toujours des forces de frottement.
L'énergie mécanique se dégrade peu à peu en énergie thermique (apparition de chaleur).
Les forces de frottement effectuent un travail résistant.
Les oscillations s'amortissent.



$$m.\frac{d^2x}{dt^2} + r.\frac{dx}{dt} + k.x = 0$$

$r.\frac{dx}{dt}$: force de frottement proportionnel à la vitesse $v = \frac{dx}{dt}$

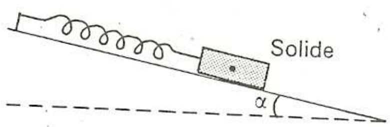
b- pendule élastique vertical



$$\sum \vec{F} = \vec{0}$$
$$\vec{P} + \vec{F}_0 = \vec{0}$$
$$\vec{F}_0 = -k.(\ell - \ell_0).\vec{i}$$
$$\vec{P} - k.(\ell - \ell_0).\vec{i} = 0$$
$$\vec{P} = k.(\ell - \ell_0).\vec{i}$$

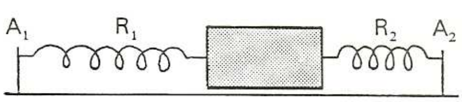
$$\sum \vec{F} = m.\vec{a}$$
$$\vec{P} + \vec{F} = m.\vec{a}$$
$$k.(\ell - \ell_0).\vec{i} - k.(\ell - \ell_0 + x).\vec{i} = m.\vec{a}$$
$$-k.x.\vec{i} = m.\vec{a}$$
$$-k.x = m.a \left(projection\ sur\ x'x \right)$$
$$m.a + k.x = 0$$
$$m.\frac{d^2x}{dt^2} + k.x = 0$$

•Exercice 24 :



Un solide de masse m = 100 g, peut glisser sans frottement sur un banc à coussin d'air, incliné de α = 10° par rapport à l'horizontale.
Ce solide est relié à un ressort qui est allongé de 8 cm à l'équilibre.
1) quelle est la constante de raideur du ressort ?
On écarte le solide de sa position d'équilibre et on laisse aller.
2) Calculer la période propre de ses oscillations.

••Exercice 25 :



Un solide, de masse m = 400 g, glisse sans frottements sur une table à coussin d'air horizontale. Il est relié d'un côté à un ressort R_1 dont l'extrémité A_1 est fixe et de l'autre côté à R_2 dont l'extrémité A_2 est fixe.
Le ressort R_1, à l'équilibre, est allongé de 10 cm, R_2 est allongé de 8 cm.
1) Quelle est la constante de raideur k_2 de R_2, sachant que celle de R_1, k_1, est 40 $N.m^{-1}$.
Le solide accomplit des oscillations de translation, parallèlement à A_1A_2.

2) a- Montrer que l'oscillateur est harmonique.
b- Calculer sa pulsation propre.

Le solide est écarté de 2 cm de sa position d'équilibre, vers A_2.
De là, à t = 0, on le lance vers A_1 à la vitesse de 0,1 $m.s^{-1}$.

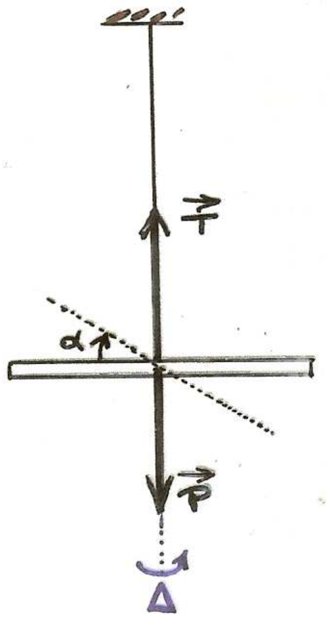
3) Quelle est la loi horaire du mouvement ?

L'état de référence pour l'énergie potentielle des deux ressorts est la position d'équilibre.
L'oscillateur est excité.

4) Calculer son énergie mécanique.

6_C. mouvement de rotation d'un solide autour d'un axe fixe

Exemple : pendule de torsion *(sans amortissement)*



a- mise en évidence

- Fil de torsion **élastique** de constante $C = k.\frac{D^4}{\ell}$

D : diamètre
ℓ : longueur
k : caractérise le fil
C ($N.m.rad^{-1}$)

Il est soumis à un **moment** proportionnel à l'élongation angulaire.

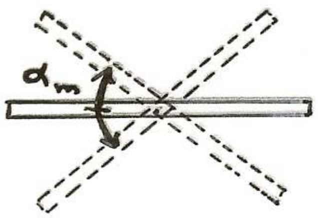
- Solide de moment d'inertie J ($kg.m^2$)

Quand on l'écarte de sa position d'équilibre, son élasticité engendre un **couple de rappel** de moment de rappel M = - C.α

L'effet de ce moment est de ramener constamment le solide vers la position d'équilibre.

- Energie potentielle élastique : $E_p = \frac{1}{2}C.\alpha^2$

- Energie mécanique : $E_m = \frac{1}{2}m.v^2 + \frac{1}{2}C.\alpha^2$



- Le solide, une fois lâché sans vitesse angulaire initiale, oscille de part et d'autre de cette position, α_m étant l'élongation angulaire maximale.

$\vec{P}$: *poids du solide* $\vec{T}$: *tension du fil*

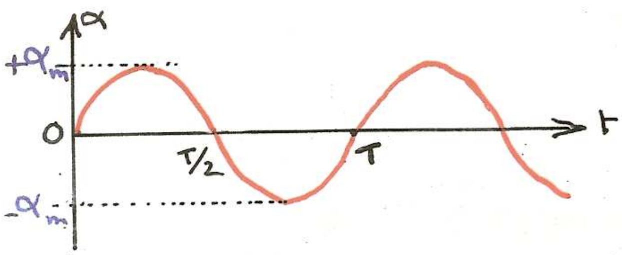
b- étude du mouvement

Appliquons le principe fondamental

$$\sum M_{\vec{F}/\Delta} = J.\frac{d^2\alpha}{dt^2} \qquad M_{\vec{P}/\Delta} + M_{\vec{F}/\Delta} + M_{couple\ de\ rappel} = J.\frac{d^2\alpha}{dt^2}$$

$$0 \quad + 0 \quad - C.\alpha \quad = J.\frac{d^2\alpha}{dt^2}$$

Equation différentielle du mouvement sinusoïdal de rotation : $J.\frac{d^2\alpha}{dt^2} + C.\alpha = 0$



$$\alpha = \alpha_m.\cos(\omega_0.t - \varphi)$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{C}{J}}$$

α_m et φ dépendent des conditions initiales : t = 0.

$\alpha_0 = \alpha_m$; $\omega_0 = \frac{d\alpha}{dt} = -\omega_0.\alpha_m.\sin(\omega_0.t - \varphi) = 0$; φ = 0

$$\alpha = \alpha_m . \cos \omega_0 . t$$

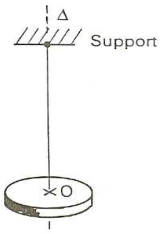
t: temps

ω_0 :pulsation propre ($\omega_0 = 2\pi . f_0 = \dfrac{2\pi}{T_0}$)

α_m : amplitude

α : élongation

•Exercice 26 :



Un disque homogène de rayon r = 10 cm et de masse m = 200 g est suspendu par son centre O à un fil de torsion vertical, dont l'extrémité est soudée à un support fixe.
Ce disque, écarté de sa position d'équilibre, accomplit des oscillations de rotation, autour de l'axe Δ défini par le fil.
La durée de 15 oscillations est 17,2 s.

Le moment d'inertie du disque par rapport à Δ est : $J = \dfrac{1}{2} m . r^2$.

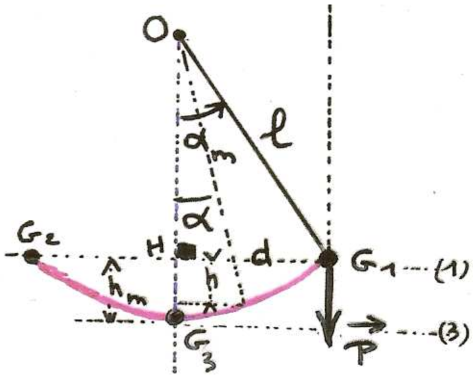
Déterminer la constante de torsion du fil.

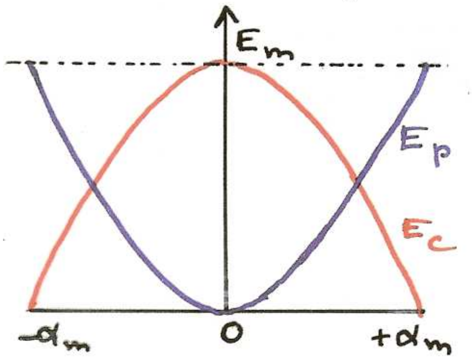
6_D. pendule

a- pendule simple

a_1- mise en évidence

Point matériel suspendu à un point fixe par un fil inextensible et de masse négligeable.





a_2- étude du mouvement

$$M_{\vec{P}/\Delta} = -P . \ell . \sin \alpha = J . \frac{d^2\alpha}{dt^2} = m . \ell^2 . \frac{d^2\alpha}{dt^2}$$

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \frac{g}{\ell} . \sin \alpha = 0$$

sin α ≈ 0, pour des oscillations de faibles amplitudes

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \frac{g}{\ell} . \alpha = 0$$

$$\alpha = \alpha_m . \cos \omega_0 . t$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\ell}} \qquad T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g}}$$

$$E_m = E_p + E_c$$

$$E_m = m . g . h + \frac{1}{2} m . v^2$$

$$E_m = m . g . (1 - \cos \alpha_m) + \frac{1}{2} m . v^2$$

Vitesse linéaire maximale en G_3 :

$$\Delta E_C = W_{\vec{P}} = P.h = E_{C3} - E_{C1} = \frac{1}{2}m.v_3^2 - \frac{1}{2}m.v_1^2 = \frac{1}{2}m.v_3^2 - 0$$

$$(h = OG_3 - OH = \ell - \ell.\cos\alpha_m)$$

$$m.g.\ell.(1-\cos\alpha_m) = \frac{1}{2}m.v_3^2 \qquad v_3^2 = 2g.\ell.(1-\cos\alpha_m)$$

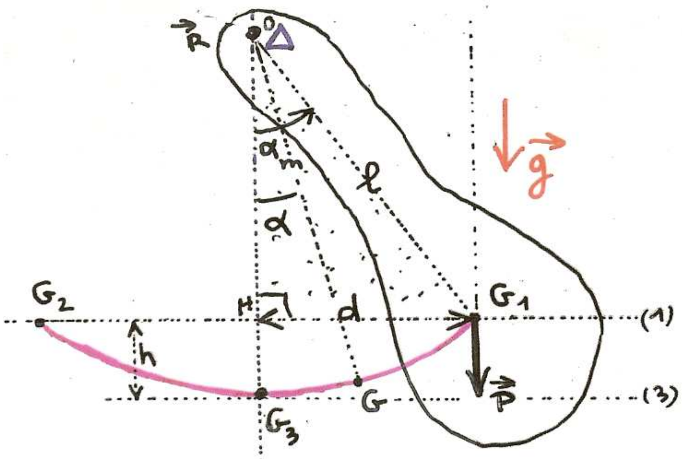
b- pendule pesant

b₁- mise en évidence

Solide mobile autour d'un axe Δ ne passant pas par son centre de gravité.
Il se balance autour de Δ. (*balancier, balançoire,...)*
On néglige la poussée d'Archimède, de la résistance de l'air et les forces de frottement.
On l'écarte de sa position d'équilibre, on le lâche, il **oscille**.

b₂- étude du mouvement

$\sum \vec{R}_{/\Delta} = 0$, la réaction varie, on ne peut pas connaître sa direction.



$\sum M_{\vec{F}/\Delta} = -P.d = -m.g.\ell.\sin\alpha = J.\frac{d^2\alpha}{dt^2}$, car M et α sont de signes contraires

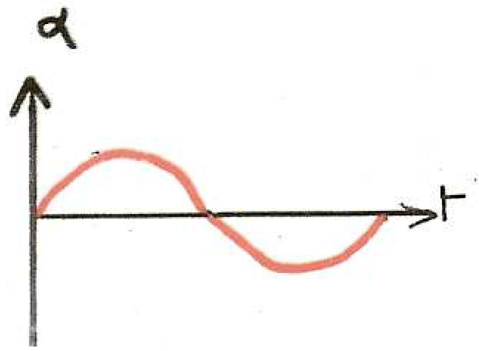
$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \frac{m.g.l}{J}.\sin\alpha = 0$$

A cause de sin α, cette équation n'a pas de solution sinusoïdale.

Oscillations de faible amplitude : α petit, sin α ≈ α (rad)

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \frac{m.g.l}{J}.\alpha = 0$$

Equation différentielle à solution sinusoïdale



$$\alpha = \alpha_m.\cos\omega_0.t$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{m.g.\ell}{J}}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{J}{m.g.\ell}}$$

Vitesse angulaire maximale en G_3 :

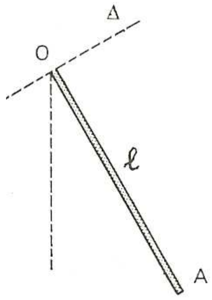
$$\Delta E_C = W_{\vec{P}} = P.h = E_{C3} - E_{C1} = \frac{1}{2}J.\omega_3^2 - \frac{1}{2}J.\omega_1^2 = \frac{1}{2}J.\omega_3^2 - 0$$

$$(h = OG_3 - OH = \ell - \ell.\cos\alpha_m)$$

$$m.g.\ell.(1-\cos\alpha_m) = \frac{1}{2}J.\omega_3^2$$

$$\omega_3^2 = \frac{2m.g.\ell.(1-\cos\alpha_m)}{J}$$

••Exercice 27 :



Une tige homogène OA de longueur ℓ = 1 m, de masse m = 100 g et de moment d'inertie par rapport à Δ $J = \frac{1}{3}m.\ell^2$ peut osciller autour d'un axe horizontal Δ, passant par son extrémité supérieure O.

1) Montrer que, si les l'amplitude des oscillations est suffisamment faible, ces dernières sont forcément harmoniques.

2) Déterminer la pulsation propre de cet oscillateur.

A l'extrémité de la tige, en A, on fixe une masse pratiquement ponctuelle, m'.

La période des oscillations de faible amplitude est $T' = 1{,}83$ s.

3) Déterminer m'.

On retire la masse m'.

La tige est soudée en O à un fil de torsion OO', colinéaire à Δ, l'axe de rotation horizontal de la barre.

Le fil OO' a pour constante de torsion C = 0,2 N.m.rad^{-1}, il n'est pas tordu lorsque OA est verticale.

4) a- Montrer que cet oscillateur n'est pas harmonique, mais qu'il peut être linéarisé.

b- Calculer dans ce cas sa pulsation propre.

G- CHOCS

1. Définition

Rencontre **très brève** entre deux corps, sur un plan horizontal.
Ces deux corps ont des mouvements de translation rectiligne uniforme.
Les forces (poids, réaction,...) seront négligées devant les **deux forces de contact**.

2. Exemples

Un choc est :
– direct
(ou) – mou
(ou) – réel

3. Quantité de mouvement

3$_A$. point matériel

…de masse m et de vitesse $\vec{v}$: $\vec{p} = m.\vec{v}$

3$_B$. solide

…de centre de gravité G, de masse M et de vitesse $\vec{v}_G$: $\vec{p} = M.\vec{v}_G$

$$M = \sum_{i=1}^{i=n} m_i.\vec{v}_i$$

3$_C$. choc

Au cours d'un choc, il y a ***conservation*** du ***vecteur quantité*** de ***mouvement***.

Avant le choc, $m_1.\vec{v_1} + m_2.\vec{v_2} = m_1.\vec{v'_1} + m_2.\vec{v'_2}$, après le choc.

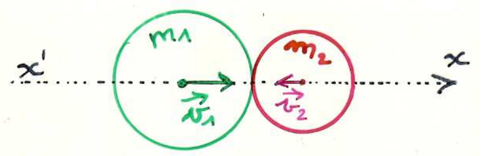
4. Chocs parfaitement élastiques sans frottement

Chocs directs, « plein fouet » :
Au cours d'un choc, il y a aussi ***conservation*** *de l'**énergie cinétique***.
(les mouvements de rotation des solides autour de leurs centres d'inertie ne sont pas modifiés)

Avant le choc, $\frac{1}{2}m_1.v_1^2 + \frac{1}{2}m_2.v_2^2 = \frac{1}{2}m_1.v'^2_1 + \frac{1}{2}m_2.v'^2_2$, après le choc.

m$_1$, m$_2$, $\vec{v_1}$ et $\vec{v_2}$ sont connus.
$\vec{v'_1}\left(\vec{v'_{1x}}\ et\ \vec{v'_{1y}}\right)\ et\ \vec{v'_2}\left(\vec{v'_{2x}}\ et\ \vec{v'_{2y}}\right)$ sont inconnues.
Pour résoudre ce problème, il faut des indications supplémentaires.

$\vec{v_1}\ et\ \vec{v_2}$ sont colinéaires.
v$_1$, v$_2$, v'$_1$ et v'$_2$ sont des grandeurs algébriques.



Projection algébrique des deux équations sur x'x : (2 équations, 2 inconnues)

$$m_1.v_1 + m_2.v_2 = m_1.v_1^{'} + m_2.v_2^{'}$$
$$m_1.v_1^2 + m_2.v_2^2 = m_1.v_1^{'2} + m_2.v_2^{'2}$$

Exercice 1 :

1) Après résolution de ces 2 équations montrer que $v_1^{'} = \frac{(m_1 - m_2).v_1 + 2m_2.v_2}{m_1 + m_2}$ et $v_2^{'} = \frac{(m_2 - m_1).v_2 + 2m_1.v_1}{m_1 + m_2}$

2) Etablir la relation : $v_1^{'} - v_2^{'} = -(v_1 - v_2)$

Exercice 2 : La boule 2 est immobile avant le choc.

1) a- établir les expressions littérales de v'_1 et v'_2.
   b- que deviennent ces expressions quand $m_1 = m_2$?

2) Comparer les sens des vecteurs vitesse
   a- si $m_1 > m_2$
   b- si $m_1 < m_2$

3) Etablir le coefficient de transfert d'énergie cinétique : $\eta = \frac{E_{C2}^{'}}{E_{C1}}$

   Que devient ce coefficient si $m_1 = m_2$?

Exercice 3 :

1) $m_1 >>>> m_2$
   a- exprimer v'_1 et v'_2.
   b- exprimer v'_1 et v'_2 si v_2 est nulle.
   c- exprimer v'_1 et v'_2 si v_1 est nulle.

2) $m_1 = m_2$
Exprimer v'_1 et v'_2

5. Chocs inélastiques

Chocs parfaitement mous.
Les deux corps restent liés après le choc.

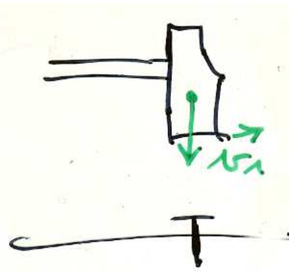
$$\textit{Avant le choc, } m_1.\vec{v_1} + m_2.\vec{v_2} = (m_1 + m_2).\vec{v'}\textit{, après le choc}$$

$$\vec{v'} = \frac{m_1.\vec{v_1} + m_2.\vec{v_2}}{m_1 + m_2}$$

Exercice 4 :

1) Etablir l'expression littérale de la variation d'énergie cinétique, et montrer que celle-ci est négative.

2)



Donner les expressions littérales de v' et ΔE_C dans le cas du marteau et du clou ($v_2 = 0$).
Pourquoi faut-il choisir un marteau lourd ?

6. Chocs réels

Choc direct : $v_1^{'} - v_2^{'} = -(v_1 - v_2)$

Choc mou : $v_1^{'} - v_2^{'} = 0$

Choc réel : $v_1^{'} - v_2^{'} = -e.(v_1 - v_2)$

e dépend des corps qui se heurtent et ne dépend pas des vitesses $\vec{v_1}$ et $\vec{v_2}$ colinéaires.

La quantité de mouvement se conserve : $m_1.v_1 + m_2.v_2 = m_1.v_1^{'} + m_2.v_2^{'}$

L'énergie cinétique ne se conserve pas.

On introduit un coefficient de restitution : 0 < e < 1

Exercice 5 :

1) Après résolution de ces 2 équations montrer que :

$$v_1^{'} = \frac{m_2.v_2.(1-e) + v_1.(m_1 + e.m_2)}{m_1 + m_2} \; et \; v_2^{'} = \frac{m_1.v_1.(1+e) + v_2.(m_2 - e.m_1)}{m_1 + m_2}$$

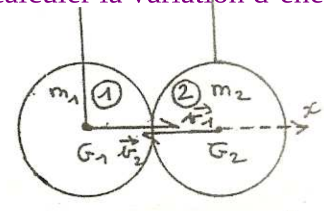
2) Etablir l'expression littérale de la variation d'énergie cinétique entre l'après et l'avant choc.

7. Autres exercices

Exercice 6 :

Donner les caractéristiques des vitesses $\vec{v_1^{'}}$ et $\vec{v_2^{'}}$ des billes 1 et 2 immédiatement après le choc dans les cas suivants :

1) Choc parfaitement élastique : $m_1 = m_2 = 50$ g, $v_1 = 2{,}0$ m.s^{-1} et $v_2 = 0$.
2) Choc parfaitement élastique : $m_1 = m_2 = 50$ g, $v_1 = 2{,}0$ m.s^{-1} et $v_2 = -2{,}0$ m.s^{-1}.
3) Choc parfaitement élastique : $m_1 = 40$ g, $m_2 = 60$ g, $v_1 = 1{,}0$ m.s^{-1} et $v_2 = 0$.
4) Choc inélastique : $m_1 = m_2 = 50$ g, $v_1 = 2{,}0$ m.s^{-1} et $v_2 = 0$
   a- « mou »
   b- « réel » avec e = 0,7
   c- calculer la variation d'énergie cinétique dans ces deux cas.



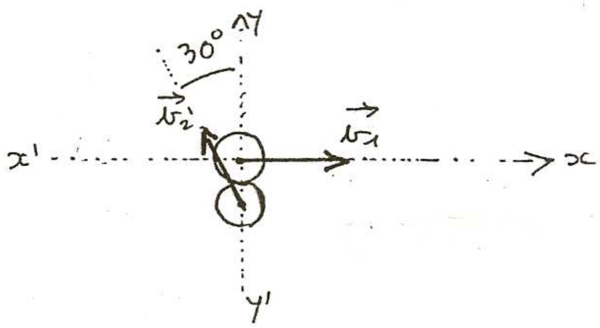
Exercice 7 :

Un marteau de masse $m_1 = 1200$ g est animé d'un mouvement de translation rectiligne ($v_1 = 40$ cm.s^{-1}) juste avant le choc avec un clou immobile de masse $m_2 = 5$ g légèrement enfoncé dans une planche.

1) Donner les caractéristiques des vecteurs vitesses du marteau et du clou juste après le choc et la variation d'énergie cinétique lors du choc.
2) Même question avec $m_1 = 250$ g et $m_2 = 20$ g.

Exercice 8 :

Avant le choc :
$v_1 = 1{,}40$ m.s^{-1} et $v_2 = 1{,}00$ m.s^{-1}



On considère le choc mou entre deux mobiles autoporteurs initialement animés de mouvements de

translation rectilignes (m_1 = 300 g et m_2 = 600 g)
Donner les caractéristiques de la vitesse du centre d'inertie des deux mobiles accrochés après le choc.

Exercice 9 :
A un carrefour verglacé plan et horizontal un camion de 20 t animé d'un mouvement de translation rectiligne heurte une automobile de 1200 kg également animée d'un mouvement de translation rectiligne.
Juste avant le choc, la vitesse du camion a une intensité de 20 $km.h^{-1}$, celle de la voiture une intensité de 50 $km.h^{-1}$, les deux vecteurs vitesses faisant un angle droit.
Les roues des véhicules sont bloquées par les freins.
Les **roues des deux véhicules restent accrochées**.
Donner les caractéristiques du vecteur vitesse du centre d'inertie de l'ensemble camion-voiture juste après le choc.