DIKTAT

MEKANIKA KLASIK I

D

I

S

U

S

U

N

Oleh:

Ety Jumiati, S.Pd, M.Si
NIB. 1100000072

PROGRAM STUDI FISIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
SUMATERA UTARA
MEDAN
2020

SURAT REKOMENDASI

Saya yang bertanda tangan di bawah ini

Nama	:	Dr. Abdul Halim Daulay, S.T, M.Si
NIP.	:	198111062005011003
Pangkat/ Gol.	:	Penata Tk.I (III/d)
Unit Kerja	:	Fakultas Sains dan Teknologi

menyatakan bahwa diktat saudara

Nama	:	Ety Jumiati, S.Pd, M.Si
NIB	:	1100000072
Pangkat/ Gol.	:	Penata Muda Tk.I/ III b
Unit Kerja	:	Program Studi Fisika Fakultas Sains dan Teknologi UIN SU Medan
Judul Diktat	:	Mekanika Klasik I

Telah memenuhi syarat sebagai suatu karya ilmiah (Diktat) dalam mata kuliah Mekanika I pada Program Studi Fisika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sumatera Utara Medan.

Demikianlah rekomendasi ini diberikan untuk dapat dipergunakan seperlunya.

Medan, 1 September 2020
Yang Menyatakan,

Dr. Abdul Halim Daulay, ST, M.Si
NIP. 198111062005011003

KATA PENGANTAR

بسم الله الرحمن الرحيم

Alhamdulillah segala puji hanya milik Allah Tuhan sekalian alam. Atas berkat rahmat dan karuniaNya, saya dapat menyelesaikan penulisan diktat ini dengan judul "**Mekanika Klasik I**". Shalawat dan salam senantiasa tercurah kepada Muhammad SAW beserta kerabat, sahabat, para pengikutnya sampai akhir zaman, adalah sosok yang telah membawa manusia dan seisi alam dari kegelapan ke cahaya sehingga kita menjadi manusia beriman, berilmu, dan tetap beramal shaleh agar menjadi manusia yang berakhlak mulia.

Penulisan diktat ini bertujuan untuk melengkapi persyaratan pengusulan kenaikan pangkat di Fakultas Sains dan Teknologi Program Fisika UIN Sumatera Utara, Medan. Diktat ini juga diharapkan dapat menambah wawasan ilmu pengetahuan, khususnya mahasiswa fisika dalam instalasi nilai-nilai Islam yang terpadu dalam proses pembelajaran di lingkungan UIN Sumatera Utara, Medan.

Dalam penulisan diktat ini, saya sangat menyadari bahwa masih banyak kekurangan yang perlu perbaikan di sana sini, sumbangan pemikiran yang membangun sangat penulis harapkan dari rekan-rekan sejawat terutama dari dosen-dosen senior yang terhimpun dalam mata kuliah serumpun. Juga usulan dari para pengguna bahan ajar ini terutama mahasiswa fisika, semoga konten mekanika klasik I dapat diperkaya melalui evaluasi terus menerus. Atas segala budi baik yang telah penulis terima dari semua pihak untuk itu saya ucapkan ribuan terima kasih. Semoga Allah SWT membalas kebaikan seluruh rekan sekalian dengan ganjaran yang berlipat ganda, Amiin.

Medan, 1 September 2020
Penulis

Ety Jumiati, S.Pd, M.Si
NIB. 1100000072

DAFTAR ISI

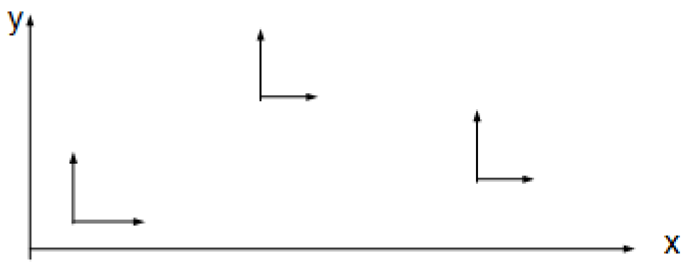
BAB I

KINEMATIKA PARTIKEL

A. KINEMATIKA PARTIKEL

Pada ilmu fisika terdapat terdapat beberapa bagian, salah satunya yaitu cabang ilmu mekanika dimana ilmu yang mempelajari tentang gerak tetapi tidak melihat bagaimana dan apa yang menyebabkan benda itu, ini disebut ***kinematika***. Sedangkan apabila kita melihat adanya gaya penggerak dari benda tersebut maka ini adalah bagian dari ***dinamika***.

Partikel didefinisikan sebagai benda yang mempunyai ukuran sangat kecil. Adapun cara untuk melihat benda yang akan diamati ini biasanya dikatakan sebagai pendekatan dari partikel gerak translasi murni. Gerak translasi terjadi apabila benda bergerak menuju sumbu acuan yang ditentukan pada benda (x',y',z') selalu lurus atau sejajar dengan sumbu acuannya sendiri (x,y,z).[1]



Gambar 2.1. Vektor dalam 2 Dimensi

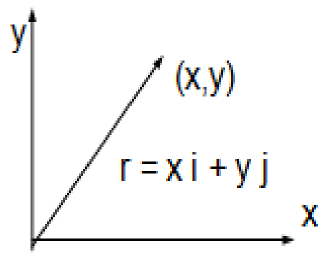
Yang dikatakan vektor posisi adalah suatu besaran vektor yang mempunyai posisi tertentu yang ditentukan dari titik pusat atau titik acuan.

Rumus vektor posisi dapat dinyatakan dalam suatu sistem koordinat sebagai berikut:

r = xi +yj dan besar vektor: $|r| = \sqrt{x^2 + y^2}$

[1]Halliday, D., R. Resnick, Walker, J. 2012. *Fisika Dasar*. Edisi 7. Jilid 1. Jakarta: Erlangga

Perhatikan gambar berikut:



Gambar 2.2. Vektor posisi dalam 2 Dimensi

Contoh soal:

Jika suatu benda mempunyai posisi sumbu x positif 6 satuan, sumbu y positif 8 satuan. Tentukan vektor posisi dan besar jarak posisi dari pusat sumbu koordinat?

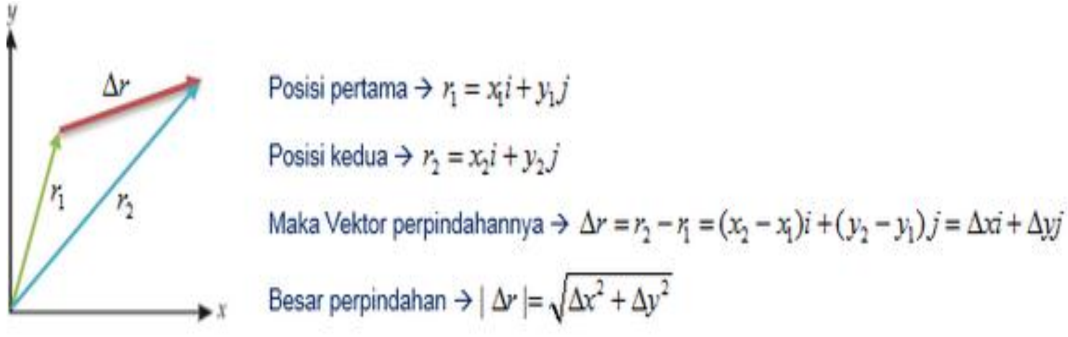
Penyelesaian:

Dik : x = 6 satuan dan y = 8 satuan,

Dit : r dan |r|

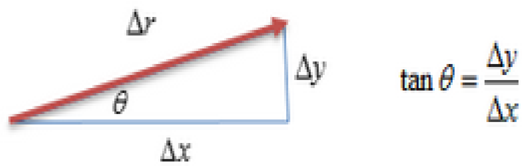
Jawab : r = 6 i + 8 j dan $|r| = \sqrt{6^2 + 8^2} = \sqrt{100} = 10\ satuan$

Jika benda dikatakan berpindah yaitu apabila posisi benda tersebut berubah dari satu titik ke itik acuan. Sedangkan vektor perubahan posisi adalah vektor perpindahan.



Gambar 2.3. Vektor perpindahan dalam 2 Dimensi

Arah perpindahan terhadap sumbu x :



Gambar 2.4. Arah perpindahan dalam 2 Dimensi

Vektor A secara umum dapat ditulis atas komponen-komponen sebagai berikut:

$$A = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}$$

Operasi diferensial menghasilkan:

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{dA_x}{dt}\hat{i} + \frac{dA_y}{dt}\hat{j} + \frac{dA_z}{dt}\hat{k}$$

$$\frac{d}{dt}(\vec{A}+\vec{B}) = \frac{d\vec{A}}{dt} + \frac{d\vec{B}}{dt}$$

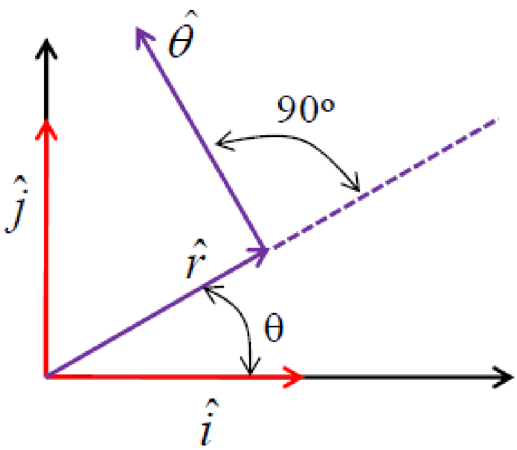
$$\frac{d}{dt}(\varphi(x)\vec{A}) = \varphi(x)\frac{d\vec{A}}{dt} + \vec{A}\frac{d\varphi(x)}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}(\vec{A}\bullet\vec{B}) = \frac{d\vec{A}}{dt}\bullet\vec{B} + \vec{A}\bullet\frac{d\vec{B}}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}(\vec{A}\times\vec{B}) = \frac{d\vec{A}}{dt}\times\vec{B} + \vec{A}\times\frac{d\vec{B}}{dt}$$

B. VEKTOR DALAM GERAKAN 2-DIMENSI

Vektor satuan dalam koordinat polar:



Gambar 2.5. Vektor satuan dalam 2 Dimensi

Beradasarkan gambar di atas, kita mendapatkan hubungan berikut ini

$$\hat{r} = \hat{i}|\hat{r}|\cos\theta + \hat{j}|\hat{r}|\sin\theta = \hat{i}\cos\theta + \hat{j}\sin\theta$$

Vektor satuan $\hat{\theta}$ sama dengan vector $\hat{r}$ yang diputar sebesar 90o. Jadi kita dapat menulis

$$\hat{\theta} = \hat{i}\cos(\theta + 90^{o}) + \hat{j}\sin(\theta + 90^{o}) = -\hat{i}\sin\theta + \hat{j}\cos\theta$$

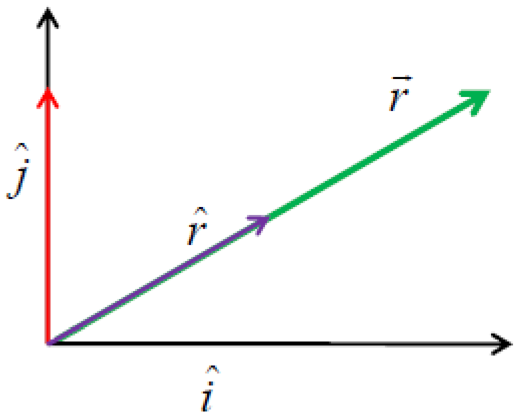
Sekarang kita mencari diferensial dari vector-vektor tersebut

$$\frac{d\hat{r}}{d\theta} = \left(-\hat{i}\sin\theta + \hat{j}\cos\theta\right) = \hat{\theta}$$

$$\frac{d\hat{\theta}}{d\theta} = \left(-\hat{i}\cos\theta - \hat{j}\sin\theta\right) = -\hat{r}$$

Vektor $\vec{r}$ sembarang dapat ditulis dalam bentuk

$$\vec{r} = r\hat{r}$$



Dari ekpresesi ini kita dapat menentukan kecepatan sebagai berikut

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(r\hat{r}) = \frac{dr}{dt}\hat{r} + r\frac{d\hat{r}}{dt} = \frac{dr}{dt}\hat{r} + r\frac{d\hat{r}}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \dot{r}\hat{r} + r\hat{\theta}\dot{\theta}$$

Ungkapan ini dapat ditulis sebagai

$$\vec{v} = v_r\hat{r} + v_\theta\hat{\theta}$$

Dengan $v_r = \dot{r}$ dan $v_\theta = r\dot{\theta}$

Percepatan adalah

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\dot{r}}{dt}\hat{r} + \dot{r}\frac{d\hat{r}}{dt} + \frac{dr}{dt}\dot{\theta}\hat{\theta} + r\frac{d\dot{\theta}}{dt}\hat{\theta} + r\dot{\theta}\frac{d\hat{\theta}}{dt}$$

$$= \ddot{r}\hat{r} + \dot{r}\frac{d\hat{r}}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} + \dot{r}\dot{\theta}\hat{\theta} + r\ddot{\theta}\hat{\theta} + r\dot{\theta}\frac{d\hat{\theta}}{d\theta}\frac{d\theta}{dt}$$

$$= \ddot{r}\hat{r} + \dot{r}\hat{\theta}\dot{\theta} + \dot{r}\dot{\theta}\hat{\theta} + r\ddot{\theta}\hat{\theta} + r\dot{\theta}(-\hat{r})\dot{\theta} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{r} + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\hat{\theta}$$

Ungkapan ini dapat juga ditulis sebagai

$$\vec{a} = a_r\hat{r} + a_\theta\hat{\theta}$$

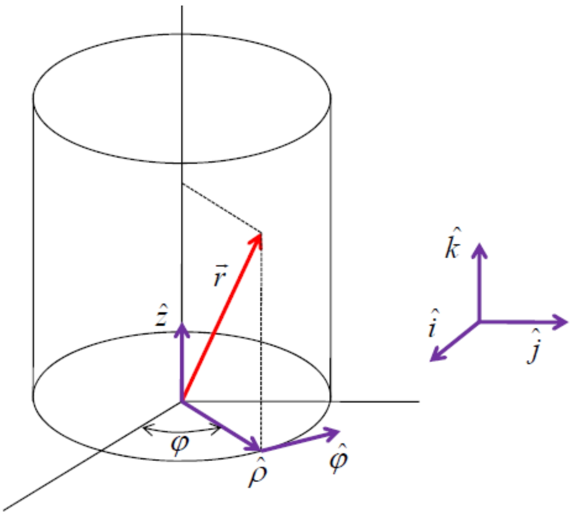
Dengan $a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2$ dan $a_\theta = 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}$. Suku $r\dot{\theta}^2$ dikenal dengan percepatan sentripetal.

Untuk gerak dalam lintasan lingkaran maka r = konstan sehingga $\dot{r} = \ddot{r} = 0$ dan

$$\vec{a} = -r\dot{\theta}^2\hat{r} + r\ddot{\theta}\hat{\theta}$$

C. VEKTOR DALAM GERAKAN 3-DIMENSI

Kita tinjau koordinat silinder berikut ini:



Gambar 2.6. Koordinat silinder dalam 3 Dimensi

Tampak dari gambar bahwa hugungan antara koordinat silinder dan Cartesian sebagai berikut:

$x = \rho \cos\theta$, $y = \rho \sin\theta$, $z = z$

Hubungan antara vektor satuan dalam koordinat silinder dan Cartesian

$\hat{\rho} = \hat{i} \cos\varphi + \hat{j} \sin \varphi$

Vektor satuan $\hat{\varphi}$ dapat diperoleh dari $\hat{\rho}$ dengan merotasi sebesar 90o. Jadi kita dapat menulis:

$\hat{\varphi} = \hat{i}\cos(\varphi + 90^o) + \hat{j}\sin(\varphi + 90^o) = -\hat{i}\sin \varphi + \hat{j}\cos\varphi$

Terakhir, vektor satuan arah sumbu z sama dengan vektor satuan dalam koordinat Cartesian, yaitu:

$\hat{z} = \hat{k}$

Turunan dari vektor satuan:

$$\frac{d\hat{\rho}}{d\varphi} = -\hat{i}\sin\varphi + \hat{j}\cos\varphi = \hat{\varphi}$$

$$\frac{d\hat{\varphi}}{d\varphi} = -\hat{i}\cos\varphi - \hat{j}\sin\varphi = -\hat{\rho}$$

Posisi benda dalam koordinat silinder secara umum dapat ditulis:

$r = \rho\hat{\rho} + z\hat{z}$

Kecepatan benda adalah

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\rho}{dt}\hat{\rho} + \rho\frac{d\hat{\rho}}{dt} + \frac{dz}{dt}\hat{z}$$

$$= \frac{d\rho}{dt}\hat{\rho} + \rho\frac{d\hat{\rho}}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt} + \frac{dz}{dt}\hat{z} = \dot{\rho}\hat{\rho} + \rho\hat{\varphi}\dot{\varphi} + \dot{z}\hat{z}$$

Percepatan

$$\vec{a}=\frac{d\vec{v}}{dt}=\frac{d\dot{\rho}}{dt}\hat{\rho}+\dot{\rho}\frac{d\hat{\rho}}{dt}+\frac{d\rho}{dt}\hat{\varphi}\dot{\varphi}+\rho\frac{d\dot{\varphi}}{dt}\hat{\varphi}+\rho\dot{\varphi}\frac{d\hat{\varphi}}{dt}+\frac{d\dot{z}}{dt}\hat{z}$$

$$=\ddot{\rho}\hat{\rho}+\dot{\rho}\frac{d\hat{\rho}}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt}+\dot{\rho}\hat{\varphi}\dot{\varphi}+\rho\ddot{\varphi}\hat{\varphi}+\rho\dot{\varphi}\frac{d\hat{\varphi}}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt}+\ddot{z}\hat{z}$$

$$=\ddot{\rho}\hat{\rho}+\dot{\rho}\hat{\varphi}\dot{\varphi}+\dot{\rho}\hat{\varphi}\dot{\varphi}+\rho\ddot{\varphi}\hat{\varphi}+\rho\dot{\varphi}(-\hat{\rho})\dot{\varphi}+\ddot{z}\hat{z}$$

$$=(\ddot{\rho}-\rho\dot{\varphi}^{2})\hat{\rho}+(2\dot{\rho}\dot{\varphi}+\rho\ddot{\varphi})\hat{\varphi}+\ddot{z}\hat{z}$$

Sebuah vektor sembarang dalam koordinat silinder dapat ditulis sebagai:

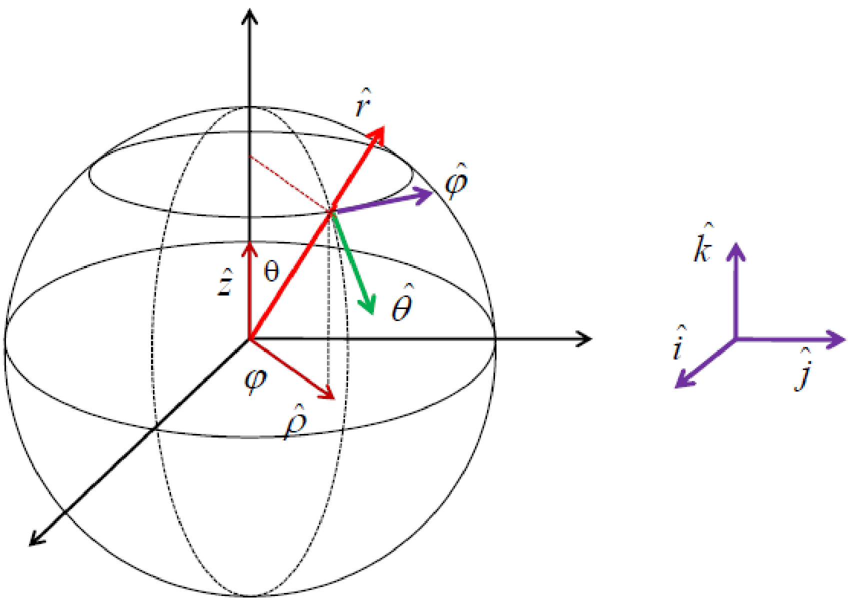
$$\vec{A}=A_{\rho}\hat{\rho}+AA_{\varphi}\hat{\varphi}+A_{z}\hat{z}$$

Diferensial vektor tersebut terhadap waktu memberikan:

$$\frac{d\vec{A}}{dt}=\frac{dA_{\rho}}{d\rho}\hat{\rho}+A_{\rho}\frac{d\hat{\rho}}{dt}+\frac{dA_{\varphi}}{dt}\hat{\varphi}+A_{\varphi}\frac{d\hat{\varphi}}{dt}+\frac{dA_{z}}{dz}\hat{z}$$

$$=(\dot{A}_{\rho}-A_{\varphi}\dot{\varphi})\hat{\rho}+(\dot{A}_{\varphi}+A_{\rho}\dot{\varphi})\hat{\varphi}+\dot{A}_{z}\hat{z}$$

Berikut adalah vektor-vektor dalam koordinat bola:



Gambar 2.7. Koordinat bola dalam 2 Dimensi

Perhatikan vector satuan $\hat{r}$ dan $\hat{\theta}$ dapat dinyatakan sebagai superposisi vector satuan $\hat{k}$ dan $\hat{\rho}$.

Vektor tersebut membentuk sudut θ terhadap vektor $\hat{k}$ sehingga dapat ditulis:

$$\hat{r} = \hat{k}\cos\theta + \hat{\rho}\sin\theta$$

$$\hat{\theta} = -\hat{k}\sin\theta + \hat{\rho}\cos\theta$$

Ketika kita bahas koordinat silinder, kita sudah memiliki bentuk ungkapan vector $\hat{\rho}$. Masukkan ke dalam persamaan di atas diperoleh:

$$\hat{r} = \hat{k}\cos\theta + (\hat{i}\cos\varphi + \hat{j}\sin\varphi)\sin\theta = \hat{i}\cos\varphi\sin\theta + \hat{j}\sin\varphi\sin\theta + \hat{k}\cos\theta$$

$$\hat{\theta} = -\hat{k}\sin\theta + (\hat{i}\cos\varphi + \hat{j}\sin\varphi)\cos\theta = \hat{i}\cos\varphi\cos\theta + \hat{j}\sin\varphi\cos\theta - \hat{k}\sin\theta$$

Vektor satuan $\hat{\varphi}$ dapat diperoleh dari vector satuan $\hat{\rho}$ melalui pemutaran sudut φ sebesar 90^o.

Jadi kita peroleh:

$$\hat{\varphi} = \hat{i}\cos(\varphi + 90^o) + \hat{j}\sin(\varphi + 90^o) = -\hat{i}\sin\varphi + \hat{j}\cos\varphi$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$= \frac{d\dot{r}}{dt}\hat{r} + \dot{r}\frac{d\hat{r}}{dt} + \frac{dr}{dt}\dot{\theta}\hat{\theta} + r\frac{d\dot{\theta}}{dt}\hat{\theta} + r\dot{\theta}\frac{d\hat{\theta}}{dt} + \frac{dr}{dt}\dot{\varphi}\sin\theta\hat{\varphi} + r\frac{d\dot{\varphi}}{dt}\sin\theta\hat{\varphi} + r\dot{\varphi}\frac{d\sin\theta}{dt}\hat{\varphi} + r\dot{\varphi}\sin\theta\frac{d\hat{\varphi}}{dt}$$

Berikutnya kita cari diferensial masing-masing vektor satuan di atas:

$$\frac{d\hat{r}}{d\theta} = \hat{i}\cos\varphi\cos\theta + \hat{j}\sin\varphi\cos\theta - \hat{k}\sin\theta = \hat{\theta}$$

$$\frac{d\hat{\theta}}{d\theta} = -\hat{i}\cos\varphi\sin\theta - \hat{j}\sin\varphi\sin\theta - \hat{k}\cos\theta = -\hat{r}$$

$$\frac{d\hat{\varphi}}{d\theta} = 0$$

$$\frac{d\hat{r}}{d\varphi} = -\hat{i}\sin\varphi\sin\theta + \hat{j}\cos\varphi\sin\theta = (-\hat{i}\sin\varphi + \hat{j}\cos\varphi)\sin\theta = \hat{\varphi}\sin\theta$$

$$\frac{d\hat{\theta}}{d\varphi} = -\hat{i}\sin\varphi\cos\theta + \hat{j}\cos\varphi\cos\theta = \hat{\varphi}\cos\theta$$

$$\frac{d\hat{\varphi}}{d\varphi} = -\hat{i}\cos\varphi - \hat{j}\sin\varphi = -\hat{r}\sin\theta - \hat{\theta}\cos\theta$$

Posisi benda dalam koordinat bola secara umum dapat ditulis:

$r = r\hat{r}(\theta, \varphi)$

Dari ungkapan posisi ini kita hitung kecepatan sebagai berikut:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dr}{dt}\hat{r} + r\frac{d\hat{r}}{dt}$$

$$= \frac{dr}{dt}\hat{r} + r\left(\frac{d\hat{r}}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} + \frac{d\hat{r}}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt}\right)$$

$$= \dot{r}\hat{r} + r\left(\hat{\theta}\dot{\theta} + \hat{\varphi}\sin\theta\dot{\varphi}\right) = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta} + r\dot{\varphi}\sin\theta\hat{\varphi}$$

Persamaan percepatan benda adalah:[2]

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$= \frac{d\dot{r}}{dt}\hat{r} + \dot{r}\frac{d\hat{r}}{dt} + \frac{dr}{dt}\dot{\theta}\hat{\theta} + r\frac{d\dot{\theta}}{dt}\hat{\theta} + r\dot{\theta}\frac{d\hat{\theta}}{dt} + \frac{dr}{dt}\dot{\varphi}\sin\theta\hat{\varphi} + r\frac{d\dot{\varphi}}{dt}\sin\theta\hat{\varphi} + r\dot{\varphi}\frac{d\sin\theta}{dt}\hat{\varphi} + r\dot{\varphi}\sin\theta\frac{d\hat{\varphi}}{dt}$$

[2]Abdullah Mikrajuddin. 2013. *Diktat Mekanika*. Bandung: ITB

Kalian dapat buktikan bahwa percepatan memenuhi persamaan

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\varphi}^2 \sin^2\theta)\hat{r} + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\varphi}^2 \sin\theta\cos\theta)\hat{\theta}$$

$$+ (r\dot{\varphi}^2 \sin\theta + 2\dot{r}\dot{\theta}\sin\theta + 2r\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos\theta)\hat{\varphi}$$

Sebuah vector sembarang dalam koordinat bola dapat ditulis sebagai

$$\vec{A} = A_r\hat{r} + A_\theta\hat{\theta} + A_\varphi\hat{\varphi}$$

Diferensial vector tersebut terhadap waktu memberikan

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{dA_r}{dr}\hat{r} + A_r\frac{d\hat{r}}{dt} + \frac{dA_\theta}{dt}\hat{\theta} + A_\theta\frac{d\hat{\theta}}{dt} + \frac{dA_\varphi}{dt}\hat{\varphi} + A_\varphi\frac{d\hat{\varphi}}{dt}$$

$$= \left(\dot{A}_r - A_\theta\dot{\theta} - A_\varphi\dot{\varphi}\sin\theta\right)\hat{r} + (\dot{A}_\theta + A_r\dot{\theta} - A_\varphi\dot{\varphi}\cos\theta)\hat{\theta} + (\dot{A}_\varphi + A_r\dot{\varphi}\sin\theta + A_\theta\dot{\theta}\cos\varphi)\hat{\varphi}$$

Contoh 1.1

Vektor posisi dari suatu partikel yang bergerak pada suatu saat dinyatakan $\vec{r}(x,y)$. Besarnya kecepatan sesaat dari partikel tersebut adalah

(A) $\frac{d\vec{r}}{dt}$ (B) $\frac{|d\vec{r}|}{dt}$

(C) $\frac{d|\vec{r}|}{dt}$ (D) $\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$

Jawaban:

Jawaban yang benar adalah B dan D

Contoh 1.2

Sebuah partikel bergerak dalam bidang $(x,\ y)$ dengan percepatan konstan. Pada saat $t = 0$, partikel berada di $\vec{r} = 4\hat{i} + 3\hat{j}$ m. Pada $t = 2$ s, partikel bergerak ke $\vec{r} = 10\hat{i} - 2\hat{j}$ m serta kecepatannya berubah menjadi $\vec{v} = 5\hat{i} - 6\hat{j}$ m/s.

(a) Berapakah percepatan partikel?

(b) Berapakah kecepatan partikel sebagai fungsi waktu?

(c) Bagaimanakah vektor posisi partikel sebagai fungsi waktu?

Jawaban

(a) $\vec{a} = 2\hat{i} - 3{,}5\hat{j}$ m/s²

(b) $\vec{v} = (1 + 2t)\hat{i} + (1 - 3{,}5t)\hat{j}$ m/s

(c) $\vec{r} = (4 + t + t^2)\hat{i} + (3 + t - 1{,}75t^2)\hat{j}$ m

Test Formatif

1. Tiga buah gaya masing-masing

   $\vec{F}_1 = (3x + 4y - 5z)$ N

   $\vec{F}_2 = (6x + 6y + 6z)$ N

   $\vec{F}_3 = (21x - 16y + 17z)$ N

   Bekerja pada suatu massa 6 kg. Berapakah percepatan massa tersebut?

2. Partikel bermassa m bergerak pada bidang xy ditarik secara linear ke pusat gaya $F = -kr = -k(x, y)$ dimana k adalah konstanta positif. Tentukan lintasan partikel tersebut jika kondisi awal $t = 0$

3. Tunjukkan bahwa percepatan benda titik materi untuk koordinat polar percepatan radial dan percepatan anguler

$$\vec{a}_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2$$

$$\vec{a}_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}$$

4. Tunjukkan bahwa untuk partikel tunggal dengan massa konstan, persamaan gerak menunjukkan persamaan differensial untuk energi kinetik sebagai berikut.

$$\frac{dT}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

5. Hitung momentum anguler untuk partikel pada posisi $\vec{r}$ = (1, -2, 3) and $\vec{p}$ = (7, -1, 1). Cari sudut antara vektor posisi dan vektor momentum!

BAB II

DINAMIKA PARTIKEL

A. HUKUM NEWTON

Pegetahuan dasar dari dinamika benda titik adalah definisi dari gaya, yaitu apa yang menyebabkan adanya perubahan gerak, sedangkan massa adalah ukuran dari kele ia). Inersia yaitu kebiasaan benda untuk tetap diam atau bergerak l ini dapat dilihat dari penerapan Hukum Newton, baik yang memenuhi hukum I Newton dan sebaliknya. Yang menjadi pokok dari permasalahan mekanika yaitu menjabarkan persamaan Newton yaitu:[3]

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{F}$$

Untuk kasus ini kita memiliki: $m\frac{d^2x}{dt^2} = F$

Suatu gaya bisa dikatakan besaran tetap (konstan), apabila tergantung dari posisi, waktu dan kecepatan. Contoh:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F_0$$

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F(t)$$

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F(v)$$

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F(x)$$

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F(t,x)$$

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F(t,v,x)$$

---

[3] Tipler, Paul A. 1998. *Fisika untuk Sains dan Teknik*. Jilid 1. Edisi 3. Alih Bahasa: Lea Prasetio dan Rahmad W Adi. Jakarta: Erlangga

Apabila fungsi waktu telah diketahui, maka besaran mekanika lainnya dapat ditulis:

Laju $v = \frac{dx}{dt}$

Momentum: $p = mv$

Energy kinetik: $K = \frac{1}{2}mv^2$

Energi potensial: $U = \frac{1}{2}kx^2$ (pegas), atau $U = mgx$ (gravitasi)

Contoh:

Jika $F = -kx$ (gaya pegas) maka

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx$$

Misalkan $x = A\cos(\omega t + \theta)$ maka

$$\frac{dx}{dt} = -\omega A\sin(\omega t + \theta)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 A\cos(\omega t + \theta) = -\omega^2 x$$

Substirusi ke dalam persamaan awal diperoleh

$$-m\omega^2 x = -kx$$

Atau

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Jadi, kebergantungan posisi terhadap waktu menjadi

$$x = A\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \theta\right)$$

Dengan A dan θ adalah konstanta.

B. TEOREMA USAHA ENERGI

TEOREMA USAHA ENERGI

Kita mulai dari hukum Newton

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F$$

Atau

$$m\frac{dv}{dt} = F$$

Kalikan dua sisi dengan dx maka

$$m\frac{dv}{dt}dx = Fdx$$

$$m\frac{dx}{dt}dv = Fdx$$

$$mvdv = Fdx$$

$$m\int_{v_0}^{v} vdv = \int_{x_0}^{x} Fdx$$

Atau

$$m \times \frac{1}{2}\left(v^2 - v_0^2\right) = \int_{x_0}^{x} Fdx$$

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = \int_{x_0}^{x} Fdx$$

Kita definsikan energi kinetik, $K = ½ mv^2$. Dengan demikian, nilai integral

$\int_{x_0}^{x} Fdx$ sama dengan perubahan energi kinetik benda. Nilai $\int Fdx$ tidak lain daripada gaya total yang bekerja untuk perpindahan benda dari posisi x_0 menjadi x. Jadi kita simpulkan *gaya total yang bekerja pada benda = perubahan energi kinetik benda*. Biasa ini disebut ***teorema usaha energi***.[4]

C. GAYA KONSERVATIF DAN NON KONSERVATIF

Jika gaya F hanya merupakan fungsi posisi, atau

$$F = F(x)$$

Maka integral $\int_{x_0}^{x} Fdx$ melahirkan sebuah fungsi posisi juga. Kita misalkan fungsi yang dihasilkan dari integral $\int F(x)dx = -U(x)$. Kita berikan tanda negative di depan untuk kemudahan. Dengan sifat ini maka kita dapatkan dua persamaan berikut

$$\boxed{\int F(x)dx = -V(x)}$$

$$\boxed{F(x) = -\frac{dV(x)}{dx}} \qquad \boxed{\int_{x_0}^{x} F(x)dx = V(x_0) - V(x)}$$

Gaya yang hanya merupakan fungsi posisi seperti ini disebut gaya konservatif. Yang menarik dari gaya konservatif adalah jika benda kembali ke posisi awal , atau $x = x_0$, maka: $\int_{x_0}^{x_0} Fdx = V(x_0) - V(x_0) = 0$.

Dengan demikian, kerja yang dilakukan gaya konservatif menempuh lintasan apa pun dan kembali ke posisi awal selalu nol.

Jika gaya yang bekerja pada benda bukan fungsi posisi saja maka kita tidak menemukan fungsi apa pun yang sama dengan $\int F(x)dx$. Akibatnya, jika benda kembali ke posisi semula maka kita tidak memiliki bentuk $V(x0) - V(x0)$ karena fungsi V(x) tidak ada. Dengan demikian, kerja yang dilakukan bisa

[4] Laintarawan I Putu, dkk. 2009. *Buku Ajar Mekanika*. Denpasar: Universitas Hindu Indonesia

berbeda dengan nol. Gaya dengan sifat demikian disebut gaya non-konservatif. Ketika melakukan kerja, gaya non-konservatif biasanya menghasilkan panas. Contoh : gaya gesekan.

D. MENENTUKAN PERSAMAAN GERAK DARI KONSEP ENERGI MEKANIK

Kita sudah membahas pencarian posisi benda menggunakan hukum II Netown. Jika gaya diketahui maka pada dasarnya kita dapat mencari posisi setiap saat dengan melakukan dua kali integral.

Cara kedua adalah berangkat dari persamaan energi mekanik. Cara ini bermuara pada hasil yang sama dengan penggunaan hokum Newton, karena pada dasarnya energy potensial yang berada dalam ungkapan energy mekanik dapat diperoleh dari gaya pada hokum Newton. Pendekatan energy ini memungkinkan kita hanya melakukan satu kali integral, sedangkan pendekatan gaya memerlukan dua kali integral.

Tetapi harus diingat, pendekatan energy hanya dapat dilakukan jika gagaya yang bekerja hanya gaya konservatif. Jika gaya yang bekerja juga gaya non-konservatif maka tidak ada pilihan lain kecuali menggunakan hukum II Newton.[5]

Dari persamaan energy mekanik $E = \frac{1}{2}mv^2 + V(x)$, kita dapat menulis

$$v = \sqrt{\frac{2}{m}\left[E - V(x)\right]}$$

Ganti v dengan dx/dt, maka

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m}\left[E - V(x)\right]}$$

[5] Erway, Raymond A., John W. Jewett Jr. 2009. *Fisika: untuk Sains dan Tteknik. Edisi 6. Buku1*. Alih Bahasa: Chriswan Sungkono. Jakarta: Salemba Teknika

$$\frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}[E - V(x)]}} = dt$$

$$\int_{x_0}^{x} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}[E - V(x)]}} = \int_{t_0}^{t} dt$$

Ruas kanan dapat langsung diintegralkan dan menghasilkan

$$\int_{x_0}^{x} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}[E - V(x)]}} = t - t_0$$

Ruas kiri baru bisa diintegralkan jika kita sudah mengetahui secara eksplisit bentuk fungsi V(x).

E. MOMENTUM SUDUT

Momentum sudut disefinisikan sebagai

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

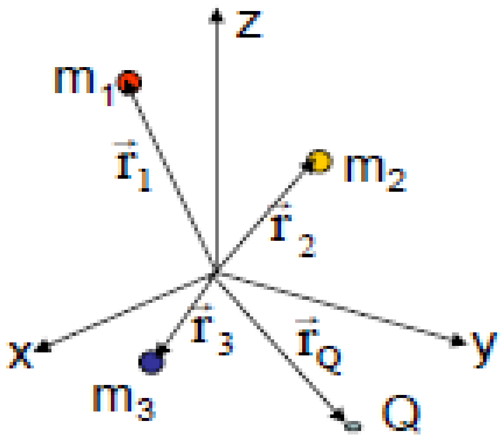
Diferensiasi terhadap waktu memberikan

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{1}{m}\left(m\frac{d\vec{r}}{dt}\right) \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{1}{m}\vec{p} \times \vec{p} + \vec{r} \times \vec{F}$$

$$= \vec{r} \times \vec{F}$$

Rumus persamaan momentum sudut pada titik Q:

$$\vec{\mathrm{L}}_{\alpha Q} = (\vec{\mathrm{r}}_{\alpha} - \vec{\mathrm{r}}_{Q}) \times \vec{\mathrm{p}}_{\alpha}$$



Gambar 3.1. Sistem Partikel

$$\vec{L}_Q = \sum_\alpha \vec{L}_{\alpha Q} = \sum_\alpha (\vec{r}_\alpha - \vec{r}_Q) \times \vec{p}_\alpha$$

Variasi terhadap waktu:

$$\frac{d\vec{L}_{\alpha Q}}{dt} = (\vec{r}_\alpha - \vec{r}_Q) \times \frac{d\vec{p}_\alpha}{dt} + \left(\frac{d\vec{r}_\alpha}{dt} - \frac{d\vec{r}_Q}{dt} \right) \times \vec{p}_\alpha$$

Karena $\vec{p}_\alpha = m_\alpha \dfrac{d\vec{r}_\alpha}{dt} \longrightarrow \dfrac{d\vec{r}_\alpha}{dt} \times \vec{p}_\alpha = 0$

$$\frac{d\vec{L}_{\alpha Q}}{dt} = (\vec{r}_\alpha - \vec{r}_Q) \times \frac{d\vec{p}_\alpha}{dt} - \frac{d\vec{r}_Q}{dt} \times \vec{p}_\alpha$$

$$(\vec{r}_\alpha - \vec{r}_Q) \times \frac{d\vec{p}_\alpha}{dt} = (\vec{r}_\alpha - \vec{r}_Q) \times \vec{F}^e_\alpha + (\vec{r}_\alpha - \vec{r}_Q) \times \vec{F}^i_\alpha$$

$$\frac{d\vec{L}_{\alpha Q}}{dt} = (\vec{r}_\alpha - \vec{r}_Q) \times \vec{F}^e_\alpha + (\vec{r}_\alpha - \vec{r}_Q) \times \vec{F}^i_\alpha - \frac{d\vec{r}_Q}{dt} \times \vec{p}_\alpha$$

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{L}_Q}{dt} &= \sum_\alpha (\vec{r}_\alpha - \vec{r}_Q) \times \vec{F}^e_\alpha + \sum_\alpha (\vec{r}_\alpha - \vec{r}_Q) \times \vec{F}^i_\alpha - \sum_\alpha \frac{d\vec{r}_Q}{dt} \times \vec{p}_\alpha \\ &= \vec{N}_Q + \sum_\alpha (\vec{r}_\alpha - \vec{r}_Q) \times \vec{F}^i_\alpha - \frac{d\vec{r}_Q}{dt} \times \vec{P} \end{aligned}$$

$$\vec{N}_Q = \sum_\alpha (\vec{r}_\alpha - \vec{r}_Q) \times \vec{F}^e_\alpha$$ Total momen gaya

$$\frac{d\vec{r}_Q}{dt} \times \vec{P} = 0$$

Jika:

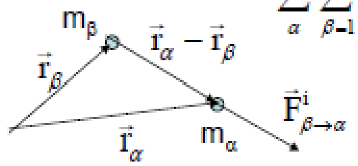
(1) kecepatan titik Q sama dengan kecepatan pusat massa,

(2) titik Q adalah pusat massa, dan

(3) titik Q diam

$$\vec{F}^i_\alpha = \sum_{\beta \neq \alpha} \vec{F}^i_{\beta \to \alpha}$$

$$\begin{aligned} \sum_\alpha (\vec{r}_\alpha - \vec{r}_Q) \times \vec{F}^i_\alpha &= \sum_\alpha \sum_{\beta \neq \alpha} (\vec{r}_\alpha - \vec{r}_Q) \times \vec{F}^i_{\beta \to \alpha} \\ &= \sum_\alpha \sum_{\beta=1}^{\alpha-1} (\vec{r}_\alpha - \vec{r}_Q) \times \vec{F}^i_{\beta \to \alpha} + (\vec{r}_\beta - \vec{r}_Q) \times \vec{F}^i_{\alpha \to \beta} \\ &= \sum_\alpha \sum_{\beta=1}^{\alpha-1} (\vec{r}_\alpha - \vec{r}_Q) \times \vec{F}^i_{\beta \to \alpha} - (\vec{r}_\beta - \vec{r}_Q) \times \vec{F}^i_{\beta \to \alpha} \\ &= \sum_\alpha \sum_{\beta=1}^{\alpha-1} (\vec{r}_\alpha - \vec{r}_\beta) \times \vec{F}^i_{\beta \to \alpha} = 0 \end{aligned}$$



Jadi, jika titik Q diam atau Q merupakan pusat massa, maka

$$\frac{d\vec{L}_Q}{dt} = \vec{N}_Q$$

Terlihat, jika N_Q=0, maka L_Q adalah besaran yang konstan.

Teorema:

Dikatakan momentum sudut system partikel itu tetap, jika tidak ada gaya luar yang bekerja pada sistem partikel itu.[6]

F. MOMENTUM LINIER

$$\vec{p}_\alpha = m_\alpha \frac{d\vec{r}_\alpha}{dt} \longrightarrow \frac{d\vec{p}_\alpha}{dt} = m_\alpha \frac{d^2\vec{r}_\alpha}{dt^2} \quad \text{atau} \quad \frac{d\vec{p}_\alpha}{dt} = \vec{F}_\alpha^{e} + \vec{F}_\alpha^{i}$$

Total momentum linier:

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \sum_\alpha \frac{d\vec{p}_\alpha}{dt} = \sum_\alpha \vec{F}_\alpha^{e} = \vec{F}$$

Persamaan gerak pusat massa

$$\vec{P} = \sum_\alpha \vec{p}_\alpha = \sum_\alpha m_\alpha \frac{d\vec{r}_\alpha}{dt} = M\frac{d\vec{R}}{dt} \longrightarrow \frac{d\vec{P}}{dt} = M\frac{d^2\vec{R}}{dt^2} = \vec{F}$$

Teorema:

Apabila jumlah gaya dalam sama dengan nol, maka pada pusat massa sistem partikel yang bergerak sama dengan massa system dengan suatu gaya sama dengan jumlah gaya luar pada sistem partikel.

Contoh 2.1

Tunjukkan bahwa untuk partikel dengan momentum anguler $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ adalah konservatif terhadap gaya sentral $\vec{F} = \vec{F}(r)\hat{r}$.

Jawaban:

Torsi yang terjadi pada partikel adalah $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{F}(r) \times \hat{r} = 0$

[6] Abdullah Mikrajuddin. 2013. *Diktat Mekanika*. Bandung: ITB

Contoh 2.2

1. Sebuah partikel dengan massa m_1, momentum $\vec{p}_{1I}$ bertumbukan secara elastik dengan sebuah partikel bermassa m_2, momentum $\vec{p}_{2I}$ yang sedang bergerak berlawanan arah dengan partikel 1. Jika partikel 1 terpental pada sudut θ_1 terhadap arah semula, tentukan momentum akhir dari m_1.

   Solusi:

$$(1+\gamma)p_{1F} = (p_{1I} - p_{2I})\cos\theta_1 \pm \sqrt{(\gamma p_{1I} + p_{2I})^2 - (p_{1I} - p_{2I})^2 \sin^2\theta_1}$$

$$\left(\gamma = \frac{m_2}{m_1}\right)$$

BAB III

OSILASI HARMONIK SEDERHANA

A. GERAK HARMONIK SEDERHANA

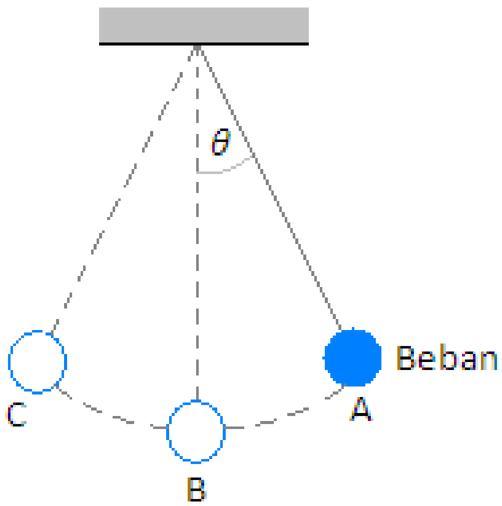
Suatu gerak bolak-balik benda melalui suatu titik keseimbangan tertentu dengan banyakknya getaran benda dalam setiap sekon selalu konstan, ini disebut ***Gerak Harmonik***. Adapun contoh-contoh pada benda yang melakukan getaran harmonik yaitu: seperti gelombang radio, dawai pada alat musik, denyut jantung dan arus listrik AC.

Gerak Periodik yaitu gerak berulang-ulang selama waktu sama. Dalam gerak harmonik, gerak periodik dapat dituliskan dalam bentuk fungsi sinus atau cosinus. Sedangkan dikatakan periodik jika adanya suatu getaran yang berulang-ulang sendiri kedepan dan kebelakang pada lintasan yang sama. Apabila gerak periodik ini bergerak bolak-balik melalui lintasan yang sama disebut ***Getaran*** atau ***Osilasi.***

Gerak harmonik serdahana ada 2 jenis yaitu : gerak harmonik sederhana linier dan gerak harmonik sederhana angular.[7]

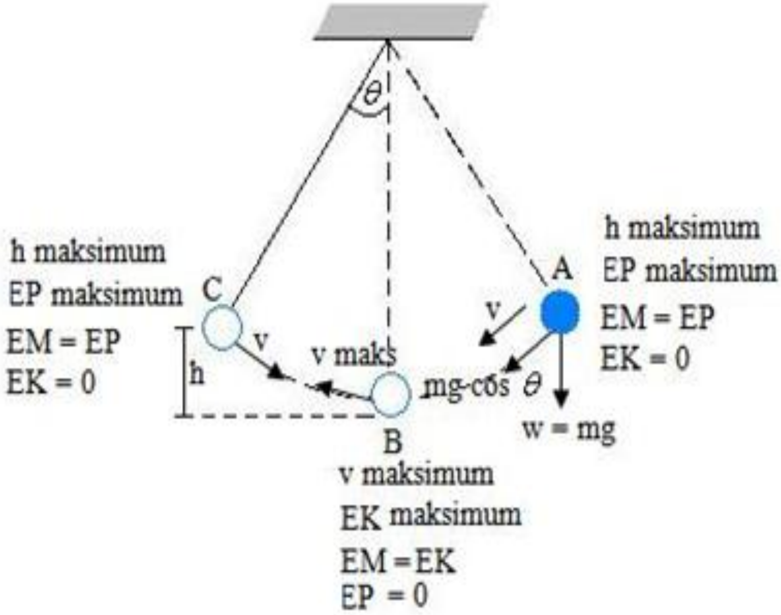
Berikut contoh gerak harmonik

- Getaran Harmonik Pada Bandul



Gambar 4.1. Gerak periodik (a)

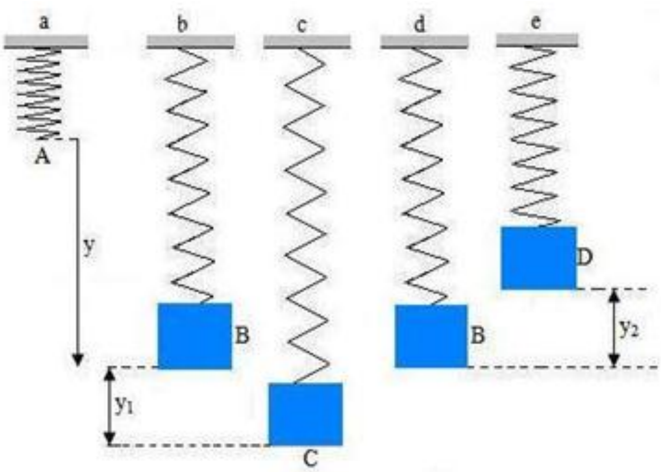
[7] Halliday, D., R. Resnick, Walker, J. 2012. *Fisika Dasar*. Edisi 7. Jilid 1. Jakarta: Erlangga



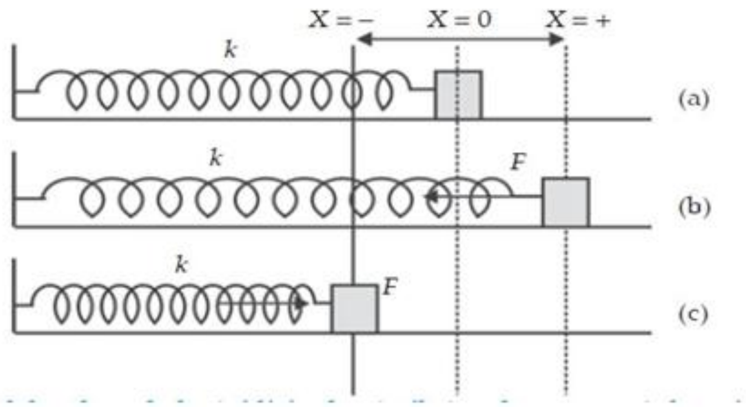
Gambar 4.2. Gerak periodik (b)

Benda akan diam dititik kesimbangn B, apabila pada ayunan kita gantung beban dan tidak ada gaya. Dan apabila kita tarik benda ke posisi A dan dilepaskan kembali, maka beban akan menuju posisi B dan C, kemudian akan ke posisi A kembali. Gerak beban yang terjadi berulang-ulang secara periodik, maka beban pada ayunan tersebut dinamakan gerak harmonik sederhana.

- Gerak harmonik pada pegas

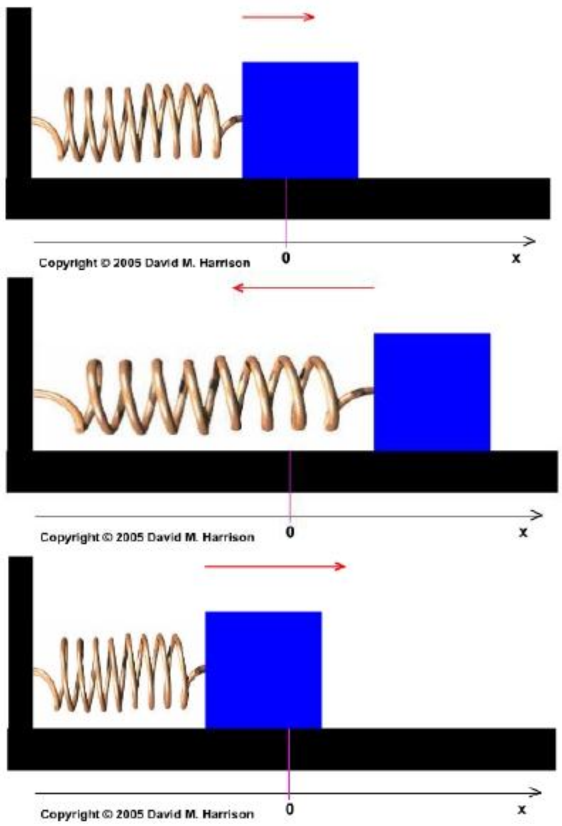


Gambar 4.3. Gerak pada pegas (a)



Gambar 4.4. Gerak pada pegas (b)

Pegas mempunyai panjang awal yang sebenarnya, jika pada sebuah benda dirangkai ke ujung pegas maka pegas akan bertambah Panjang sejauh x, dan sebaliknya.



$F = 0$

$F = -k \cdot x$

$F = k \cdot x$

Gambar 4.5. Gerak pada pegas (c)

Persamaan yang merupakan turunan fungsi x, ini dikatakan persamaan differensial. Seperti contoh pada ayunan dan getaran pada senar.[8]

F = -k . x

Jika nilai F = m . g = m . a

Sehingga:

m. a = -k . x $\Rightarrow \quad a = \frac{d^2x}{dt^2}$ atau $a = \frac{dv}{dt}$ adalah percepatan

m . a + k . x = 0

$$m.\ \frac{d^2x}{dt^2} + k.x = 0$$

$$m.\ \frac{d^2}{dt^2}\,x + k.x = 0$$

$$\frac{d^2}{dt^2}\,x = -\frac{k}{m}\,x$$

Catatan :

Secara matematis, turunan dari sinus dan cosinus mempunyai sifat yaitu:

$$\frac{d}{dt}(\cos t) = -\sin t$$

$$\frac{d^2}{dt^2}(\cos t) = -\frac{d}{dt}(\sin t) = -\cos t$$

Jadi:

$$\frac{d^2}{dt^2}\,x = -\frac{k}{m}\,x$$

---

[8] Halliday, D., R. Resnick, Walker, J. 2012. *Fisika Dasar*. Edisi 7. Jilid 1. Jakarta: Erlangga

$$\frac{d^2}{dt^2}\ x(t) = -\frac{k}{m}\ x(t)$$ dimana: $x(t) = A \cos(\omega t + \delta)$

$$\frac{d^2}{dt^2}\ x(t) = \frac{d^2}{dt^2}\ A\cos(\omega t + \delta)$$ dimana : A, ω dan δ : ketetapan

Dari persamaan diatas dapat diturunkan dua kali, sehingga:

$$\frac{d^2}{dt^2}\ x(t) = \frac{d^2}{dt^2}\ A\cos(\omega t + \delta) \quad = \quad -\frac{d}{dt}\ A\,\omega \sin(\omega t + \delta)$$

$$= -A\,\omega^2 \cos(\omega t + \delta)$$

Sedangkan

$$\frac{k}{m}\ x(t) = \frac{k}{m}\ A\cos(\omega t + \delta)$$

Sehingga persamaan menjadi :

$$\frac{d^2}{dt^2}\ x(t) = -\frac{k}{m}\ x(t)$$

$$\frac{d^2}{dt^2}\ x(t) + \frac{k}{m}\ x(t) = 0$$

$$-A\omega^2 \cos(\omega t + \delta) + \frac{k}{m}\ A\cos(\omega t + \delta) = 0$$

$$A\omega^2 \cos(\omega t + \delta) = A\ \frac{k}{m}\ \cos(\omega t + \delta)$$

Dari persamaan diatas terlihat bahwa :

$$\omega^2 = \frac{k}{m}$$

atau

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Dimana: ω = frekuensi sudut = $2\pi f$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$2\pi f = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} \rightarrow \quad f = \frac{1}{T} \quad , \quad T = \frac{1}{f} \quad ,$$

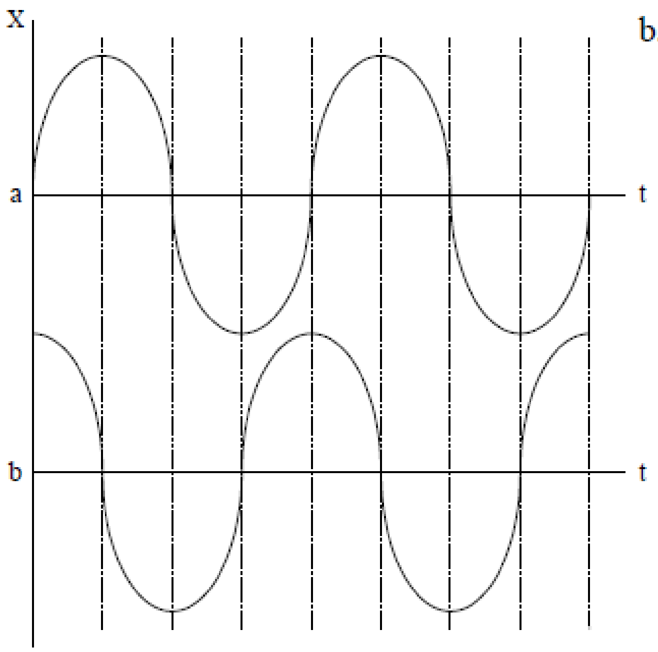
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

$(\omega t + \delta)$ = fasa dari gerakan harmonik

δ = tetapan fasa

Dalam hal ini dua gerakan mungkin mempunyai amplitudo dan perioda yang sama akan tetapi dengan fasa yang berbeda.

Misalkan : $\delta = \frac{\pi}{2} = 90°$



a. $x = A \sin \omega t \Rightarrow x = 0$ pada $t = 0$

b. $x = A \cos \omega t \Rightarrow x = \max$ pada $t = 0$

maka untuk

Kecepatan :

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = -A\,\omega \sin \omega t$$

Percepatan :

$$a(t) = \frac{d^2x}{dt^2} = -A\,\omega^2 \cos \omega t$$

Sebuah benda bermassa 500 gr dipasang pada pegas dan digetarkan. Getaran terjadi sepanjang sumbu x, persamaan diberikan adalah :

$x(t) = 100 + 10 \cos(5\pi\, t + 60^o) \Rightarrow$ x posisi benda dalam (cm)

Bagian-bagian dari getaran harmonis yaitu:

a. Amplitudo yaitu titik tertinggi dari titik keseimbangan. Pada amplitudo memiliki satuan meter (m).

b. Periode yaitu waktu yang dibutuhkan oleh suatu benda dalam melakukan getaran. Pada periode memiliki satuan sekon (s).

c. Frekuensi yaitu jumlah banyak getaran yang dilakukan benda dalam 1 detik. Pada frekuensi memiliki satuan hertz (Hz)

d. Frekuensi sudut

e. Simpangan yaitu suatu jarak massa dari titik keseimbangan setiap saat. Pada simpangan memiliki satuan meter (m).

f. Siklus yaitu suatu gerak berulang-ulang. Dikatakan 1 siklus jika terjadi gerak berulang bolak-balik dari satu titik dan kembali titik semula.[9]

B. GERAK HARMONIK TEREDAM

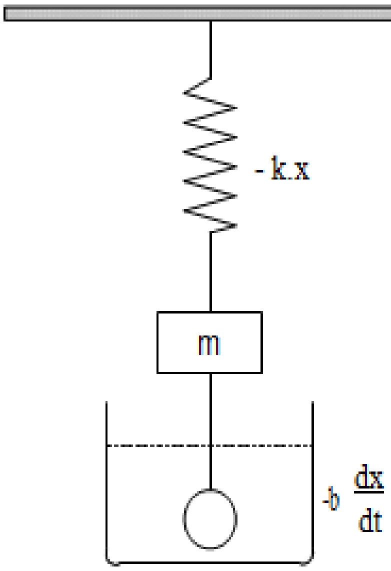
Persamaan gerak teredam diperoleh dari Hukum Newton II, yaitu : F = m a

Dimana :

F = jumlah gaya balik -kx

gaya redam = $-b\frac{dx}{dt}$, b = tetapan positif.

[9] Sarojo Ganijanti Aby. 2014. *Mekanika*. Edisi 5. Jakarta: Salemba Teknika



$$F = ma \quad \Rightarrow \quad a = \frac{d^2x}{dt^2}$$

$$-k.x - b\frac{dx}{dt} = m\,a$$

$$-k.x - b\frac{dx}{dt} = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + k.x = 0$$

Sehingga diperoleh solusi persaman tersebut di atas adalah :

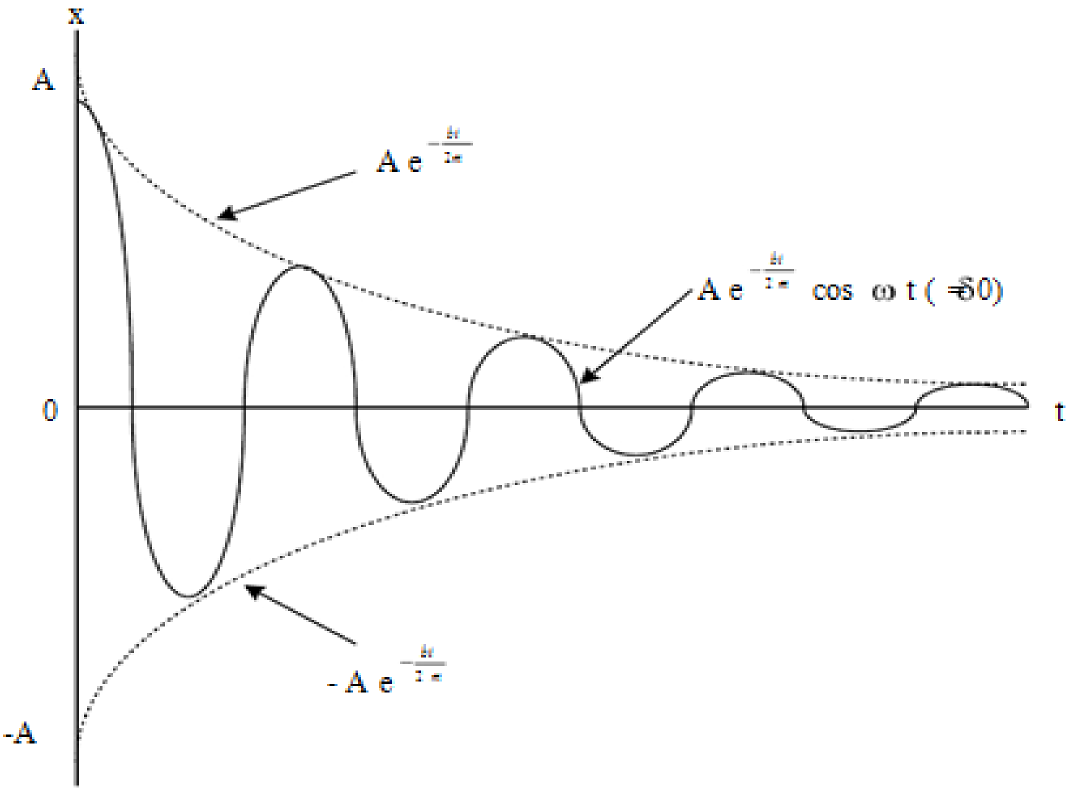
$$x = A\,e^{-\frac{bt}{2m}} \cos(\omega' t + \delta) \quad \Rightarrow \quad \omega' = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{b}{2m}\right)^2}$$

Persamaan solusi di atas dapat diartikan:

Periode osilasi lebih besar dan frekuensi osilasi lebih kecil jika ada terjadi gesekan, Apabila tidak ada terjadi gesekan, maka persamaannya:

$$\omega_o = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Ini merupakan frekuensi gerak harmonik tanpa redaman, dan amplitudo osilasi lama-kelamaan berkurang menjadi nol.



Gambar 4.6. Gerak harmonik teredam

Faktor amplitudo adalah fungsi eksponensial, yaitu $e^{-\frac{bt}{2m}}$

Artinya apabila tidak terjadi gesekan atau nilai adalah b = 0, maka eksponensial = 1 dan amplitudo osilasi tidak teredam.

C. GERAK HARMONIK YANG DIPAKSAKAN

Adapun gerak harmonik yang dipaksakan itu merupakan adanya gerak harmonik yang tidak dipengaruhi oleh gaya sendiri tetapi dipengaruhi oleh gaya luar yang bekerja terus menerus secara periodik. Contoh gaya yang bekerja terus-menerus adalah:

$$F = F_o \sin \omega t$$

F = gaya pemicu (*driving force*)

F_o = gaya maksimum, konstan

Pada gerak resultan terdapat dua bagian yaitu bagian yang *transient* dan *steady state*. Pada bagian *transient* merupakan eksponensial, frekuaensi gerakan sama dengan frekuensi gaya (ω_f), sehingga:

$$\sum F = F_o \sin \omega_f \, t - kx - rv = m\,a = \frac{d^2x}{dt^2}$$

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + r\frac{dx}{dt} + kx = F_o \sin \omega_f \, t$$

$$atau:$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{rdx}{mdt} + \frac{k}{m}x = \frac{F_o}{m}\sin \omega\sqrt{_f}\sqrt{\ }\ t$$

$$dengan:\ \omega_o{}^2 = \frac{k}{m},\ 2\alpha = \frac{r}{m}N$$

$$jadi, \frac{d^2x}{dt^2} + 2\alpha\frac{dx}{dt} + \omega_o{}^2\, x = \frac{F_o}{m}\sin \omega_f \, t$$

$$Solusi:\ x = A\sin(\omega_f\, t - \varphi)\ adalah\ gerak\ harmonik\ steady\ state$$

$$dengan:\ A = \frac{\frac{F_o}{m}}{\sqrt{\left(\omega_f{}^2 - \omega_o{}^2\right) + 2\alpha^2\omega_f{}^2}}$$

$$= \frac{F_o}{\omega_f\sqrt{r^2 + \left(\frac{k}{\omega_f} - \omega_f\, m\right)^2}}$$

$$\tan\varphi = \frac{2\alpha\omega_f}{\sqrt{\omega_f{}^2 - \omega_o{}^2}}$$

$$= \frac{r}{\sqrt{\frac{k}{\omega_f} - \omega_f\, m}}$$

Dengan menghitung $\frac{dx}{dt}, \frac{d^2x}{dt^2}\ dari\ x = A\sin\left(\omega_f\, t - \varphi\right)$ persamaan gerak harmonik yang dipaksakan dapat dicari.

ω_o = frekuensi gerak harmonik tak teredam

ω_f = frekuensi gaya pemicu

Bila $\omega_f = \sqrt{\frac{k}{m}} = \omega_o =$ maka akan terjadi resonansi.

D. **HUKUM HOOKE**

Robert Hooke adalah seorang ilmuwan yang pertama kali meneliti tentang pegas. Dia membuat kesimpulan bahwa apabila kita hilangkan gaya yang bekerja pada sebuah pegas maka pegas itu akan kembali ke keadaan semula dan sifat elastis pegas ada batasnya, juga besar nilai gaya pegas sebanding dengan pertambahan panjang pegas. Persamaannya dapat ditulis yaitu:[10]

$$F = - k\ \Delta x$$

Dengan:

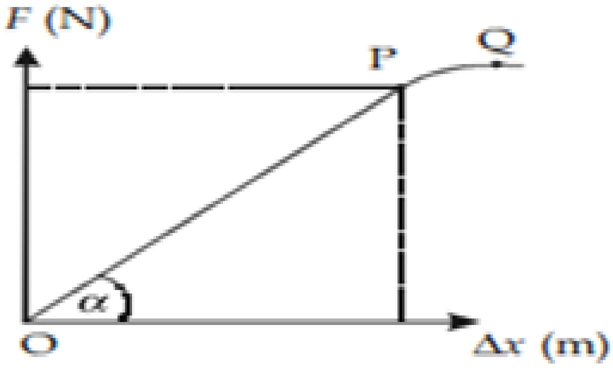
k = Nilai ketetapan pegas (N/m)

Tanda (-) menunjukkan bahwa arah gerak pegas selalu berlawanan arah dengan gaya pemulih pada pegas.

Dari grafik kita dapat menentukan nilai k untuk batas linealitas pegasnya yaitu :

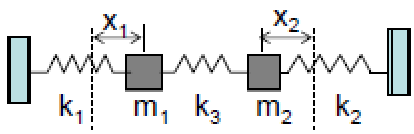
$$k = \frac{F}{\Delta x} = \tan\alpha = \text{kemiringan grafik } F(-\Delta x)$$

[10] Tipler, Paul A. 1998. *Fisika untuk Sains dan Teknik*. Jilid 1. Edisi 3. Alih Bahasa: Lea Prasetio dan Rahmad W Adi. Jakarta: Erlangga



Gambar 4.7. Hubungan gaya dengan pertambahan panjang

E. DUA OSILATOR HARMONIK TERKOPEL



Dua massa m_1 dan m_2 terikat pada dinding dengan pegas masing-masing berkonstanta k_1 dan k_2. Kedua massa dihubungkan oleh pegas ketiga, k_3.

Jika tidak ada pegas k_3, kedua massa akan berosilasi secara bebas, masing-masing dengan frekuensi:

$$\omega_{10}^{o} = \sqrt{\frac{k_1}{m_1}}; \quad \omega_{20}^{o} = \sqrt{\frac{k_2}{m_2}}$$

Dimana pegas k_3, contonya jika m_1 bergerak sejauh x_1 dan m_2 sejauh x_2, maka persamaan gerak massa-massa yaitu:

$$m_1\ddot{x}_1 = -k_1x_1 - k_3(x_1 + x_2); \qquad m_2\ddot{x}_2 = -k_2x_2 - k_3(x_1 + x_2)$$

$$m_1\ddot{x}_1 + k_1^{'}x_1 + k_3x_2 = 0; \qquad m_2\ddot{x}_2 + k_2^{'}x_2 + k_3x_1 = 0$$

$$k_1^{'} = k_1 + k_3; \qquad k_2^{'} = k_2 + k_3$$

Misalkan: $k_1^{'} = k_1 + k_3; \quad k_2^{'} = k_2 + k_3$

$$m_1\ddot{x}_1 + k_1^{'}x_1 + k_3x_2 = 0; \qquad m_2\ddot{x}_2 + k_2^{'}x_2 + k_3x_1 = 0$$

Kedua persamaan di atas terkopel satu sama lain. Untuk itu misalkan:

$$x_1 = C_1e^{pt}; \quad x_2 = C_2e^{pt}$$

$$\left(m_1p^2 + k_1^{'}\right)C_1 + k_3C_2 = 0 \quad \text{dan} \quad \left(m_2p^2 + k_2^{'}\right)C_2 + k_3C_1 = 0$$

$$\frac{C_2}{C_1} = -\frac{m_1p^2 + k_1^{'}}{k_3} = -\frac{k_3}{m_2p^2 + k_2^{'}}$$

$$m_1m_2p^4 + \left(m_2k_1^{'} + m_1k_2^{'}\right)p^2 + \left(k_1^{'}k_2^{'} - k_3^2\right) = 0$$

$$p^2 = -\tfrac{1}{2}\left(\omega_{10}^2 + \omega_{20}^2\right) \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}\left(\omega_{10}^2 - \omega_{20}^2\right)^2 + \kappa^4}$$

$$\omega_{10} = \sqrt{\frac{k_1^{'}}{m_1}}; \qquad \omega_{20} = \sqrt{\frac{k_2^{'}}{m_2}}; \qquad \kappa^2 = \frac{k_3}{\sqrt{m_1m_2}}$$

κ disebut konstanta kopling

Terlihat, p^2 negatif; untuk itu misalkan:

$$\left.\begin{aligned} p^2 &= -\omega_1^2 = -\left(\omega_{10}^2 + \tfrac{1}{2}\Delta\omega^2\right) \\ p^2 &= -\omega_2^2 = -\left(\omega_{20}^2 - \tfrac{1}{2}\Delta\omega^2\right) \end{aligned}\right\} \quad p = \pm i\omega_1, \quad \pm i\omega_2$$

$$\Delta\omega^2 = \left(\omega_{10}^2 - \omega_{20}^2\right)\left\{\sqrt{\left(1 + \frac{4\kappa^4}{(\omega_{10}^2 - \omega_{20}^2)^2}\right)} - 1\right\}$$

Jika $p^2 = -\omega_1^2 \rightarrow \frac{C_2}{C_1} = \frac{m_1}{k_3}\left(\omega_1^2 - \omega_{10}^2\right) = \frac{\Delta\omega^2}{2\kappa^2}\sqrt{\frac{m_1}{m_2}}$

$$p^2 = -\omega_2^2 \rightarrow \frac{C_1}{C_2} = \frac{m_2}{k_3}\left(\omega_2^2 - \omega_{20}^2\right) = -\frac{\Delta\omega^2}{2\kappa^2}\sqrt{\frac{m_2}{m_1}}$$

Dengan $x_1 = C_1 e^{pt}$; $x_2 = C_2 e^{pt}$

$$x_1 = C_1 e^{i\omega_1 t} + C_1' e^{-i\omega_1 t} - \frac{\Delta\omega^2}{2\kappa^2}\sqrt{\frac{m_2}{m_1}} C_2 e^{i\omega_2 t} - \frac{\Delta\omega^2}{2\kappa^2}\sqrt{\frac{m_2}{m_1}} C_2' e^{-i\omega_2 t}$$

$$x_2 = \frac{\Delta\omega^2}{2\kappa^2}\sqrt{\frac{m_1}{m_2}} C_1 e^{i\omega_1 t} + \frac{\Delta\omega^2}{2\kappa^2}\sqrt{\frac{m_1}{m_2}} C_1' e^{-i\omega_1 t} + C_2 e^{i\omega_2 t} + C_2' e^{-i\omega_2 t}$$

Untuk membuat x_1 dan x_2 ril, misalkan:

$$C_1 = \tfrac{1}{2} A_1 e^{i\theta_1}, \quad C_1' = \tfrac{1}{2} A_1 e^{-i\theta_1}$$
$$C_2 = \tfrac{1}{2} A_2 e^{i\theta_2}, \quad C_2' = \tfrac{1}{2} A_2 e^{-i\theta_2}$$

Solusi umum menjadi:

$$x_1 = A_1 \cos(\omega_1 t + \theta_1) - \frac{\Delta\omega^2}{2\kappa^2}\sqrt{\frac{m_2}{m_1}} A_2 \cos(\omega_2 t + \theta_2)$$

$$x_2 = \frac{\Delta\omega^2}{2\kappa^2}\sqrt{\frac{m_1}{m_2}} A_1 \cos(\omega_1 t + \theta_1) + A_2 \cos(\omega_2 t + \theta_2)$$

Getaran modus normal

Jika A_2=0: $x_1 = A_1\cos(\omega_1 t + \theta_1)$

$$x_2 = \frac{\Delta\omega^2}{2\kappa^2}\sqrt{\frac{m_1}{m_2}}A_1\cos(\omega_1 t + \theta_1)$$

$$\omega_1^2 = \omega_{10}^2 + \tfrac{1}{2}\Delta\omega^2$$

Frekuensi tunggal ω_1

Getaran searah

$$\Delta\omega^2 = \left(\omega_{10}^2 - \omega_{20}^2\right)\left\{\sqrt{\left(1 + \frac{4\kappa^4}{(\omega_{10}^2 - \omega_{20}^2)^2}\right)} - 1\right\}$$

$$\kappa^2 = \frac{k_3}{\sqrt{m_1 m_2}}$$

Jika A_1=0: $x_1 = -\frac{\Delta\omega^2}{2\kappa^2}\sqrt{\frac{m_2}{m_1}}A_2\cos(\omega_2 t + \theta_2)$

$$x_2 = A_2\cos(\omega_2 t + \theta_2)$$

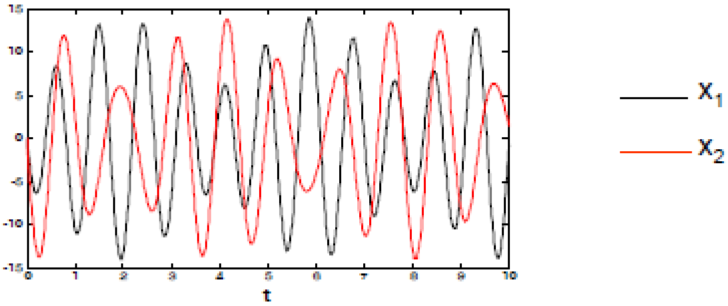
$$\omega_2^2 = \omega_{20}^2 - \tfrac{1}{2}\Delta\omega^2$$

Frekuensi tunggal ω_2

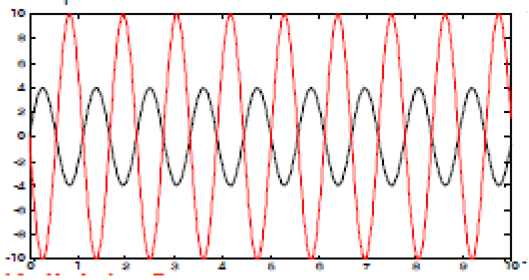
Getaran berlawanan arah

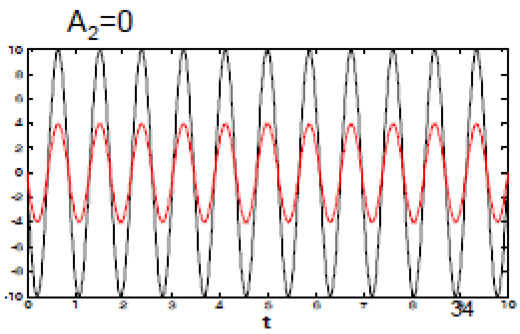
m_1=1; m_2=1; k_1=50; k_2=30; k_3=2

A_1=10; A_2=10;



A_1=0





Gambar 4.8. Getaran modus normal

BAB IV
MEDAN GAYA SENTRAL

A. GAYA SENTRAL

Gaya sentral adalah gaya yang diakibatkan karena pengaruh dari titik pusat. Contohnya antara lain: gaya gravitasi, gaya elektrostatik dan lain-lain. Sedangkan yang dikatakan isotropic yaitu jika besar gaya tidak tergantung pada arah tetapi tergantung pada jarak dari pusat.

Gaya yang arahnya selalu ke pusat memenuhi persamaan umum:

$$F = \hat{r} F(r)$$

Apabila dimasukkan ke dalam persamaan $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F}$ kita peroleh

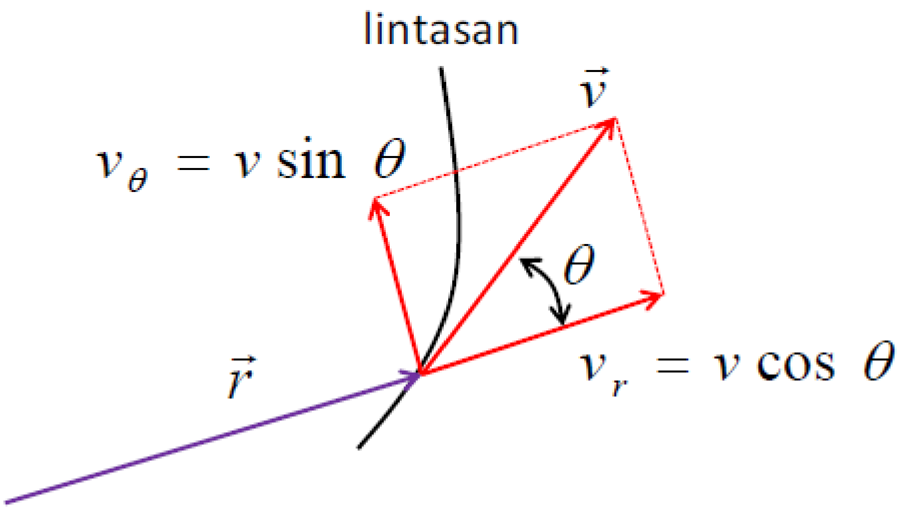
$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times [\hat{r} F(r)] = 0$$

Karena r dan $\hat{r}$ searah. Ini bearti jika pada benda hanya bekerja gaya sentral maka momentum sudut benda selalu konstan. Momentum sudut planet-planet yang mengitari matahari maupu satelit-satelit yang mengelilingi planet selalu konstan. Momentum sudut electron-elektron yang mengitari inti pada lintasan tertentu selalu konstan.

Dari ungkapan momentum sudut, kita bisa menentukan besar momentum sudut:

$$L = rp \sin\theta = r(mv)\sin\theta = rm(v\sin\theta) = rmv_\theta$$

Dengan v_θ adalah komponen kecepatan benda yang tegak lurus jari-jari.



Gambar 5.1. Lintasan gaya sentral

Komponen kecepatan yang tegak lurus jari-jari berkaitan langsung dengan kecepatan sudut menurut persamaan

$$v_\theta = r\omega = r\dot{\theta}$$

Dengan demikian, besar momentum sudut dapat ditulis

$$L = mr^2\dot{\theta}$$

Misalkan gerak benda di bawah pengaruh gayua sentral berada pada satu bidang (gerak 2 dimensi). Komponen percerpatan gerak 2 dimensi memenuhi

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2$$

$$a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}$$

Dengan menggunakan hokum Newton, maka untuk gaya sentral diperoleh

$$ma_r = F(r) \quad \text{atau} \quad m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = F(r)$$

Energi kinetic benda yang berada di bawah pengaruh gaya sentral adalah

$$K = K_{radial} + K_{\tan gelsial}$$

$$= \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}m(r\dot{\theta})^2 = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2$$

Kita nyatakan kecepatan sudut dalam momentum sudut, yaitu $\dot{\theta} = \frac{L}{mr^2}$. Dengan demikian, energi kinetik benda menjadi:

$$K = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2\left(\frac{L}{mr^2}\right)^2 = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}\frac{L^2}{mr^2}$$

Energi mekanik benda adalah

$$E = K + V(r) = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}\frac{L^2}{mr^2} + V(r)$$

Atau

$$\dot{r} = \sqrt{\frac{2}{m}}\left[E - \frac{1}{2}\frac{L^2}{mr^2} - V(r)\right]^{1/2}$$

$$\frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m}}\left[E - \frac{1}{2}\frac{L^2}{mr^2} - V(r)\right]^{1/2}$$

$$\frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}}\left[E - \frac{1}{2}\frac{L^2}{mr^2} - V(r)\right]^{1/2}} = dt$$

$$\int_{r_0}^{r} \frac{dr}{\left[E - \frac{1}{2}\frac{L^2}{mr^2} - V(r)\right]^{1/2}} = \sqrt{\frac{2}{m}}(t - t_0)$$

Jika integral ini dapat diselesaikan maka kita peroleh posisi benda adalah fungsi waktu. Selanjutnya, dari posisi sebagai fungsi waktu terseut kita dapat menentukasn sudut lintasan benda sebagai fungsi waktu menggunakan persamaan momentum sudut, yaitu:

$$\dot{\theta} = \frac{L}{mr^2}$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{L}{mr^2}$$

$$d\theta = \frac{L}{m}\frac{dt}{r^2}$$

Mengingat L konstan maka

$$\theta - \theta_0 = \frac{L}{m}\int_{t_0}^{t}\frac{dt}{r^2}$$

Perhatikan gaya untuk gerak radial $m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = F(r)$, yang dapat ditulis

$$m\ddot{r} = F(r) + mr\dot{\theta}^2$$

$$m\ddot{r} = F(r) + mr\left(\frac{L}{mr^2}\right)^2$$

$$m\ddot{r} = F(r) + \frac{L}{mr^3}$$

Untuk mempermudah penyelesaian, kiga gunakan variable χ yang memenuhi

$$r = \frac{1}{\chi}$$

Dengan demikian

$$\frac{dr}{dt} = -\frac{1}{\chi^2}\frac{d\chi}{dt} = -\frac{1}{\chi^2}\frac{d\chi}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = -\frac{1}{\chi^2}\frac{d\chi}{d\theta}\dot{\theta} = -\frac{1}{\chi^2}\frac{d\chi}{d\theta}\left(\frac{L}{mr^2}\right) = -\frac{1}{\chi^2}\frac{d\chi}{d\theta}\left(\frac{L}{m}\chi^2\right)$$

$$= -\frac{L}{m}\frac{d\chi}{d\theta}$$

$$\frac{d^2r}{dt^2} = -\frac{L}{m}\frac{d}{dt}\frac{d\chi}{d\theta} = -\frac{L}{m}\frac{d}{d\theta}\frac{d\chi}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = -\frac{L}{m}\frac{d^2\chi}{d\theta^2}\dot{\theta} = -\frac{L}{m}\frac{d^2\chi}{d\theta^2}\left(\frac{L}{mr^2}\right) = -\frac{L}{m}\frac{d^2\chi}{d\theta^2}\left(\frac{L}{m}\chi^2\right)$$

$$= -\frac{L^2}{m^2}\chi^2\frac{d^2\chi}{d\theta^2}$$

Substitusi ke dalam persamaan Newton untuk gerak radial maka

$$m\left(-\frac{L^2}{m^2}\chi^2\frac{d^2\chi}{d\theta^2}\right) = F\left(\frac{1}{\chi}\right) + \frac{L^2}{m}\chi^3$$

Atau

$$\frac{d^2\chi}{d\theta^2}+\chi=-\frac{m}{L^2\chi^2}F\left(\frac{1}{\chi}\right)$$

Untuk gaya sentral yang berupa gaya tarik yang berbanding terbalik dengan kuadrat jarak maka

$$F(r)=-\frac{K}{r^2}$$

Atau

$$F\left(\frac{1}{\chi}\right)=-K\chi^2$$

Dengan demikian

$$\frac{d^2\chi}{d\theta^2}+\chi=\frac{mK}{L^2}$$

Ini adalah persamaan gerak harmonic tak homogen. Persamaan homogen

$$\frac{d^2\chi}{d\theta^2}+\chi=0$$

Memiliki solusi

$$\chi=A\cos(\theta-\theta_0)$$

Solusi persamaan tak homogeny $\frac{d^2\chi}{d\theta^2}+\chi=\frac{mK}{L^2}$, adalah

$$\chi=\frac{mK}{L^2}$$

Dengan demikian, solusi umum adalah

$$\chi=A\cos(\theta-\theta_0)+\frac{mK}{L^2}$$

Nilai maksimum untuk χ terjadi ketika $\cos(\theta - \theta_0) = 1$, yaitu:[11]

$$\chi_1 = A + \frac{mK}{L^2}$$

Nilai minimum untuk χ terjadi ketika $\cos(\theta - \theta_0) = -1$, yaitu

$$\chi_2 = -A + \frac{mK}{L^2}$$

Sebaliknya, nilai minium dan maksimum untuk r adalah

$$r_{\min} = \frac{1}{\chi_1} = \frac{1}{A + mK / L^2}$$

$$r_{\max} = \frac{1}{\chi_2} = \frac{1}{-A + mK / L^2}$$

B. GAYA GRAVITASI

Semua benda-benda yang ada didalam bumi akan tertarik dan selalu menuju pusat bumi. Itu disebabkan adanya gaya tarik bumi. Pernyataan Newton, apabila ada dua buah benda yang saling berdekatan maka akan timbul gaya tarik menarik antar benda. Gaya gravitasi ini sesuai dengan hukum Newton yang berbunyi:

"Semua benda di alam akan menarik benda lain dengan gaya yang besarnya sebanding dengan hasil kali massa partikel tersebut dan berbanding terbalik dengan kuadrat jaraknya."

Rumus persamaan hukum Newton dapat ditulis:

$$F \sim \frac{m_1 m_2}{r^2} \ atau \ F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$$

[11] Abdullah Mikrajuddin. 2013. *Diktat Mekanika*. Bandung: ITB

Gaya gravitasi antara dua benda merupakan gaya aksi reaksi. Benda 1 menarik benda 2 (F_{21}) dan benda 2 menarik benda 1 (F_{12}), Berdasarkan hukum III Newton kedua gaya ini besarnya sama, tetapi arahnya berlawanan.

a. Tetapan Gravitasi Umum (G)

Pada tahun 198, Henry Cavendish adalah orang yang pertama kali melakukan eksperimennya tentang menentukan nilai G dengan menggunakan neraca torsi yang diperhalus dan sangat peka. Pada saat ini nilai G ditetapkan dengan nilai G = 6,67 x 10^{-11} Nm^2/kg^2. Untuk menghargai karyanya maka neraca torsi dinamakan neraca Cavendish.

b. Resultan Gaya Gravitasi

Penjumlahan vektor adalah penjumlahan dari gaya-gaya gravitasi yang dialami oleh benda, maka dapat dihitung jika sebuah benda mengalami dua buah gaya gravitasi atau lebih. Dengan persamaan:

$$F = F_{12} + F_{13}$$

F_{12} (dibaca: F satu dua) adalah gaya gravitasi yang dialami m_1 akibat gaya tarik m_2. F_{13} adalah gaya gravitasi yang dialami m_1 akibat gaya tarik m_3.

Total gaya gravitasi dapat ditulis:

$$F = \sqrt{F_{12}^2 + F_{13}^2 + 2F_{12}F_{13}\cos\theta}$$

Dimana:

F = Total gaya gravitasi (N)

θ = Sudut yang terbentuk

C. **HUKUM GRAVITASI UMUM NEWTON**

Pada persamaan Hukum Gravitasi Umum Newton dapat diperoleh dari menggabungkan 2 persamaan hokum Newton, antara lain: hukum II Newton (gerak melingkar Beraturan) dan hukum gravitasi Newton. Penurunan rumusannya dapat ditulis:

Rumus Hukum II Newton:

$$\sum F = ma$$

Karena

$$a = \frac{v^2}{r}$$

Maka

$$\sum F = m\frac{v^2}{r}$$

Rumus hukum gravitasi Newton :

$$F_g = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$$

Dimana :

F_g = Gaya gravitasi matahari (N)

m_1 = massa matahari (kg)

m_2 = massa planet (kg)

r = jarak antara planet dan matahari

G = tetapan gravitasi universal

Apabila digabungkan kedua rumus diatas maka menjadi :

$$G\frac{m_1 m_2}{r^2} = m\frac{v^2}{r}$$

massa planet dapat dihilangkan karena pada ruas kiri m_1 pada ruas kiri dan m_2 pada ruas kanan, sehingga dapat ditulis:

$$G\frac{m_1}{r^2} = \frac{v^2}{r}$$

Keliling lintasan orbit planet adalah panjang lintasan yang dilalui planet. Sehingga keliling orbit planet dapat ditulis dengan rumus:

$$\text{Keliling orbit planet} = 2\,\pi\,r$$

Dimana:

r : jarak rata-rata planet dari matahari)

maka:

$$G\frac{m_1}{r^2} = \frac{\left(\frac{2\pi r}{T}\right)^2}{r}$$

$$G\frac{m_1}{r^2} = \frac{\left(\frac{4\pi^2 r^2}{T^2}\right)}{r}$$

$$G\frac{m_1}{r^2} = \frac{4\pi^2 r}{T^2}$$

Konstanta $k = T^2/r^3$ juga yang diperoleh oleh Kepler ditemukan dengan cara perhitungan menggunakan data astronomi Tycho Brahe.

D. MEDAN GRAVITASI

Gaya gravitasi merupakan gaya non kontak yaitu gaya yang bekerja secara tidak langsung kontak (sentuh) dengan benda. **Medan gravitasi** adalah ruangan di sekitar benda bermassa yang masih memiliki nilai percepatan gravitasi. Akibatnya, benda lain yang berada di dalam ruangan ini masih mengalami gaya gravitasi.

a. Kuat Medan Gravitasi atau Percepatan Gravitasi pada Suatu Planet

Kuat medan gravitasi adalah besarnya gaya gravitasi yang bekerja tiap satuan massa.

1. Kuat medan gravitasi pada permukaan

$$g = G\ \frac{F}{m}$$

2. Kuat medan gravitasi pada ketinggian h di atas planet

$$g = G\,\frac{M}{R^2}$$

Besar percepatan gravitasi yang dialami semua benda pada permukaan planet adalah sama.

Sebagai contoh: selembar bulu binatang dan batu yang dijatuhkan dari ketinggian yang sama dalam tabung hampa udara akan mencapai dasar tabung secara bersamaan. Tetapi, dalam kehidupan sehari-hari, batu akan sampai ke tanah terlebih dahulu daripada bulu binatang apabila kedua benda tersebut dijatuhkan dari ketinggian yang sama pada saat bersamaan.

Ini disebabkan bukan berarti karena percepatan gravitasi yang dialami kedua benda berbeda nilainya, tetapi karena bulu binatang mengalami gesekan udara yang lebih besar sehingga terhambat dan memerlukan waktu lebih lama untuk sampai ke permukaan bumi.

b. Perbandingan Percepatan Gravitasi Dua Buah Planet

Jika ada dua planet terdapat m_A, m_B dan jari-jari R_A dan R_B, maka perbandingan antara percepatan gravitasi planet A dan B yaitu:

$$\frac{g_A}{g_B} = \frac{G\,\frac{M_A}{R_A}}{G\,\frac{M_B}{R_B}} = \left(\frac{M_A}{M_B}\right)(\frac{R_B}{R_A})^2$$

c. Resultan Percepatan Gravitasi yang Dialami Suatu Benda

Percepatan gravitasi juga merupakan besaran vektor. Penjumlahan percepatan gravitasi yang dialami suatu benda adalah penjumlahan secara vektor dari setiap percepatan gravitasi tersebut.

$$g = g_1 + g_2 = \sqrt{g_1^2 + g_2^2 + 2g_1g_2\cos\theta}$$

E. ENERGI POTENSIAL GRAVITASI DAN POTENSIAL GRAVITASI

a. Energi Potensial Gravitasi

Energi potensial benda bermassa m yang terletak pada jarak r dari pusat planet dapat dihitung dengan rumus:

$$E_p = -G\frac{Mm}{r}$$

b. Potensial Gravitasi

Potensial gravitasi merupakan besar energi potensial gravitasi per satuan massa. Secara matematis, potensial gravitasi dapat dihitung dengan rumus:

$$V = \frac{E_p}{m} = -G\frac{M}{r}$$

Potensial gravitasi merupakan besaran skalar. Oleh karena itu, potensial gravitasi yang disebabkan oleh beberapa benda bermassa merupakan jumlah dari potensial gravitasi dari tiap-tiap benda yang dirumuskan sebagai berikut:

$$V = V_1 + V_2 + V_3 + \cdots$$

F. HUKUM KEPLER

Pada tahun 1609 Kepler menemukan bahwa bentuk orbit yang cocok dengan data pengamatan Brahe, yaitu bentuk elips. Kemudian penemuannya tersebut dipublikasikan dalam bukunya yang berjudul Astronomia Nova yang juga disertai hukum keduanya. Sedangkan hukum ketiga Kepler tertulis dalam Harmonices Mundi yang dipublikasikan sepuluh tahun kemudian.

1. Fungsi Hukum Kepler

Dalam kehidupan modern ini, fungsi hokum Kepler digunakan untuk untuk memperkirakan lintasan planet-planet atau benda luar angkasa lainnya yang mengorbit Matahari seperti asteroid atau planet luar yang belum ditemukan semasa Kepler hidup. Hukum ini juga dipakai pada bulan yang mengorbit bumi dan asteroid. Asteroid mempunyai ukuran 490 kaki (150 meter) dan dikenal dengan sebutan Asteroid 2014 OL339. Asteroid berada cukup dekat dengan bumi sehingga terlihat seperti satelitnya. Asteroid memiliki orbit elips yang memerlukan waktu 364,92 hari untuk mengelilingi Matahari.

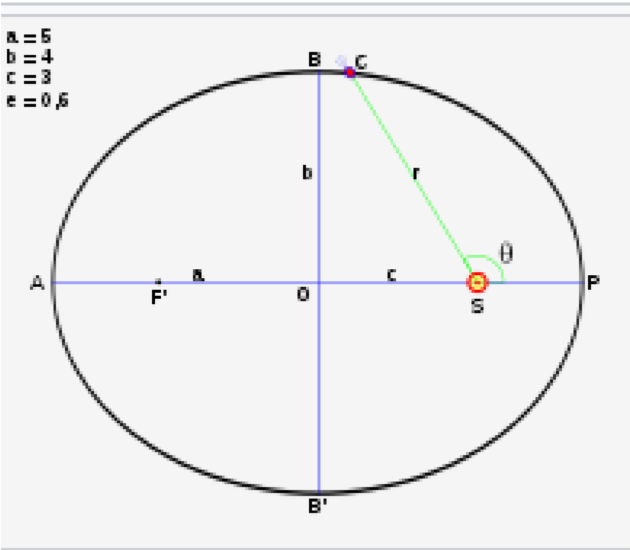
2. Hukum Kepler

- **Hukum I Kepler**

Hukum I Kepler dikenal sebagai hukum lintasan elips. Hukum I Kepler berbunyi:

"Semua planet bergerak pada lintasan elips mengitari matahari dengan matahari berada di salah satu fokus elips"

Benda-benda angkasa ini tentunya sudah banyak dicatat oleh ahli astronomi, seperti komet dan asteroid. Sebagai contoh, Pluto, yang diamati pada akhir tahun 1930, terutama terlambat diketemukan karena bentuk orbitnya yang sangat elips dan kecil ukurannya.



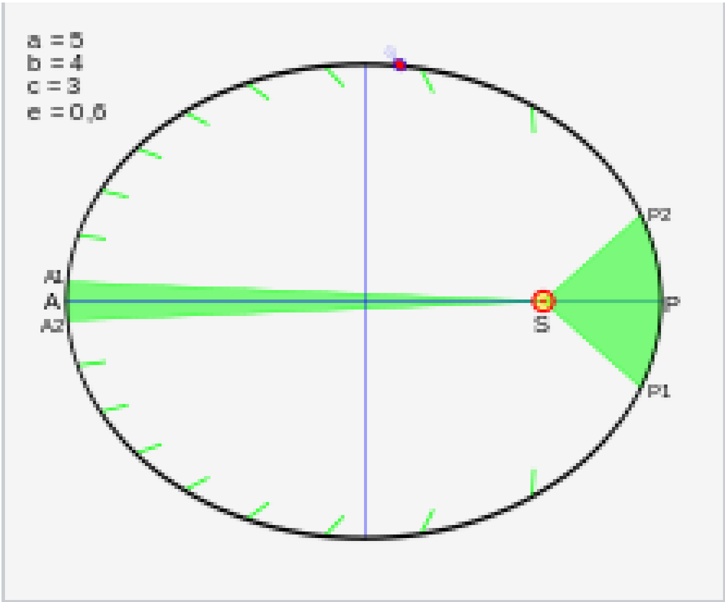
Gambar 5.2. Hukum Kepler pertama menempatkan Matahari di satu titik fokus edaran elips

- **Hukum II Kepler**

Hukum II Kepler ini menjelaskan tentang gerak edar planet yang berbunyi sebagai berikut:

"Suatu gads khayal yang menghubungkan matahari dengan planet menyapu luas juring yang sama dalam selang waktu yang sama"

Dalam selang waktu yang sama, Li, Lii, dan Liii. dari hukum II Kepler bisa diketahui bahwa , kelajuan planet terkecil ketika planet berada di titik terjauh (aphelium). Dan sebaliknya kelajuan revolusi planet terbesar ketika planet berada paling dekat ke matahari (perihelium).



Gambar 5.3. Hukum Kepler kedua Bahwa Planet bergerak lebih cepat di dekat Matahari dan lambat di jarak yang jauh sehingga jumlah area adalah sama pada jangka waktu tertentu

- **Hukum III Kepler**

Pada hukum ini Kepler menjelaskan tentang periode revolusi setiap planet yang melilingi matahari.

Hukum Kepler III berbunyi:

"Kuadrat perioda suatu planet sebanding dengan pangkat tiga jarak rata-ratanya dari Matahari".

Persamaan Hukum Kepler dapat ditulis:

$$\frac{T_1^2}{r_1^3} = \frac{T_2^2}{r_2^3} = \text{konstan}$$

Tabel 5.1. Useful Planetary Data

Body	Mass (kg)	Mean Radius (m)	Period of Revolution (s)	Mean Distance from the Sun (m)	$\frac{T^2}{r^3}$ (s^2/m^3)
Mercury	3.30×10^{23}	2.44×10^{6}	7.60×10^{6}	5.79×10^{10}	2.98×10^{-19}
Venus	4.87×10^{24}	6.05×10^{6}	1.94×10^{7}	1.08×10^{11}	2.99×10^{-19}
Earth	5.97×10^{24}	6.37×10^{6}	3.156×10^{7}	1.496×10^{11}	2.97×10^{-19}
Mars	6.42×10^{23}	3.39×10^{6}	5.94×10^{7}	2.28×10^{11}	2.98×10^{-19}
Jupiter	1.90×10^{27}	6.99×10^{7}	3.74×10^{8}	7.78×10^{11}	2.97×10^{-19}
Saturn	5.68×10^{26}	5.82×10^{7}	9.29×10^{8}	1.43×10^{12}	2.95×10^{-19}
Uranus	8.68×10^{25}	2.54×10^{7}	2.65×10^{9}	2.87×10^{12}	2.97×10^{-19}
Neptune	1.02×10^{26}	2.46×10^{7}	5.18×10^{9}	4.50×10^{12}	2.94×10^{-19}
Pluto[a]	1.25×10^{22}	1.20×10^{6}	7.82×10^{9}	5.91×10^{12}	2.96×10^{-19}
Moon	7.35×10^{22}	1.74×10^{6}	—	—	—
Sun	1.989×10^{30}	6.96×10^{8}	—	—	—

[a]In August 2006, the International Astronomical Union adopted a definition of a planet that separates Pluto from the other eight planets. Pluto is now defined as a "dwarf planet" like the asteroid Ceres.

3. Hukum Kepler Tentang Gerak Planet

Salah satu tanda-tanda kebesaran Tuhan yang membuktikan keberadaannya adalah terjadinya pergerakan planet yang begitu teratur dan tidak saling bertumbukan. Dimana pergerakannya begitu teratur dan harmonis, ini yang menyebabkan timbulnya berbagai pertanyaan, mengapa demikian? Bagaimana tidak, apa jadinya jika pergerakan planet ini saling bertumbukan?

Pada tata surya telah didefinisikan dalam 3 kategori sesuai dengan yang ditetapkan International Astronomical Union (IAU) yaitu :

a. Planet adalah benda langit yang:
   - Mengorbit di sekeliling matahari dan tidak memotong orbit planet yang lainnya.
   - Mempunyai cukup massa sehingga gaya gravitasinya mampu mempertahankan bentuknya mendekati bundar dan ada dalam keseimbangan hidrostatik
   - Bebas dari tetangga di sekitar orbitnya

b. Planet kerdil adalah benda langit dengan sifat:
   - Ia bukan merupakan suatu satelit
   - Bentuk lintasannya yaitu mengelilingi matahari
   - Mempunyai cukup massa
   - Tidak mempunyai tetangga di sekitar orbitnya

c. Seluruh obyek kecuali satlit yang bergerak mengelilingi matahari disebut “Benda Kecil Sistem Tata Surya”.

4. Contoh Soal Hukum Kepler

Hitunglah jarak antara matahari dengan venus, jika dibutuhkan waktu oleh bumi mengelilingi matahari 1 tahun dan jarak rata-rata bumi dengan matahari sebesar $1{,}5\text{x}10^{11}$ m ? (periode orbit planet venus yaitu 0,615 tahun)

Dik:

Periode bumi = T_b = 1 tahun

Jarak matahari ke bumi $R_{m\text{-}b}$ = 1,5 x 1011 m

Periode venus = T_v = 0,615 tahun

Dit:

$R_{m\text{-}v}$ = …?

Penyelesaian:

$$\frac{{T_b}^2}{{R_{m-b}}^3} = \frac{{T_v}^2}{{R_{m-v}}^3}$$

$${R_{m-v}}^3 = (1{,}5.\,10^{11})^3 \left(\frac{0{,}615^2}{1^2}\right)$$

$$R_{m-v} = \sqrt[3]{1{,}28.\,10^{33}}$$

$$R_{m-v} = 1{,}084.\,10^{11} m$$

Maka dengan kita menerapkan hukum Kepler III, kita mendapat jawaban jarak antara matahari dan planet venus itu lebih dekat daripada bumi dengan besar 1,084 x 10^{11} m.[12]

[12]Laintarawan I Putu, dkk. 2009. *Buku Ajar Mekanika*. Denpasar: Universitas Hindu Indonesia

Contoh Soal:[13]

1. Menurut teori Yukawa, gaya tarik antara neutron dan proton dalam inti dinyatakan oleh fungsi potensial $V(r) = \frac{ke^{-ar}}{r}$, dalam hal ini k dan a konstanta dengan $k < 0$. Tentukan gaya $F(r)$.

   Solusi:
   Gaya antara proton dan neutron dapat dihitung sebagai berikut

$$F(r) = -\frac{d}{dr}V(r) = -\frac{d}{dr}\left(k\frac{e^{-ar}}{r}\right)$$

$$F(r) = k\frac{e^{-ar}}{r}(ar+1) = e^{-ar}\left(\frac{ka}{r} + \frac{k}{r^2}\right)$$

2. Sebuah partikel bermassa m bergerak dalam suatu orbit spiral yang diberikan oleh persamaan $r = k\theta$. Tentukan bentuk gaya sentralnya.

   Solusi:

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = -\frac{m}{L^2u^2}F\left(u^{-1}\right) \qquad \text{(i)}$$

$$\text{Misal } u = \frac{1}{r} = \frac{1}{k\theta} \qquad \text{(ii)}$$

   Turunan kedua dari persamaan (ii) dan terhadap θ, diperoleh

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} = \frac{2}{k\theta^3} = \frac{2k^2}{r^3} = 2k^2u^3 \qquad \text{(iii)}$$

   Substitusi persamaan (iii) ke (i) adalah

$$2k^2u^3 + u = -\frac{m}{L^2u^2}F\left(u^{-1}\right)$$

$$F\left(u^{-1}\right) = -\frac{L^2}{m}\left(u^3 + 2k^2u^5\right)$$

   Subtitusikan $u = 1/r$, menghasilkan

$$F(r) = -\frac{L^2}{m}\left(\frac{1}{r^3} + \frac{2k^2}{r^5}\right)$$

[13] Masruroh, dkk. 2017. *Mekanika*. Malang: UB Media Universitas Brawijaya

3. Partikel P bermassa m begerak dalam medan gravitasi yang bermassa M tepat pada daerah pusat. P berada pada jarak a dari O ketika kecepatannya adalah u menjauh dari O. Tentukan kondisi P ketika terlempar sampai posisi tak hingga

Solusi

Partikel$P$ bergerak lurus melewati O, maka dengan hukum gravitasi, persamaan geraknya adalah

$$m\frac{dv}{dt} = -\frac{mMG}{r^2}$$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{v}}{dr} \times \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}\,\frac{d\vec{v}}{dr}$$

$$v\frac{dv}{dr} = -\frac{MG}{r^2}$$

$$\int v dv = -MG\int \frac{dr}{r^2}$$

$$\frac{1}{2}v^2 = \frac{MG}{r} + C \text{ , dengan } C = \left(u^2/2\right) - \left(MG/a\right)$$

$$v^2 = \left(u^2 - \frac{2MG}{a}\right) + \frac{2MG}{r}$$

$$u^2 - \frac{2MG}{a} = V^2$$

$$r = \frac{a}{1 - \left(u^2 a / 2MG\right)}$$

$$u^2 \geq \frac{2MG}{a}$$

4. Partikel bergerak dengan kecepatan$u^2 = MG/a$. Tentukan jarak maksimum dari O untuk mencapai titik P dan waktu untuk mencapai posisi tersebut

Solusi:

$$v^2 = MG\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)$$

$r = r_{max}$ ketika $v = 0$, jarak maksimum dari O untuk mencapai posisi P adalah $2a$. sedangkan waktu yang dibutuhkan

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = MG\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)$$

$r = a$ ketika $t = 0$

$$\int_a^{2a}\left(\frac{ar}{2a-r}\right)^{1/2} dr = (MG)^{1/2}\int_0^{\tau} dt$$

$$\tau = (MG)^{-1/2}\int_a^{2a}\left(\frac{ar}{2a-r}\right)^{1/2} dr$$

$$r = 2a\sin^2\theta$$

Waktu dari $r = a$ ke $r = 2a$ adalah

$$\tau = \left(\frac{a^3}{MG}\right)^{1/2}\left(1 + \frac{1}{2}\pi\right)$$

5. Sebuah partikel bermassa *m* bergerak di bawah gaya tarik gravitasi dengan massa *M* tetap terletak di titik *O*. Tentukan kecepatan partikel di orbit melingkar dengan pusat *O*.

Solusi:

Percepatan partikel dalam koordinat polar:

$$a = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}\right)\hat{r} + \left(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}\right)\hat{\theta}$$

$$= -\frac{v^2}{R}\hat{r} + \dot{v}\hat{\theta}$$

Untuk gerak melingkar *r* = *R* dimana kecepatan keliling $v = R\dot{\theta}$

Persamaan gerak partikel diperoleh:

$$m\left[-\frac{v^2}{R}\hat{r} + \dot{v}\hat{\theta}\right] = -\frac{mMG}{R^2}r^2$$

Dimana komponen dalam radial dan arah melintang diberikan:

$$\frac{v^2}{R} = \frac{MG}{R^2} \text{ dan } \dot{v} = 0$$

Dan diperoleh

$$v^2 = \frac{MG}{R}$$

6. Hitung potensial oleh adanya suatu gaya sentral berikut.

$$F = -\frac{k}{r^2}\hat{r}$$

Solusi:

Hubungan antara gaya sentral dan potensial yang bergantung r adalah

$$V(r) = \int \vec{F}(r)\,dr \qquad (1)$$

Sehingga:

$$V(r) = k\int \frac{dr}{r^2} = -\frac{k}{r} \qquad (2)$$

DAFTAR PUSTAKA

1. Abdullah Mikrajuddin. 2013. *Diktat Mekanika*. Bandung: ITB
2. Halliday, D., R. Resnick, Walker, J. 2012. *Fisika Dasar*. Edisi 7. Jilid 1. Jakarta: Erlangga
3. Laintarawan I Putu, dkk. 2009. *Buku Ajar Mekanika*. Denpasar: Universitas Hindu Indonesia
4. Masruroh, dkk. 2017. *Mekanika*. Malang: UB Media Universitas Brawijaya
5. Sarojo Ganijanti Aby. 2014. *Mekanika*. Edisi 5. Jakarta: Salemba Teknika
6. Erway, Raymond A., John W. Jewett Jr. 2009. *Fisika: untuk Sains dan Tteknik. Edisi 6. Buku1*. Alih Bahasa: Chriswan Sungkono. Jakarta: Salemba Teknika
7. Tipler, Paul A. 1998. *Fisika untuk Sains dan Teknik*. Jilid 1. Edisi 3. Alih Bahasa: Lea Prasetio dan Rahmad W Adi. Jakarta: Erlangga