Technische Universität Wien
Fakultät für Physik
Institut für Angewandte Physik

Unterlagen zur Vorlesung / VU

Modellbildung in der Physik VU

WS 2012/13

Prof. *Wolfgang Husinsky*

Inhaltsverzeichnis

Tabellenverzeichnis

Abbildungsverzeichnis

Vorwort

Diese Vorlesungsunterlagen sind nur als Hilfe zur Vorlesung gedacht und können und sollen nur im engen Zusammenhang mit der Vorlesung ihren Sinn erfüllen. Die Texte sind zum Studium vor bzw. nach der Vorlesung gedacht, um in der Vorlesung die Probleme im Detail zu besprechen bzw. um dann zusammen mit den Folien und ergänzender Literatur den besprochenen Stoff zu verarbeiten und zu lernen.

Teil I

Einleitung

Physik ist die grundlegendste aller Wissenschaften. Sie handelt von dem Verhalten und der Struktur der Materie und Strahlung. Gewöhnlich unterteilt man die Physik in die Gebiete klassische Mechanik, Strömungslehre, Thermodynamik, Akustik, Optik, Elektrizität und Magnetismus - die klassische Physik. Hinzu kommt die moderne Physik mit den Bereichen Quantenmechanik, Relativitätstheorie, Atom-, Festkörper-, Kern-, Teilchen- und Astrophysik.

Die Grundlagen der Physik müssen von allen verstanden werden, die einen wissenschaftlichen oder technischen Beruf ergreifen wollen: Physiker, Ingenieure, Chemiker, Astronomen, Mathematiker. Geologen und Biologen. Alle Wissenschaften nutzen die Physik als fundamentale Basis, auch die Ingenieurwissenschaften. Beispielsweise müssen Ingenieure wissen. wie man sich die Gesetze der Thermodynamik zunutze macht, um eine Heizung zu entwerfen; sie müssen etwas von Optik und Elektromagnetismus verstehen, um medizinische Abbildungssysteme zu konstruieren. Und sie müssen die in einem Bauwerk wirksamen Kräfte berechnen können, damit es nicht einstürzt.

Teil II

Die Bewegungsgleichung

1 Physikalische Grundgesetze

Wir wollen unser Studium der physikalischen Erscheinungen mit der Untersuchung bewegter Körper beginnen. Die Untersuchung von Bewegungen wird Kinematik genannt. Die Messung solcher Bewegungen begründete in gewisser Weise vor mehr als 400 Jahren die *Physik,* wie wir sie heute als Wissenschaft kennen. Es wird jedoch unser Ziel sein, an Hand dieses extrem wichtigen Beispiels, allgemeine Vorgangsweisen für die Lösung von Problemen zu erarbeiten.

1.1 Die Newton´schen Axiome

Eine der fundamentalen Gesetze der Physik sind die sogenannten Newton´schen Axiome. Auf ihnen beruht praktisch die gesamte Mechanik.

Die klassische Mechanik untersucht die Kräfte, die Körper aufeinander ausüben, und erklärt auch Bewegungsänderungen über die Kräfte, die auf einen Körper wirken. Sie beschreibt die Erscheinungen mit den drei Newton'schen Axiomen der Bewegung.

Natürlich hat jeder eine intuitive Vorstellung von einer Kraft als Ziehen oder Drücken, etwa bei Muskeln, Gummibändern oder Federn. Erst die Newton'schen Axiome erlauben aber unsere Vorstellung über Kräfte zu präzisieren.

Eigentlich könnten wir die meisten mechanischen Probleme ausgehend vom ersten Newton´schen Axiom bzw. seiner Formulierungs als Differentialgleichung lösen. In der Praxis wird es jedoch sinnvoll sein, weitere daraus folgende Gesetzmäßigkeiten zu verwenden, um ein spezielles Problem elegant zu lösen (z.B. Energieerhaltung, Impulserhaltung, lineare und Kreisbewegungen etc.)

Axiom 1 (Erstes Newton´sches Axiom) *Ein Körper bleibt in Ruhe oder bewegt sich mit konstanter Geschwindigkeit weiter, wenn keine resultierende äußere Kraft auf ihn einwirkt.*

Axiom 2 (Zweites Newton´sches Axiom) *Ein Körper wird in Richtung der resultierenden äußeren Kraft beschleunigt, die auf ihn wirkt. Die Beschleunigung ist gemäß* $\overrightarrow{F}_{ges} = m\overrightarrow{a}$ *proportional zur resultierenden äußeren Kraft* $\overrightarrow{F}_{ges}>$ *wobei m die Masse des Körpers ist. Die resultierende äußere Kraft auf einen Körper ist die Vektorsumme aller Kräfte, die auf ihn wirken,* $\overrightarrow{F}ges = \sum \overrightarrow{F}$*. Somit gilt*

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \tag{1}$$

.

Axiom 3 (Drittes Newton´sches Axiom) *Kräfte treten immer paarweise auf. Wenn der Körper A eine Kraft* $F_B^{(A)}$ *auf den Körper B ausübt, wirkt eine gleich große, aber entgegengesetzt gerichtete Kraft* $F_A^{(B)}$ *vom Körper B auf den Körper A. Somit gilt* $F_A^{(B)} = -F_B^{(A)}$

1.2 Trägheitsgesetz

Stoßen Sie einen Eiswürfel auf der Theke an. Er wird zunächst ein Stück gleiten und bleibt schließlich liegen. Wenn die Theke nass ist, wird er weiter gleiten, bevor er liegen bleibt. Ein Stückchen Trockeneis (gefrorenes Kohlendioxid) , das quasi auf einem Kissen aus Kohlendioxiddampf schwebt, gleitet viel weiter, ohne dass sich seine Geschwindigkeit wesentlich ändert. Vor Galilei glaubte man, dass ständig eine Kraft, ein Zug oder Druck, vorhanden sein muss, damit sich ein Körper mit konstanter Geschwindigkeit weiterbewegen kann. Galilei und später Newton erkannten dagegen, dass das aus dem Alltag bekannte Abbremsen von Körpern auf die Reibungskraft zurückzuführen ist. Wird die Reibung verringert, nimmt gleichzeitig die Bremswirkung ab. Ein Wasserfilm oder ein Kissen aus Gas verringert die Reibung besonders wirksam und ermöglicht, dass Körper ohne große Geschwindigkeitsänderung über große Strecken gleiten können. Galilei folgerte daraus, dass sich die Geschwindigkeit eines Körpers nie ändern würde, wenn man ihn von allen äußeren Kräften einschließlich der Reibung befreien würde. Diese Eigenschaft der Materie beschrieb er als Trägheit. Deshalb wird diese Aussage, die Newton später als erstes Newton'sches Axiom umformulierte, auch das Trägheitsgesetz genannt..

1.3 Kraft, Masse und das zweite Newton'sche Axiom

Das erste und das zweite Newton'sche Axiom können als Definition der Kraft betrachtet werden. Eine Kraft ist ein äußerer Einfluss auf einen Körper, der veranlasst, dass der Körper relativ zu einem *Inertialsystem* beschleunigt wird. (Dabei haben wir angenommen, dass keine weiteren Kräfte wirken.) Die Kraft und die durch sie hervorgerufene Beschleunigung haben dieselbe Richtung. Der Betrag der Kraft ist das Produkt aus der Masse des beschleunigten Körpers und dem Betrag der Beschleunigung. Diese Definition beruht auf Gleichung 1.

Definition 4 (Inertialsystem) *Ein Bezugssystem, das mit dem gleichförmig bewegten Flugzeug verbunden ist, nennt man ein Inertialsystem. Ein Bezugssystem, das relativ zu einem solchen Inertialsystem beschleunigt wird, ist selbst kein Inertialsystem. Das erste Newton'sche Axiom gibt uns also ein Kriterium in die Hand, mit dem wir bestimmen können, ob ein Bezugssystem ein Inertialsystem ist. Ja, es ist durchaus sinnvoll, das erste Newton'sche Axiom als Definition von Inertialsystemen zu betrachten. Jedes Bezugssystem, in dem sich ein kräftefreier Körper geradlinig gleichförmig bewegt, ist ein Inertialsystem.*

Kräfte können über die Dehnung gleicher Gummibänder verglichen werden. Werden etwa zwei gleiche Gummibänder um die gleiche Länge gedehnt, haben die auf sie wirkenden Kräfte den gleichen Betrag. Körper besitzen einen inneren Widerstand gegen jegliche Art von Beschleunigung. Vergleichen Sie den Widerstand, wenn Sie mit dem Fuß einen Fußball oder eine Kegelkugel zu beschleunigen versuchen. Ihre blauen Fußspitzen werden Sie schnell lehren, dass die Kegelkugel wesentlich schwerer als der Fußball zu beschleunigen ist. Diese innere Eigenschaft des Körpers wird die Masse genannt. Sie ist ein Maß für die Trägheit des Körpers. Das Verhältnis zweier Massen lässt sich quantitativ dadurch definieren, dass man auf beide Körper die gleiche Kraft anwendet und ihre Beschleunigungen vergleicht. Erzeugt eine Kraft $\vec{F}$ bei Anwendung auf einen Körper der Masse m_1 eine Beschleunigung $\vec{a}_1$ während die gleiche Kraft bei Anwendung auf einen Körper der Masse m_2 die Beschleunigung a_2 liefert, ist das Verhältnis ihrer Massen durch

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{a_2}{a_1} \tag{2}$$

definiert. Diese Definition stimmt mit unserer intuitiven Vorstellung von der Masse überein. Wenn auf zwei verschiedene Körper eine Kraft angewendet wird, wird der Körper mit der größeren Masse weniger beschleunigt. Das Experiment zeigt: Das Verhältnis der Beschleunigungen a_1/a_2 , das die beiden gleich großen Kräfte hervorrufen, die auf die zwei Körper wirken, ist unabhängig von Betrag, Richtung und Art der Kraft. Die Masse ist eine innere Eigenschaft eines Körpers, die unabhängig von seinem Ort ist - sie ist immer gleich, unabhängig davon ob, sich der Körper auf der Erde oder auf dem Mond befindet oder gar frei im Weltraum schwebt.

1.3.1 Gewichtskraft

Lässt man einen Körper in der Nähe der Erdoberfläche fallen, wird er durch die *Gravitationsbeschleunigung* nach unten, zum Erdmittelpunkt hin beschleunigt. Vernachlässigt man dabei den Luftwiderstand, ist diese Beschleunigung $\vec{g}$ für alle Körper und an jedem Ort gleich. Ihr Betrag hat den durch die Erdbeschleunigungskonstante g gegebenen Wert. Die Kraft, die diese Gravitationsbeschleunigung erzeugt, ist die Gewichtskraft, umgangssprachlich auch Gewicht genannt. Allerdings ist die letztere Bezeichnung für die Gewichtskraft etwas unglücklich, verleitet sie doch zu der Annahme, dass das Gewicht wie die Masse eine Eigenschaft des Körpers sei und nicht eine Kraft, die auf ihn wirkt. Wenn der Begriff "Gewicht eines Körpersäuftaucht, sollte man ihn also immer in Gedanken in äuf den Körper wirkende Gewichtskraft"übersetzen.

Wenn diese Gewichtskraft $\vec{F}_G$ die einzige Kraft ist, die auf einen Körper wirkt, sagt man, dieser Körper sei im freien Fall. Nach dem zweiten Newton'schen Axiom $\sum \vec{F} = m\vec{a}$ ist die Gewichtskraft $\vec{F}_G$ durch

$$F_G = m\vec{a}_G \tag{3}$$

definiert, wobei m die Masse des Körpers und $\vec{a}_G$ die Gravitationsbeschleunigung ist. Da $\vec{a}\vec{G}$ für alle Körper gleich ist, ist die Gewichtskraft eines Körpers proportional zu seiner Masse. Der Vektor $\vec{a}\vec{G}$ ist deshalb gleich der Kraft, die die Erde pro Masseeinheit auf einen Körper ausübt und mithin gleich der Beschleunigung beim freien Fall.

Bemerkung 5 *In der Nähe der Erdoberfläche hat $\vec{a}_G$ den Wert$|\vec{a}_G| = g =$*

$9.81\,\mathrm{N}\cdot\mathrm{kg}^{-1} = 9.81\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}$

Genaue Messungen haben gezeigt, dass sich der Wert von $\vec{a}_G$ an verschiedenen Orten etwas unterscheidet. $\vec{a}_G$ nimmt mit wachsendem Abstand zur Erdoberfläche ab - und zwar umgekehrt proportional zum Quadrat des Abstands vom Erdmittelpunkt. Das heißt, ein und derselbe Körper wiegt in großer Höhe etwas weniger als in Höhe des Meeresspiegels. Da die Erde nicht genau eine Kugel, sondern zu den Polen hin abgeflacht ist, hängt $\vec{a}_G$ zudem etwas von der geografischen Breite ab. Somit ist das Gewicht bzw. die Gewichtskraft im Gegensatz zur Masse keine innere Eigenschaft eines Körpers.

Obwohl sich die Gewichtskraft eines Körpers also aufgrund der Änderung von $\vec{a}_G$ mit dem Ort ändern kann, ist diese Änderung so klein, dass sie bei den meisten praktischen Anwendungen auf der Erdoberfläche oder in deren Nähe nicht wahrgenommen wird. Ein Beispiel soll den Unterschied zwischen Masse und Gewichtskraft verdeutlichen. Stellen Sie sich vor, Sie nehmen eine schwere Kegelkugel mit auf den Mond. Die Gewichtskraft der Kugel erreicht auf dem Mond nur ein Sechstel ihrer Gewichtskraft auf der Erde - die Kugel lässt sich auf dem Mond viel einfacher hochheben. Um die Kugel allerdings mit einer bestimmten Geschwindigkeit in horizontaler Richtung zu werfen, ist auf dem Mond dieselbe Kraft erforderlich wie auf der Erde, da ja die Masse der Kugel konstant ist. Dementsprechend wäre natürlich auch im Weltraum, weitab von der Gravitation der Erde oder des Monds, für dieselbe horizontale Beschleunigung dieselbe Kraft erforderlich.

Obwohl die Gewichtskraft auf einen Körper ortsabhängig ist, ist sie für jeden einzelnen Ort proportional zur Masse des Körpers. Damit können wir die Massen verschiedener Körper vergleichen, indem wir ihre Gewichtskräfte vergleichen. Wenn wir unsere eigene Gewichtskraft wahrnehmen, beruht das meist auf Kräften, die mit der Gewichtskraft im Gleichgewicht sind. Wenn Sie auf einem Stuhl sitzen, spüren Sie die Kraft, die der Stuhl ausübt und die mit Ihrer Gewichtskraft im Gleichgewicht ist, so dass Sie nicht zu Boden fallen. Wenn Sie auf einer Personenwaage steh en, spüren Ihre Füße die Kraft, die die Waage auf Sie ausübt. Die Waage ist so geeicht, dass sie die Gegenkraft anzeigt, die sie aufbringen muss, um Ihre Gewichtskraft zu kompensieren. Diese Kraft wird auch scheinbare Gewichtskraft genannt. Wenn wie etwa beim freien Fall keine Kraft vorhanden ist, die der Gewichtskraft entgegenwirkt, ist die scheinbare Gewichtskraft null. Diesen Zustand, die so genannte Schwerelosigkeit, erfahren Astronauten in ihren Raumschiffen. Stellen Sie sich ein Raumschiff vor, das sich auf einer kreisförmigen Erdumlaufbahn bewegt und somit ständig zur Erde beschleunigt wird. Die einzige Kraft, die auf das Raumschiff wirkt, ist die Erdanziehung (sein Gewicht), so dass es frei fällt. Auch die Astronauten in dem Raumschiff sind im freien Fall. Die einzige Kraft, die auf sie wirkt, ist ihre Gewichtskraft, die für die Beschleunigung $\vec{a}_G$ verantwortlich ist. Da es unter diesen Bedingungen keine Kraft gibt, die den freien Fall in der Umlaufbahn aufhält, ist die scheinbare Gewichtskraft der Astronauten null.

2 Die Naturkräfte

Die volle Reichweite des zweiten Newton'schen Axioms zeigt sich erst, wenn es zusammen mit den Gesetzen für die Kräfte betrachtet wird, die die Wechselwirkungen von Körpern beschreiben. Dazu gehört beispielsweise das in zu besprechende Newton'sche Gravitationsgesetz, das die Gravitationskraft, die ein Körper auf einen anderen ausübt, durch den Abstand beider Körper und durch ihre Massen ausdrückt. Zusammen mit dem zweiten Newton'schen Axiom gestattet dieses Gesetz, die Umlaufbahnen der Planeten um die Sonne, die Bewegung des Monds wie auch die Höhenabhängigkeit von $\vec{a}_G$, der Gravitationsbeschleunigung, zu berechnen.

Alle Kräfte, denen wir in der Natur begegnen, lassen sich auf vier fundamentale Wechselwirkungen zwischen Elementarteilchen zurückführen .

1. Die Gravitationskraft ist die Kraft der gegenseitigen Anziehung zwischen allen Körpern mit Masse.
2. Die elektromagnetische Kraft ist die Kraft zwischen allen Körpern mit elektrischer Ladung
3. Die starke Kernkraft ist die Kraft zwischen bestimmten subatomaren Teilchen, den Hadronen.
4. Die schwache Kraft ist die Kraft zwischen subatomaren Teilchen während spezieller radioaktiver Zerfallsprozesse.

Die Kräfte, die wir im Alltag bei makroskopischen Körpern beobachten können, werden entweder durch die Gravitationskraft oder durch die elektromagnetische Kraft hervorgerufen.

2.1 Fernwirkung

Die ersten beiden Grundkräfte, die Schwerkraft und die elektromagnetische Kraft, wirken zwischen Teilchen, die räumlich voneinander getrennt sind. Dies führt zu einem philosophischen Problem, nämlich dem der Fernwirkung oder

Wirkung über eine Entfernung hinweg. Newton sah diese Fernwirkung als einen Mangel seiner Gravitationstheorie an, war aber außerstande, eine andere Hypothese über das Wesen der Kräfte zu formulieren.

Heute wird das Problem der Fernwirkung vermieden, indem das Konzept des Felds eingeführt wird, das als Überträger wirkt. Dabei wird beispielsweise die Anziehung der Erde durch die Sonne in zwei Schritten betrachtet. Zunächst erzeugt die Sonne im Raum ein Gravitationsfeld, in dem die Gravitationsbeschleunigung $\vec{a}_G$ durch die Sonnenanziehung mit wachsendem Abstand zur Sonne abnimmt Dieses Feld übt dann eine Kraft auf die Erde aus. Das Feld spielt also die Rolle des Vermittlers. Auf ähnliche Weise erzeugt die Erde ein Gravitationsfeld, das eine Kraft auf die Sonne ausübt. Auch unser Eigengewicht ist eine Kraft, die das Gravitationsfeld auf uns ausübt. Ganz analog ergeben sich (in der Elektrizität und Magnetismus) sowohl elektrische Felder, die durch alle elektrischen Ladungen entstehen, als auch magnetische Felder, die nur durch bewegte elektrische Ladungen hervorgerufen werden. Im Prinzip sind sie also auch Kräfte, und haben daher entsprechend analoge Konsequenzen für die Bewegung (Mechanik) geladener Teilchen.

2.2 Reibung

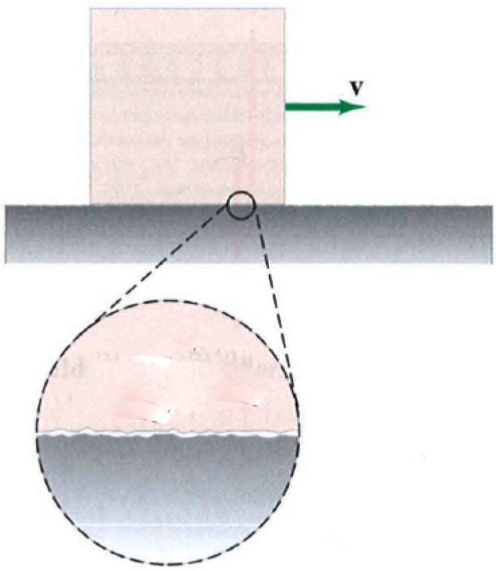

Abbildung 1: Ein Körper bewegt sich auf einem Tisch oder auf dem Boden nach rechts. Die bei den Berührungsflächen sind rau, zumindest aus mikroskopischer Sicht.

Bisher haben wir die Reibung vernachlässigt, aber in den meisten praktischen Situationen muss sie berücksichtigt werden. Reibung existiert zwischen zwei festen Oberflächen, da selbst die glatteste Fläche mikroskopisch betrachtet ziemlich rau ist (Abbildung 1). Wenn wir versuchen, einen Körper über eine andere Fläche zu schieben, erschweren diese winzigen Unebenheiten die Bewegung. Was genau auf diesem atomaren Niveau geschieht, ist immer noch nicht vollständig geklärt. Man glaubt, dass sich die Atome an der Unebenheit einer Fläche möglicherweise so dicht den Atomen der anderen Fläche nähern, dass elektrische Anziehungskräfte zwischen den Atomen eine winzige Verbindung zwischen den bei den Flächen herstellen könnten. Das Schieben eines Körpers über eine Fläche erfolgt häufig ruckartig, eventuell auf Grund der Entstehung und Unterbrechung dieser Verbindungen. Selbst wenn man einen runden Körper über eine Fläche rollt, gibt es Reibung, die so genannte Rollreibung. Sie ist allerdings in der Regel wesentlich geringer, als wenn ein Körper über eine Fläche gleitet. Wir richten unsere Aufmerksamkeit jetzt auf die Gleitreibung. Wenn ein Körper über eine raue Fläche gleitet, wirkt die Gleitreibungskraft entgegengesetzt zu der Richtung der Geschwindigkeit des Körpers. Der Betrag der Gleitreibungskraft hängt von der Beschaffenheit der beiden Gleitflächen ab. Ein Experiment zeigt, dass bei gegebenen Oberflächen die Reibungskraft annähernd proportional zu der Normalkraft zwischen den bei den Oberflächen ist. Die Normalkraft ist die Kraft, die jeder Körper auf den anderen senkrecht zu ihrer gemeinsamen Berührungsfläche (siehe Abbildung 2) ausübt. Die Reibungskraft zwischen harten Oberflächen hängt nur geringfügig von der gesamten Berührungsfläche ab. Das bedeutet, dass die auf dieses Buch wirkende Reibungskraft ungefähr dieselbe ist, unabhängig davon, ob es auf seiner breiten Seite oder auf seinem Rücken geschoben wird, vorausgesetzt, die Oberflächen haben dieselbe Beschaffenheit. Daher betrachten wir ein plausibles Reibungsmodell, bei dem wir eine von der Fläche unabhängige Reibungskraft annehmen. Durch Einfügen einer Proportionalitätskonstante μ_G können wir dann die Proportionalität zwischen der Reibungskraft FR und der Normalkraft F_N als Gleichung schreiben:

$$F_R = \mu_G F_N$$

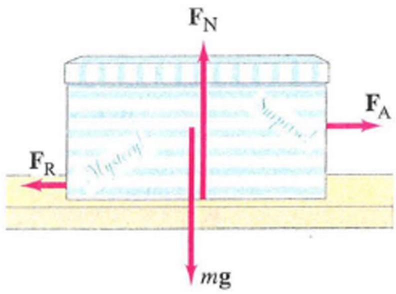

Abbildung 2: Wenn ein Körper durch eine ausgeübte Kraft (F_Al über eine Fläche gezogen wird, wirkt die Reibungskraft F_R der Bewegung entgegen. Der Betrag von F_R ist proportional zum Betrag der Normalkraft F_N .

Diese Beziehung ist kein fundamentales Gesetz, sondern eine nützliche Beziehung zwischen dem Betrag der Reibungkraft F_R, die parallel zu den bei den Oberflächen wirkt, und dem Betrag der Normalkraft F_N, die senkrecht zu den Oberflächen wirkt. Es handelt sich nicht um eine Vektorgleichung, da die beiden

Kräfte senkrecht zueinander wirken. Der Term μ_G ist die Gleitreibungszahl und ihr Wert hängt von der Beschaffenheit der beiden Oberflächen ab.

μ_G hängt davon ab, ob die Oberflächen nass oder trocken sind, in welchem Maße sie abgeschmirgelt oder abgeschliffen wurden, ob noch Grate vorhanden sind etc. Ganz allgemein gesagt ist μ_G aber unabhängig von der Gleitgeschwindigkeit und der Berührungsfläche.

Bisher haben wir die Gleitreibung erörtert, wenn ein Körper über einen anderen Haftreibung gleitet. Es gibt auch eine Haftreibung, die sich auf eine Kraft parallel zu den bei den Oberflächen bezieht, die auch auftreten kann, wenn die Oberflächen nicht gleiten. Nehmen wir an, ein Körper, z. B. ein Tisch, steht auf einem waagerechten Boden. Wenn keine horizontale Kraft auf den Tisch ausgeübt wird, gibt es auch keine Reibungskraft. Nehmen wir jetzt aber an, Sie versuchen, den Tisch zu schieben und er bewegt sich nicht. Sie üben eine horizontale Kraft aus, aber der Tisch bewegt sich nicht. Es muss also eine andere Kraft auf den Tisch wirken, die ihn daran hindert, sich zu bewegen (bei einem Körper, der sich nicht bewegt, ist die Nettokraft null). Hierbei handelt es sich um die Haftreibungskraft, die der Boden auf den Tisch ausübt. Wenn Sie mit mehr Kraft schieben, der Tisch sich aber weiterhin nicht bewegt, hat die Haftreibungskraft auch zugenommen. Wenn Sie kräftig genug schieben, wird der Tisch sich schließlich bewegen, und die Gleitreibung gewinnt die Oberhand. An diesem Punkt haben sie die maximale Haftreibungskrafft übertroffen, die gegeben ist durch $F_R(max) = \mu_H F_N$. Dabei ist μ_H die Haftreibungszahl. Da die Haftreibungskraft zwischen null und diesem maximalen Wert liegen kann, schreiben wir

$$F_R \leq \mu_H F_N$$

2.3 Kontaktkräfte

Viele uns bekannte Kräfte werden von Objekten aufeinander ausgeübt, die in direktem Kontakt miteinander sind - sich also berühren. Sie sind eine Folge von Kräften zwischen den Oberflächenmolekülen der Körper, die im Kontakt sind.

Festkörper Drückt man gegen eine Oberfläche, so drückt diese zurück. Betrachten Sie z.B. eine angelehnte Leiter. An der KontaktsteIle drückt die Leiter mit einer horizontalen Kraft auf die Wand, wobei sich die Moleküle in der Oberfläche der Wand verschieben. Wie die Federn einer Matratze drücken dadurch die verschobenen Moleküle der Wand horizontal zurück auf die Leiter. Kräfte, die wie diese senkrecht zur Kontaktfläche wirken, werden als Normalkräfte bezeichnet (wobei Normal-ïn diesem Fall ßenkrecht dazu"bedeutet). Dass sich die Wand in Folge der Belastung etwas biegt, ist mit bloßem Auge kaum wahrnehmbar.

Normalkräfte treten in den verschiedensten Größenordnungen auf. So übt ein Tisch auf jeden darauf liegenden Gegenstand eine Normalkraft aus. Solange der Tisch dabei nicht zerbricht, ist diese Kraft mit der Gewichtskraft des darauf liegenden Körpers im Gleichgewicht. Drücken Sie zusätzlich noch auf den Körper, erhöht sich im Gegenzug die nach oben gerichtete Kraft und verhindert damit, dass der Körper nach unten beschleunigt wird.

Kontaktflächen können auch Kräfte aufeinander ausüben, die parallel zu den Kontaktflächen sind. z.B. ein großer Quader auf dem Boden. Wenn man versucht, ihn mit einer kleinen horizontalen Kraft zur Seite zu bewegen, gleitet er überhaupt nicht. Die Bodenoberfläche übt eine Kraft auf den Quader auf, die sich dessen Bestreben, in Druckrichtung zu gleiten, vollständig entgegenstellt. Dagegen wird der Quader zu gleiten beginnen, wenn er mit einer hinreichend starken Kraft zur Seite gedrückt wird. Damit er weitergleitet, muss weiter Druck auf ihn ausgeübt werden. Ist das nicht der Fall, bremst die Reibungskraft die Bewegung des Quaders ab, so dass er schließlich ganz zur Ruhe kommt. Eine Komponente einer Kontaktkraft, die dem Gleiten oder der Tendenz zu gleiten entgegenwirkt, wird Reibungskraft genannt. Eine Reibungskraft wirkt stets parallel zur Kontaktfläche. Auch wenn es in den Abbildungen scheinen könnte, als würden Normalkräfte und Reibungskräfte nur an einem Punkt angreifen, sind sie in der Realität über die ganze Kontaktfläche verteilt.

Federn Die Kraft, die eine um eine kleine Länge Δx zusammengedrückte oder gedehnte Feder ausübt, ergibt sich experimentell zu

$$F_x = -k_F \cdot \Delta x \tag{4}$$

(Hook´sches gesetz) Dabei ist k_F die so genannte Federkonstante, ein Maß für die Steifheit einer Feder. Das negative Vorzeichen in der Gleichung zeigt, dass diese Kraft in entgegengesetzter Richtung zu der wirkt, in der die Feder gedehnt bzw. zusammengedrückt wird. Diese Beziehung, die als das Hooke'sche Gesetz bekannt ist, ist recht bedeutsam: Von einem Körper, der unter dem Einfluss von Kräften, die sich ausgleichen, im Ruhezustand ist, sagt man, er sei in einem statischen Gleichgewicht. Wenn eine kleine Verschiebung dieses Körpers eine Gesamtkraft zur Folge hat, die wieder in Richtung des Gleichgewichtspunkts weist (*eine so genannte Rückstellkraft*) , spricht man von einem stabilen Gleichgewicht.

2.4 Lösen der Bewegungsgleichung

Die Bewegungsgleichung ist eine Differentialgleichung

$$\vec{F} = m \cdot \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \tag{5}$$

Ihre Lösung ergibt den Ort zu einem gewissen Zeitpunkt. Die Geschwindigkeit ergibt sich direkt aus der zeitlichen Ableitung des Ortes. Die zweite Ableitung ist dann identisch mit der Beschleunigung und multipliziert mit der Masse die Kraft, die zur Zeit t am Ort $\vec{r} = (x, y, z)$ herrscht.

Die Lösung der Differentialgleichung kann trivial, einfach, kompliziert oder sogar analytisch unlösbar sein. Praktisch immer ist aber eine numerische Lösung möglich.

2.4.1 Lösung durch Integration

Wir wissen, wie man die Geschwindigkeitsfunktion $v(t)$ und die Beschleunigungsfunktion $a(t)$ durch Ableiten der Ortsfunktion $x(t)$ nach der Zeit gewinnen kann. Das umgekehrte Problem besteht darin, die Funktion $x(t)$ zu ermitteln, wenn die Geschwindigkeit $v(t)$ oder die Beschleunigung $a(t)$ gegeben ist. Dazu muss man das Verfahren der Integration anwenden, das wir an dieser Stelle deshalb kurz erläutern wollen. Wenn wir die Beschleunigung $a(t)$ als Funktion der Zeit kennen, gilt es, eine Funktion $v(t)$zu finden, deren Ableitung die Beschleunigung ist. Die Funktion $v(t)$ wird dann eine Stammfunktion von $a(t)$ genannt.

Wenn beispielsweise die Beschleunigung konstant ist, also $dv(t) = a, a = konstant$ gilt, ist die Geschwindigkeit eine Funktion der Zeit, deren Ableitung gerade diese Konstante ist. Eine solche Funktion lautet $v(t) = at$. Allerdings kann zu der Funktion $v(t) = at$ noch eine beliebige Konstante - nennen wir sie V_o - addiert werden, ohne das Ergebnis

der Differenziation zu ändern. Also gilt folgende allgemeinere Form als die Lösung:

$$v(t) = at + V_o \tag{6}$$

Für$t = 0$gilt $v = V_a$. Somit ist V_o die Anfangsgeschwindigkeit. Mit der gleichen Begründung ist auch die Ortsfunktion $x(t)$ jene Funktion, deren Ableitung die Geschwindigkeit ist:

$$\frac{dx}{dt} = v(t) = at + V_o$$

$\rightarrow$

$$x(t) = \frac{a}{2}t^2 + V_o t + x_0$$

Wir haben hier ein wichtiges Merkmal der Vorgehensweise bei der Integration kennen gelernt: Um die allgemeine Lösung anzugeben, muss zu der Stammfunktion eine beliebige Konstante, die Integrationskonstante, hinzugefügt werden. Da wir zweimal integrieren mussten, um aus der Funktion$a(t)$ die Funktion $x(t)$ zu erhalten, treten nun zwei Konstanten, X_0 und V_0, auf. Diese Konstanten sind durch die Geschwindigkeit und den Ort des Teilchens zu einem bestimmten Anfangszeitpunkt gegeben, der gewöhnlich als $t = 0$ gewählt wird. Sie werden deshalb die Anfangsbedingungen genannt. Das Problem ermitteln Sie bei gegebener Funktion $a(t)$ und den Anfangswerten X_0 und V_0 die Funktion $x(t)$ heißt das Anfangswertproblem. Da die Beschleunigung eines Teilchens durch die Kräfte bestimmt ist, die auf das Teilchen einwirken, ist dieses Problem in der Physik von fundamentaler Bedeutung. Somit können wir den Ort eines Teilchens im Prinzip für alle Zeiten berechnen, wenn wir die auf das Teilchen einwirkenden Kräfte sowie seinen Ort und seine Geschwindigkeit zu einem bestimmten Zeitpunkt kennen (man spricht dann auch von der Lösung der Bewegungsgleichung) .

Das Bestimmen der Stammfunktion einer Funktion ist eng mit der Aufgabe verbunden, die Fläche unter einer Kurve zu berechnen. Wir betrachten dazu den Fall der Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit V_0. Die Ortsänderung oder Verschiebung Δx im Zeitraum Δt ist dann $\Delta x = V_0 \Delta t$

Dies die Fläche unter der Geschwindigkeits-Zeit-Kurve. Wenn V_0 negativ ist, sind auch die Verschiebung und die Fläche unter der Kurve negativ. Im Unterschied zu unserer herkömmlichen Vorstellung, eine Fläche sei immer positiv, erhält die Fläche unter der Kurve"(die Fläche zwischen der Kurve und der Zeitachse) in diesem Fall also einen negativen Wert.

Diese graphische Interpretation der Verschiebung als Fläche unter der $v-t-$Kurve ist auch dann gültig, wenn die Geschwindigkeit nicht konstant ist. Um dies zu zeigen, teilen wir die Fläche unter der Kurve zunächst in viele kleinere Intervalle Δt_1, Δt_2 ... usw. auf, denen jeweils ein Rechteck zugeordnet ist. Der Flächeninhalt dieser diskreten Rechteck ist $V_i \Delta . t_i$, was näherungsweise gleich der Verschiebung Δx_i des Teilchens im Zeitintervall Δt_i ist. Somit ist die Summe der Flächeninhalte der Rechtecke näherungsweise gleich der Summe der Verschiebungen in den einzelnen Zeitintervallen und damit gleich der Gesamtverschiebung vom Zeitpunkt t_1 bis zum Zeitpunkt t_2•

Mathematisch schreibt man dafür$\Delta x \sim \sum_i V_i \Delta t_i$.

Die Näherung kann beliebig gut gemacht werden, wenn nur eine ausreichende Anzahl von Rechtecken unter die Kurve gelegt wird, von denen jedes Rechteck einen ausreichend kleinen Wert von Δt besitzt. Im Grenzwert immer kleinerer Zeitintervalle (in dem die Anzahl der Rechtecke immer größer wird) geht die Summe gegen den Flächeninhalt unter der Kurve, der seinerseits gleich der Verschiebung ist. Der Grenzwert für immer kleiner werdende Zeitintervalle Δt ist gleich der Fläche unter der Kurve $v(t)$; er heißt Integral der Funktion $v(t)$ und wird geschrieben als

$$\Delta x = x(t_2) - x(t_1) = \lim_{\Delta t \to 0} \left(\sum_i V_i \Delta t_i \right) = \int_{t_1}^{t_2} v \cdot dt \tag{7}$$

2.4.2 Numerisches Lösen

Das Euler-Verfahren Wenn sich ein Teilchen unter dem Einfluss einer konstanten Kraft bewegt, ist seine Beschleunigung konstant. Damit kann man die Bewegungsgleichung, wie oben gezeigt, analytisch lösen (aufintegrieren). Doch was ist, wenn sich das Teilchendurch den Raum bewegt, während die auf das Teilchen wirkenden Kräfte z.B. von dessen Ort und Geschwindigkeit abhängen? In diesem Fall bestimmen der Ort, die Geschwindigkeit und die Beschleunigung des Teilchens zu einem Zeitpunkt den Ort und die Geschwindigkeit des Teilchens im nächsten Augenblick, woraus sich wiederum die Beschleunigung zu diesem Zeitpunkt ergibt. Sowohl der Ort und die Geschwindigkeit als auch die Beschleunigung des Teilchens ändern sich ständig mit der Zeit. Ein Näherungsverfahren für diese Aufgabenstellung besteht darin, die sich kontinuierlich ändernde Zeit in viele kleine Zeitintervalle Δt zu zerlegen. Bei der einfachsten Näherung wird dann einfach angenommen, dass die Beschleunigung während jedes Zeitschritts konstant ist. Diese Näherung wird das Euler-Verfahren oder Polygonzugverfahren genannt. Tatsächlich ist die Änderung der Beschleunigung während des Intervalls vernachlässigbar gering, wenn das Zeitintervall nur hinreichend klein ist.

Es seien x_o, V_0 und a_0 die bekannten Variablen Ort, Geschwindigkeit und Beschleunigung eines Teilchens zu einem Anfangszeitpunkt t_o. Wenn man während Δt eine konstante Beschleunigung annimmt, beträgt die Geschwindigkeit zum Zeitpunkt $t_1 = t_o + \Delta t$

$$v_1 = v_o + a_0 \Delta t \tag{8}$$