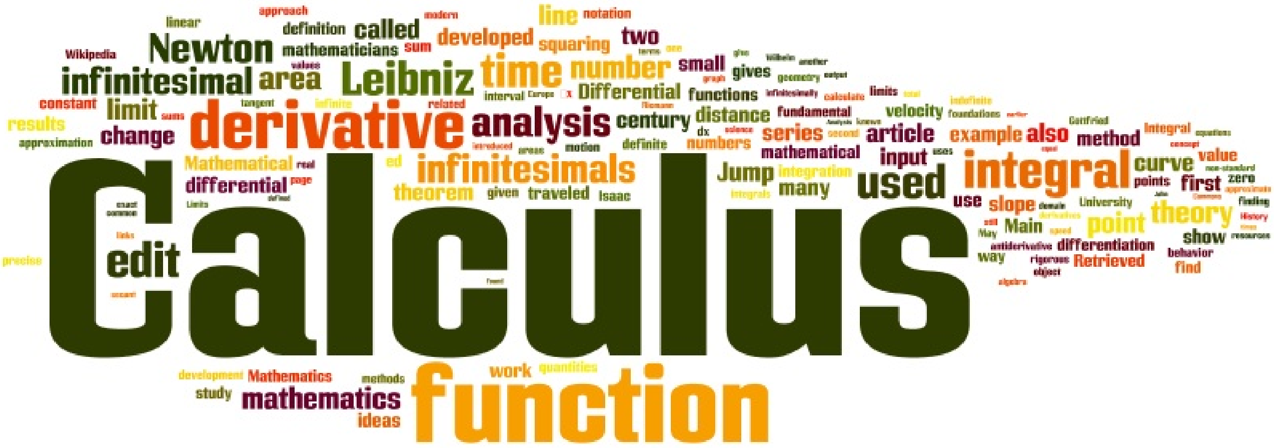
# Modul
# KALKULUS MULTIVARIABEL II




Oleh

**Ayundyah Kesumawati, S.Si., M.Si.**
**(Program Studi Statistika)**

**FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM**
**UNIVERSITAS ISLAM INDONESIA**
**2016**

# Daftar Isi

**Daftar Isi** **iv**

**Daftar Gambar** **v**

**Daftar Tabel** **vi**

**1 Pendahuluan** **1**

1.1 Integral Tak Wajar Tipe I . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 1

1.1.1 Integral Tak Wajar Khusus Jenis Pertama . . . . . . . . . . . . 5

1.2 Integral Tak Wajar Tipe II . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 5

**2 Fungsi Gamma dan Fungsi Beta** **8**

2.1 Fungsi Gamma . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 8

2.1.1 Definisi Fungsi Gamma dan Sifat-sifatnya . . . . . . . . . . . . 8

2.1.2 Sifat Fungsi Gamma . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 10

2.1.3 Penggunaan Fungsi Gamma . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 12

2.2 Fungsi Beta . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 14

2.2.1 Definisi dan Sifat-sifat Fungsi Beta . . . . . . . . . . . . . . . . 14

2.2.2 Hubungan Fungsi Gamma dan Fungsi Beta . . . . . . . . . . . . 15

2.2.3 Penggunaan Fungsi Beta . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 16

**3 Deret Tak Terhingga** **18**

3.1 Barisan Tak Terhingga . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 18

3.2 Deret Tak Terhingga . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 19

3.2.1 Fakta-Fakta Fundamental Menyangkut Deret Tak Terhingga . 20

3.2.2 Beberapa Bentuk Deret Sederhana . . . . . . . . . . . . . . . 21

3.2.3 Kekonvergenan Deret Tak Berhingga . . . . . . . . . . . . . . 24

3.3 Uji Konvergensi dan Divergensi Suatu Deret Konstanta . . . . . . . . 26

3.3.1 Uji Integral . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 26

3.4 Uji Komparasi . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 31

3.4.1 Uji Komparasi Langsung . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 31

3.4.2 Uji Limit Komparasi . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 33

3.5 Uji Rasio . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 34

3.6 Uji Akar . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 35

3.7 Deret Ganti Tanda . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 36

3.8 Deret Pangkat . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 39

3.8.1 Kekonvergenan Deret Pangkat . . . . . . . . . . . . . . . . . 39

3.9 Diferensiasi dan Integrasi Deret Pangkat . . . . . . . . . . . . . . . . 43

3.10 Deret Taylor . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 45

3.11 Deret Binomial . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 48

3.12 Topik Khusus Deret Tak Hingga . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 50

3.13 Latihan Soal . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 53

3.14 Hampiran Taylor untuk Sebuah Fungsi . . . . . . . . . . . . . . . . . 53

3.14.1 Polinomial Taylor Orde 1 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 53

**4 Deret Fourier** **55**

4.1 Fungsi Periodik . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 55

4.2 Deret Fourier . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 56

4.3 Syarat Ortogonalitas untuk Fungsi Sinus dan Cosinus . . . . . . . . . 57

4.4 Syarat Dirichlet . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 58

4.5 Contoh Penggunaan Deret Fourier . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 58

4.6 Fungsi Ganjil dan Fungsi Genap . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 59

4.7 Latihan Soal . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 59

**Daftar Pustaka** **62**

# Daftar Gambar

1.1 Luas sebagai integral tak wajar . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 2
1.2 Luas integral tak wajar yang bernilai nol . . . . . . . . . . . . . . . . . 4
1.3 Integral Tak Wajar Tipe II . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 6

2.1 Fungsi Beta . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 14

3.1 Jumlah Atas Luas Persegipanjang . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 27
3.2 Jumlah Bawah Luas Persegipanjang . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 27
3.3 Grafik Fungsi f(x) . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 30
3.4 Daerah Konvergensi . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 41

# Daftar Tabel

# BAB 1

# Pendahuluan

Suatu integral tertentu

$$\int_a^b f(x)dx \tag{1.1}$$

Dikatakan wajar jika memenuhi dua syarat berikut:

1. Batas integrasi a dan b merupakan bilangan berhingga
2. Fungsi $f(x)$ terbatas pada interval $[a, b]$, yaitu ada $M > 0$ sebagai nilai pembatas sehingga $-M \leq f(x) \leq M$ untuk setiap $x \in [a, b]$

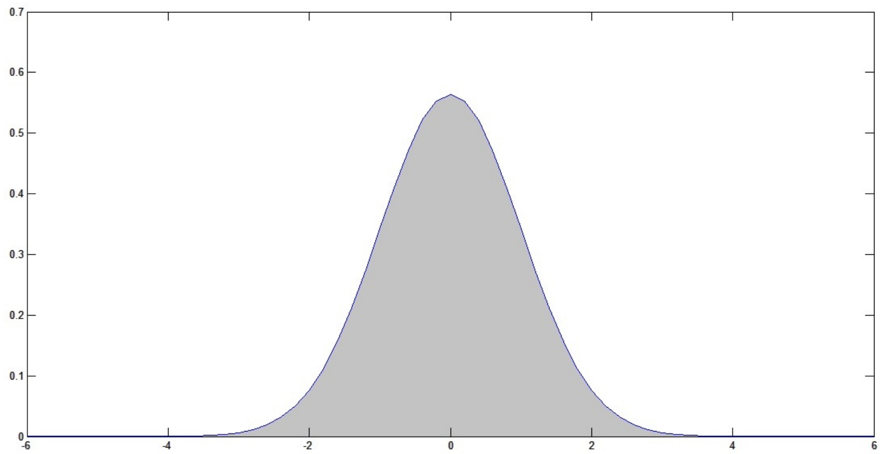
Bila salah satu dari kedua syarat tersebut tidak dipenuhi maka integral (1) dikatakan **Tak Wajar**

## 1.1 Integral Tak Wajar Tipe I

Dalam bidang fisika, ekonomi, probabilitas, statistika dan bidang-bidang lainnya sering melibatkan integral yang didefinisikan pada domain yang tak terbatas. Kenyataan ini melahirkan integral tak wajar tipe I karena batas integrasinya memuat bentuk $\infty$ dan $-\infty$. Beberapa abentuk integral tak wajar tipe I adalah sebagai berikut:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx, \int_{a}^{\infty} f(x)dx, \int_{-\infty}^{a} f(x)dx$$

Walaupun batas integral memuat bilangan tak terbatas, namun nilai integralnya masih dimungkinkan terbatas. Bila $f(x) \leq 0$, maka integral $\int_a^\infty f(x)dx$ dapat dibayangkan sebagai luas daerah yang dibatasi oelh kurva $y = f(x)$ dari $x = a$ sampai dengan $x = \infty$. Luas daerah pada gambar berikut merupakan nilai integral tak wajar $\int_{\infty}^{-\infty} f(x)dx$ dimana $f(x)$ adalah fungsi densitas distribusi normal standar, nilainya 1.




Gambar 1.1: Luas sebagai integral tak wajar

**Definisi 1.1.1** Misalkan $a$ sutau bilangan tertentu dan diasumsikan $\int_a^N f(x)dx$ ada untuk setiap $N \leq a$. Selanjutnya jika $\lim_{N\to\infty} \int_a^N f(x)dx$ ada maka nilai integral tak wajar didefinisikan sebagai

$$\int_a^\infty f(x)dx := \lim_{N\to\infty} \int_a^N f(x)dx \tag{1.2}$$

Selanjutnya, integral tak wajar $\int_a^\infty f(x)dx$ dikatakan **konvergen** jika nilainya berhingga. Selain dari itu dikatakan **divergen**.

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx := \lim_{N\to-\infty}\int_{N}^{b} f(x)dx \tag{1.3}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx := \int_{-\infty}^{b} f(x)dx + \int_{b}^{-\infty} f(x)dx \tag{1.4}$$

$$= \lim_{N\to\infty}\int_{-N}^{N} f(x)dx \tag{1.5}$$

**Contoh 1.1.1** Hitunglah integral tak wajar

$$\int_{1}^{\infty} \frac{1}{x^2}dx$$

Penyelesaian. Dengan menggunakan Definisi 1.1.1. diperoleh

$$\int_{1}^{\infty} \frac{1}{x^2}dx = \lim_{N\to\infty}\int_{1}^{N} \frac{1}{x^2}dx = \lim_{N\to\infty}\left[-\frac{1}{x}\right]_{1}^{N} = \lim_{N\to\infty}\left[-\frac{1}{N} - (-1)\right]$$
$$= 0 + 1 = 1$$

Jadi, integral tak wajar ini konvergen. **Contoh 1.1.2** Hitunglah integral tak wajar

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{3x}{(3x^2+2)^3}dx$$

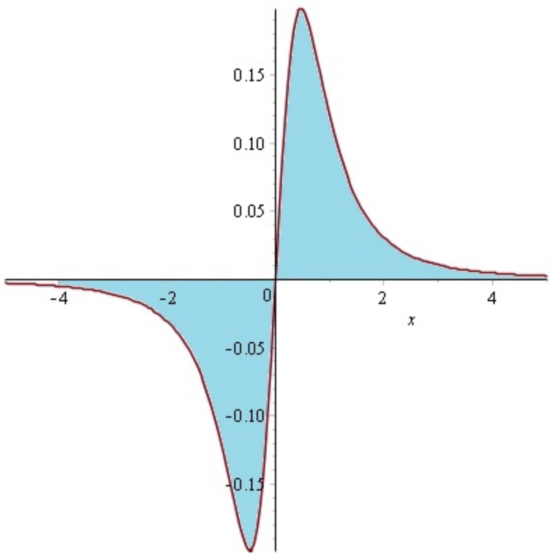
**Penyelesaian**:
Selesaikan terlebih dahulu integral tak tentu $\int \frac{3x}{(3x^2+2)^3}dx$, baru kemudian diambil nilai limitnya. Misalkan $u = 3x^2 + 2$ maka $du = 6xdx$. Jadi, $3xdx = 1/2du$. Subtitusikan pemisalan ini ke dalam integral diperoleh :

$$\int \frac{3x}{(3x^2+2)^3}dx = \int \frac{1/2}{u^3}du = -\frac{1/4}{u^2} = -\frac{1/4}{(3x^2+2)^2}$$

Selanjutnya dengan menggunakan (1.5) diperoleh :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{3x}{(3x^2+2)^3}dx = \lim_{N\to\infty}\int_{-N}^{N} \frac{3x}{(3x^2+2)^3}dx = \lim_{N\to\infty}\left[-\frac{1/4}{(3x^2+2)^2}\right]_{-N}^{N}$$
$$= \lim_{N\to\infty}\left[-\frac{1/4}{(3N^2+2)^2} + \frac{1/4}{(3(-N)^2+2)^2}\right]$$

Jadi, integral tak wajar ini konvergen dan bernilai nol. Khusus nilai nol integral ini didapat kenyataan bahwa terdapat dua luasan daerah yang sama tetapi satu di atas sumbu x dan satunya di bawah sumbu x. Lihat gambar di bawah ini




Gambar 1.2: Luas integral tak wajar yang bernilai nol

**Contoh 1.1.3.** Tentukan semua bilangan p sehingga integral tak wajar

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p} dx$$

konvergen, dan hitunglah nilainya ?

**Penyelesaian**

Setelah melalui beberapa langkah diperoleh

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p} dx = \lim_{N \to \infty} \frac{1}{1-p} \left[N^{1-p} - 1\right]$$

Jika diperhatikan bila $1-p > 0$, yaitu $p < 1$ maka $N^{1-p} \to \infty$ untuk $N \to \infty$. Jadi,

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p} = \frac{1}{1-p}[\infty - 1] = \infty \ (divergen)$$

Sebaliknya jika $1-p < 0$, yaitu $p > 1$ maka $N^{1-p} \to 0$ untuk $N \to \infty$. Jadi

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p} = \frac{1}{1-p}[0-1] = \frac{1}{1-p}(-1) = \frac{1}{p-1} \ (konvergen)$$

Untuk $1 - p = 0$ yaitu p = 1, integral ini divergen (lihat contoh sebelumnya). Jadi dapat disimpulkan

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^p}dx = \begin{cases} \frac{1}{p-1} & \text{bila } p > 1 \\ divergen & \text{bila } p \leq 1 \end{cases}$$

Jadi untuk setiap $p > 1$ , integral tak wajar $\int_1^\infty \frac{1}{x^p}dx$ konvergen dengan nilai $\dfrac{1}{p-1}$.

### 1.1.1 Integral Tak Wajar Khusus Jenis Pertama

1. **Integral Geometrik atau Eksponensial**

$$\int_a^\infty e^{tx}dx$$

dimana t adalah sebuah konstanta, konvergen jika t > 0 dan divergen jika t ≤ 0. Perhatikanlah analogi dengan deret geometri jika $r = e^{-t}$ sehingga $e^{-tx} = r^x$.

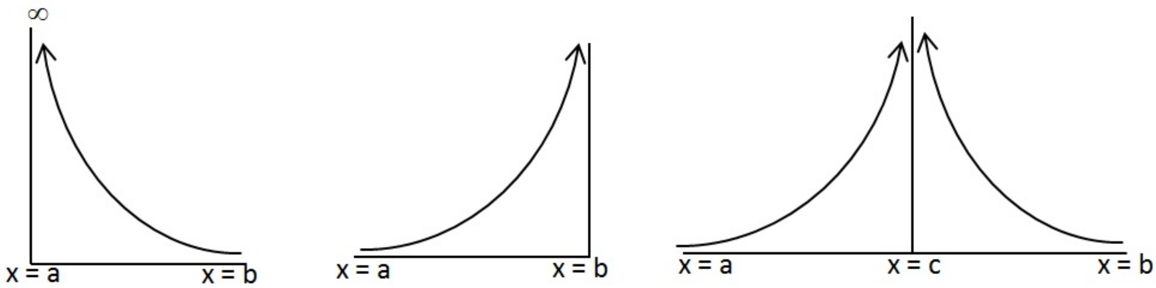
2. **Integral p Jenis Pertama**

$$\int_a^\infty \frac{1}{x^p}dx$$

dimana p adalah sebuah konstanta dan a > 0, konvergen jika p > 1 dan divergen jika p ≤ 1

## 1.2 Integral Tak Wajar Tipe II

Suatu fungsi dikatakan tak terbatas di c jika nilainya sangat besar sekali (mendekati $-\infty$ atau $\infty$) di sekitar c. Misalkan fungsi f didefinisikan pada domain [a , b]. Beberapa model fungsi tak terbatas di sekitar a, b dan titik c dengan $a < c < b$ ditunjukkan pada gambar berikut




Gambar 1.3: Integral Tak Wajar Tipe II

Pada gambar sebelah kiri, fungsi f tak terbatas di titik a dari kanan. Gambar tengah menunjukkan fungsi f tak terbatas di titik b dari kiri. Sedangkan gambar sebelah kanan menunjukkan f tak terbatas di titik c dengan $a < c < b$ dari kanan dan kiri. Bila f tak terbatas pada [a , b], baik di titik a dari kanan di titik b dari kiri ataupun di titik interior [a , b] maka integral

$$\int_a^b f(x)dx$$

Merupakan integral tak wajar, dan disebut integral tak wajar tipe II.

**Definisi**

Bila $f(x)$ tak terbatas di a dan $\int_t^b f(x)dx$ dan ada untuk setiap $t > a$ maka integral tak wajar didefinisikan sebagai :

$$\int_a^b f(x)dx := \lim_{t\to a^+} \int_t^b f(x)dx$$

Bila $f(x)$ tak terbatas di b dan $\int_a^t f(x)dx$ dan ada untuk setiap $t < b$ maka integral tak wajar didefinisikan sebagai :

$$\int_a^b f(x)dx := \lim_{t\to b^-} \int_a^t f(x)dx$$

Selanjutnya, bila f(x) tak terbatas di c, dengan $a < c < b$ maka integral dipecah menjadi dua yaitu

$$\int_a^b f(x)dx := \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Dan selanjutnya digunakan definisi integral tak wajar sebelumnya.

**Contoh**

Hitunglah nilai integral tak wajar berikut

$$\int_0^1 \frac{1}{(x-1)^{\frac{2}{3}}}dx$$

**Penyelesaian** Perhatikan fungsi $f(x) = \dfrac{1}{(x-1)^{\frac{2}{3}}}$ tak terbatas di x = 1 dari kiri. sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{1}{(x-1)^{\frac{2}{3}}}dx &= \lim_{t\to 1^-} \int_0^t \frac{1}{(x-1)^{\frac{2}{3}}}dx \\
&= \lim_{t\to 1^-} \left[3(x-1)^{1/3}\right]_0^t \\
&= 3 \lim_{t\to 1^-} \left[(t-1)^{1/3} - (-1)\right] \\
&= 3
\end{aligned}$$

**Latihan Bab 1.**

1. Sebutkan dan tuliskan beberapa fungsi kepadatan peluang dimana rentang variabelnya menuju ketakberhinggaan. Kemudian tunjukkan integral sepanjang domainnya bernilai 1.

2. Hitunglah integral tak wajar

   (a) $\int_1^\infty \frac{1}{x}dx$

   (b) $\int_{-\infty}^u cos(x)dx$

# BAB 2

# Fungsi Gamma dan Fungsi Beta

## 2.1 Fungsi Gamma

### 2.1.1 Definisi Fungsi Gamma dan Sifat-sifatnya

Fungsi Gamma didefinisikan sebagai integral tak wajar berikut:

$$\Gamma(\alpha) := \int_0^\infty e^{-x} x^{\alpha-1} dx \tag{2.1}$$

Integral ini konvergen bila $\alpha > 0$. Dengan menerapkan integral parsial. diperoleh

$$\begin{aligned}
\Gamma(\alpha+1) : &= \int_0^\infty e^{-x} x^{\alpha} dx \\
&= \left[-e^{-x} x^{\alpha}\right]_0^\infty + \alpha \int_0^\infty e^{-x} x^{\alpha-1} dx \\
&= \alpha\Gamma(\alpha)
\end{aligned}$$

Jadi diperoleh rumus rekursif fungsi gamma sebagai berikut :

$$\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha) \tag{2.2}$$

Berdasarkan (2.2), bila $\alpha = 1$ maka berlaku:

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-x} dx = \left[-e^{-x}\right]_0^\infty = 1 \tag{2.3}$$

Khususnya bila $\alpha$ bilangan bulat positif, maka dengan menggunakan formula rekursif (2.2) diperoleh

$$\begin{aligned}\Gamma(\alpha + 1) &= \alpha\Gamma(\alpha) \\ &= \alpha(\alpha - 1)\Gamma(\alpha) \\ &= \alpha(\alpha - 1)(\alpha - 2)(\alpha - 3)...\Gamma(1) \\ &= \alpha!\end{aligned}$$

Dengan alasan ini fungsi gamma disebut juga fungsi faktorial atau pengumuman dari faktorial, yaitu

$$\Gamma(\alpha + 1) = \alpha! \; bila \; \alpha \; bulat \; positif \tag{2.4}$$

Pada definisi (2.1) fungsi Gamma $\Gamma(\alpha)$ hanya berlaku untuk $\alpha > 0$. Sedangkan untuk $\alpha < 0$, fungsi gamma didefinisikan menggunakan rumus rekursif (2.2) yaitu:

$$\Gamma(\alpha) = \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\alpha} \tag{2.5}$$

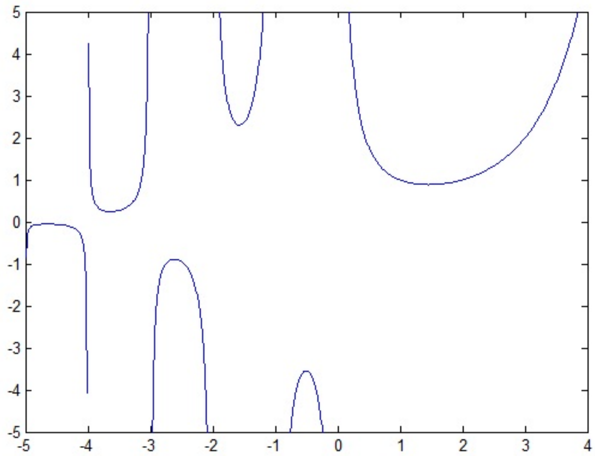
Dengan (2.5) maka diperoleh:

- $\Gamma(0) = \dfrac{\Gamma(1)}{0}$ tidak terdefinisi karena membagi dengan nol
- $\Gamma(-1) = \dfrac{\Gamma(0)}{-1}$tidak terdefinisi karena $\Gamma(0)$ tidak terdefinisi
- $\Gamma(-2) = \dfrac{\Gamma(-1)}{-2}$tidak terdefinisi karena $\Gamma(-1)$ tidak terdefinisi

Jadi fungsi Gamma tidak terdefinisi pada nol dan bilangan bulat negatif. Nilai fungsi gamma untuk $\alpha$ bulat positif sangat mudah dihitung dengan menggunakan bentuk faktorial, misalnya:

$$\Gamma(5) = 4! = 24, \Gamma(6) = 5! = 120$$

Dilihat dari formulanya, kecuali pada bilangan bulat positif, nilai fungsi gamma tidak mudah diperoleh seperti pada fungsi biasa karena kita dituntut untuk menyelesaikan suatu integral. Beberapa program komputer untuk komputasi telah menyediakan fasilitas untuk menghitung nilai fungsi gamma. Berikut grafik dari fungsi gamma untuk $\alpha < 0$:




### 2.1.2 Sifat Fungsi Gamma

1. Khusus untuk $\alpha = \frac{1}{2}$ berlaku

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

2. Untuk $0 < \alpha < 1$ berlaku:

$$\Gamma(\alpha)\ \Gamma(1-\alpha) = \frac{\pi}{\sin \pi x}$$

   Sifat 1 diatas merupakan kasus khusus dari sifat 2 ini yaitu dengan $\alpha = \frac{1}{2}$

3. **Formula Stirling** untuk $n$ bilangan positif yang besar maka digunakan aproksimasi berikut:

$$n! \approx \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

4. **Rumus duplikat** fungsi gamma:

$$2^{2\alpha-1}\Gamma(\alpha)\ \Gamma(\alpha+\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}\Gamma(2\alpha)$$

**Contoh 1.** Hitunglah nilai dari $\Gamma(5/2), \Gamma(-1/2)$, dan $\Gamma(-5/2)$
**Penyelesaian** dengan menggunakan rumus rekursif akan diperoleh

$$\begin{aligned}\Gamma(5/2) &= \Gamma(\frac{3}{2}+1)\\ &= \frac{3}{2}\Gamma(3/2)\\ &= \frac{3}{2}\Gamma(\frac{1}{2}+1)\\ &= \frac{3}{2}\frac{1}{2}\Gamma(1/2)\\ &= \frac{3}{4}\sqrt{\pi}\end{aligned}$$

Berikutnya, karena $\alpha$ bernilai negatif maka digunakan relasi .... Diperhatikan $\alpha = -1/2$ dan $\alpha+1 = -1/2+1 = 1/2$. Diperoleh

$$\begin{aligned}\Gamma(1/2) = \Gamma(-1/2+1) &\Leftrightarrow\\ \sqrt{\pi} = \left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right) &= -2\sqrt{\pi}\end{aligned}$$

Dengan cara yang sama kita dapat menyelesaikan soal berikutnya:

$$\begin{aligned}\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right) = \Gamma\left(-\frac{3}{2}+1\right) = \left(-\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(-\frac{3}{2}\right) = \left(-\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(-\frac{5}{2}+1\right) \Leftrightarrow\\ -2\sqrt{\pi} = \left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)\Gamma\left(-\frac{5}{2}\right) \Rightarrow \Gamma\left(-\frac{5}{2}\right) = \left(-\frac{8}{15}\right)\sqrt{\pi}\end{aligned}$$

Jika diperhatikan nilai fungsi gamma $\Gamma(x)$ dapat disederhanakan jika fungsi tersebut direduksi menjadi $\Gamma(\frac{1}{2})$, yaitu dengan menggunakan rumus rekursif. Tetapi jika tidak dapat direduksi menjadi $\Gamma(\frac{1}{2})$ maka nilai $\Gamma(x)$ harus dihitung dengan definisi fungsi Gamma.
Latihan
Hitunglah masing-masing bentuk fungsi gamma di bawah ini:

a. $\dfrac{\Gamma(3)\Gamma(\frac{5}{2})}{\Gamma(\frac{10}{2})}$

b. $\dfrac{6\Gamma(\frac{8}{3})}{5\Gamma(\frac{2}{3})}$

c. $\dfrac{\Gamma(6)}{2\Gamma(3)}$

### 2.1.3 Penggunaan Fungsi Gamma

Fungsi gamma sering digunakan untuk menyelesaikan bentuk integral yang cukup rumit. Untuk menyelesaikan soal-soal integral dengan menggunakan fungsi gamma kita harus membandingkan kembali dengan definisi fungsi gamma. Dua hal yang ahrus diperhatikan adalah batas integrasinya dan integrannya. Integral-integral ini harus diolah sedemikian rupa sehingga menjadi bentuk definisi fungsi gamma.

**Contoh**

Hitunglah integral berikut dengan menggunakan definisi fungsi gamma

$$\int_0^\infty x^4 e^{-x} dx$$

**Penyelesaian**

dengan melihat bentuk $\int_0^\infty x^4 e^{-x} dx$, kemudian bandingkan dengan definisi $\Gamma(\alpha) := \int_0^\infty e^{-x} x^{\alpha-1} dx$ maka tidak ada yang perlu diubah lagi pada soal karena fungsi tersebut sudah berbentuk fungsi Gamma dengan $\alpha - 1 = 4$ atau $\alpha = 5$. Jadi

$$\int_0^\infty x^4 e^{-x} dx = \Gamma(5) = 4! = 24$$

Bila integral ini diselesaikan dengan cara biasa tanpa menggunakan fungsi gamma maka harus dilakukan integral parsial beberapa kali seperti berikut ini

$$\begin{aligned}
\int x^4 e^{-x} dx &= \int \underbrace{x^4}_{u} \underbrace{e^{-x}}_{v} dx \\
&= -\left[ x^4 e^{-x} - 4 \int x^3 e^{-x} dx \right] \\
&= -x^4 e^{-x} + 4 \int \underbrace{x^3}_{u} \underbrace{e^{-x}}_{v} dx \\
&= ...
\end{aligned}$$

Untuk menghabiskan pangkat dari $x^4$ harus dilakukan 4 kali integral parsial, suatu pekerjaan yang cukup melelahkan. Tapi dengan menggunakan fungsi gamma pekerjaan ini dapat dilakikan dengan sangat mudah.

**Contoh**

Hitunglah integral berikut dengan menggunakan fungsi gamma

$$\int_0^{\infty} \sqrt[3]{x} e^{-x^3} dx$$

**Penyelesaian**

Integral $\int_0^{\infty} \sqrt[3]{x} e^{-x^3} dx$ belum berbentuk fungsi gamma dalam hal integrannya, namun batas integrasi sudah sama. Subtitusi variabel baru $x^3 = y$ maka batas-batasnya tidak berubah dan diperoleh:

$$x = y^{\frac{1}{3}} \; dan \; dx = \left(\frac{1}{3}\right) y^{-\frac{2}{3}} dy$$

Subtitusi hasil ini ke dalam integral pada soal dan diperoleh:

$$\begin{aligned}
\int_0^{\infty} \sqrt[3]{x} e^{-x^3} dx &= \int_0^{\infty} y^{\frac{1}{6}} e^{-y} \frac{1}{3} y^{-\frac{2}{3}} dy \\
&= \frac{1}{3} \int_0^{\infty} y^{-\frac{1}{2}} e^{-y} dy \\
&= \frac{1}{3} \Gamma(1/2) \\
&= \frac{\sqrt{\pi}}{3}
\end{aligned}$$

**Latihan**

1. hitunglah integral berikut dengan menggunakan fungsi gamma

$$\int_0^1 \left(ln \frac{1}{x}\right)^3 dx$$

2. hitunglah integral berikut dengan menggunakan fungsi gamma

$$\int_0^1 x^3 \left(lnx\right)^2 dx$$

3. Diketahui variabel random X berdistribusi gamma dengan fungsi kepadatan peluang dari X adalah

$$P_X(x) = \frac{x^{\alpha-1}e^{-x/\beta}}{\beta^\alpha\Gamma(\alpha)}, \alpha, \beta, x > 0$$

Hitunglah ekspektasi $E(x)$ dan variansi $var(x)$

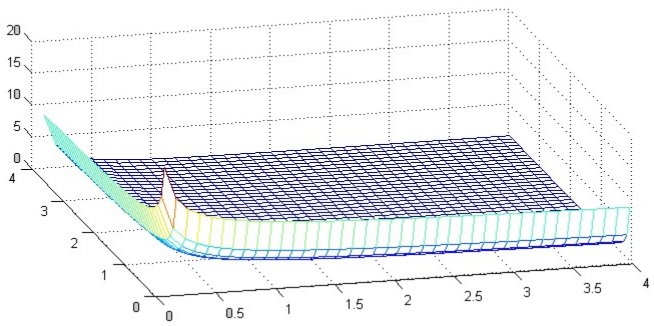
## 2.2 Fungsi Beta

### 2.2.1 Definisi dan Sifat-sifat Fungsi Beta

Fungsi beta adalah fungsi Gamma dengan komposisi dua parameter yang didefinisikan sebagai:

$$B(m,n) := \int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}dx \tag{2.6}$$

integral ini hanya konvergen bila $m, n > 0$. Tidak ada definisi fungsi beta untuk $m, n < 0$
Seperti hal nya pada fungsi Gamma, berikut merupakan grafik fungsi Beta Bentuk




Gambar 2.1: Fungsi Beta

trigonometri dari fungsi beta adalah:

$$B(m,n) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^{2m-1}\theta cos^{2n-1}\theta dx \tag{2.7}$$

Karena fungsi beta merupakan fungsi dua variabel maka dalam pengerjaannya lebih sedikit sulit daripada fungsi gamma.

### 2.2.2 Hubungan Fungsi Gamma dan Fungsi Beta

Fungsi beta dapat dinyatakan melalui fungsi gamma dengan cara berikut ini: Dengan memisalkan $z = x^2$, maka kita memperoleh

$$\Gamma(u) = \int_0^\infty z^{u-1}e^{-z}dx = 2\int_0^\infty x^{2u-1}e^{-x^2}dx \tag{2.8}$$

Dengan cara yang sama,

$$\Gamma(v) = 2\int_0^\infty y^{2v-1}e^{-y^2}dx \tag{2.9}$$

Maka

$$\begin{aligned}\Gamma(u)\Gamma(v) &= 4\left(\int_0^\infty x^{2u-1}e^{-x^2}dx\right)\left(\int_0^\infty y^{2v-1}e^{-y^2}dy\right)\\ &= 4\int_0^\infty\int_0^\infty x^{2u-1}e^{-x^2}y^{2v-1}e^{-y^2}dx\ dy\end{aligned}$$

Dengan mentransformasikannya ke koordinat polar,$x = \rho\cos\phi$, maka $y = \rho\sin\phi$. Sehingga

$$\begin{aligned}\Gamma(u)\Gamma(v) &= 4\int_{\phi=0}^{\frac{\pi}{2}}\int_{\rho=0}^\infty \rho^{2(u+v)-1}e^{-\rho^2}\cos^{2u-1}\phi\sin(2v-1)\ \phi\ d\rho\ d\phi\\ &= 4\left(\int_{\rho=0}^\infty \rho^{2(u+v)-1}e^{-\rho^2}d\rho\right)\left(\int_{\phi=0}^{\frac{\pi}{2}}\cos(2u-1)\phi\ sin(2v-1)\phi\ d\phi\right)\\ &= 2\Gamma(u+v)\int_0^{\pi/2} cos^{2u-1}\phi sin^{2v-1}\phi d\phi\\ &= \Gamma(u+v)B(u,v)\end{aligned}$$

Jadi diperoleh hubungan fungsi gamma dan fungsi beta adalah

$$B(m,n) = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)} \tag{2.10}$$

Sifat lain dari fungsi gamma yang diturunkan dari fungsi beta adalah:

$$\int_0^\infty \frac{x^{p-1}}{1+x}dx = \Gamma(p)\Gamma(1-p) = \frac{\pi}{sinp\pi}, 0 < p < 1 \tag{2.11}$$

**Contoh**
Hitunglah nilai fungsi beta berikut

$$B(5,2), B(1/2,3), B(1/3,2/3)$$

### 2.2.3 Penggunaan Fungsi Beta

Sama seperti pada fungsi gamma, fungsi beta juga banyak digunakan untuk menyelesaikan bentuk integral yang cukup rumit.
**Contoh**
Hitunglah integral berikut dengan menggunakan fungsi beta

$$\int_0^1 x^2(1-x)^5 dx$$

**Penyelesaian**
Integral ini sudah berupa fungsi beta. Jadi cukup ditentukan nilai m dan n yang bersesuaian lalu bandingkan dengan

$$B(m,n) := \int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}dx$$

maka m = 3 dan n = 6 sehingga

$$\int_0^1 x^2(1-x)^5 dx = B(3,6) = \frac{\Gamma(3)\Gamma(6)}{\Gamma(9)} = \frac{1}{168}$$

**Latihan**

1. Hitunglah integral berikut dengan menggunakan funsgi beta

$$\int_0^3 x^4\sqrt{9-x^2}dx$$

2. Hitunglah integral berikut dengan menggunakan funsgi beta

$$\int_0^{\pi/2} sin^3\theta cos^4\ \theta\ d\theta$$

3. Hitunglah integral berikut dengan menggunakan funsgi beta

$$\int_0^{\pi} sin^5\theta d\theta$$

4. Hitunglah integral berikut dengan menggunakan funsgi beta

$$\int_1^3 \frac{dx}{\sqrt{(x-1)(3-x)}}$$

5. Hitunglah integral berikut dengan menggunakan funsgi beta

$$\int_0^{\pi/2} \sqrt{tan\ \theta}\ d\theta$$

# BAB 3

# Deret Tak Terhingga

## 3.1 Barisan Tak Terhingga

Barisan

$$a_1, a_2, a_3, a_4, ...$$

adalah susunan bilangan-bilangan real yang teratur, satu untuk setiap bilangan bulat positif. **Barisan Tak Terhingga** adalah fungsi yang daerah asalnya adalah himpunan bilangan bulat positif dan daerah hasilnya adalah himpunan bilangan real. Barisan Tak Terhingga dapat dinotasikan sebagai $a_n$.
**Definisi 1.** Barisan $a_n$ dikatakan **konvergen** menuju $L$, dan ditulis sebagai

$$lim_{n \to \infty} a_n = L$$

Jika untuk tiap bilangan positif $\varepsilon$ terdapat sebuah bilangan positif N yang bersesuaian, sedemikian rupa sehingga

$$n \geq N \Rightarrow |a_n - L| < \varepsilon$$

Barisan yang tidak konvergen menuju bilangan terhingga L sebarang dikatakan divergen atau menyebar.
**Teorema Sifat-sifat Limit pada Barisan** Misalkan $a_n$ dan $b_n$ adalah barisan-

barisan konvergen dan k adalah konstanta. Maka:

1. $lim_{n\to\infty} k = k$
2. $lim_{n\to\infty} ka_n = klim_{n\to\infty} a_n$
3. $lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = lim_{n\to\infty} a_n \pm Lim_{n\to\infty} b_n$
4. $lim_{n\to\infty}(a_n.b_n) = lim_{n\to\infty} a_n.Lim_{n\to\infty} b_n$
5. $lim_{n\to\infty}\frac{lim_{n\to\infty} a_n}{lim_{n\to\infty} b_n},\ asalkan\ lim_{n\to\infty} b_n \neq 0$

## 3.2 Deret Tak Terhingga

Ekspresi matematika yang berbentuk

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + ...$$

atau dalam notasi

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

disebut **deret tak terhingga** dan bilangan real $a_k$ disebut suku ke k deret tersebut. Prakteknya, kita tidak mungkin melakukan penjumlahan dengan banyak suku tak berhingga, namun hanya mengambil berhingga banyak suku sebagai aproksimasinya. Secara induktif, jumlah beberapa suku pertama deret membentuk suatu barisan

$(S_n : n \in N)$. Perhatikan

$$\begin{aligned}
S_1 &= a_1 \\
S_2 &= a_1 + a_2 = \sum_{k=1}^{2} a_k \\
S_3 &= a_1 + a_2 + a_3 = \sum_{k=1}^{3} a_k \\
&\vdots \\
S_n &= a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k
\end{aligned}$$

Barisan $(S_n)$ disebut jumlah parsial ke n deret. Deret $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ dikatakan konvergen dengan jumlah S jika barisan $(S_n)$ konvergen ke S, yaitu:

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} a_k := \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k$$

Jika barisan $S_n$ tidak konvergen maka deret $\sum\limits_{k=1}^{\infty}$ disebut divergen. Atau dengan kata lain jika terdapat sebuah nilai yang unik, maka deret tersebut dikatakan **Konvergen** terhadap jumlah S. Jika tidak terdapat jumlah yang unik, maka deret tersebut dikatakan **Divergen**.

Sebelum masuk pada pendalaman teori lebih lanjut, perhatikan pengaruh suku-suku $(a_k)$. Agar deret konvergen maka suku-suku ini haruslah menuju nol, ini merupakan syarat perlu bagi suatu deret konvergen. Tetapi sebaliknya, jika $a_k$ tidak menuju nol maka deret dipastikan divergen. Bayangkan apa yang terjadi kalau kita menjumlahkan tak terhingga banyak bilangan tak nol meskipun nilainya super kecil, tentulah hasilnya tak terhingga atau divergen.

### 3.2.1 Fakta-Fakta Fundamental Menyangkut Deret Tak Terhingga

Berikut merupakan beberapa fakta mengenai deret tak terhingga:

1. Jika $\sum u_n$ konvergen, maka $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$. Akan tetapi, kebalikannya tidak selalu benar, yaitu jika $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$, maka $\sum u_n$ mungkin konvergen atau, mungkin tidak konvergen. Selanjutnya, jika suku ke-n dari deret tidak mendekati nol maka deret tersebut adalah divergen.
2. Perkalian dari setiap suku dari deret dengan sebuah konstanta yang bukan nol tidak mempengaruhi konvergensi atau divergensi.
3. Penghilangan (atau penambahan) sejumlah terhingga suku dari (atau ke) deret tidak mempengaruhi konvergensi atau divergensi.

### 3.2.2 Beberapa Bentuk Deret Sederhana

**Deret Konvergen**
**Contoh** Tunjukkan bahwa deret

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k}$$

konvergen. Perhatikan jumlahan parsial berikut

$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{1}{2^1} = \frac{1}{2} \\ S_2 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \\ S_3 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{7}{8} \\ &\vdots \\ S_n &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + ... + \frac{1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2^n} \end{aligned}$$

Berdasarkan definisi jumlah deret tak terhingga diperoleh:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) = 1$$

**Deret Divergen**
Kita tunjukkan deret

$$\Sigma_{k=1}^{\infty}(-1)^k$$

divergen. Diperhatikan bahwa deret ini dapat diekspansi sebagai berikut

$$\Sigma_{k=1}^{\infty}(-1)^k = -1 + 1 - 1 + 1 - ...$$

sehingga jumlah parsialnya diperoleh

$$S_n := \begin{cases} -1 & \text{jika n ganjil} \\ 0 & \text{jika n genap} \end{cases}$$

karena $S_n$ tidak mempunyai limit (divergen) maka disimpulkan deret $\Sigma_{k=1}^{\infty}(-1)^k$ juga divergen.

**Deret Teleskoping** Kita tunjukkan deret

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 + k}$$

konvergen. Dengan menggunakan pecahan parsial kita dapat menyajikan

$$a_k = \frac{1}{k^2 + k} = \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} + \frac{-1}{k+1}$$

Jadi, jumlah parsial n sukunya dapat disajikan sebagai berikut

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2 + k} = \sum_{k=1}^{n} \left( \frac{1}{k} + \frac{-1}{k+1} \right) \\ &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + ... + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \\ &= 1 + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\right) + ... + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n+1} \\ &= 1 - \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

Jadi, jumlah deret adalah

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2+k} = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)$$

Pada deret teleskoping ini, sebagian besar suku-sukunya saling menghilangkan kecuali suku awal dan suku akhirnya sehingga rumus jumlah parsial $S_n$ mempunyai bentuk yang sederhana.

**Deret Geometri** Deret geometri mempunyai bentuk umum

$$\sum_{k=1}^{\infty} ar^{k-1} := a + ar + ar_2 + ar_3 + ...$$

dengan a disebut suku pertama dan r disebut rasio. Diperhatikan jumlah parsial deret geometri ini

$$S_n := a + ar + ar_2 + ar_3 + ... + ar^{n-1}$$

Selanjutnya, dengan mengalikan kedua ruas dengan r, diperoleh

$$rS_n = ar + ar_2 + ar_3 + ... + ar^{n-1} + ar^n$$

Bila kedua kesamaan ini dikurangkan maka akan diperoleh:

$$S_n - rS_n = a - ar^n \Leftrightarrow (1-r)S_n = a(1-r^n) \Leftrightarrow S_n = \frac{a(1-r^n)}{(1-r)}$$

Sekarang kita amati nilai $S_n$ untuk $n \to \infty$). Bila r = 1 maka $S_n$ tidak terdefinisi karena muncul pembagian dengan nol. Jika $r > 1$ maka suku $r^n \to \infty$ dan $(1-r^n) \to -\infty$ sehingga $S_n$ tidak konvergen. Demikian juga bila $r < -1$ maka $S_n$ tidak konvergen. Sekarang, bila $-1 < r < 1$ maka $r^n \to 0$ sehingga

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a(1-r^n)}{(1-r)} = \lim_{n\to\infty} \frac{a(1-0)}{(1-r)} = \frac{a}{(1-r)}$$

Jadi deret geometri konvergen jika $|r| < 1$ dengan jumlah

$$S = \frac{a}{(1-r)}$$

**Latihan** Sederhanakan bentuk jumlah parsial $S_n$ sehingga tidak memuat lambang $\Sigma$ lagi. Bila deret ini konvergen, hitunglah jumlahnya

1. $\sum_{k=2}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{k}}-\frac{1}{\sqrt{k+1}}\right)$
2. $\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{(k+1)(k+2)}\right)$

### 3.2.3 Kekonvergenan Deret Tak Berhingga

Dua pertanyaan yang berkaitan dengan deret tak berhingga $\sum_{k=1}^{\infty}$ adalah

1. Apakah deret konvergen
2. Bila konvergen, berapakah jumlahnya.

Kecuali deret-deret khusus seperti yang telah diberikan sebelumnya, untuk mengetahui kekonvergenan suatu deret bukanlah pekerjaan yang mudah. Bahkan, deret yang sudah dipastikan konvergen tidaklah terlalu mudah untuk mendapatkan jumlahnya. Pendekatan numerik biasanya digunakan untuk menentukan jumlah deret secara aproksimasi. Namun, ada kasus dimana visualisasi numerik tidak dapat memerikan gambaran apapun tentang kekonvergenan deret tak berhingga. Sebagai contoh, perhatikan contoh berikut

**Contoh** Diberikan deret

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$$

Selidikilah kekonvergenan deret ini.

Untuk melihat secara intuitif dan visualisasi jumlah deret ini, kita perhatikan jumlah parsial ke n

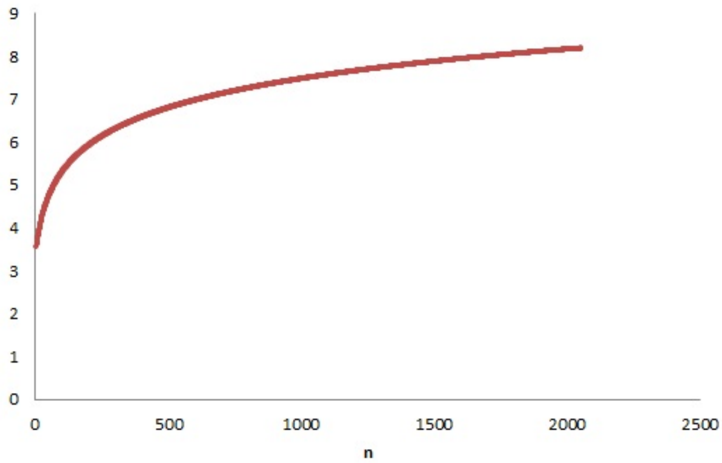
$$S_n := 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}$$

Komputasi numerik memberikan data sebagai berikut:

$S_{10} = 2,9290, S_{100} = 5,1874, S_{1000} = 7,4855$

Terlihat bahwa kenaikan jumlah parsialnya sangat lambat sehingga berdasarkan

data ini "seolah-olah" jumlah deret akan menuju bilangan tertentu atau konvergen.
**Penyelesaian**




Dilihat dari polanya, suku-suku pada deret ini yaitu $a_k = \frac{1}{k}$ semakin mengecil dan menuju nol. Walaupun demikian, belumlah menjamin bahwa jumlahnya konvergen ke bilangan real tertentu. Diperhatikan

$$
\begin{aligned}
S &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + ... \\
&= 1 = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + ... \\
&> 1 + + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) + ... \\
&= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + ... \\
&= 1 + \frac{1}{2}(1 + 1 + 1 + ...) \\
&= \infty
\end{aligned}
$$

Karena $S > 1 + \frac{1}{2}(1 + 1 + 1 + ...)$ dan ruas kanannya menuju $\infty$ maka disimpulkan deret ini divergen.

## 3.3 Uji Konvergensi dan Divergensi Suatu Deret Konstanta

Ketika bekerja dengan deret, seringkali kita tidak dapat memperoleh nilai eksak dari sebuah deret takterhingga. Sehingga, pencariannya berubah menjadi pencarian informasi mengenai deret. Secara khusus, konvergensi atau divergensinya menjadi pertanyaan. Uji-uji berikut ini membantu mendapatkan informasi tentang kekonvergenan atau kedivergenan suatu deret.

### 3.3.1 Uji Integral

Deret yang mempunyai suku-suku positif menjadi bahasan pada uji integral ini. Uji integral ini menggunakan ide dimana suatu integral didefinisikan melalui bentuk jumlahan. Memang, kedua notasi $\Sigma$ dan $\int$ ini mempunyai kaitan yang erat.

**Teorema**

Jika $a_k = f(k)$ dimana $f(x)$ fungsi positif, kontinu dan turun pada $x \geq 1$ maka kedua ekspresi berikut

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \; dan \int_1^{\infty} f(x)dx$$

sama-sama konvergen atau sama-sama divergen.

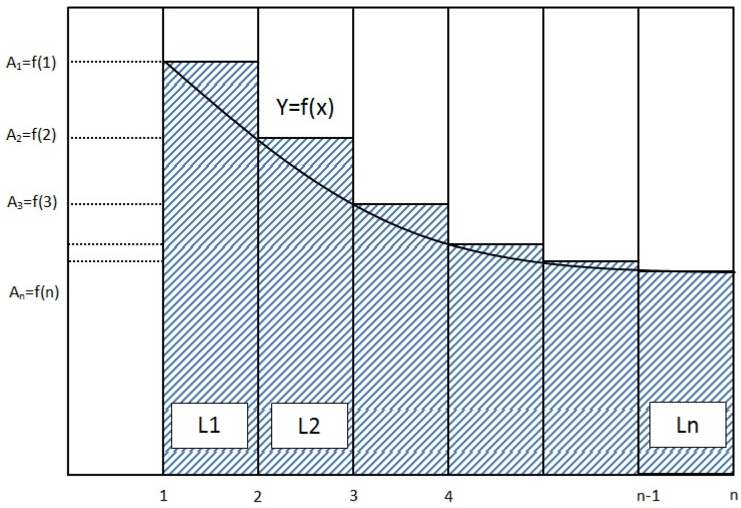
**Bukti**

Perhatikan ilustrasi grafik berikut ini  Luas persegipanjang pada gambar di atas adalah

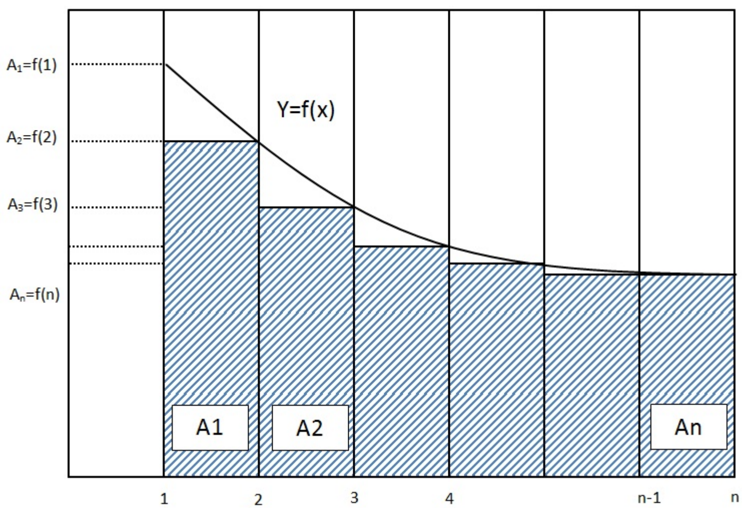
$$L1 = A1, L2 = A2, ...., LN = A_{n-1}$$

Luas persegipanjang pada gambar dibawah adalah

$$A1 = a1, A2 = a2, ...., AN = an$$




Gambar 3.1: Jumlah Atas Luas Persegipanjang




Gambar 3.2: Jumlah Bawah Luas Persegipanjang

Luas daerah yang dibatasi oleh kurva $y = f(x)$ dari $x = 1$ sampai dengan $x = n$ adalah

$$I_n = \int_1^n f(x)dx$$

Dari ketiga luasan tersebut berlaku hubungan

$$A1 + A2 + A3 + ... + An \leq I_n \leq L1 + L2 + L3 + ... + Ln$$
$$\Rightarrow a_2 + a_3 + a_4 + ... + a_n \leq I_n \leq a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + ... + a_{n-1}$$

Jadi,

$$S_n - a_1 \leq I_n \leq S_n - a_n \tag{3.1}$$

Misalkan integral $\int_1^\infty f(x)dx < \infty$ (konvergen), maka berdasarkan persamaan di atas didapatkan

$$\int_1^\infty f(x)dx := \lim_{n\to\infty} I_n \geq \lim_{n\to\infty} S_n - a_1$$

dan

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} a_k := \lim_{n\to\infty} S_n \leq \int_1^\infty f(x)dx + a_1 < \infty$$

Sebaliknya, jika deret $\sum_{k=1}^\infty a_k$ konvergen maka $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ dan berdasarkan (3.1) diperoleh

$$\int_1^\infty f(x)dx := \lim_{n\to\infty} I_n \leq \lim_{n\to\infty} (S_n - a_n) = S - 0 < \infty$$

Selanjutnya, kedivergenan kedua ekspresi ini juga didasarkan pada ketidaksamaan (3.1) dan dapat dilakukan dengan cara yang sama seperti diatas.

**Contoh**

Lakukan uji integral untuk melihat bahwa deret $S = \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k}$ divergen.

**Penyelesaian**

Diambil $f(x) := \frac{1}{x}, x \geq 1$. Fungsi $f(x)$ kontinu, positif dan turun pada $x \geq 1$ dan

$f(k) = \frac{1}{k}$. Selanjutnya,

$$\int_1^{\infty} f(x)dx = \int_1^{\infty} \frac{1}{x}dx = lnx|_1^{\infty} = ln\infty - ln1 = \infty(divergen)$$

Deret $S = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ disebut **Deret Harmonik**. Lebih umum, deret harmonik diperumum menjadi **Deret-p**, Seperti pada contoh berikut

**Contoh**

Tentukan harga p agar deret-p berikut $S = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}$ konvergen. **Penyelesaian**

Diambil $f(x) = \dfrac{1}{x_p}, x \geq 1$. Fungsi $f(x)$ kontinu, positif, turun pada $x \geq 1$ dan $f(k) = \frac{1}{k^p}$. Telah diperoleh pada Bab Integral Tak Wajar bahwa

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p}dx = \begin{cases} \dfrac{1}{p-1}, p > 1 \\ divergen, p \leq 1 \end{cases}$$

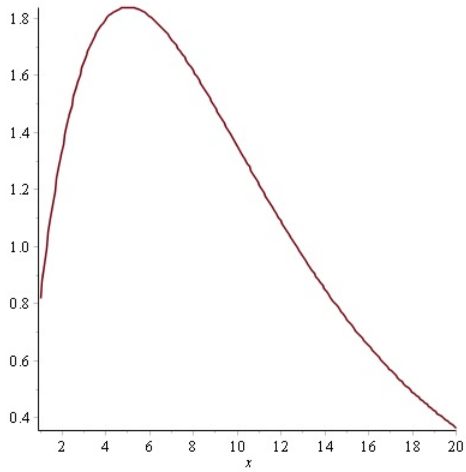
Oleh karena itu deret $S = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}$ konvergen untuk $p > 1$ Jika diperhatikan pada integral diatas maka Teorema Uji Integral dimulai dari $x = 1$. Dalam kasus batas ini lebih dari 1 maka teorema ini tetap berlaku. Untk kasus ini kita harus menentukan nilai $b > 1$ sehingga fungsi $f(x)$ positif, kontinu dan turun untuk $x > b$. Secara sederhana hasil ini dikaitkan pada kenyataan bahwa kekonvergenan suatu deret tidak ditentukan oleh sejumlah berhingga suku-suku awal tapi ditentukan oleh takberhingga banyak suku-suku dibelakangnya.

**Contoh**

Ujilah kekonvergenan deret berikut $\Sigma_{k=1}^{\infty} \dfrac{k}{e^{k/5}}$, dan jika konvergen hitunglah jumlahnya secara aproksimasi.

**Penyelesaian**

Bila diambil fungsi $f(x) = \frac{x}{e^{x/5}}$ maka fungsi ini positif dan kontinu untuk $x > 0$. Tetapi sifat turunnya belum dapat dipastikan. Diperhatikan grafiknya pada gambar berikut Berdasarkan gambar tersebut, fungsi $f(x) = \frac{x}{e^{x/5}}$ pada awalnya naik kemudian turun terus. Untuk memastikan titik dimana fungsi mulai turun, digunakan




Gambar 3.3: Grafik Fungsi f(x)

materi pada kalkulus elementer, $f$ turun jika dan hanya jika $f'(x) < 0$.

$$f'(x) = e^{-x/5} - x\left(\frac{1}{5}e^{-x/5}\right) < 0$$
$$\Leftrightarrow e^{-x/5}(1 - x/5) < 0$$

Karena $e^{-x/5} \neq 0$ maka diperoleh harga nolnya, $(1 - x/5) = 0 \Leftrightarrow x = 5$. jadi fungsi $f(x)$ turun untuk $x > 5$. Selanjutnya, kekonvergenan deret diperiksa dengan menghitung integral tak wajar.

$$\int_5^\infty xe^{-x/5}dx$$

Dengan menggunakan definisi integral tak wajar, dan teknik integrasi parsial diperoleh

$$\begin{aligned}
\int_5^\infty xe^{-x/5}dx &= \lim_{T\to\infty}\int_5^T xd(-5e^{-x/5}) \\
&= \lim_{T\to\infty}\left(-5xe^{-x/5}|_5^T - \int_5^\infty -5e^{-x/5}dx\right) \\
&= \lim_{T\to\infty}\left(-5xe^{-x/5} - 25e^{-x/5}\right)|_5^T \\
&= \lim_{T\to\infty}\left(-5Te^{-T/5} - 25e^{T/5} + 25e^{-1} + 25e^{-1}\right) \\
&= -5\lim_{T\to\infty}\frac{T+5}{e^{T/5}} + \lim_{T\to\infty}\frac{50}{e} \\
&= -5\lim_{T\to\infty}\frac{1}{\frac{1}{5}e^{T/5}} + \frac{50}{e} \\
&= 0 + \frac{50}{e} < \infty
\end{aligned}$$

Karena integral tak wajat ini konvergen maka disimpulkan deret di atas juga konvergen.

## 3.4 Uji Komparasi

ada dua macam uji komparasi, yaitu uji komparasi langsung dan uji limit komparasi' Ide pada uji ini adalah membandingkan suatu deret dengan deret lain yang konvergen, juga dengan deret lain yang divergen.

### 3.4.1 Uji Komparasi Langsung

**Teorema Uji Komparasi Langsung**
Misalkan ada dua deret tak berhingga $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ dan $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ dengan $0 \leq a_k \leq b_k$ untuk setiap $k \geq N, N$ suatu bilangan asli.

i. Jika deret $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ konvergen maka deret $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergen

ii. Jika deret $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ divergen maka deret $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ divergen

**Bukti**

i. Karena $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ konvergen maka $\sum_{k=1}^{\infty} b_k < \infty$. Selanjutnya

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{N-1} a_k + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \leq \sum_{k=1}^{N-1} a_k + \sum_{k=1}^{\infty} b_k < \infty \tag{3.2}$$

yang berarti deret $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergen

ii. Karena $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ divergen dan $a_k \geq 0$ maka $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \infty$ sehingga

$$\sum_{k=N}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_k - \sum_{k=1}^{N-1} a_k = \infty \tag{3.3}$$

Akhirnya didapat,

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k = \sum_{k=1}^{N-1} b_k + \sum_{k=N}^{\infty} b_k \geq \sum_{k=1}^{N-1} b_k + \sum_{k=N}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{N-1} b_k + \infty = \infty \tag{3.4}$$

yang berarti deret $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ divergen

Untuk menggunakan uji ini dibutuhkan deret lain sebagai pembanding. pekerjaan memilih deret yangtepat yang akan digunakan sebagai bahan perbandingan tidaklah sederhana, sangat bergantung dari pengalaman. Namun dua deret penting yaitu deret p dan deret geometri sering digunakan sebagai deret pembanding.

**Contoh**

Ujilah kekonvergenan deret

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{(k+2)2^k}$$

**Penyelesaian**

$$a_k = \frac{k}{(k+2)2^k} = \frac{k}{k+2}\left(\frac{1}{2}\right)^k \leq \left(\frac{1}{2}\right)^k$$

m Diambil $b_k = \left(\dfrac{1}{2}\right)^k$. Diperhatikan bahwa $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\dfrac{1}{2}\right)^k$ merupakan deret geometri yang konvergen sebab r = 1/2. jadi, deret $\sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{k}{(k+2)2^k}$ juga konvergen. Dengan menggunakan pendekatan numerik diperoleh jumlah deret secara aproksimasi adalah 0,4548 (Silahkan cek)

**Latihan** Gunakan uji integral untuk mengetahui kekonvergenan deret di bawah ini. Bila konvergen, tentukan nilai untuk aproksimasi jumlahnya

1. $\sum_{k=2}^{\infty} \dfrac{1}{(2+3k)^2}$.
2. $\sum_{k=2}^{\infty} \dfrac{lnk}{k}$.

### 3.4.2 Uji Limit Komparasi

**Teorema Uji Limit Komparasi**

Misalkan $a_k > 0$ dan $b_k > 0$ untuk k cukup besar, diambil

$$I := \lim_{k\to\infty} \frac{a_k}{b_k}$$

Jika $0 < L < \infty$ maka kedua deret $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ dan $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ sama-sama konvergen atau sama-sama divergen.

Untuk melakukan uji ini dalam menguji kekonvergenan deret $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ dilakukan prosedur sebagai berikut:

1. Temukan deret $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ yang sudah diketahui sifat kekonvergenannya, dan bentuk suku-sukunya $b_k$ "mirip" dengan $a_k$
2. Hitunglah limit $L = \lim_{k\to\infty} \dfrac{a_k}{b_k}$, pastikan nilainya positif.
3. Sifat kekonvergenan deret $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ akan sama dengan deret $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$

Dalam kasus dimana L = 0 maka pengujian dengan alat ini dinyatakan gagal, sehingga harus dilakukan dengan uji yang lain.

**Latihan**

Lakukan uji komparasi limit untuk mengetahui sifat kekonvergenan deret, nila konvergen, hitunglah jumlahnya secara aproksimasi

a. $\sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{3k+2}{\sqrt{k}(3k-5)}$

b. $\sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k\sqrt{k}}$

c. $\sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt{2k+3}}$

d. $\sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt{k}k^2}$

## 3.5 Uji Rasio

Secara intuitif, deret $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ dengan suku-suku positif akan konvergen jika kekonvergenan barisan $a_k$ ke nol cukup cepat. Bandingkan kedua deret ini

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} dan \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$

Telah diketahui bahwa deret pertama divergen sedangkan deret kedua konvergen. Faktanya, kekonvergenan barisan $\dfrac{1}{k^2}$ menuju nol lebih cepat dari barisan $\dfrac{1}{k}$. Selain daripada itu, untuk mengukur kecepatan konvergensi ini dapat diperhatikan pola rasio $a_{k+1}/a_k$ untuk k cukup besar. Ide ini merupakan dasar pembentukan uji rasio, seperti pada teorema berikut ini

**Teorema**

Diberikan deret $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ dengan $a_k > 0$, dan dihitung

$$L = \lim_{k \to \infty} \frac{a_{k+1}}{a_k}$$

diperoleh hasil pengujian sebagai berikut:

1. Jika $L < 1$ maka deret $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergen
2. Jika $L > 1$ atau $L = \infty$ maka deret $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ divergen
3. L = 1 maka pengujian gagal (tidak dapat diambil kesimpulan)

**Contoh**
Dengan menggunakan uji rasio, ujilah kekonvergenan deret berikut

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^k}{k!}$$

**Penyelesaian**
Karena $a_k = \dfrac{k^k}{k!}$ maka diperoleh

$$\begin{aligned}
L &= \lim_{k\to\infty} \frac{k^k}{k!} \\
&= \lim_{k\to\infty} \frac{\dfrac{(k+1)^{k+1}}{(k+1)!}}{\dfrac{k^k}{k!}} \\
&= \lim_{k\to\infty} \frac{(k+1)^{k+1}}{(k+1)!} \frac{k^k}{k!} \\
&= \lim_{k\to\infty} \frac{(k+1)^k}{k^k} \\
&= \lim_{k\to\infty} \frac{(k+1)^k}{k^k} \\
&= \lim_{k\to\infty} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k = e \approx 2,7183
\end{aligned}$$

**Latihan**
Dengan menggunakan uji rasio, ujilah kekonvergenan deret berikut

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^2 2^{-k}$$

# 3.6 Uji Akar

Pada bahasan sebelumnya kita dapatkan bahwa $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$ belumlah menjamin bahwa deret konvergen, karena dapat saja deret tersebut divergen. Pada uji akar ini akan dilihat kekonvergenan deret melalui suku-suku $\sqrt[k]{a_k}$. **Teorema**

Diberikan deret $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ dengan $a_k \geq 0$ dan dihitung

$$L = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k}$$

diperoleh hasil pengujian sebagai berikut:

1. Jika $L < 1$ maka deret $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergen
2. Jika $L > 1$ atau $L = \infty$ maka deret $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ divergen
3. L = 1 maka pengujian gagal (tidak dapat diambil kesimpulan)

**Latihan** Gunakan uji akar untuk mengetahui apakah deret

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^{-k^2}$$

konvergen. Bila konvergen, aproksimasikan jumlahnya. Pemilihan uji merupakan masalah tersendiri yang juga membutuhkan pengalaman agar tepat memilih uji mana yang akan dipakai. Namun, dari beberapa contoh sebelumnya, uji rasio lebih cocok digunakan pada deret yang suku-sukunya memuat eksponen dan faktorial. Sedangkan uji akar lebih cocok untuk deret dengan suku-suku memaut pangkat k.
**Latihan** Gunakan uji rasio atau uji akar untuk mengetahui kekonvergenan deret dibawah ini, jika konvergen hitung nilainya.

a. $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k}{3k+1}\right)^k$

b. $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k^5+100}{k!}\right)$

c. $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k!}{2^k}\right)$

## 3.7 Deret Ganti Tanda

Pada bagian sebelumnya, uji konvergensi hanya diperuntukkan deret dengan suku-suku positif. Pada kenyataannya, terdapat deret yang suku-sukunya kadang positif dan kadang negatif. Deret seperti ini disebut deret berganti tanda. Istilah lainnya adalah deret alternating, deret bergoyang, dan mungkin masih ada istilah yang lainnya. Bentuk umum deret alternating ini adalah

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k a_k = -a_1 + a_2 - a_3 + ...$$

atau

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1} a_k = a_1 - a_2 + a_3 - ...$$

dimana $a_k > 0$
Pada deret dengan suku-suku positif, informasi bahwa $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$ belumlah cukup digunakan untuk mengetahui kekonvergenan deret $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, namun pada deret alternating informasi ini sangat berarti seperti diungkapkan pada teorema berikut.
**Teorema** Diberikan deret alternating $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k a_k$ atau $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1} a_k$ jika dipenuhi kedua syarat berikut:

1. $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$
2. barisan $a_k$ menurun, yaitu $a_{k+1} < a_k$

**Contoh** Periksalah apakag deret alternating berikut $\sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^k}{k}$ konvergen.
**Penyelesaian** Disini $a_k = \frac{1}{k}$. Jelas barisan $a_k$ menurun sebab,

$$a_{k+1} = \frac{1}{k+1} < \frac{1}{k} = a_k \qquad (3.5)$$

diperoleh juga

$$\lim_{k\to\infty} a_k = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} = 0$$

Karena kedua syarat di atas dipenuhi maka disimpulkan deret ini konvergen dengan aproksimasi -0,6924
Salah satu kelebihan deret alternating adalah bilamana deret alternating konvergen maka estimasi error dapat diperoleh dengan sederhana.

**Teorema** Misalkan deret alternating

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k a_k \; atau \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1} a_k$$

konvergen dengan jumlah S. Jika $S_n$ adalah jumlah parsial ke n maka

$$|S - S_n| < a_{n+1}$$

**Contoh** Diberikan deret alternating

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{lnk}{k}$$

Buktikan bahwa deret ini konvergen

**Penyelesaian**

$a_k = \dfrac{lnk}{k}$ dengan menggunakan aturan L'Hospital diperoleh

$$\lim_{k\to\infty}\frac{lnk}{k} = \lim_{k\to\infty}\frac{1/k}{1} = 0$$

Untuk mengetahui pola turun pada suatu fungsi gunakan $f'(x) < 0$ sehingga diperoleh

$$f'(x) = \frac{(1/x)x - ln(x)(1)}{x_2} = \frac{1 - ln(x)}{x_2} < 0 \to 1 - ln(x) < 0 \to lnx > 1$$

sehingga fungsi turun jika $x < e$. Karena $e < 3$ maka berlaku $a_{k+1} < a_k$ untuk k = 3,4,5, ... Jadi terbukti deret alternating ini konvergen.

**Latihan**

Apakah deret alternating ini konvergen

1.

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2^k(k+1)}$$

## 3.8 Deret Pangkat

Kalau sebelumnya, suku suku pada deret tak berujung berupa bilangan real maka kali ini kita kembangkan suku sukunya dalam variabel x. Suatu deret tak berujung yang berbentuk

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-c)^k = a_0 + a_1(x-c) + a_2(x-c)^2 + a_3(x-c)^3 + ...$$

Disebut deret pangkat (power series) dalam (x c). di sini c adalah suatu konstanta dan $a_1, a_2, a_3, ...$ disebut koefisien deret pangkat. Khusus c = 0, kita peroleh deret pangkat berikut

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = a_0 + a_1 x + a_2(x)^2 + a_3(x)^3 + ...$$

Jadi, jumlah parsial ke n deret pangkat berbentuk polinomial derajat n sebagai berikut

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = a_0 + a_1 x + a_2(x)^2 + a_3(x)^3 + ... + a_n x^n$$

### 3.8.1 Kekonvergenan Deret Pangkat

Kekonvergenan deret pangkat (1) bergantung pada nilai x yang diberikan. Kali ini kita akan menentukan himpunan semua x sehingga deret pangkat (1) konvergen. Untuk sederhananya diambil kasus untuk c = 0. Sebelumnya diperhatikan tiga contoh berikut

**Contoh** Selidikilah kekonvergenan deret pangkat berikut

a. $\sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{x^k}{k!}$

b. $\sum_{k=1}^{\infty} k!x^k$

c. $\sum_{k=1}^{\infty} x^k$

**Penyelesaian**:

a. Akan digunakan uji rasio mutlak, dan diperoleh

$$L = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{x^{k+1}}{(k+1)!}.\frac{k!}{x^k}\right| = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{x^{k+1}}{(k+1)k!}.\frac{k!}{x^k}\right| = \lim_{k\to\infty}\frac{|x|}{k+1} = 0$$

Karena nilai L = 0 < 1 untuk setiap x maka deret ini konvergen untuk setiap bilangan real

b. Dengan cara yang sama seperti prosedur pada bagian a, maka diperoleh

$$L = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{(k+1)k!x^k x}{k!x^k}\right| = \lim_{k\to\infty}(k+1)\,|x|$$

Diperhatikan dengan seksama bahwa bila x = 0 maka limit ini bernilai 0, sedangkan untuk x $\neq$ 0 limit ini bernilai $\infty$. Jadi deret ini hanya konvergen pada x = 0.

c. Ini adalah deret geometri dengan rasio x. Jadi, deret ini konvergen jika $-1 < x < 1$

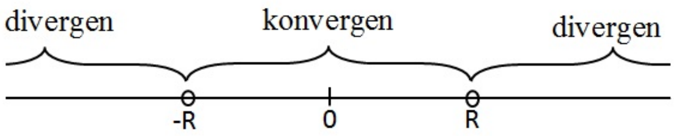
Ketiga fakta ini didasarkan pada sifat kekonvergen deret pangkat seperti diungkapkan pada teorema berikut.
**Teorema** Setiap deret pangkat $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ pasti memenuhi salah satu sifat berikut

- Deret konvergen untuk setiap bilangan real x
- Deret hanya konvergen di x = 0
- Terdapat R > 0 sehingga deret konvergen pada $-R < x < R$ dan divergen pada $x < -R$ dan $x > R$.

Pada kasus terakhir, bilangan R ini biasa disebut radius kekonvergenan dan interval (-R,R) disebut interval konvergensi. Sedangkan, kekonvergenan di titik batas x = -R dan x = R harus diselidiki tersendiri. Kasus ketiga ini yang menjadi perhatian dalam pembahasan kekonvergenan deret pangkat. **Teorema** Misalkan $\sum a_k x^k$ suatu deret pangkat dan

$$L = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|$$

maka berlaku kriteria berikut




Gambar 3.4: Daerah Konvergensi

i. Jika L = $\infty$ maka deret hanya konvergen pada x = 0

ii. Jika L = 0 maka deret konvergen pada setaip bilangan real x

iii. Jika $0 < L < \infty$ maka deret konvergen mutlak pada $-R < x < R$ (atau $|x| < R$) dan divergen pada $x < -R$ dan $x > R$, dimana R = 1/L.

**Contoh** Tentukan daerah konvergensi deret

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}$$

**Penyelesaian**
Kita mempunyai $a_k = \frac{1}{k}$ Dengan menggunakan Teorema di atas diperoleh

$$L = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = \lim_{k\to\infty} \frac{k}{k+1} = 1$$

Jadi $R = \frac{1}{L} = 1$ dan deret pasti konvergen pada $-1 < x < 1$. Untuk x = -1 dan x = 1 diselidiki sebagai berikut

- Untuk x = -1 deret menjadi

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$$

yang merupakan deret alternating yang konvergen

- Untuk x = 1 deret menjadi

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$$

yang merupakan deret alternating yang divergen

**Contoh** Tentukan untuk x mana saja, deret $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\dfrac{k+1}{k}\right)^{k^2} x^k$ konvergen

**Penyelesaian**

Kita mempunyai $a_k = \left(\dfrac{k+1}{k}\right)^{k^2}$ dan didapatkan

$$L = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{\left(\frac{k+1}{k}\right)^{k^2}} = \lim_{k\to\infty}\left(\frac{k+1}{k}\right)^{k} = \lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k} = e$$

Karena $0 < L < \infty$ maka disimpulkan deret ini konvergen pada $-e^{-1} < x < e^{-1}$ dan divergen pada $x < -e^{-1}, x > e^{-1}$. Untuk $x = e^{-1}$ perlu diselidiki tersendiri. Uji akar memberikan hasil L = 1 sehingga diperlukan uji lainnya. Namun berdasarkan hasil observasi menggunakan MATLAB maka deret ini terindikasi divergen di titik $x = e^{-1}$ sebaliknya, di titik $x = -e^{-1}$ deret tersebut konvergen.

**Contoh** Untuk nilai x berapakah deret di bawah ini konvergen

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2^k(3k-1)}(x-1)^k$$

**Penyelesaian** Ini adalah deret pangkat dalam $(x-c)$, dengan c = 1. Kita mempunyai $a_k = \dfrac{k}{2^k(3k-1)}$ diperoleh

$$l = \lim_{k\to\infty} \frac{k+1}{2^{k+1}(3k+2)}.\frac{2^k(3k-1)}{k} = \lim_{k\to\infty}\left(\frac{k+1}{k}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{3k-1}{3k+2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)$$

Jadi deret konvergen pada $2 < x1 < 2$ atau $1 < x < 3$. Untuk deret x = -1 deret menjadi

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2^k(3k-1)}(-2)^k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{(3k-1)}(-1)^k$$

yang merupakan deret alternating divergen. Untuk x = 3, deret pangkat menjadi

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{3k-1}$$

yang juga divergen.

## 3.9 Diferensiasi dan Integrasi Deret Pangkat

Kita dapat mendiferensialkan dan mengintegralkan suku demi suku deret pangkat pada suatu daerah dimana deret tersebut konvergen. Jelasnya diungkap secara formal pada teorema berikut

**Teorema** Misalkan deret pangkat $\sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k$ konvergen pada $-R < x < R$. Jika diambil fungsi f yang didefinisikan sebagai

$$f(x) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k, x \in (-R, R)$$

maka

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1}$$

$$\int f(x)dx = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{k+1} x^{k+1} + C$$

Teorema ini mengatakan bahwa suatu fungsi yang didefinisikan dengan deret pangkat berkelakuan mirip polinomial, ia kontinu bahkan terdiferensial pada daerah interval konvergennya. Integral dan diferensialnya dapat diambil suku demi suku.

**Contoh** Misalkan fungsi f(x) didefinisikan sebagai

$$f(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} untuksetiapx \in R$$

Buktikan $f(x) = e^x$

**Penyelesaian** Diperhatikan bahwa deret pangkat $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ konvergen pada setiap bilangan real $x$. Jadi kita dapat melakukan diferensial suku demi suku sebagai berikut

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k!} x^{k-1} \\ &= 1 + \frac{2x}{2!} + \frac{3x^2}{3!} + \frac{4x^3}{4!} + ... \\ &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + ... \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = f(x) \end{aligned}$$

Jadi diperoleh $f'(x) = f(x)$. Fungsi dengan derivatif sama dengan aslinya tidak lain adalah $f(x) = Ce^x$ dengan C suatu konstanta. Dengan mengambil x=0 maka diperoleh $f(0) = 1$, dan di lain pihak berlaku $f(0) = Ce^0 = C$, jadi diperoleh C = 1. Jadi disimpulkan $f(x) = e^x$.

**Contoh** Dengan melakukan integral suku demi suku, buktikan

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k} = -ln(1-x) untuk -1 < x < 1$$

**Penyelesaian** Disini kita mempunyai

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k} = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + ...$$

Diperhatikan untuk $-1 < x < 1$, deret geometri berikut konvergen

$$1 + x + x^2 + x^3 + ... = \frac{1}{1-x}$$

Dengan mengintegralkan kedua ruas kesamaan ini diperoleh

$$\begin{aligned} \int (1 + x + x^2 + x^3 + ...)dx &= \int \frac{1}{1-x} dx \\ \Leftrightarrow x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + ... + C_1 &= -ln(1-x) + C_2 \end{aligned}$$

Dengan mnegambil $C_1 = C_2 = 0$, diperoleh bukti

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k} = -ln(1-x)$$

**Soal-soal Latihan**

Untuk soal-soal berikut tentukan semua nilai x sehingga deret pangkat konvergen di x.

1. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k+1} x^k$
2. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{5^k} (x-1)^k$
3. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k!)^2}{k^k} x^k$
4. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k k}{ln(k+2)} x^k$
5. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k(k+1)}{k+2} x^k$
6. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{(k+1)^2} (3x-4)^k$
7. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{(k+1)^2} (3x-4)^k$

## 3.10 Deret Taylor

Pada bagian sebelumnya kita telah melihat bahwa deret pangkat dapat dipandang sebagai fungsi polinomial tak berujung. Kali ini kita membahas secara khusus teknis penyajian fungsi ke dalam bentuk polinomial ini. Motivasi utama mengapa orang tertarik menyajikan fungsi dalam bentuk polinomial adalah dikarenakan polinomial merupakan fungsi yang sangat mudah di urus, misalnya ia bersifat kontinu, mudah dideferensialkan atau diintegralkan, mudah menentukan akar-akarnya, dan lain lain. Dasar utama penyajian fungsi ke dalam bentuk polinomial adalah Teorema Taylor yang disajikan berikut ini.

**Teorema Taylor** Jika $f(x)$ dan semua derivatifnya sampai tingkat n+1 ada di dalam suatu interval terbuka I yang memuat c maka untuk setiap $x \in I$ terdapat z diantara x dan c sehingga berlaku

$$f(x) = f(c) + \frac{f'(c)}{1!}(x-c) + \frac{f"(c)}{2!}(x-c)^2 + ... + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n + R_n(x)$$

dengan $R_n(x)$ diberikan oleh

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!}(x-c)^{n+1}$$

Suku $R_n(x)$ dalam teorema ini disebut sebagai suku sisa. Jadi fungsi $f(x)$ dapat disajikan sebagai

$$f(x) = P_n(x) = f(c) + \frac{f'(c)}{1!}(x-c) + \frac{f"(c)}{2!}(x-c)^2 + ... + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n$$

Polinomial $P_n$ ini diambil sebagai aproksimasi fungsi $f$. Dalam penerapannya begitu fungsi dibawa ke dalam bentuk polinomial maka segala data yang diperlukan dari fungsi tersebut diambil melauli polinomial aproksimasinya. Cara lain yang biasa digunakan adalah dengan menggunakan polinomial interpolasi.
Ketika menggunakan Teorema Taylor, nilai z pada suku sisa $R_n(x)$ tidak harus diperoleh secara eksak karena ia hanya dibutuhkan untuk mengestimasi batas atas dari $|R_n(x)|$
**Definisi** Misalkan ada interval terbuka I yang memuat c, kemudian fungsi f dan semua derivatifnya ada pada I maka deret tak berujung

$$f(c) + \frac{f'(c)}{1!}(x-c) + \frac{f"(c)}{2!}(x-c)^2 + ... + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n + ...$$

disebut deret taylor fungsi f di sekitar c.
Kasus khusus dimana c = 0 disebut deret MacLaurin, yaitu:

$$f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f"(0)}{2!}x^2 + ... + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + ...$$

Jadi deret taylor merupakan bentuk khusus dari deret pangkat. Representasi fungsi dalam deret pangakt adalah tunggal, artinya kita hanya mempunyai satu macam deret pangkat yang merepresentasikan fungsi f.
**Contoh**

Tentukan deret MacLaurin dari fungsi $f(x) = cos\ x$

**Penyelesaian** kita tahu bahwa fungsi $f(x) = cos\ x$ terdiferensial sampai order berapapun di x = 0, sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} f(x) &= cosx \to f(0) = 1 \\ f'(x) &= -sinx \to f'(0) = 0 \\ f"(x) &= -cosx \to f"(0) = -1 \\ f'''(x) &= sinx \to f'''(0) = 0 \\ &\vdots \end{aligned}$$

dan seterusnya sehingga diperoleh deret McLaurin fungsi $f(x)$ adalah:

$$cos\ x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + ... = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

Polinomial McLaurin diperoleh dengan mengambil sebanyak berhingga suku-suku deret McLaurin ini digunakan sebagai aproksimasi fungsi $f(x) = cos\ x$, kita ambil beberapa suku berikut

$$\begin{aligned} M_1(x) &= 1 \\ M_2(x) &= 1 - \frac{x^2}{2!} \\ M_3(x) &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \\ M_4(x) &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} \end{aligned}$$

**Contoh**

Gunakan polinomial MacLaurin $M_4(x)$ untuk mengaproksimasi fungsi $f(x) = e^x$

**Penyelesaian** Dengan prosedur seperti di atas, kita peroleh ekspansi sebagai berikut

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!}$$

adalah polinomial MacLaurin yang akan digunakan untuk mengaproksimasi fungsi $f(x) = e^x$ dengan sisanya berbentuk

$$R_n(x) = \frac{e^z}{5!}x^5$$

dengan z suatu bilangan diantara 0 dan x. Khusus untuk x = 1 maka akan memberikan sisa

$$R_n(1) = \frac{e^z}{5!}1^5 = \frac{e^z}{120}$$

Karena z diantara 0 dan 1 maka $e^z < e^1 \approx 2,7183 < 3$. Diperoleh batas sisa sebagai berikut

$$R_n(1) = \frac{e^z}{120} < \frac{3}{120} = 0,025$$

Ini berarti kesalahan aproksimasi nilai $e^1 = e$ Oleh $M_4(1) = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1^2}{2!} + \frac{1^3}{3!} + \frac{1^4}{4!} = 2,7081$ tidak melebihi 0,0250.

## 3.11 Deret Binomial

Kita telah mengenal Rumus Binomial. Untuk bilangan bulat positif p, yaitu

$$(1+x)^p = 1 + \binom{p}{1}x + \binom{p}{2}x^2 + \binom{p}{3}x^3 + \binom{p}{4}x^4 + ... + \binom{p}{p}x^p$$

dimana

$$\binom{p}{k} = \frac{p!}{k!(p-k)!} = \frac{p(p-1)(p-2)...(p-k+1)}{k!}$$

Perhatikan bahwa jika kita mendefinisikan ulang $\binom{p}{k}$ menjadi

$$\binom{p}{k} = \frac{p(p-1)(p-2)...(p-k+1)}{k!}$$

Maka $\binom{p}{k}$ masuk akal untuk sebarang bilangan real p, asalkan k adalah bilangan bulat positif. Tentu saja, jika p adalah bil angan bulat positif , maka definisi kita yang baru direduksi menjadi $\dfrac{p!}{k!(p-k)!}$

**Teorema Deret Binomial**

Untuk sebarang bilangan real p dan untuk $|x| < 1$

$$(1+x)^p = 1 + \binom{p}{1}x + \binom{p}{2}x^2 + \binom{p}{3}x^3 + \binom{p}{4}x^4 + ...$$

**Contoh** Representasikan $(1-x)^{-2}$ dalam deret McLaurin untuk $|x| < 1$

**Penyelesaian**

Berdasarkan Teorema Deret Binomial sehingga didapatkan

$$\begin{aligned}(1+x)^{-2} &= 1 + \frac{-2}{1!}x + \frac{(-2)(-3)}{2!}x^2 + \frac{(-2)(-3)(-4)}{3!}x^3 + ... \\ &= 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + ...\end{aligned}$$

sehingga

$$(1+x)^{-2} = 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + ...$$

Representasikan $\sqrt{1+x}$ dalam deret McLaurin dan gunakan deret ini untuk menghampiri $\sqrt{1,1}$ sampai lima tempat desimal.

**Penyelesaian**

Berdasarkan teorema Deret Mc Laurin didapatkan

$$\begin{aligned}(1+x)^{\frac{1}{2}} &= 1 + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)}{1!}x + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)}{2!}x^2 + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)}{3!}x^3 + ... \\ &= 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + ...\end{aligned}$$

Jadi

$$\begin{aligned}\sqrt{1,1} &= 1 + \frac{0,1}{2} - \frac{0,01}{8} + \frac{0,001}{16} - \frac{5(0,0001)}{128} + ... \\ &= 1,04881\end{aligned}$$

**Contoh**
Hitunglah

$$\int_0^{0,4} \sqrt{1+x^4}dx$$

sampai lima desimal
**Penyelesaian** Dari contoh sebelumnya didapatkan

$$(1+x^4)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{8}x^8 + \frac{1}{16}x^{12} - ..$$

Jadi,

$$\begin{aligned}\int_0^{0,4} \sqrt{1+x^4}dx &= \int_0^{0,4} \left(1 + \frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{8}x^8 + \frac{1}{16}x^{12} - ..\right) dx \\ &= \left[x + \frac{x^5}{10} - \frac{x^9}{72} + \frac{x^{13}}{208} + ..\right]_0^{0,4} \approx 0,40102\end{aligned}$$

## 3.12 Topik Khusus Deret Tak Hingga

1. Deret tak hingga dari suku-suku kompleks
   secara khusus deret pangkat dengan bentuk

   $$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

   dimana z = x + iy dan $a_n$ mungkin adalah bilangan kompleks, dapat diselesaikan dengan cara yang sama dengan deret real.
   Deret pangkat semacam ini konvergen untuk $|z| < R$, yaitu pada bagian dalam dari lingkaran konvergensi $x^2 + y^2 = R^2$ dimana R adalah jari-jari konvergensi (jika deret hanya untuk z = 0, maka kita mengatakan bahwa jari-jari konvergensi R adalah nol; jika deret tersebut konvergen untuk semua z, maka kita mengatakan bahwa jari-jari konvergensi tersebut adalah $\infty$)

2. Deret tak hingga dari fungsi dengan dua variabel (atau lebih)

seperti

$$\sum_{n=1}^{\infty} U_n(x,y)$$

dapat diperlakukan dengan cara yang analog dengan deret dalam satu variabel. Secara khusus, deret ini dapat dibahas dengan deret pangkar dalam x dan y dengan bentuk

$$a_{00} + (a_{10}x + a_{01}y) + (a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2) + ...$$

dengan menggunakan subskrip rangkap dua untuk konstanta. Sementara untuk satu variabel, dapat diekspansi fungsi-fungsi x dan y yang sesuai dalam deret pangkat tersebut. berikut ini adalah perluasan dari Teorema Taylor

**Teorema Taylor Dua Variabel**

misalkan f adalah fungsi dua variabel x dan y. Jika semua turunan parsial dari orde n adalah kontinu dalam daerah tertutup dan jika semua turunan parsial (n+1) terdapat dalam daerah terbuka, maka

$$f(x_0+h, y_0+k) = f(x_0,y_0) + \left(h\frac{\delta}{\delta x} + k\frac{\delta}{\delta y}\right) f(x_0,y_0) + \frac{1}{2!}\left(h\frac{\delta}{\delta x} + k\frac{\delta}{\delta y}\right)^2 f(x_0,y_0) + \\ ... + \frac{1}{n!} + \left(h\frac{\delta}{\delta x} + k\frac{\delta}{\delta y}\right)^n f(x_0,y_0) + R_n$$

dimana

$$Rn = \frac{1}{(n+1)!}\left(h\frac{\delta}{\delta x} + k\frac{\delta}{\delta y}\right)^{n+1} f(x_0+\theta h, y_0+\theta k) \ 0 < \theta < 1$$

dan dimana makna dari notasi operator adalah sebagai berikut:

$$\left(h\frac{\delta}{\delta x} + k\frac{\delta}{\delta y}\right) f = hf_x + kf_y,$$
$$\left(h\frac{\delta}{\delta x} + k\frac{\delta}{\delta y}\right)^2 = h^2 f_{xx} + 2hkf_{xy} + k^2 f_{yy}$$

dan bentuk diatas dapat diekspansi dengan menggunakan teorema binomial.

3. Deret Rangkap Dua

Perhatikanlah urutan bilangan (atau fungsi):

$$\begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \dots \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} & \dots \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{pmatrix}$$

Misalkan $S_{mn} = \sum_{p=1}^{m} \sum_{q=1}^{n} u_{pq}$ adalah jumlah dari bilangan - bilangan dalam m baris pertama dan n kolom pertama dari deret ini. Jika terdapat sebuah bilangan S sedemikian rupa sehingga $\underset{m,n\to\infty}{Lim} S_{mn} = S$, maka kita mengatakan bahwa deret rangkap dua $\sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} u_{pq}$ konvergen terhadap jumlah S;atau jika tidak, maka deret tersebut divergen.

4. Hasil kali Tak terhingga
   Misalkan $P_n = (1 + u_1)(1 + u_2)(1 + u_3)...(1 + u_n)$ yang dinyatakan sebagai $\prod_{k=1}^{n}(i + u_k)$, dimana kita memisalkan bahwa $u_k \neq -1, k = 1, 2, 3, ...$ Jika terdapat sebuah bilangan $P \neq 0$ sedemikian rupa sehingga $\underset{n\to\infty}{Lim} P_n = P$, maka dapat dikatakan bahwa hasil kali takterhingga $(1 + u_1)(1 + u_2)(1 + u_3)... = \prod_{k=1}^{\infty}(i + u_k)$, atau singkatnya dituliskan dengan $\prod(1 + u_k)$ konvergen mutlak.

5. Dapat dijumlahkan
   Misalkan $S_1, S_2, S_3, ...$ adalah jumlah-jumlah parsial dari deret divergen $\sum u_k$, jika barisan $S_1, \dfrac{S_1 + S_2}{2}, \dfrac{S_1 + S_2 + S_3}{3}, ...$ (yang dibentuk dengan menghitung mean aritmatika dari n suku pertama dari $S_1, S_2, S_3, ...$ ) konvergen terhadap S, maka dapat dikatakan bahwa deret $\sum u_k$ adalah dapat dijumlahkan.

## 3.13 Latihan Soal

1. Untuk nilai nilai x berapakah deret-deret berikut ini akan konvergen

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n.3^n}$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}x^{2n-1}}{(2n-1)!}$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} n!(x-a)^n$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(x-1)^n}{2^n(3n-1)}$$

## 3.14 Hampiran Taylor untuk Sebuah Fungsi

Ada 2 hal penting yang menyangkut metode haapiran. yang pertama adalah fakta bahwa banyak entitas matematika yang muncul di dalam aplikasi yang tidak dapat dihitung dengan menggunakan metode eksak. Contohnya, integral $\int_0^b sin(x^2)dx$, yang digunakan secara luas dalam dunia optik, dan $\int_0^b e^{-x^2}dx$ yang memainkan peranan penting di dalam dunia statistika. Kedua, penemuan dan meluasnya penggunaan komputer dan kalkulator telah membuat metode numerik hampiran menjadi lebih praktis. Karena dalam kenyataannya, sering kali lebih mudah untuk menghitung sesuatu dengan menggunakan kalkulator dengan hampiran dibandingkan dengan menggunakan metode eksak, bahkan ketika metode eksak tersebut telah tersedia.

### 3.14.1 Polinomial Taylor Orde 1

Pada Kalkulus 1 telah ditegaskan bahwa fungsi f dapat dihampiri di dekat titik a oleh garis singgungnya yang melalui (a,f(a)). Garis tersebut dinamakan sebagai hampiran linier terhadap f di dekat a dan kita akan mendapatkan bahwa

$$P_1(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$$

Setelah mempelajari deret Taylor, diharapkan telah mengetahui bahwa $P_1(x)$ tersusun oleh dua suku pertama yaitu suku orde 0 dan suku orde 1, dari suatu deret Taylor dari f yang diekspansi di sekitar a. Dengan demikian. kita menyebut $P_1$ sebagai polinomial Taylor Orde 1 yang terletak di a.

**Contoh**

Tentukan $P_1$ yang terletak di a = 1 untuk f(x) = ln (x) dan gunakan hasilnya untuk mengahmpiri ln (0,9) dan ln (5)

# BAB 4

# Deret Fourier

## 4.1 Fungsi Periodik

Suatu fungsi $f(x)$ dikatakan mempunyai priode T atau periodik dengan periode T jika untuk setiap x berlaku $f(x + T) = f(x)$, di mana T konstanta positif. Nilai positif terkecil T dinamakan periode terkecil atau disingkat periode $f(x)$
Contoh:

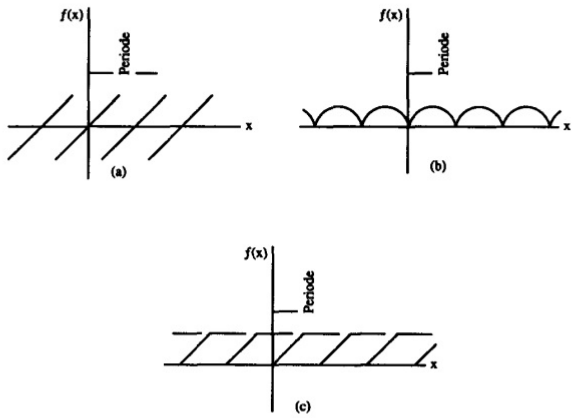
1. Fungsi sin x mempunyai periode $2\pi, 4\pi, 6\pi, ...$ karena $sin\ (x + 2\pi), sin\ (x + 4\pi), sin\ (x+6\pi), ...$ sama dengan sin x. tetapi $2\pi$ adalah periode terkecil atau periode sin x

2. Periode fungsi sin nx atau cos nx, dimana n bilangan bulat positif, adalah 2 $\pi/n$

3. Periode tan x adalah $\pi$

4. Suatu konstanta mempunyai periode suatu bilangan positif.

Contoh lainnya dari fungsi periodik ditunjukkan dalam grafik di bawah ini




## 4.2 Deret Fourier

Misalkan $f(x)$ didefinisikan pada selang $(-L, L)$ dan di luar selang ini oleh $f(x + 2L) = f(x)$, yaitu dimisalkan bahwa $f(x)$ mempunyai periode 2L. Deret Fourier atau uraian Fourier yang bersesuaian dengan $f(x)$ ditentukan oleh

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \; cos \; \frac{n\pi x}{L} + b_n \; sin \; \frac{n\pi x}{L} \right) \tag{4.1}$$

dimana

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \; cos \; \frac{n\pi x}{L} \tag{4.2}$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \; sin \; \frac{n\pi x}{L} \tag{4.3}$$

dengan n = 0,1,2, ...
Jika $f(x)$ mempunyai periode 2L, maka koefisien $a_n$ dan $b_n$ dapat ditentukan ekivalen (setara) dengan bentuk

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{c}^{2L} f(x) \; cos \; \frac{n\pi x}{L} \tag{4.4}$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{c}^{2L} f(x) \; sin \; \frac{n\pi x}{L} \tag{4.5}$$

sini c adalah suatu bilangan real. Dalam kasus khusus c = -L , maka persamaan 4.4 dan 4.5 akan menjadi persamaan 4.2 dan 4.3.

Untuk menentukan $a_0$ pada persamaan 4.1 akan digunakan 4.2 dan 4.3 atau 4.4 dan 4.5 dengan n = 0.

## 4.3 Syarat Ortogonalitas untuk Fungsi Sinus dan Cosinus

Perhatikan bahwa koefisien-koefisien Fourier adalah integral. Ini diperoleh dengan memulai deret (I), dan memanfaatkan sifat-sifat berikut ini yang disebut syarat ortogonalitas:

1. $\int_{-L}^{L} cos\ \frac{m\pi x}{L}\ cos\ \frac{n\pi x}{L} = 0$ Jika $m \neq n$ dan L jika m = n.
2. $\int_{-L}^{L} sin\ \frac{m\pi x}{L}\ sin\ \frac{n\pi x}{L} = 0$ Jika $m \neq n$ dan L jika m = n.
3. $\int_{-L}^{L} sin\ \frac{m\pi x}{L}\ cos\ \frac{n\pi x}{L} = 0$. Di mana m dan n dapat diasumsikan sebagai sebarang nilai bilangan bulat positif.

## Contoh

Untuk menentukan koefisien fourier $a_0$, integrasikan kedua ruas deret Fourier pada persamaan (4.1), yaitu:

$$\int_{-L}^{L} f(x)dx = \int_{-L}^{L} \frac{a_0}{2}dx + \int_{-L}^{L} \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n\ cos\ \frac{n\pi x}{L} + b_n\ sin\ \frac{n\pi x}{L}\right) dx$$

maka

$$\int_{-L}^{L} \frac{a_0}{2}dx = a_0 L, \int_{-L}^{L}\ sin\ \frac{n\pi x}{L}dx = 0, \int_{-L}^{L}\ cos\ \frac{n\pi x}{L}dx = 0,$$

sehingga

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)dx$$

## 4.4 Syarat Dirichlet

Misalkan bahwa

1. $f(x)$ didefinisikan dan bernilai tunggal, kecuali mungkin pada sejumlah tertentu titik dalam (-L,L)
2. $f(x)$ periodik di luar (-L,L) dengan periode 2L.
3. $f(x)$ dan $f'(x)$ kontinu bagian demi bagian pada (-L,L).

Maka deret (4.1) dengan koefisien Fourier konvergen ke

1. $f(x)$ jika x adalah sebuah titik kontinuitas
2. $\dfrac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$ jika x adalah sebuah titik diskontinuitas.

## 4.5 Contoh Penggunaan Deret Fourier

Contoh penggunaan deret Fourier adalah sebagai berikut:

$$\int u\ dv = uv - \int v\ du$$

atau

$$\int uv = uv_1 - u'v_2 + u"x_3 - ...$$

dimana u' adalah turunan pertama, $v_1 = \int vdx$ dan seterusnya
**Contoh**

$$\int x^3\ sin\ 2xdx = \frac{-x^3}{2} cos\ (2x) - \left(-\frac{3x^2}{4} sin\ 2x\right) + \left(\frac{6x}{8} cos\ 2x\right) - \frac{6}{16} sin\ 2x$$

atau sebagai berikut

| $f(x)$ | $u(x)$ | $v(x)$ |
|---|---|---|
| $f'(x)$ | $x^3$ | $\sin 2x$ |
| $f''(x)$ | $3x^2$ | $-\frac{1}{2}\cos 2x$ |
| $f'''(x)$ | $6x$ | $-\frac{1}{4}\sin 2x$ |
| $f''''(x)$ | $6$ | $\frac{1}{8}\cos 2x$ |
| $f'''''(x)$ | $0$ | $\frac{1}{16}\sin 2x$ |

## 4.6 Fungsi Ganjil dan Fungsi Genap

- Sebuah fungsi $f(x)$ disebut ganjil jika $f(-x) = -f(x)$. Jadi, $x^3, x^5 - 3x^3 + 2x, sin\ (x), tan\ (3x)$ adalah fungsi-fungsi ganjil.
- Fungsi $f(x)$ disebut genap jika $f(-x) = f(x)$. Jadi, $x^4, 2x^6 - 4x^2 + 5, cos\ (x), e^x + e^{-x}$ adalah fungsi-fungsi genap.
- Fungsi - fungsi yang secara grafik diperlihatkan pada gambar (a) dan (b) masing-masing adalah fungsi ganjil dan fungsi genap tetapi pada gambar (c) bukan fungsi ganjil maupun fungsi genap.
- Dalam deret Fourier yang bersesuaian dengan fungsi ganjil, maka hanya suku sinus yang ada.
- Dalam deret Fourier yang bersesuaian dengan fungsi genap, maka hanya suku cosinus (dan mungkin sebuah konstanta yang dapat kita anggap sebagai suku cosinus) yang ada

## 4.7 Latihan Soal

1. Gambarkanlah setiap fungsi berikut:

a. periode = 10

$$f(x) = \begin{cases} 3 & ,0 < x < 5 \\ -3 & ,-5 < x < 0 \end{cases}$$

b. Periode = 2 $\pi$

$$f(x) = \begin{cases} sin\ x & ,0 \leq x \leq \pi \\ -3 & ,\pi \leq x \leq 2\pi \end{cases}$$

c. Periode = 6

$$f(x) = \begin{cases} 0 & ,0 \leq x < 2 \\ 1 & ,2 \leq x < 4\pi \\ 0 & ,4 \leq x < 6 \end{cases}$$

2. Buktikanlah

$$\int_{-L}^{L} sin\ \frac{k\pi x}{L} dx = \int_{-L}^{L} \frac{k\pi x}{L} dx = 0$$

Jika k = 0, 1, 2, 3, ...

3. Uraikanlah $f(x) = x^2, 0 < x < 2\pi$ dalam suatu deret Fourier jika

   a Periodenya 2 $\pi$

   b Periodenya tidak ditetapkan

4. Gunakanlah hasil soal nomor 2 untuk membuktikan $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + ... = \frac{\pi^2}{6}$

5. Kelompokkan setiap fungsi yang diberikan sesuai dengan apakah fungsi itu ganjil, genap atau tidak ganjil maupun tidak genap

   (a) Periode = $2\pi$

$$f(x) = \begin{cases} 2 & ,0 < x < 3 \\ -2 & ,-3 < x < 0 \end{cases}$$

Periode $= 2\pi$

$$f(x) = \begin{cases} cos\ x & , 0 < x < \pi \\ 0 & , \pi < x < 2\pi \end{cases}$$

(b) $f(x) = x(10 - x)$, $0 < x < 10$, Periode $= 10$

# Daftar Pustaka

1 Alzaid, A. dan Omair, M. 2010. On The Poisson Difference Distribution Inference and Applications. *Bulletin of The Malaysian Mathematical Sciences Society.*