Exercice 1 – VRAI / FAUX

Quelques règles à respecter dans un VRAI / FAUX

- Une affirmation mathématique est soit vraie, soit fausse.
- Un exemple, et même plusieurs exemples, ne suffisent pas pour prouver qu'une affirmation est vraie. Il est nécessaire pour montrer qu'une affirmation est vraie de faire appel à des théorèmes ou à des propriétés connus.
- Un exemple qui ne vérifie pas une affirmation suffit pour prouver que cette affirmation est fausse. Cet exemple est appelé alors contre-exemple. Mais ce n'est pas la seule façon de démontrer qu'une affirmation est fausse.
- Une constatation ou des mesures sur une figure ne suffisent pas pour prouver qu'une affirmation est vraie.

Dans cet exercice, des affirmations sont proposées. Pour chacune dire si elle est vraie ou fausse, et justifier la réponse. Une réponse exacte mais non justifiée ne rapporte aucun point.

Affirmation 1 : Pour tout nombre entier naturel n, le nombre $2^n + 2^{n+1} + 2^{n+2}$ est divisible par 7.
Pour tout nombre entier naturel n, on a : $2^n + 2^{n+1} + 2^{n+2} \;=\; 2^n + 2 \times 2^n + 4 \times 2^n \;=\; 7 \times 2^n$

Ce qui établit que : $2^n + 2^{n+1} + 2^{n+2}$ est divisible par 7. L'affirmation 1 est vraie.

Affirmation 2 : Si un nombre est multiple de 6 et de 9, alors il est aussi multiple de 54.
18 est multiple de 6 et de 9 et n'est cependant pas multiple de 54.
Ce contre exemple suffit à prouver que l'affirmation est fausse.

Affirmation 3 : Le produit de deux nombres pairs consécutifs est divisible par 8.
Appelons n et n+2 les deux nombres pairs consécutifs.
Si n est multiple de 4, comme n+2 est pair, leur produit est multiple de 8.
Si n n'est pas multiple de 4, on a alors $n = 4k + 2$ (k étant un entier), et $n + 2 = 4k + 4 = 4(k+1)$
n+2 est donc multiple de 4 et son produit par le nombre pair n est donc multiple de 8
Le produit de deux nombres pairs consécutifs est donc toujours multiple de 8 (ou divisible par 8).
L'affirmation 3 est vraie.

Affirmation 4 : Les nombres 231 567 808 771 et 3 457 799 045 311 n'ont pas de multiple commun.
231 567 808 771×3 457 799 045 311 est un multiple commun à 231 567 808 771 et 3 457 799 045 311.
L'affirmation est donc fausse.
De façon générale deux entiers a et b ont toujours une infinité de multiples communs parmi lesquels 0 et ab. Il se peut que le plus petit multiple commun non nul à 231 567 808 771 et 3 457 799 045 311 soit plus petit que leur produit et soit ici difficile à déterminer, mais la question ne demande pas de le déterminer.

Affirmation 5 : La somme de cinq nombres entiers consécutifs est un multiple de 5.
Considérons un entier n ainsi que les 4 entiers successifs qui le suivent.
La somme de ces 5 nombres vaut donc :

$$S = n + (n+1) + (n+2) + (n+3) + (n+4) = 5n + 10 = 5(n+2)$$

L'affirmation est donc vraie.

Un homme a moins de 100 ans. L'an dernier, son âge était divisible par 11.
L'année prochaine, son âge sera divisible par 5.
Affirmation 6 : On est certain que cet homme a 34 ans.
Effectuons une recherche systématique à partir des multiples de 11 :

Age l'an dernier	0	11	22	**33**	44	55	66	77	**88**
Age	1	12	23	**34**	45	56	67	78	**89**
Age l'an prochain	2	13	24	**35**	46	57	68	79	**90**

Cette recherche permet d'affirmer que l'affirmation est fausse car l'homme peut également avoir 89 ans.

Affirmation 7 : La somme des carrés de deux nombres entiers impairs est un nombre entier pair.
Le produit de deux nombres impairs est impair, c'est en particulier le cas du carré d'un nombre impair. La somme de deux nombres impairs est paire, c'est donc le cas pour la somme des carrés de deux nombres impairs. L'affirmation 7 est vraie.

Affirmation 8 : La somme de deux nombres premiers est toujours un nombre premier.
3 + 5 = 8 et 8 n'est pas premier, l'affirmation 8 est fausse.

Affirmation 9 : La somme de deux nombres premiers n'est jamais un nombre premier.
2 + 3 = 5 et 5 est premier, l'affirmation 9 est fausse.

Affirmation 10 : Shéhérazade commence à lire un conte un lundi soir. Elle lit 1001 nuits consécutives. Elle terminera un dimanche soir.

1001	7
0	143

1001 est un multiple de 7.
Puisque Shéhérazade commence à lire sa 1ère histoire le lundi soir, elle lira sa 7ème histoire le dimanche soir. Tout comme sa 14ème, sa 21ème et toute histoire dont le numéro est un multiple de 7. Donc l'affirmation est vraie.

Affirmation 11 : Sans utiliser de calculateur ni poser l'opération, on peut affirmer que l'écriture décimale du nombre $4^7 \times 5^{18}$ comporte 17 chiffres.

$$4^7 \times 5^{18} = (2^2)^7 \times 5^{18} = 2^{14} \times 5^{14} \times 5^4 = (2 \times 5)^{14} \times 5^4 = 625 \times 10^{14}$$

L'écriture décimale de ce nombre s'obtient donc en écrivant 14 zéros à la droite de 625, elle comporte bien 17 chiffres.

Exercice 2 – Les bonbons d'Emma

Emma propose à son ami Jules de lui donner ses bonbons à la condition qu'il trouve exactement combien elle en a. Emma lui dit qu'elle a moins de 100 bonbons et que lorsqu'elle les regroupe par deux, trois, quatre, cinq ou six, il lui en reste toujours un.
Combien Emma a-t-elle de bonbons ? Justifier la réponse en explicitant la démarche utilisée.
Notons n le nombre de bonbons cherché.
Puisque lorsqu'on regroupe les bonbons par deux, il en reste toujours un.
On peut écrire : $n = 2q + 1$ et en déduire que $n - 1$ est un multiple de 2.
De la même manière, on en déduit que $n - 1$ est aussi un multiple de 3, de 4, de 5 et de 6.
Être un multiple de 4 implique d'être un multiple de 2. Cette dernière information est donc inutile.
Être un multiple de 6 implique d'être à la fois un multiple de 2 et de 3. Ces deux dernières informations sont donc aussi inutiles.
On cherche donc n inférieur à 100 tel que $n - 1$ soit un multiple de 6, de 5 et de 4.
Regardons dans les multiples de 6 inférieurs à 100 quels nombres vérifient les deux conditions supplémentaires :

Multiple de 6	6	12	18	24	30	36	42	48	54	**60**	66	72	78	84	90	96
Multiple de 5					OUI					**OUI**					OUI	
Multiple de 4					NON					**OUI**					NON	

Seul 60 vérifie toutes les conditions. Donc $n - 1 = 60$ et $n = 61$.
Emma a 61 bonbons.

Exercice 3 – Questions indépendantes autour du PGCD / PPCM.

1. Pour les deux questions qui suivent, calculer de deux façons différentes :
a. Le PGCD de 780 et de 504

● *Première méthode :* Décomposition des nombres en facteurs premiers

780	2
390	2
195	3
65	5
13	13
1	

$780 = 2^2 \times 3 \times 5 \times 13$

504	2
252	2
126	2
63	3
21	3
7	7
1	

$504 = 2^3 \times 3^2 \times 7$

D'après le cours II.4.b. page 18, le PGCD est obtenu en faisant le produit de tous les facteurs qui figurent à la fois dans les deux décompositions, affectés de l'exposant le plus bas avec lequel il figure dans l'une des décompositions.

Donc PGCD(780; 504) = $2^2 \times 3 = 12$.

● *Seconde méthode :* par l'algorithme d'Euclide (Voir cours toujours II.4.b. page 18)

780 divisé par 504 a 276 pour reste
504 divisé par 276 a 228 pour reste
276 divisé par 228 a 48 pour reste
228 divisé par 48 a 36 pour reste
48 divisé par 36 a 12 pour reste
36 divisé par 12 a **0** pour reste

a	b	reste
780	504	276
504	276	228
276	228	48
228	48	36
48	36	12
36	12	**0**

On sait que le PGCD, obtenu par l'algorithme d'Euclide, est le premier reste non nul.

Donc le PGCD de 780 et 504 est **12**.

b. Le PPCM de 780 et de 504.

● *Première méthode :* décomposition des nombres en facteurs premiers

On a vu à la question **1.a** que : $780 = 2^2 \times 3 \times 5 \times 13$ et $504 = 2^3 \times 3^2 \times 7$.

D'après le cours II.3.b. page 17, le PPCM est obtenu en faisant le produit de tous les facteurs qui figurent dans l'une ou l'autre des deux décompositions, affectés de l'exposant le plus grand avec lequel il figure dans l'une des décompositions.

Donc PPCM(780 ; 504) = $2^3 \times 3^2 \times 5 \times 7 \times 13 = 32\,760$.

● *Seconde méthode :* en utilisant le PGCD et la formule : PGCD $(a, b) \times$ PPCM $(a, b) = a \times b$

PPCM(780 ; 504) = $\frac{780 \times 504}{12} = 32\,760$.

2. Déterminer le PGCD et le PPCM des trois nombres 84, 270 et 426.

On peut déterminer le PGCD et le PPCM en utilisant leur décomposition en facteurs premiers.

$84 = 2 \times 42 = 2 \times 2 \times 21 = 2 \times 2 \times 3 \times 7 = 2^2 \times 3 \times 7$

$270 = 2 \times 135 = 2 \times 3 \times 45 = 2 \times 3 \times 3 \times 15 = 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 5 = 2 \times 3^3 \times 5$

$426 = 2 \times 213 = 2 \times 3 \times 71$ (71 est premier)

D'où : PGCD(84 ; 270 ; 426) = $2 \times 3 = 6$

Et : PPCM(84 ; 270 ; 426) = $2^2 \times 3^3 \times 5 \times 7 \times 71 = 268\,380$

Remarque : PGCD(84 ; 270 ; 426) × PPCM(84 ; 270 ; 426) = $6 \times 268\,380 = 1\,610\,280$

Or $84 \times 270 \times 426 = 9\,661\,680$

La propriété « *le produit du PGCD de deux nombres par leur PPCM est égal au produit des ces nombres* » ne s'étend pas à trois nombres.

3. Le PGCD de deux nombres est 18. Leur PPCM est 648. Quels sont tous les couples possibles de nombres vérifiant ces deux conditions ?

Soient a et b les deux entiers cherchés.

Le PGCD a et de b étant égal à 18, a et b sont multiples de 18.

Ils s'écrivent donc : $a = 18a'$ et $b = 18b'$ où a' et b' sont deux entiers **premiers entre eux**.

De plus comme : $a \times b$ = PGCD$(a ; b)$ × PPCM$(a ; b)$

On peut donc écrire : $18a' \times 18b' = 18 \times 648$

D'où : $a' \times b' = 36 = 2^2 \times 3^2$.

a' et b' sont donc deux diviseurs de 36 premiers entre eux.

Examinons tous les cas possibles parmi les 9 diviseurs de 36:

a'	$b' = 36 / a'$	$a = 18a'$	$b = 18b'$
1	36	18	648
2	18	Non premiers entre eux	
3	12	Non premiers entre eux	
$2^2 = 4$	9	72	162
$2 \times 3 = 6$	6	Non premiers entre eux	
$3^2 = 9$	4	162	72
$2^2 \times 3 = 12$	3	Non premiers entre eux	
$2 \times 3^2 = 18$	2	Non premiers entre eux	
$2^2 \times 3^2 = 36$	1	648	18

Il y a donc 4 solutions au problème posé :

(18 ; 648) **(72 ; 162)**

(162 ; 72) **(648 ; 18)**

Exercice 4 – Nombre associé à un entier

Etant donné un entier n supérieur ou égal à 10, on appelle associé de n l'entier obtenu en intercalant un 0 entre le chiffre de dizaines et celui des unités de n. Par exemple, l'associé de 5 467 est 54 607.

1. Quel est l'associé de 768 492 ?

L'associé de 768 492 s'obtient en intercalant un 0 entre le chiffre des dizaines 9 et le chiffre des unités 2, c'est donc 7 684 902.

2. L'entier 2 005 est-il l'associé d'un nombre ? Si oui lequel ? On peut dire que 2005 est l'associé de 205.

3. **a.** Démontrer la propriété suivante : si n est un entier divisible par 9 alors son associé l'est également.

On suppose que n est un entier divisible par 9. On sait alors que la somme des chiffres de n est un nombre divisible par 9. Or, intercaler un 0 entre deux de ses chiffres ne change rien à leur somme, donc la somme des chiffres de son associé est aussi divisible par 9. L'associé de n est donc divisible par 9.

b. Formuler la réciproque de la propriété précédente.

La réciproque de la propriété démontrée précédemment est: « Si l'associé d'un entier n est un nombre divisible par 9, alors n est divisible par 9 ».

c. Cette réciproque est-elle vraie ? Justifier.

Cette réciproque est vraie : Si l'associé d'un entier n est un nombre divisible par 9, alors la somme de ses chiffres est divisible par 9. Comme la somme de ses chiffres est égale à la somme des chiffres de n, alors n est aussi divisible par 9.

4. Enoncer une condition nécessaire et suffisante portant sur l'entier n, pour que son associé soit divisible par 4. La démontrer.

Un nombre est divisible par 4 si le nombre formé par ses deux derniers chiffres est divisible par 4 (critère de divisibilité par 4). L'associé de n doit donc vérifier cette propriété. Or son dernier chiffre (les unités) est le même que celui de n, et son chiffres des dizaines est 0. L'associé de n est donc divisible par 4 si n se termine par 0, 4, ou 8 (l'associé de n se terminant alors par 00, 04 ou 08).

Cette condition est nécessaire et suffisante car sa réciproque est vraie.

5. Démontrer que les restes de la division euclidienne de n et de son associé par 5 sont les mêmes.

Tout nombre n peut se décomposer sous la forme $10 \times k + u$, u étant son chiffres des unités.

Le reste de la division de n par 5 est donc le même que le reste de la division de u par 5, $10 \times k$ étant un multiple de 5.

D'autre part la division euclidienne de n par 5 peut s'écrire $n = 5 \times q + r$ avec $r < 5$.

On conclut donc que, si $0 \leq u < 5$, alors u est le reste de cette division.

Si $5 \leq u \leq 9$, alors $r = u - 5$ (le quotient devient $q+1$).

D'autre part l'associé de n peut se décomposer sous la forme : $100 \times k + u$

Son reste dans la division par 5 est donc le même que celui de n, selon la valeur du chiffre des unités u.

Exercice 5 – Carrés contre carrés

On effectue à la calculatrice les calculs : $123^2 - 122^2 - 121^2 + 120^2 = 4$ $\quad 45^2 - 44^2 - 43^2 + 42^2 = 4$

1. Tester ce résultat surprenant sur une autre série de quatre nombres consécutifs et émettre une conjecture.

Essayons en partant de 10 : $10^2 - 9^2 - 8^2 + 7^2 = 100 - 81 - 64 + 49 = 4$

Conjecture : il semble que pour tout entier naturel n on ait : $(n+3)^2 - (n+2)^2 - (n+1)^2 + n^2 = 4$

2. Prouver que la conjecture faite précédemment est vraie

Démontrons cette conjecture en développant l'expression précédente.

$$\begin{aligned}(n+3)^2 - (n+2)^2 - (n+1)^2 + n^2 &= (n^2+6n+9) - (n^2+4n+4) - (n^2+2n+1) + n^2 \\ &= n^2 - n^2 - n^2 + n^2 + 6n - 4n - 2n + 9 - 4 - 1 \\ &= 4\end{aligned}$$

Exercice 6 – Nombres parfaits, déficients ou abondants

On justifiera toutes les réponses. Soit n un nombre entier naturel non nul.

On appelle f la fonction qui à n associe la somme des diviseurs de n.

Un nombre n est dit *parfait* lorsque : $f(n) = 2n$.

Un nombre n est dit *déficient* lorsque : $f(n) < 2n$.

Un nombre n est dit *abondant* lorsque : $f(n) > 2n$.

Dans l'exercice, on appelle « nature d'un nombre entier naturel non nul » sa classification dans l'une des catégories : nombre parfait, nombre déficient, nombre abondant.

1. a. Vérifier que 28 est un nombre parfait.
Les diviseurs de 28 sont 1 ; 2 ; 4 ; 7 ; 14 et 28 or 1 + 2 + 4 + 7 + 14 + 28 = 56.
La somme des diviseurs de 28 est égale à 2 × 28, donc 28 est un nombre parfait.

b. Quelle est la nature du nombre 12 ?
Les diviseurs de 12 sont 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 6 et 12. La somme des diviseurs de 12 est égale à 28, ce qui est supérieur à 2 × 12, donc 12 est un nombre abondant.

2. Trouver le plus petit nombre déficient, le plus petit nombre parfait et le plus petit nombre abondant.
Nous allons étudier systématiquement tous les entiers naturels non nuls dans l'ordre croissant, jusqu'à avoir trouvé un entier parfait, un abondant et un déficient.

Nombre	Diviseurs	Sommes des diviseurs	Nature
1	1	1	Déficient
2	1 ; 2	3	Déficient
3	1 ; 3	4	Déficient
4	1 ; 2 ; 4	7	Déficient
5	1 ; 5	6	Déficient
6	1 ; 2 ; 3 ; 6	12	Parfait
7	1 ; 7	8	Déficient
8	1 ; 2 ; 4 ; 8	15	Déficient
9	1 ; 3 ; 9	13	Déficient
10	1 ; 2 ; 5 ; 10	18	Déficient
11	1 ; 11	12	Déficient

On a montré à la question précédente que 12 est abondant, c'est donc le plus petit nombre abondant.
1 est le plus petit nombre déficient, et 6 le plus petit nombre parfait.

<u>Remarque</u> : en résolvant la question 3 avant la question 2, on raccourcirait la rédaction de celle ci puisqu'il ne serait plus nécessaire d'envisager les nombres premiers, tous déficients.

3. Quelle est la nature d'un nombre premier ?
Un nombre premier n a pour diviseurs 1 et n.
La somme de ses diviseurs est $n + 1$ ce qui est inférieur à $2n$ puisqu'un nombre premier est supérieur à 1.
Les nombres premiers sont donc tous déficients.

Exercice 7 – Un entier sous conditions

Déterminer le nombre N satisfaisant simultanément aux trois conditions ci-dessous :

(1) N est divisible par 6 (2) N n'est pas divisible par 8 (3) N a exactement 15 diviseurs.

N est divisible par 6, donc par 2 et par 3, il existe donc les facteurs 2 et 3 dans la décomposition de N en facteurs premiers.

Ainsi : $N = 2^p \times 3^q \times m$, où m est un nombre entier qui n'est multiple ni de 2, ni de 3.

En revanche, N n'est pas divisible par $8 = 2^3$, donc $p = 1$ ou $p = 2$.

On rappelle (Voir cours II.2.f. page 16-17) que si la décomposition de N en facteurs premiers est de la forme : $a^p \times b^q \times c^r \times d^s$, alors le nombre de diviseurs de N est égal à : $(p + 1) \times (q + 1) \times (r + 1) \times (s + 1)$.

Cette propriété se généralise à une décomposition en produit de facteurs premiers contenant plus de 4 facteurs.

Le nombre de diviseurs de N est donc divisible par $(p + 1)$.

Or on sait qu'il est égal à 15, donc le cas $p = 1$ est impossible, car 15 n'est pas divisible par 2.

Par conséquent $p = 2$.

Comme : $15 = 3 \times 5 = (2 + 1)(4 + 1)$, on en déduit que $q = 4$ et $m = 1$. D'où : $N = 2^2 \times 3^4 = 324$.

Exercice 8 – Blackjack !

On dit qu'un nombre est un nombre blackjack lorsque la somme de ses chiffres est égale à 21.

1. Existe-t-il des nombres blackjack à deux chiffres ? Pourquoi ? Quel est le plus petit nombre blackjack ?
Le plus grand des chiffres est 9. La somme maximale obtenue avec un nombre à deux chiffres est donc :

$$9 + 9 = 18 < 21.$$

Ainsi aucun nombre à deux chiffres ne peut être blackjack.

Le plus petit nombre blackjack aura donc trois chiffres et son chiffre des centaines ne peut être ni 1 ni 2 car il est impossible d'obtenir 20 ou 19 en sommant deux chiffres.
Ainsi 399 est le plus petit nombre blackjack car c'est le seul qui a 3 pour chiffre des centaines.

2. Quel est le plus grand nombre blackjack à cinq chiffres ? Expliciter la démarche suivie.

Il faut donner la valeur maximale possible au chiffre des dizaines de millier puis la valeur maximale possible aux milliers, puis la valeur maximale possible aux centaines et ainsi de suite jusqu'à obtenir 21.
On trouve : 99 300.

3. Trouver les deux nombres blackjack qui encadrent 2000 (le plus grand inférieur à 2000 et le plus petit supérieur à 2000). Expliciter la démarche suivie.

Ce sont 1 992 et 2 199.
On a adapté la méthode précédente en cherchant le plus grand nombre blackjack ayant 1 pour chiffre des milliers et le plus petit nombre blackjack ayant 2 pour chiffre des milliers.

4. a. Existe-t-il des nombres blackjack multiples de 9 ? Si oui les citer, sinon justifier la réponse.

Pour qu'un nombre soit un multiple de 9, il faut que la somme de ses chiffres soit un multiple de 9.
Comme 21 n'est pas un multiple de 9, aucun nombre blackjack ne peut être un multiple de 9.

b. Existe-t-il des nombres blackjack à trois chiffres multiples de 11 ? Si oui, les citer tous, sinon justifier la réponse.

Soit $n = \overline{cdu}$ un multiple de 11.
On sait alors que : $c + u - d$ est un multiple de 11.
Et la somme de trois chiffres ne peut dépasser : $9 + 9 + 9 = 27$, on sait alors que : $c + u - d = 0$ ou $c + d - u = 11$.
De plus comme n doit être un nombre blackjack, on doit aussi avoir : $c + d + u = 21$.

La résolution du système $\begin{cases} c + d + u = 21 \\ c + u - d = 0 \end{cases}$ donne : $2d = 21$ soit : $d = 10{,}5$ Ce qui ne convient pas.

La résolution du système $\begin{cases} c + d + u = 21 \\ c + u - d = 11 \end{cases}$ donne : $2d = 10$ soit : $d = 5$ puis : $c + u = 16$.

c	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$u = 16 - c$	15 NON	14 NON	13 NON	12 NON	11 NON	10 NON	9 OUI	8 OUI	7 OUI

On obtient donc trois nombres qui répondent à la question : 957 858 et 759.

5. On s'intéresse aux nombres blackjack N à quatre chiffres vérifiant les deux propriétés suivantes :

- Lorsqu'on intervertit le chiffre des dizaines avec celui des centaines, on obtient un nombre N' supérieur à N avec $N' - N = 450$.
- Lorsqu'on intervertit le chiffre des centaines avec celui des unités, on obtient un nombre N'' supérieur à N avec $N'' - N = 198$

Trouver tous les nombres N et justifier la réponse.

Si $N = \overline{mcdu}$ alors : $N' = \overline{mdcu}$ et $N'' = \overline{mudc}$
Les trois conditions se traduisent par :

$m + c + d + u = 21$
$N' - N = \overline{mdcu} - \overline{mcdu} = 1000m + 100d + 10c + u - 1000m - 100c - 10d - u = 90(d - c) = 450$
$N'' - N = \overline{mudc} - \overline{mcdu} = 1000m + 100u + 10d + c - 1000m - 100c - 10d - u = 99(u - c) = 198$

Ainsi : $\begin{cases} m + c + d + u = 21 \\ d - c = 5 \\ u - c = 2 \end{cases}$ puis : $\begin{cases} m + c + d + u = 21 \\ d = c + 5 \\ u = c + 2 \end{cases}$ alors : $\begin{cases} m + c + (c + 5) + (c + 2) = 21 \\ d = c + 5 \\ u = c + 2 \end{cases}$ Donc : $\begin{cases} m + 3c = 14 \\ d = c + 5 \\ u = c + 2 \end{cases}$

m	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$c = (14 - m)/3$	non entier	4	non entier	non entier	3	non entier	non entier	2	non entier
$d = c + 5$		9			8			7	
$u = c + 2$		6			5			4	

Il existe donc trois solutions au problème posé : $N = 2\,496$, $N = 5\,385$ et $N = 8\,274$.

Exercice 9 – Autour du nombre 1001

1. Ecrire 1 001 sous la forme d'un produit de 3 nombres entiers différents de 1.

En utilisant la décomposition en facteurs premiers, on peut écrire : 1001 = 7 × 11 × 13.

2. Trouver tous les diviseurs de 1 001. On s'attachera à présenter cette recherche de façon simple, claire et systématique.

On utilise la décomposition en facteurs premiers ainsi que l'arbre des diviseurs.
Un diviseur de 1001 est un entier du type $7^a \times 11^b \times 13^c$ avec a, b et c égaux à 0 ou à 1. (Voir cours II.2.e. page 15-16). On obtient donc tous les diviseurs de 1001 en construisant un « arbre des diviseurs » (cf page suivante)

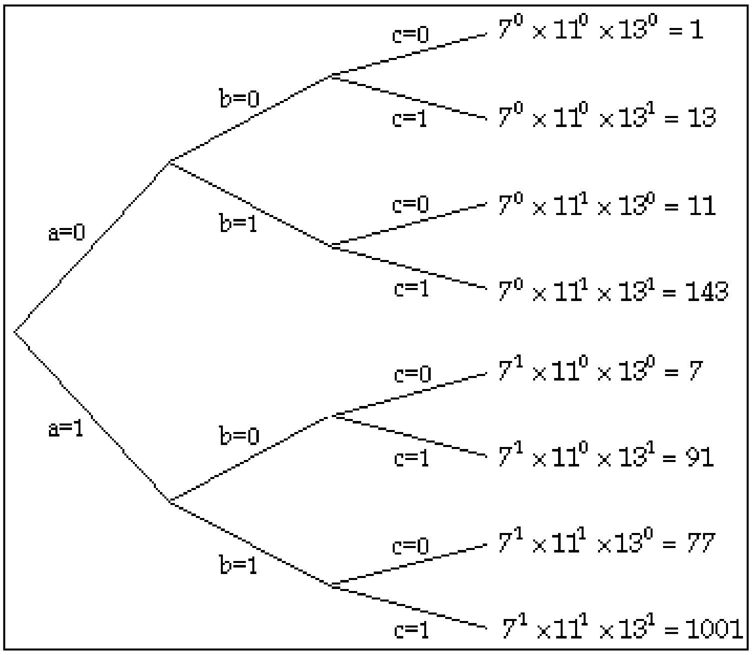
3. Soit un nombre qui s'écrit sous la forme $\overline{abcabc}$ où *a, b* et *c* sont des chiffres du système de numération positionnelle décimale avec $a \neq 0$. Quelle(s) condition(s) éventuelle(s) doivent vérifier a, *b,* c pour que le nombre $\overline{abcabc}$ soit :

a. $\overline{\text{abcabc}}$ multiple de 7 ?

$\overline{abcabc} = \overline{abc000} + \overline{abc} = 1000 \times \overline{abc} + \overline{abc} = 1001 \times \overline{abc}$.

En utilisant la décomposition en facteurs premiers de 1001, on peut écrire : $\overline{abcabc} = 7 \times 11 \times 13 \times \overline{abc}$.

Quels que soient les chiffres *a, b* et *c* ($a \neq 0$), $\overline{abcabc}$ est un multiple de 7 puisque 1001 est multiple de 7.



b. $\overline{\text{abcabc}}$ multiple de 13 ?

Quels que soient les chiffres *a, b* et *c* ($a \neq 0$), $\overline{abcabc}$ est un multiple de 13 puisque 1001 est multiple de 13.

c. $\overline{\text{abcabc}}$ multiple de 65 ?

$\overline{abcabc}$ est un multiple de 65 si et seulement s'il existe un entier *k* tel que $\overline{abcabc} = 65k$

La décomposition en facteurs premiers de 65 donne : $65 = 5 \times 13$

On peut alors écrire : $7 \times 11 \times 13 \times \overline{abc} = 5 \times 13 \times k$, d'où en simplifiant par 13 : $77 \times \overline{abc} = 5 \times k$

On a alors : $\overline{abcabc}$ est un multiple de 65 si et seulement si $77 \times \overline{abc} = 5 \times k$.

Alors 5 est un diviseur de $77 \times \overline{abc}$. On utilise alors le théorème de Gauss (Voir cours II.5.b. page 19) : « *Soit trois entiers naturels a, b, n non nuls. Si le produit ab est divisible par n et si a et n sont premiers entre eux, alors b est divisible par n.* »

Ici $a = 77$; $b = \overline{abc}$; $n = 5$.

On a PGCD(77 ; 5) = 1, donc les nombres 77 et 5 sont premiers entre eux et on en déduit que $\overline{abc}$ est divisible par 5.

On utilise alors le critère de divisibilité par 5 : un nombre est divisible par 5 si et seulement si son chiffre des unités est 0 ou 5.

On conclut alors : $\overline{abcabc}$ est un multiple de 65 si et seulement si $c = 0$ ou $c = 5$.

d. $\overline{\text{abcabc}}$ multiple de 63 ?

$\overline{abcabc}$ est un multiple de 63 si et seulement s'il existe un entier *k* tel que $\overline{abcabc} = 63k$

La décomposition en facteurs premiers de 63 donne : $63 = 3^2 \times 7$

On peut alors écrire : $7 \times 11 \times 13 \times \overline{abc} = 3^2 \times 7 \times k$, d'où en simplifiant par 7 : $11 \times 13 \times \overline{abc} = 9 \times k$

On a alors : $\overline{abcabc}$ est un multiple de 63 si et seulement si $11 \times 13 \times \overline{abc} = 9 \times k$.

Alors 9 est un diviseur de $11 \times 13 \times \overline{abc}$. On utilise encore ici le théorème de Gauss. On a PGCD(11×13 ; 3^2) = 1, donc les nombres 11×13 et 9 sont premiers entre eux et on en déduit que $\overline{abc}$ est divisible par 9.

On utilise alors le critère de divisibilité par 9 : un nombre est divisible par 9 si et seulement si la somme de ses chiffres est un multiple de 9.

On conclut alors : $\overline{abcabc}$ est un multiple de 63 si et seulement si $a + b + c$ est multiple de 9.

Comme *a, b, c* sont compris entre 0 et 9 (avec $a \neq 0$), on peut préciser que ce multiple de 9 ne peut être que 9, 18 ou 27.

Exercice 10 – Des problèmes autour du PGCD / PPCM

<u>Partie A</u> : Un fleuriste a reçu 1 756 roses blanches et 1 317 roses rouges. Il désire réaliser des bouquets identiques, c'est à dire comportant le même nombre de roses et la même répartition entre les roses rouges et les roses blanches, en utilisant toutes les fleurs.

1. Quel sera le nombre maximal de bouquets identiques ?

Appelons *n* le nombre maximal de bouquets cherché.

Pour que chaque bouquet comporte le même nombre de roses et la même répartition entre les roses rouges et les roses blanches en utilisant toutes les fleurs, il faut et il suffit que *n* soit un diviseur commun de 1 756 et 1 317.
n étant le nombre maximal de bouquets cherché, c'est le plus grand diviseur commun de 1 756 et 1 317 soit leur PGCD.
Calculons ce PGCD à l'aide de l'algorithme d'Euclide :

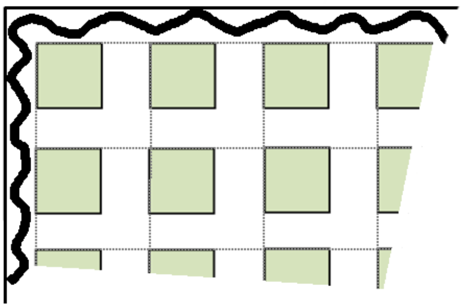
1 756 divisé par 1 317 a 439 pour reste
1 317 divisé par 439 a 0 pour reste

a	b	reste
1 756	1 317	439
1 317	439	**0**

On sait que le PGCD, obtenu par l'algorithme d'Euclide, est le premier reste non nul.
Donc le PGCD de 1 756 et 1 317 est **439**.
On en déduit que le fleuriste peut réaliser au maximum 439 bouquets.

2. Combien de roses de chaque couleur y aura t-il dans chaque bouquet ?
1 756 = 4 × 439. Chaque bouquet contiendra 4 roses blanches.
1 317 = 3 × 439. Chaque bouquet contiendra 3 roses rouges.

<u>Partie B</u> : On utilise ici un moule de pâtisserie ayant la forme d'un pavé droit de base carrée de côté 7 cm et de hauteur 1,5 cm.
Un four professionnel est composé de quatre plaques de cuisson rectangulaires de 40 cm par 70 cm. Le pâtissier veut disposer ses moules en lignes et en colonnes comme sur la figure ci-contre en laissant au moins 1 cm entre deux moules et au moins 1 cm entre les moules et le bord des plaques.
Combien de moules au maximum pourra-t-il placer dans son four ? Justifier.



Cet exercice pouvait se résoudre en schématisant correctement la situation.
En éliminant mentalement les marges d'en haut et de gauche, ce problème revient à placer le maximum de carrés de côté 8 cm, collés les uns aux autres, sur une plaque rectangulaire de 39 cm par 69 cm.
69 ÷ 8 ≃ 8,6 8 carrés au maximum par ligne
39 ÷ 8 ≃ 4,9 4 carrés au maximum par colonne
Soit : 8 × 4 = 32 moules par plaque
Ce four étant composé de quatre plaques de cuisson, il pourra contenir au maximum : 4 × 32 = 128 moules.

<u>Partie C</u> : Une machine A automatisée produit un son toutes les 1224 secondes, une autre machine B, elle aussi automatisée, produit un son toutes les 456 secondes. Elles sont mises en route au même instant.
1. Au bout de combien de secondes les deux sons seront-ils, pour la première fois, produits simultanément ?
Appelons *n* le nombre de secondes au bout desquelles les deux sons seront produits simultanément.
n doit être un multiple de 1224 pour entendre le son de la machine A et *n* doit être un multiple de 456 pour entendre le son de la machine B.
n est donc un multiple commun aux deux nombres 1224 et 456.
De plus, il est précisé que l'on cherche le cas où les deux sont produits en même temps pour la première fois, c'est-à-dire que l'on cherche la plus petite valeur de *n* possible.
On en déduit que *n* est le plus petit multiple commun à 1224 et à 456, c'est-à-dire le PPCM de 1224 et de 456.
Calculons ce PPCM à l'aide de la décomposition en facteurs premiers des deux nombres.

$$1224 = 2^3 \times 3^2 \times 17 \quad \text{et} \quad 456 = 2^3 \times 3 \times 19.$$

Le PPCM est obtenu en faisant le produit de tous les facteurs qui figurent dans l'une ou l'autre des deux décompositions, affectés de l'exposant le plus grand avec lequel il figure dans l'une des décompositions.
Donc PPCM(1224 ; 456) = $2^3 \times 3^2 \times 17 \times 19$ = 23 256.
Les deux sons seront donc produits simultanément pour la première fois au bout de 23 256 secondes.

2. Donner la réponse précédente en heures, minutes et secondes.
Comme il y a 3600 secondes dans une heure, divisons 23 256 par 3600 pour obtenir le nombre d'heures :
23 256 : 3600 = 6,46.
Il y a donc 6 heures et il reste 0,46 heures.
Convertissons 0,46 heures en minutes : 0,46 × 60 = 27,6.
Il y a donc 6 heures et 27 minutes et il reste 0,6 minute que l'on convertit en secondes : 0,6 × 60 = 36.
Les deux sons seront donc produits simultanément pour la première fois au bout de 6 heures, 27 minutes et 36 secondes.