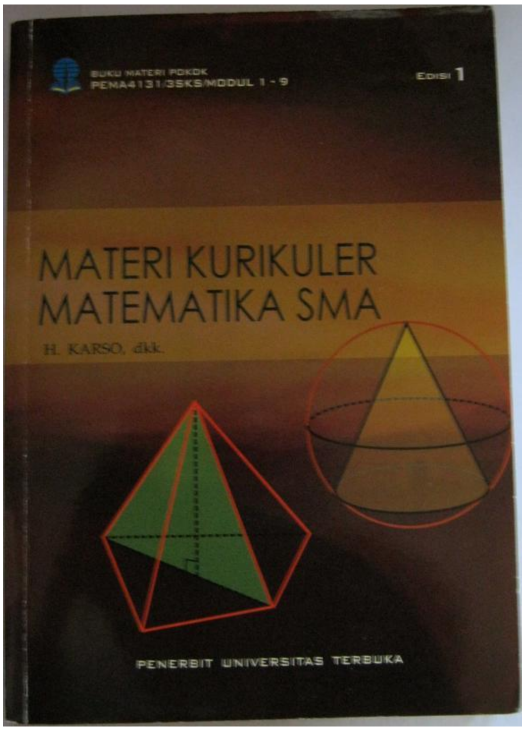
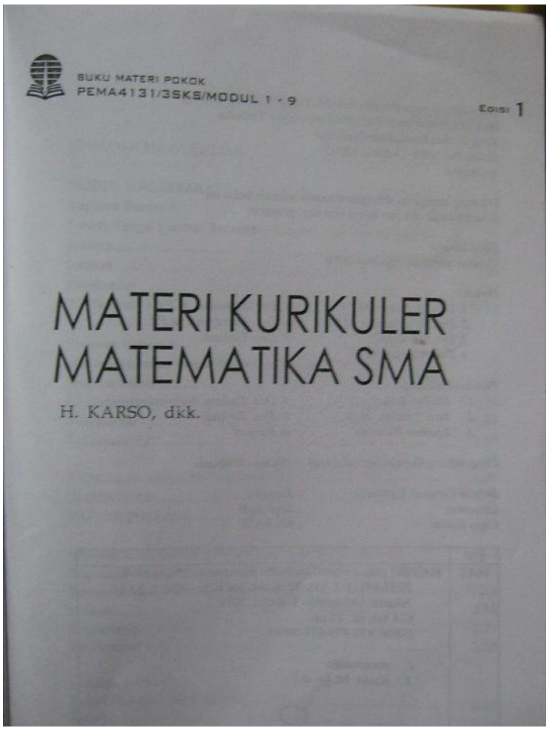
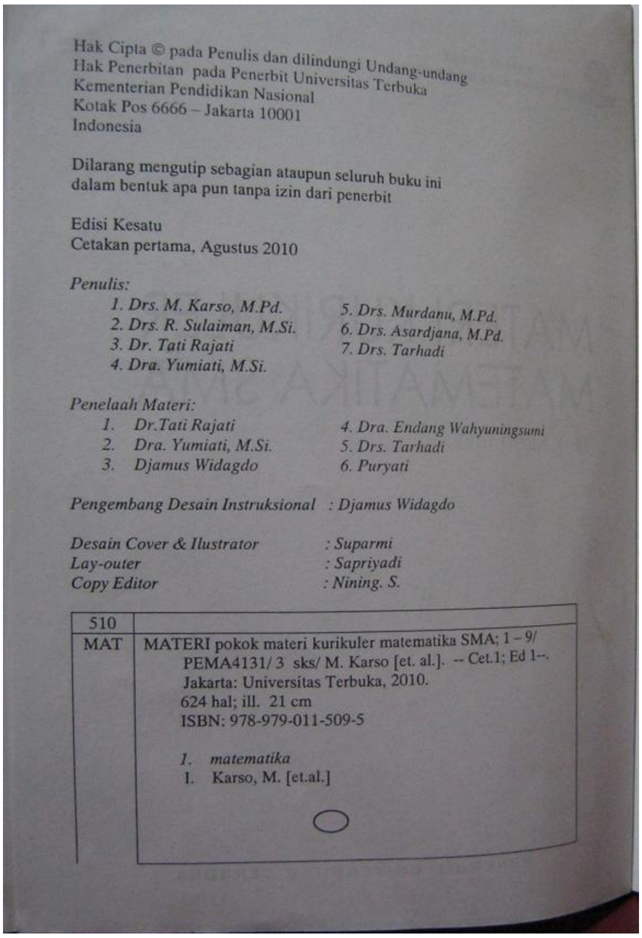



BUKU MATERI POKOK
PEMA4131/3SKS/MODUL 1 - 9

EDISI 1

MATERI KURIKULER MATEMATIKA SMA

H. KARSO, dkk.



Hak Penerbitan pada Penerbit Universitas Terbuka
Kementerian Pendidikan Nasional
Kotak Pos 6666 – Jakarta 10001
Indonesia

Edisi Kesatu
Cetakan pertama, Agustus 2010

Penulis:
1. *Drs. M. Karso, M.Pd.*
2. *Drs. R. Sulaiman, M.Si.*
3. *Dr. Tati Rajati*
4. *Dra. Yumiati, M.Si.*
5. *Drs. Murdanu, M.Pd.*
6. *Drs. Asardjana, M.Pd.*
7. *Drs. Tarhadi*

Penelaah Materi:
1. *Dr.Tati Rajati*
2. *Dra. Yumiati, M.Si.*
3. *Djamus Widagdo*
4. *Dra. Endang Wahyuningsumi*
5. *Drs. Tarhadi*
6. *Puryati*

Pengembang Desain Instruksional : Djamus Widagdo

Desain Cover & Ilustrator : Suparmi
Lay-outer : Sapriyadi
Copy Editor : Nining. S.

510	
MAT	MATERI pokok materi kurikuler matematika SMA; 1 – 9/ PEMA4131/ 3 sks/ M. Karso [et. al.]. -- Cet.1; Ed 1--. Jakarta: Universitas Terbuka, 2010. 624 hal; ill. 21 cm ISBN: 978-979-011-509-5 *1. matematika* I. Karso, M. [et.al.]

GEOMETRI RUANG

1. Pengantar

Topik yang Anda pelajari kali ini adalah modul ke tujuh dari mata kuliah Materi Kurikulum Matematika SMA. Modul ini membahas tentang titik, garis, bidang, dan sudut, dalam geometri ruang (dimensi tiga), ditambah dengan masalah volume bangun ruang.

Dalam kegiatan pendahuluan Anda akan mempelajari kedudukan titik, garis, dan bidang dalam ruang dimensi tiga, juga tentang jarak. Jarak yang dimaksudkan, yaitu jarak antara titik dan garis, dan jarak antara titik dan bidang, dalam ruang dimensi tiga. Sedangkan pada kegiatan berikutnya Anda akan mempelajari sudut dan volume. Sudut yang dimaksudkan, yaitu sudut antara garis dan bidang, dan sudut antara dua bidang, dalam ruang dimensi tiga. Sedangkan masalah volume yang akan Anda pelajari khusus tentang volume bangun-bangun ruang.

2. Tujuan Instruksional Umum

Setelah mempelajari modul ini, Anda diharapkan dapat menjelaskan kedudukan titik, garis, dan bidang, serta konsep jarak, sudut, dan volume dalam ruang dimensi tiga.

3. Tujuan Instruksional Khusus

Setelah menyelesaikan modul ini, Anda diharapkan mampu:

a. Menyelesaikan masalah dalam matematika atau bidang lainnya yang penyelesaiannya menggunakan geometri ruang;

b. Menjelaskan kedudukan titik, garis, dan bidang, jarak, sudut, dan volume dalam ruang dengan menggunakan pendekatan dan atau media/alat-peraga yang sesuai;

c. Menganalisa kesalahan-kesalahan yang biasa dilakukan oleh guru atau siswa (jika ada) dalam memahami konsep kedudukan titik, garis, dan bidang, jarak, sudut, dan volume dalam ruang.

4. Kegiatan Belajar

4.1. Kegiatan Belajar 1

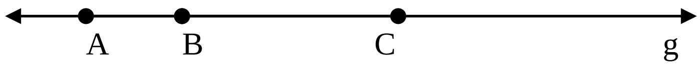
TITIK, GARIS, DAN BIDANG DALAM RUANG

4.1.1. Uraian dan Contoh

Tiga unsur pangkal dalam geometri, yaitu titik, garis, dan bidang. Ketiga unsur tersebut, dapat juga disebut sebagai tiga unsur yang tak didefinisikan.

Sebuah titik dipikirkan sebagai suatu tempat/posisi dalam ruang. Titik tidak memiliki panjang maupun ketebalan. Bekas tusukan jarum, atau bekas ujung pensil di atas kertas, dapat dipikirkan sebagai model fisik dari sebuah titik. Sebuah titik direpresentasikan dengan sebuah noktah dan diberinama dengan suatu huruf kapital.

Sebuah garis dipikirkan sebagai suatu himpunan titik berderet yang panjang tak terbatas, tetapi tidak memiliki lebar. Seutas benang yang diregangkan, goresan pensil mengikuti tepi sebuah penggaris dapat difikirkan sebagai model sebuah garis. Sebuah garis direpresentasikan dengan sebuah gambar sinar dengan mata di kedua ujungnya yang menunjukkan bahwa garis tersebut tak berakhir. Untuk memberinama sebuah garis, dapat memanfaatkan dua buah titik pada garis tersebut, atau dengan sebuah huruf kecil. Cara menuliskannya: $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{AC}$, $\overleftrightarrow{BC}$, $\overleftrightarrow{BA}$, $\overleftrightarrow{CA}$, atau g. Misalnya seperti Gambar 1 berikut:



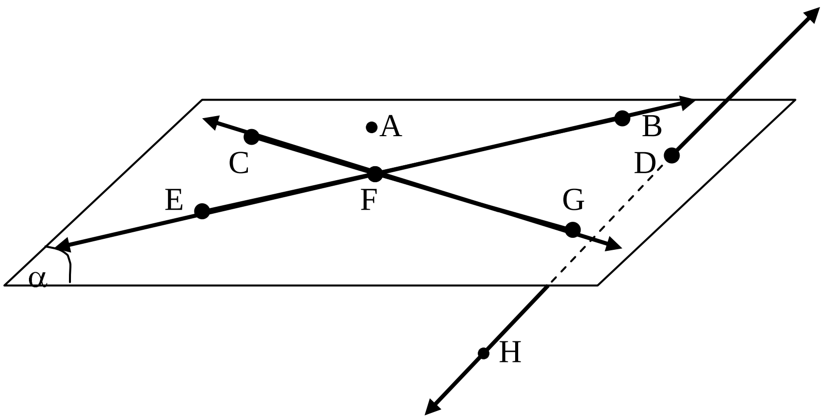
Gambar 1.

Ingat: *ada banyak nama untuk garis yang sama*.

Pada **Gambar 1**, garis g dapat dinyatakan sebagai garis $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{AC}$, $\overleftrightarrow{BC}$, $\overleftrightarrow{BA}$, atau $\overleftrightarrow{CA}$, karena garis g melalui titik A, titik B, dan titik C. Lambang "$\overleftrightarrow{AB}$" artinya garis yang melalui titik A dan titik B, atau garis yang memuat titik A dan titik B. Lambang "$\overleftrightarrow{AC}$" artinya garis yang melalui titik A dan titik C, atau garis yang memuat titik A dan titik C. Lambang "$\overleftrightarrow{BC}$" artinya garis yang melalui titik B dan titik C, atau garis yang memuat titik B dan titik C. Lambang "$\overleftrightarrow{AB}$" dan lambing

"$\overleftrightarrow{BA}$" maknanya sama, yaitu garis yang melalui titik A dan titik B, atau garis yang memuat titik A dan titik B.

Sebuah bidang difikirkan sebagai suatu himpunan titik berderet dan berjajar secara rapat dan tak terbatas, tetapi tidak memiliki ketebalan. Permukaan sebuah meja, atau permukaan selembar kertas putih polos, yang dibentang ke segala arah tak terbatas, dapat difikirkan sebagai model fisik sebuah bidang. Sebuah bidang direpresentasikan dengan gambar sebuah jajargenjang, dan nama sebuah bidang dapat menggunakan sebuah huruf kapital atau huruf Yunani.



Gambar 2

Pada **Gambar 2**, bidang α memuat titik-titik A, B, C, D, E, F, G, (*dikatakan ketujuh titik tersebut terletak pada bidang*-α); $\overleftrightarrow{BE}$ dan $\overleftrightarrow{GC}$ keduanya pada bidang-α dan berpotongan di F. $\overleftrightarrow{HD}$ memotong (menembus) bidang-α di titik D.

Dari Gambar 2 tersebut, dapat dituliskan antara lain:

$A \in \alpha$, $\longrightarrow$ artinya titik A pada bidang-α ;

$F \in \overleftrightarrow{BE}$, $\longrightarrow$ artinya titik F pada $\overleftrightarrow{BE}$;

$\overleftrightarrow{BE} \in \alpha$, $\longrightarrow$ artinya $\overleftrightarrow{BE}$ pada bidang-α ;

$F = \overleftrightarrow{BE} \cap \overleftrightarrow{GC}$, $\longrightarrow$ artinya titik F adalah titik potong $\overleftrightarrow{BE}$ dan $\overleftrightarrow{GC}$;

$D = \alpha \cap \overleftrightarrow{HD}$, $\longrightarrow$ artinya titik D adalah titik potong (titik tembus) $\overleftrightarrow{HD}$ pada bidang-α;

α = bidang($\overleftrightarrow{BE}$, $\overleftrightarrow{GC}$), $\longrightarrow$ artinya bidang α adalah bidang yang memuat $\overleftrightarrow{BE}$ dan $\overleftrightarrow{GC}$,

dan sebagainya.

***Ingat**: lukisan seperti **Gambar 1** dan **Gambar 2** tadi merupakan sebuah model, dan hanya memvisualisasikan konsep/gambar geometris.*

A. Kedudukan titik, garis, dan bidang dalam ruang

1. Kedudukan dua titik

Definisi : Dua titik berimpit adalah dua titik yang sama.

Dua buah titik dapat terjadi keduanya berimpit atau keduanya berlainan. Dua buah titik yang berimpit dapat dipikirkan sebagai sebuah titik yang memiliki dua nama. Misalnya seperti disajikan pada **Gambar 3** berikut:

• A B•C

D• E•F

G•

Gambar 3

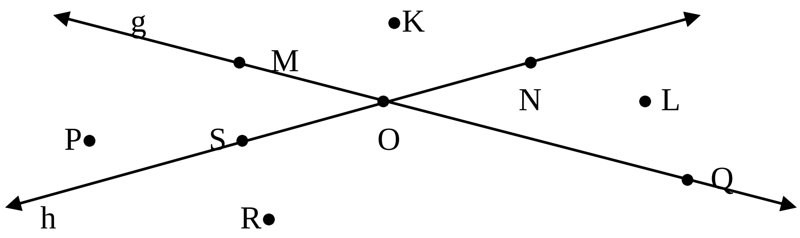
Pada **Gambar 3**: pasangan-pasangan titik B dan titik C, titik E dan titik F, merupakan pasangan/dua buah titik yang berimpit. Tampak bahwa ada satu gambar titik, namun mempunyai dua nama: B dan C, E dan F. Tampak juga pasangan-pasangan: titik A dan titik D, titik A dan titik G, titik D dan titik G, merupakan dua buah titik yang berlainan. Kita juga dapat mengatakan pasangan-pasangan: titik A dan titik B, titik A dan titik C, titik A dan titik E, titik A dan titik F, merupakan pasangan/dua buah titik yang berlainan.

2. Kedudukan titik dan garis

Definisi

Titik-titik segaris (kolinear) adalah titik-titik yang terletak pada satu garis (titik-titik yang tidak terletak pada satu garis disebut titik-titik tak segaris (non-kolinear)).

Sebuah titik dan sebuah garis dapat terjadi sebuah titik tersebut terletak pada sebuah garis tersebut atau sebuah titik tersebut tidak terletak pada sebuah garis tersebut. Jika sebuah titik terletak pada suatu garis, maka dapat juga dikatakan garis tersebut melalui sebuah titik. Jika sebuah titik tidak terletak pada suatu garis, maka dapat dikatakan sebuah titik di luar sebuah garis.



Gambar 4

Pada **Gambar 4**: titik K, titik L, titik P, dan titik R merupakan titik-titik yang tidak terletak pada suatu garis. Keempat titik tersebut tidak terletak pada garis g maupun garis h, atau dapat dikatakan keempat titik tersebut di luar garis g maupun garis h. Namun titik M, titik O, dan titik Q, ketiganya terletak pada garis g. Sedangkan titik S, titik O, dan titik N, ketiganya terletak pada garis h. Tampak juga titik O terletak pada garis g maupun garis h.

Pada **Gambar 4** tersebut, dapat dikatakan: titik M, titik O, dan titik Q merupakan tiga buah titik yang kolinear, karena ketiganya terletak pada satu garis; yaitu garis g. Demikian juga titik S, titik O, dan titik N,merupakan tiga buah titik yang kolinear, karena ketiganya terletak pada satu garis; yaitu garis h. Berdasarkan kondisi tersebut berarti titik M dan titik N merupakan dua buah titik yang tidak kolinear (non-kolinear), karena masing-masing terletak pada garis yang berbeda. Begitu pula pasangan titik M dan titik S, titik N dan titik Q, titik S dan titik Q, merupakan pasangan-pasangan titik yang tidak kolinear (non-kolinear).

3. Kedudukan titik dan bidang

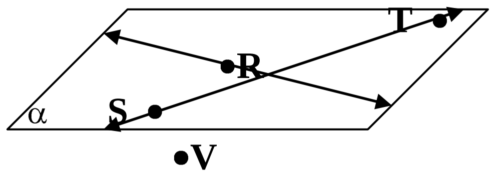
Sebuah titik dapat terletak pada suatu bidang atau sebuah titik tidak terletak pada sebuah bidang. Jika sebuah titik A terletak pada suatu bidang-α, maka dapat dikatakan pula bidang-α melalui titik A, atau titik A pada bidang-α.

<u>Aksioma</u>

Sebarang tiga buah titik terletak pada sekurang-kurangnya satu bidang. Sebarang tiga buah titik non-kolinear terletak pada tepat satu buah bidang.

<u>Definisi</u> ***coplanar***

Titik-titik dikatakan koplanar (*coplanar*) atau sebidang jika dan hanya jika ada suatu bidang yang memuat semua titik tersebut.



Gambar 5

Pada **Gambar 5**, titik R, titik S, dan titik T merupakan tiga buah titik yang non-kolinear, dan ketiganya terletak pada satu bidang, yaitu bidang-α. Dengan demikian, titik R, titik S, dan titik T dikatakan sebagai tiga buah titik yang <u>koplanar</u>. Sedangkan titik V tidak terletak pada bidang-α. Oleh karena itu titik R, titik S, titik T, dan titik V, merupakan empat buah titik yang <u>non-koplanar</u>.

4. Kedudukan dua buah garis

Dua buah garis dapat terjadi keduanya sebidang atau tak-sebidang. Jika dua garis sebidang, maka dapat terjadi keduanya berpotongan atau sejajar. Jika dua buah garis tak-sebidang, maka keduanya dikatakan bersilangan.

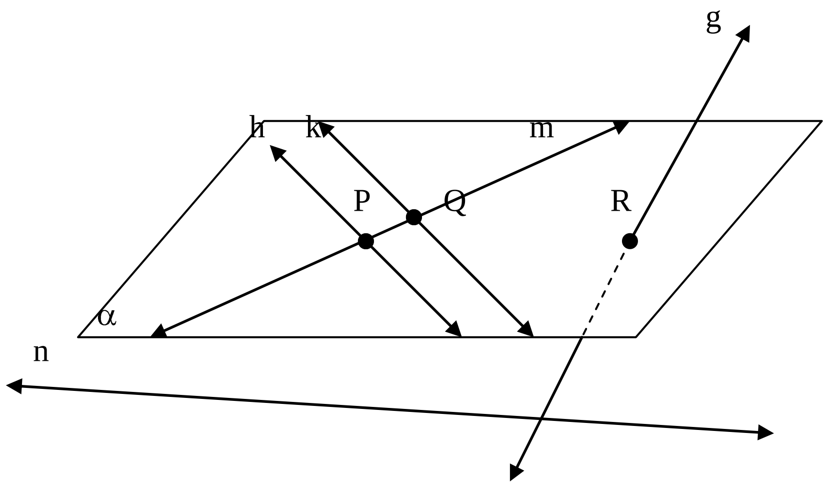
<u>Definisi</u> (***Kesejajaran dan bersilangan garis-garis***)

Dua buah garis berbeda dikatakan saling sejajar jika dan hanya jika keduanya koplanar dan tidak berpotongan.

Dua buah garis berbeda dikatakan saling bersilangan jika dan hanya jika keduanya non-koplanar.

Definisi

Jika dua buah garis berbeda berpotongan, maka keduanya terletak pada tepat satu bidang.



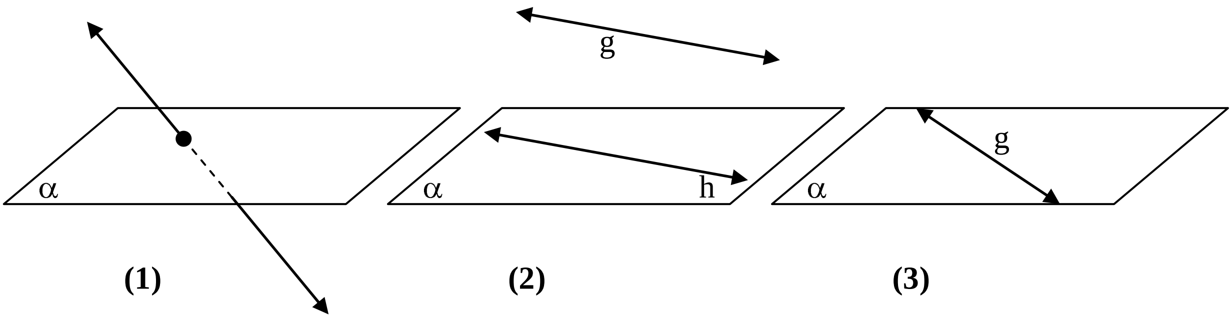
Gambar 6

Pada **Gambar 6**: garis k, garis h, dan garis m, ketiganya dikatakan coplanar, karena ketiganya terletak pada satu bidang, yaitu pada bidang-α. Garis h dan garis k saling sejajar dan keduanya terletak pada satu bidang. Garis k dan garis m berpotongan di titik Q dan keduanya terletak pada satu bidang. Begitu juga garis h dan garis m berpotongan di titik P dan keduanya terletak pada satu bidang. Garis n tidak terletak pada bidang-α, sehingga dapat dikatakan garis n di luar bidang-α. Garis g memotong/ menembus bidang-α tepat di satu titik, yaitu titik R. Hal tersebut dikatakan garis g juga tidak terletak pada bidang-α.

Garis g tidak terletak pada bidang-α, tetapi garis m terletak pada bidang-α. Oleh karena itu dikatakan garis g dan garis m bersilangan. Garis g tidak terletak pada bidang-α, tetapi garis k terletak pada bidang-α. Oleh karena itu dikatakan garis g dan garis k bersilangan. Garis g tidak terletak pada bidang-α, tetapi garis h terletak pada bidang-α. Oleh karena itu dikatakan garis g dan garis h bersilangan. Demikian pula untuk garis n dan garis m, garis n dan garis h, garis n dan garis k, masing-masing merupakan pasangan garis yang bersilangan, karena masing-masing tidak terletak pada bidang yang sama.

5. Kedudukan garis dan bidang

Jika ada suatu garis dan suatu bidang, maka kejadian yang dapat terjadi, yaitu garis tersebut memotong/menembus bidang tersebut, garis tersebut sejajar dengan bidang tersebut, atau garis tersebut terletak pada bidang tersebut. Perhatikan **Gambar 7** berikut!



Gambar 7

Pada **Gambar 7.(1)**, garis g memotong/menembus bidang-α. Garis g dan bidang α dikatakan berpotongan, jika keduanya mempunyai tepat satu titik persekutuan. Cermati pula Gambar 6. Pada Gambar 6, garis g memotong bidang-α tepat di satu titik, yaitu di titik R. Hal tersebut dikatakan juga titik R merupakan titik potong garis g dan bidang-α atau titik R merupakan titik tembus garis g terhadap bidang-α.

Pada **Gambar 7.(2)** garis g tidak terletak pada bidang-α dan garis h terletak pada bidang-α. Garis g dan garis h saling sejajar. Sehingga dapat dikatakan garis g sejajar dengan bidang-α. Sebuah garis g dan sebuah bidang α dikatakan sejajar, jika keduanya tidak bersekutu pada sebuah titik pun.

Pada **Gambar 7.(3)**, garis g seluruhnya terletak pada bidang-α. Maksudnya, semua titik yang terletak pada garis g, maka semua titik tersebut terletak pada bidang-α. Sebuah garis g dikatakan terletak pada satu bidang α, jika setiap titik yang terletak pada garis g, maka setiap titik tersebut terletak pada bidang α. Cermati lagi **Gambar 5** dan **Gambar 6** sebelumnya.

(Perhatikan cara yang baik dalam menyajikan gambar dari garis dan bidang yang sejajar!)

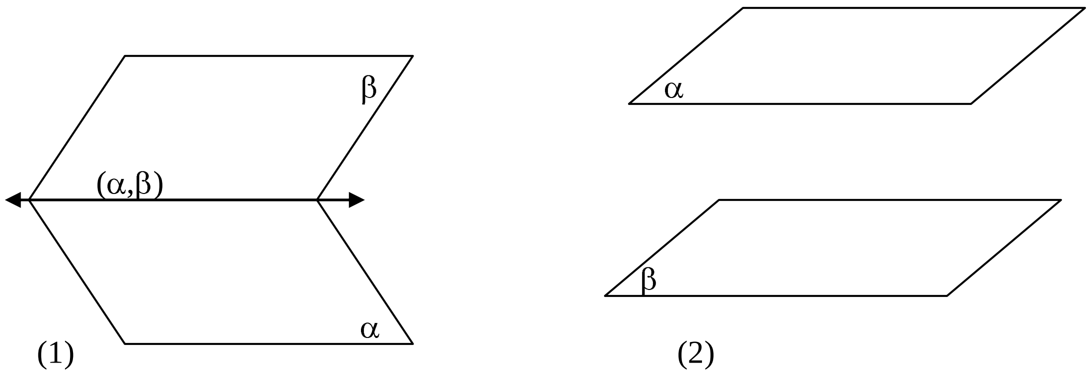
6. Kedudukan dua buah bidang

Jika ada dua buah bidang, maka kejadian yang dapat terjadi, yaitu: kedua bidang tersebut berpotongan atau kedua bidang tersebut saling sejajar.

Dua buah bidang α dan β dikatakan berpotongan, jika keduanya bersekutu tepat pada sebuah garis. Garis persekutuan tersebut dinamakan garis potong antara bidang α dan bidang β; dilambangkan dengan garis (α,β). Perhatikan **Gambar 8.(1)** !

Dengan demikian garis (α,β) merupakan himpunan semua titik yang terletak pada bidang α dan juga pada bidang β.

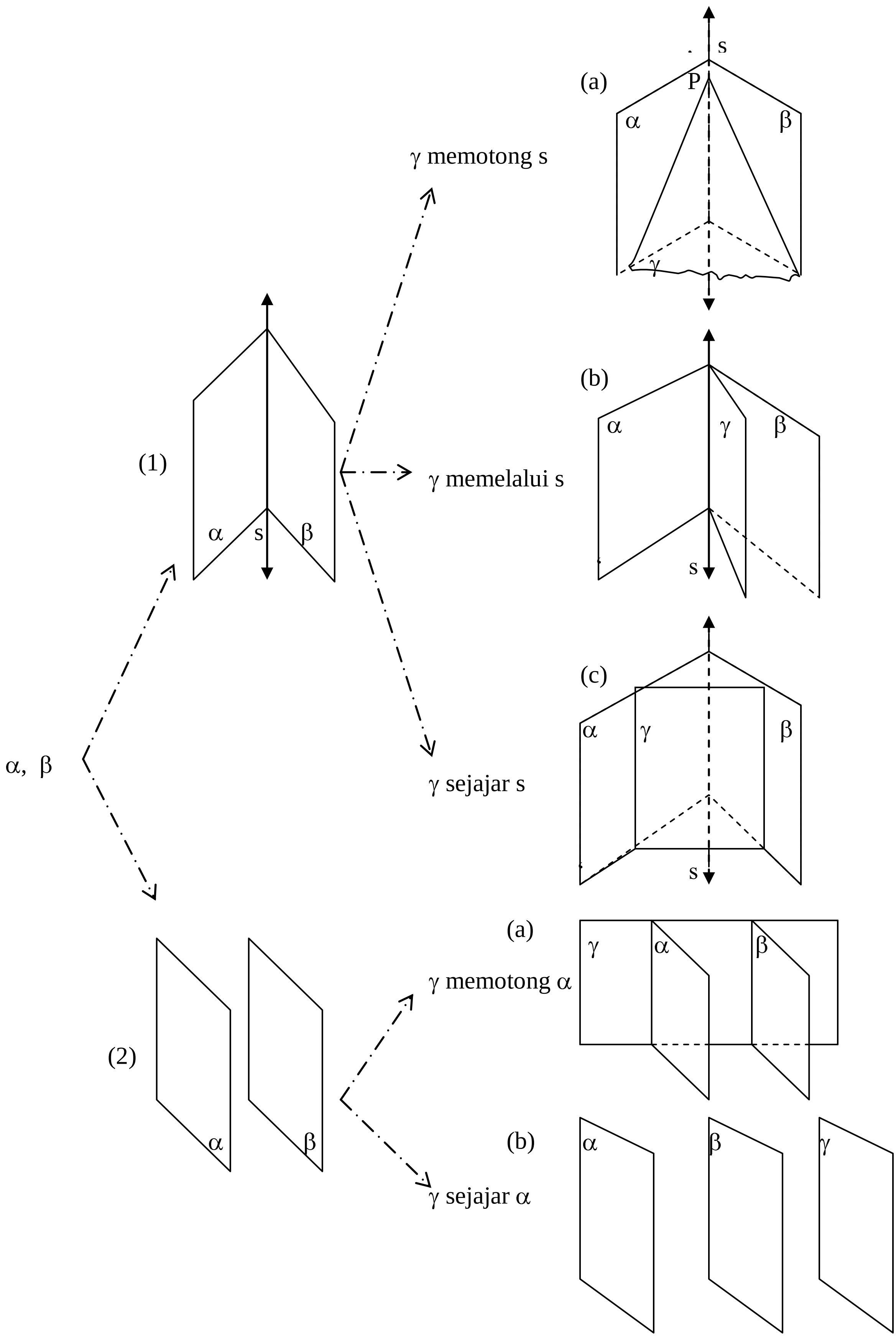
Dua buah bidang, α dan β, dikatakan sejajar, jika keduanya tidak bersekutu pada satu titik pun. Perhatikan **Gambar 8.(2)** !



Gambar 8

7. Kedudukan tiga buah bidang

Jika ada tiga buah bidang, yang ketiganya berbeda, maka kejadian yang dapat terjadi, yaitu ketiganya berpotongan atau ketiganya saling sejajar. Jika ketiga gbidang tersebut berpotongan, maka dapat terjadi ketiganya berpotongan di satu titik, ketiganya berpotongan di satu garis, atau sepasang-sepasang dari ketiganya berpotongan pada satu garis dan terbentuk tiga buah garis yang saling sejajar. Perhatikan ilustrasi yang disajikan pada **Gambar 9** berikut!



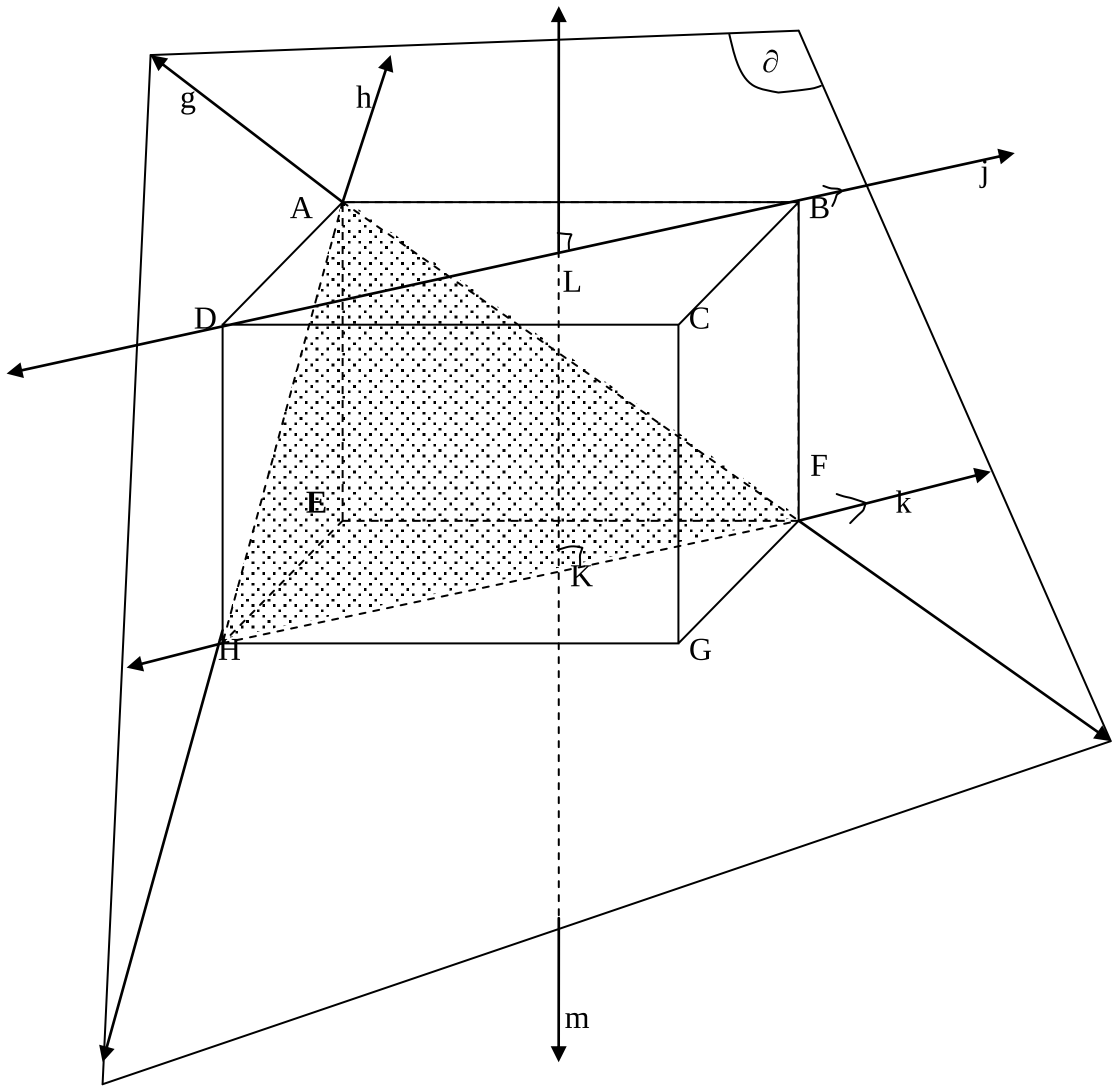
Gambar 9. Kejadian Tiga Bidang : α, β, γ

Gambar 9 merupakan sebuah ilustrasi yang dapat terjadi antara bidang-α, bidang-β, dan bidang-γ. Ilustrasi yang disajikan dalam bentuk skema tersebut dimulai dengan kejadian antara bidang-α dan bidang-β, dan dilengkapi dengan kehadiran bidang-γ. Antara bidang-α dan bidang-β, dapat keduanya berpotongan atau keduanya sejajar [Perhatikan **Gambar 9.(1)** dan **Gambar 9.(2)**].

Pada **Gambar 9.(1)**, bidang-α dan bidang-β berpotongan, perpotongannya berupa garis s atau garis (α,β). Jika ada bidang lain, misalnya bidang-γ, maka kejadian yang dapat terjadi, yaitu: (a) bidang-γ memotong garis s tepat di satu titik, (b) bidang-γ memuat garis s seluruhnya, atau (c) bidang-γ sejajar dengan garis s. **Gambar 9.(1).(a).** menunjukkan bidang-γ memotong garis s tepat di satu titik yaitu di titik P. Hal tersebut juga berarti garis s atau garis (α,β), garis (α,γ), dan garis (β,γ), ketiganya saling berpotongan dan perpotongannya tepat di satu titik, yaitu titik P. **Gambar 9.(1).(b).** menunjukkan bidang-γ memuat seluruh garis s. Hal tersebut berarti bidang-α, bidang-β, dan bidang-γ, ketiganya berpotongan pada satu garis, yaitu garis s. Jadi setiap titik pada garis s seluruhnya terletak pada bidang-α, bidang-β, dan bidang-γ. **Gambar 9.(1).(c).** menunjukkan bidang-γ sejajar dengan garis s. Karena garis s merupakan perpotongan antara bidang-α dan bidang-β, sedangkan garis s sejajar dengan bidang-γ, maka garis (α,γ) dan garis (β,γ) juga sejajar dengan garis s. Jadi garis s $\parallel$ garis (α,γ) $\parallel$ garis (β,γ).

Pada **Gambar 9.(2)**, bidang-α dan bidang-β tidak berpotongan, namun keduanya saling sejajar. Jika ada bidang lain, misalnya bidang-γ, maka kejadian yang dapat terjadi, yaitu: (a) bidang-γ memotong bidang-α maupun bidang-β, atau (b) bidang-γ sejajar dengan salah satu bidang-α atau bidang-β. **Gambar 9.(2).(a)**. menunjukkan bidang-γ memotong bidang-α. Karena bidang-α sejajar dengan bidang-β, maka bidang-γ juga memotong bidang-β. Akibatnya garis-garis perpotongan di antara kedua bidang tersebut juga sejajar. Jagi garis (α,γ) sejajar dengan garis (β,γ) atau garis (α,γ) $\parallel$ garis (β,γ). Sedangkan **Gambar 9.(2).(b).** menunjukkan bidang-γ sejajar dengan bidang-α. Karena bidang-α sejajar dengan bidang-β, dan bidang-γ sejajar dengan bidang-α, maka bidang-γ juga sejajar dengan bidang-β. Jadi bidang-α $\parallel$ bidang-β $\parallel$ bidang-γ.

Sebagai **contoh** kejadian dalam Geometri Ruang, perhatikan **Gambar 10** berikut!



Gambar 10. Balok ABCD.EFGH dipotong oleh bidang-∂

Pada **Gambar 10**, sebuah balok ABCD.EFGH dipotong oleh sebuah bidang, yaitu bidang-∂, melalui titik A, titik F, dan titik H. Hasil perpotongan antara balok ABCD.EFGH dan bidang-∂ dapat kita temukan beberapa hal berikut:

a. Bidang-∂ memotong bidang-sisi-ADHE yang perpotongannya berupa garis h atau $\overleftrightarrow{AH}$;

b. Bidang-∂ memotong bidang-sisi-ABFE yang perpotongannya berupa garis g atau $\overleftrightarrow{AF}$;

c. Bidang-∂ memotong bidang-sisi-EFGH yang perpotongannya berupa garis k atau $\overleftrightarrow{FH}$;

d. Perpotongan antara bidang-∂ dan balok ABCD.EFGH berupa daerah segitiga AFH atau ▲AFH;

e. Garis g, garis h, dan garis k dikatakan sebidang atau coplanar terhadap bidang-∂;

f. Garis m menembus bidang-sisi-ABCD di titik L dan menembus bidang-sisi-EFGH di titik K; diperoleh juga garis m memotong tegaklurus garis j di titik L dan garis m memotong tegaklurus garis k di titik K;

g. Garis j atau $\overleftrightarrow{DB}$ dan garis h atau $\overleftrightarrow{HF}$ saling sejajar; ditulis j||k atau $\overleftrightarrow{DB} \parallel \overleftrightarrow{HF}$; sehingga terdapat sebuah bidang yang memuat garis j dan garis k atau memuat $\overleftrightarrow{DB}$ dan $\overleftrightarrow{HF}$ yaitu bidang-DBFH;

h. Bidang-DBFH memotong bidang-sisi-ABCD dan perpotongannya berupa garis j atau $\overleftrightarrow{DB}$, dan bidang-DBFH memotong bidang-sisi-EFGH dan perpotongannya berupa garis k atau $\overleftrightarrow{HF}$;

i. Garis m menembus bidang-sisi-ABCD di titik L dan menembus bidang-sisi-EFGH di titik K; garis m memotong tegaklurus garis j di titik L dan garis m memotong tegaklurus garis k di titik K , selain itu garis j dan garis k atau $\overleftrightarrow{DB}$ dan $\overleftrightarrow{HF}$ terletak pada bidang-DBFH, ini berarti garis m terletak pada bidang-DBFH;

j. Garis m memotong garis k di titik K, garis g memotong garis k di titik F, garis g terletak pada bidang-∂ sedangkan garis m terletak pada bidang-DBFH, bidang-DBFH memotong bidang-∂ dan perpotongannya berupa garis k, dan K≠F, ini berarti garis m dan garis g saling bersilangan;

k. Garis m memotong garis k di titik K, garis h memotong garis k di titik H, garis h terletak pada bidang-∂ sedangkan garis m terletak pada bidang-DBFH, bidang-DBFH memotong bidang-∂ dan perpotongannya berupa garis k, dan K≠H, ini berarti garis m dan garis h saling bersilangan;

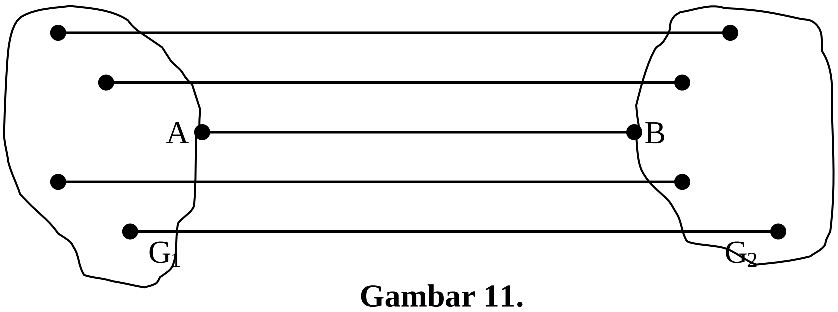
l. Bidang-DBFH memotong bidang-sisi-ABCD dan perpotongannya berupa garis j atau $\overleftrightarrow{DB}$, dan bidang-DBFH memotong bidang-sisi-EFGH dan perpotongannya berupa garis k atau $\overleftrightarrow{HF}$; j||k atau $\overleftrightarrow{DB} \| \overleftrightarrow{HF}$; bidang-DBFH memotong tegaklurus bidang-ABCD maupun bidang-EFGH; bidang-ABCD ≠ bidang-EFGH; ini berarti bidang-ABCD dan bidang-EFGH saling sejajar atau bidang-ABCD||bidang-EFGH;

m. Garis m terletak pada bidang-DBFH; garis m tegaklurus garis k; garis k merupakan perpotongan bidang-DBFH dan bidang EFGH yang saling tegaklurus; ini berarti garis m tegaklurus terhadap bidang-EFGH. Karena garis m tegaklurus terhadap bidang-EFGH, maka garis m tegaklurus terhadap semua garis yang terletak pada bidang-EFGH;

n. Garis m terletak pada bidang-DBFH; garis m tegaklurus garis j; garis j merupakan perpotongan bidang-DBFH dan bidang ABCD yang saling tegaklurus; ini berarti garis m tegaklurus terhadap bidang-ABCD. Karena garis m tegaklurus terhadap bidang-ABCD, maka garis m tegaklurus terhadap semua garis yang terletak pada bidang-ABCD;

B. Jarak dari titik ke garis dan jarak dari titik ke bidang

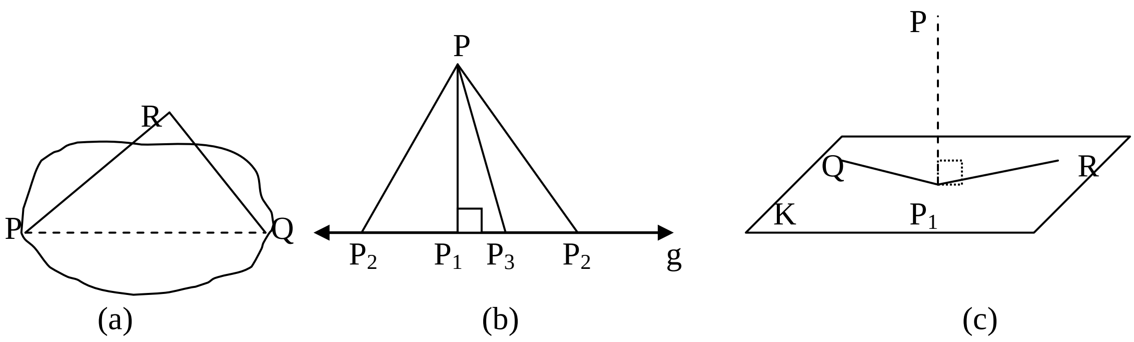
Definisi : Yang dimaksud dengan <u>jarak</u> antara dua buah bangun geometri adalah panjang ruasgaris penghubung terpendek yang menghubungkan dua titik pada bangun-bangun tersebut.



Gambar 11.

Jika G_1 dan G_2 adalah bangun-bangun geometri. Maka G_1 dan G_2 dapat dipikirkan sebagai himpunan titik-titik. Sehingga dapat dilakukan pemasangan satu-satu antara titik-titik pada G_1 dan G_2.

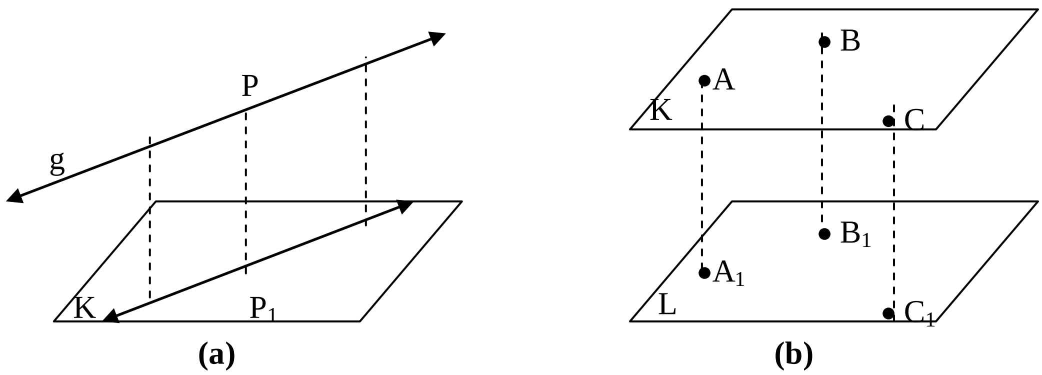
Jika $\overline{AB}$ adalah yang terpendek antara semua ruas garis penghubung titik-titik itu, maka panjang ruas garis $\overline{AB}$ disebut jarak antara bangun G_1 dan G_2.

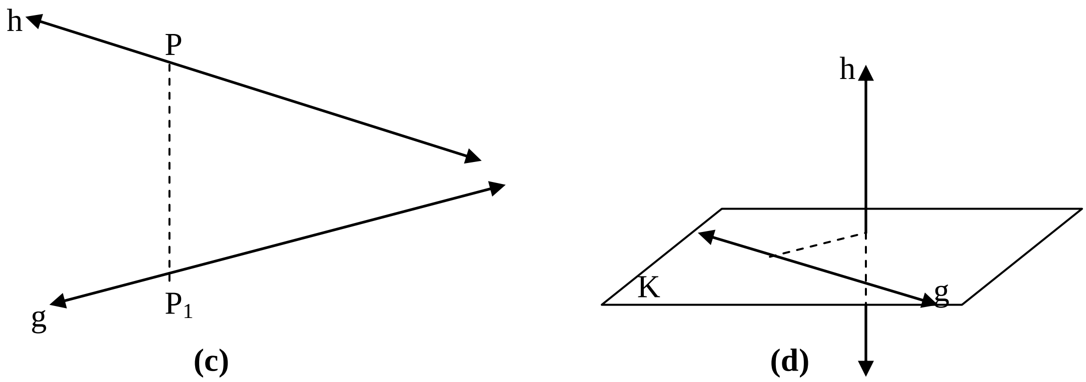


Gambar 12.

Akibat dari pengertian yang demikian maka :

1. Jarak antara titik P dan Q adalah panjang ruasgaris $\overline{PQ}$. (Perhatikan **Gambar 12.(a)**).
2. Jarak antara titik P dan garis g, atau jarak dari titik P ke garis g adalah panjang ruas garis penghubung P dengan proyeksi P pada garis g. (Perhatikan **Gambar 12.(b)**, jarak antara titik P dan garis g adalah panjang ruasgaris $\overline{PP_1}$)
3. Jarak dari titik P ke bidang-K adalah panjang ruas garis penghubung P dengan proyeksi titik P pada bidang-K. (Perhatikan **Gambar 12.(c).** titik P_1 merupakan proyeksi titik P pada bidang-K, sehingga jarak dari titik P ke bidang-K adalah panjang ruasgaris $\overline{PP_1}$)





Gambar 13.

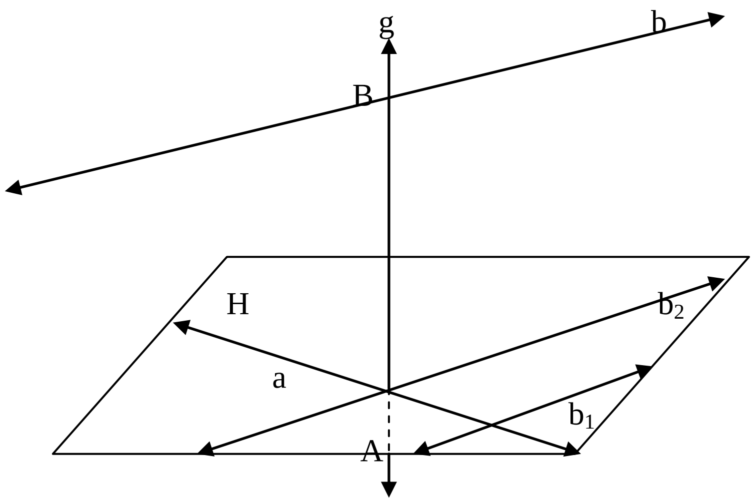
4. Jarak antara garis g dengan bidang-K yang sejajar samadengan jarak salah satu titik pada garis g terhadap bidang-K. (Perhatikan **Gambar 13.(a)**, dipilih titik P yang terletak pada garis g dan diproyeksikan ke bidang-K hasilnya titik P_1. Sehingga jarak antara garis g dengan bidang-K adalah panjang panjang ruasgaris $\overline{PP_1}$).
5. Jarak antara bidang-K dan bidang-L yang sejajar samadengan jarak salah satu titik pada bidang-K terhadap bidang-L, atau sebaliknya. (Perhatikan **Gambar 13.(b).** Bidang-K sejajar dengan bidang-L. Dipilih titik A yang terletak pada bidang-K dan diproyeksikan ke bidang-L hasilnya titik A_1. Sehingga jarak antara bidang-K dan bidang-L adalah adalah panjang ruasgaris $\overline{AA_1}$. Jika dipilih titik B atau C pada bidang-K, maka proyeksinya pada bidang-L adalah titik B_1 dan C_1. Sehingga jarak antara bidang-K dan bidang-L adalah panjang ruasgaris $\overline{BB_1}$ atau $\overline{CC_1}$)
6. Jarak antara garis g dan h yang bersilangan adalah panjang ruas garis hubung yang memotong tegak lurus garis g dan garis h. (Perhatikan **Gambar 13.(c)** dan **(d)**. ruasgaris $\overline{PP_1}$ tegaklurus terhadap garis g dan juga tegaklurus terhadap garis h, $\overline{PP_1} \perp g$ dan $\overline{PP_1} \perp h$. Sehingga jarak antara garis g dan garis h yang bersilangan adalah panjang ruasgaris $\overline{PP_1}$).

Dua cara atau langkah untuk menentukan jarak antara dua garis a dan b yang bersilangan.

Cara 1 :

1. Membuat garis b_1 sejajar b yang memotong garis a.
2. Membuat bidang-H yang melalui : a dan b_1 ; bidang-H letaknya sejajar dengan garis b (mengapa ?).
3. Memproyeksikan garis b pada bidang-H, menghasilkan garis b_2 yang letaknya sejajar dengan b_1, dan memotong garis a di titik A.
4. Melalui titik A dibuat garis g tegaklurus pada bidang-H yang akan memotong garis b di titik B.
5. Ruas garis $\overline{AB}$ merupakan ruasgaris yang memotong tegaklurus a dan b; jadi panjang $\overline{AB}$ adalah jarak antara garis a dan garis b yang bersilangan.

Cara I dapat dijelaskan dengan lukisan berikut, **Gambar 14** :



Gambar 14.

Bukti :

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l} g \perp \text{bidang } H \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a \text{ dan } b_2 \text{ pada bidang } H \ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \begin{array}{l} g \perp a \ldots\ldots\ldots\ldots(1) \\ g \perp b_2 \end{array} \\ \left.\begin{array}{l} g \perp b_2 \\ b_2 \parallel b \end{array}\right\} \quad g \perp b \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2) \end{array}\right\} \text{Jadi } g \perp a \text{ dan } g \perp b$$

Cara II

a. Membuat sebuah bidang yang memotong tegaklurus garis b di titik P, namakan bidang-H.
b. Memproyeksikan garis a pada bidang-H yang menghasilkan garis a_1.

c. Melalui titik P pada bidang-H dibuat garis yang memotong tegaklurus garis a_1 di titik Q.

d. Melalui titik Q dibuat garis k tegaklurus bidang-H, yang memotong garis a di titik A.

e. Melalui titik A dibuat garis 1 sejajar garis $\overline{PQ}$, yang akan memotong garis b di titik B.

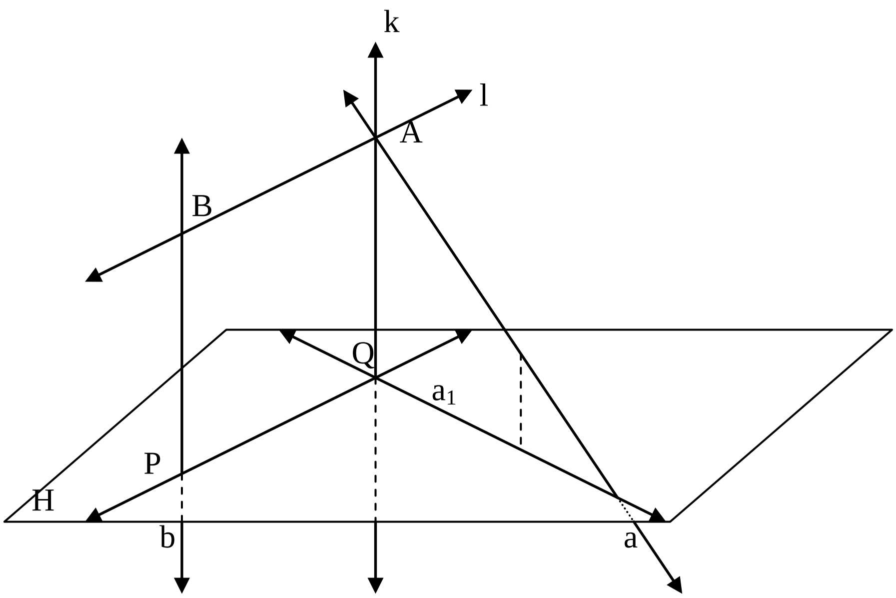
f. Ruas garis $\overline{AB}$ adalah ruas garis yang memotong tegaklurus garis-garis a dan b, jadi panjang $\overline{AB}$ adalah jarak antara dua garis bersilangan a dan b.

Bukti :

$\left.\begin{array}{l}\overleftrightarrow{PQ}\perp a_1\\ \overleftrightarrow{PQ}\perp k\end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{l}\overleftrightarrow{PQ}\perp \text{bidang } (a, a_1)\\ a \text{ pada bidang } (a, a_1)\end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{l}\overleftrightarrow{PQ}\perp a\\ \overleftrightarrow{AB}\parallel\overleftrightarrow{PQ}\end{array}\right\}$ Jadi $\overleftrightarrow{AB}\perp a$

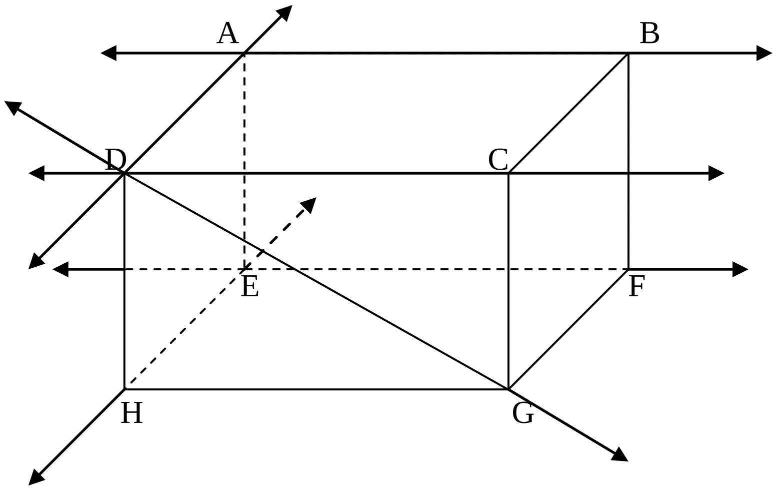
$\left.\begin{array}{l}b\perp\overleftrightarrow{PQ}\\ \overleftrightarrow{AB}\parallel\overleftrightarrow{PQ}\end{array}\right\}$ $\overleftrightarrow{AB}\perp b$

Jadi $\overleftrightarrow{AB}$ memotong tegak lurus garis a dan garis b. **Cara II** dapat dijelaskan dengan lukisan pada **Gambar 15.**, berikut :



Gambar 15.

Sebagai **contoh** perhatikan **Gambar 16** berikut!



Gambar 16 Balok ABCD.EFGH dengan Garis-garis yang melalui titik-sudut-titik-sudut balok

Pada **Gambar 16** sebuah balok ABCD.EFGH dengan beberapa buah garis yang melalui titik-sudut-titik-sudut pada balok tersebut, yaitu: $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{CD}$, $\overleftrightarrow{EF}$, $\overleftrightarrow{AD}$, $\overleftrightarrow{DG}$, dan $\overleftrightarrow{EH}$.

a. Garis-garis yang saling sejajar, yaitu: $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD} \parallel \overleftrightarrow{EF}$, dan $\overleftrightarrow{AD} \parallel \overleftrightarrow{EH}$;

b. Gagis-garis yang saling bersilangan, yaitu: $\overleftrightarrow{AB}$ dan $\overleftrightarrow{EH}$, $\overleftrightarrow{AB}$ dan $\overleftrightarrow{DG}$, $\overleftrightarrow{CD}$ dan $\overleftrightarrow{EH}$, $\overleftrightarrow{EH}$ dan $\overleftrightarrow{DG}$, $\overleftrightarrow{DG}$ dan $\overleftrightarrow{EF}$. $\overleftrightarrow{EF}$ dan $\overleftrightarrow{AD}$;

c. Jarak antara $\overleftrightarrow{AB}$ dan $\overleftrightarrow{EF}$ dengan $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{EF}$, ditunjukkan oleh panjang $\overline{BF}$ = BF atau panjang $\overline{AE}$ = AE, karena $\overleftrightarrow{AB} \perp \overline{BF}$ dan $\overleftrightarrow{EF} \perp \overline{BF}$ atau $\overleftrightarrow{AB} \perp \overline{AE}$ dan $\overleftrightarrow{EF} \perp \overline{AE}$;

d. Jarak antara $\overleftrightarrow{AD}$ dan $\overleftrightarrow{EH}$ dengan $\overleftrightarrow{AD} \parallel \overleftrightarrow{EH}$, ditunjukkan oleh panjang $\overline{DH}$ = DH atau panjang $\overline{AE}$ = AE, karena $\overleftrightarrow{AD} \perp \overline{DH}$ dan $\overleftrightarrow{EH} \perp \overline{DH}$ atau $\overleftrightarrow{AD} \perp \overline{AE}$ dan $\overleftrightarrow{EH} \perp \overline{AE}$;

e. Jarak antara $\overleftrightarrow{AB}$ dan $\overleftrightarrow{EH}$ yang bersilangan, ditunjukkan oleh panjang $\overline{AE}$ = AE, karena $\overleftrightarrow{AB} \perp \overline{AE}$ dan $\overleftrightarrow{EH} \perp \overline{AE}$;

4.1.2. Latihan 1

1) Jelaskan tentang kedudukan antara titik, garis, dan bidang dalam ruang dimensi tiga!
2) Jelaskan pengertian jarak antara dua bangun geometri !
3) Apakah yang dimaksud dengan titik-titik yang kolinear?
4) Apakah yang dimaksud dengan titik-titik yang coplanar?
5) Jelaskan cara menentukan jarak antara dua garis yang bersilangan !

Kunci Jawaban Latihan 1

1) Lihat uraian lengkap tentang titik, garis, dan bidang dalam ruang dimensi tiga!
2) Lihat pengertian jarak!
3) Lihat uraian tentang kedudukan titik dan garis !
4) Lihat uraian tentang kedudukan titik dan bidang !
5) Lihat uraian cara menggambarkan jarak antara dua garis yang bersilangan!

4.1.3. Rangkuman

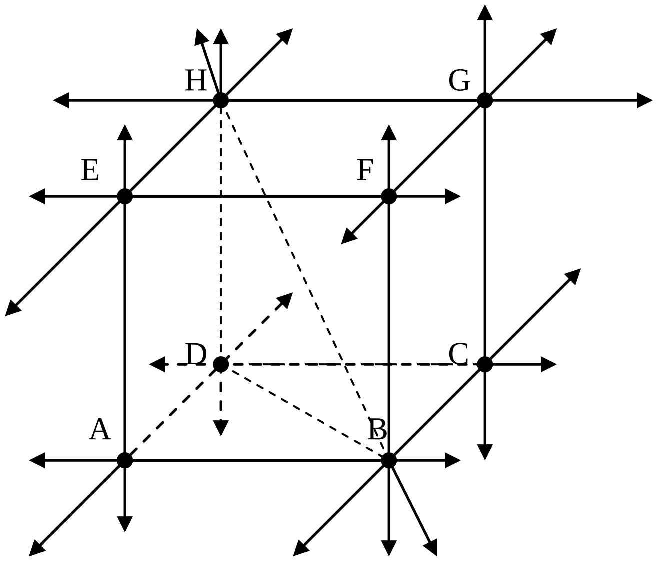
Kedudukan titik dan garis, yaitu titik pada garis atau titik di luar garis. Kedudukan titik dan bidang, yaitu titik pada bidang atau titik di luar bidang. Kedudukan garis dan garis, yaitu sejajar, berpotongan, atau bersilangan. Kedudukan garis dan bidang, yaitu garis termuat dalam bidang, garis memotong bidang, atau garis sejajr bidang. Kedudukan dua bidang, yaitu sejajar atau berpotongan.

Jarak antara dua bangun geometri merupakan panjang ruasgaris terpendek yang menghubungkan dua bangun geometri tersebut. Jarak dapat diterapkan antara titik dan titik, titik dan garis, titik dan bidang, garis dan garis, garis dan bidang, dan dua bidang.

4.1.4. Tes Formatif 1

Petunjuk: Pilih satu jawaban yang tepat untuk setiap soal dari 4 alternatif jawaban yang disediakan dengan memberikan tanda cross (X) pada huruf A, B, C, atau D sesuai dengan jawaban yang Anda pilih !

Perhatikan **Gambar 17** untuk menyelesaikan kesepuluh soal berikut!



Gambar 17 Garis-garis yang melalui rusuk-rusuk kubus ABCD.EFGH

1) Garis-garis yang coplanar, antara lain:

   A. $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{AD}$, $\overleftrightarrow{AE}$,

   B. $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{AD}$, $\overleftrightarrow{EF}$,

   C. $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{AD}$, $\overleftrightarrow{BC}$,

   D. $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{AD}$, $\overleftrightarrow{AH}$,

2) Pasangan garis yang sejajar, yaitu:

   A. garis $\overleftrightarrow{AB}$ dan garis $\overleftrightarrow{AD}$

   B. garis $\overleftrightarrow{AB}$ dan garis $\overleftrightarrow{HG}$

   C. garis $\overleftrightarrow{HG}$ dan garis $\overleftrightarrow{AD}$

D. garis $\overleftrightarrow{AC}$ dan garis $\overleftrightarrow{AE}$

3) Pasangan garis yang bersilangan, yaitu:

A. garis $\overleftrightarrow{BC}$ dan garis $\overleftrightarrow{AD}$

B. garis $\overleftrightarrow{FG}$ dan garis $\overleftrightarrow{AD}$

C. garis $\overleftrightarrow{FG}$ dan garis $\overleftrightarrow{CD}$

D. garis $\overleftrightarrow{AB}$ dan garis $\overleftrightarrow{CD}$

4) Perpotongan antara bidang-ADHE dan bidang-CDHG adalah:

A. garis $\overleftrightarrow{HD}$

B. garis $\overleftrightarrow{HD}$ dan garis $\overleftrightarrow{CD}$

C. garis $\overleftrightarrow{CD}$

D. garis $\overleftrightarrow{CD}$ dan garis $\overleftrightarrow{AD}$

5) Bidang yang sejajar dengan bidang-BCGF adalah:

A. bidang-ABFE

B. bidang-ADHE

C. bidang-ABCD

D. bidang-EFGH

6) Garis yang memotong bidang-EFGH, yaitu:

A. garis $\overleftrightarrow{HD}$

B. garis $\overleftrightarrow{HD}$ dan garis $\overleftrightarrow{EH}$

C. garis $\overleftrightarrow{HD}$, garis $\overleftrightarrow{EH}$, dan garis $\overleftrightarrow{GH}$

D. garis $\overleftrightarrow{HD}$, garis $\overleftrightarrow{EH}$, garis $\overleftrightarrow{GH}$, dan garis $\overleftrightarrow{BH}$

7) Garis yang sejajar dengan bidang-DCGH, yaitu:

A. garis $\overleftrightarrow{BH}$ dan garis $\overleftrightarrow{EH}$

B. garis $\overleftrightarrow{BH}$ dan garis $\overleftrightarrow{BC}$

C. garis $\overleftrightarrow{EH}$ dan garis $\overleftrightarrow{EF}$

D. garis $\overleftrightarrow{EA}$ dan garis $\overleftrightarrow{EF}$

8) Jarak dari titik B ke garis $\overleftrightarrow{DH}$ adalah:

A. panjang ruasgaris $\overline{BD}$

B. panjang ruasgaris $\overline{BH}$

C. panjang ruasgaris $\overline{BA}$

D. panjang ruasgaris $\overline{BC}$

9) Jarak dari garis $\overleftrightarrow{AB}$ ke garis $\overleftrightarrow{FG}$ adalah:

A. panjang ruasgaris $\overline{BG}$

B. panjang ruasgaris $\overline{BF}$

C. panjang ruasgaris $\overline{AG}$

D. panjang ruasgaris $\overline{AF}$

10) Jarak dari garis $\overleftrightarrow{BF}$ ke bidang-ADHE adalah:

A. panjang ruasgaris $\overline{BA}$

B. panjang ruasgaris $\overline{BF}$

C. panjang ruasgaris $\overline{HE}$

D. panjang ruasgaris $\overline{FH}$

4.1.5. Umpan Balik dan Tindak Lanjut

Cocokkanlah jawaban Anda dengan Kunci Jawaban Tes Formatif 1 yang terdapat di bagian belakang modul ini. Kemudian gunakan rumus di bawah ini untuk mengetahui tingkat penguasaan Anda terhadap materi Kegiatan 1.

Rumus:

$$\text{Tingkat penguasaan} = \frac{\text{Jumlah jawaban Anda yang benar}}{10} \times 100\ \%$$

Arti tingkat penguasaan yang Anda capai:

90% - 100% = baik sekali

80% - 89% = baik

70% - 79% = cukup

- 69% = kurang

Bila tingkat penguasaan Anda mencapai 80% ke atas, Anda dapat meneruskan Kegiatan Belajar 2. **Bagus!** Tetapi bila tingkat penguasaan Anda di bawah 60%, Anda harus mengulangi Kegiatan Belajar 1 terutama bagian yang belum Anda kuasai.

4.2. Kegiatan Belajar 2

SUDUT DALAM RUANG DAN VOLUM

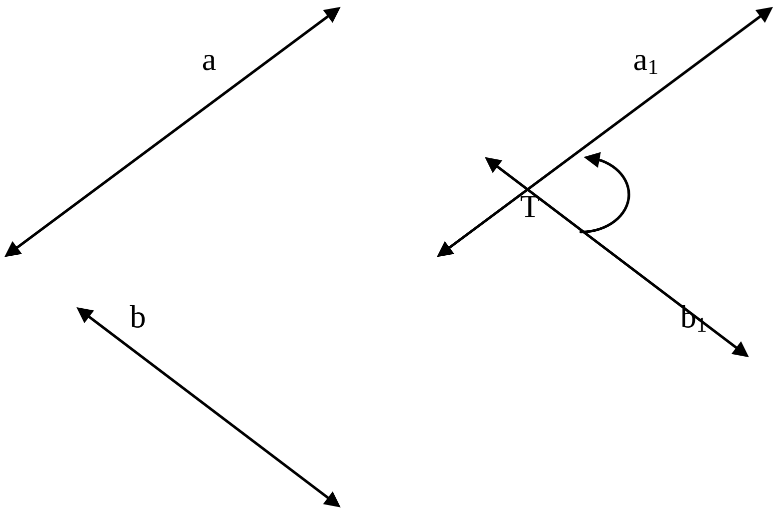
4.2.1. Uraian dan Contoh

A. Sudut dalam ruang

1. Sudut antara Dua Buah Garis yang Bersilangan

Pengertian: Sudut antara dua buah garis a dan b yang bersilangan adalah sudut yang terbentuk, apabila melalui sebarang titik T dibuat garis a_1 yang sejajar dengan garis a dan garis b_1 yang sejajar dengan garis b.

Perhatikan **Gambar 18** berikut!

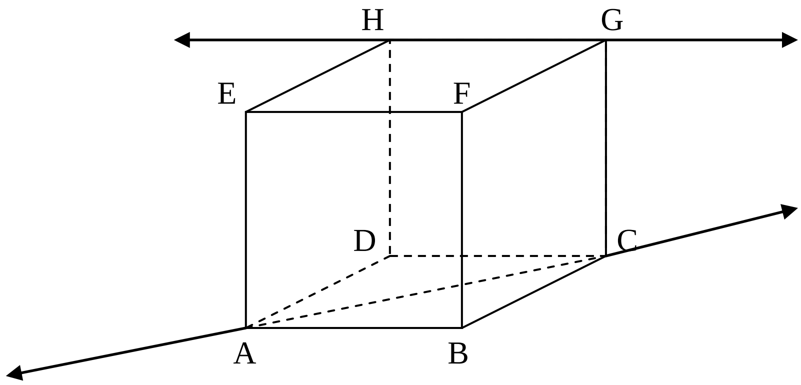


Gambar 18.

Pada **Gambar 18**, garis a dan garis b bersilangan. Untuk menentukan sudut antara garis a dan garis b tersebut, pada suatu titik, misalnya titik T, dibuat garis a_1 yang sejajar dengan garis a. Melalui titik T juga dibuat garis b_1 yang sejajar dengan garis b. Sudut yang dibentuk oleh garis a_1 dan b_1 dengan titik sudut titik T tersebut merupakan sudut antara garis a dan garis b yang bersilangan.

Khususnya jika sudut antara dua buah garis yang bersilangan merupakan sudut siku-siku, maka dikatakan: *kedua buah garis tersebut bersilangan tegaklurus* (misalnya garis tersebut a dan b, maka dikatakan: garis a dan garis b bersilangan tegaklurus atau garis a menyilang tegaklurus terhadap garis b).

Perhatikan **contoh** berikut:

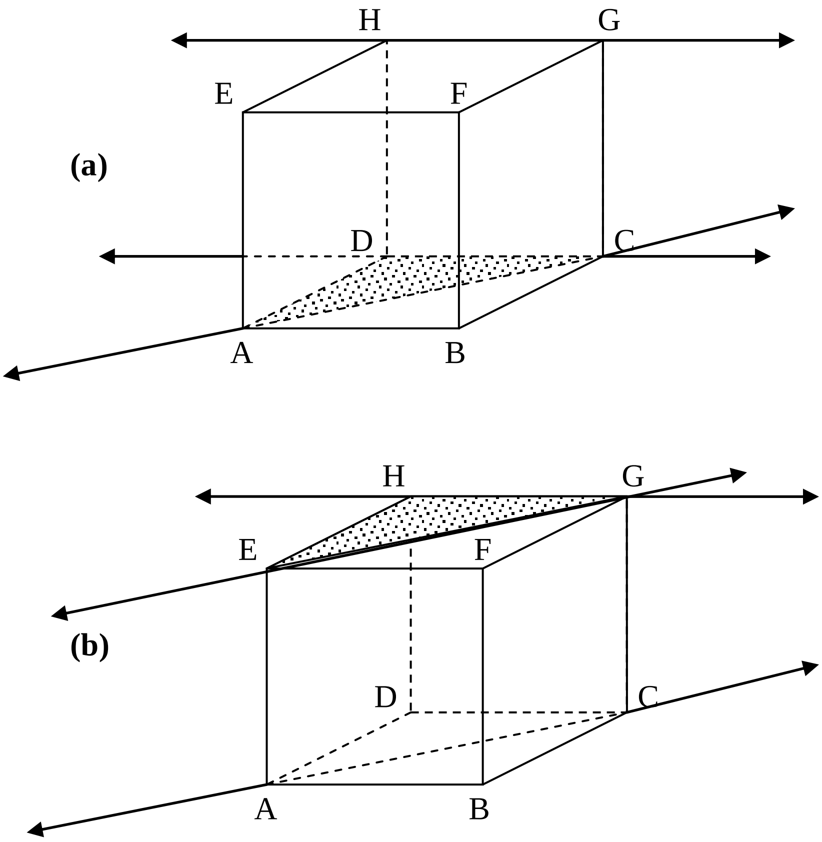


Gambar 19. $\overleftrightarrow{AC}$ **bersilangan dengan** $\overleftrightarrow{HG}$

Pada **Gambar 19,** $\overleftrightarrow{AC}$ bersilangan dengan $\overleftrightarrow{HG}$. Cukup dimengerti kedua garis tersebut pada permukaan sebuah balok ABCD.EFGH. $\overleftrightarrow{AC}$ pada bidang-sisi-ABCD atau pada bidang-ABCD dan memuat diagonal-sisi $\overline{AC}$. Sedangkan $\overleftrightarrow{HG}$ terletak pada bidang-DCGH dan pada bidang-EFGH, atau $\overleftrightarrow{HG}$ merupakan perpotongan antara bidang-DCGH dan bidang-EFGH, $\overleftrightarrow{HG}$ = bidang-DCGH $\cap$ bidang-EFGH.

Jarak antara $\overleftrightarrow{AC}$ dan $\overleftrightarrow{HG}$ ditunjukkan oleh panjang $\overline{CG}$, karena $\overline{CG} \perp \overleftrightarrow{AC}$ dan $\overline{CG} \perp \overleftrightarrow{HG}$. $\overline{CG} \perp \overleftrightarrow{AC}$, karena $\overline{CG}$ $\perp$bidang-ABCD yang berarti $\overline{CG}$ tegaklurus terhadap semua garis yang terletak pada bidang-ABCD. $\overline{CG} \perp \overleftrightarrow{HG}$, karena $\overline{CG}$ $\perp$bidang-EFGH yang berarti $\overline{CG}$ tegaklurus terhadap semua garis yang terletak pada bidang-EFGH.

Sudut antara $\overleftrightarrow{AC}$ dan $\overleftrightarrow{HG}$ ditunjukkan oleh $\angle$ACD **(Perhatikan Gambar 20 (a))** atau $\angle$EGH **(Perhatikan Gambar 20 (b))**



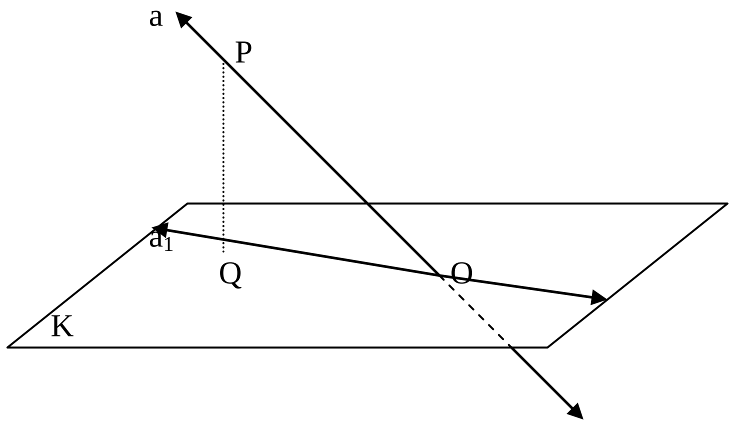
Gambar 20. Visualisasi Sudut antara $\overleftrightarrow{AC}$ dan $\overleftrightarrow{HG}$ yang bersilangan

Pada **Gambar 20 (a)**, terdapat garis yang sejajar $\overleftrightarrow{HG}$ pada bidang-ABCD yang memuat $\overleftrightarrow{AC}$. Garis yang dimaksud adalah $\overleftrightarrow{CD}$, karena bidang-sisi-DCGH merupakan persegipanjang DCGH yang miliki dua sisi yang sejajar, yaitu $\overline{HG} \parallel \overline{CD}$. Dengan kata lain, $\overleftrightarrow{HG}$ diproyeksikan tegaklurus pada bidang-ABCD diperoleh $\overleftrightarrow{CD}$, sehingga $\overleftrightarrow{CD} \parallel \overleftrightarrow{HG}$. Karena $C = \overleftrightarrow{AC} \cap \overleftrightarrow{DC}$ maka terdapat $\angle$ACD. Jadi sudut antara $\overleftrightarrow{AC}$ dan $\overleftrightarrow{HG}$ ditunjukkan oleh $\angle$ACD.

Pada **Gambar 20 (b)**, terdapat garis yang sejajar $\overleftrightarrow{AC}$ pada bidang-EFGH yang memuat $\overleftrightarrow{HG}$. Garis yang dimaksud adalah $\overleftrightarrow{EG}$, karena bidang-diagonal-ACGE merupakan persegipanjang ACGE yang miliki dua sisi yang sejajar, yaitu $\overline{AC} \parallel \overline{EG}$. Dengan kata lain, $\overleftrightarrow{AC}$ diproyeksikan tegaklurus pada bidang-EFGH diperoleh $\overleftrightarrow{EG}$, sehingga $\overleftrightarrow{AC} \parallel \overleftrightarrow{EG}$. Karena $G = \overleftrightarrow{EG} \cap \overleftrightarrow{HG}$ maka terdapat $\angle$EGH. Jadi sudut antara $\overleftrightarrow{AC}$ dan $\overleftrightarrow{HG}$ ditunjukkan juga oleh $\angle$EGH.

2. Sudut antara Garis dan Bidang

Pengertian: Jika garis a tidak tegaklurus terhadap bidang-K (dalam hal ini garis a memotong bidang-K), maka yang dimaksud dengan sudut antara garis a dan bidang-K adalah sudut lancip yang dibentuk oleh garis a dan proyeksi garis a pada bidang-K.

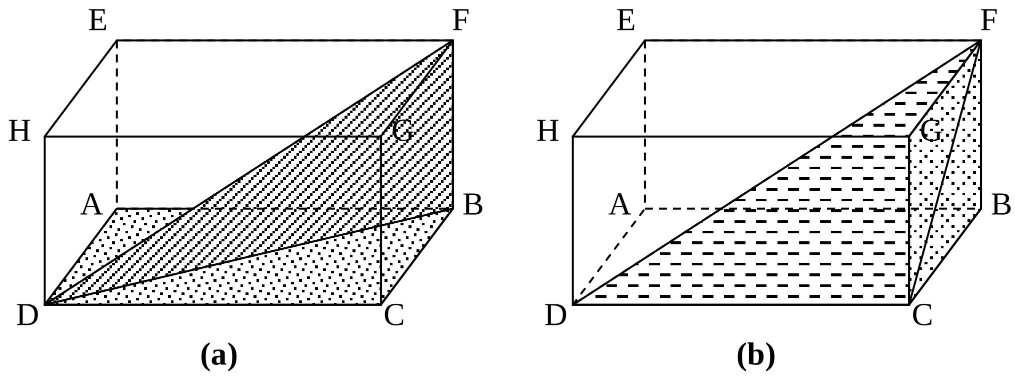


Gambar 21.

Pada **Gambar 21.**: Garis a memotong bidang-K di titik O, garis a_1 merupakan proyeksi garis a pada bidang-K, maka sudut antara garis a dan bidang-K ditunjukkan oleh sudut lancip yang terbentuk oleh garis a_1 dan garis a. Dipilih titik P pada garis a, titik Q pada garis a_1 dan juga pada bidang-K, titik O merupakan perpotongan garis a dengan bidang-K. Ditulis: $\angle(a,K) = \angle(a,a_1) = \angle POQ$ (artinya: sudut antara garis a dan bidang-K samadengan sudut antara garis a dan garis a_1, yang samadengan $\angle$POQ).

Perhatikan contoh berikut, penerapan sudut antara diagonal-ruang dan bidang-sisi balok!

Contoh:

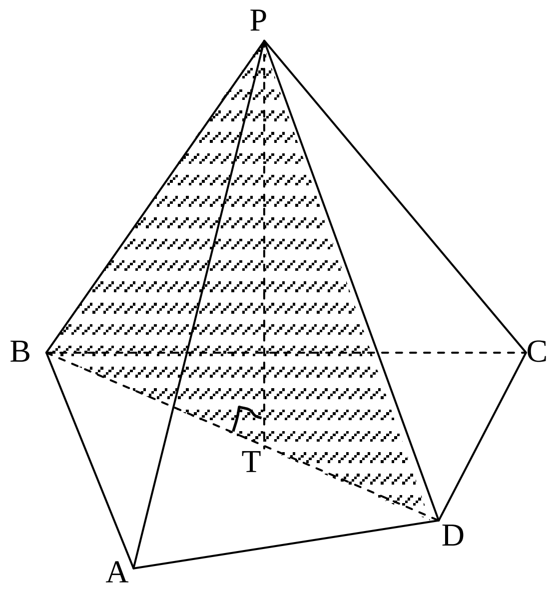


Gambar 22. Sudut antara diagonal-ruang $\overline{DF}$ dan bidang-sisi pada balok-ABCD.EFGH

Pada **Gambar 22 (a)**, diperlihatkan sudut yang dibentuk oleh diagonal-ruang $\overline{DF}$ dan bidang-sisi-ABCD adalah ∠FDB. Proyeksi tegaklurus dari $\overline{DF}$ ke bidang-sisi-ABCD adalah $\overline{DB}$. Sehingga sudut yang dibentuk oleh diagonal-ruang $\overline{DF}$ dan bidang-sisi-ABCD ditunjukkan oleh diagonal-ruang $\overline{DF}$ dan diagonal-sisi $\overline{DB}$, yaitu ∠FDB. Sedangkan pada **Gambar 22 (b)**, diperlihatkan sudut yang dibentuk oleh diagonal-ruang $\overline{DF}$ dan bidang-sisi-BCGF adalah ∠CFD. Proyeksi tegaklurus dari $\overline{DF}$ ke bidang-sisi-BCGF adalah $\overline{FC}$. Sehingga sudut yang dibentuk oleh diagonal-ruang $\overline{DF}$ dan bidang-sisi-BCGF ditunjukkan oleh diagonal-ruang $\overline{DF}$ dan diagonal-sisi $\overline{FC}$, yaitu ∠FDB.

Selanjutnya perhatikan contoh berikut tentang sudut yang dibentuk oleh rusuk-tegak dan bidang-alas-limas.

Contoh:



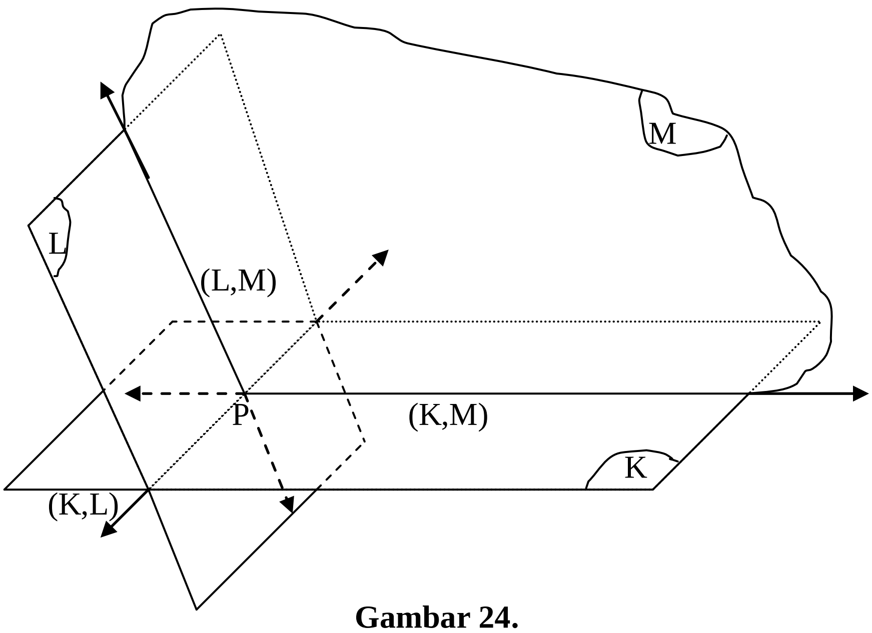
Gambar 23. Sudut antara $\overline{PB}$ dan bidang-alas-ABCD

Gambar 23., menunjukkan sudut yang dibentuk oleh rusuk-tegak $\overline{PB}$ dan bidang-alas-ABCD pada limas P.ABCD. Proyeksi tegaklurus dari $\overline{PB}$ ke bidang-alas-ABCD adalah $\overline{TB}$. Sehingga sudut yang dibentuk oleh rusuk-tegak $\overline{PB}$ dan bidang-alas-ABCD pada limas P.ABCD ditunjukkan oleh $\overline{PB}$ dan $\overline{TB}$, yaitu $\angle$PBT. **Gambar 23.**, juga menunjukkan sudut yang dibentuk oleh rusuk-tegak $\overline{PD}$ dan bidang-alas-ABCD pada limas P.ABCD. Proyeksi tegaklurus dari $\overline{PD}$ ke bidang-alas-ABCD adalah $\overline{TD}$. Sehingga sudut yang dibentuk oleh rusuk-tegak $\overline{PD}$ dan bidang-alas-ABCD pada limas P.ABCD ditunjukkan oleh $\overline{PD}$ dan $\overline{TD}$, yaitu $\angle$PDT.

3. Sudut antara Dua Buah Bidang (berpotongan)

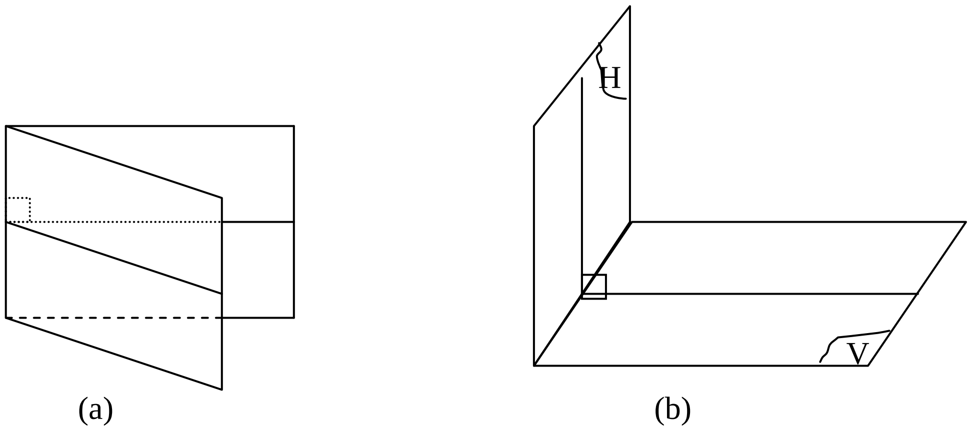
Jika dua buah bidang, yaitu bidang-K dan bidang-L saling berpotongan, dengan garis potong (K,L), maka sudut antara bidang-K dan bidang-L ditetapkan sebagai berikut:

(Perhatikan **Gambar 24** !) Dipilih sebuah bidang yang tegaklurus terhadap garis (K,L), misalnya melalui satu titik P pada garis (K,L). Jika bidang tersebut dinamakan bidang-M, maka bidang-M disebut <u>bidang tumpuan</u>.



Gambar 24.

Apabila bidang-M memotong bidang-K dan bidang-L berturut-turut pada garis (K,M) dan garis (L,M), maka sudut yang dibentuk oleh garis (K,M) dan garis (L,M) disebut sudut antara bidang-K dan bidang-L.



Gambar 25.

Jika sudut antara dua buah bidang berupa sudut siku-siku atau berukuran 90°, maka dikatakan: kedua bidang tersebut saling tegaklurus. Misalnya pada **Gambar 25.(b)**, bidang-H tegaklurus terhadap bidang-V, berarti m∠(H,V) = 90°. Sudut antara dua bidang disebut juga **sudut tumpuan**, sedang bidang yang memuat sudut tumpuan disebut **bidang-tumpuan**.

B. Volum Bangun Ruang

Dalam mempelajari segibanyak, dikenal daerah segibanyak. Segibanyak dan daerah segibanyak adalah dua hal yang berbeda. *Mengapa*? Dalam mempelajari bidang-banyak, dibedakan antara bidang-banyak dan bidang-banyak pejal. Berkaitan dengan bahasan volume, kita pikirkan bidang-banyak pejal; bidang-banyak sekaligus interiornya.

Dalam kehidupan, Anda banyak melihat batang-batang kayu yang dikemas berbentuk balok, untuk keperluan pembangunan apa saja. Batang-batang kayu tersebut merupakan model balok-pejal; bentuknya saja menyerupai balok, tetapi bukan balok. Dalam hal ini kita membedakan istilah "balok" (kayu) dalam bahasa daerah (Jawa) dan dalam bahasa matematika Indonesia.

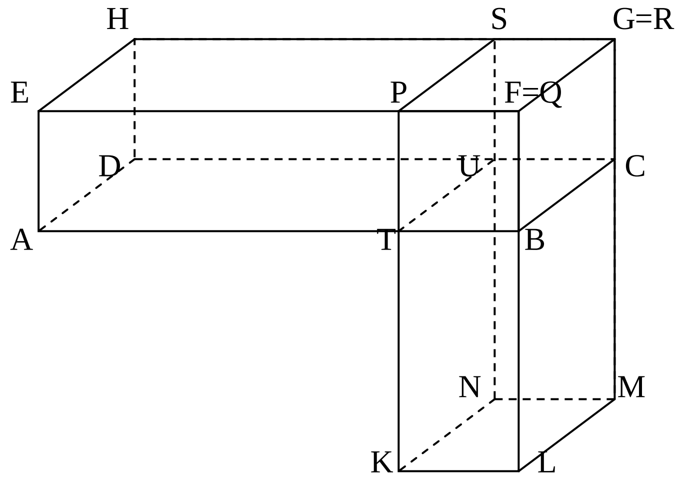
Postulat Volume-1

> Setiap bidang-banyak pejal beraturan dikaitkan dengan sebuah bilangan positif yang secara khusus disebut <u>volume</u>. Sebarang bentuk geometri dimensi dua (kurva tertutup) pada suatu bidang ditetapkan mempunyai <u>volume nol</u>.

Berdasarkan **Postulat Volume-1** semua bidang banyak pejal (bidang banyak sekaligus ruang di dalamnya) dapat dikaitkan dengan suatu bilangan real positif. Keterkaitannya berupa pengukuran volume. Ini berarti suatu volume merupakan suatu ukuran yang berkaitan dengan bidang banyak pejal dan volume berupa bilangan real positif. Khusus untuk bentuk-bentuk geometri dimensi dua, seperti daerah segitiga, daerah segiempat, daerah segilima, dan sebagainya, ditetapkan mempunyai volume nol. Misalnya, volume daerah segitiga adalah nol, volume daerah segiempat adalah nol, volume daerah persegipanjang adalah nol, volume daerah segilima adalah nol, dan sebagainya.

Postulat Volume-2

> Untuk sebarang dua bidang-banyak pejal beraturan, volume gabungan keduanya adalah jumlah volume keduanya dan dikurangi volume perpotongan keduanya.



Gambar 26. Balok ABCD.EFGH berpotongan dengan Balok KLMN.PQRS

Pada **Gambar 26**, Balok-ABCD.EFGH berpotongan dengan balok-KLMN.PQRS. Perpotongannya berupa balok-TBCU.PQRS atau balok-TBCU.PFGS (karena F=Q dan G=R) . Menurut **Postulat Volume-2**, volume seluruhnya adalah jumlah volume balok ABCD.EFGH dan volume balok KLMN.PQRS, dikurangi volume balok TBCU.PQRS. Secara simbolik, volume bentuk geometri ruang pada **Gambar 26** dituliskan:

$$V = V_{\text{balok}-ABCD.EFGH} + V_{\text{balok}-KLMN.PQRS} - V_{\text{balok}-TBCU.PQRS} \quad \text{atau}$$

$$V = V_{\text{balok}-ABCD.EFGH} + V_{\text{balok}-KLMN.PQRS} - V_{\text{balok}-TBCU.PFGS}$$

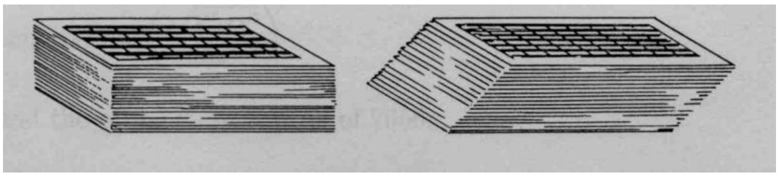
Postulat Volume-3

> Sebuah kubus yang rusuk-rusuknya mempunyai panjang 1 ditetapkan mempunyai volume 1.

Kubus yang dimaksudkan **Postulat Volume-3** tersebut, selanjutnya disebut dengan **kubus satuan**. Jadi suatu kubus satuan mempunyai ukuran volume 1.

Berkaitan pengukuran volume suatu bentuk geometri ruang dalam bahasan ini, pemikiran volume tidak dikaitkan dengan satuan-satuan ukuran. Penggunaan satuan ukuran dipikirkan dalam praktek konstruksi geometri dalam kehidupan. Ketika Anda menentukan volume suatu bidang-banyak, pikiran Anda: seolah-olah Anda menentukan volume suatu benda padat/pejal dalam kehidupan.

Misalkan kita menyusun seperangkat kartu, seperti **Gambar 27.(a)**.



(a) (b)

Gambar 27

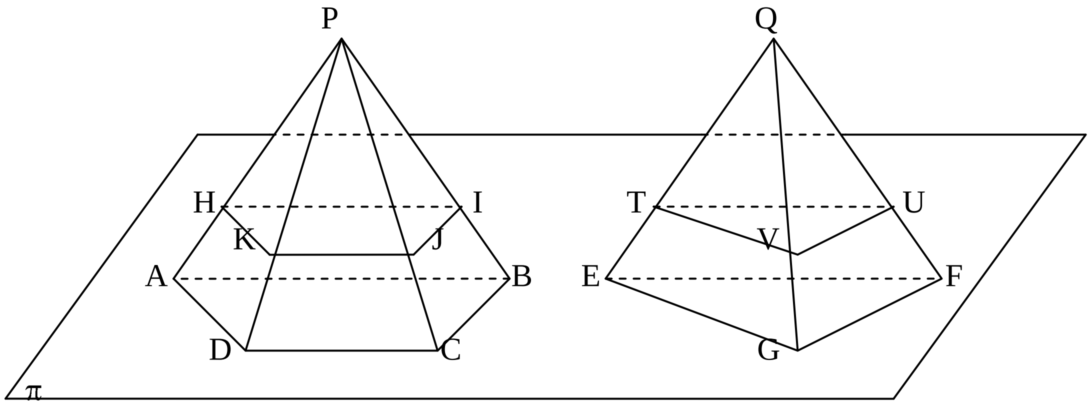
Kita susun pula seperangkat kartu lagi; dengan susunan miring (**Gambar 27.(b)**). Jika kedua perangkat kartu tersebut diletakkan pada permukaan sebuah meja, maka kita dapat mengimajinasikan bahwa setiap kartu menggambarkan sebagai irisan yang dibentuk oleh tumpukan kartu tersebut dengan bidang yang sejajar terhadap permukaan meja tersebut. Semua irisan tersebut (kartu-kartu) mempunyai kesamaan luas. Kalau masing-masing tumpukan berisi kartu sama banyak, maka keduanya memiliki kesamaan volume. Jadi kedua tumpukan kartu tersebut mempunyai ukuran volume yang sama.

Sifat volume tersebut sangat penting dan dikemukakan oleh matematisi Italia: ***Bonaventura Cavalieri*** (***1598-1647***).

Postulat Volume-4 (*Prinsip Cavalieri*)

Misalkan S_1 dan S_2, keduanya benda-pejal dan π adalah suatu bidang. Jika setiap bidang yang sejajar dengan π, memotong S_1 dan juga S_2, dan jika perpotongan-perpotongan yang berkorespondensi mempunyai kesamaan luas, maka S_1 dan S_2 mempunyai kesamaan volume.

Prinsip Cavalieri tersebut diilustrasikan dengan **Gambar 28**.



Gambar 28

Gambar 28 menunjukkan dua buah limas, yaitu limas-segiempat-P.ABCD dan limas-segitiga-Q.EFG. Kedua bidang alas limas tersebut terletak pada satu bidang, yaitu bidang-π dan kedua limas tersebut mempunyai tinggi yang sama. Kedua limas tersebut dipotong oleh sebuah bidang yang sejajar dengan bidang-π dan irisan/perpotongannya berupa daerah segiempat HIJK dan daerah segitiga TUV. Kalau luas daerah segiempat HIJK samadengan luas daerah segitiga TUV, maka menurut Prinsip Cavalieri kedua limas tersebut mempunyai ukuran volume yang sama. Jadi volume limas-segiempat-P.ABCD samadengan volume limas-segitiga-Q.EFG. Secara simbolik dituliskan:

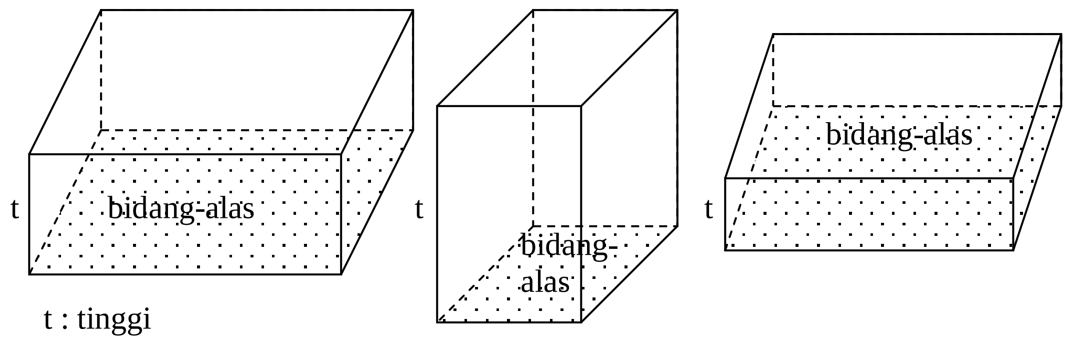
Jika $L_{\square HIJK} = L_{\Delta TUV}$, maka $V_{\text{limas-segiempat-P.ABCD}} = V_{\text{limas-segitiga-Q.EFG}}$ atau

$$L_{\square HIJK} = L_{\Delta TUV}, \Rightarrow V_{\text{limas-segiempat-P.ABCD}} = V_{\text{limas-segitiga-Q.EFG}}$$

Sekarang pikirkan kubus-kubus yang memiliki panjang rusuk 1. Setiap daerah-irisan sebarang kubus tersebut, sejajar dengan bidang-alasnya, mempunyai luas 1. Karena itu, berdasarkan Prinsip *Cavalieri*, kubus-kubus tersebut mempunyai kesamaan volume, yaitu 1.

Untuk selanjutnya pembicaraan volume berkaitan dengan bentuk geometri ruang pejal. Misalnya kalau kita menyebut <u>volume balok</u>, yang dimaksud adalah *volume balok-pejal*.

Teorema 1 Volume sebarang prisma-tegak-persegipanjang (balok) adalah hasilkali luas bidang-alasnya dan tingginya.



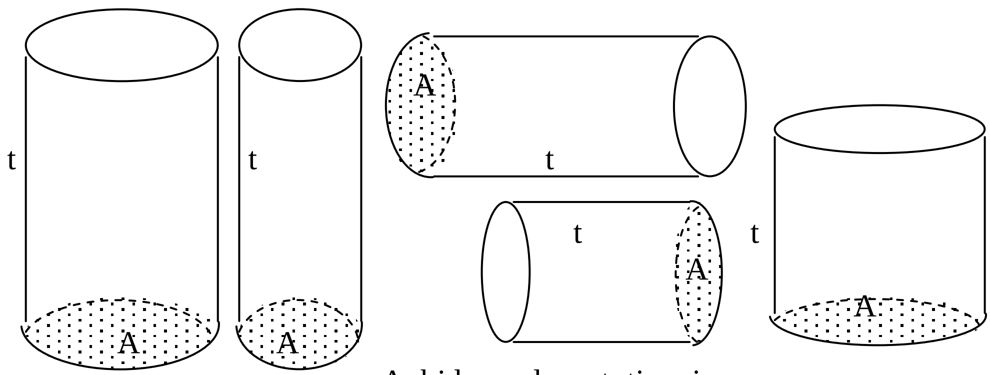
Gambar 29

Dalam pembelajaran volume suatu balok, di sekolah, dikenal rumus untuk menentukannya, yaitu $V = p \times l \times t$. *Dalam kondisi bagaimanakah rumus tersebut cocok (tanpa mengubah lambang)* ?

Dalam mengkaji luas, kita mengaitkannya dengan daerah segibanyak. Luas daerah bentuk geometri bidang yang lain dapat didekati/didasari dengan luas daerah segibanyak. Dengan cara yang identik, kita pikirkan volume bentuk geometri ruang yang lain (silinder, kerucut, bola) dapat didekati/didasari dengan volume bidang-banyak-pejal-beraturan.

Teorema 2 Volume suatu silinder adalah hasilkali luas alasnya dan tingginya.

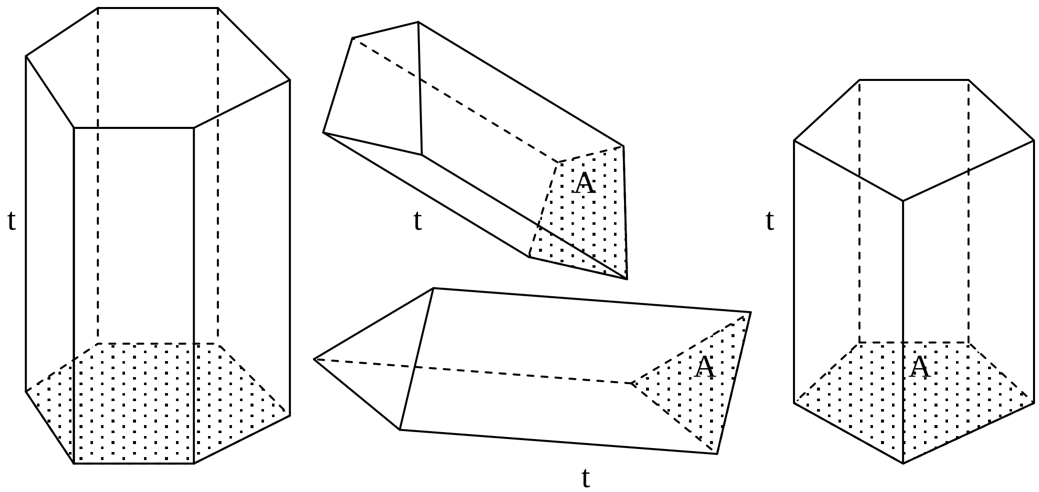
$V_{\text{silinder}} = A \times t$, dengan A = luas alas, t = tinggi



A: bidang-alas, t: tinggi

Gambar 30. Silinder-silinder (tabung-tabung)

Suatu prisma merupakan suatu bentuk khusus dari suatu silinder. Oleh karena itu menurut **Teorema 2**, maka volume suatu prisma adalah hasil kali luas alasnya dan tingginya. $V_{prisma} = A \times t$, dengan A = luas alas, t = tinggi

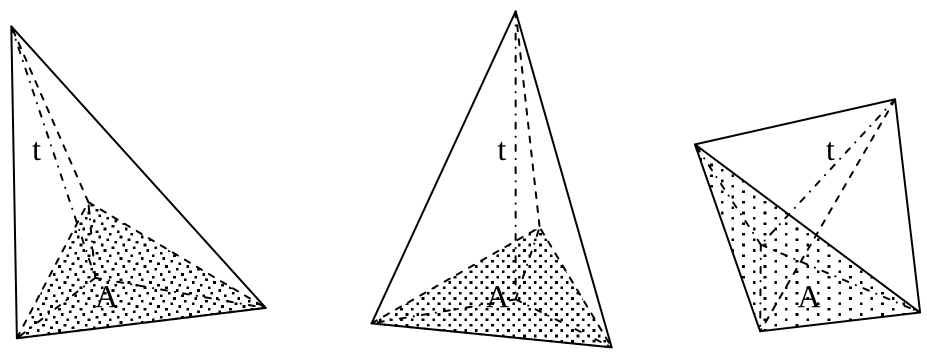


A: bidang-alas
t : tinggi

Gambar 31 Macam-macam Prisma

Teorema 3 Volume suatu limas-segitiga adalah sepertiga dari hasilkali luas bidang-alasnya dan tingginya.

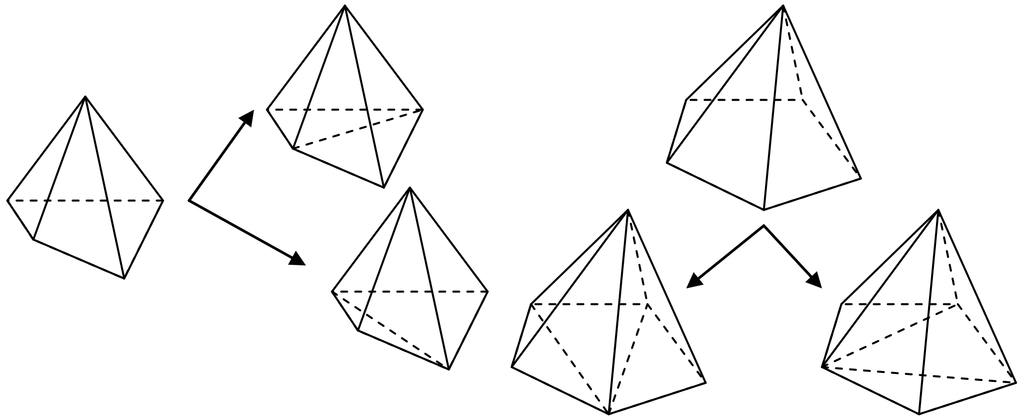
$V_{limas-segitiga} = \frac{1}{3} \times A \times t$, dengan A = luas alas, t = tinggi



A: bidang-alas (daerah segitiga yang diarsir)
t : tinggi (‑ · ‑ · ‑ · ‑ · ‑)

Gambar 32. Macam-macam Limas Segitiga

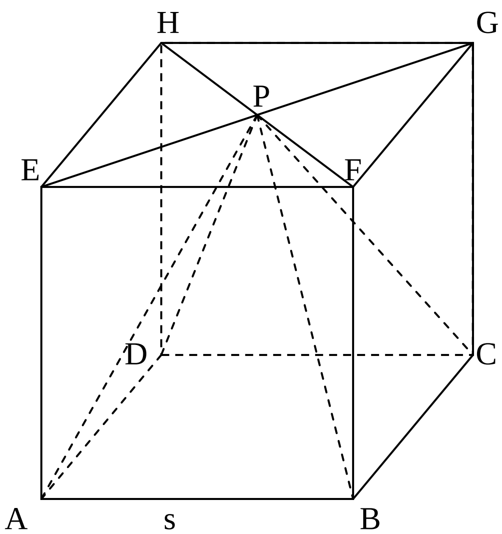
Dengan dasar teorema perhitungan volume limas segitiga, maka untuk perhitungan volume limas yang bidang alasnya bukan daerah segitiga dapat didekati dengan membentuk limas-limas segitiga dalam limas tersebut. Misalnya seperti yang disajikan dalam **Gambar 33**.



Gambar 33. Ilustrasi perhitungan volume limas segiempat dan limas segilima dengan pendekatan volume limas segitiga.

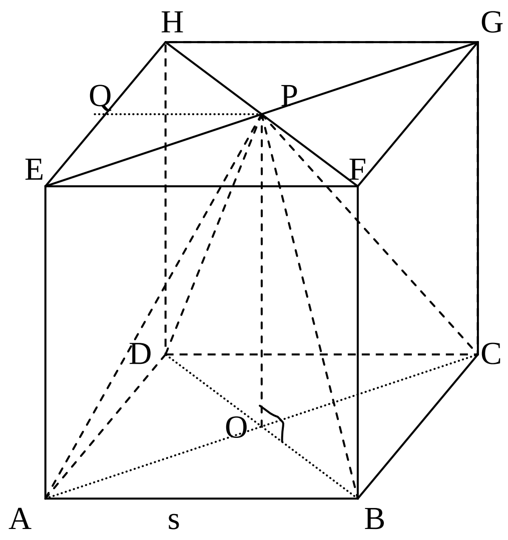
Jadi secara umum, volume limas adalah sepertiga dari hasilkali luas alas dan tinggi limas. $V_{\lim as} = \frac{1}{3} \times A \times t$, dengan A = luas alas, t = tinggi-limas.

Contoh: Berapakah volume limas-limas pada **Gambar 34**?



Gambar 34 Kubus-ABCD.EFGH dengan rusuk sepanjang s memuat limas-P.ABCD, limas-P.ABFE, limas-P.BCGF, limas-P.DCGH, dan limas-P.ADHE

1) Kubus-ABCD.EFGH dengan rusuk sepanjang s. Berarti AB = BC = CD = AD = AE = BF = CG = DH = EF = FG = GH = EH = s. Karena bidang-sisi-bidang-sisi kubus-ABCD.EFGH berupa daerah persegi, yaitu daerah-■ABCD, daerah-■BCGF, daerah-■CDHG, daerah-■ADHE, daerah-■ABFE, dan daerah-■EFGH, maka setiap daerah persegi tersebut mempunyai luas s^2. Jadi $L_{\text{daerah-}\blacksquare\text{ABCD}} = L_{\text{daerah-}\blacksquare\text{BCGF}} = L_{\text{daerah-}\blacksquare\text{CDHG}} = L_{\text{daerah-}\blacksquare\text{ADHE}} = L_{\text{daerah-}\blacksquare\text{ABFE}} = L_{\text{daerah-}\blacksquare\text{EFGH}} = s^2$.
2) Dalam kubus-ABCD.EFGH terdapat limas-tegak-persegi-P.ABCD dengan bidang-alas daerah-■ABCD, dan tingginya samadengan jarak P terhadap daerah-■ABCD. Berarti luas alas limas tersebut adalah $L_{\text{daerah-}\blacksquare\text{ABCD}} = s^2$, dan tinggi limas = jarak antara P dan daerah-■ABCD = OP = s.



Gambar 35

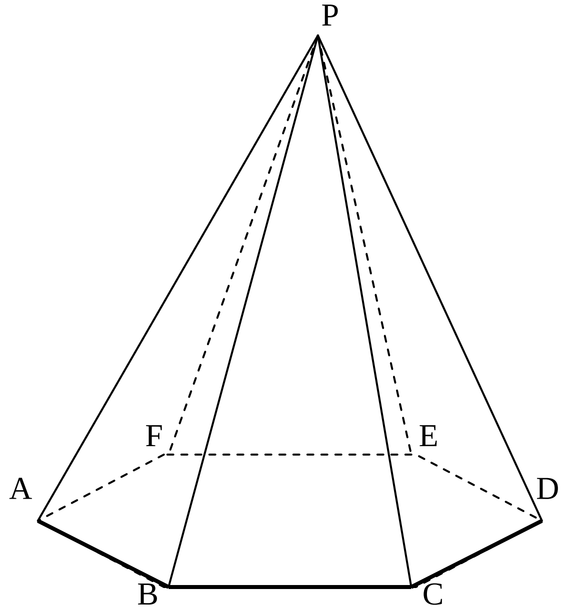
Sehingga
$V_{\text{limas-P.ABCD}} = \frac{1}{3} L_{\text{daerah-}\blacksquare\text{ABCD}} \times OP = \frac{1}{3} \times s^2 \times s = \frac{1}{3} s^3$.

3) Dalam kubus-ABCD.EFGH juga terdapat limas-tegak-persegi-P.ADHE dengan bidang-alas daerah-■ADHE, dan tingginya samadengan jarak P terhadap daerah-■ADHE. Berarti luas alas limas tersebut adalah $L_{\text{daerah-}\blacksquare\text{ADHE}} = s^2$, dan tinggi limas = jarak antara P dan daerah-■ADHE = PQ = $\frac{1}{2}$ s. Sehingga

$$V_{\text{limas-P.ADHE}} = \frac{1}{3} L_{\text{daerah-}\blacksquare\text{ADHE}} \times PQ = \frac{1}{3} \times s^2 \times \frac{1}{2} s = \frac{1}{6} s^3.$$

4) Limas-limas yang lain, yaitu limas-P.ABFE, limas-P.BCGF, limas-P.DCGH, ketiga limas tersebut masing-masing mempunyai volume yang samadengan volume limas-P.ADHE. (*mengapa*?)

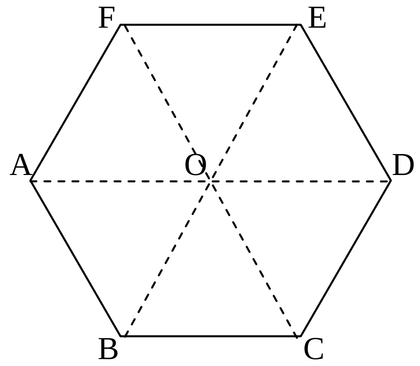
Contoh: Bagaimanakah perhitungan volume limas-tegak-segienam-beraturan-P.ABCDEF seperti **Gambar 36,** jika diketahui panjang sisi segienam tersebut **a** dan tinggi limas tersebut **h ?**



Gambar 36

Penyelesaian:

Sketsa bidang-alas



Gambar 37

Karena segienam ABCDEF berupa segienam beraturan, berarti tiga buah diagonal dari dua titik-sudut yang berhadapan, yaitu $\overline{AD}$, $\overline{BE}$, $\overline{CF}$ berpotongan di satu titik, O. Titik O tersebut juga merupakan pusat lingkaran-luar segienam tersebut.

Masing-masing diagonal tersebut juga merupakan garis-bagi sudut-dalam segienam tersebut. Karena setiap sudut-dalam segienam-beraturan sama besar, yaitu 120^o, berarti $m\angle OAF = m\angle OFA = m\angle OFE = m\angle OEF = m\angle OED = m\angle ODE = m\angle ODC = m\angle OCD = m\angle OCB = m\angle OBC = m\angle OBA = m\angle OAB = 60^o$. Demikian juga $m\angle FOA = m\angle EOF = m\angle DOE = m\angle COD = m\angle BOC = m\angle AOB = 60^o$. Sehingga masing-

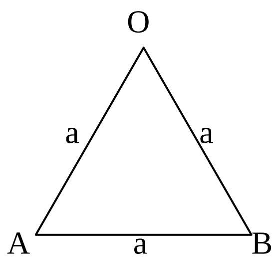
masing segitiga yang terbentuk, yaitu ΔAOB, ΔBOC, ΔCOD, ΔDOE, ΔEOF, dan ΔAOF berupa segitiga-samasisi. Karena panjang sisi segienam-beraturan tersebut a, maka panjang sisi setiap segitiga-samasisi tersebut juga a. Oleh karena itu luas daerah segienam-ABCDEF samadengan jumlah luas daerah-daerah segitiga samasisi tersebut.

$$L_{segienam-ABCDE} = L_{\Delta AOB} + L_{\Delta BOC} + L_{\Delta COD} + L_{\Delta DOE} + L_{\Delta EOF} + L_{\Delta AOF}$$

Setiap segitiga-samasisi tersebut diketahui panjang sisi-sisinya yaitu a, berarti luas daerah setiga-samasisi tersebut sama besar.

Jadi $L_{segienam-ABCDE} = 6 \times L_{\Delta AOB}$

Luas daerah segitiga yang diketahui panjang sisi-sisinya dapat dihitung dengan menggunakan rumus Heron.



Gambar 38

$$s = \tfrac{1}{2}(AB + AO + BO) = \tfrac{1}{2}(a + a + a) = \tfrac{3a}{2}$$

$$L_{\Delta AOB} = \sqrt{s(s - AB)(s - AO)(s - BO)}$$

$$L_{\Delta AOB} = \sqrt{\tfrac{3a}{2}(\tfrac{3a}{2} - a)(\tfrac{3a}{2} - a)(\tfrac{3a}{2} - a)}$$

$$L_{\Delta AOB} = \sqrt{\tfrac{3a}{2}.\tfrac{a}{2}.\tfrac{a}{2}.\tfrac{a}{2}} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

Sehingga

$$L_{segienam-ABCDE} = 6 \times L_{\Delta AOB} = 6 \times \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \tfrac{3}{2}a^2\sqrt{3}$$

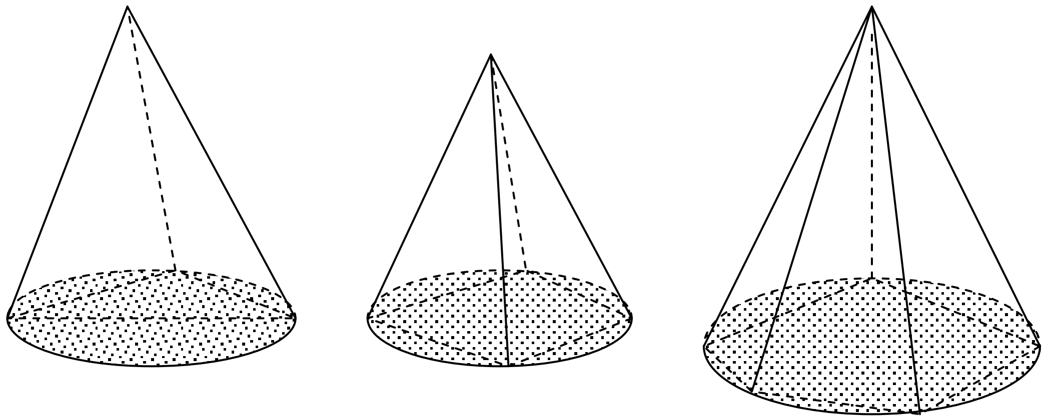
Limas-tegak-segienam-beraturan-P.ABCDEF tersebut mempunyai tinggi h, maka perhitungan volume limas tersebut :

$$V_{limas-P.ABCDEF} = \tfrac{1}{3} \times L_{segienam-ABCDEF} \times h = \tfrac{1}{3} \times (\tfrac{3}{2}a^2\sqrt{3}) \times h = \tfrac{1}{2}a^2h\sqrt{3}$$

Jadi volume limas tersebut adalah $V_{limas-P.ABCDEF} = \tfrac{1}{2}a^2h\sqrt{3}$

Definisi Limas Talibusur

Jika suatu limas dan suatu kerucut-lingkaran mempunyai kesamaan puncak, dan bidang-alas limas merupakan segibanyak talibusur pada bidang-alas kerucut tersebut, maka limas tersebut dinamakan limas-talibusur.



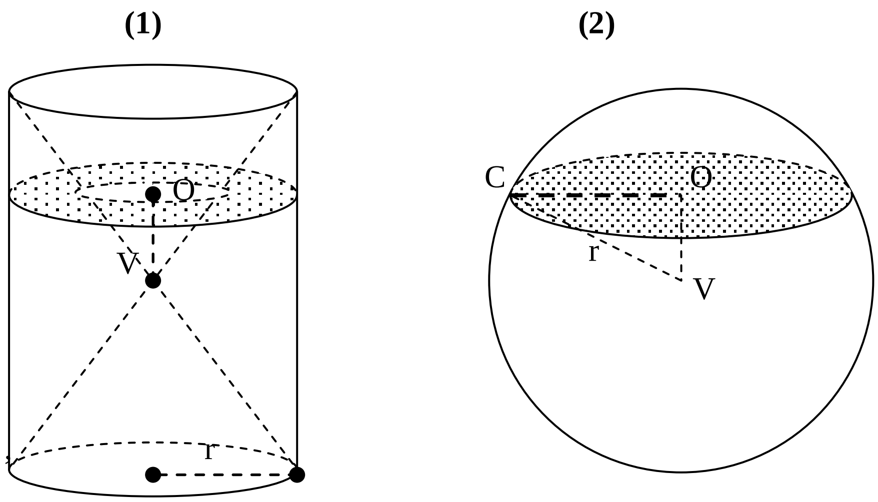
Gambar 39. Limas-limas Talibusur

Gambar 39 menyajikan tiga macam limas-talibusur, yaitu limas-segitiga-talibusur, limas-segiempat-talibusur, dan limas-segilima-talibusur. Titik-sudut-titik-sudut bidang-alas-limas terletak pada lingkaran-alas suatu kerucut dan puncak-puncak-limas berimpit dengan puncak-kerucut. Dengan memanfaatkan limas-talibusur, maka perhitungan volume kerucut dapat didekati dengan perhitungan volume limas-talibusur. Karena dari suatu kerucut dapat dibentuk sebanyak mungkin suatu limas-talibusur dan dari limas-talibusur dapat dibentuk limas-limas segitiga, maka dengan pemikiran tersebut dapat dinyatakan bahwa perhitungan volume kerucut sama dengan perhitungan volume limas. Volume suatu kerucut adalah sepertiga dari hasilkali luas alas dan tinggi kerucut.

$V_{kerucut} = \frac{1}{3} \times A \times t$, dengan A = luas alas, t = tinggi-kerucut.

Teorema 4: Volume suatu bola adalah hasilkali $\frac{4}{3}\pi$ dan pangkat-tiga jari-jarinya.

Perhatikan **Gambar 40** berikut!



Gambar 40

Gambar 40.(2) berupa bola dengan jari-jari r dan **Gambar 40.(1)** berupa silinder-lingkaran-tegak yang alasnya berjari-jari r dan tinggi 2r. Di dalam silinder terdapat dua kerucut lingkaran tegak yang tingginya t. Puncak kedua kerucut tersebut berimpit di titik V. Ada sebuah bidang yang memotong silinder maupun bola, dan perpotongannya berbentuk daerah lingkaran dengan pusat O.

Misalkan jarak dari O ke V adalah h, h = OV.

Pada **Gambar 40.(1)**, daerah lingkaran (penuh) yang diberi arsiran berjari-jari r, sehingga luasnya πr^2. Sedangkan lingkaran kecil di dalamnya berjari-jari h, sehingga luasnya πh^2. Oleh karena itu luas ***annulus*** (daerah dalam lingkaran yang diberi arsiran) yang terbentuk mempunyai luas $(\pi r^2 - \pi h^2)$.

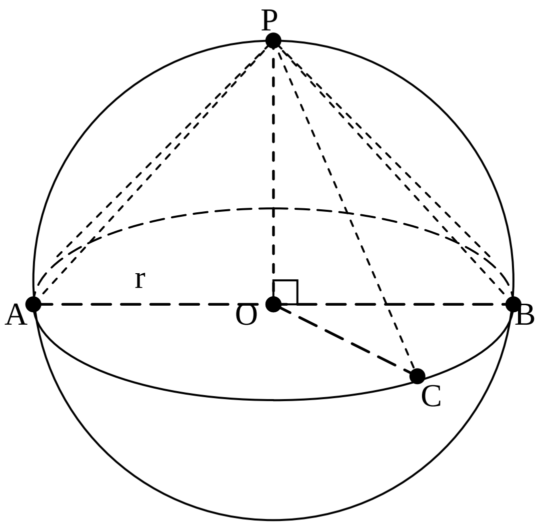
Pada **Gambar 40.(2)**, daerah lingkaran yang diberi arsiran mempunyai jari-jari OC, sehingga luasnya $\pi.OC^2$. Karena $OC^2 = VC^2 - VO^2 = r^2 - h^2$, maka luas daerah lingkaran tadi samadengan $(\pi r^2 - \pi h^2)$.

Berdasarkan Prinsip Cavalieri, maka volume bola tersebut samadengan volume ruang dalam silinder di luar kerucut-kerucut (bagian silinder). Sehingga:

$$\begin{aligned} V_{bola} &= V_{bagian-silinder} = V_{silinder} - V_{kerucut-kerucut} \\ &= \pi r^2 .2r - 2.\tfrac{1}{3}.\pi r^2 .r \\ &= 2\pi r^3 - \tfrac{2}{3}\pi r^3 \\ &= \tfrac{4}{3}\pi r^3 \end{aligned}$$

Dengan demikian, telah terbukti bahwa perhitungan volume bola dapat dirumuskan: $V_{bola} = \frac{4}{3}\pi r^3$, dengan r = jari-jari bola.

Contoh: Berapakah perbandingan antara volume bola dan volume kerucut dalam bola yang disajikan **Gambar 41 ?**



Gambar 41

Bola yang digambarkan pada **Gambar 41**, berpusat di titik O dan berjari-jari r.

Di dalam bola O terdapat sebuah kerucut berpuncak di titik P dan bidang-alasnya berimpit dengan lingkaran-besar dalam bola O.

Sehingga bidang-alas kerucut berupa daerah lingkaran-besar dalam bola dan diameter bidang-alas kerucut tersebut sama panjang dengan diameter lingkaran-besar

Bidang-alas kerucut tersebut berupa daerah-lingkaran, berarti kerucut tersebut merupakan kerucut-lingkaran. Oleh karena itu OA = OB = OC = r, jari-jari bola atau jari-jari lingkaran-besar dalam bola.

Diketahui pula bahwa $\overline{OP} \perp \overline{AB}$, ini berarti kerucut dengan puncak P tersebut merupakan kerucut-lingkaran-tegak. Titik P pada bola (permukaan bola), O pada $\overline{AB}$, dan $\overline{OP} \perp \overline{AB}$. Ini berarti panjang $\overline{OP}$ samadengan jari-jari bola, atau OP = r. Dengan demikian tinggi kerucut tersebut samadengan jari-jari bola.

Oleh karena itu perbandingan antara volume bola dan volume kerucut dalam bola tersebut dihitung sebagai berikut:

$$
\begin{aligned}
V_{bola} : V_{kerucut} &= (\tfrac{4}{3}\pi r^3) : (\tfrac{1}{3}.L_{alas-kerucut}.t) \\
&= (\tfrac{4}{3}\pi r^3) : (\tfrac{1}{3}.\pi r^2.r) \\
&= (\tfrac{4}{3}\pi r^3) : (\tfrac{1}{3}.\pi r^2.r) \quad = \quad (\tfrac{4}{3}\pi r^3) : (\tfrac{1}{3}\pi r^3) \\
&= 4 \ : \ 1
\end{aligned}
$$

4.2.2. Latihan 2

1) Jelaskan cara menentukan sudut antara dua garis yang bersilangan !
2) Jelaskan cara menentukan sudut yang dibentuk oleh sebuah garis yang memotong sebuah bidang !
3) Apakah yang dimaksud dengan bidang tumpuan?
4) Jelaskan cara menentukan volume sebuah kerucut !
5) Jelaskan cara merumuskan volume bola !

Kunci Jawaban Latihan 2

1) Lihat uraian tentang sudut antara dua garis yang bersilangan !
2) Lihat uraian tentan sudut antara garis dan bidang !
3) Lihat uraian tentan sudut antara dua bidang !
4) Lihat uraian tentang perhitungan volume kerucut !
5) Lihat uraian tentang penurunan rumus volume bola !

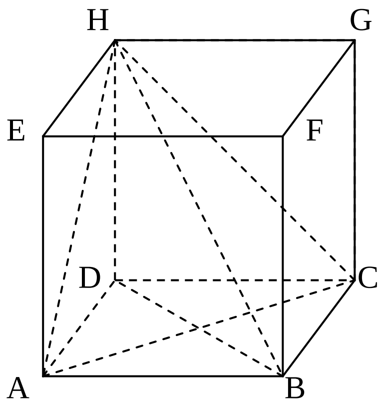
4.2.3. Rangkuman

Sudut dalam ruang meliputi sudut antara dua garis yang bersilangan, sudut yang dibentuk oleh garis yang memotong bidang, dan sudut antara dua bidang yang berpotongan. Sudut anatar dua garis yang bersilangan ditentukan oleh sudut yang dibentuk oleh garis-garis yang sejajar dengan masing-masing garis yang bersilangan tersebut. Sudut antara garis dan bidang ditentukan dari sudut yang terbentuk oleh garis yang memotong bidang, yaitu sudut antara garis dan proyeksi garis tersebut pada bidang yang dipotong. Sudut antara dua bidang yang berpotongan ditentukan oleh perpotongan bidang tumpuan dengan garis potong dua bidang yang berpotongan tersebut.

Volume bangun ruang didasarkan pada perhitungan volume kubus satuan. Dengan keberadaan Postulat Volume (Prinsip Cavalieri), maka volume antara bangun-bangun ruang dapat ditentukan dari volume bangun ruang yang lain.

4.2.4. Tes Formatif 2

Petunjuk: Pilih satu jawaban yang tepat untuk setiap soal dari 4 alternatif jawaban yang disediakan dengan memberikan tanda cross (X) pada huruf A, B, C, atau D sesuai dengan jawaban yang Anda pilih !



Gambar 42

Gambar 42 tersebut merupakan bantuan untuk menyelesaikan soal nomor 1) – 5) !

1) Sudut antara $\overline{AB}$ dan $\overline{CG}$ adalah:
   A. $\angle$DCG atau $\angle$ABF
   B. $\angle$BCG atau $\angle$CBF
   C. $\angle$ACG atau $\angle$BHG
   D. $\angle$ACH atau $\angle$GCH

2) Sudut yang dibentuk oleh $\overline{BH}$ dan bidang-ABCD adalah:
   A. $\angle$HBA
   B. $\angle$HBC
   C. $\angle$HBD
   D. $\angle$HDB

3) Sudut antara bidang-ADHE dan bidang-DCGH adalah:
   A. $\angle$ADH
   B. $\angle$ADC
   C. $\angle$AHC
   D. $\angle$ACH

4) Sudut antara $\overline{AD}$ dan $\overline{HB}$ dapat diwakilkan oleh

   A. $\angle ADC$

   B. $\angle HAD$

   C. $\angle HBC$

   D. $\angle ABH$

5) Bidang-tumpuan untuk sudut antara bidang-BCGF dan bidang-EFGH, yaitu:

   A. bidang-ABFE atau bidang-ABCD

   B. bidang-ABFE atau bidang-HGCD

   C. bidang-HEAD atau bidang-HGCD

   D. bidang-HEAD atau bidang-ABCD

6) Sudut-tumpuan untuk sudut antara bidang-BCGF dan bidang-EFGH, yaitu:

   A. $\angle BCG$

   B. $\angle BFE$

   C. $\angle DCG$

   D. $\angle DBC$

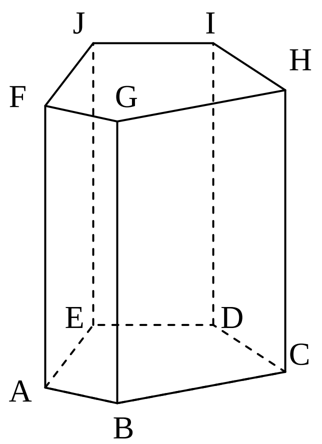
7) Volume bangun ruang yang digambarkan di sebelah kanan samadengan

   A. $V_{ABD.EGI} + V_{BCD.GHI} + V_{EAD.JFI}$

   B. $V_{ABD.EJI} + V_{BCD.GFI} + V_{EAD.JHI}$

   C. $V_{ACD.EGI} + V_{BAD.GHI} + V_{EBD.JFI}$

   D. $V_{ACD.EJI} + V_{BAD.GFI} + V_{EBD.JHI}$



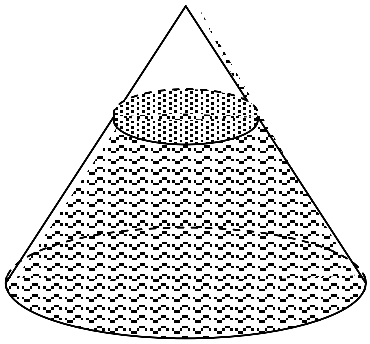
8) Perhitungan volume suatu kerucut lingkaran tegak didekati dengan perhitungan volume:

   A. limas tegak segitiga

   B. limas talibusur

   C. kerucut talibusur

   D. kerucut tegak segitiga

9) 

Gambar di sebelah kanan berupa suatu kerucut lingkaran tegak dengan jari-jari alas r dan tinggi r, dipotong oleh sebuah bidang yang sejajar dengan bidang-alas kerucut. Perpotongannya berupa daerah lingkaran dengan jari-jari $\frac{1}{2}$r dan jarak $\frac{1}{3}$r dari puncak kerucut. Berapakah volume kerucut terpancung yang terbentuk?

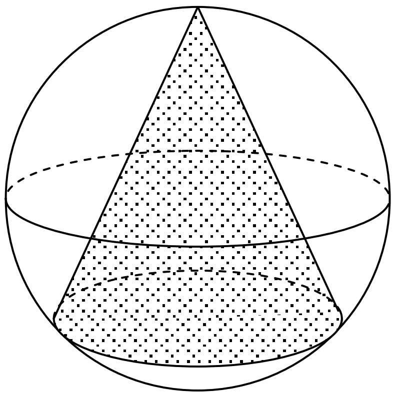
A. Volume kerucut terpancung tersebut adalah $\frac{2}{9}\pi r^3$

B. Volume kerucut terpancung tersebut adalah $\frac{17}{54}\pi r^3$

C. Volume kerucut terpancung tersebut adalah $\frac{11}{36}\pi r^3$

D. Volume kerucut terpancung tersebut adalah $\frac{5}{18}\pi r^3$

10) Misalkan gambar di sebelah kanan sebuah bola berjari-jari p dan di ruang dalamnya terdapat kerucut lingkaran tegak dengan tinggi k dan jari-jari bidang-alasnya $\frac{1}{2}k$.



Berapakah volume ruang dalam bola yang tidak dipotong oleh kerucut tersebut?

A. $\frac{4}{3}\pi p^3 - \frac{1}{2}\pi k^3$

B. $\frac{4}{3}\pi p^3 - \frac{1}{3}\pi k^3$

C. $\frac{4}{3}\pi p^3 - \frac{1}{6}\pi k^3$

D. $\frac{4}{3}\pi p^3 - \frac{1}{12}\pi k^3$

4.2.5. Umpan Balik dan Tindak Lanjut

Cocokkanlah jawaban Anda dengan Kunci Jawaban Tes Formatif 2 yang terdapat di bagian belakang modul ini. Kemudian gunakan rumus di bawah ini untuk mengetahui tingkat penguasaan Anda terhadap materi Kegiatan 2.

Rumus:

$$\text{Tingkat penguasaan} = \frac{\text{Jumlah jawaban Anda yang benar}}{10} \times 100\ \%$$

Arti tingkat penguasaan yang Anda capai:

90% - 100% = baik sekali

80% - 89% = baik

70% - 79% = cukup

- 69% = kurang

Bila tingkat penguasaan Anda mencapai 80% ke atas, Anda dapat meneruskan ke modul berikutnya. **Bagus!** Tetapi bila tingkat penguasaan Anda di bawah 60%, Anda harus mengulangi Kegiatan Belajar 2 terutama bagian yang belum Anda kuasai.

5. Kunci Tes Formatif

5.1. Kunci Tes Formatif 1

1) C Karena ketiga garis tersebut terletak pada satu bidang, yaitu bidang-ABCD

2) B Karena $\overline{AB} \parallel \overline{HG}$

3) C Karena masing-masing terletak pada bidang yang berbeda

4) A Perpotongan dua bidang adalah tepat satu garis

5) B Bidang-BCGF dan bidang-ADHE merupakan bidang-sisi-bidang-sisi kubus yang saling sejajar.

6) B Keduanya memotong bidang-EFGH di titik H.

7) D Keduanya terletak pada bidang-ABFE yang sejajar dengan bidang-DCGH

8) A Karena ΔBDH siku-siku di titik D, sehingga $\overline{BD} \perp \overline{DH}$

9) B Karena $\overline{BF} \perp \overleftrightarrow{AB}$ dan $\overline{BF} \perp \overleftrightarrow{FG}$

10) A Karena $\overline{BA} \perp \text{bidang} - \text{ADHE}$ dan $\overline{BA} \perp \overleftrightarrow{BF}$

5.2. Kunci Tes Formatif 2

1) A Karena $\overline{AB}$ dan $\overline{CG}$ bersilangan, $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$, dan $\overline{CG} \parallel \overline{DH}$

2) C Proyeksi $\overline{BH}$ ke bidang-ABCD adalah $\overline{BD}$

3) B Karena $\angle$ADC terletak pada bidang-ABCD sebagai salah satu bidang tumpuan antara bidang-ADHE dan bidang-DCGH

4) C Karena $\overline{AD}$ dan $\overline{HB}$ bersilangan, $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$

5) B Karena bidang-ABFE $\perp \overline{FG}$ dan juga bidang HGCD $\perp \overline{FG}$

6) B Karena F dan $\overline{BF}$ pada bidang-BCGF, F dan $\overline{EF}$ pada bidang EFGH

7) A Jumlah volume prisma-prisma segitiga

8) B Limas talibusur merupakan limas yang puncaknya berimpit dengan puncak kerucut dan titik-titik-sudutnya pada lingkaran-bidang-alaskerucut

9) C $V_{ker\ ucut-terpancung} = V_{ker\ ucut-besar} - V_{ker\ ucut-kecil} = \frac{1}{3}\pi r^3 - \frac{1}{3}\pi(\frac{1}{2}r)^2(\frac{1}{3}r)$

10) D $V_{sisa-ruang-bola} = V_{bola} - V_{ker\ ucut} = \frac{4}{3}\pi p^3 - \frac{1}{3}\pi(\frac{1}{2}k)^2(k)$

6. Referensi

a) Keedy, Jameson, Smith, Mould. 1967. *Exploring Geometry*. New York: Holt, Rinehart and Winston, Inc.

b) Travers, Dalton, Layton. 1987. *GEOMETRY*. River Forest, Illionis: Laidlaw Brothers, A Division of Doubleday & Company, Inc.

Glossary

titik

garis

bidang
- bidang-alas
- bidang-sisi
- bidang-diagonal
- bidang proyeksi
- bidang-tumpuan

ruasgaris

sudut
- sudut antara dua garis yang berpotongan
- sudut antara dua garis bersilangan
- sudut antara garis dan bidang yang berpotongan
- sudut-tumpuan

colinear (kolinear)	*segaris*
titik-titik kolinear	*titik-titik yang segaris*
non-kolinear	*tak-segaris*
titik-titik non-kolinear	*titik-titik yang tak-segaris*
coplanar	*sebidang*
titik-titik coplanar	*titik-titik yang sebidang*
titik dan garis coplanar	*titik dan garis yang sebidang*
dua garis coplanar	*dua garis yang sebidang*
non-coplanar	*tak-sebidang*

sejajar
- dua garis sejajar
- garis sejajar bidang
- garis dan bidang yang saling-sejajar
- dua bidang sejajar

berpotongan
- dua garis yang berpotongan
- dua garis yang berpotongan tegaklurus
- garis dan bidang yang berpotongan (garis menembus bidang)
- garis dan bidang yang berpotongan tegaklurus
- dua bidang yang berpotongan
- dua bidang yang berpotongan tegaklurus

bersilangan
- dua garis bersilangan
- dua garis bersilangan tegaklurus

bersekutu *berpotongan*

jarak
- jarak antara dua titik
- jarak antara dua garis sejajar
- jarak antara dua garis bersilangan