

Praktikum

Pengolahan Sinyal Waktu Kontinyu

sebagai bagian dari Mata Kuliah ET 2004

Modul 1 : Respons Impuls



Program Studi Teknik Telekomunikasi
Sekolah Teknik Elektro dan Informatika
Institut Teknologi Bandung
2017

I. Pendahuluan

Respons impuls berperan penting pada sistem yang linear dan *time-invariant* (LTI) karena luaran sistem terhadap masukan sembarang serta kelakuan sistem dapat diketahui. Pada modul ini, akan ditentukan respons impuls dari sistem LTI yang diwakilkan oleh rangkaian RC. Selain itu, akan diterapkan konsep sistem LTI untuk menentukan keluaran sistem dengan masukan yang lebih kompleks.

II. Tujuan

- Menentukan respons impuls sistem LTI dengan berbagai cara dan membandingkan dengan teori
- Menggunakan prinsip linearitas dan *time-invariant* untuk menghitung luaran sistem LTI dengan masukan yang lebih kompleks

III. Dasar Teori

III.1. Sistem linear

Sistem bersifat linear jika berlaku prinsip superposisi yaitu penjumlahan dan homogenitas [1], seperti ditunjukkan pada Tabel 1.

Tabel 1. Prinsip linearitas sistem

Masukan $x(t)$ menghasilkan luaran $y(t)$	Masukan	Luaran
Penjumlahan	$x_1(t) + x_2(t)$	$y_1(t) + y_2(t)$
Homogenitas	$\alpha x_1(t)$	$\alpha y_1(t)$
	$\beta x_2(t)$	$\beta y_2(t)$
Linear	$\alpha x_1(t) + \beta x_2(t)$	$\alpha y_1(t) + \beta y_2(t)$

III.2. Sistem *time-invariant*

Suatu sistem bersifat *time invariant* jika pergeseran waktu terhadap masukan menghasilkan pergeseran waktu yang sama pada luaran. Secara matematis, jika masukan $x(t)$ menghasilkan luaran $y(t)$, maka sistem bersifat *time-invariant* jika masukan $x(t - t_0)$ menghasilkan luaran $y(t - t_0)$, dengan t_0 adalah pergeseran waktu [1].

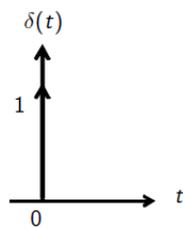
Secara fisis, hal ini berarti sistem berkelakuan sama jika percobaan dilakukan hari ini, besok ataupun minggu depan sekalipun.

III.1. Respons impuls

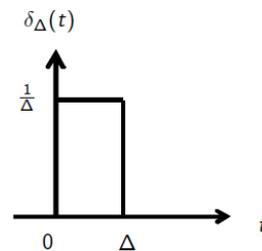
Respons impuls $h(t)$ dapat ditentukan dengan melihat luaran sistem saat diberi masukan berupa unit impuls $\delta(t)$. Dengan menggunakan prinsip linear dan *time-invariant*, maka respons impuls menggambarkan suatu sistem LTI secara utuh. Dengan demikian, luaran sistem LTI dapat ditentukan untuk masukan apapun selama respons impulsnya diketahui. Secara matematis, luaran $y(t)$ merupakan hasil konvolusi antara masukan $x(t)$ dengan respons impulsnya $h(t)$ [1][2]

$$y(t) = x(t) * h(t) \quad (1)$$

Pada Gbr. 1a, terlihat bahwa unit impuls merupakan sinyal dengan amplituda tak hingga dan lebar nol. Sementara luas dari unit impuls bernilai satu.



Gbr. 1a. Unit impuls



Gbr. 1b. Pulsa durasi singkat (aproksimasi dari unit impuls)

Secara fisis, sangat sulit bahkan tidak mungkin untuk membangkitkan unit impuls. Unit impuls merupakan keadaan ideal yang bermanfaat dalam analisis matematis. Dalam penerapan praktis, unit impuls diaproksimasi dengan pulsa berdurasi singkat (Gbr. 1b.) yang memiliki amplituda $\frac{1}{\Delta}$ dan lebar Δ , dimana $\Delta > 0$ bernilai cukup kecil [1]

$$\delta_{\Delta}(t) = \frac{1}{\Delta}(u(t) - u(t - \Delta)) \quad (2)$$

Dengan mengambil $\Delta \rightarrow 0$, respons yang dihasilkan adalah respons impuls $h(t)$.

Pada Gbr 1b. tampak juga bahwa untuk membuat pulsa berdurasi singkat, nilai Δ harus sekecil mungkin yang berakibat pada semakin besarnya nilai amplituda pulsa. Nilai amplituda yang sangat besar tidak dapat dihasilkan mengingat keterbatasan generator sinyal dalam melindungi komponen di dalamnya seperti amplifier. Dengan demikian, pulsa durasi singkat yang dibangkitkan akan memiliki luas sebesar $0 < L < 1$

$$p_{\Delta}(t) = \frac{L}{\Delta}(u(t) - u(t - \Delta)) \quad (3)$$

Dengan mengambil $\Delta \rightarrow 0$, maka [1]:

1. Pulsa durasi singkat $p_{\Delta}(t)$ menjadi unit impuls terskala $L\delta(t)$. Secara matematis

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} p_{\Delta}(t) = L\delta(t) \quad (4)$$

2. Respons yang dihasilkan oleh pulsa durasi singkat $p_{\Delta}(t)$ adalah

$$g(t) = Lh(t) \quad (5)$$

Respons pulsa $g(t)$ bernilai proporsional dengan respons impuls yang diinginkan. Dengan prinsip linearitas, $h(t)$ dapat dihitung.

III.2. Respons step

Respons step $s(t)$ merupakan luaran sistem dengan masukan berupa unit step $s(t)$. Sinyal unit step secara fisis memodelkan banyak fenomena, diantaranya saat kita menekan tombol sakelar, pengaturan ketinggian pesawat oleh pilot, perubahan mendadak suhu pada termostat, dll.

Mengetahui respons step sistem LTI merupakan cara alternatif dalam menghitung respons impuls $h(t)$. Cara alternatif ini diperlukan mengingat pembangkitan sinyal unit step lebih mudah dan hasilnya mendekati ideal. Hal ini berbeda dengan pembangkitan unit impuls yang tidak mungkin dilakukan, sehingga diaproksimasi dengan sinyal pulsa durasi singkat.

Hubungan respons step dan respons impuls secara matematis adalah [1]

$$s(t) = \int_{-\infty}^t h(\tau) d\tau \quad (6)$$

Dengan demikian, respons impuls ditentukan dari turunan respons step atau

$$h(t) = \frac{ds(t)}{dt} \quad (7)$$

III.3 Sistem dalam Bentuk Persamaan Differensial

III.3.1. Definisi

Dengan mengetahui respons impuls, luaran sistem LTI dapat ditentukan melalui persamaan konvolusi. Sementara itu, hubungan masukan dan keluaran suatu sistem secara implisit dapat dilihat melalui persamaan differensial.

Persamaan diferensial orde N dengan masukan $x(t)$ dan luaran $y(t)$ dapat ditulis sebagai [1][2]

$$\sum_{k=0}^N a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^N b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k} \quad (8)$$

Parameter a_k dan b_k adalah koefisien berupa konstanta tidak berubah waktu.

Untuk mendapatkan hubungan antara masukan dan keluaran secara eksplisit, persamaan diferensial tersebut perlu diselesaikan. Untuk menyelesaikan persamaan diferensial, diperlukan informasi tambahan yang salah satunya berupa nilai kondisi awal. Kondisi awal merangkum semua informasi dari keadaan lampau sebuah sistem yang diperlukan untuk menentukan luaran di kemudian hari. Contoh kondisi awal pada rangkaian listrik adalah nilai awal tegangan kapasitor dan arus induktor.

Bergantung dari nilai kondisi awal, maka sistem yang dideskripsikan melalui persamaan diferensial dapat bersifat linear/nonlinear, berubah waktu/tidak berubah waktu, kausal/tidak kausal.

Banyaknya informasi kondisi awal yang perlu diketahui untuk menyelesaikan persamaan diferensial, ditentukan dari banyaknya memori sistem atau orde sistem N . Misalnya untuk waktu $t = t_1$, kondisi awal dari sistem orde N yaitu [1]

$$y(t)|_{t=t_1}, \frac{dy(t)}{dt}|_{t=t_1}, \dots, \frac{d^{N-1}y(t)}{dt^{N-1}}|_{t=t_1} \quad (9)$$

III.3.2. Persyaratan Sistem dalam Bentuk Persamaan Diferensial Bersifat Linear Tidak Berubah Waktu (Sistem LTI)

Solusi dari sistem yang dijelaskan melalui persamaan diferensial bergantung dari informasi kondisi awal. Untuk menghasilkan sistem yang bersifat LTI, maka sistem harus berada dalam keadaan *initial rest*, yang berarti luaran sistem bernilai nol sampai adanya masukan. Hal ini berarti, dalam keadaan *initial rest*, jika $x(t) = 0$ untuk $t \leq 0$, maka $y(t) = 0$ untuk $t \leq 0$ [1]

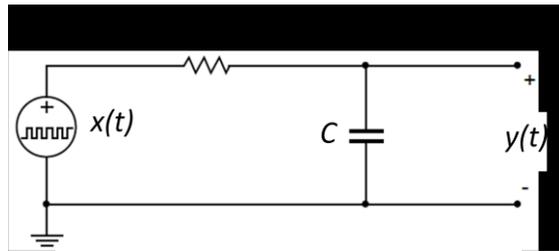
Dengan demikian, nilai kondisi awal untuk sistem yang berada pada keadaan *initial rest* yaitu

$$y(t_0) = \frac{dy(t_0)}{dt} = \dots = \frac{d^{N-1}y(t_0)}{dt^{N-1}} = 0 \quad (10)$$

Persamaan (10) diperlukan untuk menyelesaikan persamaan diferensial yaitu menentukan luaran $y(t)$ untuk $t > t_0$.

III.4 Rangkaian RC

Rangkaian RC termasuk dalam kategori sistem orde satu. Bergantung dari tegangan kapasitor atau tegangan resistor yang bertindak sebagai luaran, fungsi rangkaian RC juga berbeda. Gambar 2 menunjukkan rangkaian RC dengan tegangan sumber $x(t)$ sebagai masukan dan tegangan kapasitor $y(t)$ sebagai luaran. Biasanya tegangan luaran ditentukan melalui penyelesaian persamaan diferensial dengan memperhatikan kondisi awal.



Gbr. 2. Rangkaian RC orde satu [3]

III.4.1. Rangkaian RC sebagai Sistem LTI

Rangkaian RC yang bersifat LTI dapat diperoleh jika rangkaian berada pada keadaan *initial rest*. Oleh karena itu, jika tegangan masukan pada rangkaian bernilai nol untuk waktu $t \leq 0$, maka keluaran juga bernilai nol untuk waktu $t \leq 0$. Dengan demikian, kondisi awal dari tegangan kapasitor harus bernilai nol saat $t = 0$, atau $y(0) = 0$.

Saat percobaan, keadaan *initial rest* rangkaian dipastikan sebelum rangkaian diberi masukan, misalnya dengan menunggu muatan pada kapasitor menjadi nol atau dengan melakukan hubungan pendek pada kapasitor.

III.4.2. Respons Step dan Respons Impuls secara Teoritis

Rangkaian RC pada Gbr. 2 dapat ditulis dalam bentuk persamaan differensial. Dengan menggunakan masukan pada rangkaian tersebut berupa unit step $u(t)$, luaran yang dihasilkan berupa respons step $s(t)$. Selanjutnya, respons impuls rangkaian ditentukan dengan menggunakan hubungan antara respons impuls dengan respons step sesuai persamaan (7). Bentuk persamaan differensial beserta respons step dan respons impuls teoritis dari rangkaian RC tampak pada Tabel 2.

Tabel 2. Respons impuls dan respons step rangkaian RC secara teoritis

Persamaan differensial	Respons step	Respons impuls
$RC \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = x(t)$	$s(t) = \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right) u(t)$	$h(t) = \left(\frac{1}{RC} e^{-\frac{t}{RC}}\right) u(t)$

IV. Persiapan Percobaan

IV.1. Peralatan yang Diperlukan

Pada percobaan ini, diperlukan peralatan sebagai berikut:

1. Modul Edibon M2
2. Generator sinyal
3. Osiloskop
4. Multimeter
5. Kabel probe sebanyak 3 buah
6. Kabel jumper

IV.2. Rangkaian dalam Kondisi *Intial Rest*

Rangkaian RC diinginkan bersifat LTI, sehingga kondisi *initial rest* rangkaian harus terpenuhi. Untuk itu, kondisi awal tegangan kapasitor/resistor dibuat nol terlebih dahulu. Waktu yang diperlukan sampai kapasitor menjadi tidak bermuatan adalah dalam hitungan beberapa milidetik. Dengan demikian, hubungan pendek pada kapasitor cukup dilakukan selama 1-2 detik. Gunakan alat ukur multimeter untuk melihat proses perubahan nilai tegangan kapasitor menjadi nol.

IV.3. DC Coupling

Kedua kanal masukan pada osiloskop diset sebagai DC coupling. Hal ini dilakukan agar sinyal DC dapat dilewatkan untuk ditampilkan pada osiloskop. Sementara itu, jika AC coupling yang diset, sinyal DC yang nantinya dibangkitkan, akan diblok pada kanal masukan osiloskop.

V. Percobaan

V.I. Respons step

Langkah-langkah percobaan adalah:

1. Buatlah rangkaian seperti Gbr. 2, dengan nilai $R = 10 \text{ k}\Omega$ dan $C = 100 \text{ nF}$. Pada modul Edibon M2, nilai yang bersesuaian terdapat pada R_4 dan C_5 .
2. Bangkitkan tegangan DC berupa unit step bernilai 1 V. Karena keterbatasan jenis sinyal yang dapat dibangkitkan, maka bangkitkan sinyal kotak periodik frekuensi 100 Hz, duty cycle 60%. Nilai tegangan 1 V dapat dicapai dengan tegangan *peak-to-peak* 1V dan offset DC 500 mV. Pengamatan sinyal masukan dan luaran nantinya cukup dilakukan untuk satu periode.
3. Lihat luaran pada osiloskop dan simpan data tegangan kapasitor terhadap waktu pada *logbook*.
4. Plot hasil eksperimen dan bandingkan dengan respons step $s(t)$ teoritis sesuai Tabel 2.

Gunakan penskalaan osiloskop sbb:

1. Skala tegangan pada Ch 1 dan Ch 2 osiloskop adalah 500 mV/div.
2. Skala waktu osiloskop 2 ms/div.

V.2. Respons impuls

Langkah-langkah percobaan adalah:

1. Buatlah rangkaian seperti Gbr. 2, dengan nilai $R = 10 \text{ k}\Omega$ dan $C = 100 \text{ nF}$. Pada modul Edibon M2, nilai yang bersesuaian terdapat pada R_4 dan C_5 .
2. Bangkitkan pulsa durasi singkat dengan nilai tegangan 250 mV berdurasi $\Delta = 1 \text{ ms}$. Karena keterbatasan jenis sinyal yang dapat dibangkitkan, maka bangkitkan pulsa periodik frekuensi 100 Hz dengan duty cycle 10%. Nilai tegangan 250 mV dapat dicapai dengan tegangan peak-to-peak 250 mV dan offset DC 125 mV. Pengamatan sinyal masukan dan luaran nantinya cukup dilakukan untuk satu periode.
3. Lihat luaran pada osiloskop dan simpan data tegangan kapasitor terhadap waktu pada logbook.
4. Ulangi langkah (1-3) di atas dengan masukan pulsa sebagai berikut:
 - a) tegangan 500 mV, $\Delta = 0.5 \text{ ms}$ (pulsa periodik frekuensi 200 Hz, duty cycle 10%)
 - b) tegangan 1 V, $\Delta = 0.25 \text{ ms}$ (pulsa periodik frekuensi 400 Hz, duty cycle 10%)

Dengan demikian, ketiga pulsa yang dibangkitkan memiliki pasangan nilai (durasi, tegangan) = $\{(1 \text{ ms}, 250 \text{ mV}), (0.5 \text{ ms}, 500 \text{ mV}), (0.25 \text{ ms}, 1 \text{ V})\}$

5. Plot respons pulsa yang didapat untuk ketiga pasangan nilai pulsa pada gambar yang sama.
6. Dengan mengasosiasikan nilai (durasi, tegangan) dengan persamaan (3), diperoleh nilai $L = 2.5 \cdot 10^{-4}$. Hal ini berarti, hasil plot ketiga respons pulsa (hasil no. 5 percobaan V.1.), semakin menyerupai $Lh(t)$ dengan mengecilnya nilai Δ . Apakah fenomena ini terlihat? Jelaskan.

Gunakan penskalaan osiloskop sbb:

1. Skala tegangan pada Ch 1 dan Ch 2 osiloskop dapat disesuaikan pada rentang 50 – 500 mV/div
2. Skala waktu 500 us/div

V.3. Superposisi Respons Step untuk Menghasilkan Respons Pulsa (dianalisis di laboratorium)

1. Dengan prinsip linearitas dan *time-invariant*, gunakan hasil respons step rangkaian RC (hasil percobaan V.1.) untuk menghitung dan membuat plot

luaran rangkaian RC yang diberi masukan berupa pulsa (durasi, tegangan) = (1 ms, 250 mV)

2. Bandingkan hasil di atas dengan hasil percobaan V.2. yang menggunakan masukan pulsa yang sama. Plot keduanya pada gambar yang sama.

Petunjuk : pulsa durasi singkat dapat ditulis sesuai persamaan (3), yang terdiri dari dua buah unit step dengan amplituda dan waktu yang berbeda. Respons rangkaian dengan input unit step diberikan pada percobaan V.1.

V.4. Superposisi Respons Pulsa Durasi Singkat untuk Menghitung Respons Pulsa Durasi Lebih Lebar (dianalisis di laboratorium)

1. Dengan menggunakan prinsip linearitas dan *time-invariant*, gunakan luaran rangkaian RC dengan masukan berupa pulsa (durasi, tegangan) = (0.25 ms, 1 V) (hasil percobaan V.2.) untuk menghitung dan membuat plot luaran rangkaian RC yang diberi masukan berupa pulsa (durasi, tegangan) = (1 ms, 250 mV).
2. Bandingkan hasil di atas dengan hasil percobaan V.2. dengan masukan berupa pulsa (durasi, tegangan) = (1 ms, 250 mV). Plot keduanya pada gambar yang sama.

VI. Tugas pada Laporan

Untuk membuat gambar/plot pada laporan, gunakan bantuan perangkat lunak, misalnya Microsoft Excel, Matlab, Maple, dsb.

Hal-hal yang harus dianalisis pada laporan adalah:

1. Perbandingan respons step hasil percobaan dengan teori
2. Perbandingan respons impuls hasil percobaan dengan teori
3. Perbandingan antara penentuan respons impuls dari turunan respons step, dengan respons impuls melalui pembangkitan pulsa durasi singkat.
4. Analisis respons rangkaian akibat pembangkitan pulsa durasi singkat dengan lebar pulsa dan tegangan yang berbeda-beda terhadap respons impuls yang dikehendaki.
5. Analisis dari kegiatan V.3.
6. Analisis dari kegiatan V.4.

VII. Referensi

1. Alan V. Oppenheim, Alan S. Willsky, with S. Hamid, Signals and Systems, 2nd edition, Prentice-Hall, 1996.
2. Simon Haykin, Barry Van Veen, Signals and Systems, 2nd edition, John Wiley & Sons, Inc., 2004.
3. <http://www.swarthmore.edu/NatSci/echeeve1/Class/e12/>
4. <http://web.eecs.umich.edu/~aey/eecs216/labs/lab1.pdf>