MODUL
MKK-1/2 SKS/ MODUL I-VI

MATEMATIKA TERAPAN

SUHARNO

KEMENTRIAN AGRARIA DAN TATA RUANG/
BADAN PERTANAHAN NASIONAL
SEKOLAH TINGGI PERTANAHAN NASIONAL
2014

Hak Penerbitan pada Penerbit Sekolah Tinggi Pertanahan Nasional

Kode Pos 55293, www.stpn.ac.id Tlp.0274-587239

Indonesia

Edisi Revisi

Cetakan Pertama, Nopember 2011

Cetakan Kedua, Desember 2014

Penelaah Materi	Tim STPN
Pengembangan Desain Instruksional	STPN PRESS
Desain Cover	-
Lay-Outer	-
Copy-Editor	-
Ilustrator	

Suharno

Matematika Terapan; I-VI

MKK-1/2 SKS /Suharno,

Yogyakarta : Sekolah Tinggi Pertanahan Nasional, 55293

ISBN :

Judul

Matematika Terapan

KATA PENGANTAR

Modul merupakan bahan ajar yang sangat diperlukan dalam proses belajar mengajar diperguruan tinggi. Dengan modul mahasiswa dapat belajar dengan efektif, dapat menggunakan waktu untuk kegiatan diluar tatap muka dengan baik. Modul akan sangat membantu mahasiswa dalam menyerap materi yang terkandung dalam mata kuliah karena modul disusun dalam bahasa yang mudah dicerna, dan runtun, seperti pada saat dosen mengajar di kelas.

Modul Matematika Terapan merupakan modul yang berisikan dasar dari mata kuliah pengukuran, ilmu ukur tanah dan mata kuliah lainnya yang memerlukan perhitungan perhitungan matematika yang wajib dimengerti dan dikuasai oleh setiap mahasiswa Program Diploma I Pengukuran dan Pemetaan Kadastral Sekolah Tinggi Pertanahan Nasional

Modul Matematika Terapan disusun dengan ringkas dan sistematis yang didalamnya berisikan contoh contoh penyelesaian soal, latihan, test formatif dan kunci jawaban beserta petunjuk pengerjaan yang diharapkan akan membantu dalam menguasai mata kulaih ini. Dan diharapkan modul ini dapat membantu mahasiswa untuk memperoleh dasar yang kuat dalam mengolah data data pertanahan.

Yogyakarta, November 2014
Sekolah Tinggi Pertanahan Nasional
Ketua

Dr. Oloan Sitorus, S.H., M.S.
NIP. 196608051992031003

DAFTAR ISI

Buku materi pokok Matematika Terapan untuk Program Studi Diploma I Pengukuran dan Pemetaan Kadastral merupakan modul yang berisikan pengetahuan tentang matematika yang merupakan ilmu dasar untuk mempelajari pengetahuan-pengetahuan yang bersifat eksak. Pada materi pokok ini akan mempelajari cabang-cabang ilmu matematika yang terdiri dari Pengertian Persamaam dan Pertidaksamaan, Geometri, Trigonometri, Matrik, Deferensial terapan matematika pada perhitungan luas.

Buku materi pokok Matematika disusun sebagai pengetahuan dasar dan sebagai ilmu pendukung mata-kuliah Statistik, Ilmu Ukur Tanah, Ilmu Hitung Perataan, Kerangka Dasar Pemetaan. Sehingga setelah menguasai dengan baik materi pokok matematika ini diharapkan mahasiswa mempunyai modal dan dasar yang kuat untuk mempelajari matakuliah mata kuliah lanjutan yang memerlukan dasar pengetahuan matematika yang dimuat dalam buku materi pokok ini.

Dalam mempelajari buku materi pokok matematika ini mahasiswa perlu pada awal perkuliahan untuk mempelajari terlebih dahulu materi himpunan dan konsep logika matematika. Pada materi pokok ini materi tentang himpunan tidak diberikan secara mendalam, hanya berupa ringkasan-ringkasan. Persamaan dan pertidaksamaan termasuk didalamnya fungsi serta system koordinat yang mengenalkan materi tentang kurva dan koordinat

Geometri merupakan pengetahuan yang berhubungan dengan muka bumi yang memuat materi-materi yang berhubungan dengan ruang, bidang dan garis. Materi ini akan dapat dikuasai dengan baik apabila terlebih dahulu dikuasai pengetahuan tentang fungsi dan persamaan dan trigonometri. Pengetahuan trigonometri sangat diperlukan dalam mempelajari materi pokok ini, tanpa penguasaan yang cukup mahasiswa akan kesulitan dalam mempelajari materi pokok geometri.

Trigonometri merupakan ilmu yang harus dikuasai oleh mahasiswa karena materi trigonometri berkaitan dengan perhitungan perhitungan pengukuran serta berkaitan dengan peralatan pengukuran.

Matrik merupakan pengetahuan yang dapat diberikan secara bersamaan, dalam suatu modul atau materi pokok. Matrik diberikan masing-masing dalam kegiatan belajar.

Dalam mempelajari Deferensial diharapkan mahasiswa telah memguasai terlebih dahulu pengetahuan-pengetahuan tentang fungsi dan persamaan, dan trigonometri. Apabila mahasiswa kurang menguasainya maka akan kesulitan dalam mempelajari deferensial, penguasaan fungsi dan persamaan, dan trigonometri mutlak diperlukan. Penguasaan materi aritmatika diperlukan dalam mempelajari materi Deferensial ini, dan diharapkan mahasiswa menguasai dengan baik materi aritmatika sebagai dasar untuk operasi-operasi deferensial.

Perhitungan luas merupakan pengetahuan yang mutlak dikuasai dalam mempelajari modul matematika ini. Perhitungan luas akan dapat dipelajari dengan baik setelah dapat menguasai dengan baik pengetahuan-pengetahuan sebelumnya pada modul-modul terdahulu antara lai fungsi dan persamaan, trigonometeri, deferensial, matrik dan vektor, dan Geometri. Perhitungan luas sebagai dasar dalam mempelajari ilmu ukur tanah, dengan produk gambar ukur, serta luas bidang tanahnya.

Modul I yang berisikan materi Persamaan dan Pertidaksamaan. Persamaan dan pertidaksamaan berkaitan erat dengan fungsi dimana fungsi dapat digambarkan sebagai kurva. Sebelumnya dikenalkan system koordinat baik system koordinat kartesius maupun system koordinat kutub untuk menggambarkan suatu fungsi. Materi fungsi dan persamaan di berikan materi tentang pengertian fungsi dan persamaan, definisi fungsi menurut persamaannya, menurut sifat khususnya, dan pemetaannya. Dan akan dirinci tentang fungsi menurut persamaannya dimana terdapat fungsi aljabar dan transenden, dan grafik fungsinya. Diharapkan setelah mempelajari modul 1 ini mahasiswa akan 1) mempunyai kemampuan untuk dapat menjelaskan dengan benar pengertian tentang fungsi dan persamaan, dan 2) dapat menggambar grafik fungsi aljabar dengan baik dan benar. Modul tentang fungsi dan persamaan ini sangat diperlukan dalam mempelajari ilmu ukur tanah, ilmu hitung perataan, dan statistik.

Modul II akan membahas tentang Geometri. Geometri merupakan cabang ilmu matematika yang mempunyai kegunaan yang penting dalam menunjang mata kuliah yang berhubungan dengan pengukuran. Geometri mempelajari pengetahuan tentang titik, garis, dan bidang dalam demensi satu, demensi dua dan demensi tiga, beserta sudut, jarak, dan luasan tertentu, parabola, hiperbola, lingkaran, dan ellips. Setelah mempelajari modul 5 tentang geometri diharapkan mahasiswa akan dapat : 1) menjelaskan pengertian geometri 2) dapat menghitung jarak atara titik, garis dan bidang, 3) dapat menjelaskan pengertian tentang parabola, hiperbola, lingkaran dan ellips. Modul tentang Geometri ini sangat diperlukan dalam mempelajari ilmu ukur tanah, ilmu hitung perataan.

Modul III yang memuat Trigonometri. Fungsi Trigonometri merupakan bagian dari definisi fungsi menurut persamaannya. Trigonometri diberikan khusus dalam satu modul dengan alasan karena Trigonometri merupakan dasar yang sangat penting untuk pembahasan dalam mata kuliah ilmu ukur tanah. Modul Trigonometri ini meliputi pengertian tentang Trigonometri dan fungsi siklometri, rumus-rumus dalam trigonometri, perhitungan-perhitungan dalam trigonometri dan diakhiri dengan fungsi Trigonomnetri. Setelah mempelajari modul 2 ini diharapkan mahasiswa dapat 1) menjelaskan dengan baik dan benar pengertian trigonometri dan fungsi siklometri, 2) menghitung perhitungan-perhitungan trigonometri, 3). menjelaskan rumus-rumus trigonometri, 4). Dapat menggambar grafik fungsi trigonometri.

Modul tentang trigonometri ini sangat diperlukan dalam mempelajari ilmu ukur tanah, ilmu hitung perataan, dan kerangka dasar pemetaan.

Modul IV akan membahas tentang Matrik berisikan materi Matrik dengan uraian definisi dari matrik, jenis-jenis matrik, operasi matrik, harga determinan dengan metode matrik kofaktor dan invers suatu marik dengan metode substitusi, matrik adjoint, metode kounter, dan matrik partisi. Setelah mempelajari modul matrik diharapkan mahasiswa dapat : 1). Menjelaskan pengertian tentang matrik, 2) menghitung harga determinan ordo n, 3) dapat menghitung matrik invers dengan 4 metode. Modul Matrik ini sangat diperlukan dalam mempelajari ilmu ukur ilmu hitung perataan, dan statistik.

Modul V dengan materi tentang Deferensial. Pada Modul 3 diuraikan tentang definisi dari derivatif atau disebut juga turunan derivatif fungsi aljabar dan fungsi transenden, cara menentukan turunan dengan beberapa metode, dan aplikaasi derivatif pada menentukan garis singgung, menentukan fungsi naik dan fungsi turun, dan menghitung pendekatan nilai rata-rata. Setelah mempelajari modul 3 ini diharapkan mahasiswa akan dapat : 1) menjelaskan pengertian dari deverensial baik deferensial fungsi aljabar maupun fungsi trigonometri, 2) dapat menghitung harga-harga derivatif pertama, kedua, maupun ke n, 3). Dapat menerapkan kegunaan derivatif untuk keperluan mencari garis singgung, kurva naik dan turun, dan pendekatan nilai rata-rata. Modul tentang Deferensial/Derivatif ini sangat diperlukan dalam mempelajari ilmu ukur tanah, ilmu hitung perataan, kerangka dasar pemetaan, dan statistik.

Modul VI akan membahas tentang Perhitungan Luas Bidang. Modul 6 akan membahas tentang perhitungan-perhitungan luas bidang yang banyak digunakan dalam menghitung luas bidang tanah, untuk keperluan penggambaran pada ilmu ukur tanah. Pada Modul 6 ini akan diterangkan mengenai perhitungan luas untuk bidang segitiga, segi empat, trapezium. Perhitungan luasnya baik menggunakan sisi-sisi, sudut, dan menggunakan koordinat. Diharapkan setelah mendapatkan materi tentang perhitungan luas mahasiswa akan mempunyai dasar yang kuat dalam mempelajari ilmu ukur tanah.

Demikian secara singkat uraian materi yang akan diajarkan dalam buku materi pokok Matematika yang termuat dalam 6 materi pokok (modul) dan dasar-dasar yang diperlukan untuk dapat mempelajari dengan baik serta tujuan yang hendak dicapai dalam mempelajari buku materi pokok ini.

MODUL I

PERSAMAAN DAN PERTIDAKSAMAAN

Modul I yang berisikan materi Persamaan dan Pertidaksamaan. Persamaan merupakan bagian dari Fungsi, pada saat fungsi merupakan himpunan titik titik dari hasil suatu persamaan. Fungsi dapat dilukiskan dalam bentuk kurva. Fungsi merupakan hubungan antara dua himpunan yang memenuhi syarat bahwa setiap unsur dari himpunan pertama mempunyai kawan yang tunggal di himpunan kedua. Pada definisi fungsi terdapat unsur-unsur hubungan atau perkawanan, dan himpunan. Pada pengertian himpunan sangat lekat dengan pengertian sistem bilangan. Pertidaksamaan dapat digambarkan suatu daerah yang memenuhi syarat yang digambarkan dalam interval tertentu dan dituliskan dalam bentuk himpunan.

Sebelum mengenalkan materi tentang fungsi, sebelumnya akan diterangkan atau dibahas mengenai materi himpunan dan sistem bilangan yang akan membangun suatu fungsi. Pemahaman materi Himpunan dan Sistem bilangan akan sangat membantu dalam memahami Fungsi.

Wadah grafis dari fungsi berupa Sistem Koordinat, maka sangatlah relevan apabila sebelumnya dibahas dahulu mengenai sistem koordinat. Untuk memberikan pemahaman tentang sistem koordinat yang terdiri dari Sistem Koordinat Kartesius yang menggunakan absis dan ordinat, dan Sistem Koordinat Kutub yang menggunakan sudut yang mengapitnya dengan panjang jari-jari.

A. HIMPUNAN

Himpunan merupakan konsep yang sangat fundamental dalam semua cabang matematika. Teori ini dikembangkan oleh George Boole (1815 -1864) dan George F.L Cantor (1845 – 1918) pada abat ke 19, tidak saja mempengaruhi dan memperkaya setiap cabang matematika tetapi juga membantu menjelaskan antara matematika dan ilmu filsafat.

Himpunan didefinisikan sebagai ***daftar yang tersusun dengan baik***, atau ***koleksi dari obyek-obyek dan ditulis dengan dalam tanda kurung kurawal ({})***

Obyek-obyek inilah yang disebut sebagai anggota suatu Himpunan.

Himpunan dituliskan dalam huruf capital misalnya A, B, C, D, X, Y, dsb. Sedangkan anggota himpunan dituliskan dalam huruf kecil misalnya a, b, c, d, x, y, dsb.

Jika suatu obyek x merupakan anggota dari himpunan A, maka dapat dituliskan dengan lambang $x \in A$, jika tidak demikian maka $x \notin A$ maksudnya x bukan anggota dari himpunan A.

Cara penulisan Himpunan dikenal dengan cara : 1) pendaftaran yaitu dengan cara mendaftar, dan 2) cara pencirian yaitu menekankan pada cirri-ciri dari anggotanya.

Contoh cara pendaftaran : A = { a, b, c, d, x, y } atau B = { (1,1), 2,2), (3,3), (4,4)}

Contoh cara pencirian : A = { $x \mid x \in$ bil. Asli }

Dalam menyatakan anggota dari himpunan selain dengan cara pendaftaran dan pencirian dan menyatakan kaitannya dengan himpunan yang lain dapat dinyatakan melalui suatu diagram yang disebut diagram Venn. Diagram Venn merupakan gambaran suatu bentuk kotak persegi yang didalamya terdapat ellips. Kotak empat persegi dimaksudkan sebagai semesta pembicaraan (S) atau *universe* dan ellips sebagai gambaran dari himpunannya.

Kebalikan dari himpunan yang anggotanya semesta pembicaraan (S) adalah himpunan yang tidak mempunyai anggota atau himpunan kosong (Ø) atau {}.

Dalam mempelajari Himpunan dikenal Himpunan Bagian (subset) yang merupakan turunan dari Himpunan tersebut.

Himpunan bagian ditulis dengan simbul $\subseteq$ mempunyai jumlah anggota (bilangan kardinal) yang lebih kecil atau sama dengan jumlah anggota Himpunan dimaksud. Misalkan B anggota Himpunan A ($B \subseteq A$) maka anggota himpunan B pasti juga merupakan anggota dari himpunan A, dan belum tentu anggota dari himpunan A juga merupakan anggota dari himpunan B

Himpunan B dikatakan sebagai *himpunan bagian* dari himpunan A apabila setiap unsure dari B termasuk di A.

Contoh : Jika A = { x | x $\in$ Asli $\leq$ 10 } dan B = { y | y $\in$ prima $\leq$ 17 }

Apabila dituliskan dengan cara pencacahan maka A = { 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10} dan

B = { 2,3,5,7 }. Terlihat dengan jelas bahwa anggota B merupakan anggota A juga

Gambaran diatas terlihat bahwa n (A) $\neq$ n (B), keadaan diatas dapat disebut bahwa B merupakan *himpunan bagian sejati* ($\subset$) dari A.

Himpunan B dikatakan sebagai *himpunan bagian sejati* dari himpunan A apabila setiap unsur dari B termasuk di A, dan terdapat unsur di A yang bukan unsur di B.

Dalam himpunan dikenal operasi himpunan, yaitu : operasi irisan, operasi gabungan, operasi selisih dan operasi komplemen.

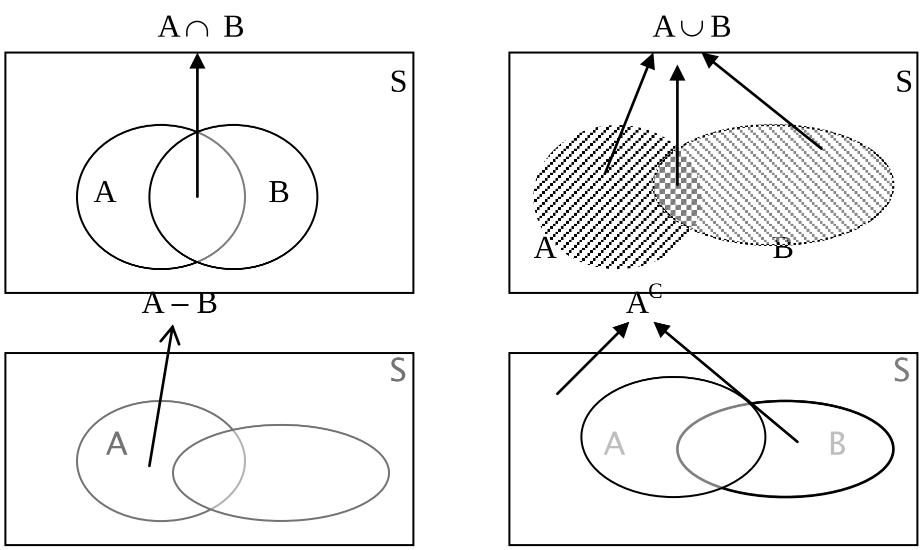
Operasi irisan (interseksi) dan operasi gabungan (union)

A interseksi B (A $\cap$ B) jika mempunyai anggota A dan Anggota B

A union B (A $\cup$ B) jika mempunyai anggota A atau Anggota B, atau kedua-duanya

A selisih B (A – B) jika mempunyai anggota A tapi bukan anggota B

A komplemen B jika mempunyai anggota selain anggota A termasuk anggota S



Gambar 1 Operasi Himpunan

B. SISTEM BILANGAN

Dalam Sistem Bilangan yang merupakan semesta pembicaraan (universe) adalah himpunan ***bilangan kompleks***

Dalam sistem bilangan yang merupakan bagian terkecil adalah Himpunan bilangan Komposit, Prima, dan 1.

a. Bilangan Asli

Bilangan Asli disebut juga bilangan Alam. Himpunan bilangan asli beranggotakan bilangan kelipatan 1 sampai n.

A = { x I x $\in$ bil. Asli } dapat ditulis juga sebagai :

A = { 1,2,3,4,5,6,7,8,9, …}

Himpunan bilangan asli terdiri dari himpunan bilangan komposit, himpunan bilangan prima, himpunan bilangan 1. Himpunan bilangan komposit, Himpunan bilangan prima dan himpunan bilangan 1 merupakan himpunan bagian- himpunan bagian dari himpunan bilangan asli yang saling asing.

Bilangan Komposit merupakan bilangan dengan cirri-ciri mempunyai lebih dari 2 faktor. Misalnya bilangan 6 merupakan perkalian antara 1,2, dan 3 jadi mempunyai 3 faktor. Bilangan Komposit didefinisikan pula sebagai bilangan asli yang bukan bilangan 1 dan bilangan prima.

A = { x I x $\in$ bil. Komposit } dapat ditulis juga sebagai :

A = { 4,6,8,9,10,12,14,15, …}

Bilangan Prima merupakan bilangan dengan cirri-ciri mempunyai 2 faktor atau bilangan yang hanya habis dibagi dengan dirinya sendiri.

A = { x I x $\in$ bil. prima} dapat ditulis juga sebagai :

A = { 2,3,5,7,11,13, …}

b. Bilangan Bulat

Bilangan bulat merupakan gabungan antara bilangan cacah dan bilangan bulat negative. Bilangan nol termasuk dalam bilangan bulat tetapi tidak termasuk dalam bilangan bulat negative maupun bilangan bulat positif. Bilangan nol dan bilangan bulat positif disebut sebagai bilangan ***cacah.***

A = { x | x $\in$ bil. bulat } dapat ditulis juga sebagai :

A = { …, -5,-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4,5, …}

B = { x | x $\in$ bil. bulat negative } dapat ditulis juga sebagai :

B = { -1,-2,-3,-4,-5, …}

C = { x | x $\in$ bil. cacah } dapat ditulis juga sebagai :

C = { 0,1,2,3,4,5, …}

c. Bilangan Pecah

Bilangan pecah merupaka bilangan yang berbentuk $\frac{a}{b}$, dimana a dan b merupakan bilangan asli dan a tidak habis dibagi dengan b.

d. Bilangan Rasional.

Bilangan rasional merupakan bilangan yang tidak ada dibawah tanda akar. Bilangan rasional juga dapat didefinisikan sebagai bilangan decimal yang tidak berhingga yang beraturan dan semua bilangan decimal yang berhingga.

Definisi : Himpunan bilangan yang dapat ditulis dalam bentuk $\frac{a}{b}$, dimana a dan b bilangan bulat dan b $\neq$ 0) disebut sebagai bilangan

e. Bilangan Irrasional.

Bilangan irrasional merupakan bilangan yang ada dibawah tanda akar. Bilangan irrasional juga dapat didefinisikan sebagai bilangan decimal yang tidak berhingga dan tidak beraturan..

Definisi : Himpunan bilangan yang tidak dapat ditulis dalam bentuk $\frac{a}{b}$, dimana a dan b bilangan bulat dan b $\neq$ 0) disebut sebagai bilangan irrasional.

f. Bilangan riil

Bilangan riil merupakan bilangan yang bukan merupakan anggota bilangan imajiner. *Bilangan riil dapat dituliskan dalam bentuk desimal*. Bilangan riil juga dapat didefinisikan sebagai gabungan antara bilangan rasional dan bilangan irrasional. Bilangan riil dapat dinyatakan dalam bentuk garis bilangan. Semua titik-titik yang ada didalam garis bilangan merupakan anggota dari himpunan bilangan riil.

Definisi : *Dengan garis bilangan riil, atau disingkat garis riil, kita maksudkan suatu garis, dimana setiap bilangan riil bersesuaian dengan tiap titik dari garis itu bersesuaian dengan tiap bilangan riil. Urutan titik dalam garis bersesuaian dengan bilangan riil.*

g. Bilangan Imajiner

Bilangan Imajiner merupakan bilangan negative yang ada dibawah tanda akar. Bentuk umum dari bilangan imajiner adalah merupakan kelipatan dari ***√-1.***

Misalnya bilangan √-4, √-8, adalah contoh-contoh dari bilangan imajiner. Bilangan imajiner atau disebut jugaa sebgai bilangan ***khayal*** merupakan bilangan yang bukan merupakan anggota bilangan riil.

h. Bilangan Kompleks

Himpunan bilangan komplek merupakan kombinasi antara himpunan bilangan riil dan himpunan bilangan immajiner. Bentuk dari bilangan komplek adalah a + bi dimana harga i= √-1, I merupakan bilangan imajiner.

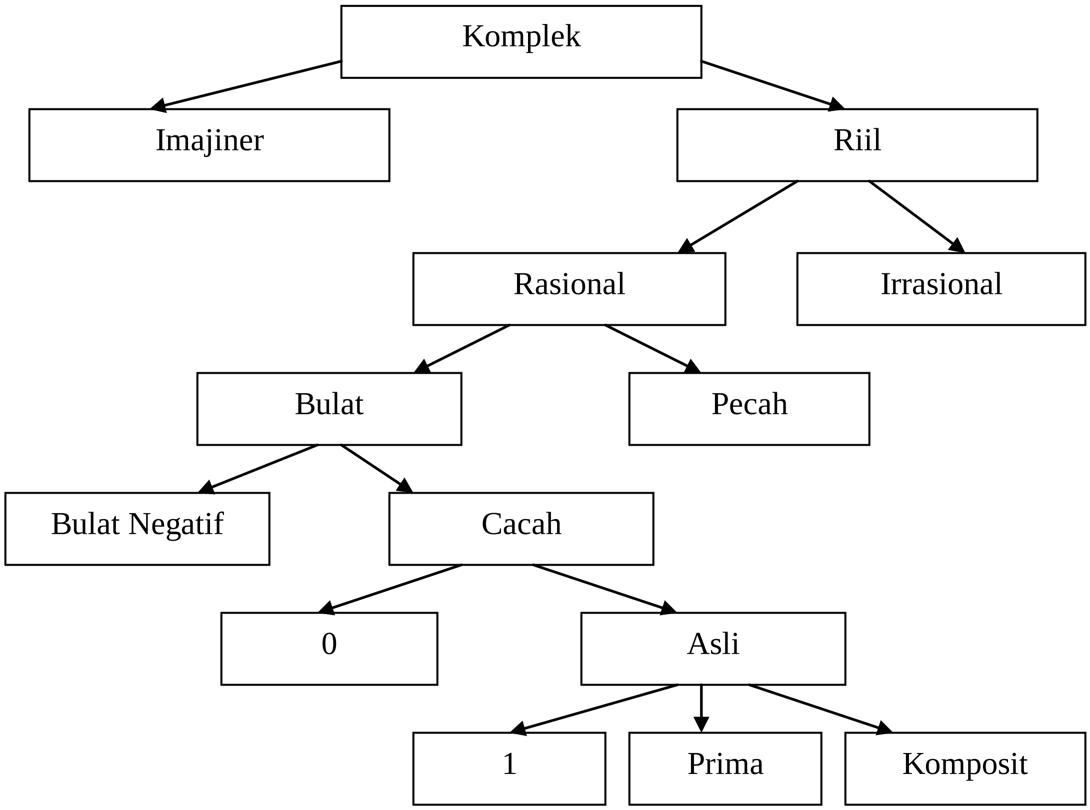
Contoh : Akar-akar persamaan kwadrat $y = x^2 + 2x + 4$,

adalah Hp = { (-2 + 2i√2), (-2 - 2i√2)}

i. Hubungan antar bilangan

Bilangan, sebagai *universe* atau semesta pembicaraan adalah bilangan kompleks. Semua bilangan merupakan himpunan bagian dari bilangan kompleks.

Hubungan antara masing-masing jenis bilangan dapat digambarkan dengan gambar 1 dibawah ini “:



Gambar 2 Sistem Bilangan

C. LOGIKA

Logika matematika penting diberikan kepada mahasiswa untuk mengajak mahasiswa berpikir secara logis, cepat dan tepat. Logika matematika merupakan cabang dari matematika modern. Pada logika matematika akan diajarkan mengenai cara berpikir yang berdasarkan matematika yaitu logis, dan pasti.

Dalam logika matematika dikenal kalimat matematika yang terdiri dari **kalimat terbuka** dan **kalimat tertutup (**pernyataan**)**. Kalimat terbuka merupakan kalimat yang belum tentu atau belum jelas mempunyai arti benar atau salah. Kalimat terbuka disebut juga sebagai kalimat tanya atau kalimat yang mengandung variabel. Sedangkan kalimat tertutup atau pernyataan adalah kalimat yang telah jelas mempunyai arti benar atau salah. Kalimat tertutup banyak dipakai dalam kegiatan ilmiah misalnya untuk menentukan hipotesis, hipotesis merupakan pernyataan, suatu kalimat yang hanya benar atau salah saja.

Contoh kalimat terbuka :

1. $y = x + 5$
2. siapa yang menjadi responden adalah kepala rumah tangga

Contoh kalimat tertutup :

1. $\sqrt{5} = 2$
2. pada saat ini kepala kantor kantor pertanahan sleman adalah laki-laki

1. Kalimat Berkwantor

Kalimat berkwantor merupakan kalimat yang mempunyai arti besaran atau kalimat kuantitas. Kalimat berkwantor merupakan kalimat matematika yang menyatakan besaran, seperti setiap (semua), beberapa (sekurang-kurangnya satu),terdapat, terdapat dengan tunggal atau tidak ada. Jadi kalimat berkantor menyatakan **beberapa banyak**.

Simbul dari kalimat berkwantor adalah :

$\forall$ = untuk setiap, semua

$\exists$ = terdapat sekurang-kurangnya satu, atau beberapa

$\exists!$ = terdapat dengan tunggal

Contoh :

1. $A = \{ (x,y) \mid y = x^2, \forall\ x \in$ Bil. Asli, $y \in$ Bil. Asli$\}$
2. $\forall\ x \neq 0 \in$ bilangan rasional $\exists\ \frac{1}{\mathbf{x}} \in$ bialangan rasional $\ni x\frac{1}{\mathbf{x}} = 1$

$\ni$ = sehingga, sedemikian rupa sehingga

Ingkaran dari pernyataan berkwantor . Jika **p** merupakan pernyataan berkwantor maka **~ p** merupakan ingkaran dari pernyataan berkwantor yang artinya tidaklah benar pernyataan p.

Contoh :

p = 25 adalah bilangan prima

~ p = tidaklah benar 25 adalah bilangan prima

2. Pernyataan majemuk.

Pernyataan majemuk merupakan pernyataan yang merupakan gabungan dari dua buah pernyataan yang menjadi satu pernyataan yang dihubungkan oleh kata sambung. Kata sambungnya berupa dan ($\wedge$), atau ($\vee$), atau jika … maka … ($\Rightarrow$) atau jika dan hanya jika … maka ($\Leftrightarrow$).

Kalimat majemuk tersebut pernyataan sebab disebut dengan a**nteseden** dan pernyataan akibat disebut **konsekwen**. Suatu kalimat majemuk dengan simbul dan ($\wedge$) disebut juga **konjungsi**. Suatu kalimat majemuk dengan simbul atau ($\vee$) disebut juga **disjungsi**. Kalimat majemuk dengan simbul jika … maka ($\Rightarrow$) disebut juga **implikasi.** Dan kalimat majemuk dengan simbul jika …dan hanya jika … maka ($\Leftrightarrow$) disebut ekivalensi. Simbul $p \Leftrightarrow q$ dapat dibawa sebagai $p \Rightarrow q$ dan $q \Rightarrow p$

Definisi :

a. Suatu **Konjungsi** ($p \wedge q$) akan bernilai benar apabila anteseden dan konsekwen keduanya bernilai benar, selain itu bernilai salah.

b. Suatu **Disjungsi** ($p \vee q$) akan bernilai benar apabila salah satu anteseden atau konsekwennya bernilai benar, disjungsi bernilai salah apabila anteseden dan konsekwen kedua-duanya bernilai salah.

c Suatu **Implikasi** ($p \Rightarrow q$) akan bernilai salah apabila anteseden bernilai benar tetapi konsekwen bernilai salah, selain itu bernilai benar.

d. Suatu **Ekuivalensi** ($p \Leftrightarrow q$) bernilai benar apabila anteseden dan konsekwen kedua-duanya bernilai benar atau salah, selain itu ekuivalensi akan bernilai salah.

Pernyataan $p \Rightarrow q$ merupakan pernyataan majemuk bersyarat. $p \Rightarrow q$ dibaca juga sebagai p membawakan ke q, p hanya jika q, p cukup untuk q, dan q perlu untuk p.

Beberapa variasi yang mungkin terjadi

Beberapa variasi yang mungkin terjadi dari pernyataan $p \Rightarrow q$ adalah :

$q \Rightarrow p$ disebut konvers, $\sim p \Rightarrow \sim q$ disebut invers, $\sim q \Rightarrow \sim p$ disebut kontra posisi dari implikasi.

Tabel 1 Tabel kebenaran

P	Q	$P \wedge Q$	$P \vee Q$	$P \Rightarrow Q$	$P \Leftrightarrow Q$	$q \Rightarrow p$	$\sim p \Rightarrow \sim q$	$\sim q \Rightarrow \sim p$
B	B	B	B	B	B	B	B	B
B	S	S	B	S	S	B	B	S
S	B	S	B	B	S	S	S	B
S	S	S	S	B	B	B	B	B

3. Tautologi atau Kontradiksi

Suatu Tautologi merupakan suatu pernyataan majemuk yang hanya mempunyai nilai benar saja, dan tidak mungkin bernilai salah. Sedangkan Kontradiksi adalah kalimat majemuk atau pernyataan majemuk yang hanya akan mempunyai nilai salah saja, tidak akan bernilai benar. Pernyataan $p \vee \sim p$ merupakan suatu pernyataan yang bernilai benar saja, dan tak mungkin salah, karena pernyataan benar atau salah atau salah atau benar pastilah jawabannya benar.

Pernyataan $p \wedge \sim p$ merupakan suatu pernyataan yang bernilai salah saja, dan tak mungkin benar, karena pernyataan benar dan salah atau salah dan benar pastilah jawabannya salah.

4. Berpikir Deduktif

Dalam berpikir deduktif merupakan cara berpikir dengan logika yang menerapkan prinsip-prinsip matematis. Cara berpikir deduktif diterangkan menggunakan cara berpikir dengan prinsip **inferensi** dan prinsip **silogisme.**

Cara berpikir menggunakan **prinsip inferensi** adalah menggunakan dalil jika p benar, $p \Rightarrow q$ benar, maka q akan bernilai benar. Prinsip ini diambil dari prinsip $p \Rightarrow q$, implikasi ini akan bernilai salah maka q akan bernilai salah, dan p bernilai benar.

$P \Rightarrow Q$
P benar

Q benar pula

Cara berpikir menggunakan **prinsip silogisme** adalah menggunakan dalil jika p $\Rightarrow$ q benar dan q $\Rightarrow$ r benar, maka p $\Rightarrow$ r akan bernilai benar pula.

$P \Rightarrow Q$ bernilai benar
$Q \Rightarrow R$ bernilai benar

$P \Rightarrow R$ bernilai benar pula

Berpikir dengan prinsip kontradiksi. Berpikir dengan cara ini adalah dengan menunjukkan bahwa p pernyataan benar. Langkah dimulai dengan mengandaikan bahwa pernyataan p tidak benar. Jika ketidak benaran p menimbulkan hal yang mustahil atau bertentangan dengan hipotesis semula maka, maka kesimpulan bahwa p benar adalah benar.

Disamping metode cara berpikir dengan prinsip inferensi, prinsip silogisme dan prinsip kontradiksi juga dapat digunakan dengan prinsip menyangkal (*counter example*). Prinsip ini menyatakan bahwa ketidak kebenaran dapat dinyatakan dengan cara menunjukkan contoh yang salah.

D. PENGERTIAN FUNGSI

Sebelum masuk dalam materi Persamaan dan Pertidaksamaan terlebih dahulu diterangkan konsep tentang fungsi untuk mengawalinya. Konsep Fungsi merupakan konsep dasar yang penting dalam belajar Kalkulus. Dalam Kalkulus yang terutama dalam mempelajari Limit Fungsi dan Deferensial memerlukan pengetahuan tentang Fungsi. Fungsi merupakan hubungan antara minimal 2 variabel.

Dalam mempelajari Fungsi terlebih dahulu harus dikuasai pengertian tentang himpunan dan operasi-operasi himpunan serta produk turunannya. Tidak kalah pentingnya juga pengertian tentang sistem bilangan.

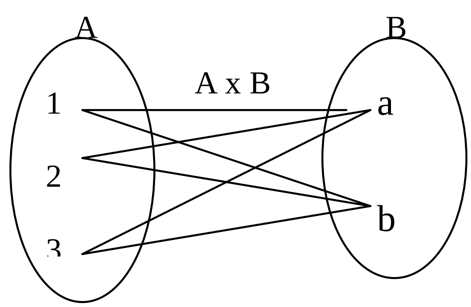
Sebelum mempelajari Fungsi terlebih dahulu harus dipahami tentang pengertian Produk Kartesius dan Relasi.

Dalam pasangan 2 bilangan atau lebih yang ditulis, (x,y), (a,b), (2,5) atau (x,y,z) dan sebagainya. Misalnya kita ambil pasangan tersebut (x,y), x merupakan anggota himpunan A dan y anggota himpunan B, yang biasanya ditulis x $\in$ A dan y $\in$ B dari hubungan kedua himpunan tersebut akan membentuk suatu himpunan baru yaitu A x B yang disebut ***produk kartesius***.

Definisi : *Jika A dan B dua himpunan, maka produk kartesius dua himpunan tersebut adalah himpunan semua pasangan terurut (x,y) dengan x $\in$ A dan y $\in$ B, yang ditulis AxB = { (x,y) ǀ x $\in$ A dan y $\in$ B}. Dalam pasangan terurut pasangan menjadi penting, (x,y) $\neq$ (y,x).*

Contoh :

Misalkan ada dua himpunan A dan B, dimana A = { 1,2,3} dan B = { a,b }, maka yang dimaksud dengan produk kartesius A x B = { (1,a), (1,b), (2,a), (2,b), (3,a), (3,B) }.



Dapat disimpulkan bahwa produk kartesius merupakan hubungan semua eleman anggota dari himpunan A dan semua anggota himpunan B tanpa syarat apapun.

1. Relasi

Perhatikan pasangan terurut (x,y) dimana x $\in$ A dan y $\in$ B, yang ditulis AxB = { (x,y) ǀ x $\in$ A dan y $\in$ B, dan ditulis a Relasi B ditulis a R b. Himpunan A dinamai *wilayah* (domain) relasi, sedangkan himpunan bagian dari pada himpunan B dinamai daerah jelajah (range) dengan sifat a R b. Himpunan B dinamai daerah kodomain relasi.

Suatu Relasi A ke B, maka R adalah himpunan bagian ($\subseteq$) dari pada A x B, Invers R yang dinyatakan dengan R^{-1} , adalah Relasi dari anggota Himpunan B ke anggota

Himpuan Ayang terdiri dari semua pasangan berurut (b,a), sehingga (a,b) $\in$ R dan R^{-1}={(b,a) | (a,b) $\in$ R }

Contoh :

1. Jika A = { 1,2 ,3, 4) dan B = { 3,4,5,6}, a R b dengan ketentuan
   R = { (a,b) | (a,b $\in$ bil. Asli, a $\geq$ b) } maka daerah jelajahnya adalah R = { (3,3), (3,4), (4,4) }
2. Jika A = { 1,2 ,3, 4) dan B = { 1,2,3,4,5,6}, a R b dengan ketentuan
   R = { (a,b) | (a,b $\in$ bil. Asli, a = b) } maka daerah jelajahnya adalah R = { (1,1), (2,2), (3,3), (4,4) }

2 Fungsi

Misalkan R adalah suatu relasi pada himpunan A x B. Jika relasi R bersifat unsur-unsur di himpunan A semuanya mempunyai pasangan dan hanya muncul satu kali, maka relasi R dinamakan fungsi dari himpunan A kedalam himpunan B.

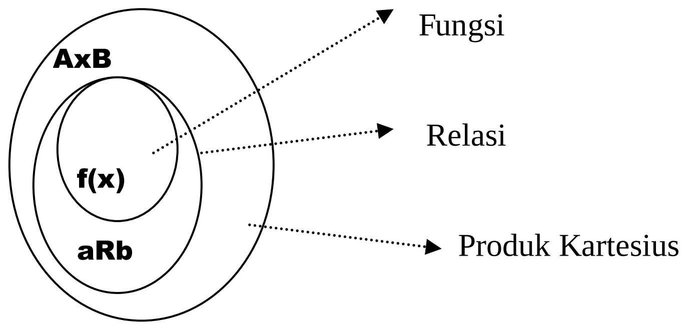
Definisi : *Diberikan dua himpunan tak hampa A dan B. Suatu fungsi dari himpunan A ke himpunan B, dinamakan f dan ditulis: $f : A \to B$, adalah himpunan pasangan-pasangan terurut (x,y) yang didapat dengan memasangkan setiap unsur di himpunan A dengan tepat satu unsur di himpunan B.*

Dari definisi diatas dapat disimpulkan bahwa fungsi merupakan pemasangan elemen dari domain dengan elemen di kodomain, dengan syarat bahwa setiap elemen di domain mempunyai pasangan dan tepat satu. Tetapi tidak ada syarat sebaliknya yaitu setiap pasangangan di kodomain mempunyai pasangan di kodomain.

Pada contoh relasi diatas terlihat bahwa soal no.1 bukan berupa Fungsi, hal ini dikarenakan terdapat beberapa elemen di domain tidak mempunyai pasangan di daerah kodomain, yaitu elemen 1, dan 2.

Pada contoh relasi nomor 2 merupakan fungsi karena setiap elemen di domain mempunyai pasangan di kodomain dan pasangannnya tepat satu.

Hubungan antara produk kartesius, relasi dan fungsi adalah : $F \subseteq R \subseteq AxB$ seperti dapat digambarkan dalam diagram Venn dibawah :



Gambar 3 Hubungan Fungsi, Relasi, dan Produk Kartesius

Dalam mempelajarinya, fungsi dibedakan sesuai dengan karakteristik masing-masing, yaitu dapat dibedakan dalam :

1. Ditinjau dari sifat khususnya, digolongkan dalam fungsi genap, fungsi ganjil, fungsi genap dan ganjil, dan fungsi tidak genap dan tidak ganjil.

   Untuk mendefinisikan fungsi genap dan ganjil, kita memerlukan pengertian tentang himpunan simetris. Suatu himpunan A dikatakan simetris apabila memenuhi syarat:

   Jika $x \in A \Rightarrow -x \in A \;\; \forall \; x \in A$

   a). Suatu fungsi dinanakan fungsi genap jika D_f himpunan simetris dan dipenuhi $f(-x) = f(x) \;\; \forall \; x \in D_f$.

   Contoh : 1. $f(x) = x^2$, karena $f(-a) = f(a) = a^2$

   2. $f(x) = \cos x$, karena $\cos x = \cos(-x)$

   b). Suatu fungsi dinanakan fungsi ganjil jika D_f himpunan simetris dan dipenuhi $f(-x) = -f(x) \;\; \forall \; x \in D_f$.

   Contoh : 1. $f(x) = x$, karena $f(-a) = -f(a) = -a$

   2. $f(x) = \sin x$, karena $\sin(-x) = -\sin x$

c). Suatu fungsi dinamakan fungsi genap dan ganjil jika memenuhi ketentuan a) dan b) diatas. Salah satu fungsi yang memenuhinya adalah f(x) = 0

d). Suatu fungsi dinamakan fungsi tidak denap dan tidak ganjil jika tidak memenuhi ketentuan a) dan tidak memenuhi b) diatas.

Contoh : 1. f (x) = sin x + cos x

2. f (x) = $x^2 + 1$

2. Fungsi ditinjau dari segi pemetaannya, digolongkan dalam: fungsi kepada, fungsi kedalam, fungsi satu-satu, fungsi komposisi, dan fungsi invers.

a). Fungsi kedalam dan fungsi kepada:

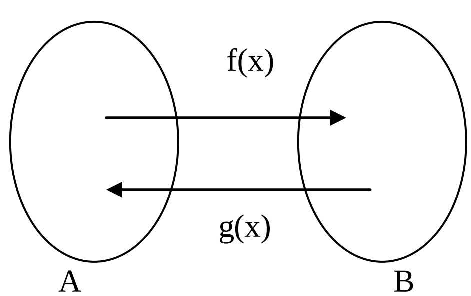
Misalkan $f : A \rightarrow B$ suatu fungsi, kita mengetahui bahwa $R_f \subseteq B$, dimana R_f merupakan range fungsi f dan akan terdapat dua kemungkinan yang dapat terjadi pada $R_f \subseteq B$, yaitu 1) $R_f \subset B$ atau 2) $R_f = B$

Bila) $R_f \subset B$ terdapat prapeta yang kosong, dalam hal ini f merupakan fungsi kedalam, sedangkan apabila $R_f = B$ maka setiap unsut dari B mempunyai prapeta dan f disebut sebagai fungsi kepada.

b). Fungsi satu kesatu dan fungsi invers.

Fungsi $f : A \rightarrow B$ dinamakan fungsi satu kesatu (satu-satu) apabila prapeta yang tak kosong dari setiap unsure di B hanya terdiri dari satu unsur.

Bila fungsi f berada dalam korespondensi satu kesatu, maka hanya terdapat satu dan hanya satu fungsi $g : B \rightarrow A$



Gambar 4 Hubungan Fungsi dengan Fungsi Inversnya

3. Fungsi ditinjau berdasarkan *persamaannya*, digolongkan atas fungsi aljabar dan fungsi transenden. Fungsi aljabar terdiri atas: fungsi polinom, fungsi rasional, fungsi irrasional. Fungsi transenden terdiri atas: fungsi trigonometri, fungsi pangkat dan fungsi logaritma. Dalam mempelajari fungsi tidak terpisahkan dengan grafik fungsi.

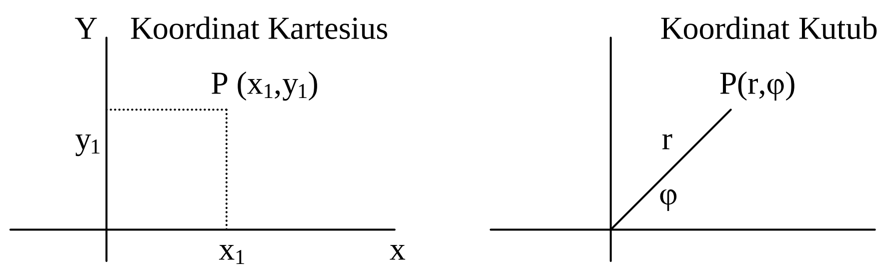
   Grafik fungsi dapat ditampilkan melalui lukisan dalam sistem koordinat kartesius.

3. Sistem Koordinat

Cara menentukan letak titik disebut sistem koordinat. Dalam bidang, letak suatu titik oleh sepasang bilangan, dalam ruang letak titik ditentukan oleh 3 buah bilangan dalam tanda kurung, begitu seterusnya.

Dalam sistem koordinat dikenal 2 macam sistem koordinat yaitu 1) sistem koordinat kartesius, dalam bentuk P (x, y) untuk koordinat dalam bidang, dan 2) sistem koordinat kutub, dalam bentuk P (r, φ).

Sistem koordinat kartesius harga x disebut absis, sedangkan y disebut ordinat. Sedangkan dalam koordinat kutub r adalah panjang jari-jari, sedangkan φ adalah sudut antara jari-jari dengan sumbu mendatar,



Gambar 5 Sistem Koordinat Kartesius dan Koordinat Kutub

Titik P pada koordinat kartesius ditentukan oleh koordinatnya, yaitu (x_1,y_1).

x_1 disebut absis, merupakan jarak dari titik pusat (0,0) sampai x_1 , dan y_1 disebut ordinat, merupakan jarak dari titik pusat (0,0) sampai y_1.

Sedangkan titik P pada koordinat kutub, harga r merupakan jari-jari dengan rumus $\sqrt{(x^2 + y^2)}$, dan $\varphi = \text{arctg } \frac{y}{x}$

Hubungan antara koordinat kartesius dan koordinat kutub adalah sebagai berikut:

a. $x = r \cos \varphi$ dan $y = r \sin \varphi$

b. $r = \sqrt{(x^2 + y^2)}$ dan $\varphi = \text{arctg } \frac{y}{x}$

Contoh 1:

Titik P(4,-4) dalam koordinat kartesius ubahlah dalam koordinat kutub.

Jawab :

$r = \sqrt{(4^2 + (-4)^2)} = \sqrt{(32)} = \sqrt{(4^2.2)} = 4\sqrt{2}$

$$\varphi = \text{arctg } \frac{y}{x} = \text{arctg } \frac{-4}{4} = \text{arctg } -1 = -45^0$$

jadi dalam koordinat kutub P = $(4\sqrt{2} , -45^0)$

Contoh 2 :

Titik P $(2,150^0)$ kalam koordinat kartesius ubahlah dalam koordinat kutub

Jawab :

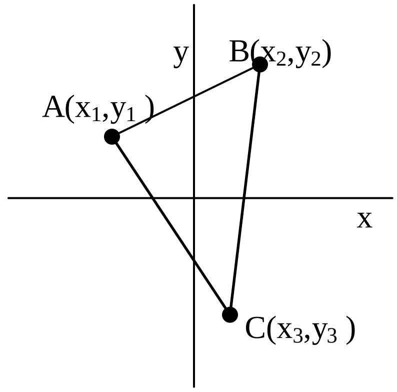
$x = r \cos \varphi = 2 \cos 150^0 = 2. -(1/2)\sqrt{3} = -\sqrt{3}$

$y = r \sin \varphi = 2 \sin 150^0 = 2. (1/2) = 1$

jadi dalam koordinat kartesius P = $(-\sqrt{3}, 1)$

4. Jarak antar koordinat

Dalam suatu sistem koordinat kartesius, dimana absis (x) dan ordinat (y) yang kesatuannya disebut suatu sistem kordinat. Dua buah koorditat, koordinat tersebut diberikan ciri sebagai titik, dan kedua titik tersebut dapat diketahui panjangnya atau jarak kedua titik tersebut.



Jarak titik A ke titik B dapat diperoleh menggunakan rumus :

$|AB| = \sqrt{((x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2)}$, panjang $|BC| = \sqrt{((x_3-x_2)^2 + (y_3-y_2)^2)}$ dan

$|AC| = \sqrt{((x_3-x_1)^2 + (y_3-y_1)^2)}$

Contoh Soal :

Apabila terdapat titik titik dengan koordinat A(-1,1), B(1,6), dan C(8,-1), tentukan panjang garis AB, BC dan AC.

Jawab :

a. $|AB| = \sqrt{((1-(-1)^2 + (6-1)^2)} = \sqrt{(2)^2 + (5)^2} = \sqrt{29} = 5{,}38$

b. $|BC| = \sqrt{((8-1)^2 + (-1-6)^2)} = \sqrt{(7)^2 + (-7)^2} = \sqrt{98} = 7\sqrt{2} = 9{,}9$

c. $|AC\cdot| = \sqrt{((8-(-1)^2 + (-1-1)^2)} = \sqrt{(9)^2 + (2)^2} = \sqrt{85} = 9{,}2$

5. Karakteristik Fungsi

Karakteristik fungsi dapat ditinjau menurut 1). sifat khususnya, 2). Turunannya, 3). Pemetaannya, dan 4). Persamaannya.

Ditinjau dari persamaannya fungsi dikelompokkan menurut 1). fungsi genap, 2). fungsi ganjil, 3). fungsi genap dan ganjil, dan fungsi tidak genap dan tidak ganjil.

Fungsi ditinjau dari Persamaannya akan dibahas lebih lengkap, Fungsi ditinjau dari persamaannya terdiri dari 1). fungsi aljabar dan 2).fungsi transenden.

Fungsi Aljabar yang terdiri dari 1). fungsi polinom, 2). fungsi rasional, dan 3). fungsi irasional dibahas pada modul 1 ini.

Sedangkan fungsi Transenden yang terdiri dari 1). fungsi trigonometri, 2). fungsi siklometri (invers trigonometri), 3). fungsi logaritma, dan 4). fungsi exponen dibahas pada modul 2 dan modul lainnya.

Diharapkan setelah mempelajari materi fungsi dan persamaan mahasiswa mempunyai dasar yang kuat dalam mempelajari modul-modul matematika selanjutnya (modul 2 sampai modul 6) dan mata kuliah yang berhubungan dengan pengukuran.

a. Fungsi Aljabar

Fungsi Aljabar terdiri dari fungsi polinom, fungsi rasional, dan fungsi irrasional.

*1). **Fungsi Polinom (fungsi suku banyak**) mempunyai bentuk umum* :

Fungsi $p : x \to p(x) = p_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_0x^n$

Dengan n bilangan bukan bulat negative, disebut fungsi polinom derajat n

a). untuk harga n = 1 $\to p_1(x) = a_0x^1 + a_1$, **disebut fungsi linier**, grafiknya merupa garis lurus.

Fungsi merupakan himpunan titik titik yang dihubungkan sehingga berupa garis. Dalam menggambar grafik fungsi disyaratkan membuat garis bilangan yang gunanya untuk membuat pasangan absis dan ordinat secukupnya sebagai sampel.

Persamaan umum untuk fungsi linier : $y = mx + c$

Untuk menggambar grafik fungsi memerlukan langkah langkah yang harus dipenuhi : 1). cari perpotongan dengan sumbu

2). cari perpotongan dengan sumbu y

3). tentukan nilainya memotong suatu garis di tak hingga, disebut juga asimtot (apabila ada)

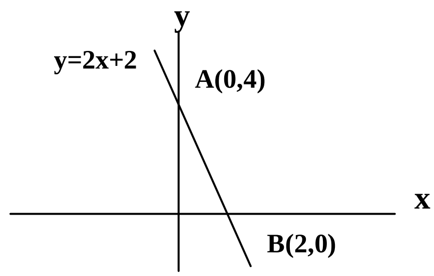
4) cari harga/ titik ekstrimnya (minimum, maksimum, atau titik belok)

5) masukkan harga-harga tersebut pada garis bilangan

Grafik fungsi $y = p(x) = - 2x + 4$ dapat dilukiskan sebagai berikut :

x	0	2
y	4	0

A (0,4) dan B (2,0)



Gambar 6 Grafik Persamaan Linier

m merupakan gradien atau kecuraman, m = arctg α, dimana α = sudut antara sumbu x dengan garis lurus yang merupakan kurva yang dibentuk oleh fungsi linier tadi. sedang c merupakan titik potong terhadap sumbu y maksudnya memotong sumbu y dititik (0,c). Misalkan garis y = x, berarti gtaris tadi dengan gradien atau harga m = 1, dengan α = arctg 1 = 45^0.Sedangka jika y = -x menunjukkan harga gradiennya adalah -1, α = arctg (-1) = 135^0. kedua garis tersebut memotong sumbu y di y = 0, atau lewat sumbu pusat (0,0).

Dalam persamaan linier dikenal hubungan antar garis lurus melalui kemiringannya (m).

Jika terdapat dua (2) garis lurus yang sejajar maka kemiringan dari garis tersebut adalah sama atau $m = - \frac{1}{\mathbf{n}}$, hal ini dapat dibuktikan melalui rumus bahwa :

$$\text{tg}(a - b) = \frac{\mathbf{tga - tgb}}{\mathbf{tga.tgb}} = \frac{\mathbf{m - n}}{\mathbf{m.n}} = \text{tg } 90^0 = \infty\text{, karena tegak lurus}$$

supaya persamaan tersebut berharga ∞ maka, m. n = 0, atau m = n, jadi gradient dari 2 garis yang sejajar adalah sama.

Jika terdapat dua (2) garis lurus yang berpotongan dan tegak lurus, maka kemiringan dari garis tersebut adalah sama atau m = n, hal ini dapat dibuktikan melalui rumus bahwa :

tg (a - b) = $\frac{\mathbf{tga - tgb}}{\mathbf{tga.tgb}}$ = $\frac{\mathbf{m - n}}{\mathbf{m.n}}$ = 0, karena sejajar

supaya persamaan tersebut berharga 0 maka, m – n = 0, atau m = n, jadi gradient dari 2 garis yang sejajar adalah sama.

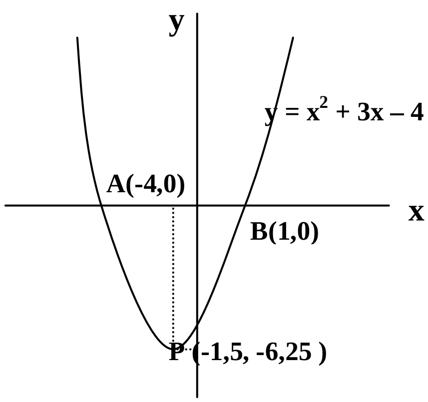
b). untuk harga n = 2 $\rightarrow p_1(x) = a_0x^2 + a_1x^1 + a_2$, ***disebut fungsi kwadrat***, grafiknya merupa parabola.

Misalkan terdapat fungsi $y = p(x) = x^2 + 3x - 4$

Dalam menggambar grafik fungsi kwadrat pertama kali di tentukan titik perpotongan dengan sumbu x dan perpotongan dengan sumbu y, setelah itu dicari titik puncak yang merupakan titik ekstrimnya.

$= x^2 + 3x – 4, \rightarrow y = (x + 4)(x – 1), x_1= -4, x_2= 1$

x	-4	1	0	-1,5
y	0	0	-4	-6,25



Gambar 7 Grafik Fungsi Kwadrat

cara mencari titik c (titik ekstrim) dengan cara mencari titik tengah (x_1+x_2)/2 sehingga diperoleh nilai x_p = -1,5 lalu dimasukkan kepersamaan y dan akan diperoleh koordinat titik P (-1,5, -6,25)

Dalam fungsi kwadrat apabila tidak dapat diuraikan akar-akarnya (titik potong dengan sumbu x, untuk y=0), akar-akar tersebut dapat dicari menggunakan persamaan abc.

$(x_1, x_1) = -b \pm \sqrt{D}$. D singkatan dari diskriminan

Dalam fungsi kwadrat dikenal definisi diskriminan (D). Diskriminan dengan rumus $D = b^2 - ac$

Apabila Harga D > 0, maka akan terdapat 2 titik potong terhadap sumbu x, dititik x_1 dan x_2, dimana x_1 dan x_2, nyata dan berbeda, contoh seperti persamaan kwadrat diatas $y = x^2 + 3x - 4$, yang akar-akarnya dititik $x_1 = -4$ dan $x_2 = 1$.

Untuk D = 0, akan mempunyai akar-akar yang nyata dan kembar yaitu dititik $x_1 = x_2$, contohnya $y = x^2 + 4x + 4$, harga $x_1 = x_2 = -2$.

Untuk D <0, akan mempunyai akar-akar yang tidak nyata (khayal), sebagai contoh: $y=x^2 + 2x + 4$, D= 4-16=-12 < 0, maka harga $x_1 = -2 + 2i\sqrt{3}$ dan $x_2=-2 -2i\sqrt{3}$.

Setiap fungsi kwadrat mempunyai nilai maksimum atau nilai minimum. Titik ini juga disebut sebagai titik ekstrim. Pandanglah persamaan kwadrat $y = ax^2 + bx + c$, misalkan **a** mempunyai nilai ***negative*** berarti fungsi kwadrat tersebut akan mempunyai nilai ***maksimum***, harga $\frac{\mathbf{D}}{-4\mathbf{a}}$ disebut sebagai nilai maksimum dari fungsi kwadrat dan parabolanya kan membuka kebawah.

Apabila **a** mempunyi nilai ***positif*** berarti fungsi kwadrat tersebut akan mempunyai nilai maksimum, harga $\frac{\mathbf{D}}{-4\mathbf{a}}$ disebut sebagai nilai ***minimum*** dari fungsi kwadrat maka parabolanya akan membuka keatas. Untuk harga maksimum dan minimum fungsi mempunyai koordinat titik puncak $P\left(\frac{-\mathbf{b}}{2\mathbf{a}}, \frac{-\mathbf{D}}{4\mathbf{a}}\right)$

Misalkan terdapat fungsi kwadrat $y = 4x^2 -4x -3$ dan $y = -x^2 - x + 2$,

Pertanyaan : tentukan titik potong koordinat titik puncak dari masing masing fungsi kwadrat

jawab :

fungsi $y = 4x^2 -4x -3$, mempunyai harga $D = (-4)^2 – 4.4.(-3) = 16 + 48 = 64$

$$P\left(\frac{-\mathbf{b}}{2\mathbf{a}}, \frac{-\mathbf{D}}{4\mathbf{a}}\right) = \left(\frac{4}{8}, \frac{-64}{16}\right) = \left(\frac{1}{2}, -4\right)$$

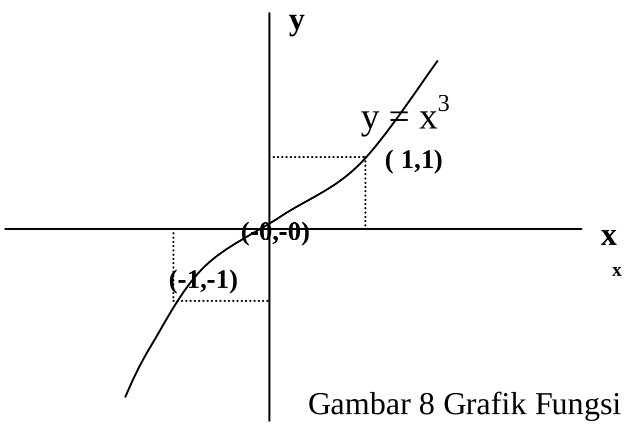
fungsi $y = -x^2 -x +2$, mempunyai harga $D = (-1)^2 – 4.(-1).(2) = 1 + 8 = 9$

$$P\left(\frac{-\mathbf{b}}{2\mathbf{a}}, \frac{-\mathbf{D}}{4\mathbf{a}}\right) = \left(\frac{-1}{2}, \frac{-9}{-4}\right) = \left(-\frac{1}{2}, -2\tfrac{1}{4}\right)$$

c). untuk harga $n = 3 \longrightarrow p_3(x) = a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x^1 + a_3$, ***disebut fungsi kubik atau disebut juga fungsi pangkat 3.***

Misalkan terdapat fungsi $y = x^3$

x	0	1	-1	0,5	-0,5	2	-2
y	0	1	-1	0,125	-0,125	8	-8



Gambar 8 Grafik Fungsi Kubik

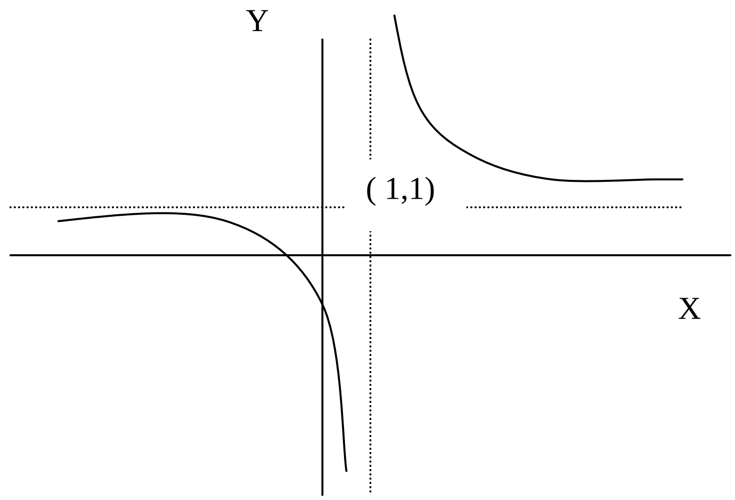
***2). Fungsi Rasional** :*

Sifat dari bilangan rasional adalah bilangan dapat dibentuk dalam $\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}}$, untuk $b \neq 0$

Sesuai dengan sifat bilangan rasional maka fungsi rasional juga berbentuk $h(x) = \frac{\mathbf{f(x)}}{\mathbf{g(x)}}$, misalkan terdapat fungsi rasional : $y = \frac{\mathbf{x}+1}{\mathbf{x}-1}$, gambarkan grafik fungsinya :

$$y = \frac{x-1+2}{x-1} = 1 + \frac{2}{x-1}$$

X	0	1	± ∞	-1	2	-3
Y	-1	± ∞	1	0	3	0,5



Gambar 9 Grafik Fungsi Rasional

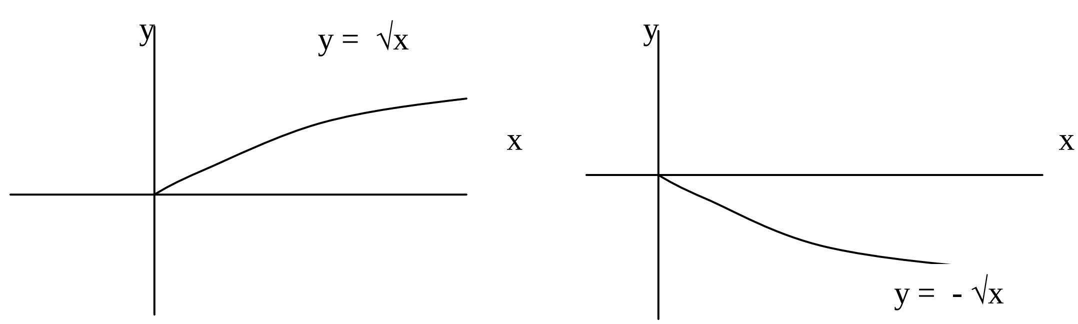
Sumbu x = 1 dan y = 1 merupakan asimtot dari dgrafik fungsi $y = \frac{x-1+2}{x-1}$

3). ***Fungsi Irrasional :***

Sifat dari bilangan irrasional adalah bilangan yang terbentuk dalam tanda akar, atau dibawah tanda akar. Sesuai dengan sifat-sifat bilangan irrasional.

Contoh : fungsi $y = \sqrt{x}$ dan $y = -\sqrt{x}$, untuk harga $x \geq 0$

Grafik Fungsinya :



Gambar 10 Grafik Fungsi Irrasional

b. Fungsi Transenden

Fungsi Transenden terdiri dari fungsi Trigonometri, Fungsi Invers Trigonoimetri, Fungsi Logaritma dan Fungsi Exponen.

Fungsi Trigonometri dan Fungsi Invers Trigonometri akan dibahas dalam modul tersendiri.

Fungsi Eksponen dan Fungsi Logaritma

Fungsi logaritma merupakan invers dari fungsi eksponen, begitu juga sebaliknya.

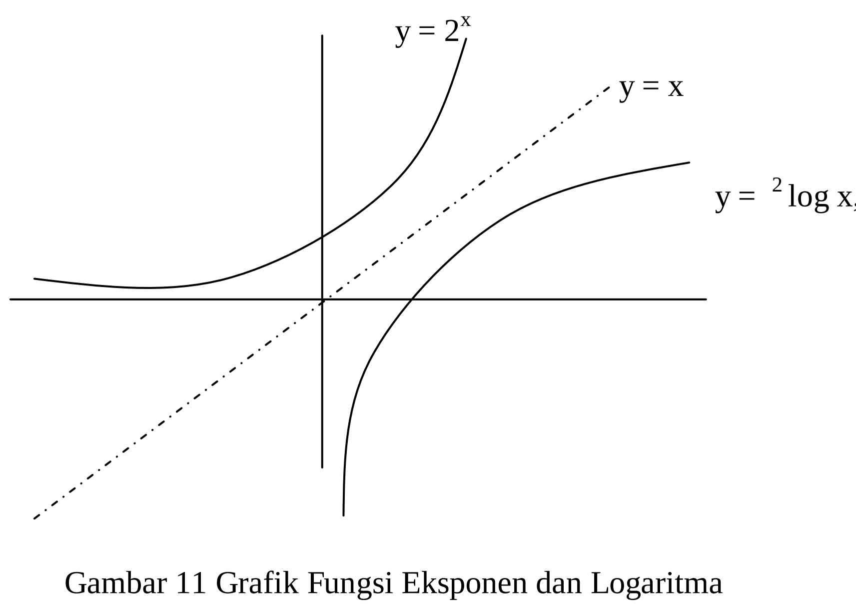
Fungsi $f : x \rightarrow y = f(x) = a^x$ dengan $a > 0$ dan x merupakan bilangan riil, maka fungsi tersebut disebut sebagai fungsi exponen.

$y = 2^x$

x	0	$-\infty$	1	-1	-2	2
2^x	1	0	2	½	¼	4

$y = {}^2\log x$,

x	1	2	½	0	¼
${}^2\log x$	0	1	-1	∞	-2



Gambar 11 Grafik Fungsi Eksponen dan Logaritma

Fungsi eksponen seperti Gambar 11 diatas mempunyai invers, yaitu :

$f^{-1} : y \rightarrow x : x = {}^a\log y$ yang disebut sebagai fungsi logaritma. Dengan mengambil x sebagai perubah bebas, diperoleh : $y = {}^a\log x$

Misalkan terdapat fungsi $y = 2^x$ dan $y = {}^2\log x$, tentukan grafik fungsinya

E. PERSAMAAN DAN PERTIDAKSAMAAN

Persamaan dan Fungsi merupakan hal yang sulit untuk dipisahkan karena persamaan merupakan kalimat terbuka yang menggunakan simbul “ = “. Dalam menerangkan fungsi di atas sudah mengandung pengertian “persamaan” seperti definisinya. Dalam menerangkan persamaan biasanya menyinggung grafik fungsi yang merupakan kurva yang merupakan himpunan titik titik yang tak berhingga membentuk tampakan suatu garis atau kurva. Fungsi pada saat diberi harga tertentu maka akan menjadi suatu persamaan.

Suatu persamaan dan tidak persamaan akan mempunyai harga yang sama atau tidak berubah apabila : 1) kedua ruas sama sama ditambahkan atau dikurangi dengan harga tertentu; dan 2) kedua ruas sama sama kalikan atau dibagi dengan harga tertentu.

1. Persamaan.

   a. Persamaan Linier.

      Persamaan linier merupakan persamaan dengan bentuk y = mx + c, dimana merupakan gradien atau kemiringan dan c merupakan titik di garis x=0 dan y=c

      (uraian lebih lanjut sudah diterangkan pada fungsi linier pada hal 20 dan selanjutnya)

   b. Persamaan Kwadrat.

      Persamaan kwadrat merupakan persamaan dengan bentuk $y=ax^2 + bx + c$, dimana persamaan ini mempunyai maksimum mempunyai 2 buah akar. Persamaan ini menggunakan rumus abc untuk menentukan harga dari akar akarnya. Rumus abc yaitu $x_{1,2} = (-b \pm \sqrt{(b^2-4.ac)})/2a$, dan harga $\sqrt{(b^2-4.ac)} = D$ maka rumus abc dapat juga ditulis sebagai $x_{1,2} = (-b \pm \sqrt{D})/2a$.

      Jika harga D > 0 (positif) maka persamaan kwadrat akan mempunyai 2 akar nyata (riil) dan berbeda, Jika D = 0 maka persamaan kwadarat akan mempunyai 1 akar atau 2 akar dengan harga yang sama, dan jika D<0 (negatif) maka persamaan kwadrat akan mempunyai 2 akar yang imajiner (tidak nyata).

2. Pertidaksamaan.

Pertidaksamaan merupakan kalimat terbuka dengan simbul " >", " ≥", "<", dan "≤"

a. Pertidak samaan linier :

Pertidaksamaan linier adalah suatu kalimat terbuka yang menggunakan simbul salah satu pertidaksamaan dengan pangkat paling tinggi persamaannya adalah satu. Bentuk umumnya adalah $ax+b > 0$, $ax+b<0$, $ax+b \geq 0$ atau $ax+b \leq 0$.

Suatu pertidaksamaan linier apabila kedua ruas sistem pertidaksamaan masing masing ditambah, dikurangi, dikali atau di bagi dengan bilangan positif yang sama maka tanda sistem pertidaksanaan tidak berubah.

Suatu pertidaksaman jika kedua ruas sistem pertidaksamaan masing masing dikali atau dibagi dengan dengan bilangan negatif yang sama maka tanda sistem tidak berubah.

Contoh :

a. Tentukan himpunan penyelesaian dari pertidaksanaan $3x+8 \leq 6x - 2$

Jawab : $4x+10 \leq 8x - 2$, kedua ruas dikurangi dengan 8x

$-4x+10 \leq -2$ kedua ruas dikurangi dengan 10

$-4x \leq -8$ kedua ruas dibagi dengan -4

$-x \leq -8/4$, atau $x \geq 8/4$ atau $x \geq 2$

b. Cari himpunan penyelesaian untuk pertidaksamaan $x^2 + 4x - 12 > 0$

jawab :

$x^2 + 4x - 12 > 0 \Leftrightarrow (x+6)(x-2) > 0 \Leftrightarrow$ harga $x_1=-6$ dan $x_2= 2$

pertidaksamaan $x^2 + 4x - 12 > 0$ dengan himpunan penyelesaian $x > 2$ dan $x < -6$

Latihan

1. Nyatakan dalam koordinat kutub :
   a. (2, -2)
   b. ($\sqrt{2}$, - 2$\sqrt{2}$)
   c. $x^2 + y^2 = 6$
   d. $2x - y = 6$

2. Nyatakan dalam koordinat kartesius :
   a. (4, 135^0)   b. (6, -210^0)

3. Lukislah grafik fungsi : $x – 2y + 4 = 0$ dan $x + 2y = 2$

4. Lukislah persamaan garis lurus yang melalui titik (2,2) dan melalui perpotongan garis $2x + y – 4 = 0$ dan $2x - 3y + 8 = 0$

5. Persamaan yang melalui titik potong kedua garis $x – 3y – 4 = 0$ dan $3x + 3y + 12=0$ serta tegak lurus pada garis yng melalui titik (0, 4) dan (3, -1)..

6. Lukiskan grafik fungsi dan cari persamaan garis lurus yang melalui perpotongan parabola $y = x^2 + 4x -12$ dan grafik fungsi $y = -x^2 + 9$

7. Lukiskan grafik fungsi dan cari persamaan garis lurus yang melalui perpotongan parabola $y = -x^2 + 4x$ dan grafik fungsi $y = x^2 - 4$

8. Fungsi kwadrat yang melalui titik (1, 0) dan mempunyai maksimum (2, 3). Tentukan persamaan kwadrat tersebut.

9. Tentukan harga x yang memenuhi dari pertidaksamaan $7x – 8 \geq 5x + 2$

10. Tentukan himpunan penyelesaian dari pertidaksamaan $x^2 + 5x -6 > 0$

MODUL II

GEOMETRI

Materi pokok ke 2 akan mempelajari tentang geometri. Materi pokok ini memuat materi tentang pengertian atau definisi dari geometri, lingkaran, ellips, dan transformasi geometri. Dalam pengertian geometri akan dijelaskan mengenai 1) titik, garis, bidang dan ruang, 2) hubungan titik, garis dan bidang dalam ruang, 3) jarak antara titik, garis dan bidang, baik berupa jarak titik dengan titik, jarak titik dengan garis, jarak garis dengan garis, jarak garis dengan bidang atau jarak bidang dengan bidang. Variasi sudut misalnya sudut antara garis dan bidang, dan sudut antara bidang dengan bidang. Dalam lingkaran akan diterangkan tentang definisi dari lingkaran, termasuk elemen-elemen dalam lingkaran misalnya titik pusat, jari-jari, diameter, tali busur, busur, keliling lingkaran, tembereng, juring dan cakram. Didalam mempelajari lingkaran tidak dibahas mengenai persamaan lingkaran, karena sudah dihasa dalam fungsi dan persamaan pada materi pokok pertama.

Dalam mempelajari geometri diperlukan ilmu dasar yang mendukung dalam pemahamannya. Penguasaan trigonomeri serta pemahaman tentang fungsi dan persamaan diperlukan untuk kelancaran dalam mempelajari materi pokok ini.

Dalam mempelajari mata kuliah pengukuran banyak ditekankan pada pengetahuan tentang   koordinat, baik menggunakan koordinat kutub atau koordinat kartesius, pengertin tentang sudut serta fungsi-fungsi trigonomerinya,   serta perhitungan luas yang berdasarkan panjang/ jarak maupun luasan berdasarkan ketentuan yang lain baik berupa data hasil pengukuran maupun dari hasil perhitungan.

A. PENGERTIAN GEOMETRI

Kata **Geometri** berasal dari bahasa Yunani yaitu geo = bumi, metria = pengukuran, secara harafiah berarti pengukuran tentang bumi, adalah cabang dari matematika yang mempelajari hubungan di dalam ruang. Dari pengalaman, atau mungkin secara intuitif, orang dapat mengetahui ruang dari ciri dasarnya, yang diistilahkan sebagai aksioma dalam geometri.

Catatan paling awal mengenai geometri dapat ditelusuri hingga ke jaman Mesir kuno, peradaban Lembah Sungai Indus dan Babilonia. Peradaban-peradaban dari bangsa ini diketahui memiliki keahlian dalam drainase rawa, irigasi, pengendalian banjir dan pendirian bangunan-bagunan besar. Kebanyakan geometri pada jaman Mesir kuno dan Babilonia terbatas hanya pada perhitungan panjang segmen-segmen garis, luas, dan volume. Geometri merupakan cabang ilmu matematika mempunyai kegunaan yang penting dalam menunjang mata kuliah yang berhubungan dengan pengukuran. Geometri mempelajari pengetahuan tentang titik, garis, dan bidang dalam demensi satu, demensi dua dan demensi 3, beserta sudut, jarak, dan luasan tertentu.

1. Titik, Garis, Bidang, dan Ruang

Dalam membahas geometri pengertian garis, bidang dan ruang sangat lah penting. Yang dimaksudkan dengan garis adalah garis lurus yang merupakan himpunan titik-titik yang dihubungkan menjadi satu garis lurus. Bidang dalam pembahasan ini merupakan bidang datar yang merupakan himpunan garis-garis, dan yang dimaksudkan dengan ruang merupakan himpunan dari bidang-bidang.

Garis, bidang, dan ruang secara berturut-turut disebutkan sebagai ruang berdemensi 1, ruang berdemensi 2, dan ruang berdemensi 3, dan masing-masing ditandai dengan satu sumbu untuk ***garis,*** dua sumbu saling tegak lurus disebut *bidang datar*, dan tiga sumbu yang saling tegak lurus disebut sebagai ***ruang***.

Garis, bidang, dan ruang erat kaitannya dengan sistem koordinat kartesius. Satu titik pada garis ditentukan oleh satu komponen, bidang dikaitkan dengan dua komponen yaitu sumbu x dan y dengan koordinat (x, y), sedangkan ruang mengkaitkan tiga komponen yaitu sumbu x, sumbu y, dan sumbu z dengan koordinat (x. y, z).

a. Hubungan antara titik, garis dan bidang dalam ruang

1). Hubungan titik dengan garis dan bidang.

Diberikan titik A, garis g, dan bidang α, kemungkinan yang terjadi adalah :

$A \in g$ (A terletak pada g) atau $A \notin g$ (A terletak diluar g), dan

$A \in \alpha$ (A terletak pada α) atau $A \notin \alpha$ (A terletak diluar α)

2). Hubungan garis dengan garis

Diberikan garis g dan garis h didalam satu ruang, garis g dan h ditentukan paling sedikit oleh dua titik yang berlainan.

Hubungan antara g dan h kemungkinan akan terjadi adalah :

1. Garis g dan m berimpit, $g \cap h = g = h \neq 0$
2. Garis g dan m berpotongan, $g \cap h \neq P \neq 0$, P merupakan titik persekutuan
3. Garis g dan m sejajar, $g \cap h = 0$
4. Garis g dan m bersilangan, $g \cap h = 0$

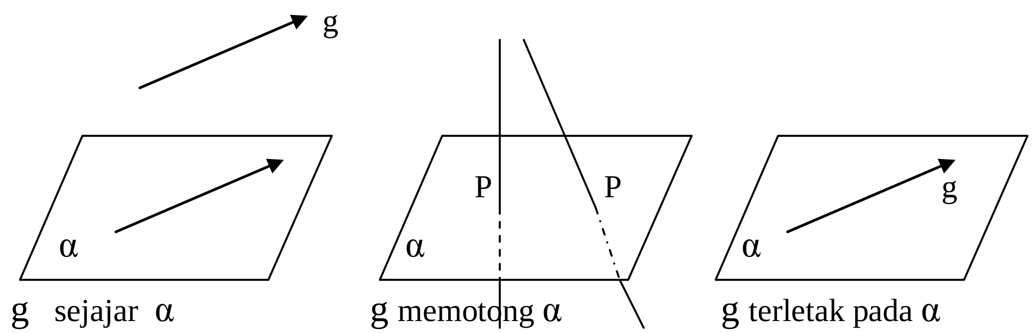
3). Hubungan garis dengan bidang

Diberikan garis g dan bidang α didalam suatu ruang, maka kemungkinan yang dapat terjadi adalah :

1. garis g sejajar dengan bidang α, $g \cap \alpha = 0$
2. garis g memotong bidang α, $g \cap \alpha = (P)$
3. garis g terletak pada bidang α, $g \cap \alpha = g$

ketentuan :

1. garis g dikatakan sejajar dengan bidang α bila garis sejajar dengan suatu garis yang terletak pada α , $g \parallel \alpha \Leftrightarrow \exists\, h$ pada $\alpha \ni g \parallel h$
2. garis g dikatakan tegak lurus terhadap bidang α bila garis g tegak lurus pada setiap garis yang terletak pada α. $g \perp \alpha \Leftrightarrow g \perp h$ pada α
3. Suatu bidang datar ditentukan oleh : 1) tiga buah titik yang tidak segaris, 2) satu buah titik dan satu buah garis yang tidak melalui titik tersebut, 3) dua buah garis yang berpotongan atau sejajar.



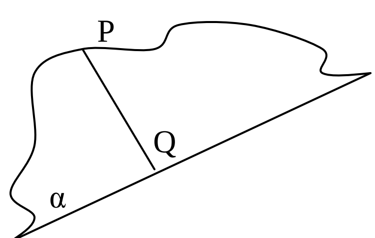
Gambar 1 Hubungan garis dengan bidang

2. Jarak Titik, Garis, dan Bidang

a. Jarak antara titik dengan garis

Diberikan titik P dan garis m, akan ditentukan jarak antara titik P dan garis g bila $P \notin m$.

Melalui melalui titik P dan garis m dapat dibuat bidang α. Pada bidang α buatlah garis yang melalui P dan tegak lurus garis m sehingga memotong garis m dititik Q. Maka PQ merupakan jarak antara titik P dan garis l.



α = bidang (P, m)

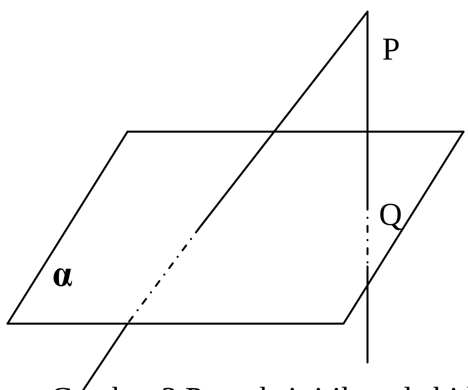
PQ = jarak (P, m)

Gambar 2 Jarak bidang

b. Jarak antara titik dengan bidang

Diberikan titik P dn bidng α, akan digunkan jarak antara titik P kebidang α bila P $\notin$ α.

Melalui titik P dapat dibuaat tak hingga banyaknya garis yang memotong bidang α, satu diantaranya akan memotong tegak lurus bidang α di Q. Garis PQ tegaak lurus bidang α, garis PQ tegak lurus bidaang α , garis PQ adalah jarak antara titik P kebidang α



Q = Proyeksi P pada α

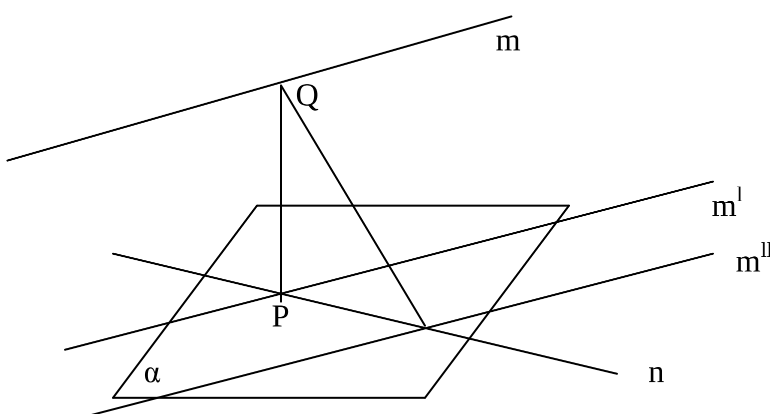
PQ $\perp$ α

PQ = jarak (P, α)

Gambar 3 Proyeksi titik pada bidang

c. Jarak antara garis dan garis

Diberikan garis m dan garis n, akan ditentukan jarak antara garis m dan garis n. bila m memotong n, atau m berimpit dengan n maka jarak antara m dan n adalah nol.



Gambar 4 Jarak garis dengan garis

misalkan m bersilangan dengan n, maka akan dapat dibuaat tak hingga garis m^l yang sejajar dan memotong. Lalu buatlah bidang α yang dibentuk oleh garis-garis m^l dan n. Garis m akan sejajar dengan bidang α, karena m sejajaar dengan m^l, dengan m^l pada bidang α . Proyeksikan m pada bidang α maka akan terbentuk garis m^{ll} pada α sehingga akan berlaku bahwa m sejajar dengan m^l dan sejajar jugaa dengan m^{ll} seperti pada gambar diatas.

Melalui titik P dapat dibuat garis yang tegak lurus bidang α dan memotong m di Q. Garis PQ merupakan garis yang tegak lurus persekutuan dari garis m dan garis n. Garis PQ merupakan jarak dari garis m ke garis n.

d. Jarak antara garis dan bidang.

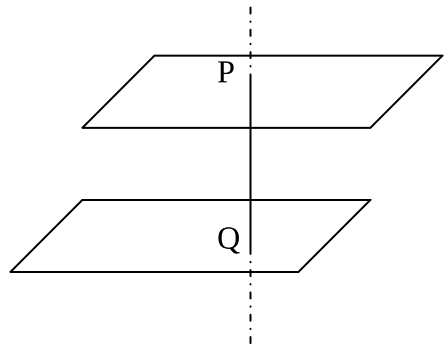
Pandang suatu garis m pada bidang α, akan dicari jarak antara garis m dan bidang α. Apabila garis m terletak pada bidang α, atau memotong bidang α, maka jaraknya akan sama dengan nol.

Apabila m sejajar dengan bidang α, maka proyeksi garis m pada bidang α, adalah suatu garis pada bidang α, namakan garis tersebut adalah garis m^l. Jarak antara garis m dan garis m^l merupakan jarak antara garis m tersebut dengan bidang α

Pada gambar diatas maka PQ merupakan jarak antara garis m dengan bidang α

Jarak antara bidang dengan bidang.

Pandanglah suatu bidang α dan bidang β dan akan ditentukan jarak antara bidaang α dan bidang β. Apabila bidang α dan bidang β berimpit atau berpotongan maka jarak antara bidang α dan bidang β adalah nol. Apabila kedua bidang tersebut sejajar, dan titik P pada bidang α dan titik Q pada bidang β, maka PQ merupkan jarak kedua bidang tersebut.

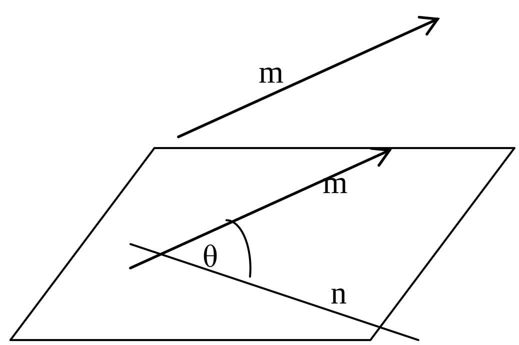


Gambar 5 Jarak Bidang dengan bidang

3. Sudut antara garis dan bidang

a. Sudut antara garis yang saling bersilangan

Pandang suatu garis m dan n, garis m dan n tersebut saling bersilangan, dan akan dicari sudut antara kedua garis yang bersilangan tersebut. Pertama buatlah garis m^1 yang sejajar m sehingga m^1 memotong n, kemudian buatlah bidang α yang melalui m^1 dan n. Sudut antara m^1 dan n, ditulis $\theta = \llcorner (m^1, n)$ adalah sudut antara garis m dan n ($0 \leq \theta \leq 90^0$)

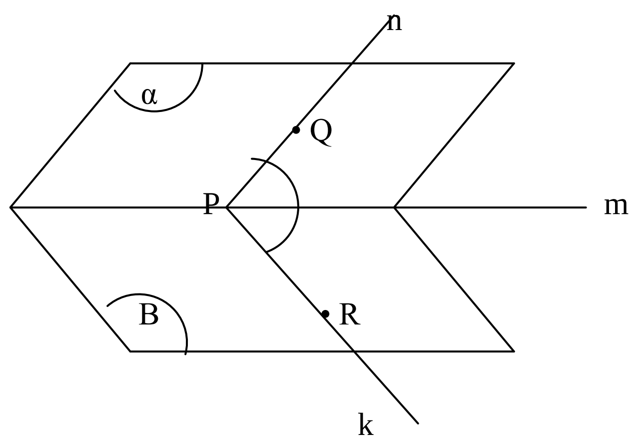


Gambar 5 Sudut antara garis dan garis

2. Sudut antara bidang dan bidang

Diberikan bidang α dan bidang β, akan ditentukan sudut antara bidang bidang α dan bidang β.

Bila bidang α sejajar atau berimpit dengan bidang β, maka sudut antara bidang α dan bidan β adalah nol, ditulis ∟(α, β) = 0. Bila bidang α memotong bidang β menurut garis m, pilihlah suatu titik P pada m. Melalui titik P dibuat garis n pada bidang α dan k pada bidang β yang masing-masing tegak lurus m. Pilih titik Q pada n dan titik R pada k. Maka ∟QPR = ∟(α, β). Sudut ini sering disebut sudut tumpuan bidang α dan bidang β.



Gambar 6 Sudut antara bidang dan bidang

B. LINGKARAN

Sebuah lingkaran adalah himpunan semua titik pada bidang dalam jarak tertentu, yang disebut jari-jari, dari suatu titik tertentu, yang disebut pusat. Lingkaran adalah contoh dari kurva tertutup sederhana, membagi bidang menjadi bagian dalam dan bagian luar.

Elemen-elemen yang terdapat pada lingkaran, yaitu sbb:

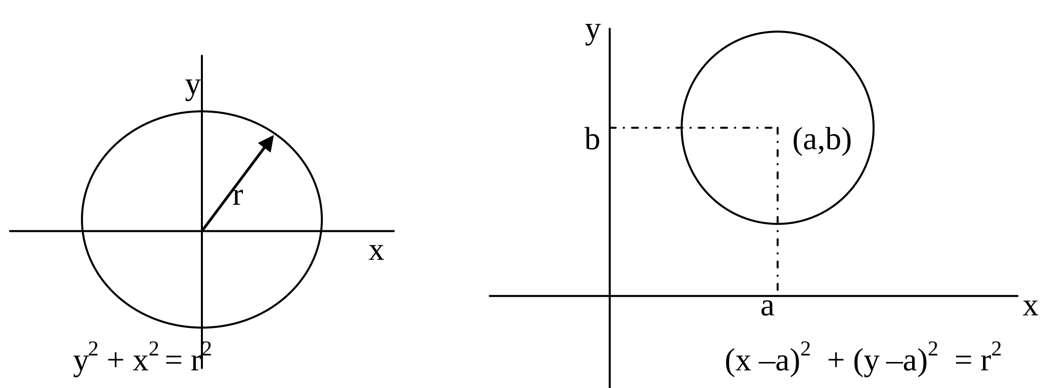
Elemen lingkaran yang berupa titik, yaitu : **Titik pusat** (**P**) merupakan sebuah titik di dalam lingkaran yang menjadi acuan untuk menentukan jarak terhadap himpunan titik yang membangun lingkaran sehingga sama. Jarak antara titik pusat dengan lingkaran harganya konstan dan disebut jari-jari.

Elemen lingkaran yang berupa garisan, yaitu : 1) **Jari-jari** (**R**) merupakan garis lurus yang menghubungkan titik pusat dengan lingkaran.2). **Tali**

busur merupakan garis lurus di dalam lingkaran yang memotong lingkaran pada dua titik yang berbeda. **Busur** merupakan garis lengkung baik terbuka, maupun tertutup yang berimpit dengan lingkaran. **Keliling lingkaran** merupakan busur terpanjang pada lingkaran. **Diameter** merupakan tali busur terbesar yang panjangnya adalah dua kali dari jari-jarinya. Diameter ini membagi lingkaran sama luas.

Elemen lingkaran yang berupa luasan, yaitu : 1) **Juring** merupakan daerah pada lingkaran yang dibatasi oleh busur dan dua buah jari-jari yang berada pada kedua ujungnya. 2). **Tembereng** merupakan daerah pada lingkaran yang dibatasi oleh sebuah busur dengan tali busurnya. 3) **Cakram** merupakan semua daerah yang berada di dalam lingkaran. Luasnya yaitu jari-jari kuadrat dikalikan dengan pi (Π). Cakram merupakan juring terbesar.

Lingkaran adalah suatu bentuk kurva yang tertutup yang merupakan himpunan dari titik-titik yang mempunyai jraak yang sama dari titik pusat. Jarak yang sama dari titik pusat (titik 0) tersebut dinamakan ***jari-jari*** (r). Sedangkan jarak titik pada suatu kurva dengan titik pada kurva lainnya yang melalui titik pusat dinamakan ***diameter***. lainnya pada Lingkaran jika dihubungkan dengan sistem koordinat kartesius berupa sumbu x dan y dengan persamaan $y^2 + x^2 = r^2$ atau $(x – a)^2 + (y – a)^2 = r^2$



Gambar 7 Lingkaran

secara umum persamaan lingkaran mempunyai persamaan :

$y^2 + x^2 + 2ax + 2by + c = 0$

persamaan tersebut diatas mempunyai pusat di P (-a, -b) dan $r = \sqrt{(a^2 + b^2 - c)}$

dari persamaan lingkaran dapat diperluas hal-hal berupa :

1. $y^2 + x^2 + 2ax + 2by = 0$, merupakan persamaan lingkaran yang mempunyai pusat di P (-a, -b) dengan jari-jari $r = \sqrt{(a^2 + b^2)}$
2. $y^2 + x^2 + 2ax + c = 0$, merupakan persamaan lingkaran yang mempunyai pusat di P (-a, 0) dengan jari-jari $r = \sqrt{(a^2 - c)}$
3. $y^2 + x^2 + 2by + c = 0$, merupakan persamaan lingkaran yang mempunyai pusat di P (0, -b) dengan jari-jari $r = \sqrt{(b^2 - c)}$

1. Cara menentukan Pusat dan jari-jari lingkaran

Tentukan Pusat dan jari-jari lingkaran jika $x^2 + y^2 + 6x - 4y - 14 = 0$

Pusat lingkarannya P (2b, 2a) → P (6/2 , -4/2) maka P (3, -2)

dengan jari-jari $\sqrt{(9 + 4 - (-14))} = \sqrt{27}$

Persamaan lingkaran diatas mempunyai Pusat di P (3, -2) dan jari-jari $r = \sqrt{27}$

2. Lingkaran sebagai tempat kedudukan

Perbandingaan jarak titik P (x, y) terhadap dua titik tetap yang diberikan tidak sama, maka kedudukan titik pusat tadi adalah suatu lingkaran

Diketahui suatu titik A (2, -3) dan B (-2, 4) tentukan tempat kedudukan titik P (x, y) sehingga terdapat hubungan $\overline{\mathbf{PA}} : \overline{\mathbf{PB}} = 1 : 2$ Persamaan tempat kedudukan dinyatakan sebagai

$\{ (x, y) \mid 3\ \overline{\mathbf{PA}} = \overline{\mathbf{PB}} \} \Leftrightarrow$

$\{ (x, y) \mid 9\overline{\mathbf{PA}}^2 = \overline{\mathbf{PB}}^2 \} \Leftrightarrow$

$\{ (x, y) \mid 4 [(2 - x)^2 + (-3 - y)^2] = (-2 - x)^2 + (4 - y)^2 \} \Leftrightarrow$

$\{ (x, y) \mid 4 [(4 - 4x + x^2) + (9 - 6y + y^2)] = (4 - 4x + x^2 + 16 - 8y + y^2) \}$

$\{ (x, y) \mid (16 - 16x + 4x^2 + 36 - 24y + 4y^2 = 4 - 4x + x^2 + 16 - 8y + y^2 \} \Leftrightarrow$

$\{ (x, y) \mid (25 - 16x + 4x^2 - 24y + 4y^2 = 20 - 4x + x^2 + 16 - 8y + y^2 \} \Leftrightarrow$

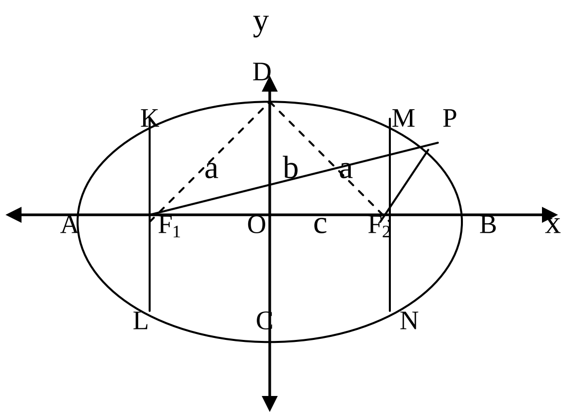
{ (x, y) | ($3x^2 + 3y^2 - 12x - 16y + 5 = 0$ }

Persamaan lingkaran sebagai tempat kedudukan lingkaran dengn persamaan

$3x^2 + 3y^2 - 12x - 16y + 5 =$

C. ELLIPS

Ellips merupakan suatu bangun yang merupakan himpunan titik- titik dengan ketentuan bahwa jumlah jarak setiap titik terhadap dua titik tertentu yang bukan merupakan anggota himpunan tersebut adalah tetap. Kedua titik tertentu tadi disebut sebagai titik focus yang didefinisikan sebagai F_1 dan F_2. Sedangkan jumlah jarak tetapnya adalah 2a (untuk a>0) dan jarak F_1 dan F_2 adalah $\overline{F_1F_2} = 2c$



Titik P (x, y) merupakan titik sembarang pada ellips.

$F_1P + F_2P = 2a$

titik pusat ellips O (0,0)

titik focus ellips F_1 (-c, 0) dan F_2 (c, 0)

titik A (-a, 0) dan B (a, 0)

titik D (0, b) dan C (0, -b)

Gambar 8 Ellips

Sumbu mayor adalah sumbu yang melalui tiik F_1 dan F_2 yang mempunyai panjang |AB| = 2a, sedangkan sumbu minor adalah sumbu yang melalui titik pusat dan tegak lurus terhadap sumbu mayor sepanjang |CD| = 2b.

Sumbu utama disebut juga ***transvers axis*** merupakan sumbu simetri yang melalui F_1 dan F_2 adalah sumbu X

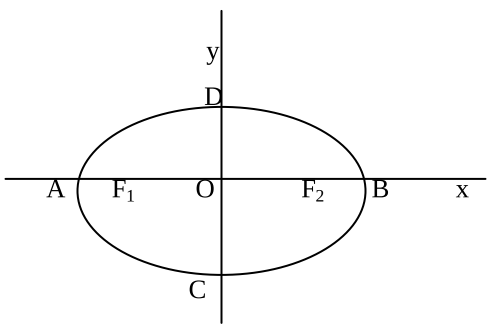
Sumbu sekawan disebut juga ***conjugate axis*** merupakan sumbu simetri yang merupakan garis sumbu $F_1 F_2$

Titik A (-a, 0) dan B (a, 0) merupakan titik potong ellips dengan sumbu mayor, dan

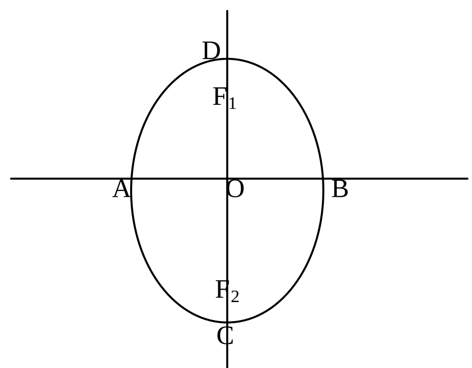
Titik D (0, b) dan C (0, -b) merupakan titik potong ellips dengan sumbu minor Garis KL dan NM merupakan ***Latus rectum*** berbentuk garis fertikal yang melalui F_1 dan F_2 dan tegak lurus sumbu mayor dan memotong ellips dititik K, L, M, dan N. Panjang Latus rectum KL dan MN = $(2b^2) / a$ dan koordinat titik-titik ujung Latus rectum adalah:

K ($-c, -b^2/a$), L ($-c, b^2/a$) , M (($c, b^2/a$) dan N ($c, -b^2/a$)

Δ DOF_2 merupakan segitig siku-siku dititik O dan berlaku $a^2 = b^2 + c^2$



8 (a)



8 (b)

Gambar 9 Sumbu utama dan Sumbu sekawan Ellips

a. Persamaan Ellips melalui sumbu pusat dan berpusat O (0, 0) apabila seperti terlukis pada gambar 8(a) adalah :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \text{atau} \quad b^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2,$$

dengan sumbu utama adalah sumbu X

b. Persamaan Ellips melalui sumbu pusat dan berpusat O (0, 0) apabila seperti terlukis pada gambar 8(b) adalah :

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1, \text{ atau } a^2 x^2 + b^2 y^2 = a^2 b^2,$$

dengan sumbu utama adalah sumbu Y

c. Persamaan Ellips berpusat di titik P (p, q) dan bentuknya seperti gambar 8(a) adalah :

$$\frac{(x-p)^2}{a^2} + \frac{(y-q)^2}{b^2} = 1, \text{ atau } b^2 (x-p)^2 + a^2 (y-q)^2 = a^2 b^2,$$

dengan sumbu utamanya adalah y = q

c. Persamaan Ellips berpusat di titik P (p, q) dan bentuknya seperti gambar 8(b) adalah :

$$\frac{(x-p)^2}{b^2} + \frac{(y-q)^2}{a^2} = 1, \text{ atau } a^2 (x-p)^2 + b^2 (y-q)^2 = a^2 b^2,$$

dengan sumbu utamanya adalah x = p

D. TRANSFORMASI GEOMETRI

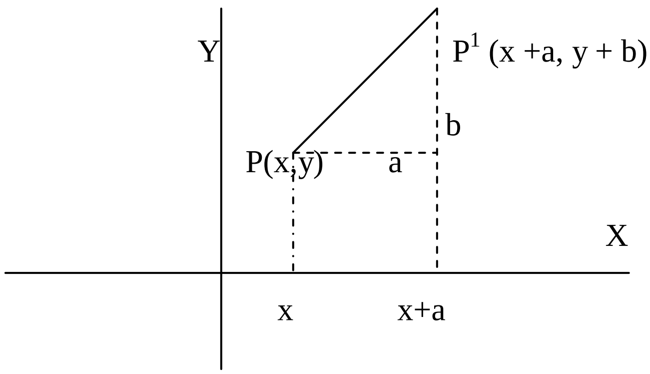
Transformasi Geometri adalah suatu pemetaan titik (x, y) menjadi (x^1, y^1) pada bidang yang sama, pemetaan tersebut ditulis T : (x, y) $\rightarrow$ (x^1, y^1).

Pemetaan Geometri terdiri dari :

1. Jenis- jenis Transformasi Geometri

a. **Transformasi Translasi** atau pergeseran. Transformasi ini adalah pemindahan suatu objek sepanjang garis lurus dengan arah dan jarak tertentu.

Jika translasi T = $\begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix}$ memetkan titik P (x, y) ketitik P^1 (x^1, y^1), maka x^1=x+a, dan y^1=y + b, atau P^1 (x+a, y+b)



Gambar 9 Transformasi Translasi

b. **Transformasi Refleksi** atau pencerminan. Merupakan transformasi yang memindahkan setiap titik pada bidang dengan menggunakan sifa bayangan cermin dari-titik-titik yang hendak dipindahkan.

Pada suatu transformasi refleksi, segmen garis yang menghubungkn setiap dengan hasil refleksi akan terbagi 2 dan tegak lurus pada sumbu refleksinya.

c. **Transformasi Rotasi** atau perputaran.Rotasi pada bidang geometri ditentukan oleh titik pusat, besar sudut, dan arah sudut rotasi. Suatu rotasi dikatakan mempunyai arah positif jika rotasinya berlawanan arah dengan arah perputaran jarum jam. Dan rotasi dikatakan negative apabila rotasi searah dengan perputaran arah jarum jam.

d. **Transformasi Dilatasi** atau perbesaran atau perkalian. Dilatasi merupakan jenis transformasi geometri yang mengubah ukuran (memperbesar atau memperkecil) ukuran suatu bangun, tetapi tidak merubah bentuk bangun yang bersangkutan. Dilatasi ditentukn oleh titik pusat dan factor dilatasi. Dilatasi yang berpusat dititik

(0,0) dan titik sembarang P(x, y) dengan masing-masing factor skala k akan dilambangkan berturut-turut sebagai [0, k], dan [P, k]

2. Matrik Tranformasi Geometri

a. Matrik Transformasi Pencerminan

Tabel 1 Matrik Transformasi Refleksi

No	Transformasi Refleksi	Hasil Pemetaan	Jenis Matrik
1	Pencerminan terhadap sumbu x	$(x,y) \rightarrow (x, -y)$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
2	Pencerminan terhadap sumbu y	$(x,y) \rightarrow (-x, y)$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
3	Pencerminan terhadap sumbu y= x	$(x,y) \rightarrow (y, x)$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
4	Pencerminan terhadap sumbu y= - x	$(x,y) \rightarrow (-y, -x)$	$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$
5	Pencerminan terhadap sumbu y = -x	$(x,y) \rightarrow (-x, -y)$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

b. Matrik Transformasi Dilatasi

1). Titik P (x, y) akan dipetakan menjadi P^1 (x^1, y^1) oleh perbesaran [0, k]

$$\begin{pmatrix} x^1 \\ y^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

2). Titik P (x, y) akan dipetakan menjadi P^1 (x^1, y^1) oleh perbesaran [A, k] dengan pusat A (a, b)

$$\begin{pmatrix} x^1 \\ y^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-a \\ y-b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

c. Matrik Transformasi Rotasi

Tabel 2 Matrik Transformasi Rotasi

No	Transformasi Rotasi	Hasil Pemetaan	Jenis Matrik
1	Rotasi terhadap titik asal O (0, 0) sebesar 90^0	$(x,y) \rightarrow (-y, x)$	$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
2	Rotasi terhadap titik asal O (0, 0) sebesar - 90^0	$(x,y) \rightarrow (-y, -x)$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$
3	Rotasi terhadap titik asal O (0, 0) sebesar 180^0	$(x,y) \rightarrow (-x, -y)$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
4	Rotasi terhadap titik asal O (0, 0) sebesar α	$(x,y) \rightarrow (x^1, y^1)$	$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$

LATIHAN

1. Dalam Kubus ABCD.EFGH, dengan pnjang rusuk 6 m . Tentukanlah jarak Titik B ke bidang ACF :

2. Kubus ABCD.EFGH seperti pada no 1. Tentukan panjang diagonal ruang BH

3. Kubus ABCD.EFGH seperti pada no 1. Tentukan jarak antara garis AF dan garis CH

4. Kubus ABCD.EFGH seperti pada no 1. Tentukan sudut antara BDG dan BDHF.

5. Kubus ABCD.EFGH seperti pada no 1. Tentukan jarak antara bidang AFH dan bidang BDG

6. Tentukan titik pusat dan jari jari lingkaran, dengan persamaan :

$y^2 + x^2 + 4x - 6y = 0$

7. Tentukan titik pusat dan jari jari lingkaran, dengan persamaan :

$y^2 + x^2 + 10y - 11 = 0$

8. Tentukan bayangan titik-titik A (-5, 4) dan B (2, -6) oleh translasi T = $\begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix}$

9. Tentukan bayangan titik P (3, -6) juka dicerminkan terhadap garis y = - x

10. Segitiga ABC, dengan titik-titik A (-2, 2), B (4, 6) dan C (5, -1), akan diputar sebesar 60^0, dari titik asal O (0, 0). Tentukan koordinat segitiga yang baru :

MODUL III

TRIGONOMETRI

Buku materi pokok Matematika ke 3 ini membahas tentang Trigonometri. Disamping dijelaskan tentang trigonomeri juga diberikan materi tentang fungsi siklometri yang merupakan fungsi invers dari fungsi trigonometri. Fungsi trigonometri dan fungsi siklometri mempunyai hubungan yang tak terpisahkan dan saling mendukung.

Materi pokok Trigonometri dibahas tentang pengertian trigonometri, yang merupakan hubungan antara sudut dan ruas garis yang mengapitnya. Fungsi siklometri berkaitan erat dengan fungsi trigonometri. Dalam mempelajari trigonometri akan ditemukan harga besaran dalam bentuk harga desimal, sedangkan fungsi siklometri dalam perhitungannya akan ditemukan harga sudutnya.

Materi ini sangat diperlukan dalam mendukung mata kuliah tentang ilmu ukur tanah dalam kaitannya dengan perhitungan luas dan letak suatu posisi.

Dalam mempelajari trigonometri mahasiswa terlebih dahulu harus dapat menguasai aritmatika dan aljabar yang membahas tentang fungsi dan persamaan. Tanpa pengetahuan yang cukup tentang aritmatika dan aljabar, mahasiswa akan kesulitan dalam memahami materi pokok trigonometri.

Setelah mempelajari materi dalam modul 2 ini diharapkan : 1) mahasiswa dapat menjelaskan tentang definisi sinus, cosinus, tangent, cosecant, secan, dan cotangen, 2) mahasiswa dapat menghitung perhitungan sudut dan persamaan dalam trigonometri, dan 3) mahasiswa dapat menggambarkan grafik fungsi trigonometri dengan baik dan benar..

A. PENGERTIAN TRIGONOMETRI

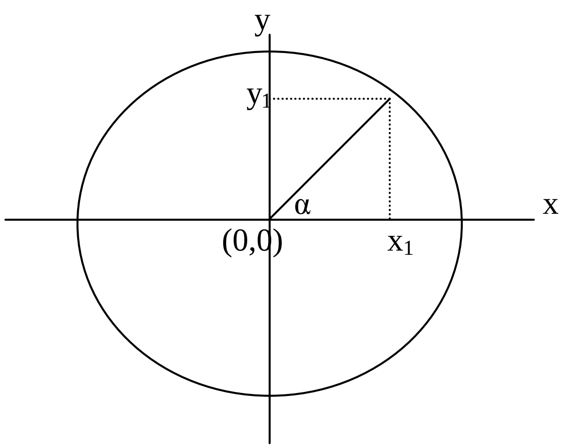
Trigonometri berasal dari bahasa Yunani yaitu *trigonon* yang berarti *tiga sudut* dan *metro* yang berarti *mengukur* merupakan sebuah cabang matematika yang berhadapan dengan sudut segi tiga dan fungsi trigonometrik seperti sinus, cosinus, dan tangen. Trigonometri memiliki hubungan dengan geometri, meskipun ada ketidaksetujuan tentang apa hubungannya; bagi beberapa orang, trigonometri adalah bagian dari geometri.

Awal trigonometri dapat dilacak hingga zaman Mesir Kuno dan Babilonia dan peradaban Lembah Indus, lebih dari 3000 tahun yang lalu. Matematikawan India adalah perintis penghitungan variabel aljabar yang digunakan untuk menghitung astronomi dan juga trigonometri. Lagadha adalah matematikawan yang dikenal sampai sekarang yang menggunakan geometri dan trigonometri untuk penghitungan astronomi dalam bukunya Vedanga, Jyotisha, yang sebagian besar hasil kerjanya hancur oleh penjajah India. Matematikawan Yunani Hipparchus sekitar 150 SM menyusun tabel trigonometri untuk menyelesaikan segi tiga. Matematikawan Yunani lainnya, Ptolemy sekitar tahun 100 mengembangkan penghitungan trigonometri lebih lanjut. Matematikawan Silesia Bartholemaeus Pitiskus menerbitkan sebuah karya yang berpengaruh tentang trigonometri pada 1595 dan memperkenalkan kata ini ke dalam bahasa Inggris dan Perancis.

Ada banyak aplikasi trigonometri. Terutama adalah teknik triangulasi yang digunakan dalam astronomi untuk menghitung jarak ke bintang-bintang terdekat, dalam geografi untuk menghitung antara titik tertentu, dan dalam sistem navigasi satelit.

Diatas telah diterangkan bahwa trigonometri adalah cabang ilmu matematika yang mempelajari hubungan antara sudut pada suatu bidang atau ruang. Sudut dibentuk dari dua garis lurus yang sudah terdefinisi terlebih dahulu. Garis tersebut antar lain garis pada sumbu x, garis pada sunbu y, garis miring, atau garis-garis lain yang mempunyai hubungan antar garis.

Misalkan terdapat suatu lingkaran, pada lingkaran tersebut terdapat garis sumbu x dan garis sumbu y. Dalam lingkaran tersebut terdapat tiga ruas garis, ruas garis sepanjang x dari titik pusat ke x_1, ruas garis sepanjang y dari titik pusat ke y_1, dan ruas garis yang merupakan jari-jari lingkaran, dan sudut yang mengapit sumbu x dan jari-jari yang disebut sebagai sudut α



Gambar 1 Hubungan Lingkaran, Sudut , dan jari-jari

Sinus α didefinisikan sebagai panjang ruas garis didepan sudut α (y) dibagi dengan sisi miringnya atau Sinus α = $\frac{\mathbf{y}}{\mathbf{r}}$, Cosinus α didefinisikan sebagai panjang ruas garis sisi mendatar (x) dibagi dengan sisi miringnya atau Cosinus α = $\frac{\mathbf{x}}{\mathbf{r}}$, dan sedangkan Tangen α didefinisikan sebagai panjang ruas garis didepan sudut α (y) dibagi dengan panjang ruas garis mendatar (x) atau Tangen α = $\frac{\mathbf{y}}{\mathbf{r}}$ atau tg α = sin α / cos α.

Disamping dalam bentuk derajat, satuan sudut dalam trigonometri dikenl satuan sudut dalam bentuk radial disingkat rad. 1 radial ditulis 1 rad, merupakan besar sudut pusat lingkarandengan jari-jari r dan busur r juga.

Besar 1 Π rad = 180^0, besar harga Π = 22/7 = 3,4159

Jika dalam membahas trigonometri harga sudut tidak ditulis berarti harga tersebut dalam radial.

Dalam trigonometri dikenal pengertian tentang kwadran. kwadran merupakan pengelompokan interval sudut dari 0^0 sampai 360^0. interval antara 0^0 sampai kurang dari 90^0 disebut kwadran I, interval antara 90^0 sampai kurang dari 180^0 disebut kwadran II, interval antara 180^0 sampai kurang dari 270^0 disebut kwadran III sedangkan interval antara 270^0 sampai kurang dari 360^0 disebut kwadran IV. Pada definisi kwadran harga 0^0, 90^0, 270^0, dan360^0, tidak termasuk kwadran I,II,III, atau IV. Karena pada sudut tersebut mempunyai harga 0, ~, atau - ~.

Harga positif atau negative dari sinus, cosinus dan tangen seperti terlihat pada table dibawah :

Tabel 1 Tabel Kwadran

	Sinus α	Cosinus α	Tangen α
Kwadran I	+	+	+
Kwadran II	+	-	-
Kwadran III	-	-	+
Kwadran IV	-	+	-

Disamping harga sinus, cosinus dan tangent dikenal juga harga-harga Cosecan atau disebut juga Cosec, Secan disebut juga Sec, dan Cotangen disebut Ctg. Harga Cosec α didefinisikan sebagai :

$$\text{Cosec } \alpha = 1/\sin\alpha = \frac{\mathbf{r}}{\mathbf{y}}$$

$$\text{Sec } \alpha = 1/\cos\alpha = \frac{\mathbf{r}}{\mathbf{x}}$$

$$\text{Ctg } \alpha = 1/\text{tg } \alpha = \cos\alpha / \sin\alpha = \frac{\mathbf{x}}{\mathbf{y}}$$

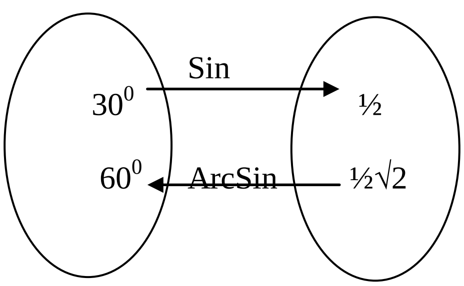
Harga positif atau negative Cosecan, Secan, dan Cotangen pada sudut-sudutnya terlihat seperti pada tabel dibawah ini :

Tabel 2 Tabel Kwadran

	Cosec α	Sec α	Ctg α
Kwadran I	+	+	+
Kwadran II	+	-	-
Kwadran III	-	-	+
Kwadran IV	-	+	-

Harga positif dan negatif suatu fungsi hiperbolik sama dengan fungsi trigonometrinya.

Fungsi trigonometri mempunyai fungsi inversnya. Fungsi invers trigonometri disebut sebagai fungsi siklometri dalam benuk arces. Misalnya invers dari sin α = arcsin α, invers dari cos α = arccos α, dan invers dari tg α = arctg α



$\text{Sin } 30^0 = ½ \quad \rightarrow \quad \text{Arcsin } ½ = 30^0$

$\text{Arcsin } ½\sqrt{2} = 60 \rightarrow \text{ Sin } 60 = ½ \sqrt{2}$

Gambar 2 Hubungan Trigonometri dan Siklometri

Harga-harga trigonometri dapat diperoleh dari table harga, atau menggunakan kalkulator, tetapi harga harga tertentu dapat diperoleh dengan cara mudah dengan sedikit menghapalkan pengertian tertentu. Harga-harga istimewa suatu fungsi trigonometri adalah 0^0, 30^0, 45^0, 60^0, 90^0, dan selang dengan 90^0, misalnya 120^0, 135^0, 150^0, dan sebagainya seperti pada tabel dibawah :

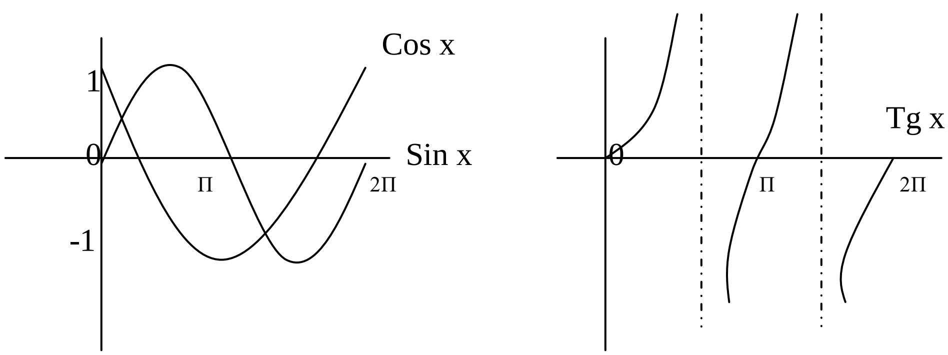
Tabel 3 Harga Fungsi Trigonometri

X	0^0	30^0	45^0	60^0	90^0	120^0	135^0	150^0	180^0
Sin x	0	1/2	1/2√2	1/2√3	1	1/2√3	1/2√2	1/2	0
Cos x	1	1/2√3	1/2√2	1/2	0	-1/2	-1/2√2	-1/2√3	-1
Tg x	0	1/3√3	1	√3	~	-√3	-1	-1/3√3	0

Sambungan Tabel 3

X	180^0	210^0	225^0	240^0	270^0	300^0	315^0	330^0	360^0
Sin x	0	-1/2	-1/2√2	-1/2√3	-1	-1/2√3	-1/2√2	-1/2	-0
Cos x	-1	-1/2√3	-1/2√2	-1/2	0	½	1/2√2	1/2√3	1
Tg x	0	1/3√3	1	√3	~	-√3	-1	-1/3√3	0

Dari tabel harga diatas fungsi trigonometri yang terdiri dari sin x, cosx, dan tg x dapat digambarkan seperti gambar dibawah :



Gambar 3 Grafik Fungsi Sinus, Cosinus dan Tangen

dari tabel gambar hubungan antara harga sinus dengn sinus, harga sinus dengan cosinus, yaitu :

1. Sin (180 - x) = Sin (x)
2. Sin (180 + x) = - Sin (x)
3. Cos (180 - x) = - Cos (x)
4. Cos (180 + x) = - Cos (x)
5. Sin (90 – x) = Cos (x)
6. Sin (90 + x) = Cos (x)

Persamaan trigonometri mempunyai periodisitas sebesar k. 360^0

Fungsi f(x) = sin x dan g(x) = cosx adalah fungsi periodik yang berperiode dasar 2Π atau 360^0, sedangkan fungsi h(x) = tgx dan l(x) = ctg x adalah fungsi periodik yang berperiode dasar Π atau 180^0.

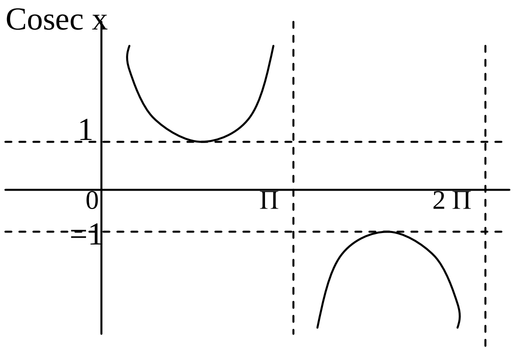
Untuk harga sin x dan cos x mempunyai marga mksimum dan minimum adalah 1 dan -1. Sedangkan untuk tg x mempunyai harga maksimum dn minimum ditak hingga, dan mempunyai harga asimtot pada garis x = ½Π dan 3/2Π pada interval 0 < x < 2Π.

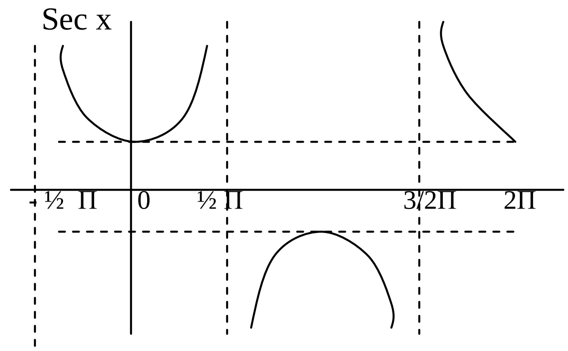
1. sin (x + k.2Π) = sin x
2. Cos (x + k.2Π) = sin x
3. Tg (x + k.Π) = Tg x
4. Cosec (x + k.2Π) = cosec x
5. Sec (x + k.2Π) = Sec x
6. Ctg (x + k.Π) = Ctg x

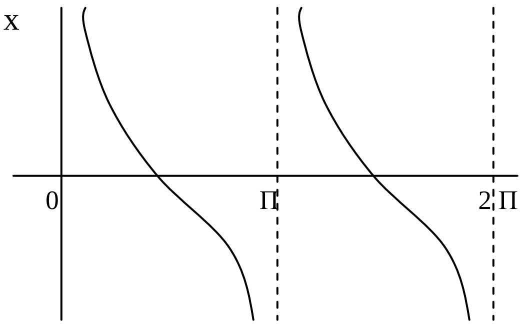
Untuk harga Cosec x, Sec x dan Ctg x seperti pada tabel 4 dibawah :

Tabel 4 Harga Cosecan, Secan dan Cotangen

X	0^0	30^0	45^0	60^0	90^0	120^0	135^0	150^0	180^0
Cosec x	~	2	√2	2/3 √3	1	2/3 √3	√2	2	~
Sec x	1	2/3√3	√2	2	~	- 2	- √2	- 2/3√3	-1
Ctg x	~	√3	1	1/3 √3	0	-1/3 √3	-1	- √3	- ~
Cosec x	~	- 2	- √2	- 2/3 √3	-1	-2/3 √3	- √2	- 2	- ~
Sec x	-1	-2/3√3	-√2	- 2	~	2	√2	2/3√3	1
Ctg x	- ~	√3	1	1/3 √3	0	- 1/3 √3	-1	- √3	~

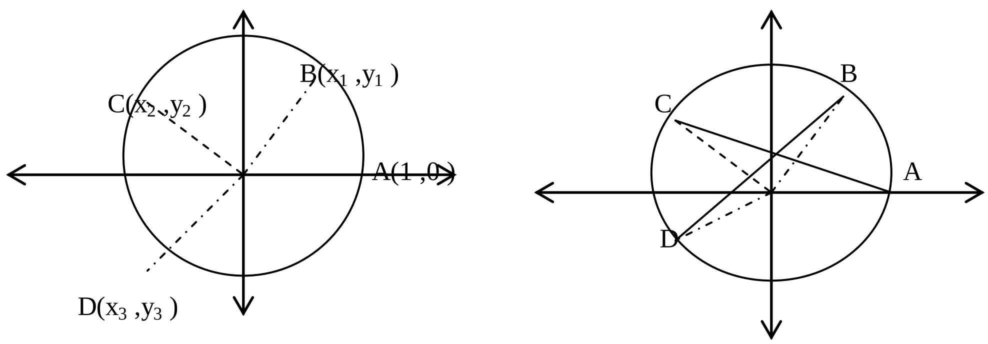






Gambar 4 Grafik fungsi Cosec x, Sec x dan Ctg x

B. RUMUS TRIGONOMETRI



Gambar 5 Penjumlahan

Sudut α merupakan sudut antara garis 0A dan 0D, sudut β merupakan sudut antara garis 0A dan 0B. Persamaan lingkaran adalah $x_1^2 + y_1^2 = 1$, dan diasumsikan bahwa $0<\beta<\alpha<2\Pi$, maka :

$x_1 = \cos \beta$ dan $y_1 = \sin \beta$

$x_2 = \cos (\alpha-\beta)$ dan $y_2 = \sin (\alpha-\beta)$

$x_3 = \cos \alpha$ dan $y_3 = \sin \alpha$

dan panjang busur AC = pnjang busur BD, sehingga :

$$|AC| = |BD|$$

$$\sqrt{((x_2 - 1)^2 + (y_2 - 0)^2} = \sqrt{((x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2}$$

$$(x_2^2 + y_2^2) + 1 - 2x_2 = (x_3^2 + y_3^2) + (x_1^2 + y_1^2) - 2x_1x_3 - 2y_1y_3$$

$\cos^2(\alpha-\beta) + \sin^2(\alpha-\beta) + 1 - 2x_2 = (\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) + (\cos^2\beta + \sin^2\beta) - 2x_1x_3 - 2y_1y_3$

$$1 + 1 - 2x_2 = 1 + 1 - 2x_1x_3 - 2y_1y_3$$

$$x_2 = x_1x_3 + y_3y_1$$

dengan mensubstitusikan harga $x_1 = \cos\beta$ dan $y = \sin\beta$; $x_2 = \cos(\alpha-\beta)$ dan $y = \sin(\alpha-\beta)$ $x_3 = \cos\alpha$ dan $y_3 = \sin\alpha$, diperoleh persamaan :

$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$ (1)

untuk mendapatkan harga $\cos(\alpha+\beta)$ dengan melakukan substitusi harga :

$(\alpha+\beta) = (\alpha-(-\beta))$ sehingga $\cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha-(-\beta))$

$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos(-\beta) + \sin\alpha\sin(-\beta)$, karena $\cos(-\beta) = \cos\beta$ dan $\sin(-\beta) = -\sin\beta$ maka :

$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$ (2)

menggunakan rumus fungsi ntrigonometri tentng hubungan sinis dan cosinus adalah :

$\sin\alpha = \cos(90-\alpha)$ dan $\cos\alpha = \sin(90-\alpha)$, sehingga :

$$\begin{aligned}\sin(\alpha+\beta) &= \cos(90-(\alpha-\beta))\\ &= \cos(90-\alpha)-\beta)\\ &= \cos(90-\alpha)\cos\beta + \sin(90-\alpha)\sin\beta\\ &= \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta\end{aligned}$$

$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$ (3)

untuk $(\alpha-\beta) = (\alpha+(-\beta))$

$\sin(\alpha+(-\beta) = \sin\alpha\cos(-\beta) + \cos\alpha\sin(-\beta)$

$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$ (4)

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \quad\rightarrow\quad \mathrm{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}$$

$$\mathbf{tg}\,(\alpha+\beta) = \frac{\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta} \times \frac{1/(\cos\alpha\cos\beta)}{1/(\cos\alpha\cos\beta)}$$

$$\mathbf{tg}\,(\alpha+\beta) = \frac{\mathbf{tg}\,\alpha + \mathbf{tg}\,\beta}{1 - \mathbf{tg}\,\alpha\,\mathbf{tg}\,\beta} \qquad (5)$$

$$\mathbf{tg}\,(\alpha-\beta) = \mathrm{tg}\,(\alpha + (-\beta)) = \frac{\mathrm{tg}\,\alpha + \mathrm{tg}\,(-\beta)}{1 - \mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,(-\beta)} = \frac{\mathbf{tg}\,\alpha + \mathbf{tg}\,\beta}{1 + \mathbf{tg}\,\alpha\,\mathbf{tg}\,\beta} \qquad (6)$$

Contoh 1 :

Tentukan harga Sin 75^0 dan Cos 75^0

Jawab :

$$\begin{aligned}
\text{Sin } 75^0 &= \text{Sin } (30^0+45^0) = \text{Sin } 30^0 \text{ Cos } 45^0 + \text{Cos } 30^0 \text{ Sin } 45^0 \\
&= \tfrac{1}{2} \,.\, \tfrac{1}{2}\sqrt{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{3}.\ \tfrac{1}{2}\sqrt{2} = \tfrac{1}{4}\sqrt{2} + \tfrac{1}{4}\sqrt{3}.\ \sqrt{2} \\
&= \tfrac{1}{4}\sqrt{2}\,(1 + \sqrt{3})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Cos } 75^0 &= \text{Cos } (30^0+45^0) = \text{Cos } 30^0 \text{ Cos } 45^0 - \text{Sin } 30^0 \text{ Sin } 45^0 \\
&= \tfrac{1}{2}\sqrt{3}.\ \tfrac{1}{2}\sqrt{2} - \tfrac{1}{2} \,.\, \tfrac{1}{2}\sqrt{2} = \tfrac{1}{4}\sqrt{2}\,\sqrt{3}. - \tfrac{1}{4}\sqrt{2} \\
&= \tfrac{1}{4}\sqrt{2}\,(\sqrt{3} - 1)
\end{aligned}$$

Contoh 2 :

Tunjukkan Harga cos (90 + A) = - Sin A

Jawab :

$$\begin{aligned}
\text{Cos } (90 + A) &= \text{Cos}90 \text{ Cos } A - \text{Sin}90 \text{ Sin } A \\
&= 0.\ \text{Cos } A - 1.\ \text{Sin } A = -\text{Sin } A \quad \text{(terbukti)}
\end{aligned}$$

Contoh 3 :

Hitunglah nilai dari Sin 42^0 Cos 12^0 - Cos 42^0 Sin 12^0

Jawab :

Sin 42^0 Cos 12^0 - Cos 42^0 Sin 12^0 = Sin (42^0 - 12^0) = Sin (30^0) = ½

Contoh 4 :

$$\text{Jika} \quad \frac{\text{tg } 80^0 + \text{tg } 55^0}{1 - \text{tg } 80^0 \text{ tg } 55^0} = ?$$

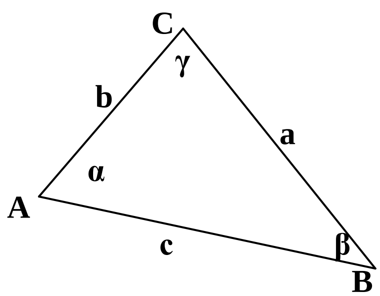
Jawab :

$$\frac{\text{tg } 80^0 + \text{tg } 55^0}{1 - \text{tg } 80^0 \text{ tg } 55^0} = \text{tg } (80^0 + 55^0) = \text{tg } (135^0)$$

$$= \text{tg } (180^0 - 45^0) = -\text{tg } 45^0 = -1$$

Rumus Trigonometri untuk segitiga

Hukum Sinus



BC = a, AC = b, dan AB = c

α = ∠BAC, β = ∠ABC, γ = ∠ACB

Gambar 6 Segitiga Sembarang

Dalam trigonometri, **hukum sinus** ialah pernyataan tentang segitiga yang berubah-ubah . Jika sisi segitiga *a*, *b* dan *c* dan sudut yang berhadapan bersisi (huruf besar) *A*, *B* and *C*, dinyatakan sebagai hukum sinus :

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}.$$

Rumus Sinus diatas untuk menghitung sisi yang tersisa dari segitiga jika dua sudut dan satu sisinya diketahui. Juga dapat juga digunakan saat dua sisi dan satu dari sudut yang tak diketahui; dalam hal ini, rumus sinus ini dapat memberikan dua nilai penting untuk sudut . Sering hanya satu hasil akan menyebabkan seluruh sudut kurang dari 180°; dalam kasus lain, ada dua penyelesaian pada segitiga.

Rumus Sinus atau hukum Sinus dapat digambarkan dengan diameter d dan dituliskan sebagai :

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = d.$$

Dapat ditunjukkan bahwa:

$$d = \frac{abc}{2\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}} = \frac{2abc}{\sqrt{(a^2+b^2+c^2)^2+2(a^4+b^4+c^4)}}$$

di mana s merupakan semi-perimeter

$$s = \frac{(a+b+c)}{2}$$

Hukum Cosinus

Hukum cosinus, atau disebut juga **aturan cosinus**, dalam trigonometri adalah aturan yang memberikan hubungan yang berlaku dalam suatu segitiga, yaitu antara panjang sisi-sisi segitiga dan cosinus dari salah satu sudut dalam segitiga tersebut.

Perhatikan gambar segitiga di kanan.

Aturan cosinus menyatakan bahwa:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

dengan γ adalah sudut yang dibentuk oleh sisi *a* dan sisi *b*, dan *c* adalah sisi yang berhadapan dengan sudut γ.

Aturan yang sama berlaku pula untuk sisi *a* dan *b*:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$$

bila panjang dua sisi sebuah segitiga dan sudut yang diapit oleh kedua sisi tersebut diketahui, maka kita dapat menentukan panjang sisi yang satunya. Sebaliknya, jika panjang dari tiga sisi diketahui, kita dapat menentukan besar sudut dalam segitiga tersebut. Dengan mengubah sedikit aturan cosinus tadi, kita peroleh:

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$\cos\beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$

$$\cos\gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

Hukum Cosinus Pertama

$$a = b\cos\gamma + c\cos\beta$$

$$b = c\cos\alpha + a\cos\gamma$$

$$c = a\cos\beta + b\cos\alpha$$

Contoh 5:

Jika dalam suatu segitiga A, B, C seperi gambar 6 diatas, diketahui :

AB = 12 , BC = 8, $\alpha = 60^0$ dan $\beta = 45$

Tentukan panjang sisi CA

Jawab :

Jumlah sudut dalam segitiga adalah 180, $\alpha = 60^0$ dan $\beta = 45$ maka $\gamma = 75^0$

Menggunakan aturan SINUS :

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} \rightarrow \frac{a}{\sin 60^0} = \frac{8}{\sin 45^0} = \frac{12}{\sin 75^0}$$

$$\frac{a}{\sin 60^0} = \frac{8}{\sin 45^0} \rightarrow \quad a \sin 45^0 = 8.\sin 60^0 \rightarrow a = (8.\ \tfrac{1}{2}\sqrt{3})/\ \tfrac{1}{2}\sqrt{2}$$

Jadi harga **a = 4 √6**

Menggunakan aturan COSINUS

$a^2 = b^2 + c^2 - bc \text{ Cos } \alpha$

$a^2 = 8^2 + 12^2 - 8.12 \text{ Cos } 60$

$= 64 + 144 - 96 (1/2)$

$= 208 - 48 = 160 \rightarrow a = \sqrt{160} = 4\sqrt{10}$

Rumus-rumus sudut rangkap

1. $\text{Sin } 2\alpha = \text{Sin } (\alpha + \alpha) = \text{Sin } \alpha \text{ Cos } \alpha + \text{Cos } \alpha \text{ Sin } \alpha = 2 \text{ Sin } \alpha \text{ Cos } \alpha$

2. $\text{Cos } 2\alpha = \text{Cos } (\alpha + \alpha) = \text{Cos } \alpha \text{ Cos } \alpha - \text{Sin } \alpha \text{ Sin } \alpha = \text{Cos}^2 \alpha - \text{Sin}^2 \alpha$

$= (1 - \text{Sin } \alpha) - \text{Sin } \alpha = 1 - 2 \text{ Sin } \alpha$

3. $\text{tg } 2\alpha = \dfrac{2 \text{ tg } \alpha}{1 - \text{tg}^2 \alpha}$

4. $\text{Sin } 2\alpha = \dfrac{2 \text{ tg } \alpha}{1 + \text{tg}^2 \alpha}$

5. $\cos 2\alpha = \dfrac{1 - \text{tg}^2 \alpha}{1 + \text{tg}^2 \alpha}$

Contoh 6 :

Buktikan $2\text{Sin } 30^0 \text{Cos } 30^0 = (2 \text{ tg } 30 / (1 + \text{tg}^2 30)$

Jawab :

$\text{Sin } 60^0 = \text{Sin } (30^0 + 30^0) = \text{Sin} 30^0 \text{ Cos } 30^0 + \text{Cos } 30^0 \text{ Sin } 30^0 = 2 \text{ Sin } 30^0 \text{Cos} 30^0$

$= 2. \tfrac{1}{2} \tfrac{1}{2} \sqrt{3} = \tfrac{1}{2} \sqrt{3}$

$\text{Sin } 60^0 = (2 \text{ tg } 30 / (1 + \text{tg}^2 30) = 2.1/3 \sqrt{3} / (1 + (1/3 \sqrt{3})^2)$

$= (2/3 \sqrt{3})/(4/3) = \tfrac{1}{2} \sqrt{3}$

Rumus-rumus Perkalian

1). $2 \text{ Sin } \alpha \text{ Cos } \beta = \text{Sin } (\alpha + \beta) + \text{Sin } (\alpha - \beta)$

Sin α Cos β = ½ (Sin (α + β) + Sin (α - β))

2). 2 Cos α Sin β = Sin (α + β) - Sin (α - β)

Cos α Sin β = ½ (Sin (α + β) - Sin (α - β))

3). 2 Cos α Cosβ = Cos (α + β) + Cos (α - β)

Cos α Cosβ = ½ (Cos (α + β) + Cos (α - β))

4). 2 Sin α Sin β = Cos (α + β) - Cos (α - β)

Sin α Sin β = ½ (Cos (α + β) - Cos (α - β))

Contoh 7 :

Hitunglah : a) 2 tg 75^0 cos 15^0 b) sin 105^0 Sin 15^0

Jawab :

a) 2 sin 75^0 cos 15^0 = Sin (75^0 +15^0) + Sin (75^0 - 15^0)

= Sin 90^0 + Sin 60^0 = 0 + ½ √3 = ½ √3

b) sin 105^0 Sin 15^0 = Cos (105^0 +15^0) - Cos (105^0 - 15^0)

= Cos (120^0) - Cos (90^0)

= - ½ - 0 = - ½

Rumus-rumus Jumlah dan Selisih

1). Sin x + Sin y = 2 Sin ½ (x + y) Cos ½ (x – y)

2). Sin x - Sin y = 2 Cos ½ (x + y) Sin ½ (x – y)

3). Cos x + Cos y = 2 Cos ½ (x + y) Cos ½ (x – y)

4). Cos x - Cos y = 2 Sin ½ (x + y) Sin ½ (x – y)

Contoh 8 :

Nyatakan dalam bentuk perkalian : a). Sin 5x + Sin x b). Cos 5θ + Cos 3θ

Jawab :

a) $\text{Sin } 5x + \text{Sin } x = 2 \text{ Sin } ½ (5x + x) \text{ Cos } ½ (5x – x)$

$= 2 \text{ Sin } ½ (6x) \text{ Cos } ½ (4x)$

$= 2 \text{ Sin } 3x \text{ Cos } 2x$

b). $\text{Cos } 5\theta + \text{Cos } 3\theta = 2 \text{ Cos } ½ (5\theta + 3\theta) \text{ Cos } ½ (5\theta - 3\theta)$

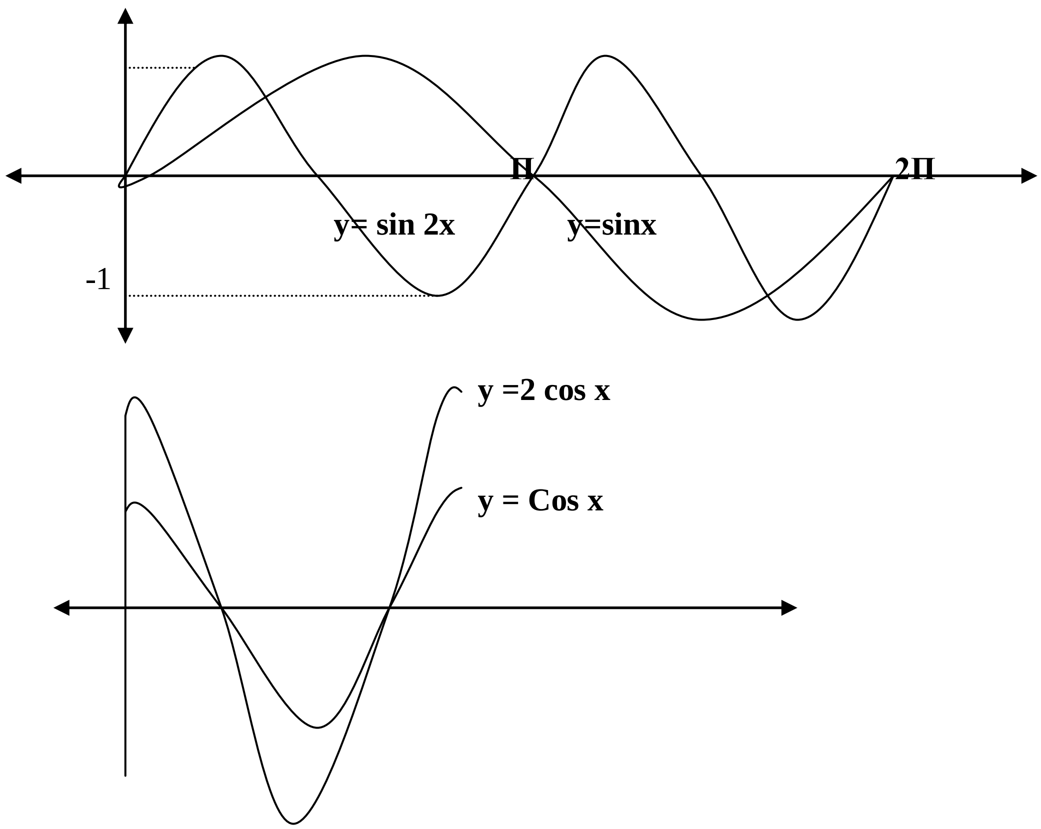
$= 2 \text{ Cos } ½ (8\theta) \text{ Cos } ½ (2\theta)$

$= 2 \text{ Cos } 4\theta \text{ Cos } \theta$

C. FUNGSI DAN GRAFIK FUNGSI TRIGONOMETRI

Grafik fungsi dalam trigonometri, untuk harga sinus daan cosinusnya menpunyai periodisasi sebesar 360^0 (2Π), dan nilai maksimum dan minimum sebesar dan -1.
Untuk harga tangennya dengan periodisasi juga sebesar 360^0 (2Π), dan untuk harga maksimum dan minimumnya tak hingga dan minus tak hingga.
Untuk harga cosecant, secan, dan cotangennya juga mempunyai periodisasi sebesar 360^0 (2Π), dan untuk harga maksimum dan minimumnya tak hingga dan minus tak hingga.
Untuk grafik fungsi sinus dan cosinus mempunyai amplitudo sebesar 1 yaitu diperoleh dari ½ (1 – (-1)) = ½ (2) = 1, dimana harga 1 merupakan i maksimum dan nilai -1 merupakan minimumnya.
Harga maksimum dan minimum serta periodisasi suatu fungsi sinus dan cosinus dipengaruhi oleh fungsinya. Misalkan $f(x) = n \sin x$ atau $g(x) = n \cos x$ maka akan mempunyai harga maksimum dan minimum sebesar n dan –n dengan amplitude sebesar n juga, tetapi dengan periodisasi yang tetap sama yaitu 2Π.
Fungsi $f(x) = \sin nx$ atau $g(x) = \cos nx$, fungsi ini mempunyai maksimum dan minimum sebesar 1 dan -1 serta amplitudo sebesar 1, tetapi mempunyai periodisasi sebesar $2\Pi/n$.

Apabila f (x) = a. sin bx atau g(x) = a cos bx, dapat disimpulkan bahwa fungsi tersebut mempunyai amplitude sebesar a dan periodisasi sebesar 2Π/ b.



Gambar 6 Grafik Fungsi Trigonometri

D. PERSAMAAN TRIGONOMETRI

Fungsi f(x) = sin(x), cos (x), tg (x) merupupakan fungsi trigonometri, disebut juga sebagai fungsi periodik. Hal ini dikarenakan fungsinya mempunyai periodisasi. Fungsi sin x, daan cos x mempunyai periode sebesar 360^0 atau 2Π. Sedangkan tg x mempunyi periodisasi 180^0 atau Π. Fungsi-fungsi f(x) = sec x, cosec x, mempunyai periodisasi sebesar 360^0 atau 2Π. Sedangkan untuk ctg x mempunyai periodisasi sebesar 180^0 atau Π.

Fungsi- fungsi tersebut daapat dituliskan persamaannya sebagai berikut :

1. $\sin (x + k.\,2\Pi.) = \sin x$ 2. $\cos (x + k.\,2\Pi.) = \cos x$

3. $Tg\ (x + k.\,\Pi.) = Tg\ x$ 4. $Sec\ (x + k.\,2\Pi.) = Sec\ x$

5. $Cosec\ (x + k.\,2\Pi.) = Cosec\ x$ 6. $Ctg\ (x + k.\,\Pi.) = Ctg\ x$

1. Persamaan Trigonometri yang dapat dirubah kebentuk persamaan kwadrat dalam Sinus, Cosinus, dan tangen sebagai pengganti fungsinya

Rumus lingkaran : $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, diperluas :

$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ atau $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$

Apabila $\cos^2 2x = \cos 2x - 3 \sin^2 2x$ maka

$$\cos^2 2x = \cos 2x - 3 (1 - \cos^2 2x)$$

$$\cos^2 2x = \cos 2x - 3 + 3\cos^2 2x = \cos 2x + 3 \cos^2 2x - 3$$

$$2 \cos^2 2x + \cos 2x - 3 = 0 \rightarrow 2 (\cos 2x)^2 + (\cos x) - 3 = 0$$

Sehingga jika $\cos 2x = p$ maka persamaannya : $2p^2 + p + 3 = 0$, p_1, dan p_2

$$p_1, \text{ dan } p_2 = \frac{- b \pm \sqrt{(b^2 - 4ac)}}{2a}$$

Sehingga diperoleh :

$$\cos 2x = \frac{- 1 \pm \sqrt{(1^2 - 4.2.3)}}{2.2} = \frac{- 1 \pm \sqrt{(1^2 - 4.2.-3)}}{4} = \frac{- 1 \pm \sqrt{25}}{4}$$

$\cos 2x = 1$ dan $\cos 2x = - 3/2$ (tidak mungkin karena $-1 \leq \cos 2x \leq 1$)

Untuk $\cos 2x = 1$ maka $\cos 2x = \cos 0$

$2x = k.2\Pi$ maka $\mathbf{x = k.\Pi}$

Latihan

1. *Uraikan bentuk berikut dengan rumus jumlah dan selisih cosinus, kemudian sederhanakan :*

   a. Cos (x – 60^0)

   b. Cos (x + 45^0)

   c. Cos (x – 120^0)

   d. Cos (x + 30^0)

2. *Uraikan bentuk berikut dengan rumus jumlah dan selisih Sinus, kemudian sederhanakan :*

   a. Cos (x – 60^0)

   b. Cos (x + 45^0)

   c. Cos (x – 120^0)

   d. Cos (x + 30^0)

3. *Buktikan bahwa :*

   a. Sin (90 – x) = Cos x

   b. Cos (270 + x) = Sin x

   c. Cos (180 – x) = - Cos x

   d. Sin (270 + x) = - Sin x

4. *Hitunglah harga tanpa menggunakan alat bantu:*

   a. Sin 15^0

   b. Cos 105^0

   c. Sin 75^0

   d. Cos 75^0

d. Tg 15^0

e. Ctg 105^0

5. Jika tg A = 1 dan tg B = √3, tentukan harga :

a. Tg (A + B)

b. Tg (A – B)

6. Buktikan bahwa :

$$Tg\ (a + 45) = \frac{Cos\ a + Sin\ a}{Cos\ a - Sin\ a}$$

7. Nyatakan bentuk-bentuk dibawah dalam bentuk 2α

a. 4 Cos α. Sin α

b. $Cos^2\alpha - Sin^2\alpha$

b. $2\ Sin^2\alpha - 1$

d. $1 - 2\ Cos^2\alpha$

8. Sederhanakan bentuk-bentuk dibawah :

a. 2 Sin3α. Cos3α

b. 2 Cos 2α. Sin2α

c. $2\ Cos^2\alpha - 1$

d. 2 Sin 75. Cos 75

9. Nyatakan setiap bentuk-bentuk dibawah dalam perkalian :

a. Sin 6x + Sin 2x

b. Cos 5x + Cos x

c. Sin 6x - Sin 2x

d. Cos 5x - Cos x

e. Sin 3θ + Sin θ

f. Cos 7x + Cos 3x

10. Hitunglah tanpa menggunakana alat bantu :
    a. Sin 75 – Sin 15
    b. Cos 105 + Cos 15
    c. Cos 15 – Cos 75
    d. Sin 105 + Sin 15

11. Hitunglah nilai :
    a. Cos 40.Cos 20 – Sin 40. Sin 20
    b. Sin 80 Cos 20 - Cos 80 Sin 20
    c. Cos 50.Cos 20 + Sin 50. Sin 20
    d. Sin 10 Cos 35 + Cos 10 Sin 35

12. Lukislah Grafik Fungsi :
    a. 2 Cos ½ x
    b. ½ Sin 2x
    c. Tg 2x
    d. Tg ½ c
    e. Cosecan 2x
    f. Sec ½ x

13. Tentukan himpunan penyelesaian dari :
    a. Sin 2x = Sin 3x + Sin x, $0 \leq x \leq 2\Pi$
    b. 6 Cos 2x – 11 Cos x + 8 = 0 $0 \leq x \leq 2\Pi$
    c. Sin 2x = Sin x $0 \leq x \leq 2\Pi$

14. Jika Fungsi Y = 2 Sin^2 x - Cos 2x – 1, dan $0 \leq x \leq 2\Pi$
    Tentukan interval harga x untuk grafik diatas sumbu x

15. Tentukan himpunan penyelesaian untuk :

a. $4\ \text{Cos}^2\ 2x + 12\ \text{Sin}\ 2x – 12 = 0$, untuk $0 \leq x \leq 2\Pi$

b. $3\ \text{Cos}\ 2x - 10\ \text{Cos}\ x + 7 = 0$, untuk $0 \leq x \leq 2\Pi$

c. $\text{Cos}^2\ 2x – 5\ \text{Sin}\ 4x – 6\ \text{Sin}^2\ 2x = 0$, untuk $0 \leq x \leq 2\Pi$

MODUL IV

MATRIK

Materi pokok Matrik terdiri dari Pengertian Matrik, Jenis-jenis Matrik, Operasi Matrik, Partisi Matrik, Harga Determinan suatu matrik, Transformasi Linier, Transformasi Elementer, Rank, dan Matrik Invers.

Dalam mempelajari materi pokok Matrik diperlukan dasar yang harus dikuasai secara baik materi aritmatika dan persamaan dan fungsi. Operasi aritmatika terdiri dari penjumlahan, pengurangan, perkalian, pembagian, dan pemangkatan. Sedangkaan fungsi dan persamaan khususnya pada persamaan linier.

Matrik banyak digunakan pada cabang ilmu. Kelebihan matrik dapat menghemat tempat, dan dengan data yang berbentuk matrik akan lebih mudah untuk dibaca, dibandingkan apabila datanya masih berupa data mentah yang belum di analisis. Matrik termasuk suatu analisis atau penyederhanaan data.

Matrik dapat digunakan untuk mencari hubungan antara variable-variabel. Dengan matrik dapat dipecahkan nilai nilai variabelnya yang mungkin terdiri dari puluhan persamaan yang terdiri dari puluhan variabelnya, dan harus dihitung nilai-nilai parameter (koefisiennya) yang juba berjumlah puluhan bahkan mungkin ratusan. Sehingga penggunaan matrik akan lebih efisien dalam penyusunan data dan lebih mudah dalam pengambilan keputusan.

Tujuan dari pemberian materi Matrik karena diperlukan untuk lebih mengerti dan lebih memahami dalam mempelajari materi ilmu hitung perataan dan materi-materi lain dalam ilmu pengukuran. Dalam suatu bidang ilmu dasar ilmu lain yang mendukung diperlukan untuk lebih mudah mempelajari ilmu tersebut.

A. PENGERTIAN MATRIK

Matrik ialah kumpulan angka-angka atau elemen-elemen yang disusun menurut baris dan kolom sehingga berbentuk empat persegi panjang, dimana panjang dan lebarnya ditunjukkan oleh banyaknya kolom dan banyaknya baris. Matrik dituliskan dalam tanda kurung atau kurung besar. Matrik ditulis dalam bentuk huruf besar. Matrik tidak mempunyai harga, matrik hanyalah sekumpulan data yang dituliskan dengan syarat tertentu.

Dalam mempelajari statistika terutama dalam regresi berganda , dan juga dalam memecahkan program linier sangat diperlukan peran dari Matrik. Dalam ilmu pengukuran terutama pada ilmu hitung perataan kesalahan sangat diperlukan peran dari aljabar matrik.

Definisi :Suatu Matrik A yang terdiri dari m baris dan n kolom dituliskan sebagai berikut:

$$A_{mxn} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ . & . & . & & . \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \dots & a_{in} \\ . & . & . & & . \\ . & . & . & & . \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = (\ a_{ij}\ ),\ \begin{aligned} i &= 1,2,3,\dots,m \\ j &= 1,2,3,\dots,n \end{aligned}$$

Contoh Penggunaan Matrik :

Data hasil suatu penelitian pada tiga Kantor Pertanahan (A,B,C) jumlah dan pendidikan juru ukur adalah sebagai berikut :

1. Pada Kantor Pertanahan Kabupaten A yang berpendidikan SLTA sebanyak 7 orang, yang berpendidikan Diploma I PPK sebanyak 15 orang, dan yang berpendidikan sarjana sebanyak 9 orang.
2. Pada Kantor Pertanahan Kabupaten B yang berpendidikan SLTA sebanyak 2 orang, yang berpendidikan Diploma I PPK sebanyak 19 orang, dan yang berpendidikan sarjana sebanyak 11 orang.

3. Pada Kantor Pertanahan Kabupaten C yang berpendidikan SLTA sebanyak 4 orang, yang berpendidikan Diploma I PPK sebanyak 17 orang, dan yang berpendidikan sarjana sebanyak 8 orang.

Tabel :Keadaan Jumlah Juru Ukur menurut Pendidikan dan Tempat Kerja

Pendidikan / Kabupaten	SLTA	Diploma I PPK	Sarjana/Diploma IV
A	7	15	9
B	2	19	11
C	4	17	8

Apabila ditulis dalam bentuk Matrik adalah sebagai berikut :

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 15 & 9 \\ 2 & 19 & 11 \\ 4 & 17 & 8 \end{pmatrix}$$

Dari ketiga bentuk uraian data diatas terlihat yang paling sederhana dan paling hemat dalam penulisannya apabila data tersebut ditulis dalam bentuk Matrik.

B. JENIS JENIS MATRIK

1. Matrik Bujur Sangkar (Square Matrix) :

Matrik bujur sangkar adalah matrik yang jumlah baris dan jumlah kolomnya sama (m=n)

Apabila suatu matrik mempunyai baris = n dan kolom = n maka disebut sebagai matrik bujur sangkar ordo n.

$$A= \begin{pmatrix} \mathbf{a}11 & \mathbf{a}12 & \mathbf{a}13 \\ \mathbf{a}21 & \mathbf{a}22 & \mathbf{a}23 \\ \mathbf{a}31 & \mathbf{a}32 & \mathbf{a}33 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -1 & 2 & -4 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

A dan B merupakan Matrik bujur sangkar ordo 3.

Matrik Bujur Sangkar disebut juga sebagai matrik Kwadrat.

2. Matrik Identitas (Identity Matrix) :

Matrik Identitas atau disebut juga matrik satuan adalah matrik bujur sangkar dimana elemen-elemen diagonal utama mempunyai harga 1, sedangkan selain elemen pada diagonal utama mempunyai harga 0.

Contoh :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$, merupakan matrik identitas ordo 3.

3. Matrik Diagonal

Matrik Diagonal adalah suatu matrik bujur sangkar dimana elemen-elemen diagonal utama mempunyai nilai $\neq 0$, dan elemen-elemen selain diagonal utama bernilai 0.

$$I = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$, merupakan matrik diagonal ordo 3.

4. Matrik Skalar

Matrik Skalar adalah suatu matrik bujur sangkar dimana elemen-elemen diagonal utama bernilai sama dan kelipatan dari 1 (k) dan selain elemen diagonal utama bernilai 0. Atau suatu matrik kelipatan dari matrik identitas (kI)

$$k.I = \begin{pmatrix} \mathbf{k} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{k} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{k} \end{pmatrix} \quad \text{atau} \quad 6.I = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$ merupakan matrik identidas ordo 3.

4. Matrik Simetris

Matrik A disebut Matrik simetris apabila berbentuk matrik bujur sangkar dengan elemen pada baris ke i akan sama dengan kolom ke i juga.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 5 & -3 \\ -1 & 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

Dari matrik A diatas terlihat bahwa elemen baris 1 = elemen kolom 1, elemen baria ke 2 = elemen kolom ke 2, elemen baris ke 3 = elemen kolom ke 3, dan elemen baris ke 4 = elemen kolom ke 4.

5. Matrik Null

Matrik A disebut Matrik Null apabila berupa matrik bujur sangkar dan elemen-elemennya semua bernilai Null (0).

$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, matrik A adalah matrik 0 ber ordo 3

6. Transpose suatu Matrik

Untuk suatu keperluan suatu matrik perlu ditukar baris dan kolomnya, baris ke i menjadi kolom ke i dan baris ke j menjadi kolom ke j.

Definisi : Transpose suatu Matrik Aij ialah suatu matrik baru yang mana elemen-elemennya diperoleh dari matrik A dengan syarat bahwa baris-baris dan kolom-kolom matrik menjadi kolom-kolom dan baris-baris matrik yang baru.

Apabila matrik tersebut berordo m x n, maka matrik baru akan berordo n x m.

Contoh :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & -4 & 1 \\ -1 & 3 & 3 & 2 & 2 \\ 4 & -2 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 2 & 3 & -2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Matrik B diperoleh dari transpose matrik A. Matrik A dengan ordo 3 x 5 menjadi matrik B dengan ordo 5 x 3. Elemen-elemen baris ke 1 dari matrik A menjadi elemen-elemen kolom ke 1 dari matrik B. Elemen-elemen baris ke 2 dari matrik A menjadi elemen-elemen kolom ke 2 dari matrik B. dan elemen-elemen baris ke 3 dari matrik A menjadi elemen-elemen kolom ke 3 dari matrik B.

C. OPERASI MATRIK

Dua buah matrik A dan B disebut sama yaitu A = B apabila matrik A dan matrik B mempunyai jumlah baris dan kolom yang sama, dan nilai elemen-elemennya juga harus sama.

1. Penjumlahan dan pengurangan Matrik.

Suatu matrik A dan matrik B dapat dijumlahkan atau dikurangkan apabila matrik A dan Matrik B mempunyai ordo yang sama. Hasil penjumlahannya atau pengurangannya berupa matrik C dengan ordo yang sama dengan matrik A dan B. Cara penjumlahannya dan pengurangannya yaitu elemen ke ij pada matrik A ditambahkan atau dikurangkan pada elemen ke ij matrik B dan hasilnya pada matrik C pada baris dan kolom ij.

Contoh :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix} \qquad A + B = C = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 4 \\ 5 & 3 & 0 \\ 4 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix} \qquad A - B = C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

2. Perkalian Matrik dengan Matrik.

Suatu matrik A dan B dapat dikalikan dan hasilnya adalah matrik C apabila mempunyai syarat banyaknya kolom matrik A sama dengan banyaknya baris matrik B. Misal matrik Amxn dikalikan dengan matrik Bnxp maka A dan matrik B dapat dikalikan, dan hasilnya adalah matrik C dengan ordo mxp.

Dalam hal ini apabila jumlah kolom matrik A = jumlah baris matrik B disebut ***Compormable*** untuk perkalian, yang berati hasil kali matrik A dan B ada.

Perkalian dalam matrik tidak berlaku hukum ***komutatif***, yang artinya AxB ≠ BxA. Matrik AxB ada, dan belum tentu BxA ada. Misalkan pada perkalian matrik A_{4x3}x B_{3x2} hasilnya adalah matrik C_{4x2}. Sedangkan apabila matrik B_{3x2} x A_{4x3} tidak ***Compormable*** pada perkalian, ini berarti m atrik B tidak dapat dikalikan dengan matrik A.

Apabila pada suatu saat Matrik A dikalikan matrik B sama dengan matrik B dikalikan matrik A (AB = BA) maka kedua matrik disebut ***Commute.***

Pada matrik berlaku hukum ***komutatif***, yaitu A (B + C) = AB + AC, dan pada matrik juba berlaku hukum Assosiatif, yaitu bahwa A(BC) = (AB)C

Misalkan matrik A_{4x3} dan B_{3x2} maka hasil perkalian antara matrik A dan matrik B adalah matrik C_{4x2}.

Contoh :

$$A \times B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} = C$$

$$C = \begin{pmatrix} 2x2 + 1x3 + 1x\text{-}1 & 2x1 + 1x2 + 1x4 \\ \text{-}1x2 + 2x3 + 3x\text{-}1 & \text{-}1x2 + 2x2 + 3x4 \\ 1x2 + \text{-}1x3 + 2x\text{-}1 & 1x1 + \text{-}1x2 + 2x4 \\ 3x2 + 2x3 + 1x\text{-}1 & 3x1 + 2x2 + 1x4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 10 \\ 1 & 14 \\ -3 & 5 \\ 11 & 11 \end{pmatrix}$$

2. Perkalian Matrik dengan Skalar.

Apabila Matrik A dikalikan dengan skalar k, ini berarti semau elemen pada matrik A dikalikan dengan skalar k. Apabila $A=(a_{ij})$ maka $k.A=k.(a_{ij}) = (a_{ij}).k$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \text{ maka } \quad 3.A = \begin{pmatrix} -3 & 6 & 3 \\ 6 & 6 & -6 \\ 6 & 9 & 6 \end{pmatrix}$$

D. PARTISI MATRIK

Partisi matrik adalah membagi matrik menjadi bagian-bagian yang lebih kecil, juga disebut sebagai sub matrik. Cara atau bentuk pembagian matrik tersebut sesuai dengan keperluan, hal ini dikarenakan dalam operasi matrik perlu syarat-syarat tertentu misalnya untuk penjumlahan, untuk perkalian. Persyaratan untuk penjumlahan tidak sama dengan syarat perkalian matrik A dan B dapat dijumlahkan atau dikurangkan tetapi belum tentu dapat di kalikan, begitu juga sebaliknya. Syarat suatu partisi matrik dapat di kurangkan dan dijumlahkan apabila mempunyai ordo yang sama, sedangkan suatu partisi matrik dapat dikalikan apabila partisi matrik harus ***comformable.***

Kegiatan partisi matrik sering digunakan dalam kegiatan mencari suatu matrik invers. Salah satu metode untuk mencari invers suatu matrik menggunakan metode partisi matrik.

Misalkan terdapat matrik bujur sangkar ordo 4 :

$$A = \left(\begin{array}{cc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ \hline a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline A_{21} & A_{22} \end{array} \right)$$

Hasil partisi matrik terlihat pada bagian kanan, dari matrik bujur sangkar ordo 4 akan menjadi 4 buah matrik bujur sangkar yang masing-masing berordo 2. Hasil partisi matrik tidak harus seperti contoh diatas. Hasil partisi matrik dapat berordo berapa saja dan dapat bernentuk apa saja tapi yang jelas hasilnya berupa matrik yang berordo lebih rendah dari matrik induknya.

E. DETERMINAN SUATU MATRIK

Matrik yang mempunyai harga determinan adalah matrik yang hanya berbentuk matrik kwadrat (square matrix). Matrik yang bukan matrik bujur sangkar tidak mempunyai harga determinan. Determinan matrik A dituliskan dengan simbul det (A) atau | A |.

Harga determinan matrik kwadrat ordo 2 :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad \text{maka harga det (A)} = a_{11} \text{x } a_{22} + a_{12} \text{x } a_{21}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{maka harga det (A)} = 2 \text{ x } 5 + 3 \text{ x } 4 = 10 - 12 = -2$$

Harga determinan matrik kwadrat ordo 3

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

maka harga determinan matrik A adalah : det (A) = $(a_{11} x\, a_{22}\ x\ a_{33}) + (a_{12} x\, a_{23}\ x\ a_{31}) +$
$(a_{13} x\, a_{21}\ x\ a_{32}) - (a_{13} x\, a_{22}\ x\ a_{31}) - (a_{11} x\, a_{23}\ x\ a_{32}) - (a_{12} x\, a_{21}\ x\ a_{33})$.

1. Mencari Harga Determinan menggunakan Matrik Kofaktor

Definisi : Suatu matrik kwadrat A dengan n baris dan n kolom dihilangkan baris ke -i dan kolom ke –j, maka determinan matrik kwadrat dengan (n-1) baris dan (n-1) kolom, yaitu sisi matrik yang tinggal (disebut ***Matrik Minor*** dari elemen a_{ij}) dan diberi simbul $|A_{ij}|$. Apabila pada setiap minor kita tambahkan tanda + (plus) atau – (minus) sebagai tanda pada determinan dan kemudian diberi simbul : $(-1)^{i+j} \mid A_{ij} \mid$ maka diperoleh apa yang disebut **KOFAKTOR** dari elemen a_{ij} dan biasanya diberi simbul $\mathbf{K_{ij}}$.

$\mathbf{K_{ij}} = (-1)^{i+j} \mid A_{ij} \mid$ ini berarti bahwa setiap elemen mempunyai ***kofaktor*** sendiri –sendiri

untuk lebih menyederhanakan rumus harga $(-1)^{i+j}$ dapat diganti tanda + atau – tergantung dari i+j, apabila i+j harganya genap maka tandanya +, sedangkan apabila i+j harganya ganjilmaka tandanya –.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+1 = + & 1+2 = - & 1+3 = + \\ 2+1 = - & 2+2 = + & 2+3 = - \\ 3+1 = + & 3+2 = - & 3+3 = + \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}$$

Dalil **:** Nilai determinan dari Matrik A sama dengan penjumlahan dari hasil kali semua elemen dari suatu baris (kolom) dari matrik A disebut dengan kofaktor masing-masing

1. Dengan menggunakan elemen-elemen dari baris ke -i

$$\det(A) = |A| = a_{i1} K_{i1} + a_{i2} K_{i2} += a_{i3} K_{i3} + \dots + a_{in} K_{in}$$

$$\det(A) = |A| = \sum_{t=1}^{n} \mathbf{ait.Kit;}\ i = 1,2,3, \dots, n$$

Contoh :

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{1 \quad 2 \quad 4} \\ 5 \quad 1 \quad 2 \\ 3 \quad 2 \quad 1 \end{pmatrix} \qquad \det(A) =$$

dengan baris ke 1 (i = 1) :

$$K_{11} = + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 4 = -3$$

$$K_{12} = - \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -(5 - 6) = 1$$

$$K_{13} = + \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 10 - 3 = 7$$

$\det(A) = a_{11} K_{11} + a_{12} K_{12} += a_{13} K_{13} = 1.(-3) + 2(1) + 4(7) = -3 + 2 + 28 = 27$

2. Dengan menggunakan elemen-elemen dari kolom ke -j

$$\det(A) = |A| = a_{1j} K_{1j} + a_{2j} K_{2j} + a_{3j} K_{3j} + \dots + a_{nj} K_{nj}$$

$$\det(A) = |A| = \sum_{t=1}^{n} \mathbf{atj.Ktj;}\ j = 1,2,3, \dots, n$$

Contoh :

$$A = \left(\begin{array}{cc|c|} 1 & 2 & 4 \\ 5 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{array} \right) \qquad \det(A) =$$

dengan kolom ke 3 (j = 3) :

$$K_{13} = + \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 10 - 3 = 7$$

$$K_{23} = - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -(2 - 6) = 4$$

$$K_{33} = + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 10 = -8$$

det (A) = $a_{13}\, K_{13} + a_{23}\, K_{23} + a_{33}\, K_{33}$ = 4.(7) + 2 (4) + 1(8) = 28 + 8 -9= 27

Dalil : Kalau $A^{|}$ merupakan transpose matrik A, maka akan berlaku det (A) = det ($A^{|}$).

Contoh :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 5 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \text{ maka } A^{|} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Det (A) = 27

Det ($A^{|}$) = 53 - 26 = 27; det (A) = det ($A^{|}$)

Dalil : Kalau semua elemen baris dan kolom suatu matrik A bernilai 0, maka harga det (A) = 0 juga

Contoh :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \det(A) = 0$$

Dalil : Kalau dua baris (kolom) suatu matrik A ditukar, maka harga determinannya akan berubah tanda.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 5 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \det(A) = 27$$

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}; \det(B) = 26 - 53 = -27$$

Dalil : Kalau dua baris (kolom) suatu matrik A sama, maka harga determinannya akan sama dengan 0 (det (A) = 0).

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

Det (B) = - 27

Pada matrik C terlihat bahwa baris 1 dan baris 3 elemennya sama.

Harga det (C) = 27 – 27 = 0

Pada matrik D terlihat bahwa kolom 2 dan kolom 3 elemennya sama.

Harga det (D) = 45 – 46 = 0

Dalil : Suatu determinan matrik A tidak akan berubah nilainya kalau salah satu baris (kolom) ditambah baris (kolom) lainnya yang telah dikalikan dengan bilangan konstan k.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}; \ B = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 2 \\ 5 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 11 & 5 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Untuk matrik C, baris ke 2 nya ditambahkan 2 kali baris pertamanya.

Harga det (A) = - 27

Harga det (C) = (60 + 8 + 22) – (5 + 24 + 88) = 90 – 117= -27

Ternyata harga det (A) = det (C).

Dalil : Kalau baris yang ke –i dari suatu matrik kwadrat A dengan n baris dan n kolom yang terdini dari elemen-elemen Binomial, yaitu $a_{i1} + b_{i1}$, $a_{i2} + b_{i2}$, …, $a_{in} + b_{in}$., maka determinan dari matrik A sama dengan penjumlahan dari determinan 2 matrik A_1 dan matrik A_2, dimana matrik A_1 dan matrik A_2 pada baris yang ke –i masing-masing mempunyai elemen-elemen a_{i1}, a_{i2}, a_{i3}, …, a_{in} dan b_{i1}, b_{i2}, b_{i3} …., b_{in}., sedangkan pada baris lainnya (sisanya) dari dari kedua matrik itu mempunyai elemen-elemen yang sama dengan matrik yang asli.

Contoh :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 5 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Det (A) = 53 - 26 = 27

Det (A_1) = 31 – 20 = 11

Det (A_2) = 22 - 6 = 16

Det (A) = Det (A_1) + Det (A_2) = 11 + 16 = 27

Dalil : Kalau matrik A dan B, masing-masing matrik kwadrat dengan n baris dan n kolom, maka det (AB) = det (A) x det (B).

Contoh:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$AxB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 5 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

Det (A) = 2 -0 -2 -1 -1 -0 = -2, sedangkan Det (B) = 1 -4 -4 +4 = -3

Det (AB) = 18 +15 +0 -15 -12 -0 = 18 – 12 = 6

Det (AB) = det (A) x det (B) = -2 x -3 = 6

F. RUANGVEKTOR

Pengertian vektor diperlukan dalam pembahasan matrik, karena pengetahaun matrik berkaitan dengan pengetahuan tentang vektor dan begitu pula sebaliknya.

Definisi : Vektor berdemensi n ialah sustu susunan yang teratur dari elemen-elemen berupa angka-angka sebanyak n buah yang disusun baik menurut baris, dari kiri kekanan disebut sebagai **vektor baris** (*row vector*) maupun menurut kolom, yang tersusun dari atas ke bawah disebut sebagai **vektor kolom** (*column vector*)

$X = (x_1, x_2, x_3, \; .. , x_n)$, disebut sebagai vektor baris

$$\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ . \\ . \\ y_n \end{pmatrix}$$, disebut vektor kolom

Definisi : Yang disebut ruang vektor berdemensi n ialah suatu koleksi yang lengkap (set) dari suatu kumpulan vektor yang berkomponen sebanyak n dimana persyaratan penjumlahan dan perkalain tetap berlaku bagi vektor-vektor ini dan ruang vektor yang merupakan set ini diberi simbul F^n. Vektor dengan komponen sebanyak n, disebut vektor berdemensi n. Jika k suatu scalar dan X berada pada F^n maka kX juga berada di F^n. Kalau X dan Y berada di F^n maka $X \pm Y$ juga berada di F^n.

Definisi : Apabila terdapat kumpulan dari vektor-vektor (*set of vectors*) sebanyak m yang masing- masing berdemensi n,dikatakan sebagai $X_1, X_2, X_3, \dots , X_m$

dan sebuah lain berdemensi n, disebut vektor A dan apabila berlaku hubungan :

$A = k_1X_1 + k_1X_2 + k_1X_3 + \ldots + k_mX_m = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{kiXi}$, dimana k_i = bil. konstan, vektor A disebut **kombinasi linier** (*linier combination*) dari vektor-vektor X_1, X_2, X_3, … , X_m.

Contoh :

$X_1 = (1, 0, 0)$; $X_2 = (0, 1, 0)$, $X_3 = (0, 0, 1)$, dan A (2, 3, 1)

Ternyata $A = 2X_1 + 3X_2 + X_3$

Jadi A merupakan kombinasi linier dari vektor-vektor X_1, X_2 , X_3 dengan skalar k_1=2, K_2=3, dan k_3=1, dan dapat ditunjukkan bahwa :

$$2X_1 + 3X_2 + X_3 = 2\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} X_1 + 3\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} X_2 + 1\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} X_3$$

$$= \begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix} X_1 + \begin{pmatrix}0\\3\\0\end{pmatrix} X_2 + \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = A$$

Dalam kumpulan vektor (set of vectors) terdapat dua sifat penting yang dimiliki yaitu yang disebut sebagai **ketergantungan linier** (*linierly dependence*) dan **kebebasan linier** (*linierly independence*).

Definisi : Suatu set of vector sebanyak m, berasal dari ruang vektor F^n , dikatakan ***linierly dependence*** apabila untuk scalar k_1, k_2, k_3, … , k_m, berlaku hubungan sebagai berikut :

$k_1X_1 + k_2X_2 + k_3X_3 + \ldots + k_mX_m = 0$, dengan syarat paling tidak satu skalar k, dikatakan k_i tidak sama dengan 0 ($k_i \neq 0$).

Suatu set of vector sebanyak m, berasal dari ruang vektor F^n , dikatakan ***linierly independence*** apabila untuk scalar k_1, k_2, k_3, … , k_m, berlaku hubungan sebagai berikut :

$k_1X_1 + k_2X_2 + k_3X_3 + \ \dots + k_mX_m = 0$, dengan syarat semua skalar $k = 0$, yaitu $k_1{=}k_2{=}k_3, \dots, k_m = 0$.

Dalil : Kalau vektor sebanyak m, yaitu $X_1, X_2, X_3, \dots, X_m$ ***linierly dependent***, maka salah satu vektor dari set vektor tersebut dapat dinyatakan sebagai ***kombinasi linier*** dari vektor-vektor lainnya.

G. TRANSFORMASI LINIER, TRANSFORMASI ELEMENTER DAN RANK

1. Transformasi Linier dan non linier

Transformasi linier adalah salah satu bentuk operasi pada matrik yang merupaka hubungan antara variable-variabel lama dengan variable-variabel baru yang merupakan hasil transformasi yang berfungsi untuk memecahkan suatu persoalan. Transformasi ini telah digunakan diatas pada perkalian matrik. Transformasi linier dari variable-variabel dan teori matrik mempunyai hubungan yang sangat dekat.Transformasi linier dapat memberikan interprestasi geometric yang sangat menarik.

Sebagai contoh suatu bentuk Transformasi Linier adalah :

$$y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2$$

$$y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2$$

kalau ditulis dalam bentuk matrik adalah : $Y = A\,X$

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Transformasi $Y = AX$ berarti menggerakkan satu tituk dalam bidang (x_1, x_2) menjadi titik lainnya juda dibidang (x_1, x_2). Transformasi linier dalam bentuk $Y = AX$ mempunyai sifat-sifat, apabila $Y_1 = AX_1$, dan $Y_2 = AX_2$, berlaku:

$Y_1 + Y_2 = AX_1 + AX_2 = A (X_1 + X_2)$

Apabila Y_1 dan Y_2 merupakan image dari X_1 dan X_2 , dan $Y_1 + Y_2$ merupakan image (bayangan/pemetaan) dari $X_1 + X_2$, menunjukkan bahwa operasi mengenai penjumlahan berlaku dalam Transformasi. Apabila Y_1 merupakan image X_1 maka kemudian berlaku kY_1 merupakan image kX_1, karena berlaku $A (kX_1) = kA\ kX_1$.

Perkalian dari X dengan suatu harga/ scalar juga merupakan perkalian imagedari X dengan scalar yang sama. Ini berarti bahwa perkalian juga berlaku dalam Transformasi.

Hubungan $Y = A X$ dan apabila matrik A merupakan matrik non singgular (memenuhi syarat bahwa $\det (A) \neq 0$), akan dapat dicari X dalam hubungan : $X = A^{-1} Y$, dimana matrik A^{-1} merupakan invers dari matrik A. Setiap titik dari bidang (x_1, x_2) berkoresponden dengan satu titik saja dari bidang (y_1, y_2), dan juga berlaku sebaliknya bahwa setiap titik dari bidang (y_1, y_2) berkoresponden dengan satu titik saja dari bidang (x_1, x_2). Transformasi yang mempunyai sifat seperti ini disebut satu lawan satu (*one to one transformation*).

Definisi : Suatu Transformasi linier T terhadap vektor space (ruang vektor) F^n adalah suatu koresponden yang memetakan setiap vektor x dari F^n menjadi satu vektor T (x) dari vector space F^m dimana m bisa >, =, <, dari n, sedemikian rupa sehingga vektor-vektor X_1 dan X_2 dari F^n dan semua skalar k_1, k_2, mempunyai hubungan sebagai berikut:

$$T(k_1X_1 + k_2X_2) = k_1 T(X_1) + k_2 T(X_2).$$

Jika $k_1= k_2 = 1$, hubungannya menjadi $T(X_1 + X_2) = T(X_1) + T(X_2)$

Seringkali T disebut operasi dari transformasi yang mentransformasikan (mengubah bentuk) vektor X menjadi vektor Y.

Contoh 1 :

Tunjukkan bahwa Transformasi $y = ax$ merupakan transformasi linier.

Jawab :

$T(x) = ax$

$T(k_1x_1 + k_2x_2) = a(k_1x_1 + k_2x_2) = k_1(ax_1) + k_2(ax_2) = k_1 T(x_1) + k_2 T(x_2)$.

(karena sama maka linier)

Contoh 2 :

Tunjukkan bahwa Transformasi $y = bx^2$ merupakan transformasi non linier.

Jawab :

Untuk menjawab pertanyaan diatas cukup dengan menunjukkan bahwa

$$T(k_1x_1 + k_2x_2) = b(k_1x_1 + k_2x_2)^2$$

$$= b(k_1x_1)^2 + b(k_2x_2)^2 + 2b\ k_1k_2\ x_1x_2$$

$$T(k_1x_1 + k_2x_2) \neq k_1T(x_1) + k_2T(x_2) = bk_1x_1^2 + bk_2x_2^2$$

(karena tidak sama maka transformasi diatas merupakan transformasi non linier

2. Transformasi Elementer

Jika A merupakan suatu matrik berdemensi m x n, maka yang disebut transformasi elementer adalah :

1. Menukarkan dua baris atau dua kolom yang berdekatan atau tidak berdekatan;
2. Memperkalikan semua elemen dari suatu baris atau suatu kolom dengan bilangan konstan k. Misalkan semua elemen dari baris ke –i dikalikan bilangan konstan k.
3. Penambahan pada elemen-elemen dari suatu baris atau kolom dengan hasil kali semua elemen dari baris atau kolom lain dengan bilangan konstan k.

Contoh 1 :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{a}1 & \mathbf{a}2 & \mathbf{a}3 \\ \mathbf{b}1 & \mathbf{b}2 & \mathbf{b}3 \\ \mathbf{c}1 & \mathbf{c}2 & \mathbf{c}3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2\mathbf{b}1 & 2\mathbf{b}2 & 2\mathbf{b}3 \\ \mathbf{a}1 & \mathbf{a}2 & \mathbf{a}3 \\ \mathbf{c}1 & \mathbf{c}2 & \mathbf{c}3 \end{pmatrix}$$

matrik diatas terlihat bahwa elemen-elemen baris 1 menjadi elemen-elemen baris ke 2, dan elemen-elemen baris ke 2 dikalikan 2 dan menjadi elemen-elemen baris 1

Contoh 2 :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 5 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[b_3\ -\ b_2]{b_1+2\ b_2} \begin{pmatrix} 5 & 10 & 5 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

3. Rank

Dalam mempelajari pengertian dari RANK terlebih dahulu perlu dimengerti pengertian dari Minor Matrik. Minor Matrik telah dibawas di bagian depan. Minor Matrik merupakan bagian dari matrik yang muncul dari pengambilan salah satu baris atau salah satu kolom. Apabila suatu matrik ordo n x n, maka salah satu minor matriknya berordo (n-1) x (n-1). Yang disebut dengan minor determinan adalah determinan dari minor matrik tersebut.

Definisi : Jika Matrik A apabila terdapat sedikit-dikitnya satu minor determinan yang tidak lenyap (determinannya $\neq 0$) dan ternyata terdiri dari r baris, akan tetapi untuk minor determinan yang pasti lenyap apabila minor matriknya terdiri dari (r+1) baris, matrik A dikatakan mempunyai RANK sebesar r, dan diberi simbul rank (A) = r(A) = r.

Pengertian rank ini mempunyai peranan penting didalam pemecahan persamaan-persamaan linier, sebab dengan mengetahui besarnya rank dari suatu matrik dapat diketahui apakah suatu persamaan linier mempunyai solusi.

Definisi : Suatu matrik kwadrat A berordo n x n, disebut ***non singular*** apabila : rank (A) = r(A) = r = n dan ***singular*** apabila r < n.

H. INVERS SUATU MATRIK

Invers suatu matrik adalah kebalikan dari matrik tersebut. Jika terdapat matrik A, yang dimaksut dengan matrik inversnya adalah A^{-1}. Suatu invers mempunyai sifat apabila dikalikan dengan matrik aslinya maka hasilnya akan sama dengan 1. Berlaku hubungan bahwa $A.A^{-1} = I$

Definisi : Misalkan Matri A merupakan matrik bujursangkar berordo n, dan I_n merupakan suatu matrik identitas, apabila ada matrik bujursangkar A^{-1} akan sedemikian rupa sehingga berlaku hubungan sebagai berikut : $A.A^{-1} = A^{-1}A = I$ dan A^{-1} disebut invers dari matrik A.

Contoh:

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{b} \\ \mathbf{c} & \mathbf{d} \end{pmatrix}, \text{ Cari } A^{-1} =$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\text{Det (A)}} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Misalkan $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, det (A) = 4 – 6 = -2

$$A^{-1} = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1,5 & -0,5 \end{pmatrix}$$

dibuktikan :

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1,5 & -0,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2+3 & 1-1 \\ -6+6 & 3-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

1. Mencari Invers Suatu Matrik menggunakan Metode Substitusi

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; tentukan A^{-1} menggunakan substitusi

berlaku ketentuan $A.A^{-1} = I$, misalkan $A^{-1} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$

$$A.A^{-1} = I = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A.A^{-1} = I = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 3 & -7 \\ -1 & -1 & 2 \\ -2 & -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

hasil perkalian antara matrik A dan matrik A^{-1} seperti berikut :

$a + 2d + g = 1$ .... (1) $\quad$ $b + 2e + h = 0$ … (4) $\quad$ $c + 2f + i = 0$ …. (7)

$a - d + 3g = 0$ .... (2) $\quad$ $b - e + 3h = 1$ … (5) $\quad$ $c - f + 3i = 0$ …. (8)

$a + d + 2g = 0$ … (3) $\quad$ $b + e + 2h = 0$ … (6) $\quad$ $c + f + 2i = 1$ …. (9)

terdapat 9 persamaan dengan 9 variabel, sehingga masing-masing variable akan diperoleh solusinya (harganya

(1)	$a + 2d + g = 1$	(1)	$a + 2d + g = 1$
(2)	$a - d + 3g = 0$	(3)	$a + d + 2g = 0$
	------------------ -		------------------- -

$(1) - (2) \rightarrow 0 + 3d - 2g = 1$ (10) $\quad$ $(1) - (3) \rightarrow 0 + d - g = 1$ (11)

(10) $\quad 3d - 2g = 1$

2 x (11) $\quad 2d - 2g = 2 \rightarrow (10) - (2x(11)) \rightarrow d = -1$ (12)

$(12) \rightarrow (11) \quad -1 - g = 1 \rightarrow g = -2$ (13)

(12) dan $(13) \rightarrow (1) \quad a + 2(-1) + (-2) = a - 4 = 1 \rightarrow a = 5$

Jadi harga a = 5, d = -1, dan g=-2

(4)	b + 2e + h = 0		(4)	b + 2e + h = 0	
(5)	b- e + 3h = 1		(6)	b + e + 2h = 0	
	------------------ -			-------------------- -	

(4) – (5) → 0 + 3e – 2h= -1 (14) (4) – (6) → 0 + e – h = 0 → e = h (15)

(15) →(10) 3h – 2h = -1 → h = -1 (16) dan e=h= -1 (17)

(16) dan (17) → (4) b + 2.(-1) + (-1) = 0 → b = 3

Jadi harga b = 3, e = -1, dan h=-1

(7)	c + 2f + i = 0		(7)	c + 2f + i = 0	
(8)	c - f + 3i = 0		(9)	c + f + 2i = 1	
	------------------ -			-------------------- -	

(7) – (8) → 0 + 3f – 2i = -0 (7) – (9) → 0 + f – i = -1 (19)

f = (2/3)i (18)

(18) →(19) → (2/3)i - i = -1 → - (1/3)i = -1 → **i = 3** (20)

(20) →(18) → **f = (2/3).3 = 2** (21)

(20) dan (21) → (7) c + 2.(2) + (3) = 0 → **c = -7**

Jadi harga c = -7, f = 2, dan i = 3

Matrik Invers yang dicari :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -7 \\ -1 & -1 & 2 \\ -2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

dan berlaku hubungan :

$$A.A^{-1} = I = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 3 & -7 \\ -1 & -1 & 2 \\ -2 & -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Mencari Invers Suatu Matrik menggunakan Adjoint

Terdapat suatu matrik bujursangkar berordo n, setiap elemen dari matrik mempunyai kofaktor, yaitu elemen a_{ij} mempunyai kofaktor K_{ij}. Apabila semua kofaktor tersebut dihitung untuk semua elemen dari matrik A, dan akan dibentuk matrik K dengan kofaktor dari semua elemen matrik A, sebagai elemennya, maka :

$$K = (Kij) = \begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} & \dots & K_{1n} \\ K_{21} & K_{22} & \dots & K_{2n} \\ . & . & \dots & \\ K_{m1} & K_{m2} & \dots & K_{mn} \end{pmatrix} \text{; disebut sebagai matrik Kofaktor}$$

Definisi : Adjoint dari Matrik A ialah suatu matrik yang elemen-elemennya terdiri dari transpose dari semua kofaktor dari elemen-elemen matrik A, dengan syarat K= Kij, dimana Kij adalah kofaktor dari elemen aij, maka adjoint dari matrik A yaitu: adj (A) = $K^{|}$ = Kji. Jadi adj (A) ialah transpose dari matrik kofaktor K.

$$Adj\ (A) = K^{|} = (Kji) = \begin{pmatrix} K_{11} & K_{21} & \dots & K_{m1} \\ K_{12} & K_{22} & \dots & K_{m2} \\ . & . & \dots & . \\ K_{1n} & K_{2n} & \dots & K_{mn} \end{pmatrix} ; A^{-1} = \frac{K^{|}}{\det(A)}$$

Contoh :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$; tentukan A^{-1} menggunakan matrik Adjoint

Jawab :

1. Cari harga determinannya
2. Cari Harga masing-masing matrik kofaktornya (Kij)
3. Transfose matrik kofaktornya, mencari matrik adjoint (adj(A) =(Kji))

Det (A) = -2 + 6 + 1 + 1 -3 -4 = -9 + 8 = -1

$K_{11} = + \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -5$; $\quad K_{12} = - \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -(-1) = 1$

$K_{13} = + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2$; $\quad K_{21} = - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -(3) = -3$

$K_{22} = + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1$; $\quad K_{23} = - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -(-1) = 1$

$K_{31} = + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 7$; $\quad K_{32} = - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -(2) = -2$

$K_{33} = + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -3$

Matrik Kofaktornya adalah : $K = (K_{ij}) = \begin{pmatrix} -5 & 1 & 2 \\ -3 & 1 & 1 \\ 7 & -2 & -3 \end{pmatrix}$; $K^{|} = K_{ij} = \begin{pmatrix} -5 & -3 & 7 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$

$$A^{-1} = -1 \begin{pmatrix} -5 & -3 & 7 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -7 \\ -1 & -1 & 2 \\ -2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

3. Mencari Invers Suatu Matrik menggunakan Metode Kounter

Metode ini berdasarkan atas teori transformasi elementer yang telah dibahas didepan. Transformasinya menggunakan baris dari matrik yang inversnya akan dicari.

Dalil : Jika suatu matrik bujursangkar yang non singular, dimana det (A) $\neq$ 0, dan berordo n dan I_n merupakan matrik satuan berordo n. Kemudian I diletakkan pada sebelah kanan matrik A, maka akan diperoleh suatu matrik M yang disebut ***Augmented*** matrik sebagai berikut : M = A | I_n . jika baris-baris matrik A maupun baris-baris matrik I_n terhadap baris-baris ***Augmented*** M dilakukan transformasi elementer sedemikian rupa sehingga matrik A berubah menjadi I_n maka akan diperoleh invers matrik A atau A^{-1} yang berada ditempat dimana I_n berasal, dengan kata lain bahwa A berubah menjadi I_n dan I_n berubah menjadi A^{-1}.

Contoh :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$; tentukan A^{-1} menggunakan metode Kounter

Jawab :

$$M = A \mid I_3 = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} \longrightarrow \\ b_2 - b_1 \\ b_3 - b_1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} b_1 + 2b_3 \\ b_2 - 2b_3 \\ \longrightarrow \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} \longrightarrow \\ \\ b_3 - b_2 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{l} b_1 - 3b_3 \\ b_2 \text{ x } (-1) \\ \\ \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 5 & 3 & -7 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & 3 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} I_n & A^{-1} \end{array}\right)$$

jadi harga $$A^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -7 \\ -1 & -1 & 2 \\ -2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

4. Mencari Invers Suatu Matrik menggunakan Matrik Partisi

Metode mencari invers suatu matrik berdasarkan pembagian matrik mnjadi bagian-bagian matrik yang lebih kecil atau sub matriknya.

Misalkan terdapat matrik bujursangkar ber ordo n, matrik tersebut adalah matrik:

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{P} & \mathbf{Q} \\ \mathbf{R} & \mathbf{S} \end{pmatrix} \qquad A^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{E} & \mathbf{F} \\ \mathbf{G} & \mathbf{H} \end{pmatrix}$$

Pada matrik berlaku hokum, $A.A^{-1} = I$, sehingga

$$\begin{pmatrix} \mathbf{P} & \mathbf{Q} \\ \mathbf{R} & \mathbf{S} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{E} & \mathbf{F} \\ \mathbf{G} & \mathbf{H} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{I} & 0 \\ 0 & \mathbf{I} \end{pmatrix}$$

$PE + QG = I$ ……….. (1)

$PF + QH = 0$ ………… (2)

$RE + SG = 0$ ………… (3)

$RF + SH = I$ ……….. (4)

(3) ……. $RE + SG = 0 \rightarrow SG = -RE, \rightarrow G = -S^{-1} RE$ ………………… (5)

(5) $\rightarrow$ (1) .. $PE + QG = I \rightarrow PE + Q(G = -S^{-1} RE) = I$

$PE - Q S^{-1}RE = I \rightarrow (P - Q S^{-1}R) E = I \rightarrow E = (P - Q S^{-1}R)^{-1}$ …… (6)

(4) $\rightarrow$ $RF + SH = I \rightarrow SH = I - RF \rightarrow H = S^{-1}(I - RF)$

$H = S^{-1} - S^{-1}RF$

(2) $\rightarrow$ $PF + QH = 0 \rightarrow PF + Q (S^{-1} - S^{-1}RF) = 0$

$PF + Q S^{-1} - QS^{-1}RF) = 0 \rightarrow F(P - QS^{-1}R) = - Q S^{-1}$ …………….(7)

(6) $\rightarrow$(7) $FE^{-1} = - Q S^{-1} \rightarrow F = -E Q S^{-1}$ ………………………………… ..(8)

diperoleh hasil harga-harga matrik invers dengan elemen-elemen :

$E = (P - Q S^{-1}R)^{-1}$

$F = -E Q S^{-1}$

$G = -S^{-1} RE$

$H = S^{-1} - S^{-1}RF$

Contoh :

Carilah invers dari matrik $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ dengan menggunakan partisi matrik.

Jawab :

$$A = \left(\begin{array}{cc:c} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ \hdashline 1 & 1 & 2 \end{array}\right) = \begin{pmatrix} \mathbf{P} & \mathbf{Q} \\ \mathbf{R} & \mathbf{S} \end{pmatrix}$$

$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ $Q = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ $R = (\ 1 \quad 1\ )$ $S = (\ 2\ )$ $S^{-1} = (\ 1/2\ )$

$E = (P - Q S^{-1}R)^{-1}$

$$Q S^{-1}R = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} (\ 1/2\ )(\ 1 \quad 1\ ) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} (\ ½ \quad ½\ ) = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 3/2 & 3/2 \end{pmatrix}$$

$$P - Q S^{-1}R = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 3/2 & 3/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 3/2 \\ -1/2 & -5/2 \end{pmatrix}$$

$$E = (P - Q S^{-1}R)^{-1} = -2 \begin{pmatrix} -5/2 & -3/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{E} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$F = -E\,Q\,S^{-1}$

$$\mathbf{F = -E\,Q\,S^{-1}} = \begin{pmatrix} -5 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 \\ 3/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \quad \mathbf{F} = \begin{pmatrix} -7 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$G = -S^{-1}\,RE$

$$\mathbf{G = -S^{-1}\,RE = -}\ (1/2)\ (\ 1 \quad 1\ ) \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = (\ -1/2 \quad -1/2\ ) \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = (\ -2 \quad -1\ )$$

$\mathbf{G = (\ -2 \ \ -1\ )}$

$H = S^{-1} - \ S^{-1}RF$

$$H = S^{-1} - S^{-1}RF = (1/2\ ) - (1/2)\ (\ 1 \ \ 1\ ) \begin{pmatrix} -7 \\ 2 \end{pmatrix} = (\ 1/2\ ) - (\ 1/2 \ \ 1/2\ ) \begin{pmatrix} -7 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$= (\ 1/2\ ) + (\ 5/2\ ) = (\ 3\ ) \Rightarrow \quad \mathbf{H} = (\ 3\ )$$

$$\text{jadi harga} \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -7 \\ -1 & -1 & 2 \\ -2 & -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{P} & \mathbf{Q} \\ \mathbf{R} & \mathbf{S} \end{pmatrix}$$

Latihan

1. Jika Terdapat Suatu Matrik :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -2 \\ 4 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad E = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Tentukan Harga Matrik baru Jika :

a. A. B	b. B. A
c. 3 (A – D)	d. (E + B)
e. 2 B – 3 E	f. B.A.C
g. $(B.A)^2$	h. $(A . B)^2$
i. A.B + C	j. B.A – C
k. $C^2 – BA$	l. $((BA)^2 + C^2)$

2. JIka Matriks A, B, C, D, E seperti pada No. 1. tentukan harga :

a. det (C)	b. det (A.B)
c. det (D.E)	d. det (B.A)
e. det (E.D)	f. det $((B.A)^2)$
g. det (C^2)	h. det (2(B.A))

3. Tentukan Harga determinan dari matrik A. matrik B, dan Matrik C, matrik D, dan Matrik E dibawah ini :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & -1 & -3 \\ 3 & 3 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & -1 & -3 \\ 3 & 6 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & -3 \\ 3 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & -1 & 2 & 2 \\ 2 & -3 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \qquad E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 2 & 2 \\ 2 & -3 & 3 & 2 & -3 \\ 2 & 4 & 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

4. Tentukan harga determinan dari matrik A, matrik B, dan matrik C, dan matrik D, dan matrik E, dengan menggunakan matrik kofaktor :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -2 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & -3 \\ 3 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 2 & 2 \\ 2 & -3 & 3 & 2 & -3 \\ 2 & 4 & 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

5. Tentukan harga x, y, dan z dengan menggunakan harga determinan menggunakan persamaan dibawah ini :

a.
$$\begin{aligned} 2x + y + z &= 4 \\ x + 2y - z &= 5 \\ -x + 4y - z &= 3 \end{aligned}$$

b.
$$\begin{aligned} x + y + z &= 6 \\ x + y - z &= 4 \\ 2x - 2y - z &= 3 \end{aligned}$$

c.
$$\begin{aligned} x + y + z &= 2 \\ x + 2y - z &= 4 \\ -x + 4y + 3z &= 0 \end{aligned}$$

6. tentukan harga matrik invers dari matrik dibawah ini :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$$

7. Tentukan harga matrik invers dari matrik A, B, C, D, dan E dibawah ini dengan menggunakan metode Substitusi :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -2 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -2 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & -3 \\ 3 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & -3 \\ 3 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \qquad E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 2 & 2 \\ 2 & -3 & 3 & 2 & -3 \\ 2 & 4 & 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

8. Tentukan harga matrik invers dari matrik A, B, C, D, dan E seperti pada soal no. 7 diatas dengan menggunakan metode matrik adjoint :

9. Tentukan harga matrik invers dari matrik A, B, C, D, dan E seperti pada soal no. 7 diatas dengan menggunakan metode kounter :

10. Tentukan harga matrik invers dari matrik A, B, C, D, dan E seperti pada soal no. 7 diatas dengan menggunakan metode matrik partisi

MODUL V

DEFERENSIAL

Buku materi pokok 5 yang berisikan materi **Deferensial.** Buku materi pokok ini berisikan materi yang membahas tentang definisi deferensial atau derivatif menggunakan aturan limit fungsi, derivatif fungsi aljabar dengan rumus-rumusnya. Dalam derivatif fungsi aljabar diterangkan mengenai derivatif fungsi eksplisit, derivatif fungsi implisit, derivatif parsial, derivatif fungsi bersusun, dan derivatif fungsi ke n. Derivatif fungsi Transenden yang terdiri dari derivatif fungsi trigonometri, derivatif fungsi siklometri (invers trigonometri), derivatif fungsi eksponen, dan derivatif fungsi logaritma diberikan beserta dengan contoh soal.

Pada akhir pemberian materi diterangkan tentang penggunaan / aplikasi dari derivatif untuk mengetahui fungsi naik dan fungsi turun, maksimum dan fungsi minimum suatu fungsi, penggunaan derivatif untuk menentukan persamaan garis singgung dan pendekatan suatu nilai menggunakan derivatif fungsi menurut teorema harga rata-rata.

Penguasan materi sebelumya tentang materi persamaan dan fungsi yang terdiri dari fungsi dan persamaan dan trigonometri sangat diperlukan dalam mempelajari materi Deferensial ini. Fungsi dan persamaan yang terdiri dari fungsi dan persamaan aljabar, logaritma dan eksponen. Fungsi dan persamaan trigonometri dan siklometri banyak kaitannya dalam materi Deferensial. Penguasaan Limit fungsi yang tidak dibahas dalam materi pada materi pokok matematika ini sangat berkaitan dan harap dipelajari tersendiri.

Diharapkan setelah mempelajari materi Deferensial mahasiswa mempunyai dasar yang kuat dalam mempelajari meteri matematika selanjutnya dan digunakan dasar untuk mempelajari mata kuliah statistik dan mata kuliah lain yang berhubungan dengan pengukuran antara lain ilmu ukur tanah, ilmu hitung perataan, kerangka dasar pemetaan, dan ilmu-ilmu lain yang sesuai.

A. PENGERTIAN DEFERENSIAL

Deferensial merupakan salah satu kajian dalam Kalkulus. **Kalkulus** berasal dari bahasa Latin *calculus* yang artinya "batu kecil merupakan cabang ilmu matematika yang mencakup limit, **turunan,** integral, dan deret tak terhingga Kalkulus mempunyai aplikasi yang luas dalam bidang sains dan teknik dan digunakan untu memecahkan masalah yang kompleks yang mana aljabar tidak cukup untuk menyelesaikannnya. Kalkulus memiliki dua cabang utama, diferensial kalkulus dan integral kalkulus, yang berhubungan dengan teorema fundamental kalkulus

Dalam perkembangannya hitung deferensial merupakan perhitungan matematika tentang perubahan dan gerakan. Persoalan-persoalan tentang laju perubahan, misalnya penjalaran panas, kecepataan pertumbuhan dapat diselesaikan menggunakan hitung deferensial ini.

Gagasan utama dari hitung deferensial adalah pengertian turunan (derivatif), yang berasal dari masalah ilmu ukur, yaitu untuk menentukan garis singgung suatu titik pada kurva yang diketahui. Konsep ini baru dirumuskan pada permulaan abad 7 oleh ahli matematika perancis yang bernama Pierre de Fermat, yang mencoba menentukan maksimum dan minimum dari beberp fungsi tertentu. Selanjutnya gagasan dan metode-meode hitung deferensial dipelajari secara mendalam dan dikembangkan oleh ahli matemtika inggris Newton dan Leibniz dari Jerman.

Pada awalnya deferensial memang khusus di kembangkan untuk bidang fisika, tetapi dalam perkembangannya banyak bidang ilmu yang dapat dikembangkan menggunakan deferensial, seperti dalam cabang ilmu untuk pengukuran banyak dipergunakan deferensial untuk memecahkan masalah-masalah dan memperluas cabang ilmu tersebut.

Hitung deferensial dalam hal ini yang dibahas mengenai pengertian derivatif fungsi dan penggunaannya. Sebagai contoh untuk memahami pengertian deferensial menggunakannya sebagai laju perubahan. Apabila suatu benda bergerak dengan kecepatan yang tidak tetap dan menempuh jarak tertentu selama selang waktu tertentu, maka akan muncul masalah bagaimana cara menentukan kecepatan benda tersebut pada suatu saat t_1 suatu waktu, dengan t_1 berada pada satuan waktu tersebut.

Andaikan benda tersebut menempuh jarak S meter dalam t detik dan hubungan antara S dan t ditentukan oleh suatu rumus, misalnya $S = f(t) = t^2$, Dalam hal ini kecepatannya tidak tetap karena kecepatan $v = S/t = t$, tergantung dari waktu. Dari persamaan $S = f(t) = t^2$, setelah waktu berjalan 2 detik maka harga S = 4 meter dan setelah 5 detik maka S = 25 meter. Kecepatan rata-rata dalam selang waktu antara 3 dan 5 detik merupakan perubahan jarak dibagi dengan perubahan waktu, yaitu $(25 – 4)/ (5 – 3) = 21/3 = 7$ meter/detik.

Kecepatan rata-rata dari $t = t_1$ sampai $t = t_2$ adalah $(f(t_2) - f(t_1))/ (t_2 - t_1)$ meter / detik

Untuk menentukn kecepatan suatu benda pada saat t = 2 detik, dan diambil suatu selang waktu yang singkat misalnya h, dimana h merupakan bilangan positif yang relative kecil.

Sehingga kecepatan rata-rata dari t = 2 saampai t = 2 + h tersebut adalah :

$$\frac{f(2 + h) – f (2)}{(2 + h) – 2} = \frac{f(2 + h) – f (2)}{h} = \frac{(2 + h)^2 - 2}{h} = 4 + h \text{ meter / detik}$$

Apabila harga h dibuat sekecil mungkin dan mendekati nol maka akan dapat ditulis kecepataan benda tersebut:

$$V(2) = \lim_{h \to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \to 0} (4 + h) = 4 \text{ meter / detik}$$

Formulanya dapat ditulis :

$$\boxed{V(2) = \lim_{h \to 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h}}$$

Gagasan pada gerakan benda tadi dapat dibuat lebih umum untuk fungsi yang sembarang, sehingga dapat ditentukan ***laju perubahan nilai fungsi*** $f : x \to f(x)$ pada $x = a$, laju perubahan itu didefinisikan sebagai :

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h},$$

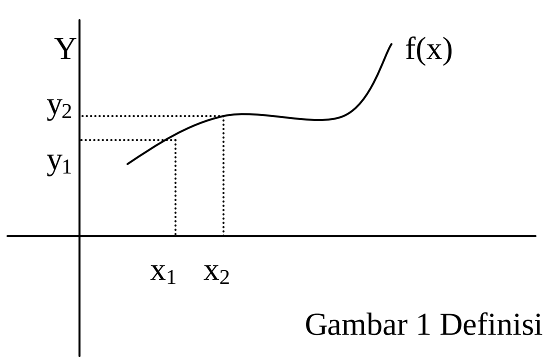
Nilai limit ini, yang diturunkan dari fungsi f, ditulis $f^{1}(a)$ dan disebut turunan (derifativ) dari fungsi f pada $x = a$

Jadi : $f^{1}(a) = \lim_{h \to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$

B. DERIVATIF FUNGSI

Derivatif mempunyai arti sebagai turunan. Arti derivatif dan deferensial untuk selanjutnya digunakan bersama-sama, dan mempunyai kesamaan arti.

Diketahui suatu fungsi $f : x \to y = f(x)$, misalkan nilai $x = x_1$ dan $x = x_2$ berturut-turut memberikan nilai fungsi $y_1 = f(x_1)$ dan $y_2 = f(x_2)$.



$y_2 - y_1 = \Delta y$ dan $x_2 - x_1 = \Delta x$

Gambar 1 Definisi Deferensial

$$\frac{dy}{dx} = f^1(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$$

Contoh 1 :

Tentukan harga turunan pertama (dy/dx), apabila $y = x^2 + 5$

Jawab :

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{((x+\Delta x)^2 + 5) - (x^2 + 5)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 + 5 - x^2 - 5}{\Delta x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x\,(2x + \Delta x)}{\Delta x} = 2x + 0 = 2x$$

Jika $y = x^2 + 5$, maka $dy/dx = y^1 = 2x$

1. Rumus-rumus Derivatif fungsi aljabar :

1. $\frac{\mathbf{d}}{\mathbf{dx}}\, C = 0$
2. $\frac{\mathbf{d}}{\mathbf{dx}}\, x^n = n\, x^{n-1}$
3. $\frac{\mathbf{d}}{\mathbf{dx}}\, C.\,f(x) = C\, \frac{\mathbf{d}}{\mathbf{dx}}\, f(x)$
4. $\frac{\mathbf{d}}{\mathbf{dx}}\,(f(x) + g(x)) = \frac{\mathbf{d}}{\mathbf{dx}}\, f(x) + \frac{\mathbf{d}}{\mathbf{dx}}\, g(x)$
5. $\frac{\mathbf{d}}{\mathbf{dx}}\,(f(x)\, ,\, g(x)) = g(x).\, \frac{\mathbf{d}}{\mathbf{dx}}\, f(x) + f(x)\, \frac{\mathbf{d}}{\mathbf{dx}}\, g(x)$
6. $\frac{\mathbf{d}}{\mathbf{dx}}\,(f(x) / g(x)) = \left(g(x)\, \frac{\mathbf{d}}{\mathbf{dx}}\, f(x) + f(x)\, \frac{\mathbf{d}}{\mathbf{dx}}\, g(x)\right) / (g(x)^2)$, untuk $g(x) \neq 0$

Contoh 2 :

Jika $y = f(x) = 3\,x\,{}^{2}\sqrt{x}$, tentukan harga $y^{l} = ?$

Jawab :

$$y = 3\,x^{5/2} \;\rightarrow\; y^{l} = 3\,(5/3)\,x^{3/2} = \mathbf{5\,x\,\sqrt{x}}$$

Contoh 3 :

Jika : $y = x^4 + x + 5$, tentukan harga $y^{l} = ?$

Jawab :

$$.\; y^{l} = \frac{\mathbf{dy}}{\mathbf{dx}} = \frac{\mathbf{d}}{\mathbf{dx}}\,x^4 + \frac{\mathbf{d}}{\mathbf{dx}}\,x + \frac{\mathbf{d}}{\mathbf{dx}}\,5 = \mathbf{4\,x^3 + 1}$$

2. Derivatif Fungsi implisit :

Persamaan $y = f(x)$ dapat juga ditulis dalam bentuk $y - f(x) = 0$ atau $F(x,y) = 0$ yang disebut sebagai bentuk implisit y sebagai fungsi x. Menentukan $\frac{\mathbf{dy}}{\mathbf{dx}}$ jika y dalam bentuk implisit dapat dilakukan dengan cara :

1. jika mungkin ubah dulu dalam bentuk $y = f(x)$, kemudian turunkan terhadap sumbu x, atau,
2. dengan menganggap y sebagai fungsi x, kemudian turunkan persamaan itu terhadap x dan selesaikan dalam bentuk $\frac{\mathbf{dy}}{\mathbf{dx}}$

Contoh 4 :

Tentukan $\frac{\mathbf{dy}}{\mathbf{dx}}$ jika $x^2 - 4xy + 2 = 0$;

Cara 1 :

kerena y dapat ditulis dalam bentuk ekplisit yaitu :

$$y = \frac{x^2 + 2}{4x}, \text{ atau } y = \tfrac{1}{4}\,x + \tfrac{1}{2}\,x^{-1}, \text{ maka } y^{l} = \tfrac{1}{4} + (1/2)(-1)x^{-2} = \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{2}\,x^{-2}$$

atau $y^1 = \dfrac{\mathbf{x^2 - 2}}{\mathbf{4\,x^2}}$

Cara ke 2 :

Dengan menggunakan derivatif parsial, yaitu masing-masing diturunkan ke x dank ke y

$x^2 - 4xy + 2 = 0 \rightarrow 2x\,dx - 4y\,dx - 4x\,dy = 0 : dx$

$2x - 4y - 4x \dfrac{\mathbf{dy}}{\mathbf{dx}} = 0$, maka $\dfrac{\mathbf{dy}}{\mathbf{dx}} = (2x - 4y) / 4x = (x - 2y) / 2x$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(x - 2(x^2 + 2)/4x)}{2\,x} = \frac{(4x^2 - 2\,x^2 - 4)}{8x^2} = \frac{(2x^2 - 4)}{8x^2} = \frac{\mathbf{x^2 - 2}}{\mathbf{4\,x^2}}$$

3. Derivatif Fungsi bersusun :

Jika y = f(z), dan z = g(x), maka y = f(g(x)) merupakan fungsi x. Jika y mempunyai derivative terhadap z dan z mempunyai derivative terhadap x, maka :

$\dfrac{\mathbf{dy}}{\mathbf{dx}} = \dfrac{\mathbf{dy}}{\mathbf{dz}}\ \dfrac{\mathbf{dz}}{\mathbf{dx}}$, yang disebut aturan rantai.

Contoh 5 :

tentukan $\dfrac{\mathbf{dy}}{\mathbf{dx}}$, jika $y = (3x^2 – 4)^5$

Jawab :

misalkan $z = 3x^2 – 4$, maka $y = z^5$

$\dfrac{\mathbf{dy}}{\mathbf{dz}} = 5\,z^4$, dan $\dfrac{\mathbf{dz}}{\mathbf{dx}} = 6\,x$

jadi $\dfrac{\mathbf{dy}}{\mathbf{dx}} = \dfrac{\mathbf{dy}}{\mathbf{dz}}\ \dfrac{\mathbf{dz}}{\mathbf{dx}} = 5\,z^4.6x = 5\,(3x^2 – 4)^4\,6x = 30x\,(3x^2 – 4)^4$

Contoh 6 :

Jika $y = \sqrt{(3 + 4x – x^2)}$, tujukkan bahwa $\dfrac{\mathbf{dy}}{\mathbf{dx}} = (2 – x) / y$

Jawab :

Misalkan U = 3 + 4x – x^2, maka y = $U^{1/2}$

$\frac{du}{dx}$ = 4 – 2x dan $\frac{dy}{du}$ = ½ $U^{-1/2}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\ \frac{du}{dx}$ = ½ $(3 + 4x - x^2)^{-1/2}$ (4 – 2x) = ½ y^{-1} (4 – 2x) = (2 – x) / y

$\frac{dy}{dx}$ = (2 – x) / y, terbukti

Derivatif fungsi bersusun dapat diperluas dalam derivatif fungsi parameter, yaitu terdapat persamaan-persamaan dalam parameter yang lain selain x dan y.

Sebagai contoh apabila terdapat persamaan y = f(t) dan x = f(t) maka masing masing fungsi tersebut akan diturunkan dalam t dan akan terdapat hubungan antara x dan y sebagai berikut :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\ \frac{dt}{dx}$$

sebagai contoh misalkan, terdapat persamaan y = t + 2 dan x = $t^2 + t^{-1}$

$\frac{dy}{dt}$ = 1 dan $\frac{dx}{dt} = 2t - t^{-2} = \frac{2t^3 - 1}{t^2}$ sehingga $\frac{dt}{dx} = -\ \frac{t^2}{2t^3-1}$

$$\frac{dy}{dx} = 1 \cdot \frac{t^2}{2t^3-1} = \frac{t^2}{2t^3-1}$$

4. Derivatif Fungsi Invers :

Jika y = f(z), dan misalkan fungsi f : x → y = f(x) mempunyai invers g : y → x = f(y)

Jika g mempunyai derivatif terhadap x maka

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} f(x) = 1/ \frac{d}{dy} g(y) = 1/ \frac{dx}{dy}$$

dengan syarat

$$\frac{dx}{dy} = \frac{d}{dy}\ g(y) \neq 0$$

Contoh 7 :

Tentukan $\frac{dy}{dx}$ titik (3,1) jika $x = y^2 + 2y$

Jawab :

karena $x = y^2 + 2y$ maka $\frac{dx}{dy} = 2y + 2$

dan $\frac{dy}{dx} = 1/\frac{dx}{dy} = 1 / (2y + 2) = 1 / (2 (y+ 1))$

jadi dititik (3,1) , $\frac{dy}{dx} = 1/ 2(1+ 1) = ¼$

Contoh 8 :

Tentukan $\frac{dy}{dx}$ **, jika** $x = y^3 - 3y^{-1}$

Jawab :

$$\frac{dx}{dy} = 3y^2 + 3y^{-2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3(y^4 + 1)}{y^2}, \quad \text{jadi} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{3(y^4 + 1)}$$

5. Derivatif Fungsi ordo n :

Jika terdapat fungsi $y = f(x)$ mempunyai derivaatif terhadap x, yaitu $\frac{dy}{dx} = y^{I} = f^{I}(x)$,

derivative ordo 2 ditulis $\frac{d^2y}{dx^2} = y^{II}(x)$, dan derivative ordo n ditulis $\frac{d^ny}{dx^n} = y^n(x)$

Contoh 9 :

Jika $y = x^3 – 3x^2$ tentukan d^3y/dx^3

Jawab :

$y^{I} = 3x^2 - 6x$

$y^{II} = 6x - 6$

$y^{III} = 6$, **jadi** $d^3y/dx^3 = 6$

6. Derivatif Fungsi Trigonometri

$$\frac{dy}{dx} = f^{I}(x) = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x2) - f(x1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x1 + \Delta x) - f(x1)}{\Delta x}$$

jika y = sin x, tentukan harga dy/dx

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{\sin(x + \Delta x) - \sin(x)}{\Delta x}$$

$\sin\alpha - \sin\beta = 2 \sin \tfrac{1}{2}(\alpha - \beta) \cos \tfrac{1}{2}(\alpha + \beta)$

$$\Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin(x) = 2 \sin \tfrac{1}{2}(x + \Delta x - x) \cos \tfrac{1}{2}((x + \Delta x - x)$$

$$= 2 \sin \tfrac{1}{2}(\Delta x) \cos(x + \tfrac{1}{2}\Delta x)$$

$$\frac{dy}{dx} = f^{I}(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2 \sin \tfrac{1}{2}(\Delta x) \cos(x + \tfrac{1}{2}\Delta x}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin \tfrac{1}{2}(\Delta x) \cos(x + \tfrac{1}{2}\Delta x)}{\tfrac{1}{2}\Delta x}$$

misalkan $h = \tfrac{1}{2}\Delta x$, maka $h = \tfrac{1}{2}\, 0 = 0$,

maka persamaan diatas dapat dituliskan sebagai :

$$\frac{dy}{dx} = f^{I}(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{h \to 0} \frac{\sin h \cos(x + h)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\sin h}{h} \cdot \lim_{h \to 0} \cos(x + h) = 1 \cdot \cos(x + 0) = \cos x$$

Jadi jika y = Sin x maka $\mathbf{y^l = \dfrac{dy}{dx} = Cos\ x}$

Contoh 10

Jika y = Cos x. tentukan harga y^l

Jawab :

$y = \text{Cos } x = \text{Sin } (90^0 - x)$

$\mathbf{y^l} = \text{Cos } (90^0 - x).(-1) = -\text{Cos } (90^0 - x) = -\text{Sin } x$

Contoh 11

Jika y = tg x tentukan harga y^l

Jawab :

$y = \text{tg } x = \dfrac{\sin x}{\cos x} = \dfrac{f(x)}{g(x)} =$

$y^l = \dfrac{f'(x).g(x) - g'(x).f(x)}{g2(x)} = \dfrac{\cos x.\cos x - (-\sin x)\sin x}{\cos x \cos x} = \dfrac{1}{\cos x.\cos x} = \text{Sec}^2 x$

jadi jika y = tgx maka $y^l = \text{Sec}^2x$

7. Rumus-rumus Derivatif Fungsi Trigonometri

1. Jika y = Sin x maka y^l = Cos x
2. Jika y = Cos x maka y^l = - Sin x
3. Jika y = Tg x maka $y^l = \text{Sec}^2 x$
4. Jika y = Ctg x maka y^l = - Cosec x
5. Jika y = Sec x maka y^l = Sec x Tgx
6. Jika y = cosec x maka y^l = - Sec x. Ctg x
7. Jika y = Sin f(x) maka $y^l = \text{Cos } f(x).\ f^l(x)$
8. Jika y = Cos f(x) maka $y^l = -\text{Sin } f(x).\ f^l(x)$
9. Jika $y = \text{Sin}^n x$ maka $y^l = n\ \text{Sin}^{n-1} x.\ \text{Cos } x$
10. Jika $y = \text{Cos}^n x$ maka $y^l = n\ \text{Cos}^{n-1} x.\ (-\text{Sin } x)$
11. Jika $y = \text{Tg}^n x$ maka $y^l = n\ \text{Tg}^{n-1} x.\ (\text{Sec}^2 x)$

8. Derivatif Fungsi Siklometri

Fungsi siklometri merupakan invers dari fungsi trigonometri.

Jika terdapat fungsi y = arcsin x, tentukan harga turunan pertamanya

Fungsi y = arcsin x. maka x = sin y, sehingga $\mathbf{\frac{dx}{dy} = \cos y}$ **atau** $\frac{1}{\mathbf{dy/dx}}$ **= cos y**

$$\mathbf{\frac{dy}{dx} = 1/\cos y}$$

terdapat rumus bahwa $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ atau $\sin^2 y + \cos^2 y = 1$, sehingga diperoleh

$\cos y = \sqrt{(1 - \sin^2 y)}$

$$\mathbf{\frac{dy}{dx} = 1/\cos y =} 1/\sqrt{(1 - \sin^2 y)} = 1/\sqrt{(1 - x^2)}$$

dengan cara yang sama dengan diatas akan diperoleh :

1. Jika y = arc cos x maka $y^1 = -\frac{1}{\sqrt{(1 - x^2)}}$

2. Jika y = arc tg x maka $y^1 = \frac{1}{(1 + x^2)}$

3. Jika y = arc ctg x maka $y^1 = -\frac{1}{(1 + x^2)}$

4. Jika y = arc sec x maka $y^1 = \frac{1}{x\sqrt{(x^2 - 1)}}$

5. Jika y = arc cosec x maka $y^1 = \frac{1}{-x\sqrt{(x^2 - 1)}}$

9. Derivatif Fungsi Logaritma dan Exponen

Fungsi logaritma merupakan invers dari fungsi eksponen dan begitu pula sebaliknya

Menurut rumus binonium Newton, untuk bilangan asli n berlaku

$$(a+b)^n = a^n + \frac{n}{1} a^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{1.2} a^{n-2}b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} a^{n-3}b^3 + \ldots + b^n$$

jika dimisalkan a = 1 dan b = 1/n, maka diperoleh :

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1^n + \frac{n}{1}\,\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{1.2}\,\frac{1}{n.n} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{1}{n}\right)^n$$

$$= 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) + \ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{1}{n!}\,\frac{n!}{n^n}$$

untuk harga n = ~ , maka harganya menjadi :

$$\lim_{n\to\sim}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\sim}\left(1 + 1 + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{6}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) + \ldots\ldots\ldots\ldots\right)$$

$$= 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots\ldots\ldots = 2{,}7182\ \ldots\ldots$$

$$= e$$

jika terdapat fungsi logaritma $y = f(x) = {}^{a}\log x$ maka :

$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$

$$= {}^{a}\log(x + \Delta x) - {}^{a}\log x$$

$$= {}^{a}\log\left(\frac{x + \Delta x}{x}\right) = {}^{a}\log\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{x}\,{}^{a}\log\left(\frac{x + \Delta x}{x}\right) = {}^{a}\log\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{1/\Delta x}$$

$$= \frac{1}{x}\,{}^{a}\log\left(\frac{x + \Delta x}{x}\right)^{x/\Delta x.\,1/x} = \frac{1}{x}\,{}^{a}\log\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{x/\Delta x}$$

maka :

$$\lim_{\Delta x \to \sim} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to \sim} \left(\frac{1}{x} \; {}^{a}\log \left(1 + \frac{\Delta x}{x} \right)^{x / \Delta x} \right.$$

$$\lim_{\Delta x \to \sim} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{x} \; {}^{a}\log \lim_{\Delta x \to \sim} \left(1 + \frac{\Delta x}{x} \right)^{x / \Delta x} = \frac{1}{x} \; {}^{a}\log e$$

dengan cara yang sama jika $y = \ln x$ maka harga y^l akan sama dengan :

$$\lim_{\Delta x \to \sim} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{x} \; {}^{e}\log \lim_{\Delta x \to \sim} \left(1 + \frac{\Delta x}{x} \right)^{x / \Delta x} = \frac{1}{x} \; {}^{e}\log e$$

harga jika $y = \ln x$ maka harga $y^l = \dfrac{1}{x}$

dengan cara yang sama akan dapat ditentukan :

1. $y = a^{x}$ maka $dy/dx = y^l = a^x \ln a$
2. $y = \ln (f(x))$ maka $dy/dx = y^l = f^l(x) / f(x)$
3. $y = e^{x}$ maka $dy/dx = y^l = e^x \ln e = e^x$
4. $y = e^{f(x)}$ maka $dy/dx = y^l = f^{l}(x)\, e^{f(x)}$

Contoh 12 :

Jika $y = \ln (x + 2)^3$ tentukan harga y^l

Jawab :

$y = \ln (x + 2)^3 = 3 \ln (x + 2)$

$$\frac{dy}{dx} = 3 \, \frac{1}{(x + 2)} \, \frac{d}{dx} (x + 2) = \frac{3}{(x + 2)}$$

Contoh 13 :

Jika $y = e^{x2}$ tentukan harga y^l

Jawab :

$$\frac{dy}{dx} = e^{x2} \, \frac{d}{dx} (x^2) = 2x \, e^{x2}$$

Contoh 14 :

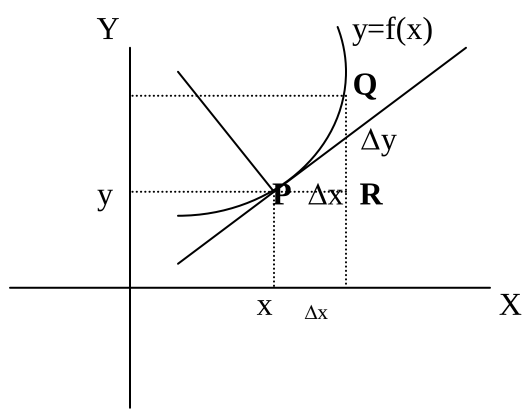
Jika $y = \ln (3x^2)$ tentukan harga y^l

Jawab :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{3x^2} \frac{d}{dx} (3x^2) = \frac{1}{3x^2} (6x) = \frac{2}{x}$$

C. PENERAPAN DERIVATIF

1. Sebagai Garis Singgung



Gambar 2 Deferensial sebagai garis singgung

untuk menentukan persamaan garis singgung pada suatu titik yang terletak pada kurva (grafik fungsi) yang diketahui, perlu ditinjau arti ilmu ukiur dari fyngsiu turunan (a, f(a)) pada suatu kurva.

Dari definisi pada pembahasan deferensial diatas disebutkan bahwa :

$$f^l(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Misalkan P(a,f(a)) dan Q ((a + Δx), f(a + Δx))

Maka PR = Δx dan PQ = f(a + Δx) – f(a)

$$\text{Gradien PQ} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}, \quad \text{PQ merupkan tali busur}$$

Bila Δx dibuat sekecil mungkin (mendekati 0), maka gradient garis PQ menjadi Gradien garis singgung pada titik P (a, f(a + Δx)),

oleh karena itu Gradien garis singgung dititik P (a, f(a + Δx)), adalah :

$$f^{1}(a) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$

jadi arti ilmu ukur dari fungsi turunan disustu titik adalah gradient garis singgung pada grafik fungsinya dititik yang bersangkutan.

Misalkan persamaan garis singgung dititik $x = 2$, pada suatu fungsi $y = 6x - x^3$ adalah :

untuk $y = 6x - x^3$, maka $f^{1}(x) = y^{1} = 6 - 3x^2 \rightarrow f^{1}(2) = 6 - 3(2)^2 = -6$

pada titik $x = 2$, hrga $y = 6(2) - (2)^3 = 12 - 8 = 4$, jadi titik P (2,4)

jadi persamaan garis singgung grafik fungsi $y = 6x - x^3$ pada titik (2,4) adalah :

$y = -6(x-2) + 4 = -6x + 16 \rightarrow y = -6x + 16$

Contoh 15 :

Tentukan sutu titik pada grafik fungsi $y = x^2$ yang garis singgungnya tegak lurus garis $x - 2y + 5 = 0$

Jawab :

Perhatikan garis $x - 2y + 5 = 0$, atau $y = ½x + 2½$

gradient garis singgung yang tegak lurus garis $y = ½x + 2½$ (gradient = m = ½) adalah -2 (syarat tegak lurus, jika m = - 1/m , m = 1/2, jadi n = -2)

fungsi $y = f(x) = x^2 \rightarrow f^{1}(x) = 2x$

akan ditentukan x sehingga $f^1(x) = -2$, diperoleh $2x = -2$, atau $x = -1$
untuk $x = -1$ diperoleh $y = f(x) = x^2 = (-1)^2 = 1$
jadi titik pada grafik $y = x^2$ yang garis singgungnya tegak lurus garis $x - 2y + 5 = 0$ adalah pada titik $(-1, 1)$

2. Harga ekstrim suatu fungsi

Misalkan f suatu fungsi yang didefinisikan pada interval tertentu I, f dinyatakan sebagai **fungsi naik** apabila $x_1 < x_2$ maka $f(x_1) < f(x_2)$ untuk setiap harga x_1, x_2 didalam interval I, dan f dinamakan **fungsi turun** apabila $x_1 < x_2$ maka $f(x_1) > f(x_2)$ untuk setiap harga x_1, x_2 didalam interval I.

Sifat : 1. f fungsi naik pada I $\Leftrightarrow f^1(x) > 0 \ \forall \ x \in I$

2. f fungsi turun pada I $\Leftrightarrow f^1(x) < 0 \ \forall \ x \in I$

misalkan fungsi $y = x^2 + 6x + 8$, tentukan harga dimana fungsi naik dan fungsi turunnya
$y = x^2 + 6x + 8 \rightarrow f^1(x) = 2x + 6$, untuk $f^1(x) = 0$ maka harga $x = -3$

$f^1(x)$ - - - - - - - - - - - 0 + + + + + + + + +

…….. -5 -4 -3 - 2 -1 …..

dari gambar diatas terlihat harga $x < -3$ mempunyai harga negative (-)

atau $f^1(-3) < 0$ berarti merupakan **fungsi turun**.

pada gambar diatas terlihat harga $x > -3$ mempunyai harga positif (+)

atau $f^1(-3) > 0$ berarti merupakan **fungsi naik.**

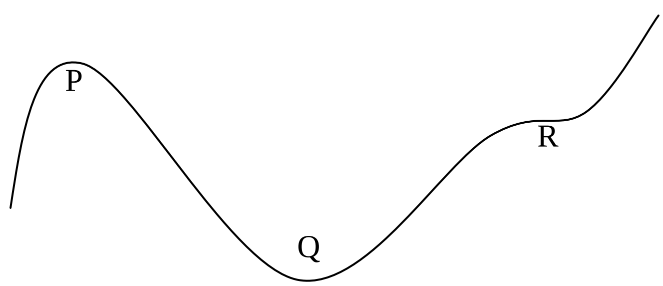
Grafik fungsi disebut **maksimum** apabila merupakan fungsi naik dan mencapai nilai ekstrim ($f^1(x) = 0$) dan diikuti oleh fungsi turun.
Fungsi mempunyai nilai maksimum disuatu titik apabila memenuhi syarat

$f^{l}(x) = 0$, dan $f^{ll}(x) < 0$

Grafik fungsi disebut minimum apabila merupakan fungsi turun dan mencapai nilai ekstrim ($f^{l}(x) = 0$) dan diikuti oleh fungsi naik.

Fungsi mempunyai nilai maksimum di suatu titik apabila memenuhi syarat $f^{l}(x) = 0$, dan $f^{ll}(x) > 0$

Grafik fungsi mempunyai nilai stasioner apabila merupakan fungsi turun dan mencapai nilai ekstrim ($f^{l}(x) = 0$) dan diikuti oleh fungsi turun, atau merupakan fungsi naik dan mencapai nilai ekstrim ($f^{l}(x) = 0$) dan diikuti oleh fungsi naik. Fungsi mempunyai nilai stasioner disuatu titik (disebut juga titik belok) apabila memenuhi syarat $f^{l}(x) = 0$, dan $f^{ll}(x) = 0$



Gambar 3 Ekstrim Fungsi

Titik P merupakan harga maksimum dari suatu fungsi, Q merupakan harga minimum dari sutu fungsi dan titik R merupakan titik stasioner.

Nilai maksimum, minimum dan titik belok suatu fungsi dapat didibedakan menggunakan turunan pertama saja, ini disebut sebagaiu uji turunan pertama. Yaitu dengan cara memberikan interval pada sebelum dan setelah harga ekstrimnya. Tetapi akan semakin lengkap dan jelas apabila membedakan maksimum, minimum dan titik belok suatu fungsi menggunakan uji turunan kedua, yaitu maksimum apabila $f^{ll}(x) < 0$, minimum apabila $f^{ll}(x) > 0$ dan merupakan titik belok apabila $f^{ll}(x) = 0$.

Suatu fungsi f(x) apabila berupa fungsi aljabar polimomial atau fungsi aljabar pangkat n, akan mempunyi maksimum nilai ekstrim sebanyak n. Sebagai contoh apabila fungsi pangkat 3 maka kemungkinan akan mempunyai titik ekstrim sebanyak 3 buah.

Contoh 16:

Jika terdapat fungsi $y = 3x^5 - 5x^3$ tentukan titik dimana mempunyai nilai maksimum, minimum atau titik beloknya

Jawab :

$y = f(x) = 3x^5 - 5x^3 \Rightarrow f^{1}(x) = 15x^4 - 15x^2 = 0$

$\Rightarrow f^{1}(x) = 15x^2 (x^2 - 1) = 0$

dari persamaan diatas diperiolek harga $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, dan $x_3 = -1$.

Titik P (0, 0), Q (1, -2) dan R (-1, 2)

$\mathbf{f^{ll}(x) = 60x^3 - 30x}$

pada titik P (0,0) $\Rightarrow f^{ll}(0) = 60 (0)^3 - 30 (0) = 0$

titik P (0,0) merupakan titik **stasioner** atau **titik belok**.

pada titik Q (1,-2) $\Rightarrow f^{ll}(1) = 60(1) - 30(1) = 30 > 0$

jadi titik Q merupakan titik ekstrim **minimum,** karena harga $f^{ll}(0) > 0$

pada titik R (-1,2) $\Rightarrow f^{ll}(0) = 60(-1)^3 - 30(-1) = -60 + 30 = -30 > 0$

jadi titik R merupakan titik ekstrim **maksimum** , karena harga $f^{ll}(0) < 0$

3. Penggunaan Nilai Maksimum dan Minimum

Apabila $y = f(x)$, kurva tersebut akan mempunyai nilai ekstrim (dapat maksimum atau minimum) pada titik y^1 atau $f^1(x) = 0$. Akan mempunyai nilai maksimum apabila $f^{11}(x) < 0$ dan $f^{11}(x) > 0$. Harga tersebut dapat digunakan mencari harga maksimum dan minimum suatu kasus.

Contoh 17 :

Seseorang mempunyai tali sepanjang 100 m. Tali tersebut hendak digunakan untuk membuat luasan bidang tanah. Dengan tali tersebut tentukan luas maksimum yang dapat dibuat.

Jawab :

Luas Bidang (L) = panjang (x) x lebar (y) = x y

Keliling = 2 x (panjang + lebar) = 2 (x + y).

Keliling = 100 = 2x + 2y → 50 = x + y → **y = 50 – x**

$L \quad = x \cdot y = x(50 - x) = 50x - x^2$

$L^1 = 50 - 2x$

Syarat ekstrim maksimum dan minimum $f^1(x) = 0$, maka :

$L^1 = 50 - 2x = 0 \rightarrow 2x = 50$ atau $x = 25$

$y = 50 - x = 50 - 25 = 25$

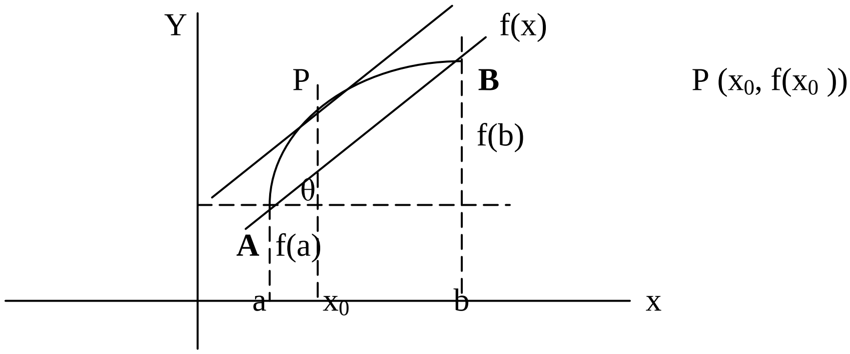
$L^1 = 50 - 2x$

$L^{11} = -2 < 0$ ekstrimnya berupa **maksimum.**

untuk memenuhi supaya luasan bidang dapat dibuat maksimum apabila harga panjang dan lebarnya masing-masing adalah 25 m dan 25 m. Jadi luasan empat persegi akan bernilai maksimum apabila mempunyai panjang dan lebar sama (panjang = lebar) atau luasan berupa bujur sangkar.

4. Pendekatan suatu nilai rata-rata

Jika f (x) kontinyu pada (a,b) dan $f^1(x)$ ada pada (a,b) maka terdapat nilai $x = x_0$ dengan ketentuan $a < x_0 < b$ sehingga berlaku $f^1(x) = \frac{\mathbf{f(b) - f(a)}}{\mathbf{b - a}}$



Gambar 4 Grafik Pendekatan Nilai

dari gambar diatas terlihat bahwa $\frac{\mathbf{f(b) - f(a)}}{\mathbf{b - a}}$ = tg θ merupakan gradient garis AB.

Jika P $(x_0, f(x_0))$ pada f(x), maka $f^1(x)$ merupakan gradient garis singgung dititik P $(x_0, f(x_0))$.

Secara geometris teorema nilai rata-rata ini menyatakan bahwa terdapat titik pada kurva f(x) diantara A dan B, sehingga garis singgungnya sejajart dengan tali busur AB.

Contoh 18 :

Hitung pendekatan dari nilai $\sqrt[4]{84}$

Jawab

Misalkan f(x) = $\sqrt[4]{\mathbf{x}}$, a = 81 dan b = 84 maka f(x) kontinyu pada (81, 84)

$f^1(x) = \frac{1}{4} x^{-3/4}$, pada (81, 84) dan terdapat nilai x_0 dengan $81 < x_0 < 84$ sehingga berlaku

$$f^1(x) = \frac{1}{4} x^{-3/4} = \frac{\mathbf{f}(84) - \mathbf{f}(81)}{84 - 81}$$

$f(84) = f(81) + 3.\ \frac{1}{4}\ x^{-3/4} = 3 + 3.1/4\ (81\ )^{-3/4}$, karena harga x tidak diketahui diambil harga x = 81, sehingga harga $f(84) = 3 + 3.\ \frac{1}{4}\ (3^4)^{-3/4} = 3 + 3/4\ (3^{-3})$

$$f(84) = 3 + 3.\ \tfrac{1}{4}\ (1/27) = 3 + 1/36 = 3{,}02777$$

jadi harga pendekataan dari $\sqrt[4]{\mathbf{x}} = 3{,}02777$

Latihan

1. Jika $y = x^5 + x^2\sqrt{x} - 7$, tentukan harga $\frac{\mathbf{dy}}{\mathbf{dx}}$

2. Jika $z = \sqrt{t}^{\,5} - \frac{1}{\sqrt[3]{\mathbf{t}}}$, tentukan harga $\frac{\mathbf{dz}}{\mathbf{dt}}$

3. Jika $y = (5x^3 - 5)^3$, tentukan harga $\frac{\mathbf{dy}}{\mathbf{dx}}$

4. Jika $y = \sqrt{(4 + 4x - x^2)}$, tunjukkn harga $\frac{\mathbf{dy}}{\mathbf{dx}} = \frac{2 - \mathbf{x}}{\mathbf{y}}$

5. Tunjukkan bahwa $\frac{\mathbf{dy}}{\mathbf{dx}} = \frac{1 + \sqrt{\mathbf{x}}}{\sqrt{2\mathbf{x}}}$ jika $y = \sqrt{2x} + 2\sqrt{x}$

6. Tentukan $\frac{\mathbf{dy}}{\mathbf{dx}}$ dititik (3,1) jika $x = y^2 + 2y$

7. Tentukan $\frac{\mathbf{dy}}{\mathbf{dx}}$, jika $x = y^3 +- \frac{3}{\mathbf{y}}$

8 Jika $y = \sqrt{1 + \mathbf{z}}$ dan $z = \sqrt{\mathbf{x}}$, tentukan $\frac{\mathbf{dy}}{\mathbf{dx}}$

9. Tentukan $\frac{\mathbf{ds}}{\mathbf{dt}}$, jika $t = \sqrt{(9 - s^2)}$

10. Jika r = Cos (1 – x^2), tentukan $\frac{dr}{dx}$

11. Tentukan $\frac{dy}{dx}$, jika a). f(x) = Cos $\frac{2}{x}$, b) f(x) = $\sin^3 x$

12, Tunjukkan bahwa $\frac{dy}{dx}$ = Sin 2x, jika y = ½ Tg x.Sin 2x

13. Tentukan $\frac{dy}{dx}$, jika a). y = arc sin (x – 1) b). arc tg $5x^2$

14. Tunjukkan bahwa $\frac{dy}{dx}$ = - 1/ (1 + x^2), jika f (x) = arc ctg ($\frac{1+x}{1-x}$)

15. Tentukan $\frac{ds}{dt}$, jika a). S = $t^2 e^t$ dan b). S = $\ln^2$ (3 + t)

16. Tentukan $\frac{ds}{dt}$, jika a). S = $t^4 e^{2t}$ dan b). S = ln $(2 + t)^3$

17. Jika y = x ln x – x, tunjukkan bahwa $\frac{dy}{dx}$ = ln x

18. Tentukan $\frac{dy}{dx}$, jika a) x = 2 cos θ dan y = sin 2 θ

b) x = $\cos^3 t$ dan y = $\sin^3 t$

19. Tentukan persamaan garis singgung dan normal :

a. Ellips $4x^2 + 9y^2 = 40$ di titik (-1, 2)

b. Kurva y = ln x, dititik dengan x = e^2

c. Kurva $y^2 = x^3$, dititik (4, 8)

d. Parabola $x^2 + 2y = 8$ dengan garis normal sejajar garis 6x + 5y – 1 = 0

20. Tentukan turunan ke empat dari persamaan a). $y = 4x^3 - x^4$, b). $y = x^{-1/2}$

c). $y = e^{3x}$ dan d). $Y = 3 \ln 3x$.

21. Tentukan f^{lll} (Π/2) jika a). f (x) = Sin x, b). f(x) = Cos x

c). f(x) = 2 Sin 2 x d). y = 3x Cos 2x

22. Tentukan dimana fungsi f naik atau turun, jika :

a. $f(x) = x^3/6 - x^2$

b. $f(x) = 3x^4 - 4x^3$

c. $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x$

d. $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x$

23. Tentukan Titik maksimum dan maksimum fungsi f jika :

a. $f(x) = x^3/6 - x^2$

b. $f(x) = 3x^4 - 4x^3$

c. $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x$

d. $f(x) = x^4 - 4x^2$

e. $f(x) = x\,e^{-x2}$

f. $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x$

24. Tentukan interval dimana fungsi nf naik/turun, maksimum dan minimum fungsi jika :

a. $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x$

b. $f(x) = x^4 - 4x^2$

c. $f(x) = e^{-x2}$

d. $f(x) = \ln x$

25. Lukislah grafik fungsi f, jika :

a. $f(x) = 3x^4 - 4x^3$

b. $f(x) = x\, e^{x2}$

c. $f(x) = x\,(12 - 2x)^2$

d. $f(x) = 2 + x^{2/3}$

26. Hitunglah luas terbesar empat persegi panjang yang dapat dibuat dalam lingkaran berjari-jari 4

27. Akan dibuat kaleng silinder tanpa tutup atas dengan volume 1 liter, apabila tebal kaleng diabaikan, tentukan ukuran kaleng sehingga bahan pembuatnya minimum.

28.Tentukan pendekatan dari harga a) $\sqrt[3]{30}$ b). c). $\sqrt{90}$

d). $\sqrt[5]{50}$ f). $4\sqrt{120}$

29. Gunakan pendekatan nilai rata-rata untuk mengerjakan :

a) $f(x) = x^3 - 2x^2$ pada (-1, 3)

b) $f(x) = 3x^2 + 4x - 3$ pada (1, 3)

30. Jika :

a). $f(x) = 2x^4 - x^3 + 2x^2 - 12$

b). $f(x) = 2x^3 - 2x^2 + 5$

tentukan :

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

MODUL VI

PERHITUNGAN LUAS BIDANG

Materi pokok matematika ke 6 yang berisikan materi Perhitungan Luas Bidang. Materi pokok ini berisikan materi yang membahas tentang definisi luasan, dan luas bidang yang terdiri dari luasan dan luas bidang segitiga, segi empat, limas, jajaran genjang, segi n dan lingkaran.

Materi pokok tentang perhitungan luas akan diterangkan mengenai luas berdasarkan sisi, sudut, dan koordinatnya. Menggunakan rumus-rumus berdasarkan sisi, sisi dan sudut, maupun koordinat dari titik-titik pada bidang yang akan dicari luasannya.

Dalam mempelajari modul ini penguasaan mengenai persamaan dan fungsi, dan grafik fungsi sangat diperlukan. Penguasaan pengetahuan tentang trigonometri dan siklometri, dan penguasaan sudut suatu bidang akan sangat membantu dalam menguasai pengetahuan tentang perhitungan luas bidang.

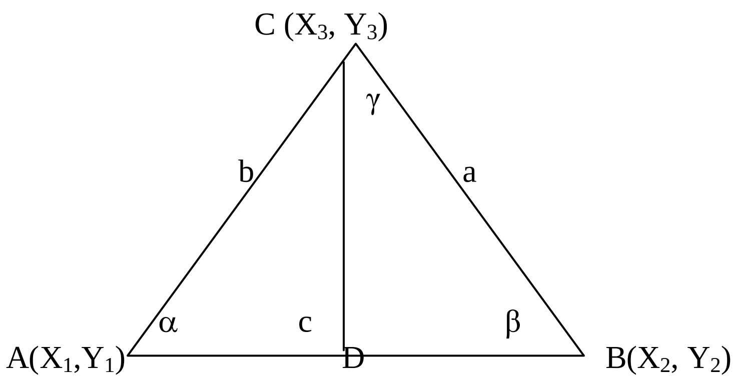
Diharapkan setelah mempelajari materi perhitungan luas bidang, mahasiswa mempunyai dasar yang kuat dalam mempelajari yang berhubungan dengan pengukuran antara lain ilmu ukur tanah, ilmu hitung perataan, kerangka dasar pemetaan, dan ilmu-ilmu lain yang sesuai.

A. PENGERTIAN LUAS

Luas suatu daerah atau luas suatu bidang adalah luasan yang tertutup yang dibatasi dengan garis-garis yang berupa garis lurus yang diukur atau didapatkan dengan cara-cara tertentu, dan rumus tertentu. Luas suatu bidang ditentukan sesuai dengan cara pengukurannya dan ketelitian yang dikehendaki.

Pengetahuan tentang luas daerah yang bentuknya sederhana harus dimengerti terlebih dahulu seperti luas yang berbentuk segitiga, segiempat, trapesium, lingkaran.

1. Luasan yang berbentuk segitiga;



Gambar 1 Segitiga

Segitiga ABC dengan sudut BAC = α, sudut ACB = γ, sudut ABC = β, dan sudut CDA = 90^0. Dan dengan sisi-sisi BC = a, AC = b, dan AB = c

Garis CD merupakan garis lurus dan tegak lurus pada garis AB.

Sisi – sisi a, b, dan c dapat ditentukan dengan hubungan sudut masing-masing.

Hubungan antara sisi dan sudut dari segitiga diatas apabila terdapat sisi atau sudut yang tidak diketahui dapat ditentukan dengan rumus Sinus dan Rumus Cosinur.

Rumus Sinus :

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$$

Atau dengan rumus Cosinus :

$a^2 = b^2 + c^2 – 2.bc. \text{Cos}\ \alpha$

$b^2 = a^2 + c^2 – 2.ac. \text{Cos}\ \beta$

$c^2 = a^2 + b^2 – 2.ab. \text{Cos}\ \gamma$

Apabila pada segitiga tersebut yang diketahui adalah koordinatnya, maka panjang sisi dapat diperoleh menggunakan :

Panjang sisi AB $= c = \sqrt{((x_2 – x_1)^2 + (y_2 – y_1)^2)}$

Panjang sisi AC $= b = \sqrt{((x_3 – x_1)^2 + (y_3 – y_1)^2)}$

Panjang sisi BC $= a = \sqrt{((x_3 – x_2)^2 + (y_3 – y_2)^2)}$

Pada segitiga untuk mencari salah satu sisinya juga terdapat hubungan :

Luas segitiga tersebut diatas dapat dicari dengan cara :

a. Luas Δ ABC = ½ panjang alas x tinggi

= ½ AB x CD

Contoh 1 :

Jika segitiga ABC sama sisi, dengan panjang sisi a=b=c = 16 m,

Pertanyaan : Tentukan luas ABC.

Jawab :

Panjang sisi AD = DB = ½ x 16 = 8 m

Panjang sisi CD = $\sqrt{(16^2 - 8^2)}$ = 13,8 m

Luas Δ ABC = ½ .16.13,8 = **110,85 m²**

Rumus mencari luassebuah segitiga apabila terdapat satu sisi yang tidak diketahui dan tidak terdapat sisi sudut yang berharga 90^0, harga luas tersebut dapat dicari menggunakan rumus :

1). Luas Δ ABC = ½ a.b Sin γ

2) Luas Δ ABC = ½ a.c Sin β

3) Luas Δ ABC = ½ b.c Sin α

Contoh 2 :

Jika segitiga ABC sama sisi, dengan panjang sisi a=b=c = 16 m,
Pertanyaan : Tentukan luas ABC.
Jawab :
Karena sama sisi maka sudutnya juga sama = 60^0

LuasΔABC = ½ 16.16. Sin 60^0 = 128. ½ √3 = 62 √3 = **110,85 m²**

Apabila sisi-sisinya diketahui dan sudut-sudutnya tidak diketahui, harga luasan segitiga tersebut dapat dicari menggunakan rumus S. yaitu :

S = ½ (a + b + c)

L = $\sqrt{S(S-a)(S-b)(S-c)}$

Untuk a, b, c merupakan sisi-sisi yang diketahui dan L merupakan luas bidang yang akan dicari luasannya.

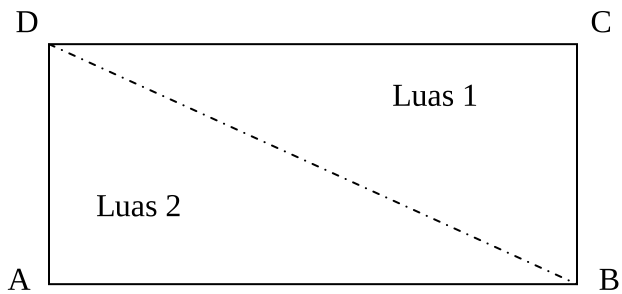
Contoh 3 :

Jika segitiga ABC sama sisi, dengan panjang sisi a=b=c = 16 m.
Peranyaan : Tentukan luas ABC.
Jawab :
S = ½ (16 + 16 + 16) = ½ . 48 = 24

L Δ ABC = √ 24.3. (24 – 16) (24 – 16) (24 – 16)

= √ 24.8.8 8= √ 12288 = **110,85 m²**

2. Luasan yang berbentuk segi empat :



Gambar 2 Segi Empat

Luasan yang berbentuk segi empat dapat dicari menggunakan cara :

a. Apabila sudut-sudut dari segi empat tersebut siku-siku atau dengan sudut 90^0 maka luasnyua dapat ditentukan menggunakan Rumus :

Luas ABCD = Panjang x lebar

= AB x BC

Contoh 4 :

Jika terdapat segiempat siku-siku dimana panjang sisi AD = BC = 10 m dan AB = DC = 16 m.

Pertanyaan : Tentukan luas segi empat ABCD.

Jawab :

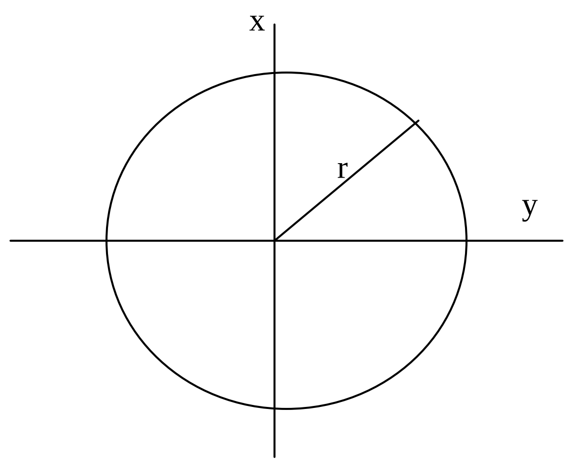
Luas ABCD = 10m x 16m = 160 m^2

Apabila sudutnya tidak harus 90^0, dapat mengguanakan :

Luas ABCD = Luas Δ BAD + Luas Δ BCD = Luas 1 + Luas 2

Panjang diagonal BD dapat dicari menggunakan cara mengukur langsung dari lapangan. Luas Δ BAD dan Luas Δ BCD dapat dicari menggunakan cara luas segitiga yang telah diterangkan didepan. Luas Δ = $\sqrt{S(S-a)(S-b)(S-c)}$

3. Luasan yang berbentuk Lingkaran



Gambar 3 Lingkaran

Lingkaran adalah suatu bentuk kurva yang tertutup yang merupakan himpunan dari titik-titik yang mempunyai jraak yang sama dari titik pusat. Jarak yang sama dari titik pusat (titik 0) tersebut dinamakan ***jari-jari*** (r). Sedangkan jarak titik pada suatu kurva dengan titik pada kurva lainnya yang melalui titik pusat dinamakan ***diameter***. lainnya pada Lingkaran jika dihubungkan dengan sistem koordinat kartesius berupa sumbu x dan y dengan persamaan $y^2 + x^2 = r^2$ atau $(x - a)^2 + (y - a)^2 = r^2$ Elemen lingkaran yang berupa luasan, yaitu : 1). Juring merupakan daerah pada lingkaran yang dibatasi oleh busur dan dua buah jari-jari yang berada pada kedua ujungnya, 2) Tembereng merupakan daerah pada lingkaran yang dibatasi oleh sebuah busur dengan tali busurnya, 3). Cakram merupakan semua daerah yang berada di dalam lingkaran. Luasnya yaitu jari-jari kuadrat dikalikan dengan pi. Cakram merupakan juring terbesar. Keliling lingkaran merupakan busur terpanjang pada lingkaran

Keliling Lingkaran (K) = 2Π r, dimana r merupakan jari-jri dan **Π** merupakan besaran yang besarnya sama dengan 22/7 atau 3,14285

Pada prinsipnya Luas (L) lingkaran dapat dihitung dengan memotong motongnya sebagai elemen-elemen dari suatu juring untuk kemudian disusun ulang menjadi sebuah persegi panjang yang luasnya dapat dengan mudah dihitung.

Luas Lingkaran = L = Πr^2

Contoh 5 :

Jika terdapat persamaan lingkaran $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 7 = 0$

Pertanyaan : berapa luas kurva yang berbentuk lingkaran tersebut.

Jawab :

Jika terdapat persamaan lingkaran $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 7 = 0$

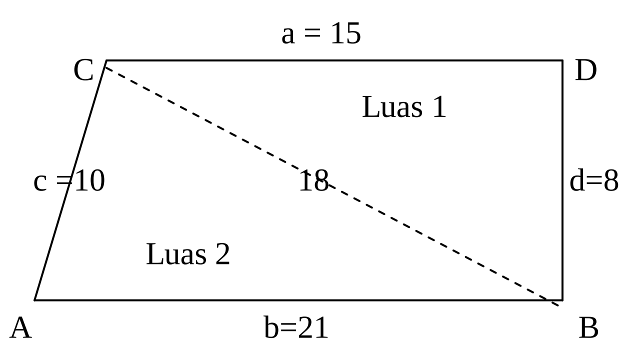
Akan dibawa kebentuk $(x - a)^2 + (y - a)^2 = r^2$

$x^2 - 2x + 1 + y^2 - 2y + 1 - 9 = 0$

$(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 9$ jadi lingkaran dengan Pusat P(1, 1) dan jari-jari r = 3

Luas lingkaran (L) = 3,14285 $(3)^2$ = 28,285 unit luasan

4. Luasan yang berbentuk trapesium:



Gambar 4 Trapesium

Luasan yang berbentuk seperti trapesium diatas, luas daerahnya dapat dicari menggunakan rumus :

Luas ABCD = ½ (AB + CD) x BD = ½ (a + b) . d

Atau menggunakan rumus segitiga, Luas Δ = $\sqrt{S(S-a)(S-b)(S-c)}$, sehingga luas daerahnya : L ABCD = L ABC + L BCD = Luas 1 + Luas 2

Contoh 6 :

Jika trapezium ABCD, dengan panjang a = 15 m, b = 21 m, c = 10 m, dan d = 8 m, panjang diagonal BC = 18 m.

Pertanyaan **:**Tentukan luas bidang ABCD.

Jawab :

a. menggunakan rumus Luas = ½ (panjang 1 + panjang 2) x tinggi

Luas ABCD = ½ (a + b). d = ½ (15 + 21) m x 8 m = 18m x 8m = 144 m^2

b. menggunakan rumus segitiga

Luas ABCD = Luas ABC + Luas BDC

Luas ABC =

S_1 = ½ (21 + 10 + 17) = ½ (48) = 24 m

L_1 = √ (24 (24 – 21)(24 - 10)(24 – 17) = √ (24 x 3 x 14 x 7)

= √ 7056 = 84 m^2

S_2 = ½ (15 + 8 + 17) = ½ (40) = 20 m

L_2 = √ (20 (20 – 15)(20 - 8)(20 – 17) = √ (20 x 5 x 12 x 3)

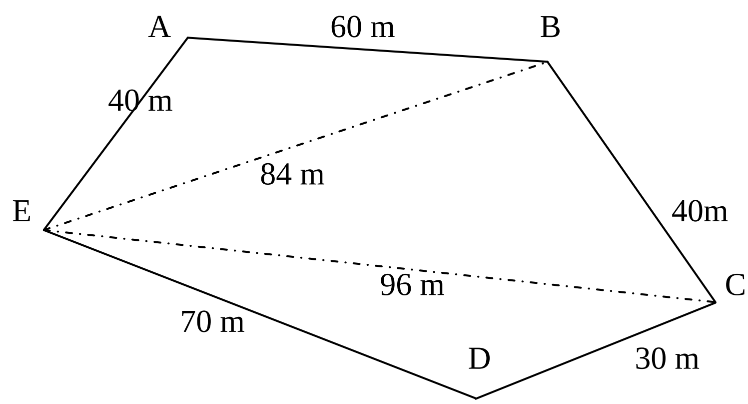
= √ 3600 = 60 m^2

LUAS = LUAS I + LUAS II

= 84 m^2 + 60 m^2 = 144 m^2

4. Luas berbentuk segi n

Gambar 4



Gambar 4 Segi Lima

Pandang sustu bidang segi n. Luas bidang tanah tersebut adalah penjumlahan dari segitiga kecil sebanyak (n – 2) buah.

Luas bidang segi n = Luas Δ1 + Luas Δ2 + Luas Δ3 + …. + Luas Δ (n – 2).

Apabila sebagai contoh diambil luasan segi 5, luas luasan tersebut adalah :

Luas ABCDE = Luas Δ EBA + Luas Δ ECB + Luas Δ EDC

Contoh 7 :

Menurut hasil pengukuran dilapangan oleh juru ukur, Bidang tanah ABCDE mempunyai panjang sisi AB= 60 m, BC = 40 m, CD = 30 m, DE = 70 m, EA = 40 m, EB = 84 m, dan EC = 96 m.

Pertanyaan :

Tentukan luas bidang tanah ABCDE

Jawab :

Luas ABCDE = Luas Δ EBA + Luas Δ ECB + Luas Δ EDC

Luas Δ EBA =

S_1 = ½ (84+ 60 + 40) = ½ (184) = 92 m

$L_1 = \sqrt{}\,(92\ (92 - 84)(92 - 60)(92 - 40) = \sqrt{}\,(92 \times 8 \times 32 \times 52)$

$= \sqrt{}\,1224704 = \mathbf{1106.663\ m^2}$

Luas Δ ECB =

S_2 = ½ (84+ 96 + 40) = ½ (220) = 110 m

$L_2 = \sqrt{}\,(110\ (110 - 84)(110 - 96)(110 - 40) = \sqrt{}\,(110 \times 26 \times 14 \times 70)$

$= \sqrt{}\,2802800 = \mathbf{1674.157\ m^2}$

Luas Δ EDC =

S_3 = ½ (96 + 70 + 40) = ½ (206) = 103 m

$L_3 = \sqrt{}\,(103\ (103 - 96)(103 - 70)(103 - 40) = \sqrt{}\,(103 \times 7 \times 33 \times 63)$

$= \sqrt{}\,1498959 = \mathbf{1224.32\ m^2}$

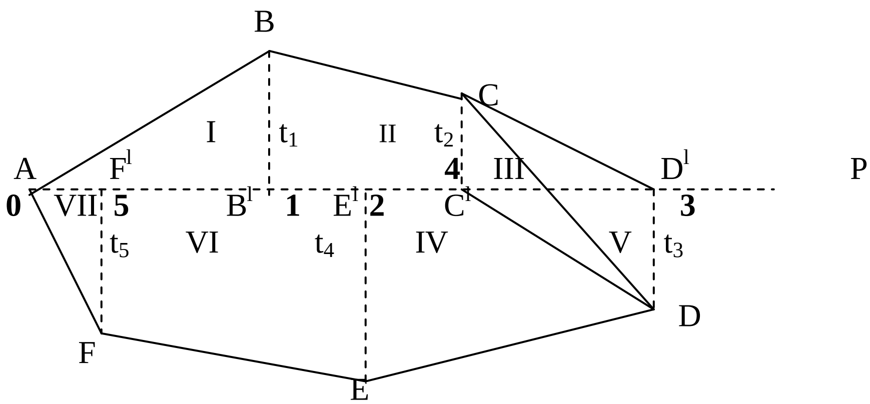
Luas ABCDE = Δ EBA + Luas Δ ECB + Luas Δ EDC

$= 1106.663\ m^2 + 1674.157\ m^2 + 1224.32\ m^2$

= 4005.14 m

B. PENENTUAN LUAS MENGGUNAKAN ANGKA JARAK

Bila pengukuran daerah atau bidang dilakukan dengan maksud untuk mengetahui luasnya, maka derah tersebut hendaknya dibagi menjadi segitiga-segitiga dan trapesium, bentuk-bentuknya akan mudah dicari luasnya.



Gambar 5   Bidang Segi n

Perhitungan luas menggunakan panjang sisi-sisi, garis tegak lurus sebagai tinggi, dan dibagi dalam bentuk segitiga, kecil, trapesium dan segi empat akan memudahkan menemukan ukuran luasnya.

Bentuk-bentuk segitiga dan trapesium diperoleh dengan membuat suatu garis ukur. Garis ukur tersebut diubah sedemikian rupa, sehingga jarak-jarak dari titik kegaris ukur ini kecil, supaya mudah diukur. Untuk itu, sebagai garis ukur diambil garis lurus memotongmemanjang daerah yang akan ditentukan luasnya.

Sebagai contoh pandang luasan yang berbentuk segi enam ABCDEF, sesuai dengan Gambar 5 diatas.

Luasan segi enam ABCDEF, supaya tertutup dituliskan sebagai bidang ABCDEF.A.

Garis ukur AP. Semua titik batas diproyeksikan pada garis ukur AP, lalu diukur semua jarak titik-titik batas kegaris ukur AP yaitu : t_1, t_2, $t_{3,}$ t_4, dan t_5 dan jarak-jarak proyeksi batas yang terletak pada garis ukur, dihitung dari titik A

Sehingga $AB^l = \overline{01}$, $AC^l = \overline{02}$, $AD^l = \overline{03}$, $AE^l = \overline{04}$ $AF^l = \overline{05}$

Untuk menghindarkan koofisien 1/2 , maka luasnya dikalikan 2, sehingga rumus luas bidangnya adalah :

Luas ABCDEF.A = Luas Δ I + Luas ΔII + Luas ΔIII+ Luas trap IV-Luas Δ V+ Luas trap VI + Luas Δ VII

$= t_1.\ \overline{01} + (t_1 + t_2)\ \overline{12} + t_2\ \overline{23} + (t_3 + t_4)\ \overline{34} - t_3\ \overline{23} + (t_4 + t_5)\ \overline{45} + t_5\ \overline{05}$

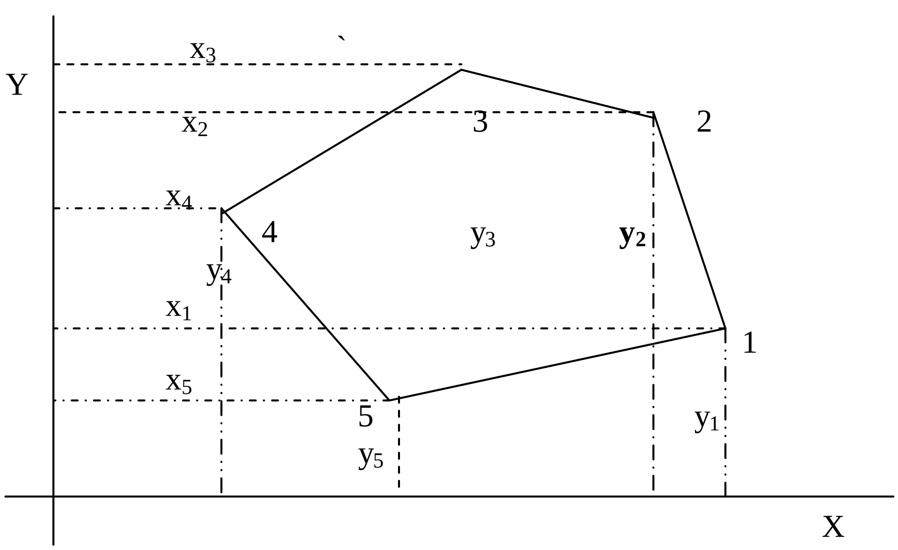
Setelah disusun, ketiga suku dan suku ke lima dijadikan satu, dan diperoleh :

$$\text{Luas ABCDEF.A} = t_1.\ \overline{01} + (t_1 + t_2)\ \overline{12} + (t_2 - t_3)\ \overline{23} + (t_3 + t_4)\ \overline{34} + (t_4 + t_5)\ \overline{45} + t_5\ \overline{05}$$

Rumus ini adalah tersusun, jika suku pertama dan suku terakhir adalah $t_0 = 0$ dan $t_6 = t_0 = 0$, hingga untuk kedua suku dapat dapat ditulis seperti suku-suku lainnya, yaitu

Suku pertamanya adalah $(t_0 + t_1)\ \overline{01}$ dan suku bterakhirnya adalah $(t_0 + t_5)\ \overline{05}$.

C. PENENTUAN LUAS MENGGUNAKAN KOORDINAT



Gambar 6 Menentukan Luasan dengan Koordinat

Untuk menghitung luas dengan angka-angka adalah dengan menggunakan koordinat kartesius titik batas daerah. Koordinat-koordinat titik batas ditentukan misalnya dengan mengukur batas bidang itu sebagai poligon yang diukur menggunakan teodolit dengan menggunakan suatu titik yang tertentu terhadap salip sumbu YOX yang tertentu pula.

Misalkan garis batas daerah 1-2-3-4-5-1 telah diukur menggunakan theodolit sebagai poligon dan titik-titik batas dan diketahui koordinatnya, yaitu :

$1(x_1, y_1)$, $2(x_2, y_2)$, $3(x_3, y_3)$, $4(x_4, y_4)$, dan $5(x_5, y_5)$

Proyeksikan titik-titik batas pada sumbu X, maka akan mempunyai absis x_1 , x_2 , x_3 , x_4 , dan x_5 , kesemuanya dihitung dari titik asal 0, maka akan diperoleh luas bidang segilima tersebut adalah :

2 Luas 12345.1 = Luas trapesiumI + Luas trapesium II + Luas Trapesium III - Luas Trapesium IV - Luas Trapesium V

$$= (x_1 - x_2)(y_1 + y_2) + (x_2 - x_3)(y_2 + y_3) + (x_3 - x_4)(y_3 + y_4) - (x_5 - x_4)(y_5 + y_4) - (x_1 - x_5)(y_1 + y_5)$$

Supaya ruas kana merupakan suatu jumlah, maka suku ke empat dan suku kelima yang mempunyai tanda minus (-) diganti suku-suku yang mempunyai tanda ples (+), sehingga runusnya menjadi :

$$2 \text{ Luas } 12345.1 = (x_1 - x_2)(y_1 + y_2) + (x_2 - x_3)(y_2 + y_3) + (x_3 - x_4)(y_3 + y_4) + (x_4 - x_5)(y_5 + y_4) + (x_5 - x_1)(y_1 + y_5)$$

Supaya suku akhir tidak dilupakan, maka perlu nditulis untuk daerah 12345.1 dengan angka 1 ditulis ulang pada bagian belakang, dan supaya daerah tertutup, sehingga mempunyai luas :

$2\,L = \sum (x_n - x_{n+1})\,(y_n + y_{n+1})$

Sekarang proyeksikan pada daerah sumbu Y, maka akan diperoleh :

2 Luas 12345.1 = Luas trapesiumI + Luas trapesiumII + Luas TrapesiumIII - Luas Trapesium IV - Luas Trapesium V

$$= (x_5 + x_1)(y_1 - y_5) + (x_1 + x_2)(y_2 - y_1) + (x_2 + x_3)(y_3 - y_2) - (x_3 + x_4)(y_3 - y_4) - (x_4 + x_5)(y_4 - y_5)$$

Setelah suku-suku yang bertanda minus (-) diganti dengan suku-suku yang bertanda plus (+), maka diperoleh persamaan :

$$2 \text{ Luas } 12345.1 = (x_5 + x_1)(y_1 - y_5) + (x_1 + x_2)(y_2 - y_1) + (x_2 + x_3)(y_3 - y_2) + (x_3 + x_4)(y_4 - y_5) + (x_4 + x_5)(y_5 - y_4)$$

Diperoleh rumus dengan bentuk umum :

(1) ……. $2\,L = \sum_{i=1}^{n} (x_n - x_{n+1})\,(y_n + y_{n+1})$ atau

(2) ……. $2\,L = \sum_{i=1}^{n} (y_{n+1} - y_n)\,(x_n + x_{n+1})$

Jika kedua rumus (1) dan (2) diatas ditinjau maka rumus yang pertama (1) yang diperoleh dengan memproyeksikan luas pada sumbu X, diperoleh sebagai factor pertama selisih absis sebagai faktor kedua adalah jumlah ordinat, dan merupakan penjumlahan dari perkalian selisih absis dengan jumlah ordinat.

Pada rumus kedua (2) yang diperoleh dengan memproyeksikan luas pada sumbu Y, diperoleh selisih ordinat sebagai faktor pertama dan jumlah absis pada faktor kedua, dan merupakan penjumlahan dari perkalian selisih ordinat dan jumlah absis..

Rumus-rumus (1) dan (2) seperti diatas akan diuraikan, maka rumus (1) diperoleh :

$$2\ \text{Luas} = (x_1y_1 + x_1y_2 - x_2y_1 - x_2y_2) + (x_2y_2 + x_2y_3 - x_3y_2 - x_3y_3) +$$

$$(x_3y_3 + x_3y_4 - x_4y_3 - x_4y_4) + (x_4y_4 + x_4y_5 - x_5y_4 - x_5y_5) +$$

$$(x_5y_5 + x_5y_1 - x_1y_5 - x_1y_1)$$

Bila dicermati, suku-suku yang diperoleh dengan perbanyakan x dan y yang mempunyai indeks sama, antara lain : x_1y_1, x_2y_2, x_3y_3, x_4y_4, dan x_5y_5, akan hilang maka akan diperoleh persamaan baru :

$$2\ \text{Luas} = (x_1y_2 - x_2y_1) + (x_2y_3 - x_3y_2) + (x_3y_4 - x_4y_3) +$$

$$(x_4y_5 - x_5y_4) + (x_5y_1 - x_1y_5)$$

Rumus diatas dapat ditulis dengan bentuk umum :

$$2\ L = \sum_{i=1}^{n} (x_n\ y_{n+1} - x_{n+1}\ y_n)$$

Dengan menguraikan rumus (2) diperoleh :

$$2\ \text{Luas} = (x_1y_2 - x_1y_1 + x_2y_2 - x_2y_1) + (x_2y_3 - x_2y_2 + x_3y_3 - x_3y_2) +$$

$$(x_3y_4 - x_3y_3 + x_4y_4 - x_4y_3) + (x_4y_5 - x_4y_4 + x_5y_5 - x_5y_4) +$$

$$(x_5y_1 - x_5y_5 + x_1y_1 - x_1y_5)$$

$$2\ \text{Luas} = (x_1y_2 - x_2y_1) + (x_2y_3 - x_3y_2) + (x_3y_4 - x_4y_3) +$$

$$(x_4y_5 - x_5y_4) + (x_5y_1 - x_1y_5)$$

$$2\ L = \sum_{i=1}^{n} (x_n\ y_{n+1} - x_{n+1}\ y_n)$$

Ternyata rumus yang diperoleh dengan menguraikan rumus (1) dan menguraikan rumus (2) hasilnya sama yaitu :

$$2\,L = \sum_{i=1}^{n} (x_n\ y_{n+1} - x_{n+1}\,y_n)$$

Untuk lebih mengerti tentang pengertian dan penggunaann rumus tadi perlu diberi kan contoh.

Tabel 1 Data Koordinat

titik	x	y	$x_n\ y_{n+1} - x_{n+1}\,y_n$
1	34.66	15.89	
2	10.14	28.37	(34.66)(28.37) – (10.14)(15.89) = 822.1796
3	-30.59	14.26	(10.14)(14.26) – (-30.59)(28.37) = 1012.435
4	-33.48	-18.01	(-30.59)(-18.01) – (-33.48)(14.26) = 1028.351
5	21.99	-22.72	(-33.48)((-22.72) – (21.99)(-18.01) = 1156.706
1	34.66	15.89	(21.99)(-15.89) – (34.66)(-22.72) = 1156.706

$$2\,L = \sum_{i=1}^{5} (x_n\ y_{n+1} - x_{n+1}\,y_n) =$$

= 822.1796 + 1012.435 + 1028.351 + 1156.706 + 1156.706

= 5156.567

Jadi Luas 12345.1 = ½ (5156.567) = **2578.283**

Tabel 2 Perhitungan Luas

titik	x	y	$x_n \; y_{n+1}$	$x_{n+1} \, y_n$	$x_n \; y_{n+1} - x_{n+1} \, y_n$
1	34.66	15.89			
2	10.14	28.37	983.3042	161.1246	822.1796
3	-30.59	14.26	144.5964	-867.838	1012.435
4	-33.48	-18.01	550.9259	-477.425	1028.351
5	21.99	-22.72	760.6656	-396.04	1156.706
6	34.66	15.89	349.4211	-787.475	1136.896
2 LUAS BIDANG 12345.1					5156.567
LUAS BIDANG 12345.1					**2578.283**

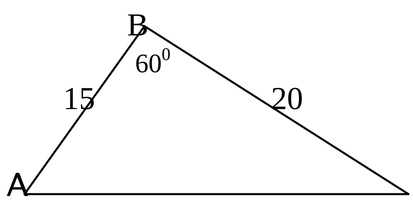
Latihan :

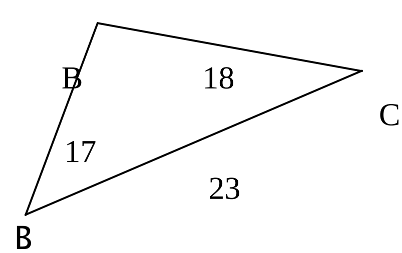
1. Jika Δ ABC dengan panjang sisi a=b=c = 25 m. Tentukan luas ABC

2. Jika segitiga ABC dengan panjang sisi a= 15 b= 17 c = 20
   Pertanyaan : Tentukan luas ABC menggunakan rumus S

3. Jika segitiga ABC sama sisi, dengan panjang sisi a= 16 b= 23, sudut $\gamma = 60^0$ meruipakan sudut yang mengapit sisi a dan sisi b, tentukan luas Δ ABC

4. Tentukan luas segitiga sesuai dengan gambar dibawah :

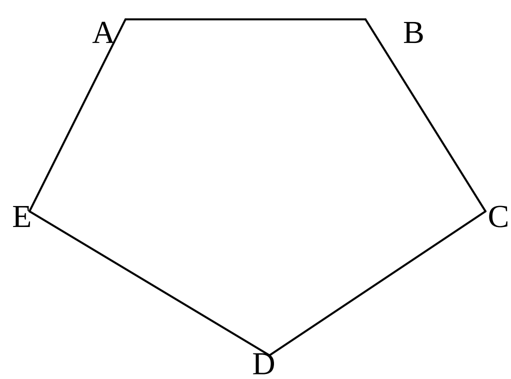




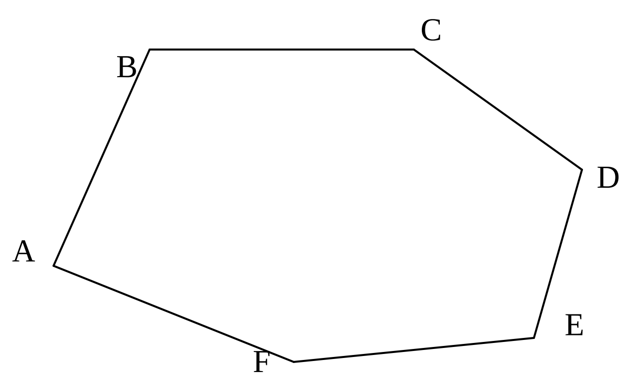
5. Jika trapezium ABCD, dengan panjang garis AB = 27, BC = 15, CD = 20 m, dan DA = 20, panjang diagonal BC = 25 .

Pertanyaan **:** Tentukan luas bidang ABCD.

6. Tentukan Luas Bidang Segi Lima ABCD dibawah, jika panjang sisi-sisinya sama, AB =BC=CD=DE=EA = 15



7. Tentukan Luas Segi Enam dibawah :



Jika AB = 28, BC = 24, CD = 22, DE = 22, EF = 24, FA = 25

8. Gambar seperti soal no.4 diatas , jika :

A (***-10.24*****,** 10.12), B(***14.22***, 32,76), C(***36.46***, 33,12), D(***54.44***, 26.28)

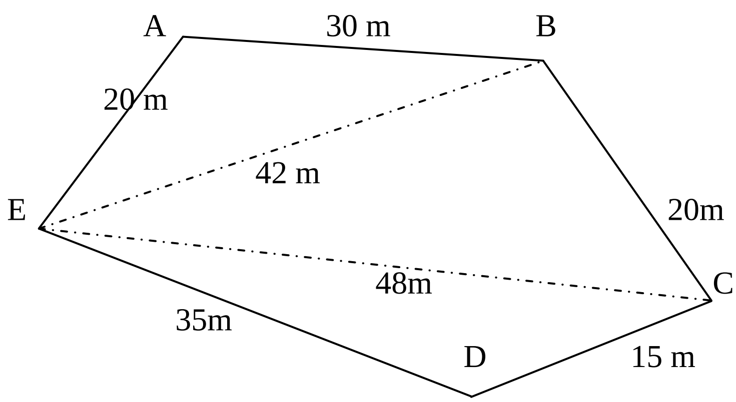
E (***50.29***, -10.57), F(***30.68***, -14, 98)

Tentukan Luas Bidang nya

9. Jika terdapat suatu lingkaran dengan persamaan : $x^2 + y^2 -4x + 2x – 30 = 0$

Pertanyaan : Tentukan luas lingkran dengan persamaan tersebut.

10. Jika terdapat suatu bangun berbentuk seperti gambar 5 dibawah :



Menurut hasil pengukuran dilapangan oleh juru ukur, Bidang tanah ABCDE mempunyai panjang sisi AB= 30 m, BC = 20 m, CD = 15 m, DE = 35 m, EA = 20 m, EB = 42 m, dan EC = 48 m.

Pertanyaan : Tentukan luas bidang tanah ABCDE

DAFTAR PUSTAKA

Ayres, Frank. 1981. ***Teory and Problem of Calkulus***.

Anton.1992. ***Aljabar Linier Elementer***

Budi, Wono Setyo. 1995. ***Aljabar Linier***. Gramedia. Jakarta.

Hendrawan, Andi. 2001. ***Hitung Deferensial***. Debut Press. Yogyakarta.

Howard, Hutahaean. 1983. ***Kalkulus Deferensial dan Integral***. Gramedia. Jakarta.

Keedy & Bittinger. 1986. **Algebra and Trigonometry**. Addison Wesley Publising Company. California

Leitold, Louis. 1987. ***Kalkulus dan Ilmu Ukur Analitis***. Bina Aksara. Jakarta.

Nasution, Andi Hakim. 1971. ***Landasan Matematika***. Bhatara. Jakarta

Rawuh, ***Matematika Pendahuluan***, Penerbit ITB. Bandung

Seputro, Theresia, 1989. ***Pengantar Dasar Matematika***. Depdikbud. Jakarta.

Soepranto, J. 1979. ***Pengantar Matrik***. Lembaga Penerbit Fakultas Ekonomi UI. Jakarta.

Wongso Sutjitro, Sutomo. 1974. ***Ilmu Ukur Tanah***. Swada. Bandung.