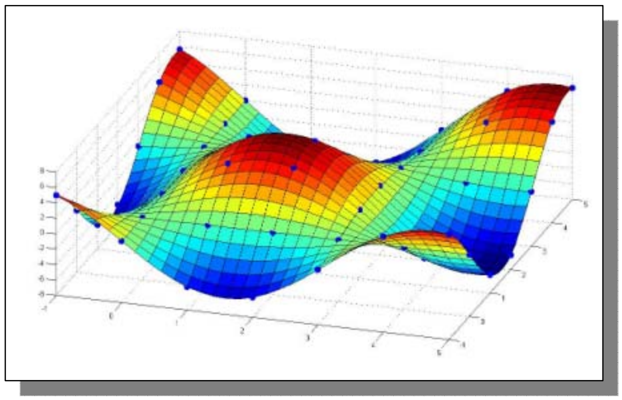
Pengertian Metode Numerik

Metode Numerik adalah teknik-teknik yang digunakan untuk memformulasikan masalah matematis agar dapat dipecahkan dengan operasi perhitungan



Metode Numerik

Tujuan Metode Numerik

Sebelum komputer digunakan untuk penyelesaian komputasi, dilakukan dengan berbagai metode yang memiliki kendala-kendala. Metode yang digunakan antara lain :

- ***Metode Analitik***, Solusi ini sangat berguna namun terbatas pada masalah sederhana. Sedangkan Masalah real yang komplek dan non linier tidak dapat diselesaikan.
- **Metode Grafik**, metode ini digunakan Sebagai pendekatan penyelesaian yang kompleks. Kendalanya bahwa metode ini Tidak akurat, sangat lama, dan banyak membutuhkan waktu.
- **Kalkulator dan Slide Rules,** Penyelesaian numerik secara manual. Cara ini cukup lama dan mungkin bisa terjadi kesalahan pemasukan data.

Penggunaan metode numerik diharapkan dapat mengatasi berbagai kelemahan-kelemahan metode yang ada sebelumnya. Dapat dipahami pula bawa pada umumnya permasalahan dalam sains dan teknologi digambarkan dalam persamaan matematika. Persamaan ini sulit diselesaikan dengan model analitik sehingga diperlukan penyelesaian pendekatan numerik. Dengan metode numerik, manusia terbebas dari hitung menghitung manual yang membosankan . Sehinggga waktu dapat lebih banyak digunakan untuk tujuan yang lebih kreatif, seperti penekanan pada formulasi problem atau interpretasi solusi dan tidak terjebak dalam rutinitas hitung menghitung

Manfaat Mempelajari Metode Numerik

Dengan mempelajari metode numerik diharapkan mahasiswa mampu :

- Mampu menangani sistem persamaan besar, Ketaklinieran dan geometri yang rumit, yang dalam masalah rekayasa tidak mungkin dipecahkan secara analitis.
- Mengetahui secara singkat dan jelas teori matematika yang mendasari paket program.
- Mampu merancang program sendiri sesuai permasalahan yang dihadapi pada masalah rekayasa.
- Metode numerik cocok untuk menggambarkan ketangguhan dan keterbatasan komputer dalam menangani masalah rekayasa yang tidak dapat ditangani secara analitis.
- Menangani galat (error) suatu nilai hampiran (aproksimasi) dari masalah rekayasa yang merupakan bagian dari paket program yang bersekala besar.
- Menyediakan sarana memperkuat pengertian matematika mahasiswa. Karena salah satu kegunaannya adalah menyederhanakan matematika yang lebih tinggi menjadi operasi-operasi matematika yang mendasar

Metode Analitik versus Metode Numerik

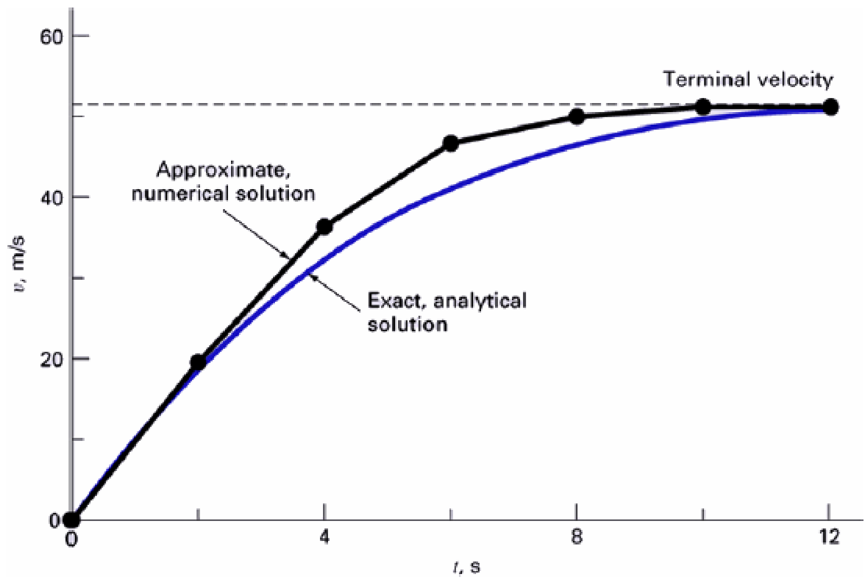
Metode Numerik - Penyelesaian Masalah

Metode analitik disebut juga metode sejati karena memberikan solusi sejati (*exact solution*) atau solusi yang sesungguhnya, yaitu solusi yang memiliki galat (*error*) sama dengan nol! Sayangnya, metode analitik hanya unggul untuk sejumlah persoalan yang terbatas, yaitu persoalan yang memiliki tafsiran geometri sederhana serta rendah. Padahal persoalan yang muncul dalam dunia nyata seringkali melibatkan bentuk dan proses yang rumit. Akibatnya nilai praktis penyelesaian metode analitik menjadi terbatas.

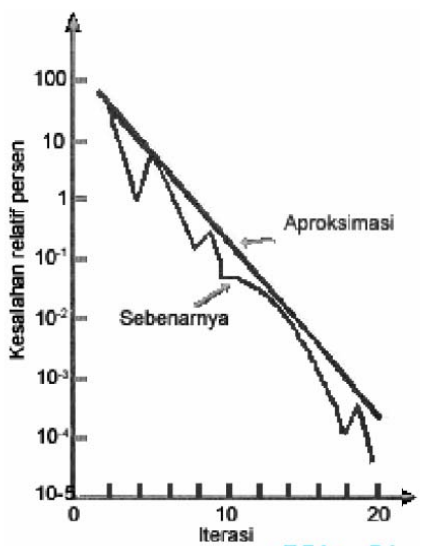
Bila metode analitik tidak dapat lagi diterapkan, maka solusi persoalan sebenarnya masih dapat dicari dengan menggunakan metode numerik. Metode numerik adalah teknik yang digunakan untuk memformulasikan persoalan matematik sehingga dapat dipecahkan dengan operasi perhitungan/aritmetika biasa (tambah, kurang, kali, dan bagi). Metode artinya cara, sedangkan numerik artinya angka. Jadi metode numerik secara harafiah berarti cara berhitung dengan menggunakan angka-angka.

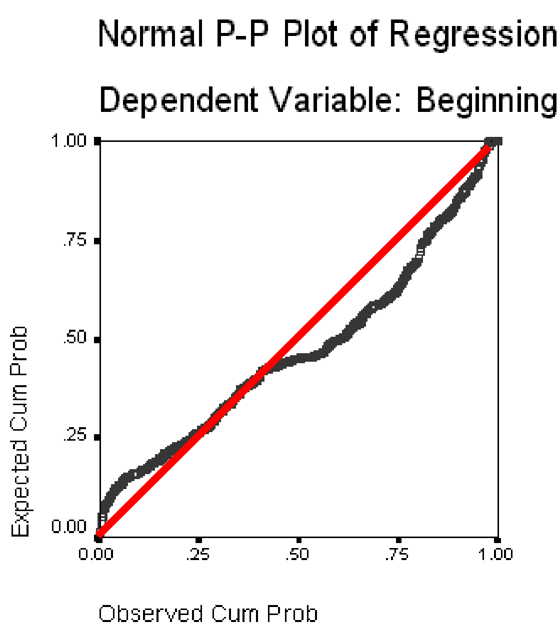
Perbedaan utama antara metode numerik dengan metode analitik terletak pada dua hal. Pertama, solusi dengan menggunakan metode numerik selalu berbentuk angka. Bandingkan dengan metode analitik yang biasanya menghasilkan solusi dalam bentuk fungsi matematik yang selanjutnya fungsi mateamtik tersebut dapat dievaluasi untuk menghasilkan nilai dalam bentuk angka.

Kedua, dengan metode numerik, kita hanya memperoleh solusi yang menghampiri atau mendekati solusi sejati sehingga solusi numerik dinamakan juga solusi hampiran (*approxomation*) atau solusi pendekatan, namun solusi hampiran dapat dibuat seteliti yang kita inginkan. Solusi hampiran jelas tidak tepat sama dengan solusi sejati, sehingga ada selisih antara keduanya. Selisih inilah yang disebut dengan galat (error).



Gambar 1.4. Grafik perbandingan solusi numerik dengan solusi analitis

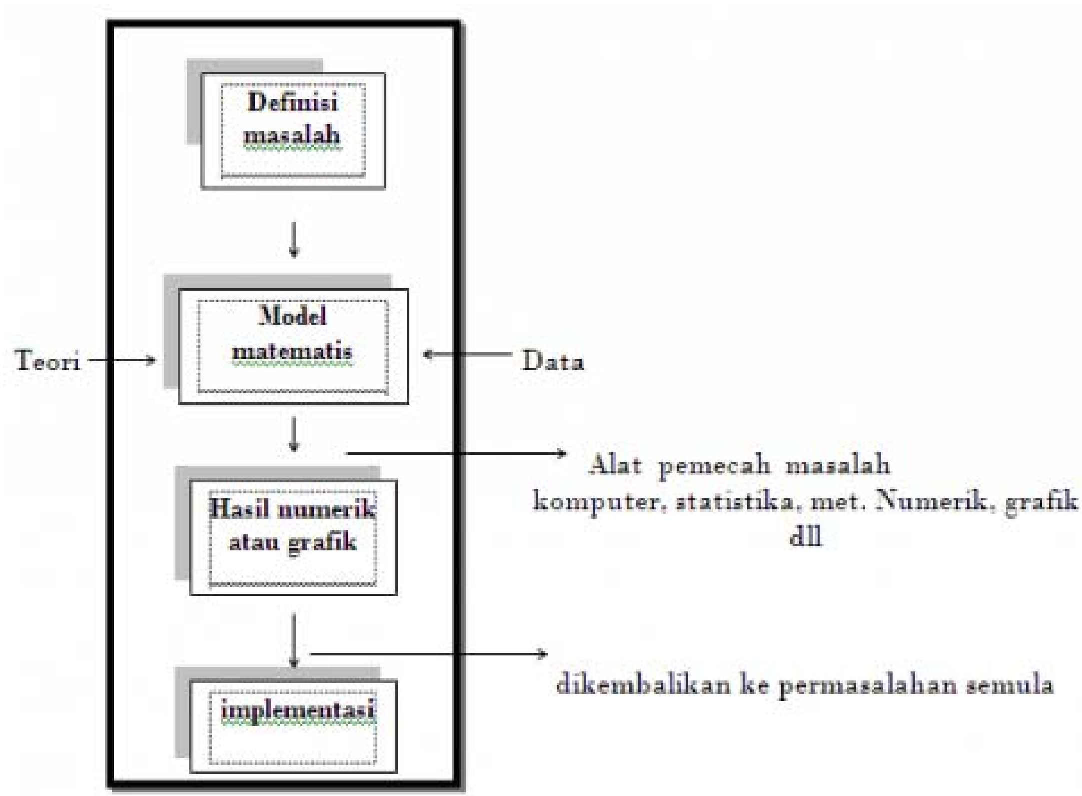




Pemodelan Matematik dan Pemecahan Masalah Rekayasa

Pemodelan matematik diperlukan untuk membantu menyelesaikan permasalahan rekayasa (permasalahan riil). Gambaran tahapan pemrosesan masalah rekayasa yang secara **analitis** sulit diselesaikan selanjutnya dibawa ke bentuk model matematik dan diselesaikan secara matematis, aljabar atau statistik dan komputasi.

Apabila telah diperoleh penyelesaian matematik proses selanjutnya mengimplementasikan hasil matematis ke masalah rekayasa sbb:



Metode Numerik - Penyelesaian masalah matematis

Dalam menangani masalah rekayasa(masalah riil) perlu melakukan :

- Membawa permasalahan rekayasa kedalam teori matematika (model matematika)

- Model matematika yang diperoleh diselesaikan dengan cara matematika yaitu digunakan komputasi, statistika dan matematika yang disebut dengan alat pemecah masalah.
- Hasil dari pemecah masalah masih berupa nilai numeris atau grafik
- Hasil numeris yang diperoleh diimplementasikan kembali ke permasalah semula (masalah rekayasa) sehingga dapat dipublikasikan sesuai dengan permasalahan yang dimaksud.

Tahap-Tahap Memecahkan Persoalan Secara Numerik yang dilakukan dalam pemecahan persoalan dunia nyata dengan metode numerik, yaitu :

1. **Pendefinisian masalah** (apa yang diketahui dan apa yang diminta).
2. **Pemodelan**, Persoalan dunia nyata dimodelkan ke dalam persamaan matematika
3. **Penyederhanaan model**, Model matematika yang dihasilkan dari tahap sebelumnya mungkin saja terlalu kompleks, yaitu memasukkan banyak peubah (variable) atau parameter. Semakin kompleks model matematikanya, semakin rumit penyelesaiannya. Mungkin beberapa andaian dibuat sehingga beberapa parameter dapat diabaikan. Model matematika yang diperoleh dari penyederhanaan menjadi lebih sederhana sehingga solusinya akan lebih mudah diperoleh.
4. **Formulasi numerik**, Setelah model matematika yang sederhana diperoleh, tahap selanjutnya adalah memformulasikannya secara numerik
5. **Pemrograman**, Tahap selanjutnya adalah menerjemahkan algoritma ke dalam program komputer dengan menggunakan salah satu bahasa pemrograman yang dikuasai.
6. **Operasional**, Pada tahap ini, program komputer dijalankan dengan data uji coba sebelum data yang sesungguhnya.
7. **Evaluasi**, Bila program sudah selesai dijalankan dengan data yang sesungguhnya, maka hasil yang diperoleh diinterpretasi. Interpretasi meliputi analisis hasil run dan membandingkannya dengan prinsip dasar dan hasil-hasil empirik untuk menaksir kualitas solusi numerik,

dan keputusan untuk menjalankan kembali program dengan untuk memperoleh hasil yang lebih baik.

Desain Algoritma

Algoritma adalah merupakan sederetan(sequence) langkah logika yang diperlukan untuk melakukan suatu tugas tertentu seperti pemecahan masalah.

Algoritma yang baik mempunyai sejumlah kriteria berikut :

- Setiap langkah harus determinestik.
- Proses harus berakir setelah sejumlah berhingga langkah.
- Hasil akhir tidak boleh tergantung kepada siapa yang menjalani algoritma tersebut.
- Suatu algoritma tidak boleh berakhir terbuka.
- Algoritma harus cukup umum untuk menangani keperluan apapun.

Bagan alir (flowchart)

Bagan alir merupakan pernyataan visual atau grafis suatu algoritma. Bagan alir menggunakan deretan blok dan anak panah, yang masing-masing menyatakan operasi atau langkah tertentu dalam algoritma. Anak panah menyatakan urutan bagaimana seharusnya operasi dijalankan.

Manfaat bagan alir

1. Dipakai untuk menyatakan dan mengkomunikasikan algoritma.
2. Dapat membantu dalam perencanaan, menyelesaikan keruwetan.
3. Mengkomunikasikan logika program.
4. Merupakan wahana yang menarik untuk memvisualisasikan beberapa struktur yang mendasar yang diterapkan dalam pemrograman Komputer.

LAMBANG	NAMA	KEGUNAAN
	Ujung	Menyatakan awal(START) atau akhir (STOP) program.
—↓—↑–	Garis alir	Menyatakan aliran logika.
	Proses	Menyatakan perhitungan atau mani pulasi data
	Masukan/ Keluaran	Menyatakan masukan(input), keluaran (output)data atau informasi.
	Keputusan	Menyatakan pembandingan, perta-nyaan, keputusan yang menentukan jalur alternatif yang harus diikuti.
	Penghubung kehalaman yang sama	Menyatakan pemutusan jalur bagan alir dari satu titik ke titik yang lain dalam halaman yang sama.
	Menyambung ke halaman lain	

Metode Numerik - Flowchart

Peranan Komputer dalam Metode Numerik

Komputer berperan besar dalam perkembangan bidang metode numerik. Hal ini mudah dimengerti karena perhitungan dengan metode numerik adalah berupaoperasi aritmetika seperti penjumlahan, perkalian, pembagian, plus membuat perbandingan. Sayangnya, jumlah operasi aritmetika ini umumnya sangat banyak dan berulang, sehingga perhitungan secara manual sering menjemukan. Manusia (yang melakukan perhitungan manual ini) dapat membuat kesalahan dalam melakukannya. Dalam hal ini, komputer berperanan mempercepat proses perhitungan tanpa membuat kesalahan. Penggunaan komputer dalam metode numerik antara lain untuk memprogram. Langkah-langkah metode numerik diformulasikan menjadi program komputer. Program ditulis dengan bahasa pemrograman tertentu, seperti FORTRAN, PASCAL, C, C++, BASIC, dan sebagainya. Sebenarnya, menulis program numerik tidak selalu diperlukan. Di pasaran terdapat banyak program aplikasi komersil yang langsung dapat digunakan.

Beberapa contoh aplikasi yang ada saat ini adalah MathLab, MathCad, Maple, Mathematica, Eureka, dan sebagainya. Selain itu, terdapat juga library yang berisi rutin-rutin yang siap digabung dengan program utama yang ditulis pengguna, misalnya IMSL (International Mathematical and Statistical Library) Math/Library yang berisi ratusan rutin-rutin metode numerik. Selain mempercepat perhitungan numerik, dengan komputer kita dapat mencoba berbagai kemungkinan solusi yang terjadi akibat perubahan beberapa parameter. Solusi yang diperoleh juga dapat ditingkatkan ketelitiannya dengan mengubahubah nilai parameter.

Kemajuan komputer digital telah membuat bidang metode numerik berkembang secara dramatis. Tidak ada bidang matematika lain yang mengalami kemajuan penting secepat metode numerik. Tentu saja alasan utama penyebab kemajuan ini adalah perkembangan komputer itu sendiri, dari komputer mikro sampai komputer Cray, dan kita melihat perkembangan teknologi komputer tidak pernah berakhir. Tiap generasi baru komputer menghadirkan keunggulan seperti waktu, memori, ketelitian, dan kestabilan perhitungan. Hal ini membuat ruang penelitian semakin terbuka luas. Tujuan utama penelitian itu adalah pengembangan algoritma numerik yang lebih baik dengan memanfaatkan keunggulan komputer semaksimal mungkin. Banyak algoritma baru lahir atau perbaikan algoritma yang lama didukung oleh komputer.

Bagian mendasar dari perhitungan rekayasa yang dilakukan saat ini adalah perhitungan “waktu nyata” (real time computing), yaitu perhitungan keluaran (hasil) dari data yang diberikan dilakukan secara simultan dengan event pembangkitan data tersebut, sebagaimana yang dibutuhkan dalam mengendalikan proses kimia atau reaksi nuklir, memandu pesawat udara atau roket dan sebagainya. Karena itu, kecepatan perhitungan dan kebutuhan memori komputer adalah pertimbangan yang sangat penting. Jelaslah bahwa kecepatan tinggi, keandalan, dan fleksibilitas komputer memberikan akses untuk penyelesaian masalah praktek. Sebagai contoh, solusi sistem persamaan lanjar yang besar menjadi lebih mudah dan lebih cepat diselesaikan dengan komputer. Perkembangan yang cepat dalam metode numerik antara lain ialah penemuan metode baru, modifikasi metode yang sudah ada agar lebih mangkus, analisis teoritis dan praktis algoritma untuk proses perhitungan baku, pengkajian galat, dan penghilangan jebakan yang ada pada metode.

Perbedaan Metode Numerik dengan Analisis Numerik

Untuk persoalan tertentu tidaklah cukup kita hanya menggunakan metode untuk memperoleh hasil yang diinginkan; kita juga perlu mengetahui apakah metode tersebut memang memberikan solusi hampiran, dan seberapa bagus hampiran itu . Hal ini melahirkan kajian baru, yaitu analisis numerik. Metode numerik dan analisis numerik adalah dua hal yang berbeda. Metode adalah algoritma, menyangkut langkah-langkah penyelesaian persoalan secara numerik, sedangkan analisis numerik adalah terapan matematika untuk menganalisis metode. Dalam analisis numerik, hal utama yang ditekankan adalah analisis galat dan kecepatan konvergensi sebuah metode. Teorema-teorema matematika banyak dipakai dalam menganalisis suatu metode. Di dalam perkuliahan ini, kita akan memasukkan beberapa materi analisis numerik seperti galat metode dan kekonvergenan metode. Tugas para analis numerik ialah mengembangkan dan menganalisis metode numerik. Termasuk di dalamnya pembuktian apakah suatu metode konvergen, dan menganalisis batas-batas galat solusi numerik.Terdapat banyak sumber galat, diantaranya tingkat ketelitian model matematika, sistem aritmetik komputer, dan kondisi yang digunakan untuk menghentikan proses pencarian solusi. Semua ini harus dipertimbangkan untuk menjamin ketelitian solusi akhir yang dihitung.

PENYELESAIAN AKAR-AKAR PERSAMAAN KARAKTERISTIK

Persamaan karakteristik ini bias berupa persamaan Polinomial Tingkat Tinggi, Sinusioda, Eksponensial, Logaritmik, atau Kombinasi dari persamaan-persamaan tersebut. Ada beberapa metode untuk menyelesaikan persamaan-persamaan tersebut diantaranya:

1. Metode Tabulasi.
2. Metode Biseksi.
3. Metode Regula Falsi.
4. Metode Iterasi bentuk x=g(x).
5. Metode Newton Rapshon.
6. Metode Faktorisasi P3(x)=0.
7. Metode Faktorisasi P4(x)=0.
8. Metode Faktorisasi P5(x)=0.
9. Metode Bairstow.
10. Metode Quotient-Difference (QD).

Dari metode diatas hanya akan kita bahas beberapa metode, diantaranya :

1. Metode Tabulasi.

Metode Tabulasi adalah metode penyelesaian persamaan nonlinear dengan cara membuat tabel-tabel persamaan atau fungsi nonlinear di sekitar titik penyelesaian.

Contoh dan cara penyelesaian:

Tentukan akar penyelesaian dari persamaan nonlinear dibawah ini dengan metode Tabulasi.

$f(x) = x^3 - 7x + 1 = 0$

<u>Penyelesaian</u>

<u>Langkah 1</u>. Menentukan dua nilai f(x1) dan f(x2) dengan syarat : **f(x1)*f(x2)<0,** misal nilai x1=2.5 dan x2=2.6 maka :

F(x1)= $(2.5)^3$-7(2.5)+1 = -0.8750

F(x2)= $(2.6)^3$-7(2.6)+1 = 0.3760

Di dapat F(x1)*f(x2)<0 maka titik penyelesaian berada di antara nilai x1 = 2.5 dan x2 = 2.6.

<u>Langkah 2.</u> Membuat tabel fungsi F(x) di sekitar f(x1) dan f(x2).

tabulasi ke-1

n	x	f(x)	error
1::	2.5000000000E+00	-8.7500000000E-01	8.7500000000E-01
2::	2.5100000000E+00	-7.5674900001E-01	7.5674900001E-01
3::	2.5200000000E+00	-6.3699200001E-01	6.3699200001E-01
4::	2.5300000000E+00	-5.1572300002E-01	5.1572300002E-01
5::	2.5400000000E+00	-3.9293599996E-01	3.9293599996E-01
6::	2.5500000000E+00	-2.6862500003E-01	2.6862500003E-01
7::	2.5600000000E+00	-1.4278400003E-01	1.4278400003E-01
8::	2.5700000000E+00	-1.5406999999E-02	1.5406999999E-02
9::	2.5800000000E+00	1.1351199998E-01	1.1351199998E-01
10::	2.5900000000E+00	2.4397899999E-01	2.4397899999E-01
11::	2.6000000000E+00	3.7599999999E-01	3.7599999999E-01

<u>Langkah 3.</u> Membuat tabel di sekitar dua titik yang menyebabkan terjadinya perubahan tanda fungsi F(x) pada tabel ke 1, yaitu terjadi pada baris ke 8 dan 9. maka table ke-2 :

tabulasi ke-2

n	x	f(x)	error
1::	2.5700000000E+00	-1.5406999999E-02	1.5406999999E-02
2::	2.5710000000E+00	-2.5845890050E-03	2.5845890050E-03
3::	2.5720000000E+00	1.0253247980E-02	1.0253247980E-02
4::	2.5730000000E+00	2.3106517008E-02	2.3106517008E-02
5::	2.5740000000E+00	3.5975223989E-02	3.5975223989E-02
6::	2.5750000000E+00	4.8859375034E-02	4.8859375034E-02
7::	2.5760000000E+00	6.1758975964E-02	6.1758975964E-02
8::	2.5770000000E+00	7.4674032949E-02	7.4674032949E-02
9::	2.5780000000E+00	8.7604551984E-02	8.7604551984E-02
10::	2.5790000000E+00	1.0055053898E-01	1.0055053898E-01
11::	2.5800000000E+00	1.1351199998E-01	1.1351199998E-01

Langkah 4 dan setrusnya mengulangi langkah ke 3 yaitu membuat table di sekitar dua titik yang menyebabkan terjadinya perubahan tanda pada f(x) pada table sebelumnya.

Proses dihentikan jika didapatkan errornya relative kecil dan biasanya lebih kecil dari $\mathbf{10^{-7}}$.

tabulasi ke-7

n	x		f(x)		error	
1::	2.5712014000E+00	::	-2.8940849006E-07	::	2.8940849006E-07	::
2::	2.5712014100E+00	::	-1.6106059775E-07	::	1.6106059775E-07	::
3::	2.5712014200E+00	::	-3.2683601603E-08	::	3.2683601603E-08	::
4::	2.5712014300E+00	::	9.5576979220E-08	::	9.5576979220E-08	::
5::	2.5712014400E+00	::	2.2392487153E-07	::	2.2392487153E-07	::
6::	2.5712014500E+00	::	3.5227276385E-07	::	3.5227276385E-07	::
7::	2.5712014600E+00	::	4.8062065616E-07	::	4.8062065616E-07	::
8::	2.5712014700E+00	::	6.0896854848E-07	::	6.0896854848E-07	::
9::	2.5712014800E+00	::	7.3725823313E-07	::	7.3725823313E-07	::
10::	2.5712014900E+00	::	8.6560612544E-07	::	8.6560612544E-07	::
11::	2.5712015000E+00	::	9.9392491393E-07	::	9.9392491393E-07	::

Maka akar pendekatanya adalah nilai x=2.57120143 dengan errornya=9.5576979220*10^{-8}

2. Metode Biseksi

Metode biseksi disebut juga metode Pembagian Interval atau metode yang digunakan untuk mencari akar-akar persamaan nonlinear melalui proses iterasi dengan persamaan sbb :

$$Xc \quad \frac{Xa + Xb}{2}$$

Dimana nilai f(Xa) dan nilai f(Xb) harus memenuhio persyaratan **f(Xa)*f(Xb)<0**

Contoh dan cara penyelesaian:

Carilah penyelesaian dari persamaan nonlinear dibawah ini dengan metode Biseksi:

$f(x) = x^3 + x^2 - 3x - 3 = 0$

Penyelesaian:

Langkah 1: Menentukan dua titik nilai f(x) awal, f(x1) dan f(x2) dan harus memenuhi hubungan f(x1)*f(x2)<0. misalkan nilai x1 = 1 dan x2 = 2.

$f(x1)= 1^3 + 1^2 - 3(1) – 3 = -4$

$f(x2)= 2^3 + 2^2 - 3(2) – 3 = 3$

Di dapat F(x1)*f(x2)<0 maka titik penyelesaian berada di antara nilai x1 = 1 dan x2 = 2.

Langkah 2: mencari nilai x3.

$$X3 = \frac{X1 + X2}{2} = \frac{1+2}{2} = 1.5$$

Dan f(x3)= $1.5^3 + 1.5^2 - 3(1.5) - 3 = -1.875$

Langkah 3: Melakukan Iterasi dengan persamaan 2.0 pada hasil langkah 2 nilai f(x3) hasilnya negative, dan untuk memnentukan nilai x4 harus f(xa)*f(xb)<0 maka yang memenuhi syarat nilai yang digunakan yaitu x1 dan x3 karena nilai f(x1)*f(x3)<0 maka :

$$X4 = \frac{X1 + X3}{2} = \frac{1+1.5}{2} = 1.75$$

Dan f(x4)= $1.75^3 + 1.75^2 - 3(1.75) - 3 = 1.71875$

Iterasi selanjutnya mencari nilai x5 dan f(x5) dan begitu seterusnya sampai didapatkan nilai error lebih kecil dari $\mathbf{10^{-7}}$**.** Maka dari hasil perhitungan didapatkan nilai x = 1.73205080.

dengan nilai errornya f(x)= 1.2165401131E-08

Penyelesaian Persamaan Dengan Metode Biseksi, Nilai x1= 1.00 & x2= 2.00

n	x	f(x)	error
3	1.5000000000E+00	-1.8750000000E+00	1.8750000000E+00
4	1.7500000000E+00	1.7187500000E-01	1.7187500000E-01
5	1.6250000000E+00	-9.4335937500E-01	9.4335937500E-01
6	1.6875000000E+00	-4.0942382813E-01	4.0942382813E-01
7	1.7187500000E+00	-1.2478637695E-01	1.2478637695E-01
8	1.7343750000E+00	2.2029876709E-02	2.2029876709E-02
9	1.7265625000E+00	-5.1755428314E-02	5.1755428314E-02
10	1.7304687500E+00	-1.4957249165E-02	1.4957249165E-02
11	1.7324218750E+00	3.5126730800E-03	3.5126730800E-03
12	1.7314453125E+00	-5.7281954214E-03	5.7281954214E-03
13	1.7319335938E+00	-1.1092383647E-03	1.1092383647E-03
14	1.7321777344E+00	1.2013480155E-03	1.2013480155E-03
15	1.7320556641E+00	4.5962500735E-05	4.5962500735E-05
16	1.7319946289E+00	-5.3166101861E-04	5.3166101861E-04
17	1.7320251465E+00	-2.4285502150E-04	2.4285502150E-04
18	1.7320404053E+00	-9.8447708297E-05	9.8447708297E-05
19	1.7320480347E+00	-2.6242967579E-05	2.6242967579E-05
20	1.7320518494E+00	9.8596792668E-06	9.8596792668E-06
21	1.7320499420E+00	-8.1916659838E-06	8.1916659838E-06
22	1.7320508957E+00	8.3399936557E-07	8.3399936557E-07
23	1.7320504189E+00	-3.6788260331E-06	3.6788260331E-06
24	1.7320506573E+00	-1.4224206097E-06	1.4224206097E-06
25	1.7320507765E+00	-2.9421062209E-07	2.9421062209E-07
26	1.7320508361E+00	2.6989437174E-07	2.6989437174E-07
27	1.7320508063E+00	-1.2165401131E-08	1.2165401131E-08

akar persamaanya = 1.7320508063E+00

errornya = 1.2165401131E-08

3. Metode Regula Falsi.

Metode Regula Falsi disebut juga metode Interpolasi Linear yaitu metode yang digunakan untuk mencari akar- akar persamaan nonlinear melalui proses iterasi dengan persamaan sbb:

$$xc = xb - \frac{f(xb)}{f(xb) - f(xa)}(xb - xa)$$

Contoh dan cara penyelesaian

Carilah penyelesaian dari persamaan nonlinear di bawah ini dengan metode Regula Falsi:

$f(x) = x^3 + x^2 - 3x - 3 = 0$

Penyelesaian:

Langkah 1: Menentukan dua titik nilai f(x) awal, f(x1) dan f(x2) dan harus memenuhi hubungan f(x1)*f(x2)<0. misalkan nilai x1 = 1 dan x2 = 2.

$f(x1)= 1^3 + 1^2 - 3(1) – 3 = -4$

$f(x2)= 2^3 + 2^2 - 3(2) – 3 = 3$

Di dapat F(x1)*f(x2)<0 maka titik penyelesaian berada di antara nilai x1 = 1 dan x2 = 2.

Langkah 2: mencari nilai x3 dengan persamaan sbb :

$$x3 = x2 - \frac{f(x2)}{f(x2) - f(x1)}(x2 - x1) = 2 - \frac{3}{3 - (-4)}(2 - 1) = 1.5714285714$$

Dan $f(x3)= 1.57142^3 + 1.57142^2 - 3(1.57142) – 3 = -1.3644314869$

Langkah 3: Melakukan Iterasi dengan persamaan 2.1 pada hasil langkah 2 nilai f(x3) hasilnya negative, dan untuk memnentukan nilai x4 harus f(xa)*f(xb)<0 maka yang memenuhi syarat nilai yang digunakan yaitu x2 dan x3 karena nilai f(x2)*f(x3)<0 maka :

$$x4 = 2 - \frac{3}{3 - (-1.3644)}(3 - 157142) = 1.7054108216$$

Dan $f(x4)= 1.70541^3 + 1.70541^2 - 3(1.70541) – 3 = -0.247745$

Iterasi selanjutnya mencari nilai x5 dan f(x5) dan begitu seterusnya sampai didapatkan nilai error lebih kecil dari $\mathbf{10^{-7}}$**.** Maka dari hasil perhitungan didapatkan nilai x = 1.7320508074. dengan nilai errornya f(x)= 2.0008883439E-09

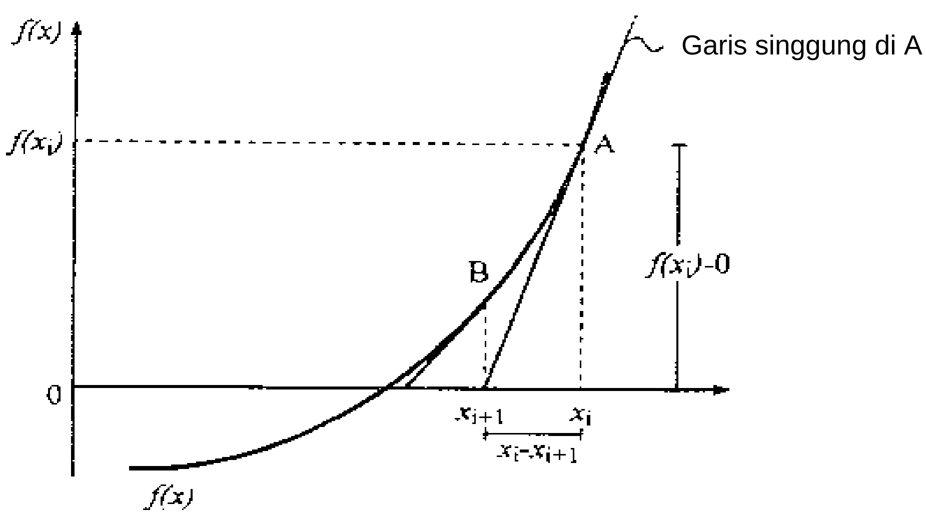
```
Penyelesaian persamaan karekteristik dengan metoda regula falsi
------------------------------------------------------------------------
 n          x                    f(x)                   error
------------------------------------------------------------------------
 1 :  1.5714285714E+00  :  -1.3644314869E+00  :   1.3644314869E+00  :
 2 :  1.7054108216E+00  :  -2.4774509964E-01  :   2.4774509964E-01  :
 3 :  1.7278827285E+00  :  -3.9339551302E-02  :   3.9339551302E-02  :
 4 :  1.7314048658E+00  :  -6.1106730864E-03  :   6.1106730864E-03  :
 5 :  1.7319508527E+00  :  -9.4592069217E-04  :   9.4592069217E-04  :
 6 :  1.7320353439E+00  :  -1.4634870604E-04  :   1.4634870604E-04  :
 7 :  1.7320484153E+00  :  -2.2640553652E-05  :   2.2640553652E-05  :
 8 :  1.7320504375E+00  :  -3.5025295801E-06  :   3.5025295801E-06  :
 9 :  1.7320507503E+00  :  -5.4182601161E-07  :   5.4182601161E-07  :
10 :  1.7320507987E+00  :  -8.3819031715E-08  :   8.3819031715E-08  :
11 :  1.7320508062E+00  :  -1.2973032426E-08  :   1.2973032426E-08  :
12 :  1.7320508074E+00  :  -2.0008883439E-09  :   2.0008883439E-09  :
------------------------------------------------------------------------
Akar persamaannya=  1.7320508074E+00
Errornya= 2.0008883439E-09
------------------------------------------------------------------------
```

4. Metode Newton-Raphson

Metode ini paling banyak digunakan dalam mencari akar-akar persamaan, jika perkiraan awal dari akar adalah x_i, maka suatu garis singgung dapat dibuat dari titik (x_i, $f(x_i)$). Titik dari garis singgung tersebut memotong sumbu-x, biasanya memberikan perkiraan yang lebih dekat dari nilai akar.

Pada Gambar 4, nampak bahwa turunan pertama pada x_i adalah ekivalen dengan kemiringan, yaitu:

$$f'(x_i) = \frac{f(x_i) - 0}{x_i - x_{i+1}} \quad \text{atau} \quad x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)} \qquad (1)$$



Gambar 4. Prosedur metode Newton-Raphson secara grafis

Contoh soal:

1) Hitung salah satu akar dari persamaan berikut ini, dengan metode Newton-Raphson.

$f(x) = x^3 + x^2 - 3x - 3 = 0.$

Penyelesaian:

Turunan pertama dari persamaan tsb. adalah: $f'(x) = 3x^2 + 2x - 3$,

Dengan menggunakan persamaan (1), yaitu: $x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$

Pada awal hitungan ditentukan nilai x_i sembarang, misalnya $x_1 = 1$, maka:

$f(x_1 = 1) = (1)^3 + (1)^2 - 3(1) - 3 = -4.$

$f'(x_1 = 1) = 3(1)^2 + 2(1) - 3 = 2.$

$$x_2 = 1 - \frac{-4}{2} = 3$$

Langkah berikutnya nilai $x_2 = 3$, tersebut digunakan untuk hitungan pada iterasi berikutnya.

$f(x_2 = 3) = (3)^3 + (3)^2 - 3(3) - 3 = 24.$

$f'(x_2 = 3) = 3(3)^2 + 2(3) - 3 = 30.$

$$x_3 = 3 - \frac{24}{30} = 2{,}2$$

Hitungan dilanjutkan dengan menggunakan program komputer dan hasilnya nampak pada Tabel 3.4, serta hasil hitungan didapat pada iterasi ke 6.

Tabel 3.4. Hasil hitungan metode Newton-Raphson

I	x_i	x_{i+1}	$f(x_i)$	$f(x_{i+1})$
1	1.00000	3.00000	- 4.0000	24.00000
2	3.00000	2.20000	24.0000	5.88800
3	2.20000	1.83015	5.88800	0.98900
4	1.83015	1.73780	0.98900	0.05457
5	1.73780	1.73207	0.05457	0.00021
6	1.73207	1.73205	0.00021	0.00000