Meten naar menselijke maat

E. de Moor & J. Menne
Freudenthal Instituut, Universiteit Utrecht

1 verantwoording

De auteurs van dit artikel zijn medewerkers van het TAL-project (Tussendoelen Annex Leerlijnen), waarbinnen thans aan een brochure gewerkt wordt over (tussen)doelen en leerlijnen voor meten en meetkunde in de groepen 1 tot 4 van de basisschool. De ontwikkeling van deze brochure is nog in volle gang. Er is een voorlopige lijst van doelen voor deze domeinen opgesteld. Tevens is hiervan een verantwoording beschreven. Dit document heeft vooralsnog een interne functie. De leer- en ontwikkelingspsychologische literatuur en de bestaande vakdidactische theorieën op het gebied van het meten zijn opnieuw in overweging genomen. Er is een analyse gemaakt van het meten voor de groepen 1 tot 4 in vijf realistische methoden. Er worden praktische lessen uitgeprobeerd. De analyse hier is beperkt tot het meten. De kern betreft het meetonderwijs in de groepen 3 en 4, in het bijzonder de lengtemeting. Uitgaan van het eigen lichaam lijkt hiervoor een geschikt startpunt.

2 meten, een noodzakelijkheid

De oude Grieken waren al in staat de omtrek van de aarde te meten door middel van eenvoudige waarnemingen van zon en schaduw. Astronomen hebben in latere tijden de afstanden tot de sterren bepaald en de zonsverduisteringen wetenschappelijk voorspeld. Al in de zeventiende eeuw is bij de verduistering van een van de manen van Jupiter een eerste schatting van de lichtsnelheid gemaakt. Steeds geavanceerder meetmethoden geven ons een dieper inzicht in het heelal. Maar ook de microkosmos - die van het atoom en zijn onderdelen - wordt door fysici steeds verder ontleed. In al dit onderzoek speelt het praktische meten altijd een rol, maar het kan niet zonder het theoretische denken. Wat een prachtige methoden hebben de natuurwetenschappers ontwikkeld in de voortdurende zoektocht naar de ordening van onze waarnemingswereld teneinde onze wereld - voor zover binnen ons kunnen - beheersbaar te maken.

Meten beperkt zich echter niet tot de bèta-wetenschappen alleen. Sinds het eind van de negentiende eeuw is men ook in sociale wetenschappen gaan meten. Meetinstrumenten veranderden de studeerkamer van de psycholoog in een laboratorium, waar voor het eerst reactiesnelheden van het denken werden gemeten. Er werden proeven opgezet om de samenhang van abstract denken en leeftijd te onderzoeken. En wie kent niet de beroemde IQ-bepalingen? Ook vandaag de dag komen we via het meten steeds meer te weten over de ontwikkeling en de functies van onze hersens.
Dagelijks worden we geconfronteerd met meetgetallen: prijzen, recepten, beursindexcijfers, sportrecords, bevolkingsprognoses, weersvoorspellingen, geluidsoverlast, medische gegevens en zo meer. Wat een chaos zou onze maatschappij zijn als we niet over deze krachtige ordeningscriteria van de meetgetallen beschikten.
Meten is weten en dus ook een belangrijk en noodzakelijk domein voor het reken-wiskundeonderwijs.

3 aspecten van meten

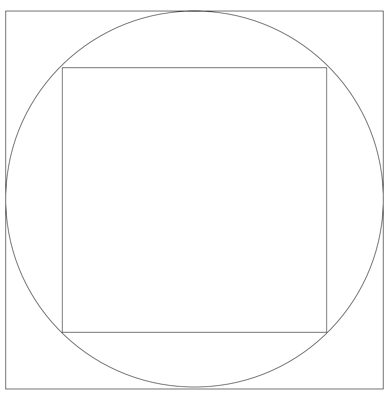
Via meten wordt de wereld en haar verschijnselen op getalsmatige wijze geordend, onderzocht en beheersbaar gemaakt. In het dagelijks leven worden de meetgetallen meestal door anderen aangeleverd en dienen ze voornamelijk als informatieverstrekkers. Daarom is met name het interpreteren van grafieken, diagrammen en andere visualisaties van getalsgegevens een belangrijk onderdeel van het reken-wiskundeprogramma. We merken echter op dat hierbij meestal weinig gerekend wordt. Het gaat vooral om het ordenen van de getalsgegevens, om het interpreteren van hun onderlinge relaties en om begrip van de betekenis van zo'n meetgetal. Meten en rekenen zijn in meerdere opzichten van een andere aard. Zo is het meten geen deductieve wetenschap, terwijl rekenen wel als zodanig opgevat kan worden. Globaal kunnen we verschillende aspecten voor het meten op de basisschool onderscheiden:

- meetkundige verschijnselen (bijvoorbeeld lengte, oppervlakte, inhoud, hoek);
- fysische verschijnselen (bijvoorbeeld massa, tijd, temperatuur, snelheid);
- rekenkundig statistische verschijnselen (bijvoorbeeld gemiddelde, procenten, dichtheid);
- maatschappelijk statistische verschijnselen (bijvoorbeeld ordeningen voor sportprestaties, IQ, Cito-score en welvarendheid).

Op de basisschool komen deze aspecten natuurlijk niet in volle omvang aan de orde, maar een zekere oriënteringsbasis moet hier toch gelegd worden. Bij het meten in de groepen 1 tot 4 zal de nadruk vooral liggen op de allereerste en eenvoudigste grootheden, met name op het ordenende aspect via getallenlijn, meetlijn, schaallijn, echter wel aan de hand van contexten en eenvoudige toepassingen, die voor de kinderen betekenisvol zijn en waarin ze begrip kunnen ontwikkelen van meetgetallen.

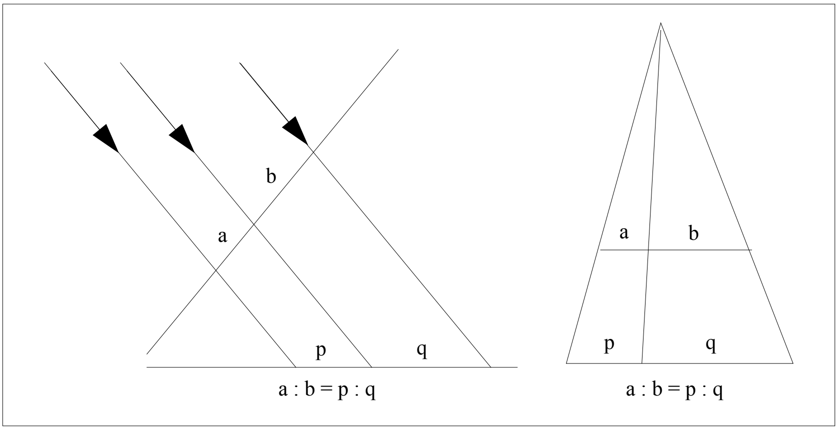
4 meten, meetkunde en rekenen

Rekenen-wiskunde in de basisschool wordt tegenwoordig naar drie hoofddomeinen onderscheiden: rekenen, meetkunde en meten. Meetkunde en meten worden nogal eens verward. De Engelse termen ‘geometry’ en ‘measurement’ zijn duidelijker. Rekenen-wiskunde is de wetenschap van ‘Getal’ en ‘Ruimte’. Op de basisschool wordt onder meetkunde verstaan: het intuïtief verkennen en begrijpen van ruimtelijke fenomenen, zoals oriënteren en lokaliseren, verschijnselen van licht en schaduw, bewegingen in de ruimte, zoals spiegelen, draaien, eigenschappen van vormen en zo meer. Getallen kunnen in de meetkunde een rol spelen, maar soms kan men getalsmatig werken zonder echt te rekenen. Een voorbeeld hiervan zien we in de opgave in figuur 1 uit de methode ‘Alles Telt’, waar aangetoond moet worden dat de oppervlakte van het kleine vierkant de helft is van het grote.



figuur 1: het kleine vierkant is de helft van het grote; niet rekenen!

Zodra we ons in de meetkunde van getallen gaan bedienen kunnen we lengtes, oppervlaktes en inhouden berekenen en raken we in het gebied van het meten. Zoals we hiervoor beschreven is de meetkunde historisch ook zo ontstaan. Het is meet-kunde (metrologie) in de letterlijke zin. Deze zogenoemde metrisering is gebaseerd op twee fundamentele verhoudings-eigenschappen, die we de 'zonlicht-' en de 'lamplicht-'methode kunnen noemen (fig.2). Met behulp van deze twee eigenschappen zijn in feite alle berekeningen in de euclidische meetkunde te maken.



figuur 2: verhoudingstrouw bij 'zonlicht' en 'lamplicht'

5 enige historie

Meten heeft in het Nederlandse onderwijs altijd een zwakke traditie gekend. Aan het begin van de twintigste eeuw zijn er pogingen gedaan door Van der Ley en Ligthart met het activiteitsprincipe 'leren door doen'. In de zogenoemde 'Modern Math'-methoden aan het eind van de jaren zestig had meten een tamelijk prominente plaats. Ook in de jaren zeventig bestond er aandacht voor dit domein, zoals de methode 'Aktief Rekenen' en de set werkkaarten 'Instrumenteel Rekenen' lieten zien. Deze methoden hadden echter een gering marktaandeel. In het algemeen hebben al deze pogingen weinig effect gehad. De aanpak bleef vaak steken in 'handelen' alleen, hetgeen betekende dat er wel veel 'gedaan' moest worden, maar weinig uitdagingen werden gesteld om de activiteit naar een wiskundig hoger niveau te tillen. Anders gezegd: de problemen werden wel horizontaal gemathematiseerd (binnen de wiskunde getrokken), maar de verticale component (de niveauverhoging) ontbrak. In feite werd tot zo'n 25 jaar geleden het meten op de basisschool bepaald door exercities in het metriek stelsel. Daarnaast waren oppervlakte- en inhoudsformules residuen van het aloude meetkundig rekenen.

Binnen het Wiskobas-project (1970-1980) werd meten als een apart domein erkend. Maar van meet af aan lag het accent toen niet zo zeer op het instrumentele meten (het doen) als wel op de begripsontwikkeling en vooral op het aspect van de verticale mathematisering. Tevens werd in die jaren een theoretische fundering aan het meten gegeven, die van grote invloed is geweest op de ontwikkeling van de realistische methoden.

6 begripsontwikkeling

Bij meten hebben we altijd met benoemde getallen te maken. Met dergelijke getallen kwantificeren we een grootheid. Grootheden, ook de basale grootheden als lengte, oppervlakte, inhoud, gewicht en tijd, komen in het onderwijs vaak uit de lucht vallen. Dat dit geen trivialiteiten zijn heeft Piaget al aangetoond. Het is derhalve van belang dat aan de begripsvorming van de grootheden lengte, oppervlakte, inhoud, gewicht en tijd de nodige aandacht besteed wordt.

Bij lengte kan niet volstaan worden met de introductie van de standaardmaat en van de liniaal als meetinstrument, omdat lengte zich nu eenmaal in verschillende verschijningsvormen manifesteert (bijvoorbeeld kromlijnig, ruimtelijk of als afstand).

Ook oppervlakte blijkt voor kinderen een lastig begrip. De introductie van deze grootheid behoeft een zeer zorgvuldige inleiding, waarbij binding aan andere grootheden (zoals kosten of gewicht) een uitstekend didactisch middel blijkt te zijn. We komen hier nog op terug.

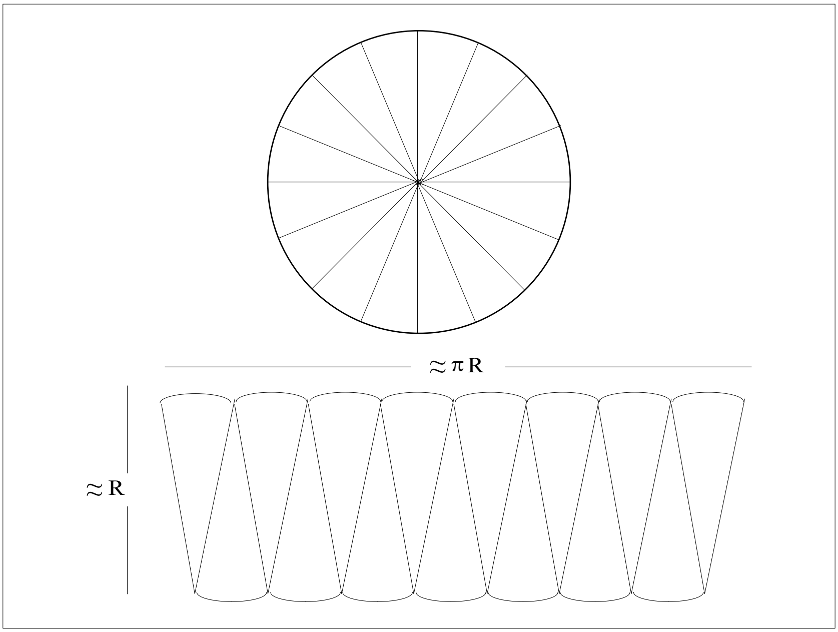
Grootheden komen vaak in samenhang voor, niet alleen als samengestelde grootheden, zoals snelheid (lengte per tijdseenheid), maar ook als begrippen op zich. Bekend is de non-relatie tussen omtrek en oppervlakte. Maak rechthoeken met een oppervlakte van 16 cm^2 en bereken van elk de omtrek. Welke conclusies kun je daaruit trekken? Het is derhalve aan te bevelen deze begrippen niet geïsoleerd aan te bieden.

Ontwikkeling van begrip en gevoel voor maten hangt samen met het begrip van de grootheid. De standaardmaten, waarmee wij gewend zijn te werken, zijn niet zomaar uit de lucht komen vallen. Een genetische aanpak, zowel in historische als psychologische zin, zal hierbij zinvol zijn. Een bekende methode voor lengtemeting is die waarbij uitgegaan wordt van de natuurlijke maten van het eigen lichaam, waarover dadelijk meer.

Van groot belang is dat kinderen zich bij bepaalde maten iets kunnen voorstellen, zodat ze referentiepunten ontwikkelen voor de meest voorkomende maten. Je woont bijvoorbeeld 1 kilometer van school, je weet dat een voetbalveld ongeveer 100 meter lang is. Een kilo is een pak suiker. Een

liter; denk aan een pak melk. Een schaatser doet ongeveer 10 seconden over 100 meter.
Meten beoogt ook de ontwikkeling van begrip van meetgetallen als specifieke getallen. Het zijn uitkomsten van metingen en dus niet-precieze getallen, waardoor het rekenen ermee een geheel ander karakter krijgt. Al in ons alledaagse taalgebruik komt dit tot uiting. Je spreekt over 'ruim 3 meter' of 'ongeveer' of 'bijna', maar wat wordt daarmee bedoeld en mag dat in alle situaties wel? Dit taalgebruik is een essentiële fase in het ontwikkelen van een goede meethouding. Het gaat om het wennen aan het gebruik van deze 'ronde getallen', die we in het dagelijks leven zo vaak tegenkomen. Ook grote getallen zijn in feite meetgetallen. Zo meten we vaak met de maat 'miljoen' als we het aantal inwoners van een land opgeven. Er wonen in Nederland nu 16 miljoen mensen, maar wat betekent dat precies?
Belangrijk is ook het begrip van eenvoudige meetmethoden. Hierbij denken we allereerst aan elementaire alledaagse dingen als het gebruik van bijvoorbeeld een liniaal, naaicentimeter, brievenweger of inhoudsmaten. Natuurlijk moeten de kinderen deze instrumenten praktisch leren gebruiken. Maar de essentie zit nu juist vaak in het bedenken van een methode om een niet triviale grootheid te meten. Hoe kun je de dikte van een blaadje papier vinden? De oppervlakte van een grillige figuur? De inhoud van een grillig gevormde vaas? De hoogte van een flat? De afstand tot een punt aan de overkant van een rivier? Niet al deze problemen zijn even eenvoudig, maar het gaat nu meer om de bedoeling van de term 'begrip van methoden van meten' dan om de methoden zelf.
In afgeleide zin krijgt het meten zijn grote toepassingswaarde in het maken van grafieken, vooral ook bij allerlei statistische verschijnselen. Bijvoorbeeld: vergelijk bevolkingsdichtheden van enkele landen. Hoe komen de kijkcijfers van een tv-programma tot stand?
Het praktische handelen of instrumentele meten speelt bij alle genoemde aspecten een zekere rol, maar dient in onze opvatting ten dienste te staan van het mentale handelen en verdere begripsontwikkeling van het meten. In het onderwijs zou dus allereerst de vraag gesteld moeten worden hoe een meetprobleem aangepakt zou kunnen worden. De leraar moet daarbij in de gaten houden welke de wiskundige aspecten zijn en hoe die expliciet gemaakt kunnen worden en hoe ten slotte het gestelde probleem naar een hoger niveau getild kan worden of ten minste de voorbereidende fase daartoe in gang gezet kan worden.
Een voorbeeld hiervan is het ontdekken van de formule van de oppervlakte van een cirkel (πR^2) door verknipping tot sectoren en het omstructureren tot een 'bijna-rechthoek' (fig.3). Hierbij wordt uitgegaan van de omtrek van de cirkel ($2\pi R$), die overigens ook weer op inzichtelijke wijze door meting gevonden kan worden.

Kortom, meten is niet alleen concreet handelen, maar vooral mentaal handelen. In het onderwijs dient aan de begripsontwikkeling van grootheden (ook in samenhang), maten (ook in samenhang, bijvoorbeeld met referenties), meetgetallen (wat betekenen ze, hoe werk je ermee?) en meetmethoden de nodige zorg besteed te worden. Toepassingen komen vooral voor in statistische verschijnselen en grafieken.



figuur 3: een cirkel verknipt en omgestructureerd tot een 'bijna-rechthoek'

7 Freudenthal en Piaget

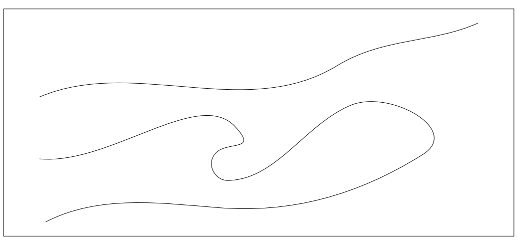
Nu is begripsontwikkeling geen spontaan en autonoom proces. Derhalve dient het onderwijs zo ingericht te worden dat de genoemde begripsontwikkeling zich bij de kinderen ook werkelijk voltrekt. Freudenthal beschouwde het meten als een belangrijk domein van het rekenonderwijs. Hij stelde - denkend vanuit een fenomenologische vakdidactische visie - een ideële ontwikkelingsgang voor, waarlangs het meten in het onderwijs dient te verlopen. Deze 'meetlijn van Freudenthal' komt kort samengevat neer op de fasen:

– vergelijken;
– natuurlijke maten;

– standaardmaten;
– toepassen.

Hoewel dit een theoretische beschrijving is, bedoelde hij deze wel als een praktisch uitgangspunt voor het onderwijs (Freudenthal, 1984a). In het algemeen is deze opvatting thans in de realistische methoden te herkennen.

Reeds eerder hadden Piaget en zijn medewerkers onderzoek gedaan bij jonge kinderen naar de cognitieve ontwikkelingsfasen op het gebied van het meten. Bekend uit de Piaget-school zijn de bevindingen over conservatie van grootheden als lengte, oppervlakte en inhoud. Er zij nog eens aan herinnerd dat deze Piaget-experimenten niet bedoeld waren als richtinggevend voor onderwijs en didactiek, maar louter als onderzoek naar de ontwikkelingsfasen van het jonge kind. Voor de verschillende grootheden stond daarbij het begrip ‘conservatie’ centraal. Ieder kent natuurlijk de bekende proeven, waarbij een touwtje vervormd wordt, een brok klei gemanipuleerd of een hoeveelheid water overgegoten wordt en de daaraan gerelateerde kernvraag: blijft het maatgetal van de grootheid gelijk onder de betreffende transformatie? Het meest bekende voorbeeld is dat van lengte. Een voorbeeld van dit begrip zien we in een opgave uit het ‘Leerling Volg Systeem’ van het Cito fig.4), die door 85 procent van de leerlingen van eind groep 3 goed beantwoord wordt.



figuur 4: welk touwtje is het langst?

Dit soort conservatieproeven zijn talloze malen herhaald en becommentarieerd. De resultaten lopen nogal uiteen en zijn afhankelijk van context, vraagstelling, milieu en cultuurachtergrond, maar in het algemeen kan men stellen dat globaal dezelfde stadia van ontwikkeling worden waargenomen. Conservatie van lengte vindt eerder plaats dan die van oppervlakte, inhoud en gewicht. Ten aanzien van de constitutie van conservatie blijkt er echter een enorme spreiding in leeftijd te bestaan. Dit lijkt ons een belangrijke reden om aan het meten van jongs af aan aandacht te besteden.

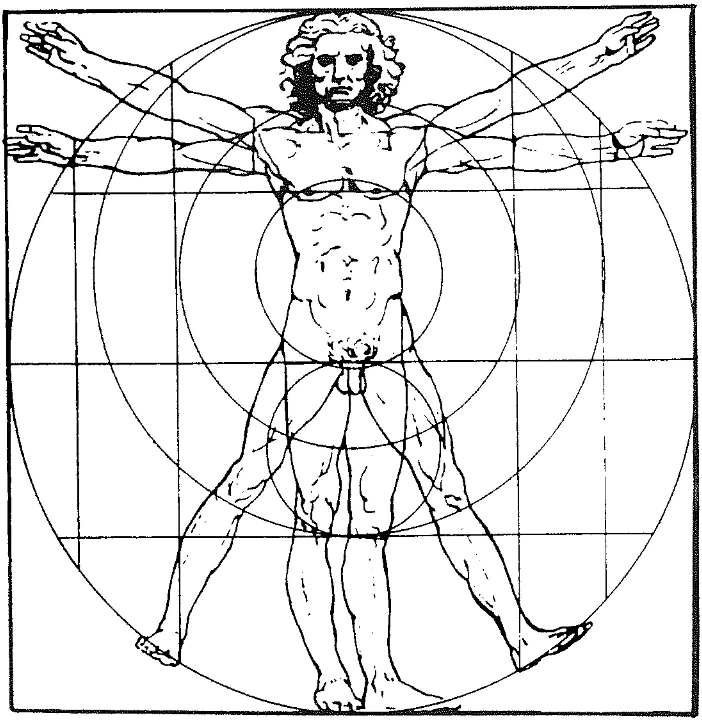
Ook Piaget onderscheidde in de ontwikkeling voor het meten van het kind opvolgende fasen, die hij als volgt benoemde: intuïtief (perceptief), hande-

In de fase van het objectgebonden meten kunnen we twee subfasen onderscheiden. Eerst wordt een grootheid 'afgebroken' met een bepaalde maat. Bijvoorbeeld: hoeveel stukjes van een gegeven lengte kun je uit een dropveter halen? De dropveter wordt in werkelijkheid opgeknipt (fig.5).
Dit principe noemde Freudenthal het 'uitscheppen'. Het is eenzelfde handeling als het aftellen van een bepaalde hoeveelheid op een kralenketting. Zo dringt zich de analogie van getallenlijn en meetlijn vanzelf op. De tweede subfase van het objectgebonden meten vloeit daaruit op natuurlijke wijze voort. Nu gaat het om het 'opbouwen' of 'opmeten' van de grootheid met een bepaalde maat. In het geval van de dropveter: hoeveel maal kan de gegeven maat op de te meten lengte 'in gedachten' worden afgepast? In feite zijn we hier al heel dicht bij het formele meten. Er wordt nog geen liniaal of meetlat gebruikt, maar het principe van het afpassen van een maat ligt hierin volledig vervat.
Bij enkele proeven - zowel met lengte als inhoud - met tamelijk zwakke, allochtone leerlingen uit groep 3 en 4 is gebleken dat het 'afbreken' of 'uitscheppen' van een grootheid als makkelijker ervaren wordt dan het herhaaldelijk afpassen: het 'opmeten'. Een verklaring hiervoor zou kunnen zijn dat je iets overhoudt als je opdeelt (uitdeelt), wat concreter is dan opmeten. Zo blijkt dat bij het opmeten van de lengte van het klaslokaal het de kinderen niets uitmaakt dat ze verschillende uitkomsten krijgen. Kennelijk is er in dit geval nog geen begrip aanwezig van wat meten nu eigenlijk is en waartoe het dient. Als voorlopige conclusie menen we dat, hoe dicht deze twee subfasen ook bij elkaar liggen, het toch te overwegen valt om niet direct met het wat abstractere 'opmeten' te beginnen, maar eerst aandacht te besteden aan het 'afbreek-principe'.

9 contextgebonden: de eigen lichaamsmaten

De titel van dit artikel 'Meten naar menselijke maat' moet tweeledig opgevat worden. Allereerst bedoelen we dat het meetonderwijs op een adequate manier plaatsvindt en dat het programma voor leraar en leerling praktisch haalbaar is. De haalbaarheid heeft zowel betrekking op de didactische aanpak als op de organisatie. Verder houdt de titel in dat de eigen lichaamsmaten als centraal thema door de gehele leerlijn meten zouden kunnen terugkomen. In ieder geval lijkt ons dit uitgangspunt voor de onderbouw een geschikte start. Kinderen zijn nog op een leeftijd die sterk ego-gericht is. Ze onderzoeken enkele maten van zichzelf, hetgeen het principe van de contextgebondenheid ondersteunt.
Leonardo da Vinci liet al zien dat de lichaamslengte van een volwassene

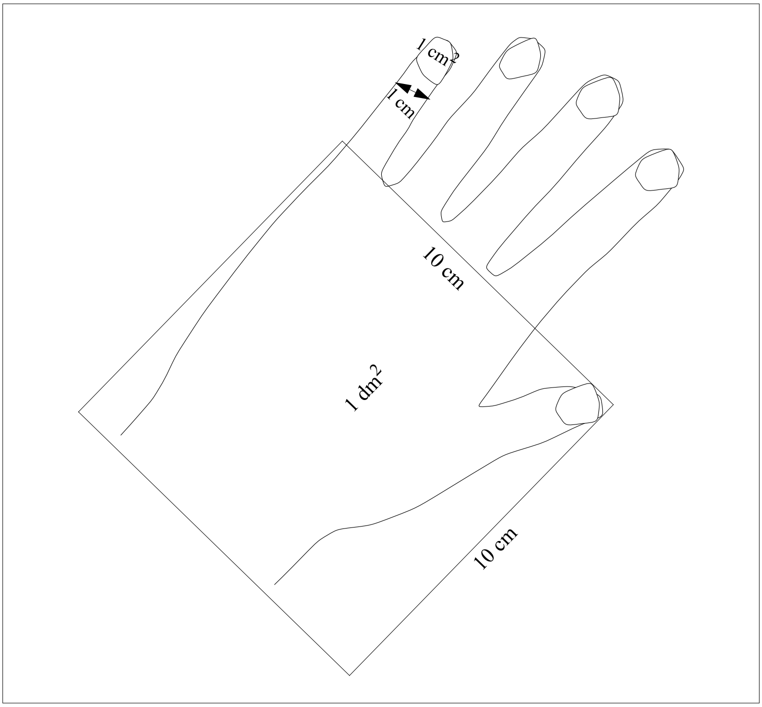
overeenkomt met zijn maximale spanwijdte (fig.6). Met gespreide armen pas je precies in een vierkant. Je kunt lichaamslengten dus ook vergelijken door met gespreide armen tegen elkaar te gaan staan. De kinderen die willen uitmaken wie nu de langste is kunnen dan zelf zien en voelen wie 'wint'.



figuur 6: het lichaamsvierkant van Leonardo da Vinci

De maat van je pols kun je vinden door deze te omvatten met je duim en je middelvinger. De omtrek van je nek is precies tweemaal de lengte van de spanwijdte tussen duim en middelvinger, dus de omtrek van je nek is tweemaal zo groot als die van je pols.
De omtrek van het hoofd is twee keer de omtrek van de nek en dus vier keer de spanwijdte tussen duim en wijsvinger. De lengte van de ringvinger komt overeen met de lengte van het oor en de grootte van de pink geeft de lengte van de neus weer. Ten slotte, de lengte van de voet is ongeveer de lengte van de onderarm.
We hebben kinderen van verschillende leeftijd gevraagd deze gegevens te controleren. Kinderen van zes jaar en jonger lukt het niet om hun vingers om hun pols te sluiten. Bij de kleuters kloppen deze relaties nog niet, maar vanaf zeven jaar - juist voor groep 3 en 4 - lukte het alle gevraagde kinde-

ren om hun pols en hals te omvatten. En ook voor kinderen van groep 4 geldt in het algemeen dat hun lengte in het vierkant met gespreide armen past.



figuur 7: een handvol maten

Lichaamsmaten kunnen ook worden gebruikt als referentiemaat voor standaardmaten figuur 7. De breedte van de pink (voor kinderen de duim) is 1 cm. De meterlat komt bij zeven jaar tot ongeveer je schouder. De dikte van de vingernagel is 1 mm. De handpalm is 10 × 10 cm, dus 1 dm^2. De oppervlakte van je nagel is ongeveer 1 cm^2.
De relatie met bewerkingen met getallen kan ook worden gelegd via enkele vuistregels voor je te verwachten lengte. Een meisje van acht jaar is op driekwart van haar uiteindelijke lengte. Voor een jongen geldt deze verhouding op negenjarige leeftijd.
De non-relatie tussen omtrek en oppervlakte kan ook met het eigen lichaam worden verduidelijkt. Je hebt steeds evenveel verf nodig als je een afdruk maakt van je hand ongeacht of je je vingers nu spreidt of niet, maar als je je hand omtrekt met een potlood is de lijn korter bij gesloten vingers dan wanneer de vingers worden gespreid.
En tot slot, het eigen lijf blijft verbazen, want de omtrek van je ene hand

en die van je andere zijn samen net iets langer dan je lichaamslengte. Een prachtig onderzoek, maar wel voor de wat oudere leerlingen.
In de realistische methoden wordt veelvuldig met lichaamsmaten gewerkt voor schattend meten, vergelijken, ordenen en verhoudingen. In het volgende nu een kort overzicht van wat er in de methoden (groepen 3 en 4) aan meten is te vinden.

10 aanvankelijk meten in vijf realistische methoden

Wij hebben de vijf meest gangbare realistische methoden 'De Wereld in Getallen', 'Pluspunt', 'Wis en Reken', 'Rekenrijk' en 'Talrijk' en hun voorlopers geanalyseerd op het aanbod voor meten tot en met groep 4, zowel naar leerstofaanbod als naar didactische aanpak.
Wat het inhoudelijke aanbod betreft hebben we ons beperkt tot de basisgrootheden: lengte, oppervlakte, inhoud, gewicht en tijd. Andere grootheden zoals temperatuur en geld zijn buiten beschouwing gelaten. Alle vijf grootheden komen in deze methoden aan de orde. Alleen in 'Talrijk' is in groep 3 en 4 niets over inhoud gevonden.
Globaal worden in deze methoden dezelfde minimumdoelen nagestreefd. Deze minimumdoelen komen ten aanzien van de grootheid lengte neer op het kunnen meten in centimeters aan het eind van groep 4. Enkele methoden gaan echter veel verder dan deze minimumdoelen. Waar de ene methode nog geen aandacht aan de meter besteedt, wordt in een andere behalve de meter ook de kilometer aan de orde gesteld. In 'Talrijk' wordt eerst de meter geïntroduceerd en pas daarna de centimeter (liniaal). Aandacht voor afstand onder bepaalde voorwaarden, zoals omwegen en roosterafstanden, ontbreekt in enkele methoden volledig.
Bij oppervlakte wordt in de meeste methoden direct met de roosterstructuur begonnen en aangestuurd op begrip van het vermenigvuldigmodel van de rechthoekstructuur, echter zonder gebruik van standaardmaten. In enkele methoden ontbreekt de non-relatie oppervlakte-omtrek.
Bij inhoud en gewicht krijgen vergelijken en ordenen de nadruk. Maar deze grootheden genieten in vergelijking met de andere vrij weinig aandacht. In de spaarzaam gesignaleerde lessen wordt aanbevolen een personenweegschaal en/of een balans te gebruiken. De kilogram wordt wel geïntroduceerd, de liter en de gram veelal niet.
Er bestaat veel aandacht voor tijd. In het bijzonder voor klokkijken. Het minimumdoel is dat de kinderen kunnen klokkijken op een analoge klok tot op het kwartier nauwkeurig. Er komen week-, maand- en jaarkalenders voor. Hoe divers het aanbod is, blijkt bijvoorbeeld uit de methode 'Re-

kenrijk', waar ook het digitale klokkijken en het aflezen van tijdsduur in een spoorboekje aan de orde is.

Ook de didactische aanpak verschilt nogal per methode. Niet alle fasen die bijdragen aan de maatontwikkeling komen in alle methoden aan de orde als het om begripsvorming van grootheden gaat. Dit kan zijn omdat sommige methoden eind groep 4 nog niet toe zijn aan standaardmaten en aan de meer formele fase. Dit is met name het geval bij inhoud, gewicht en oppervlakte. Vaak worden ook stappen in de leerlijn overgeslagen zoals in de methode 'Talrijk', waar bij oppervlakte direct met een roosterstructuur gewerkt wordt. In het algemeen wordt in de handleidingen aanbevolen om meetactiviteiten ook concreet te doen. Ook de hierboven genoemde ideële meetleerlijn wordt beleden. Echter duidelijke einddoelen van het meten moeten impliciet begrepen worden. Veel zal hier afhangen van kennis en kunde van de leraar. De methoden bieden de mogelijkheid om, zeker wat het allereerste lengte-meten betreft, aan te sluiten bij de 'eigen lichaamsmetingen'. De hier afgebeelde praatplaat uit 'De wereld in getallen' (fig.8), biedt talloze zinvolle activiteiten.

figuur 8: meetactiviteiten in 'De wereld in getallen'

- Wie in onze groep is even lang als de bordliniaal? Ze zijn vast allemaal langer.

- Is er een kind dat precies in de lengte op het bureau van de juf of meester past?
- Zou er een kind in onze groep even lang zijn als twee tafeltjes op elkaar?
- Passen er echt wel zes kinderen naast elkaar op het bankje bij het bord?
- Als drie kinderen echt een toren zouden maken door op elkaars schouders te gaan staan, zou het bovenste kind dan het plafond kunnen aanraken?
- Als Kees voor de vensterbank gaat staan, zou hij dan naar buiten kunnen kijken? En José?
- Kan Martijn languit in de deuropening liggen, denken jullie?
- Jullie hebben allemaal je rekenboek voor je. Vijftig van die boeken op elkaar ... Zou zo'n stapel boven Oktay uitkomen of niet?

Een prachtige plaat, juist om het mentale meten te bevorderen: eerst dagen we de kinderen uit om de vragen redenerend te beantwoorden, pas daarna laten we enkele bevindingen ook concreet controleren.

figuur 9: een reus wordt gemeten (uit: 'Rekenrijk')

In verschillende methoden komt de activiteit van het ordenen van de kinderen naar lengte voor. Hoewel alle aspecten van het meten daarbij aan de orde komen, is het zoeken naar een geschikte meetmethode de kern van de activiteit. Dit kan uiteindelijk leiden tot het maken van een staafgrafiek van de hele groep.
Niet direct op het eigen lichaam gericht, maar daar wel aan gerelateerd is de activiteit van de 'Nieuwe kleren voor de reus' uit de methode 'Rekenrijk' (fig.9).
Men kan deze opgave ook als een activiteit over verhoudingen opvatten, waarop het feitelijke meten stoelt.

– Hoe groot is een kabouter? Kun je dat zien op de plaat?
– Past de reus wel in ons lokaal?

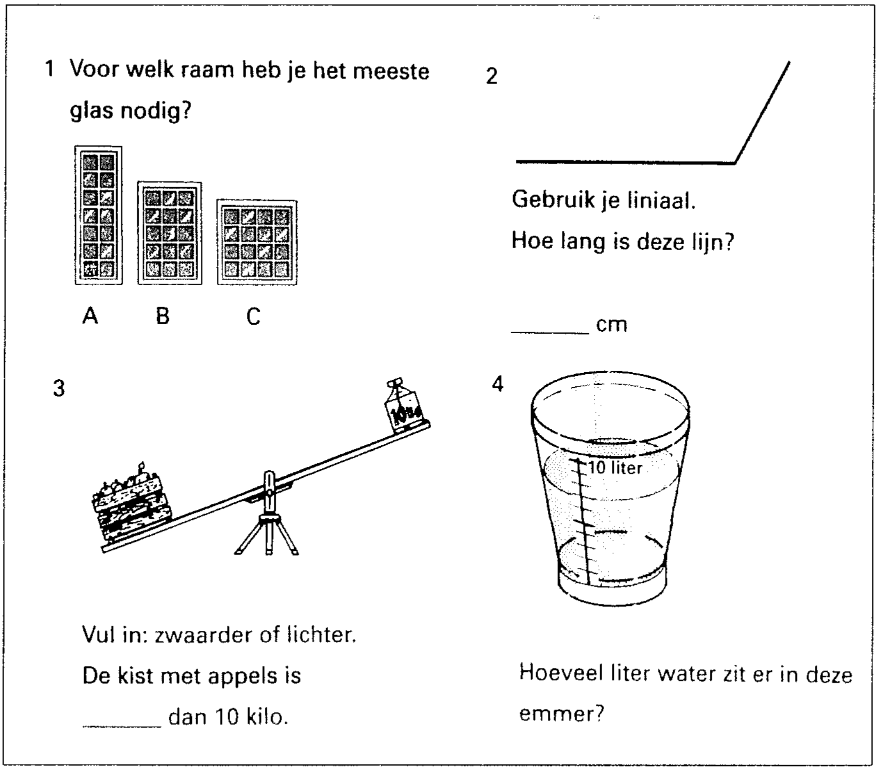
Omdat de lengte van de reus ongeveer vijfmaal zo groot is als die van de kabouter en een kabouter ongeveer een halve meter is, past de reus net in het lokaal.
Daarna kunnen we meer generaliserende vragen stellen als 'vijf kabouters zijn even groot als de reus, wat kun je zeggen over hun schoenmaten? En hoe zit het met de hoeveelheid leer, die benodigd is voor een zool?' Maar het laatste is wellicht voor differentiatie of voor hogere leerjaren.

Samenvattend kan worden gesteld dat de minimumdoelen in de genoemde methoden globaal overeenkomen. Het leerstofaanbod verschilt echter aanzienlijk en dit geldt ook voor de didactische aanpak. Dat consensus hierover wenselijk is laten ook de PPON-resultaten zien.

11 PPON-resultaten

Het meetonderwijs is de laatste jaren licht vooruitgegaan. De PPON-gegevens laten zien dat leerlingen begin groep 5 in 1997 beter scoren op de vaardigheid meten dan de leerlingen begin groep 5 in 1992 en deze laatste groep doet het weer beter dan de leerlingen medio basisschool in 1987.
Het verschil tussen de gemiddelde 1.0 en 1.90 leerling is groot. Ongeveer 80 procent van de 1.00 leerlingen bereikt de standaard 'voldoende', terwijl van de 1.90 leerlingen ongeveer 40 procent het niveau van deze standaard bereikt (van de 1.25 leerlingen is dit ongeveer 70 procent).
Voldoende betekent dat opgaven als in figuur 10 goed of nagenoeg goed worden gemaakt.
Er wordt goed gescoord op het vergelijken van oppervlaktes. Er wordt van 'goede beheersing' gesproken bij een percentiel van 10, hetgeen betekent dat 90 procent van de leerlingen dit zonder problemen oplost. Bij nadere beschouwing blijken de gestelde opgaven echter uit te voeren door puur

tellen van het aantal eenheden bijvoorbeeld tegels of raampjes. Men kan zich echter afvragen of het begrip oppervlakte zich bij deze kinderen al geconstitueerd heeft.

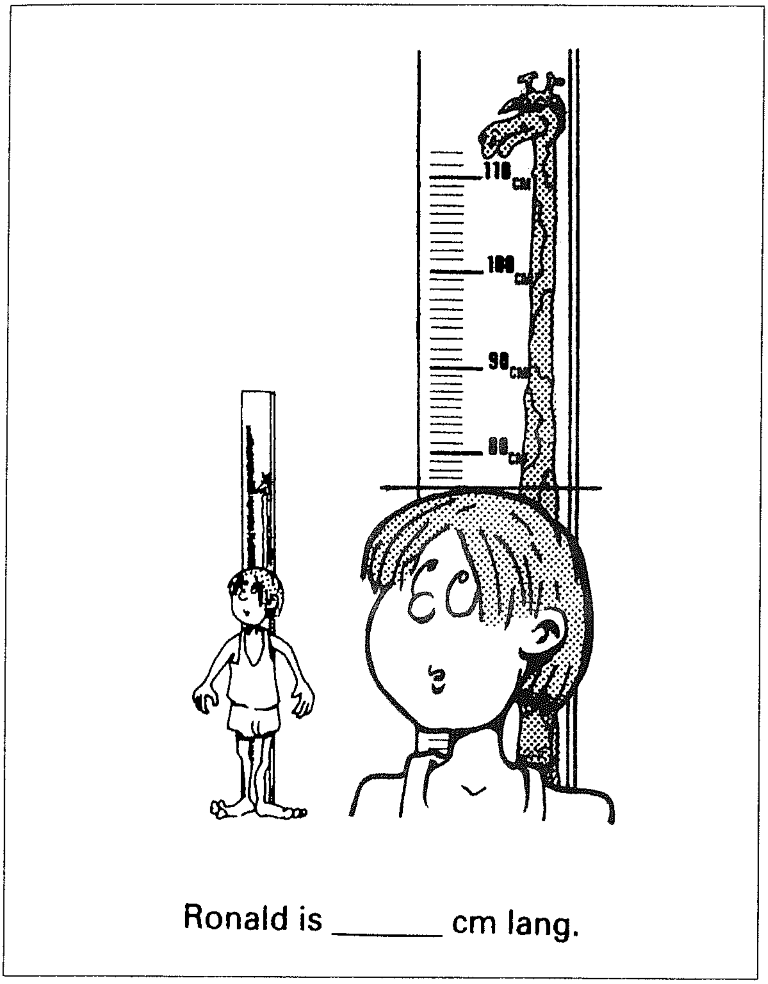


figuur 10: vier meetopgaven uit medio-PPON 1997
die (nagenoeg) goed scoorden

Er is onvoldoende beheersing bij het aflezen van lichaamslengte (fig.11). Slechts 10 procent van de leerlingen van de steekproef beheerst dit matig. Er is geen groep leerlingen aan te wijzen die op een goede beheersing uitkomt. Dit is overigens niet zo verwonderlijk. Meetactiviteiten rond het eigen lichaam in de hiervoor genoemde methoden (groep 1 tot 4) betreffen hoofdzakelijk vergelijken, ordenen en verhoudingen. Alleen in de methode ‘Rekenrijk’ moeten de leerlingen hun eigen lengte in centimeters nauwkeurig kunnen meten en aflezen.

Het PPON-rapport concludeert dat er een ‘diffuse relatie’ is tussen de opgaven en de vaardigheidsschaal. De verklaring hiervoor lijkt te liggen in het feit dat de methoden wel overeenstemmen in doelen, maar dat - zoals eerder gesteld - het aanbod en de aanpak nogal verschillen.

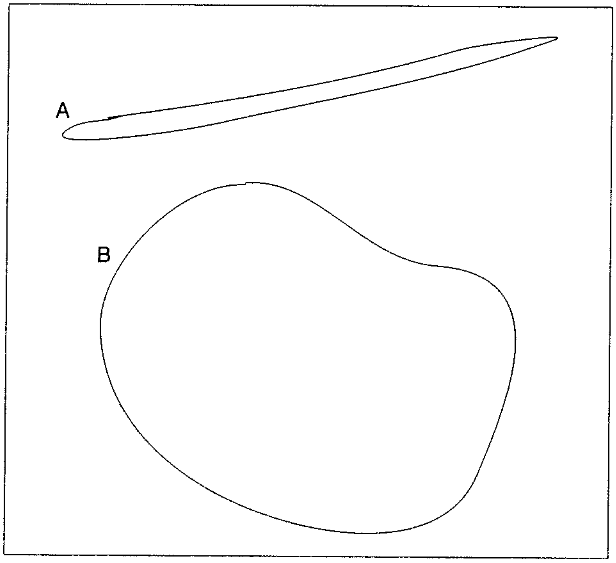
Kortom onze methodenanalyse en de PPON-resultaten bevestigen het vermoeden dat het onderwerp meten nog niet een eenduidig onderdeel van het onderwijsaanbod is.



figuur 11: lichaamslengte aflezen scoort onvoldoende (medio-PPON, 1997)

12 nogmaals begripsvorming ...

In het voorgaande is vooral aan de grootheid lengte aandacht besteed. Ook voor de andere grootheden is uiteraard een gedegen begripsvorming noodzakelijk. De vraag is of daarvoor ook de gehele trits vergelijken, natuurlijke maten, standaardmaten en toepassen toegepast dient te worden. Niet alleen zou dit erg veel onderwijstijd kosten, maar ook zijn de kinderen vaak al zodanig gewend aan allerlei maten, dat de verschillende fasen in versneld tempo doorlopen kunnen worden. Hoeveel weeg je? Hoeveel glazen melk uit een liter? Dit blijkt in de methoden ook toegepast te zijn. Tijdsduur is een apart en lastig onderwerp, maar kan mooi aansluiten bij de getallenlijn.



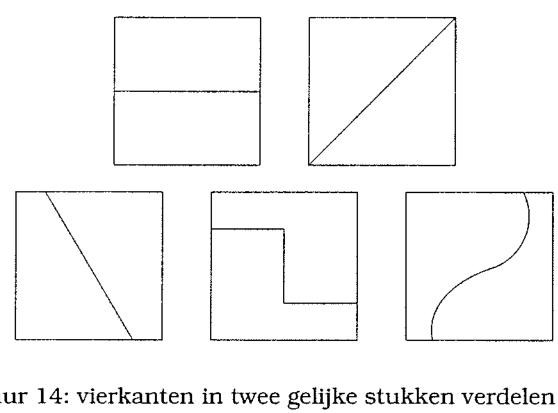
figuur 12: welk stuk drop kies je?

Vooral oppervlakte verdient aparte aandacht. Het is een tweedimensionale grootheid, die zich zowel als vlakke als een gebogen vorm - bijvoorbeeld de oppervlakte van een bol - kan voordoen. Niet alleen dit maakt deze grootheid zo lastig; ook als we alleen platte figuren beschouwen blijken de kinderen sterker op lengte gefixeerd dan op wat men vroeger de 'uitgestrektheid' noemde. In figuur 12 zien we een lange lus *A* en een rondere figuur *B*, die een grotere oppervlakte heeft. Als we de kinderen in dit geval op de oppervlakte willen richten is de aard van de vraagstelling cruciaal.
Vragen als 'wat is groter?' of 'welke figuur heeft de grootste oppervlakte?' hebben geen zin als er nog geen begrip bestaat van deze grootheid. Maar een vraag als 'Houd je van drop? Welk stuk zou je kiezen, als je weet dat ze even dik zijn?' kan tot de beoogde begripsvorming bijdragen. Dit is wat wij hiervoor bedoelden met 'binding aan andere grootheden'. Er zijn verschillende contexten om de 'uitgestrektheid' van een figuur als oppervlakte-grootheid te leren begrijpen.

Op een blik staat dat het voldoende verf bevat voor 30 vierkante meter (fig.13). Hoe kan die figuur eruitzien?

figuur 13: bedenk een figuur, waarvoor je met deze hoeveelheid verf precies uitkomt

Kortom, voor het begrip oppervlakte gaan we uit van allerlei verschijningsvormen uit de realiteit, waarbij de maat van de grootheid gebonden wordt aan een andere grootheid zoals bijvoorbeeld lekkerte, gewicht, kosten en tijd.



figuur 14: vierkanten in twee gelijke stukken verdelen

Zeer belangrijk voor het leren bepalen van oppervlakte is het zogenoemde omstructureren van figuren, dat kan beginnen met het verdelen van figuren in gelijke delen (fig.14). Het zoeken van een natuurlijke 'bedekkende' maat van een figuur, het uitscheppen en afpassen daarmee komt pas later aan de orde. Een eerste begin daarmee kan al in de onderbouw plaatsvinden. Het ontdekken van de rechthoekstructuur als een krachtig model in samenhang met het rekenen in allerlei realistische verschijningsvormen, diene als voorbereiding op de latere formule 'lengte maal breedte'.

Kortom er zijn in de onderbouw een groot aantal activiteiten te doen die een brede fundering kunnen bieden voor de latere formele fase. Dit kan gepaard gaan met allerlei nuttige en motiverende meetkundige activiteiten. Metriek en formules zijn pas het sluitstuk van de leerlijn aan het eind van de basisschool (Ter Heege & De Moor, 1977).

13 TAL: Meten en Meetkunde Onderbouw

Het zal zaak zijn voor het TAL-project om allereerst voor de groepen 1 tot 4 zodanige doelen voor meten en meetkunde te formuleren, dat consensus bereikt wordt over het niveau dat de kinderen in deze domeinen moeten bereiken. Hier wordt aan gewerkt, maar dat gebeurt niet los van de didactische context. Voor meten zijn leerlijnen eenvoudiger te formuleren dan voor meetkunde.
Voor het meten wordt uitgegaan van de in dit artikel genoemde fasen vergelijken, natuurlijke maten, standaardmaten en toepassen. In het bijzonder voor lengte- en oppervlaktemeting. Voor inhoud en gewicht (massa) kunnen deze fasen sneller doorlopen worden. Daarbij kan uitgegaan worden van de praktische kennis van liter, kilogram en gram, zoals de kinderen die in het dagelijkse leven vaak al hebben opgedaan. Aandacht zal ook besteed worden aan samenhang en non-samenhang tussen deze grootheden.
Om het verkennende karakter van de informele meetkunde geen geweld aan te doen, zal geen strakke leerlijn beschreven worden. Doelen voor meetkunde kunnen beschreven worden in de vorm van 'De kinderen hebben ervaring opgedaan met...', waarbij op de stippeltjes aan meetkundige kernactiviteiten gedacht moet worden met een sterk paradigmatisch karakter. Deze kunnen in hogere leerjaren op een steeds hoger niveau getild worden.
Voor de groepen 1 en 2 kunnen de kinderen de ruimte verkennen en meten door middel van geïntegreerde activiteiten, waarbij geen scherp onderscheid hoeft te zijn tussen meetkunde en meten. Ook voor groep 3 en 4

kunnen heel wat activiteiten (zoals bij oppervlakte) zowel een meetkundig als een meet-karakter hebben. De grootheid tijd behoeft een aparte aanpak. Geld behoort tot het gewone rekenen.
In de realistische methoden hebben meten en meetkunde een vaste plaats gekregen. Deze domeinen behelzen samen ongeveer 20 procent van het leerstofaanbod. De vraag is of er ook 20 procent van de onderwijstijd aan deze onderwerpen wordt besteed. Niettemin hebben meten en meetkunde een officiële plaats in de kerndoelen. En terecht, want het zijn volwaardige, nuttige en motiverende onderdelen van het reken-wiskundeonderwijs op de basisschool. Een van de doelen, die de leden van het TAL-project voor ogen staan, is een zodanige brochure te publiceren en een bijbehorende nascholing te bevorderen, dat deze overtuiging ook het basisonderwijs volledig zal bereiken.

literatuur

Freudenthal, H. (1984a). Appels en peren/wiskunde en psychologie. Apeldoorn: Van Walraven.
Freudenthal, H. (1984b). Didactische fenomenologie van wiskundige structuren. Utrecht: OW&OC.
Heege, H. ter & E. de Moor (1977). Oppervlakte. Leerplanpublikatie 7 (handleiding plus werkblok) (R. de Jong, ed.). Utrecht: IOWO.
Janssen, J., J. Bokhove & J-M. Kraemer (1992). Leerlingvolgsysteem Rekenen-Wiskunde 1. Arnhem: Cito.
Janssen, J., F. van der Schoot, B. Hemker & N. Verhelst (1999). Balans van het reken-wiskundeonderwijs aan het einde van de basisschool 3. Uitkomsten van de peiling in 1997. Arnhem: Cito.
Menne, J. & A. Treffers (1996). Meten & Metriek. In: C. van den Boer & M. Dolk (red). Modellen, meten en meetkunde. Utrecht: Freudenthal Instituut, 66-71.
Moor, E.W.A. de (1999). Van vormleer naar realistische meetkunde. Utrecht: Freudenthal Instituut.
Noteboom, A., F. van der Schoot, J. Janssen & N. Veldhuijzen (2000). Balans van het reken-wiskundeonderwijs halverwege de basisschool 3. Uitkomsten van de derde peiling in 1997. Arnhem: Cito.
Piaget, J., B. Inhelder & A. Szeminska (1966). The Child's Conception of Geometry. London: Routledge & Kegan Paul.
TAL-team (1999). Jonge kinderen leren rekenen. Tussendoelen Annex Leerlijnen. Hele getallen Onderbouw basisschool. Groningen: Wolters-Noordhoff.
TAL-team (2000). Kinderen leren rekenen. Tussendoelen Annex leerlijnen. Hele getallen Bovenbouw basisschool. Groningen: Wolters-Noordhoff.

geraadpleegde methoden

Auteurs onbekend (ca 1975). Instrumenteel Rekenen (set meetkaarten bij Op Veilig Spoor). Meppel: Ten Brink.
Beusekom, N. e.a. Pluspunt. Den Bosch: Malmberg.
Boerema, J. e.a. (2000). Alles telt. Amsterdam: Thieme Meulenhoff.
Bokhove, J. e.a. (1998). .Rekenrijk. Groningen: Wolters-Noordhoff.
Boswinkel, N. e.a. (1998). Wis en Reken. Baarn: Bekadidact.
Compagnie-Rietberg, C. e.a. (1997). Talrijk. Tilburg: Zwijsen.
Huitema, S. e.a. De wereld in getallen (herzien). Den Bosch: Malmberg.
Olivier, J. & F. van Pelt (1977). Aktief Rekenen. Groningen: Jacob Dijkstra.