Notas de aula do curso de Física II
Ondas, Relatividade e Termodinâmica[1]

Fernando T C Brandt

23 de Abril de 2008

[1] **As principais referências aqui adotadas são os volumes 2 e 4 (cap. 6) do "Curso de Física Básica", Herch Moysés Nussenzveig (HMN), Ed. Edgard Blücher, e também o volume 1 do "The Feynman Lectures on Physics", R. P. Feynman, R. B. Leighton e M. Sands, Addison-Wesley Pub. Co. (veja referências [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12]). É possível que existam ainda muitos erros de digitação. Além disso o texto tem sido modificado freqüentemente. Dúvidas, sugestões e correções podem ser enviadas para o e-mail fbrandt@usp.br**

Sumário

Capítulo 1

Ondas

1.1 Conceito de ondas

A experiência mostra que é possível produzir efeitos em um ponto B, a partir de um ponto A, distante de B, sem que seja necessário mover um corpo material de A para B. Alguns exemplos:

- Controle remoto em A altera as propriedades de dispositivos (TV, portão automático, portas de automóveis, etc) em B.
- Auto-falante em A produz vibrações sonoras em B.
- Se A e B são pontos na superfície da água, podemos produzir uma onda de superfície em A que faz um barco se movimentar em B.
- Se A e B são pontos de uma corda esticada, podemos produzir oscilações em A, que se propagam até B.

Existem muitas outras situações onde ocorre a *propagação de um sinal* entre pontos distantes no espaço, mas a *matéria* se move apenas localmente. Por exemplo, quando uma pedra é atirada no meio de um lago as ondas produzidas se propagam até a margem, mas a superfície do lago se move apenas oscilando localmente. Esse conceito de onda refere-se a situações que podem ser reduzidas a um tratamento mecânico envolvendo propriedades de elasticidade do meio. Mas há também outras possibilidades. Por exemplo, uma *onda eletromagnética* não precisa de um meio para se propagar. O mesmo ocorre com as *ondas de probabilidade* na Mecânica Quântica.

1.1.1 Alguns fatos e propriedades

Embora não transporte matéria, a onda transmite *momento e energia*. Por exemplo, uma perturbação ondulatória produzida na superfície d'água faz com que um barco distante oscile. Dependendo das características do meio de propagação, a perturbação ondulatória pode possuir diferentes características. Listamos abaixo alguns casos típicos.

- Ondas longitudinais.
- Ondas transversais.
- Mistura de transversais e longitudinais. Por exemplo, ondas sísmicas (meios sólidos). No centro líquido da terra a parte transversal desaparece.

- Ondas na superfície da água não são nem transversais nem longitudinais. Pequenos elementos de fluido descrevem trajetórias aproximadamente circulares, movendo-se na direção da onda, na superfície, e na direção oposta, por baixo.

- Ondas eletromagnéticas. Os campos elétrico e magnético oscilam perpendicularmente à direção de propagação e entre si. Não há um meio material para a propagação (esse grande "mistério" somente veio a ser descoberto juntamente com os desenvolvimentos que levaram à Teoria da Relatividade Especial, que veremos mais adiante no curso).

- Ondas de probabilidade na Mecânica Quântica. De acordo com a Teoria Quântica, há uma onda de probabilidade associada a cada partícula.

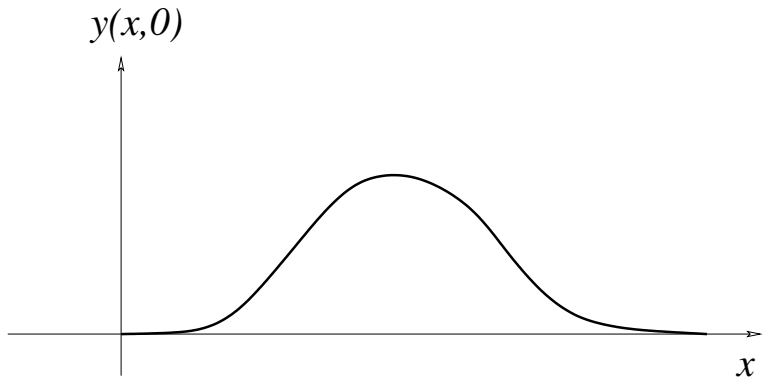
A seguir iniciaremos o estudo quantitativo detalhado das *ondas unidimensionais*. O caso típico é o que ocorre em uma corda esticada.

1.2 Ondas em uma dimensão

Os casos mais simples são aqueles em que o meio de propagação pode ser reduzido a uma única direção do espaço. O exemplo típico é o de uma *corda* distendida, cujos pontos podem oscilar na direção perpendicular à corda. A seguir vamos analisar em detalhe estas ondas unidimensionais.

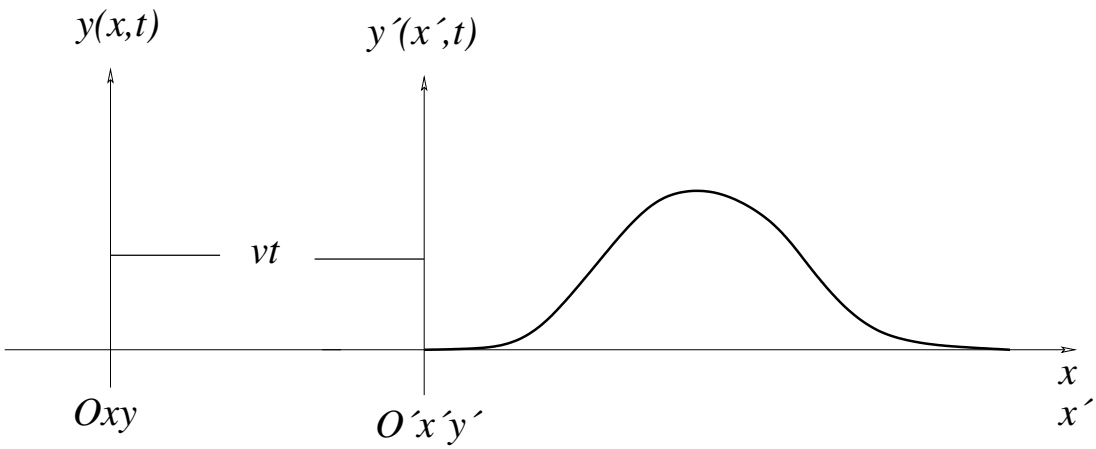
1.2.1 Ondas progressivas

Consideremos um *pulso* se propagando em uma dimensão descrita pela coordenada x. A fotografia do *perfil* da corda em um dado instante de tempo pode ser descrita por uma função de x. Por exemplo, em $t = 0$ poderíamos ter a função $y(x, 0)$, como na figura



Após um tempo t o perfil seria $y(x, t)$. Temos assim uma perturbação que se desloca sem mudar de forma.

Para uma observador que se desloca na direção x com a mesma velocidade do pulso, a forma do pulso não muda com o tempo. Na figura seguinte é mostrado o referencial $O'x'y'$ deste observador, o qual coincide com Oxy em $t = 0$.



ou seja,

$$y'(x',t) = y'(x',0) \equiv f(x') \tag{1.2.1}$$

A função $f(x')$ descreve a forma *estática* do pulso, como vista pelo observador O'. Levando em conta que $x' = x - vt$ e $y' = y$[1] (transformação de Galileu na direção x), obtemos

$$y(x,t) = f(x - vt) \tag{1.2.2}$$

Portanto a onda progressiva se propagando para a direita é uma função que depende de x e t somente através de $x' = x - vt$, podendo ser *uma função qualquer* de x'. Analogamente, uma onda se propagando para a esquerda será uma função de $x + vt$.

1.2.2 Obtenção da Solução de d'Alembert

Uma conseqüência imediata de $y(x,t) = f(x - vt)$ é que a *Equação de Ondas* (**verifique**)

$$\boxed{\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0} \tag{1.2.3}$$

é satisfeita. Mais adiante mostraremos como essa equação pode ser derivada a partir das propriedades mecânicas de uma corda. Neste caso, $y(x,t)$ representaria a deformação da corda na direção perpendicular à corda.

Nesta seção veremos como obter a solução da equação de onda (1.2.3). Para isso, primeiramente notamos que a equação (1.2.3) pode ser reescrita como (**verifique**)

$$\left(\frac{1}{v}\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{1}{v}\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\right) y(x,t) = 0. \tag{1.2.4}$$

Essa forma sugere que façamos uma mudança para novas variáveis u^+ e u^-, tais que

$$\begin{aligned} x &= \frac{u^+ + u^-}{2} \\ t &= \frac{u^+ - u^-}{2v} \end{aligned} . \tag{1.2.5}$$

ou, invertendo as equações,

$$\begin{aligned} u^+ &= x + vt \\ u^- &= x - vt \end{aligned} . \tag{1.2.6}$$

[1] Note que na relação $y' = y$ estão implícitos os respectivos argumentos das funções y' e y, ou seja, $y'(x',t) = y(x,t)$

Substituindo a regra da cadeia,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x} &= \frac{\partial u^+}{\partial x}\frac{\partial}{\partial u^+} + \frac{\partial u^-}{\partial x}\frac{\partial}{\partial u^-} &= \frac{\partial}{\partial u^+} + \frac{\partial}{\partial u^-} \\
\frac{\partial}{\partial t} &= \frac{\partial u^+}{\partial t}\frac{\partial}{\partial u^+} + \frac{\partial u^-}{\partial t}\frac{\partial}{\partial u^-} &= v\frac{\partial}{\partial u^+} - v\frac{\partial}{\partial u^-}
\end{aligned} \tag{1.2.7}$$

na equação (1.2.4), obtemos (**verifique**)

$$-4\frac{\partial^2}{\partial u^- \partial u^+} y(u^+, u^-) = 0. \tag{1.2.8}$$

Integrando na variável u^-,

$$\frac{\partial}{\partial u^+} y(u^+, u^-) = G(u^+). \tag{1.2.9}$$

Note que $G(u^+)$ é uma função qualquer que depende apenas de u^+. Integrando na variável u^+,

$$y(u^+, u^-) = f(u^-) + g(u^+), \tag{1.2.10}$$

onde $\partial g(u^+)/\partial u^+) = G(u^+)$ e f só depende de u^-. Voltando para as variáveis x e t, a equação acima nos dá

$$y(x,t) = f(x - vt) + g(x + vt). \tag{1.2.11}$$

Essa é a solução geral de d'Alembert.

Solução geral em termos de condições iniciais

Consideremos as *condições iniciais* de posição e de velocidade dadas por

$$\begin{aligned}
y(x,0) &= y_0(x) \\
\left.\frac{\partial y}{\partial t}(x,t)\right|_{t=0} &= y_1(x)
\end{aligned} . \tag{1.2.12}$$

A primeira condição nos informa qual é a *forma inicial* da corda. A segunda condição nos informa qual é a *velocidade inicial* de todos os pontos da corda.

É interessante comparar as condições iniciais da corda com aquelas de uma partícula. Note que na dinâmica de uma partícula as condições iniciais são a *posição da partícula* e a *velocidade da partícula*. Ou seja, no caso de uma partícula as condições iniciais são a posição e a velocidade de um ponto; no caso de uma onda unidimensional, as condições iniciais são a posição e a velocidade dos infinitos pontos de uma linha.

Como a equação de onda é de segunda ordem na derivada temporal, as duas funções $y_0(x)$ e $y_1(x)$ devem especificar completamente a evolução subseqüente. De fato, já sabemos, de acordo com a equação (1.2.11), que a solução geral deve depender de duas funções quaisquer. Podemos agora expressar, em $t = 0$, as funções $f(x)$ e $g(x)$ em termos das *condições iniciais* em (1.2.12). De fato, usando (1.2.11) em (1.2.12), obtemos

$$\begin{aligned}
y(x,0) &= f(x) + g(x) = y_0(x) \\
\left.\frac{\partial y}{\partial t}(x,t)\right|_{t=0} &= v\left(\frac{dg}{dx} - \frac{df}{dx}\right) = y_1(x)
\end{aligned} . \tag{1.2.13}$$

Integrado a segunda equação,

$$\begin{array}{rcl} y_0(x) & = & f(x)+g(x) \\ \int_a^x y_1(s)\mathrm{d}s & = & v\left(g(x)-f(x)\right) \end{array}, \tag{1.2.14}$$

onde a é uma constante qualquer. Resolvendo para $f(x)$ e $g(x)$

$$\begin{array}{rcl} f(x) & = & \frac{1}{2}\left(y_0(x)-\frac{1}{v}\int_a^x y_1(s)\mathrm{d}s\right) \\ g(x) & = & \frac{1}{2}\left(y_0(x)+\frac{1}{v}\int_a^x y_1(s)\mathrm{d}s\right) \end{array}. \tag{1.2.15}$$

Essas duas relações determinam completamente as funções $f(x)$ e $g(x)$ em termos das condições iniciais y_0 e y_1. Usando agora a equação (1.2.11), obtemos finalmente (**verifique**)

$$\boxed{y(x,t)=\frac{1}{2}y_0(x+vt)+\frac{1}{2}y_0(x-vt)+\frac{1}{2v}\int_{x-vt}^{x+vt} y_1(s)\mathrm{d}s}. \tag{1.2.16}$$

(Observe que a constante de integração a é cancelada na soma das duas integrais em (1.2.15), levando em conta que $-\int_a^{x-vt} y_1(s)\mathrm{d}s=\int_{x-vt}^a y_1(s)\mathrm{d}s$.) Verifique explicitamente que esta solução satisfaz a equação de onda e as condições iniciais.

Exemplos

- Considere o seguinte exemplo de condição inicial

$$y_1(x)=\pm v\frac{dy_0}{dx}. \tag{1.2.17}$$

  Podemos mostrar que neste caso teremos uma onda se propagando para esquerda ou para a direita. De fato,

$$\frac{1}{2v}\int_{x-vt}^{x+vt} y_1(s)\mathrm{d}s=\pm\frac{1}{2}\int_{x-vt}^{x+vt}\frac{dy_0}{ds}\mathrm{d}s=\pm\frac{1}{2}\int_{y_0(x-vt)}^{y_0(x+vt)} dy_0=\pm\frac{1}{2}\left(y_0(x+vt)-y_0(x-vt)\right). \tag{1.2.18}$$

  Substituindo na equação (1.2.16) obtemos

$$y(x,t)=y_0(x\pm vt). \tag{1.2.19}$$

- Determine, para qualquer instante de tempo, a forma de uma corda tal que no instante inicial

$$y_0=A\exp(-x^2/L^2) \tag{1.2.20}$$

  e $y_1=0$.

Exercício:
Um pulso ondulatório produzido numa corda tem a forma dada por

$$y_d(x,t)=\frac{A^3}{A^2+(x-vt)^2}, \tag{1.2.21}$$

onde $A=1,00$ cm e $v=20,0$ m/s.

(a) Faça um desenho do pulso ondulatório em função de x para $t = 0$. Até que ponto ao longo da corda o pulso se estende?

(b) Faça um desenho do pulso para $t = 0,001$s.

(c) No ponto $x = 4,50$ cm, para que tempo t o deslocamento é máximo, e para quais valores de t esse deslocamento é a metade do valor máximo?

(d) Mostre que a função acima é uma função de onda.

(e) Responda os ítens acima para a função

$$y_e(x,t) = \frac{A^3}{A^2 + (x+vt)^2} \tag{1.2.22}$$

e também para a combinação $y_d(x,t) + y_e(x,t)$.

(f) Verifique explicitamente que $y_d(x,t)$ satisfaz a solução de d'Alembert (1.2.16).

1.2.3 Soluções harmônicas

Uma classe de soluções particulares, porém de interesse bastante geral, são as *soluções harmônicas* da forma

$$y(x,t) = \Re\left[A e^{i(kx-\omega t+\delta)}\right], \tag{1.2.23}$$

onde k, ω e δ são constantes reais, $i = \sqrt{-1}$ e $\Re$ denota a *parte real*. A constante real A é a *amplitude da onda*. A seguir veremos qual é o significado físico de cada uma destas grandezas.

Sabemos que, segundo a fórmula de Euler,

$$y(x,t) = \Re\left[A\cos(kx-\omega t+\delta) + A\text{sen}(kx-\omega t+\delta)\right] = A\cos(kx-\omega t+\delta). \tag{1.2.24}$$

Embora pudéssemos ter escrito diretamente em termos do cos, há, como veremos, vantagens em se utilizar a exponencial complexa.

Naturalmente deve existir uma relação entre k e ω para que (1.2.23) seja de fato uma solução da equação de onda. Substituindo (1.2.23) em (1.2.3), obtemos **verifique**

$$\boxed{\omega = kv}. \tag{1.2.25}$$

Interpretação de ω e k

Em uma dada posição do espaço (x fixo), o valor da função $y(x,t)$ em (1.2.24) se repete após um intervalo de tempo igual a $2\pi/\omega$. Esse intervalo de tempo é denominado *período*

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega}. \tag{1.2.26}$$

Analogamente, em um dado instante de tempo (t fixo) o valor da função $y(x,t)$ em (1.2.24) se repete após um intervalo de distância igual a $2\pi/k$. Esse intervalo é denominado *comprimento de onda*

$$\lambda = \frac{2\pi}{k}. \tag{1.2.27}$$

Usando essas relações, podemos reescrever (1.2.25) como

$$v = \frac{\lambda}{\tau} = \lambda\nu, \tag{1.2.28}$$

onde $\nu = 1/\tau$ é a *freqüência* da onda.

As grandezas k e ω são denominadas *número de onda* e *freqüência angular*, respectivamente.

Fase da onda

A grandeza

$$\phi(x,t) = kx - \omega t + \delta \tag{1.2.29}$$

é a *fase* da onda, sendo que δ é a *constante de fase*. Se acompanharmos um ponto tal que a fase é constante, i.e., $\phi(x,t) = \phi_0 = constante$, teremos

$$\frac{d\phi}{dt} = k\frac{dx}{dt} - \omega = 0, \tag{1.2.30}$$

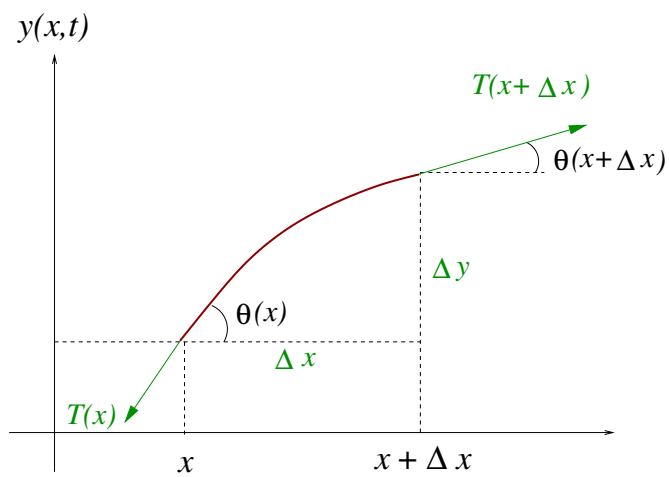
ou seja,

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{k} = v. \tag{1.2.31}$$

Portanto, um ponto de fase constante se desloca com a velocidade da onda.

1.3 Equação da corda vibrante

Até aqui, ainda não exibimos um sistema físico que obedeça a equação (1.2.3). Faremos isso agora considerando uma corda distendida possuindo uma densidade de massa linear $\mu(x)$ e tensionada por uma tensão $T(x)$ que não varia com o tempo. Vamos supor a situação idealizada de uma *corda inextensível* sujeita a *pequenas deformações*. Nestas condições o ângulo formado pelas retas tangentes à corda e o eixo x, ou seja, o ângulo θ na figura



é muito pequeno.

1.3.1 Derivação da equação de onda

A força resultante que atua sobre o trecho de corda mostrado na figura acima é (não estamos considerando o pequeno efeito da força peso)

$$F_R = T(x+\Delta x)\text{sen}(\theta(x+\Delta x)) - T(x)\text{sen}(\theta(x)). \tag{1.3.1}$$

Para ângulos pequemos, podemos fazer a aproximação

$$\text{sen}(\theta) \approx \tan(\theta) = \frac{\partial y}{\partial x}. \tag{1.3.2}$$

Substituindo (1.3.1) em (1.3.2), teremos

$$F_R = T(x+\Delta x)\frac{\partial y}{\partial x}(x+\Delta x, t) - T(x)\frac{\partial y}{\partial x}(x,t). \tag{1.3.3}$$

Usando a noção básica de derivada de uma função

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{\partial f}{\partial x}, \tag{1.3.4}$$

a força resultante em (1.3.4), para $\Delta x \to 0$ será

$$F_R = \left(T(x) + \Delta x \frac{\partial T}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial x} + \Delta x \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right) - T(x)\frac{\partial y}{\partial x} = \left(T(x)\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{\partial T}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial x}\right)\Delta x, \tag{1.3.5}$$

onde foram desprezados os termos de ordem Δx^2. Essa força produz a aceleração do pequeno trecho da corda cuja massa é

$$\Delta m = \mu(x)\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} \approx \mu(x)\Delta x, \tag{1.3.6}$$

onde usamos novamente a condição de ângulos pequenos, de modo que $\Delta y \ll \Delta x$. De acordo com a *Segunda Lei de Newton* ($F_R = \Delta m \partial^2 y/\partial t^2$) teremos, usando (1.3.5) e (1.3.6),

$$\left(T(x)\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{\partial T}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial x}\right)\Delta x = \mu(x)\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\Delta x. \tag{1.3.7}$$

Cancelando Δx, obtemos

$$T(x)\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{\partial T}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial x} = \mu(x)\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}. \tag{1.3.8}$$

Nos casos mais simples (e.g., uma corda de densidade uniforme, distendida sob a ação de uma tensão T independente de x) a equação (1.3.8) se reduz a

$$\boxed{\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{\mu}{T}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0}. \tag{1.3.9}$$

Velocidade de propagação da onda

Comparando (1.3.9) com (1.2.3), vemos que a corda se movimenta segundo a equação de onda, e que a velocidade de propagação das ondas é

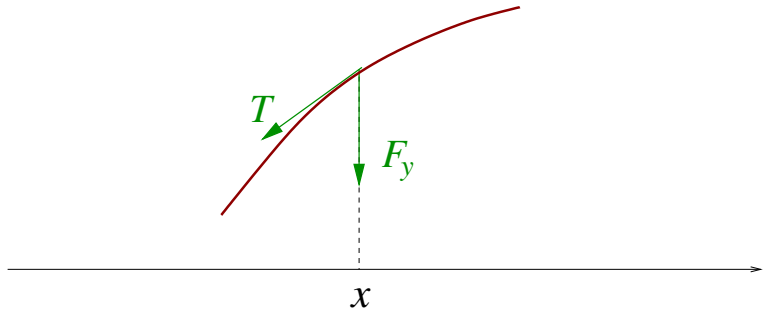
$$\boxed{v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}}. \tag{1.3.10}$$

Esta bela equação relaciona as propriedades intrínsecas do meio (tensão e densidade) com a velocidade da onda. Quanto mais tensa for a corda, maior será a velocidade da onda. Aumentando a densidade da corda a velocidade da onda diminui. É interessante usar o conteúdo físico essencial desta relação para inferir resultados em situações mais gerais, tais como o *som*. Veremos que, essencialmente, no caso do som, T e μ são substituídos respectivamente pela pressão de equilíbrio e pela densidade de equilíbrio. No caso em que o meio possui elasticidade compressiva *e* de cisalhamento, as ondas associadas (longitudinal para a compressiva e transversal para o cisalhamento) terão, em geral, velocidades distintas. Sabe-se que no caso de ondas sísmicas, as oscilações longitudinais compressivas são mais rápidas do que as ondas transversais de cisalhamento. A partir deste fato, podemos tirar conclusões sobre a elasticidade de cisalhamento relativamente a elasticidade de compressão [2]

[2] Existem ainda mais dois tipos de oscilações sísmicas, a saber, as superficiais e as *ondas de Rayleigh*.

1.3.2 Intensidade da onda

Para produzir oscilações na corda é preciso *fornecer energia* (por exemplo, um oscilador é ligado a uma das extremidades da corda). Na figura abaixo é mostrada a componente vertical da força, realizando trabalho sobre um pedaço da corda.



Para pequenas deflexões da corda, podemos escrever

$$F_y = -T\frac{\partial y}{\partial x}. \tag{1.3.11}$$

A *potência* transmitida é o produto da força pela velocidade, ou seja,

$$P(x,t) = F_y\frac{\partial y}{\partial t} = -T\frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial t}. \tag{1.3.12}$$

No caso de uma onda progressiva se propagando para a direita ($y(x,t) = f(x - vt)$), teremos (**verifique**),

$$P(x,t) = Tv\left(\frac{df}{du^-}\right)^2; \quad u^- = x - vt. \tag{1.3.13}$$

Note que na expressão acima Tv já tem a dimensão correta de potência.

Caso a onda progressiva seja harmônica, como na equação (1.2.23), então a equação (1.3.13) nos dá

$$P(x,t) = TvA^2k^2\text{sen}^2(kx - \omega t + \delta). \tag{1.3.14}$$

Tomando a média temporal da equação acima,

$$\overline{P} = \frac{1}{\tau}\int_t^{t+\tau} P(x,t')\mathrm{d}t', \tag{1.3.15}$$

obtemos (**verifique**)

$$\overline{P} = \frac{TvA^2k^2}{2}. \tag{1.3.16}$$

A potência média da onda unidimensional é também denominada *intensidade da onda* ou seja,

$$I = \overline{P} = \frac{TvA^2k^2}{2}. \tag{1.3.17}$$

Usando $v = \omega/k$,

$$I = \frac{T\omega kA^2}{2}. \tag{1.3.18}$$

De acordo com a relação (1.3.10) podemos expressar T em termos de μ e v, levando a

$$I = \frac{\mu v^2 \omega k A^2}{2}. \tag{1.3.19}$$

Podemos ainda usar, novamente, $vk = \omega$ e obter

$$\boxed{I = \tfrac{1}{2}\mu v \omega^2 A^2}. \tag{1.3.20}$$

Portanto, a intensidade transmitida pela onda harmônica é proporcional ao quadrado da amplitude, ao quadrado da freqüência e à velocidade de propagação.

Consideremos agora a energia contida na onda. Um pedaço dx da corda possui *energia cinética*

$$d\mathcal{T} = \frac{1}{2} dm \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 = \frac{1}{2}\mu \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 dx. \tag{1.3.21}$$

Portanto, a *densidade linear de energia cinética* é

$$\frac{d\mathcal{T}}{dx} = \frac{1}{2}\mu \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2. \tag{1.3.22}$$

Considerando o caso de uma onda harmônica de amplitude A e freqüência ω, e tomando a média temporal, teremos

$$\overline{\frac{d\mathcal{T}}{dx}} = \frac{1}{4}\mu\omega^2 A^2. \tag{1.3.23}$$

Note que o fator 1/2 extra vem da média do quadrado do seno.

A *energia potencial* de dx é (lembrando que dx executa um movimento harmônico simples)

$$dU = \frac{1}{2} dm \omega^2 y^2 = \frac{1}{2}\mu\omega^2 y^2 dx. \tag{1.3.24}$$

Portanto, a *densidade de energia potencial* é

$$\frac{dU}{dx} = \frac{1}{2} dm \omega^2 y^2 = \frac{1}{2}\mu\omega^2 y^2. \tag{1.3.25}$$

Tomando a média temporal, como no caso de energia cinética, teremos

$$\overline{\frac{dU}{dx}} = \frac{1}{4}\mu\omega^2 A^2 \tag{1.3.26}$$

(neste caso, o fator extra de 1/2 vem da média do quadrado do coseno). Note que, que a média da energia potencial é igual à média da energia cinética em (1.3.23). Esse resultado já foi obtido anteriormente, quando estudamos o movimento harmônico simples. Somando (1.3.23) com (1.3.26), obtemos a *densidade de energia média total*

$$\overline{\frac{dE}{dx}} = \overline{\frac{d\mathcal{T}}{dx}} + \overline{\frac{dU}{dx}} = \frac{1}{2}\mu\omega^2 A^2. \tag{1.3.27}$$

Podemos agora relacionar a densidade de energia com a potência transmitida pela onda. A energia média contida em um elemento Δx da corda é

$$\overline{\Delta E} = \overline{\frac{dE}{dx}\Delta x}. \tag{1.3.28}$$

Como a onda percorre um intervalo $\Delta x = v\Delta t$ durante um intervalo de tempo Δt, a potência média transportada será

$$\overline{P} = \frac{\overline{\Delta E}}{\Delta t} = \frac{\overline{dE}}{dx}\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\overline{dE}}{dx}v. \tag{1.3.29}$$

Essa potência dever ser igual à (1.3.17). De fato, podemos verificar isso usando (1.3.27). Assim, comparando (1.3.17) com (1.3.29), vemos que

$$I = v\frac{\overline{dE}}{dx}. \tag{1.3.30}$$

Ou seja, a intensidade é igual ao produto da velocidade pela densidade de energia média. Esse resultado nos informa que a intensidade é o *fluxo médio de energia* através de um ponto. *Fluxo através de um ponto?*. Pense um pouco sobre isso e tente "adivinhar" qual seria a generalização de (1.3.29) para ondas em três dimensões. Note que no caso tridimensional o conceito de fluxo é o usual (energia por unidade de área por unidade de tempo).

Exercício:

Uma corda está atada por uma extremidade a um ponto fixo. A outra extremidade passa por uma roldana que se encontra a 5 m da extremidade fixa, e segura uma carga de 2 kg. A massa do segmento de corda entre a extremidade fixa e a roldana é de 0.6 kg.

(a) Determine a velocidade de propagação das ondas transversais ao longo da corda.

(b) Suponha que uma onda harmônica de 10^{-3} m de amplitude e 0.3 m de comprimento de onda se propaga pela corda; calcule a velocidade transversal máxima de qualquer ponto da corda.

(c) Determine a taxa média de fluxo de energia (potência média) através de qualquer seção da corda.

1.3.3 Princípio de Superposição

Suponha que $y_1(x,t)$ e $y_2(x,t)$ sejam duas soluções quaisquer da equação de onda (1.2.3), ou seja,

$$\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y_1}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 y_1}{\partial x^2} = 0 \tag{1.3.31}$$

e

$$\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y_2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 y_2}{\partial x^2} = 0. \tag{1.3.32}$$

Então,

$$y(x,t) = ay_1(x,t) + by_2(x,t), \tag{1.3.33}$$

com a e b constantes, também é solução de (1.2.3).

Exercício: Prove a afirmação do parágrafo anterior.

Esse importante resultado denomina-se *Princípio de Superposição* e é válido em outros campos da Física tais como a Mecânica Quântica ou o Eletromagnetismo. Matematicamente é uma conseqüência direta da *linearidade* da equação de ondas. A linearidade significa que não existem termos na equação do tipo $y(x,t)^2$, ou $\sqrt{y(x,t)}$, ou $\cos(y(x,t))$, etc, dentre inúmeras possibilidades.

No exemplo da seção anterior (corda vibrante) foram omitidos termos de ordem superior em $\theta(x)$ que são muito pequenos para pequenas deflexões da corda. Para se ter uma idéia do grau de

não linearidade que teríamos no regime em que essa aproximação não pode ser usada, escrevemos abaixo a equação exata (com μ e T independentes de x)

$$\mu\sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T\cos(\theta(x,t))\frac{\partial\theta}{\partial x}. \tag{1.3.34}$$

(**verifique**) onde

$$\cos(\theta) = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}} \tag{1.3.35}$$

e

$$\theta(x) = \tan^{-1}\frac{\partial y}{\partial x}. \tag{1.3.36}$$

A partir da relação acima, podemos obter o termo seguinte da expansão de pequenos ângulos. Fazendo a expansão em série e mantendo o termo de segunda ordem, obtem-se

$$\mu\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\left[1-2\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right] \tag{1.3.37}$$

Obviamente, já neste caso, o princípio de superposição deixaria de ser válido. De fato, o termo proporcional ao quadrado da derivada de $y(x,t)$ é não linear.

1.4 Interferência de ondas

Vamos agora aplicar o princípio de superposição, para estudar os efeitos resultantes de adição de ondas. Primeiramente vamos considerar os casos em que as ondas possuem a mesma freqüência e, conseqüentemente, o mesmo número de onda.

1.4.1 Duas ondas no mesmo sentido

Consideremos duas ondas harmônicas

$$\left\{\begin{array}{lcl} y_1(x,t) & = & A_1\Re\exp[i(kx-\omega t+\delta_1)] = A_1\cos(kx-\omega t+\delta_1) \\ y_2(x,t) & = & A_2\Re\exp[i(kx-\omega t+\delta_2)] = A_2\cos(kx-\omega t+\delta_2) \end{array}\right. . \tag{1.4.1}$$

Ou seja, duas ondas se propagando para a direita com velocidade $v=\omega/k$, amplitudes A_1 e A_2 e constantes de fase δ_1 e δ_2. De acordo com o princípio de superposição

$$y(x,t) = y_1(x,t) + y_2(x,t) \tag{1.4.2}$$

também é uma solução da equação da corda. Vejamos agora qual é a forma desta solução resultante. Fatorizando uma das exponenciais, (**verifique**)

$$y = y_1 + y_2 = \Re\left[\exp[i(kx-\omega t+\delta_1)]\underbrace{(A_1 + A_2\exp(i\delta_{12}))}_{\equiv Z}\right], \tag{1.4.3}$$

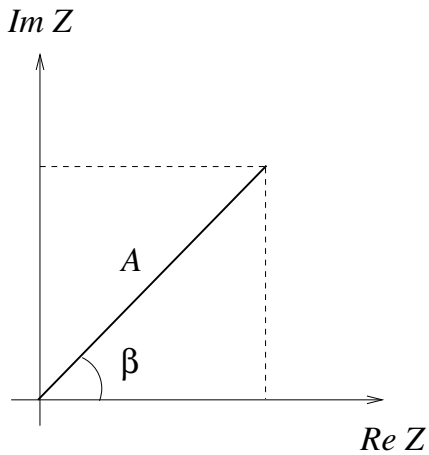
onde introduzimos a *diferença de fase*

$$\delta_{12} = \delta_2 - \delta_1. \tag{1.4.4}$$

O número complexo $Z \equiv (A_1 + A_2 \exp(i\delta_{12}))$ pode ser reescrito na forma polar, como

$$Z = A\exp(i\beta) = A(\cos(\beta) + i\text{sen}(\beta)) \tag{1.4.5}$$

com A e β reais. A é o *módulo* de Z. Logo, de acordo com a figura abaixo,



$$\begin{aligned} |Z|^2 = A^2 &= (\Re Z)^2 + (\Im Z)^2 = (A_1 + A_2\cos(\delta_{12}))^2 + (A_2\text{sen}(\delta_{12}))^2 \\ &= A_1^2 + 2A_1A_2\cos(\delta_{12}) + A_2^2\cos^2(\delta_{12}) + A_2^2\text{sen}^2(\delta_{12}) \\ &= A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\delta_{12}). \end{aligned} \tag{1.4.6}$$

Portanto

$$\boxed{A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\delta_{12})}} \tag{1.4.7}$$

O ângulo β indicado na figura acima é

$$\beta = \arctan\left(\frac{\Im Z}{\Re Z}\right) = \arctan\left(\frac{A_2\text{sen}(\delta_{12})}{A_1 + A_2\cos(\delta_{12})}\right). \tag{1.4.8}$$

Portanto, a combinação das duas ondas resulta em

$$y = y_1 + y_2 = A\cos(kx - \omega t + \delta_1 + \beta). \tag{1.4.9}$$

Note que A em (1.4.6) é a *amplitude da onda resultante* a qual possui freqüência ω. Sendo assim, podemos obter a intensidade dessa onda, usando (1.3.20)

$$I = \frac{1}{2}\mu v\omega^2 A^2 = \frac{1}{2}\mu v\omega^2 A_1^2 + \frac{1}{2}\mu v\omega^2 A_2^2 + \frac{1}{2}\mu v\omega^2 2A_1A_2\cos(\delta_{12}). \tag{1.4.10}$$

Como as ondas y_1 e y_2 também possuem freqüência ω, podemos escrever

$$\boxed{I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\cos(\delta_{12})}. \tag{1.4.11}$$

Esta relação mostra um dos mais importantes fenômenos ondulatórios. Ele revela que a intensidade resultante pode ser diferente da soma das duas intensidades associadas a cada onda. Devido ao último termo em (1.4.11) pode ocorrer até mesmo uma *interferência destrutiva*. Por exemplo, considerando o caso em que as duas ondas possuem a mesma amplitude, teríamos $I_1 = I_2$, resultando em uma amplitude resultante igual a $2I_1(1 + \cos(\delta_{12})$. Portanto, se a diferença de fase for $\delta_{12} = \pi$, essa amplitude resultante se anula.

Exercício: Faça o exercício 6 do capítulo 5 do HMN.

Exercício: Mostre que as amplitudes resultantes máxima e mínima são, respectivamente, $(\sqrt{I_1} + \sqrt{I_2})^2$ e $(\sqrt{I_1} - \sqrt{I_2})^2$. Determine os correspondentes valores de δ_{12}.

1.4.2 Duas ondas em sentidos opostos – *Ondas Estacionárias I*

Neste caso, as duas ondas componentes são

$$\left\{ \begin{array}{rcl} y_1(x,t) & = & A_1 \Re\exp[i(kx - \omega t + \delta_1)] = A_1 \cos(kx - \omega t + \delta_1) \\ y_2(x,t) & = & A_2 \Re\exp[i(kx + \omega t + \delta_2)] = A_2 \cos(kx - \omega t + \delta_2) \end{array} \right. . \tag{1.4.12}$$

Ou seja, a onda y_2 está se propagando para a esquerda. Vamos primeiramente considerar o caso mais simples em que $\delta_1 = \delta_2 = 0$ e $A_1 = A_2$. Neste caso, a onda resultante será

$$y = y_1 + y_2 = A(\cos(kx - \omega t) + \cos(kx + \omega t)) = 2A\cos(kx)\cos(\omega t). \tag{1.4.13}$$

Essa relação mostra que a superposição das duas ondas resulta em uma função de x e t que *não* descreve uma onda se propagando. Em qualquer instante de tempo, teremos sempre uma forma do tipo $\cos(kx)$, mudando apenas a "amplitude" ($2A\cos(\omega t)$) para tempos distintos. Temos assim uma *onda estacionária*.

Há pontos na corda que se mantém sempre na posição $y(x,t) = 0$. Tais pontos são denominados *nodos*. Por outro lado, os pontos de maior amplitude são denominados *ventres*.

1.4.3 Batimentos – Velocidade de Grupo

Vamos agora considerar o caso em que as duas ondas componentes, y_1 e y_2, estão se propagando na mesma direção, possuem a mesma amplitude, mas suas freqüências e números de onda são diferentes. Ou seja

$$y_1(x,t) = A\cos(k_1 x - \omega_1 t) \quad \text{e} \quad y_2(x,t) = A\cos(k_2 x - \omega_2 t). \tag{1.4.14}$$

Usando a relação trigonométrica dada em (B.1.7) (**demonstre essa relação**) e introduzindo as grandezas

$$\begin{array}{rcl} \bar{k} & \equiv & \dfrac{k_1 + k_2}{2} \\ \bar{\omega} & \equiv & \dfrac{\omega_1 + \omega_2}{2} \\ \Delta k & \equiv & k_1 - k_2 \\ \Delta\omega & \equiv & \omega_1 - \omega_2 \end{array} \tag{1.4.15}$$

obtemos

$$y(x,t) = \mathcal{A}(x,t)\cos(\bar{k}x - \bar{\omega}t), \tag{1.4.16}$$

onde

$$\mathcal{A}(x,t) = 2A\cos\left(\frac{\Delta k}{2}x - \frac{\Delta\omega}{2}t\right). \tag{1.4.17}$$

Vejamos o que está ocorrendo em uma dada posição x; por exemplo, em $x = 0$. Um caso interessante ocorre quando as duas freqüências são muito próximas. Por exemplo, quando $\omega_1 \approx \omega_2$. Neste caso, teremos uma oscilação harmônica de freqüência $\bar{\omega} \approx \omega_1 \approx \omega_2$, *modulada* por uma amplitude cuja freqüência de modulação é relativamente pequena $\omega_1 - \omega_2$ (note que a freqüência de modulação é o dobro de $\Delta\omega/2$, pois estamos falando da modulação de intensidade). Esse é o fenômeno de *batimentos*, ou seja, de uma oscilação da intensidade da onda com freqüência bem menor que a freqüência da própria onda.

Exemplo: Um músico está afinando seu instrumento de corda com o auxílio de um diapasão que emite uma freqüência de 440 Hz. Quando o som da corda é produzido juntamente com o som do diapasão, a *intensidade máxima* dos batimentos ouvidos se repete a cada $0,5\,s$. Determine o ajuste percentual que deve ser feito na tensão da corda de modo a afiná-la.

Solução: A intensidade é, como sabemos, proporcional ao quadrado da amplitude. De acordo com a equação (1.4.17), o máximo do quadrado da amplitude se repete em intervalos de

$$\frac{1}{2}\frac{2\pi}{\frac{\Delta\omega}{2}} = \frac{1}{\Delta\nu}.$$

Como o afinador ouve os máximos a cada $0,5\,s$, teremos

$$\Delta\nu = 2\,s^{-1}.$$

Essa é a diferença entre a freqüência da corda e a freqüencia do diapasão.

Podemos agora calcular a correspondente diferença de tensão entre a corda afinada (concordância com o diapasão) e a corda desafinada. Usando a equação (1.3.10), e também a relação $v = \lambda\nu$, teremos

$$\nu = \frac{1}{\lambda}\sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

Portanto (note que o comprimento de onda é fixado pelo comprimento da corda, supondo o modo fundamental),

$$\Delta\nu = \frac{1}{\lambda}\sqrt{\frac{1}{\mu}}\frac{1}{2}(T)^{-1/2}\Delta T.$$

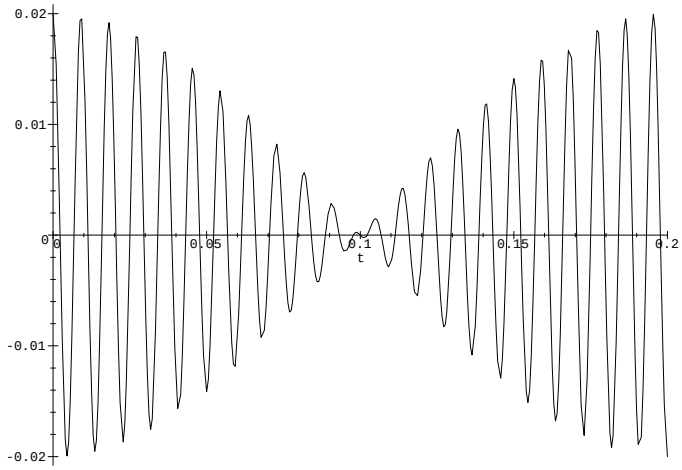
Fazendo a razão entre as duas últimas equações, teremos

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = \frac{1}{2}\frac{\Delta T}{T}.$$

Como vimos acima, $\Delta\nu = 2\,s^{-1}$. Logo,

$$\frac{\Delta T}{T} = \frac{4}{440} = \frac{1}{110} \approx 0,91\,\%.$$

A figura seguinte mostra um exemplo com os seguintes valores para as grandezas que aparecem na Eq. (1.4.16): $A = 1$ cm, $x = 0$, $\bar{\omega} = (2\pi)110$ Hz e $\Delta\omega = (2\pi)10$ Hz.



Exercício: Utilize seus recursos computacionais para obter os gráficos correspondentes a outros valores dos parâmetros.

A fase da onda modulada é

$$\phi(x,t) = \bar{k}x - \bar{\omega}t. \tag{1.4.18}$$

Portanto, a velocidade de fase é

$$v_\phi = \frac{\bar{\omega}}{\bar{k}}. \tag{1.4.19}$$

A *envoltória* da onda possui fase $\Delta kx - \Delta\omega t$. Logo, a velocidade com que um ponto da envoltória se move é

$$v_g = \frac{\Delta\omega}{\Delta k} \approx \frac{d\omega}{dk}. \tag{1.4.20}$$

Esta última é a *velocidade de grupo*, ou seja, a velocidade com que se desloca um grupo de ondas.

Vemos que nos casos em que a freqüência ω é uma função linear de k, a velocidade de grupo coincide com a velocidade de fase. Esse é o caso das ondas que se propagam na corda. Há no entanto outros fenômenos ondulatórios, para os quais a velocidade de fase depende do comprimento de onda, de modo que

$$\omega = kv_\phi(k) \tag{1.4.21}$$

resultando em uma velocidade de grupo

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = v_\phi + k\frac{dv_\phi}{dk} \neq v_\phi. \tag{1.4.22}$$

Quando isso ocorre, temos o fenômeno de *dispersão*. É o caso, por exemplo, das *ondas eletromagnéticas* (luz) em meios materiais.

Exercício:

Na Mecânica Quântica, teoria que descreve a física microscópica, a onda associada a uma partícula livre obedece a seguinte relação de dispersão:

$$\omega = \frac{\hbar}{2m}k^2, \tag{1.4.23}$$

onde m é a massa da partícula e $\hbar = 1,05 \times 10^{-34} Js$ é a "constante de Planck".

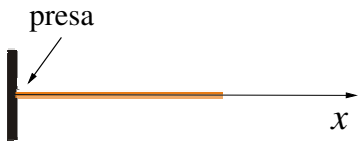
(a) Verifique as dimensões da equação acima.

(b) Determine as velocidades de grupo e de fase.

1.5 Reflexão de ondas

1.5.1 Extremidade fixa

Consideremos uma onda qualquer, *se propagando para a esquerda*, em uma corda que possui sua extremidade esquerda presa em $x = 0$, como ilustrado na figura abaixo



Temos agora uma situação tal que, pela primeira vez, o problema envolve informação sobre a *extremidade da corda*. Esse tipo de informação denomina-se *condição de contorno*. Matematicamente, a solução da equação de onda é

$$y(x,t) = g(x+vt) \ \textbf{antes de atingir a extremidade}. \tag{1.5.1}$$

Já sabemos que a solução geral é

$$y(x,t) = f(x-vt) + g(x+vt). \tag{1.5.2}$$

Portanto, $f = 0$ antes de atingir $x = 0$. A condição de contorno "corda presa na origem" significa matematicamente que

$$y(0,t) = 0. \tag{1.5.3}$$

Substituindo (1.5.2) em (1.5.3), obtemos a seguinte relação entre a função conhecida f e a desconhecida g

$$f(-vt) = -g(vt). \tag{1.5.4}$$

Como o tempo t é qualquer, esta condição determina completamente a função f

$$f(x-vt) = -g(-x+vt). \tag{1.5.5}$$

Substituindo (1.5.5) em (1.5.2), obtemos a solução

$$y(x,t) = \underbrace{g(x+vt)}_{\text{para esquerda}} - \underbrace{g(-x+vt)}_{\text{para direita}}. \tag{1.5.6}$$

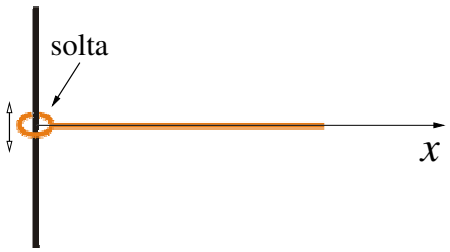
Isso resolve completamente o problema, visto que a função g é conhecida.

Matematicamente, a solução (1.5.6) representa dois pulsos se propagando em sentidos opostos. Isso inclui um pulso vindo da esquerda para a direita, na região $x < 0$, *antes da chegada em* $x = 0$. Quando os dois pulsos se encontram, em $x = 0$, temos $y(0,t) = 0$. Posteriormente, o pulso da direita para a esquerda "continua" se propagando para a região $x < 0$ e o pulso da esquerda para a direita continua seu trajeto para a direita. Naturalmente, a região $x < 0$ não existe fisicamente.

É importante notar que o *pulso refletido* volta com o sinal oposto do *pulso incidente* (uma defasagem de π,i.e., o pulso refletido volta multiplicado pelo fator de fase $\exp(-i\pi)$). Isso ocorre porque o suporte que está fixando a corda em $x = 0$ aplica uma *força de reação à corda* que é igual e oposta (terceira lei de Newton) à força aplicada pela corda.

1.5.2 Extremidade livre

Há também a possibilidade de que a corda simplesmente "começe" em $x = 0$, sem que tenha seu movimento vertical restrito neste ponto, como mostra a figura abaixo.



Neste caso, a única força que atua sobre a corda em $x = 0$ é a própria tensão T, que é horizontal. Isso nos dá a condição

$$F_y(0,t) = -T\frac{\partial y}{\partial x}(0,t) = 0 \tag{1.5.7}$$

Levando esta condição na solução geral (1.5.2), teremos

$$\frac{\partial y}{\partial x}(0,t) = f'(-vt) + g'(vt) = 0. \tag{1.5.8}$$

Essa condição é satisfeita por

$$f(x - vt) = g(-x + vt). \tag{1.5.9}$$

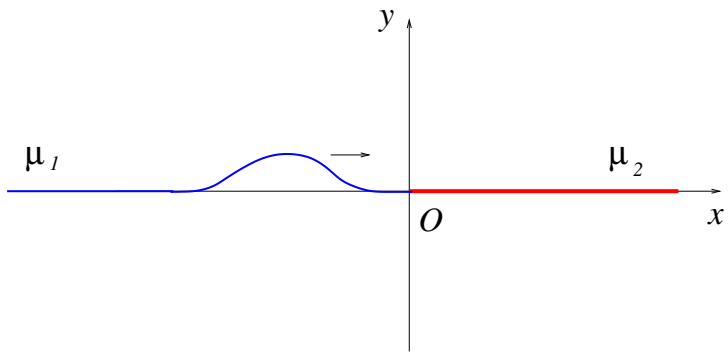
Portanto a solução tem a forma

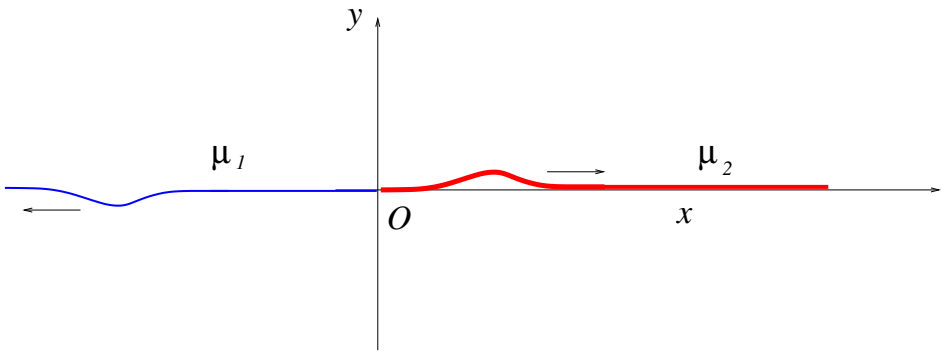
$$y(x,t) = \underbrace{g(x+vt)}_{\text{para esquerda}} + \underbrace{g(-x+vt)}_{\text{para direita}}. \tag{1.5.10}$$

Vemos que neste caso o pulso refletido não muda de fase.

1.5.3 Reflexão em um ponto de junção

A experiência mostra que um pulso que se propaga em uma corda é parcialmente refletido e parcialmente transmitido em um ponto de junção. As duas figuras abaixo representam possíveis configurações da corda antes e depois da passagem de um pulso pelo ponto $x = 0$.





Consideremos uma corda possuindo densidade μ_1 para $x < 0$ e μ_2 para $x \geq 0$. A tensão em toda a extensão da corda é T. Inicialmente é produzida uma onda progressiva para a direita que irá passar pelo ponto de junção em $x = 0$ e possui a forma

$$y_i(x,t) = f(x - v_1 t); \quad x < 0; \quad v_1 = \sqrt{\frac{T}{\mu_1}} \tag{1.5.11}$$

Ao atingir o ponto de junção, teremos, em geral, uma *onda refletida*

$$y_r(x,t) = g(x + v_1 t); \quad x < 0; \quad v_1 = \sqrt{\frac{T}{\mu_1}} \tag{1.5.12}$$

e uma *onda transmitida* para $x \geq 0$

$$y_t(x,t) = h(x - v_2 t); \quad x \geq 0; \quad v_2 = \sqrt{\frac{T}{\mu_2}} \tag{1.5.13}$$

As ondas $y_i(x,y)$ e $y_r(x,t)$ se sobrepõe na região à esquerda ($x < 0$) e se propagam com velocidade v_1. Para $x \geq 0$ há somente a onda transmitida $y_t(x,t)$ que se propaga com velocidade v_2. Temos assim uma onda à esquerda dada pela superposição de y_i e y_r

$$y_e(x,t) = f(x - v_1 t) + g(x + v_1 t) \tag{1.5.14}$$

e a onda à direita

$$y_d(x,t) = h(x - v_2 t). \tag{1.5.15}$$

Há portanto suficiente generalidade para que sejam satisfeitas as seguintes condições em $x = 0$:

(1) A *forma da corda* é contínua em $x = 0$.

(2) A *derivada da forma da corda* é contínua em $x = 0$.

A primeira condição acima é uma conseqüência imediata de as duas metades da corda *estarem unidas* em $x = 0$. Usando as equações (1.5.14) e (1.5.15), teremos

$$f(-v_1 t) + g(v_1 t) = h(-v_2 t) \tag{1.5.16}$$

A segunda condição pode ser obtida levando em conta que a força resultante sobre o pequeno elemento de corda em torno de $x = 0$ é, de acordo com a equação (1.3.3),

$$T\left(\frac{\partial y_e}{\partial x} - \frac{\partial y_d}{\partial x}\right). \tag{1.5.17}$$

Mas esta força deve se anular quando o elemento de corda tende a zero, caso contrário teríamos uma força finita agindo sobre uma massa infinitesimal; isso causaria uma aceleração infinita. Portanto, devemos ter, em $x = 0$,

$$\frac{\partial y_e}{\partial x} = \frac{\partial y_d}{\partial x}; \quad \text{em } \ x = 0. \tag{1.5.18}$$

Usando as equações (1.5.14) e (1.5.15) na equação acima, teremos

$$f'(-v_1 t) + g'(v_1 t) = h'(-v_2 t), \tag{1.5.19}$$

onde estamos usando a notação

$$f'(u) = \frac{df}{du}. \tag{1.5.20}$$

Reescrevendo equação (1.5.19), como

$$df(-v_1 t) - dg(v_1 t) = \frac{dh(-v_2 t)}{d(-v_2 t)} d(v_1 t) \tag{1.5.21}$$

e integrando com a condição (1.5.16) levada em conta, teremos

$$f(-v_1t) - g(v_1t) = \frac{v_1}{v_2}h(-v_2t). \tag{1.5.22}$$

As equações (1.5.16) e (1.5.22) permitem expressar as funcões g e h em termos da função f. Ou seja, podemos expressar as ondas refletida e transmitida em termos da onda incidente. Resolvendo as equações, obtemos

$$g(v_1t) = -\frac{v_1 - v_2}{v_1 + v_2}f(-v_1t) \tag{1.5.23}$$

e

$$h(-v_2t) = \frac{2}{v_1 + v_2}f(-v_1t) \tag{1.5.24}$$

As equações acima mostram que as ondas refletida e incidente terão, *relativamente à onda incidente*, amplitudes

$$\rho \equiv -\frac{v_1 - v_2}{v_1 + v_2} \tag{1.5.25}$$

e

$$\tau \equiv \frac{2v_2}{v_1 + v_2}. \tag{1.5.26}$$

Ou seja, se a onda incidente possui amplitude A_1, as ondas refletida e transmitida terão amplitudes ρA_1 e τA_2 respectivamente. As grandezas ρ e τ são denominadas, respectivamente, *amplitude de reflexão* e *amplitude de transmissão* (ver problema 11 do volume 2 HMN).

No caso especial em que a onda incidente f é *harmônica*, teremos $f(x-v_1t) = A_1\cos(k_1x-\omega t)$. Portanto, $f(-v_1t) = A_1\cos(\omega t)$ e as equações (1.5.23) e (1.5.24) podem ser escritas como

$$g(v_1t) = \rho A_1\cos(\omega t) \tag{1.5.27}$$

e

$$h(-v_2t) = \tau A_1\cos(\omega t). \tag{1.5.28}$$

Fazendo $t \to x/v_1 + t$ e $t \to -x/v_2 + t$ na primeira e na segunda equação acima, respectivamente, teremos

$$g(x + v_1t) = \rho A_1\cos(k_1x + \omega t) \tag{1.5.29}$$

e

$$h(x - v_2t) = \tau A_1\cos(-k_2x + \omega t) = \tau A_1\cos(k_2x - \omega t). \tag{1.5.30}$$

Ou seja, a onda incidente harmônica gera duas ondas harmônicas, em $x = 0$, (refletida e transmitida) de amplitudes ρA_1 e τA_1, respectivamente.

É interessante analisar o *sinal* de ρ e τ. Como v_1 e v_2 são ambos positivos, τ também é positivo. Portanto, a onda transmitida possui, em $x = 0$, a *mesma fase* da onda incidente. Já o sinal de ρ depende do sinal de $v_2 - v_1$. Se a velocidade de propagação no meio 2 é maior do que no meio 1, então a fase da onda refletida será a mesma da onda incidente. Caso contrário, a onda refletida terá a fase variada de π em relação à onda incidente ($-\cos(x) = \cos(x + \pi)$). Lembrando que $v_1 > v_2$ significa que $\mu_1 < \mu_2$, vemos que quando a onda vai do meio menos denso para o mais denso, a fase da onda refletida é invertida. É interessante considerar o caso limite quando $\mu_1 \ll \mu_2$, ou seja $v_1 \gg v_2$. Neste caso, as equações (1.5.25) e (1.5.26) resultam em $\rho \approx -1$ e $\tau \approx 0$. Ou seja, a onda incidente é quase totalmente refletida.

Vejamos agora a *intensidade* das três ondas. Usando a relação (1.3.20) e levando em conta as expressões obtidas acima, podemos escrever para as intensidades incidente, refletida e transmitida

$$I_i = \frac{1}{2}\mu_1 v_1 \omega^2 A_1^2, \tag{1.5.31}$$

$$I_r = \frac{1}{2}\mu_1 v_1 \omega^2 \rho^2 A_1^2, \tag{1.5.32}$$

e

$$I_t = \frac{1}{2}\mu_2 v_2 \omega^2 \tau^2 A_1^2. \tag{1.5.33}$$

Costuma-se definir a *refletividade* e a *transmissividade* como as seguintes razões

$$r \equiv \frac{I_r}{I_i} \tag{1.5.34}$$

$$t \equiv \frac{I_t}{I_i} \tag{1.5.35}$$

Usando as expressões acima, teremos

$$r = \rho^2 = \frac{(v_1 - v_2)^2}{(v_1 + v_2)^2} \tag{1.5.36}$$

e

$$t = \frac{\mu_2 v_2}{\mu_1 v_1}\tau^2. \tag{1.5.37}$$

Levando em conta que $v_1^2 = T/\mu_1$ e $v_2^2 = T/\mu_2$, podemos reescrever t como

$$t = \frac{v_1}{v_2}\tau^2 = \frac{v_1}{v_2}\frac{4v_2^2}{(v_1 + v_2)^2} = \frac{4v_1 v_2}{(v_1 + v_2)^2}. \tag{1.5.38}$$

Portanto, um simples cálculo mostra que

$$r + t = 1. \tag{1.5.39}$$

Logo, usando as equações (1.5.34) e (1.5.35), concluimos que

$$I_r + I_t = I_i. \tag{1.5.40}$$

Esta relação é conseqüência da conservação de energia.

1.6 Modos Normais de Vibração – *Ondas Estacionárias II*

Suponha que agora a corda tenha uma comprimento finito l. Neste caso, deve haver uma situação estacionária tal que há uma superposição de ondas em ambos os sentidos. Um caso interessante é quando todos os pontos da corda oscilam com a mesma freqüência ω de modo que

$$y(x,t) = GA(x)\cos(\omega t + \delta), \tag{1.6.1}$$

onde G é uma constante.

Como vimos na subseção (1.4.2) o efeito produzido pela superposição de ondas que caminham em sentidos opostos é o de uma *onda estacionária* como dada pela equação (1.4.13). Para explorar este fato em maior generalidade, vamos supor que uma possível solução da corda finita é

$$y(x,t) = A(x)B(t), \tag{1.6.2}$$

ou seja, o produto de uma função só de x por uma função só de t. Substituindo (1.6.2) em (1.2.3), obtemos

$$\frac{1}{v^2}A\frac{d^2B}{dt^2} = B\frac{d^2A}{dx^2}. \tag{1.6.3}$$

Dividindo ambos os membros por AB, obtemos,

$$\frac{1}{v^2}\frac{1}{B}\frac{d^2B}{dt^2} = \frac{1}{A}\frac{d^2A}{dx^2}. \tag{1.6.4}$$

Observe que o lado esquerdo desta última equação é uma função só de t e o lado direito é uma função só de x. A única maneira de manter a igualdade para quaisquer x e t, é que ambos os membros sejam iguais a uma constante. Para que a solução seja oscilatória, escolhemos esta constante igual a $-k^2$. Logo, usando o resultado conhecido para a solução geral da equação do *oscilador harmônico*, teremos

$$A(x) = C\cos(kx) + D\text{sen}(kx) \tag{1.6.5a}$$

$$B(t) = E\cos(\omega t) + F\text{sen}(\omega t); \quad \omega = kv. \tag{1.6.5b}$$

onde C, D, E e F são constantes quaisquer. Note que podemos ainda reescrever o factor $B(t)$ como

$$B(t) = G\cos(\omega t + \delta). \tag{1.6.6}$$

(Verifique isso obtendo a relação entre (E,F), (G,δ)). Essa última equação de fato coincide com a (1.6.1).

1.6.1 Corda presa nas extremidades

Para uma corda de comprimento l, presa nas extremidades, teremos da equação (1.6.5a),

$$A(0) = 0 = C, \quad A(kl) = 0 = \text{sen}(kl). \tag{1.6.7}$$

Portanto,

$$kl = n\pi, \quad n = 1, 2, 3\cdots. \tag{1.6.8}$$

Logo, os possíveis valores de k são

$$k_n = \frac{n\pi}{l}, \quad n = 1, 2, 3\cdots. \tag{1.6.9}$$

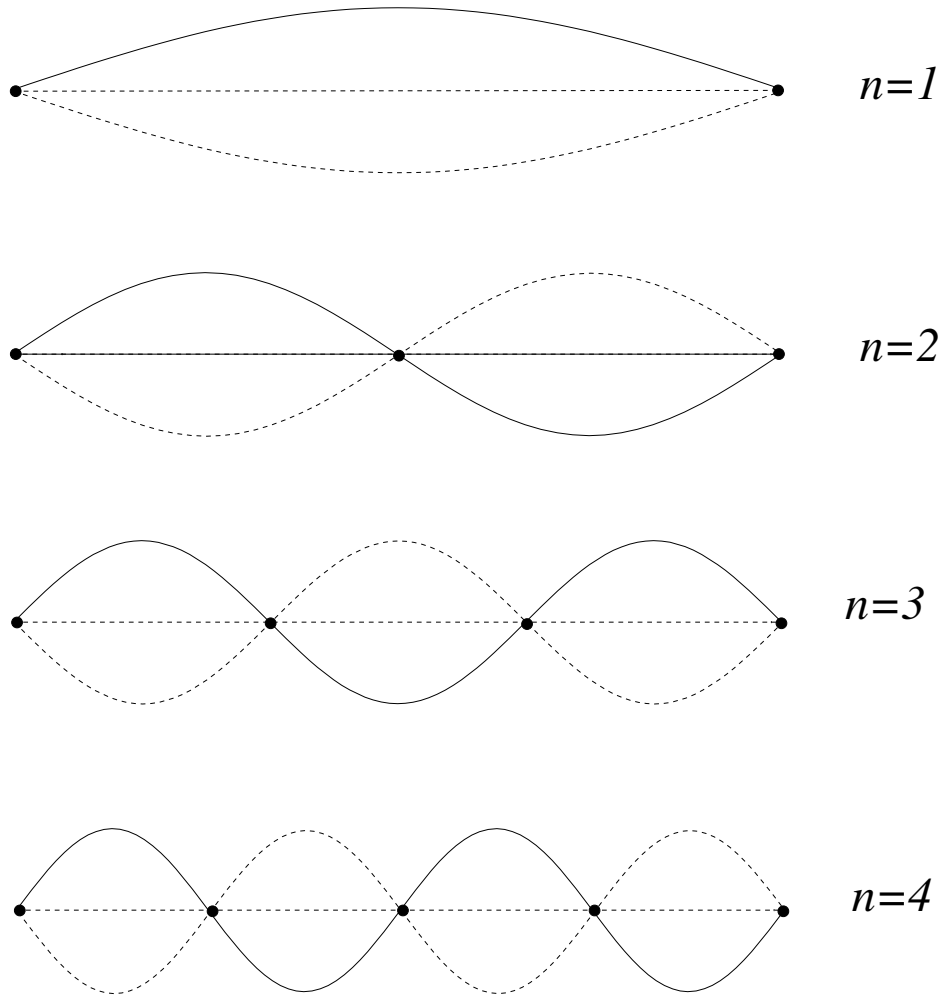
Os possíveis valores de ω são

$$\omega_n = k_n v = \frac{n\pi}{l}v. \tag{1.6.10}$$

O comprimento de onda associado à cada modo é

$$\lambda_n = \frac{2\pi}{k_n} = \frac{2l}{n}. \tag{1.6.11}$$

Há portanto uma relação entre o comprimento de onda de cada modo e o comprimento da corda. Por exemplo, o modo normal $n = 1$, modo fundamental, possui um comprimento de onda igual ao dobro do comprimento da corda. Nas figuras abaixo são mostradas as configurações da corda correspondentes aos quatro primeiros modos.



Estas configurações são descritas pela solução

$$y(x,t) = G\cos(\omega_n t + \delta)\mathrm{sen}(k_n x), \tag{1.6.12}$$

onde usamos (1.6.5a) com $C = 0$ (ver Eq. (1.6.7)) e absorvemos B em G (redefinimos a constante G).

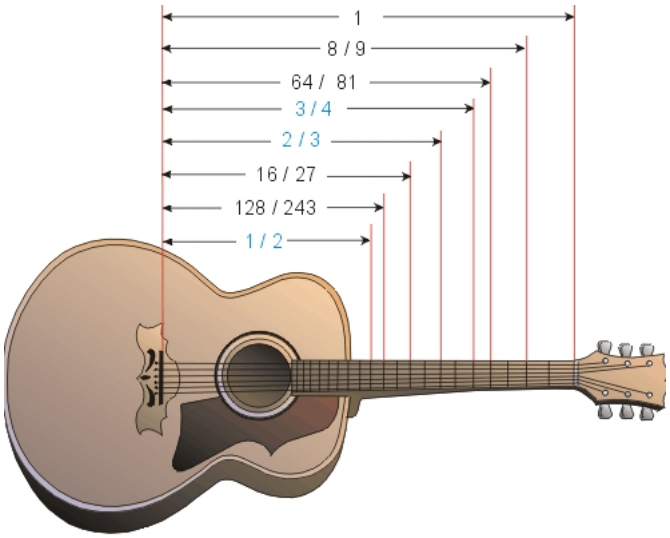
Costuma-se atribuir a Pitágoras as primeiras investigações sobre a relação entre o comprimento da corda e a freqüência que ela produz. Ele teria investigado a relação entre a freqüência (tom musical produzido) e o comprimento, tensão e densidade da corda. Essa talvez tenha sido uma das primeiras conexões do mundo físico e sensorial com a matemática, fora do contexto da geometria. Em 1634 Marin Mersenne publicou o primeiro estudo sistemático sobre o assunto, na obra entitulada "Harmonie Universelle".

Se usarmos a relação (1.6.10) juntamente com a (1.3.10), obtemos a seguinte expressão para as freqüências que podem ser produzidas por uma corda presa nas extremidades, possuindo densidade μ e tensionada por uma tensão T.

$$\nu_n = \frac{\omega_n}{2\pi} = \frac{k_n}{2\pi}v = \frac{n}{2l}v = \frac{n}{2l}\sqrt{\frac{T}{\mu}} \tag{1.6.13}$$

Essa é a relação entre as propriedades da corda (comprimento l, densidade linear μ e tensão T) e as possíveis freqüências que ela pode produzir. Por exemplo, cordas mais longas produzem sons *mais*

graves (baixas freqüências). Cordas "magras"(μ pequeno) produzem sons mais agudos. Quando tensionamos uma corda, seu som torna-se mais agudo. Todas essas informações estão condensadas na relação acima. É uma bela fórmula!



Exemplo: Calcule a energia total de uma corda de comprimento l que está presa nas extremidades.

Solução: Vamos conciderar inicialmente um dado modo normal de vibração. Nesse caso, a energia cinética de um trecho infinitesimanl da corda é

$$d\mathcal{T} = \frac{1}{2} dm \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 = \frac{1}{2}\mu \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 dx.$$

Usando a equação (1.6.12), teremos

$$d\mathcal{T} = \frac{1}{2}\mu \left(-\omega_n\, G \mathrm{sen}(\omega_n t + \delta)\mathrm{sen}(k_n x)\right)^2 dx.$$

Vemos que a energia cinética será máxima quando $\mathrm{sen}(\omega_n t + \delta) = 1$, ou seja, quando a amplitude da onda estacionária em (1.6.12) é nula. Mas nesse caso, a *energia potencial* da onda estacionária é nula e a energia cinética é igual a energia total. Portanto, a energia total de um trecho da corda é

$$dE = \frac{1}{2}\mu\omega_n^2\, G^2 \mathrm{sen}^2(k_n x) dx.$$

Integrando a expressão acima para toda a corda, teremos

$$E = \frac{G^2\mu\omega_n^2}{2}\int_0^l \mathrm{sen}^2(k_n x)dx. = \frac{G^2\mu\omega_n^2}{2}\left(\frac{l}{2} - \frac{\cos(k_n\, l)\sin(k_n\, l)}{2\, k_n}\right) = \frac{G^2\mu\omega_n^2 l}{4}.$$

Na última igualdade usamos a condição de corda presa nas extremidades dada pela relação (1.6.9). Usando ainda a fórmula (1.6.13), teremos finalmente

$$E = n^2\pi^2\, \frac{G^2\, T}{4l}.$$

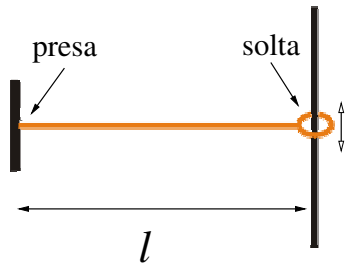
Se a corda estiver vibrando em em dos modos normais de vibração, a expressão acima fornece a energia deste modo. Veremos mais adiante que o movimento geral da corda pode ser descrito como uma combinação linear de modos normais, cada um dos quais possui uma amplitude G_n, dependente de n. Portanto, para o movimento geral de uma corda presa nas duas extremidades, teremos

$$E_{\mathrm{total}} = \pi^2\, \frac{T}{4l}\sum_n n^2 G_n^2.$$

Vemos assim que G_n deve decrescer suficientemente, quando n cresce, para que a energia seja finita.

1.6.2 Corda presa em uma extremidade e solta em outra

Supondo que a corda esteja presa na origem e solta[3] em $x = l$, conforme a figura abaixo



teremos, usando (1.6.5a),

$$A(0) = C\cos(0) + D\text{sen}(0) = 0. \tag{1.6.14}$$

Portanto, $C = 0$. Em $x = l$, devemos ter a derivada de $A(x)$ igual a zero. Logo,

$$Dk\cos(kl) = 0. \tag{1.6.15}$$

Portanto,

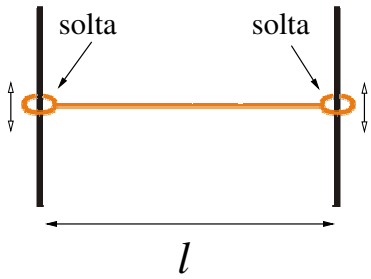
$$kl = \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi \tag{1.6.16}$$

O que dá os seguintes valores para os possíveis comprimentos de onda

$$\lambda = \frac{4l}{2n+1}. \tag{1.6.17}$$

1.6.3 Corda solta em ambas as extremidades

Supondo que a corda esteja solta na origem e em $x = l$ como na figura abaixo



teremos, usando (1.6.5a), com a condição de movimento vertical livre

$$\left.\frac{\partial A(x)}{\partial x}\right|_{x=0} = \left.\frac{\partial A(x)}{\partial x}\right|_{x=l} = 0. \tag{1.6.18}$$

A primeira condição de contorno resulta em

$$-kC\text{sen}(0) + kD\cos(0) = 0. \tag{1.6.19}$$

Portanto, $D = 0$. Em $x = l$, teremos

$$Dk\text{sen}(kl) = 0. \tag{1.6.20}$$

[3] "Solta" significa que a corda pode se movimentar livremente na direção transversal. Naturalmente a corda permanece esticada como no exemplo da figura.

Portanto,

$$kl = n\pi. \tag{1.6.21}$$

Ou seja, os possíveis comprimentos de onda serão

$$\lambda = \frac{2l}{n}. \tag{1.6.22}$$

1.6.4 Movimento Geral da Corda - Análise de Fourier

Um resultado importante da seção anterior é que "ondas confinadas", ou seja, ondas restritas a uma determinada região do espaço, só podem existir para um conjunto discreto de freqüências. Vamos agora investigar um pouco mais esses *modos normais* (1.6.12). Primeiramente vamos reescreve-los como

$$y_n(x,t) = b_n \cos(\omega_n t + \delta_n)\text{sen}(k_n x), \tag{1.6.23}$$

de forma que atribuímos amplitudes b_n e fases δ_n para cada modo normal.

De acordo com o princípio de superposição, a soma

$$y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} y_n(x,t) \tag{1.6.24}$$

também será uma solução para a corda (desde de que a soma infinita seja convergente) (note que essa combinação satisfaz as condições de contorno de corda fixa nas extremidades $y(0,t) = y(l,t) = 0$).

Quando levamos em conta as condições iniciais (1.2.12), teremos

$$\begin{aligned} y(x,0) &= y_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{b_n \cos(\delta_n)}_{\equiv c_n} \text{sen}\left(\frac{n\pi}{l}x\right) \\ \left.\frac{\partial y}{\partial t}(x,t)\right|_{t=0} &= y_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{(-\frac{n\pi v}{l} b_n \text{sen}(\delta_n))}_{\equiv d_n} \text{sen}\left(\frac{n\pi}{l}x\right) \end{aligned} . \tag{1.6.25}$$

Se formos capazes de determinar c_n e d_n, definidos acima, podemos a seguir determinar b_n e δ_n e finalmente conhecer totalmente $y(x,t)$ em (1.6.24). O problema todo consiste então em determinar c_n e d_n.

A formulação geral do problema é a seguinte: dada uma função conhecida $F(x)$ (forma, ou velocidade da corda finita e presa nas extremidades), determine os coeficientes c_n tais que

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \text{sen}\left(\frac{n\pi}{l}x\right) \tag{1.6.26}$$

Essa maneira de expressar $F(x)$ chama-se *Série de Fourier da função* $F(x)$. A primeira demonstração de que se pode calcular os coeficientes c_n em termos da função $F(x)$ foi feita por Fourier em 1807. A forma explícita é

$$c_n = \frac{2}{l}\int_0^l F(x)\text{sen}\left(\frac{n\pi}{l}x\right) \mathrm{d}x. \tag{1.6.27}$$

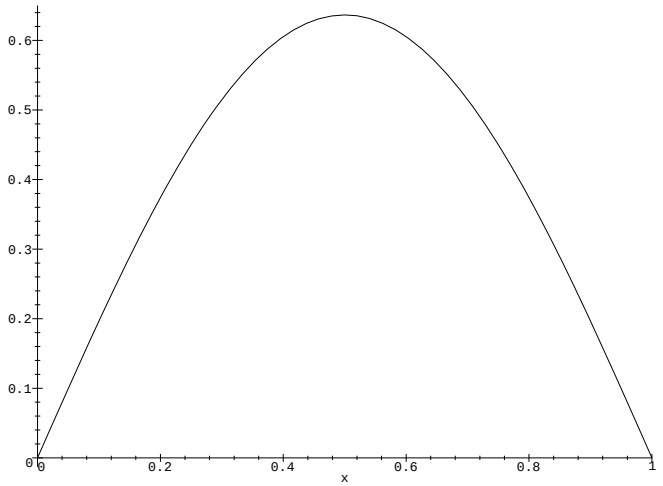
Exemplo: Consideremos a função $F(x) = x$ no intervalo $0 \leq x \leq l$. Neste caso, os coeficientes c_n são

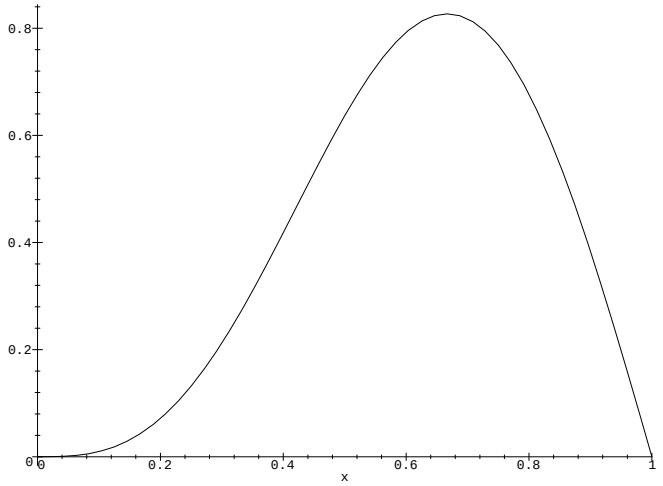
$$c_n = \frac{2}{l}\int_0^l x \text{ sen}\left(\frac{n\pi}{l}x\right) \mathrm{d}x. \tag{1.6.28}$$

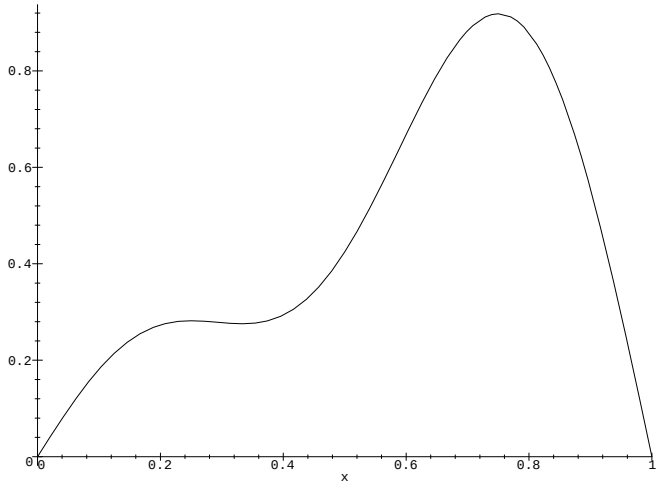
Calculando a integral (**verifique**), obtemos

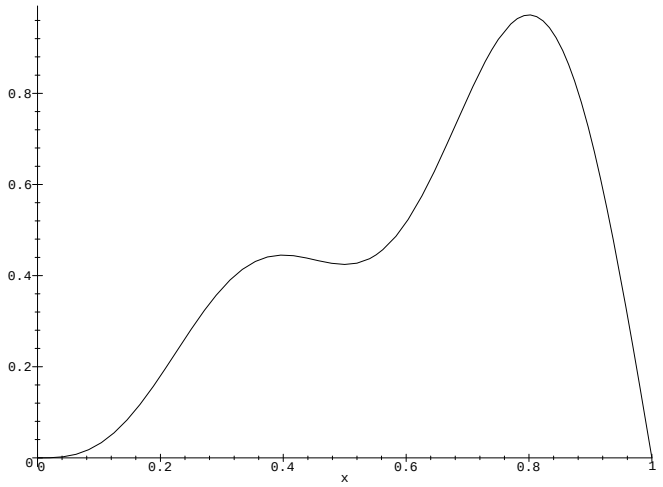
$$c_n = (-1)^{n+1}\frac{2l}{n\pi} \tag{1.6.29}$$

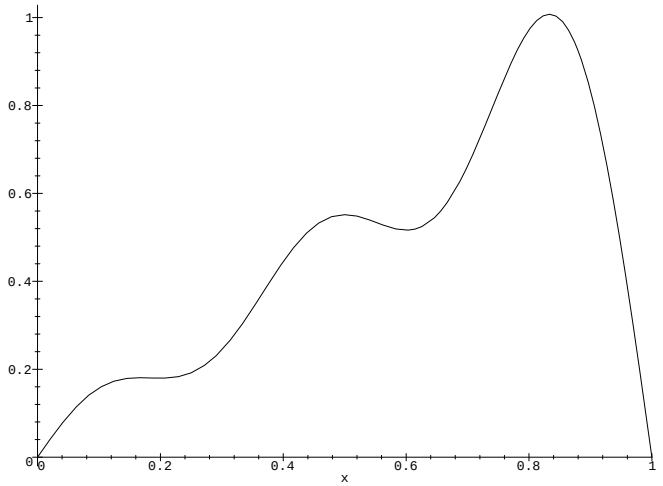
As figuras abaixo mostram o resultado que se obtem respectivamente para os casos de 1, 2, 3, 4, 5 e 100 termos na série de Fourier dada por (1.6.26) com os coeficientes dados por (1.6.29).

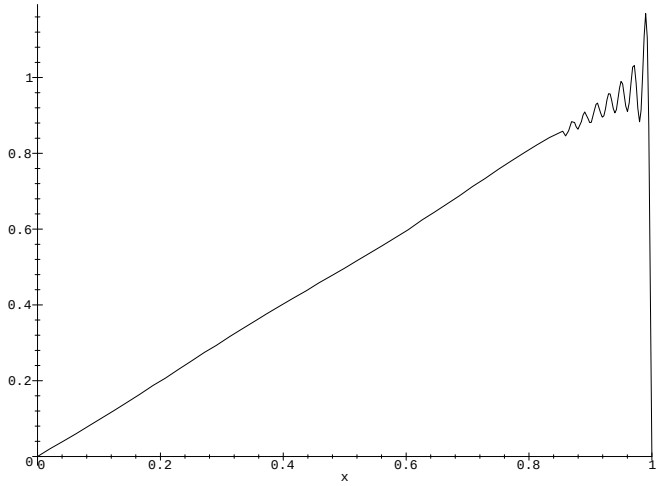












Exemplo: Consideremos agora a função $F(x) = x(l-x)/l$. Os coeficientes de Fourier são, neste caso,

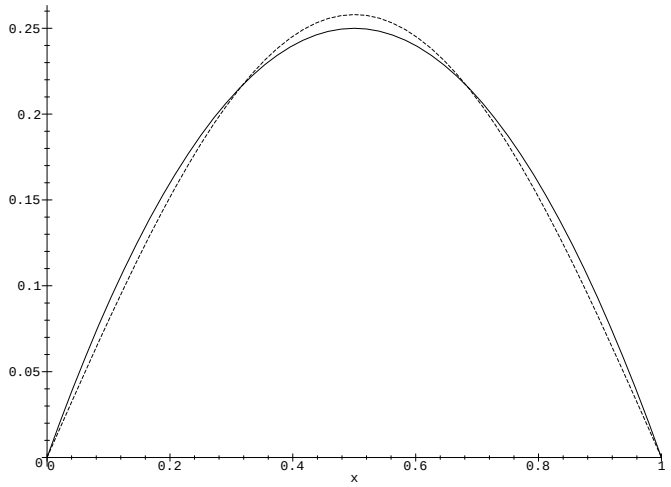
$$c_n = \frac{2}{l^2}\int_0^l x(l-x)\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\mathrm{d}x. \tag{1.6.30}$$

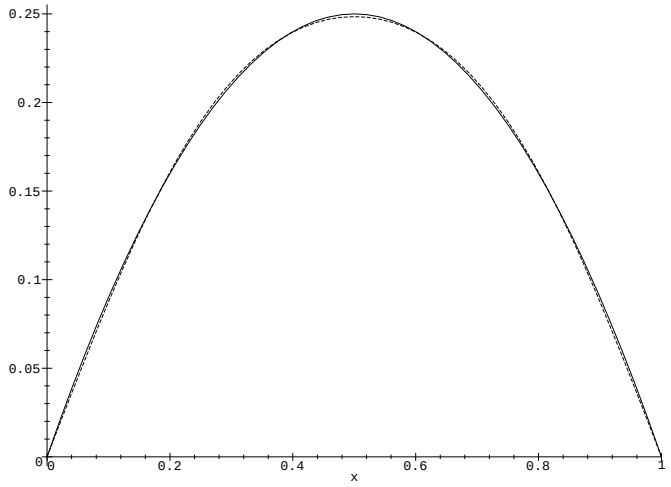
Calculando a integral (**verifique**), obtemos

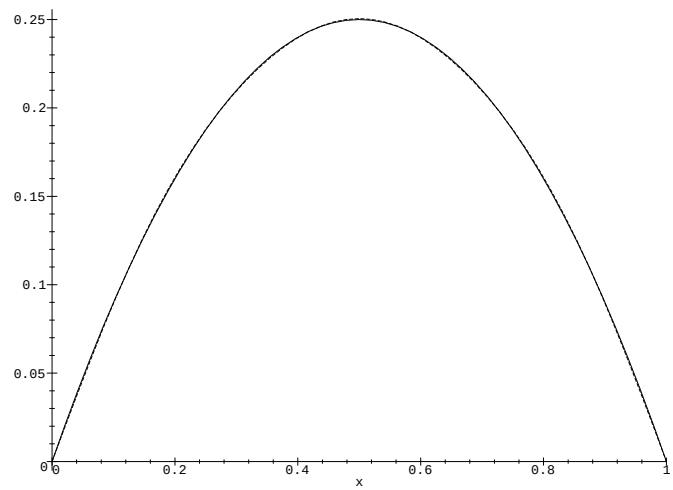
$$c_n = [1-(-1)^n]\,\frac{4l}{n^3\pi^3} \tag{1.6.31}$$

Observe que os coeficientes com n par são nulos. Isso se deve ao fato de que a função $x(l-x)$ é *simétrica* em relação ao ponto $x = l/2$, de modo que somente os harmônicos que também possuem essa simetria devem contribuir.

As figuras abaixo mostram o resultado que se obtem respectivamente para os casos de 1, 3 e 5 termos na série de Fourier (curvas tracejadas) dada por (1.6.26) com os coeficientes dados por (1.6.29).







Compare as figuras dos dois exemplos acima observando a grande convergência do segundo exemplo, para qualquer valor de x.

Consideremos agora a periodicidade de um dado ponto na corda. Fixando, por exemplo um ponto x_0, teremos

$$y(x_0,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{b_n \text{sen}\left(\frac{n\pi}{l}x_0\right)}_{\equiv B_n} \cos(2\pi\nu_n t + \delta_n). \tag{1.6.32}$$

Temos assim a série de Fourier para uma função do tempo. Note que cada um dos modos é uma função periódica do tempo com freqüência $\nu_n = n\nu_1$. Podemos mostrar facilmente que todos os modos possuem período τ_1. De fato,

$$2\pi\nu_n(t+\tau_1) = 2\pi\nu_n t + 2\pi\nu_n\tau_1 = 2\pi\nu_n t + 2\pi n \tag{1.6.33}$$

Como

$$\cos(a + 2\pi n) = \cos(a), \tag{1.6.34}$$

a função (1.6.32) se repete após um período τ_1.

Isso ocorre porque qualquer tipo de deformação da corda leva um tempo igual à $2l/v$ para voltar à sua configuração original (verifique isso considerando um pulso que se propaga e se reflete nas extremidades fixas). Levando em conta a relação (1.6.13), vemos que esse tempo é precisamente o período τ_1. Isso explica porque ao percurtirmos uma corda de violão, ouvimos um tom correspondente ao que seria se corda vibrasse com a freqüência do primeiro harmônico.

Exercício: Utilize seus recursos computacionais (sala pró-aluno, computador pessoal, etc) para obter os gráficos das sucessivas aproximações das séries de Fourier, correspondentes à função

$$F(x) = \text{sen}x(1-x). \tag{1.6.35}$$

Capítulo 2

Som

2.1 Ondas sonoras

Vimos que a produção de ondas progressivas em uma corda ocorre quando um determinado ponto da corda é posto em movimento, que pode ser um pulso ou uma oscilação harmônica. Agora vamos estudar a produção de pulsos ou oscilações harmônicas em um meio gasoso como o ar. Este estudo permitirá entender muitos aspectos de um dos mais interessantes fenômenos ondulatórios: *o som*.

Assim como no caso dos pulsos produzidos em uma corda, devemos ter em mente que o deslocamento que produz o pulso inicial deve ser *suficientemente rápido*. De fato, sabemos que se movermos a extremidade da corda com um movimento relativamente lento, o movimento local cessa e não ocorre propagação Analogamente, quando o ar é deslocado por um objeto que se move *suavemente*, haverá apenas um fluxo em volta do objeto. Por outro lado, se o movimento for suficientemente rápido, ocorrerá uma variação localizada da densidade do ar, sendo a densidade maior nos pontos que estão no *mesmo sentido do movimento*. A variação de densidade, por sua vez, produz uma variação de pressão que desloca o ar adjacente colocando-o em movimento (essa última etapa é descrita, como veremos, pela *segunda lei de Newton*). Desse modo o ciclo é fechado, propagando-se para todo o espaço. Tal ciclo pode ser descrito pelas etapas

I. Deslocamento do gás *causa* variação de densidade

II. Variação de densidade *causa* variação de pressão.

III. Variação de pressão *causa* deslocamento.

ou seja, **I→II→III→I**.

Temos assim uma descrição em termos das seguintes *variáveis*, definidas em cada ponto do espaço e em cada instante de tempo [1]:

$$\text{Deslocamento}: \quad u(x,t) \tag{2.1.1}$$

[1] Uma tal descrição não considera de forma explícita os detalhes do movimento das moléculas do meio gasoso. A função $u(x,t)$ não fornece tal informação detalhada. Do ponto de vista da *Teoria Cinética dos Gases*, que estudaremos no final do curso, quando há um adensamento em uma certa região, as moléculas fluem para as regiões menos densas de modo a uniformizar a densidade. Aparentemente, não haveria a produção de uma onda sonora. Para que uma onda (e.g. som) seja produzida, as moléculas que fluem da região de maior densidade devem transferir momento para as adjacentes, na região menos densa. Portanto, para produzir uma onda as regiões de variação de pressão ou densidade devem ser muito maiores do que a *distância média percorrida pelas moléculas antes de colidir*. Tal distância é chamada de livre caminho médio. Assim, o tamanho dos pulsos de pressão deve ser muito maior do que o livre caminho médio das moléculas do gás (veja referência [5] página 47-3). Neste regime, as ondas de pressão constituem uma descrição em termos de uma *Teoria Efetiva*.

$$\text{Variação de densidade}: \quad \rho_e(x,t) \tag{2.1.2}$$

$$\text{Variação de pressão}: \quad P_e(x,t) \tag{2.1.3}$$

É importante frisar que o deslocamento do gás $u(x,t)$ é apenas *local*, ou seja, o gás como um todo permanece em repouso enquanto ocorrem mudanças localizadas em pequenas porções do gás. Quando uma dessas mudanças se inicia, em uma dada região, o efeito se propaga para outras regiões. Veremos a seguir que essa propagação se dá segundo uma equação de ondas.

2.1.1 Derivação da equação de onda

Vamos considerar primeiramente **II**. Na situação de equilíbrio, antes da chegada da onda sonora, temos

$$(\text{Pressão de equilíbrio}) \equiv P_0$$

$$(\text{Densidade de equilíbrio}) \equiv \rho_0$$

A pressão é uma função da densidade

$$P = f(\rho) \tag{2.1.4}$$

cuja a forma explícita discutiremos mais adiante (veremos que a forma explícita de $f(\rho)$ pode ser obtida a partir da descrição do *processo de compressão* do gás quando sujeito a perturbação ondulatória sonora). Em particular, para os valores de equilíbrio, teremos $P_0 = f(\rho_0)$.

As mudanças de pressão devidas à onda sonora são extremamente pequenas. É comum se utilizar uma escala logarítmica de intensidades, já que a sensibilidade do sistema auditivo é logarítmica. Na escala de decibéis,

$$I = 20\log_{10}(P/P_{ref}), \tag{2.1.5}$$

onde $P_{ref} = 2\times 10^{-10}$ bar (1 bar $= 10^5 N/m^2 \approx 1$ atm). Um som razoavelmente intenso de cerca de 60 decibéis corresponde a uma pressão de $10^3 P_{ref} = 2\times 10^{-7}$ bar. Portanto as variações de pressão devidas ao som são muito menores do que a pressão de 1 atmosfera. Sons acima de 120 db já são dolorosos para o ouvido. Portanto, se escrevermos

$$P = P_0 + P_e \quad \text{e} \quad \rho = \rho_0 + \rho_e, \tag{2.1.6}$$

onde P_e e ρ_e são a pressão e densidade em excesso, poderemos considerar que $P_e << P_0$ e $\rho_e << \rho_0$. Neste caso,

$$P_0 + P_e = f(\rho_0 + \rho_e) = f(\rho_0) + \rho_e \left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_0 + \mathcal{O}(\rho_e^2). \tag{2.1.7}$$

Mas, $P_0 = f(\rho_0)$, logo

$$\boxed{P_e = \left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_0 \rho_e} \quad \textbf{(II)}. \tag{2.1.8}$$

O sub-índice 0 significa que a derivada está sendo calculada no ponto de equilíbrio. Mais adiante veremos em maior detalhe como obter o valor desta grandeza.

Vejamos agora a etapa **I**. Consideremos uma região do gás de forma cilíndrica e possuindo área de seção A. Vamos descrever a posição das partículas de gás que estão localizadas sobre uma determinada seção cilíndrica, da seguinte forma:

$$(\text{posição do ar antes da passagem da onda})_1 = x$$

$$(\text{deslocamento do gás devido a passagem da onda})_1 = x + u(x,t)$$

Da mesma forma, em uma vizinhança $x + \Delta x$, teremos

$$(\text{posição do ar antes da passagem da onda})_2 = x + \Delta x$$

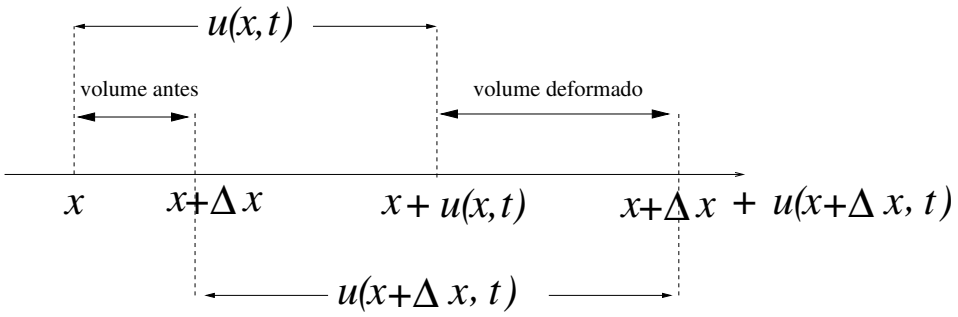
$$(\text{deslocamento do gás devido a passagem da onda})_2 = x + \Delta x + u(x + \Delta x, t)$$

Podemos agora calcular os respectivos volumes, como

$$(\text{volume antes}) = [(x + \Delta x) - x]A = \Delta x A$$

$$(\text{volume deformado pela onda}) = [(x+\Delta x+u(x+\Delta x,t))-(x+u(x,t))]A = [\Delta x+u(x+\Delta x,t)-u(x,t)]A$$

A figura abaixo ilustra estas relações.



Portanto,

$$(\text{volume deformado pela onda}) = A\Delta x \left(1 + \underbrace{\frac{u(x + \Delta x, t) - u(x,t)}{\Delta x}}_{\frac{\partial u}{\partial x}} \right)$$

Levando em conta que a massa de ar mantem-se invariável,

$$\rho_0(\text{volume antes}) = \rho(\text{volume deformado}), \tag{2.1.9}$$

teremos

$$\rho_0 A\Delta x = (\rho_0 + \rho_e)A\Delta x(1 + \frac{\partial u}{\partial x}(x,t)).$$

Cancelando $A\Delta x$,

$$\rho_0 = (\rho_0 + \rho_e)(1 + \frac{\partial u}{\partial x}(x,t)) = \rho_0 + \rho_0 \frac{\partial u}{\partial x}(x,t) + \rho_e,$$

onde levamos em conta que

$$\rho_e \frac{\partial u}{\partial x}(x,t)$$

pode ser desprezado uma vez que estamos considerando pequenas variações. Assim, obtemos finalmente,

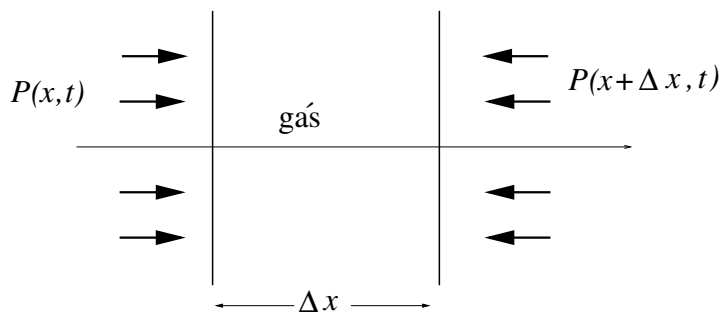
$$\boxed{\rho_e = -\rho_0 \frac{\partial u}{\partial x}(x,t)} \quad \textbf{(I)}. \tag{2.1.10}$$

Essa relação é o que esperamos fisicamente, uma vez que se o deslocamento u cresce com x (expansão do gás), a densidade deve diminuir.

Vejamos agora a etapa **III**. Considerando que a força sobre as duas seções de área A são $AP(x,t)$ (para a direita) e $AP(x+\Delta x,t)$ (para a esquerda), teremos

$$A(P(x,t) - P(x+\Delta x)) = -A\Delta x \frac{\partial P}{\partial x} = -A\Delta x \frac{\partial P_e}{\partial x}. \tag{2.1.11}$$

Na última igualdade usamos que Δx e P_e são pequenos e P_0 não depende de x (assumindo que a pressão de equilíbrio é uniforme). Ilustramos essas forças na figura abaixo.



Usando a *Segunda lei de Newton*, e levando em conta que a massa contida entre x e $x+\Delta x$ é $\rho_0 A\Delta x$, teremos

$$\underbrace{-A\Delta x \frac{\partial P_e}{\partial x}}_{F} = \underbrace{\rho_0 A\Delta x \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}}_{ma} \tag{2.1.12}$$

Logo,

$$\boxed{\rho_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\frac{\partial P_e}{\partial x}} \quad \textbf{(III)}. \tag{2.1.13}$$

Podemos agora combinar as equações (2.1.8), (2.1.10) e (2.1.13) e obter uma única equação para $u(x,t)$. Substituindo (2.1.8) em (2.1.13), obtemos

$$\rho_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_0 \frac{\partial \rho_e}{\partial x}. \tag{2.1.14}$$

Substituindo (2.1.10) na equação acima,

$$\rho_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_0 \rho_0 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \tag{2.1.15}$$

Cancelando ρ_0,

$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_0 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}. \tag{2.1.16}$$

Essa é a *equação de onda* para a função $u(x,t)$, que descreve os deslocamentos do gás em pontos x e instantes t. Note que a velocidade desta onda é

$$v_{\text{som}} = \sqrt{\left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_0}. \tag{2.1.17}$$

Portanto a velocidade do som depende do conhecimento da equação que relaciona a pressão e a densidade do gás. Antes de tratar desse assunto, vamos explorar um pouco mais as propriedades da onda sonora.

Primeiramente, notamos que é possível também obter uma equação para as flutuações de densidade ρ_e. Derivando a equação (2.1.16) em relação a x, e usando a equação (2.1.10), obtemos

$$\boxed{\frac{\partial^2 \rho_e}{\partial t^2} = \left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_0 \frac{\partial^2 \rho_e}{\partial x^2}}. \tag{2.1.18}$$

Usando agora (2.1.8) em (2.1.18), teremos

$$\boxed{\frac{\partial^2 P_e}{\partial t^2} = \left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_0 \frac{\partial^2 Pe}{\partial x^2}}. \tag{2.1.19}$$

Portanto as ondas de deslocamento, densidade e pressão se propagam segundo a mesma equação, com a mesma velocidade.

2.1.2 Velocidade do Som

Vejamos como determinar a velocidade do som a partir das propriedades do gás. Quando o gás é comprimido, sua densidade varia de acordo com a equação que relaciona a pressão, o volume e a temperatura. Por exemplo, para um gás ideal (gás rarefeito), a *equação de estado* é

$$PV = nRT, \tag{2.1.20}$$

onde n é a massa do gás em moles e R é a constante universal dos gases. Em um processo de variação de pressão, *mantendo a temperatura fixa*, (processo isotérmico), teremos

$$P = \alpha\rho \tag{2.1.21}$$

Ou seja

$$\frac{\partial P}{\partial \rho}_{T\ \text{const.}} = \alpha = \frac{P}{\rho}. \tag{2.1.22}$$

Portanto, a velocidade do som seria, usando (2.1.17)

$$v_{T\ \text{const.}} = \sqrt{\frac{P_0}{\rho_0}}. \tag{2.1.23}$$

Usando os dados para o ar ($P_0 = 1$ atm e $\rho_0 = 1,3$ kg/m^3)[2] , obtemos

$$v_{T\ \text{const.}} = 280 \text{ m/s}. \tag{2.1.24}$$

[2]Condições normais de temperatura e pressão: $P_0 = 1\,\text{atm} = 1,013 \times 10^5\,\text{N/m}^2$, $\text{T} = 0^{\text{O}}\,\text{C} = 273\,\text{K}$

Comparando com o resultado medido, que é de 332 m/s, vemos que esse resultado está errado.

Devemos analisar com mais cuidado a hipótese de que a temperatura é mantida fixa. Para que isso ocorra, é preciso que a energia em forma de calor seja conduzida rapidamente para fora da região de compressão. Esse foi o argumento utilizado por Newton. Cerca de 100 anos depois, em 1816, Laplace argumentou que as mudanças de pressão e temperatura, na onda de pressão, ocorrem sem que haja tempo para a troca de calor. O fluxo de calor entre as regiões comprimidas e rarefeitas é muito pequeno, para comprimentos de onda grandes, comparados com o *livre caminho médio*[3] das moléculas. Nestas condições, o calor transferido é muito pequeno para alterar a velocidade de propagação da onda, embora seja suficiente para produzir uma pequena absorção da energia da onda. Para que ocorra uma absorção apreciável, o comprimento de onda deveria ser da ordem de 10^6 vezes menor que o comprimento de onda dos sons audíveis [4].

Processos em que não há fluxo de calor são denominados *processos adiabáticos* (estudaremos mais sobre isso ao longo deste curso). Para tais processos, a relação entre pressão e densidade é

$$P = \text{const } \rho^\gamma, \tag{2.1.25}$$

onde γ é uma constante. Neste caso, a velocidade do som será

$$v_{\text{som}} = \sqrt{\gamma \frac{P_0}{\rho_0}}. \tag{2.1.26}$$

No caso do ar, $\gamma = 1,4$, levando ao resultado

$$v_{\text{som}} = 332 \text{ m/s}. \tag{2.1.27}$$

Usando a equação do gás ideal e considerando que para uma massa M de gás de massa molecular μ o número de moles é $n = M/\mu$, podemos escrever

$$PV = \frac{M}{\mu} RT. \tag{2.1.28}$$

Portanto,

$$\frac{P}{\rho} = \frac{RT}{\mu}. \tag{2.1.29}$$

Substituindo na equação (2.1.26)

$$\boxed{v_{\text{som}} = \sqrt{\gamma \frac{RT}{\mu}}}. \tag{2.1.30}$$

Vemos que a velocidade do som só depende da temperatura.

É interessante também considerar que a velocidade média quadrática das moléculas, $< v^2 >$ (veremos mais sobre isso) pode ser relacionada com a temperatura segundo a relação

$$kT = \frac{1}{3} m < v^2 > = \frac{1}{3} \frac{\mu k}{R} < v^2 >, \tag{2.1.31}$$

de modo que

$$\boxed{v_{\text{som}} = \sqrt{\frac{\gamma}{3}} \sqrt{< v^2 >}} \tag{2.1.32}$$

Ou seja, a velocidade do som é da mesma ordem de magnitude que o módulo da velocidade média das moléculas.

[3] Caminho percorrido por uma molécula antes de colidir com outra.

[4] Sons audíveis situam-se na faixa de freqüência de 20 Hz até 20 kHz. Ou seja, comprimentos de onda de 16 m até 1 cm.

2.1.3 Sons harmônicos

Suponhamos que na origem de uma sistema de coordenadas exista um plano circular perpendicular à direção x. Este plano envolto por um cilindro, cujo eixo coincide com a direção x, e executa pequenas oscilações harmônicas de freqüência ω (em torno de $x = 0$) e de amplitude $\mathcal{U}$. O deslocamento do ar em torno de $x = 0$ é descrito pela equação

$$u(0,t) = \mathcal{U}\cos(-\omega t + \delta) \tag{2.1.33}$$

(a fase δ determina a posição do plano em $t = 0$). Sabemos que um deslocamento de ar qualquer, de pequena amplitude, propaga-se como uma onda progressiva segundo a equação (2.1.16). Portanto, em um ponto $x > 0$, teremos, fazendo $t \to t - x/v$ na equação (2.1.33),

$$u(x,t) = \mathcal{U}\cos(\omega/vx - \omega t + \delta) = \mathcal{U}\cos(kx - \omega t + \delta). \tag{2.1.34}$$

De acordo com a equação (2.1.10) à onda harmônica de deslocamento está associada uma onda *harmônica de densidade*, dada por

$$\rho_e(x,t) = \rho_0\mathcal{U}k\text{sen}(kx - \omega t + \delta) = \rho_0\mathcal{U}k\cos(kx - \omega t + \delta - \pi/2) \tag{2.1.35}$$

A *onda de pressão* correspondente pode ser obtida da equações (2.1.8), (2.1.17) e (2.1.17) resultando em

$$P_e(x,t) = v^2\rho_0\mathcal{U}k\cos(kx - \omega t + \delta - \pi/2). \tag{2.1.36}$$

Portanto, a onda de pressão, assim como as ondas de deslocamento e de densidade, é uma onda harmônica de freqüência ω, produzida pela fonte.

O ouvido humano consegue ouvir freqüências no intervalo entre 20 Hz e 20×10^3 Hz. Os comprimentos de onda correspondentes $\lambda = v/\nu$ (tomando a velocidade como 344 m/s) estão no intervalo O intervalo correspondente de comprimentos de onda é

$$1,7 \times 10^{-2}\, m < \lambda_{\text{som}} < 17\, m. \tag{2.1.37}$$

Note que λ está na escala das dimensões macroscópicas.

É interessante comparar estes intervalos com os correspondentes intervalos das ondas eletromagnéticas na faixa visível do espectro. A freqüência da luz visível situa-se no intervalo $0,1 \times 10^{15}\,\text{Hz} < \nu_{\text{luz}} < 0,3 \times 10^{15}\,\text{Hz}$ e os comprimentos de onda correspondentes em $3,8 \times 10^{-7}\, m < \lambda < 7,5 \times 10^{-7}\, m$. Vimos anteriormente que o *fenômeno de interferência* ocorre quando há a superposição de ondas possuindo *fases distintas*. Uma das maneiras de se produzir diferenças de fase é fazendo com que as ondas percorram caminhos distintos. Se a diferença de caminho for da ordem de Δx, as ondas harmônicas correspondentes terão uma diferença de fase da ordem de

$$\delta_{12} = k\Delta x = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta x. \tag{2.1.38}$$

Portanto, para uma diferença de caminho da mesma ordem do comprimento de onda a diferença de fase correspondente produz os efeitos de interferência como previsto pela equação (1.4.11). Quando Δx é muito maior do que λ, ocorrem muitos máximos e mínimos de interferência, o que torna sua detecção praticamente impossível. É por esse motivo que nossos sentidos são capazes de detectar o fenômeno de interferência de som, mas é muito mais difícil perceber o efeitos de interferência da luz.

2.1.4 Intensidade do som

De acordo com as equações (2.1.8) e (2.1.17) a pressão de excesso pode ser escrita como

$$P_e = \left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_0 \rho_e = v^2 \rho_e. \tag{2.1.39}$$

Levando em conta também a equação (2.1.10), teremos

$$P_e = -v^2 \rho_0 \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}. \tag{2.1.40}$$

No caso de uma onda harmônica, teremos, usando a equação (2.1.34)

$$P_e = v^2 \rho_0 \, k \mathcal{U} \mathrm{sen}(kx - \omega t + \delta). \tag{2.1.41}$$

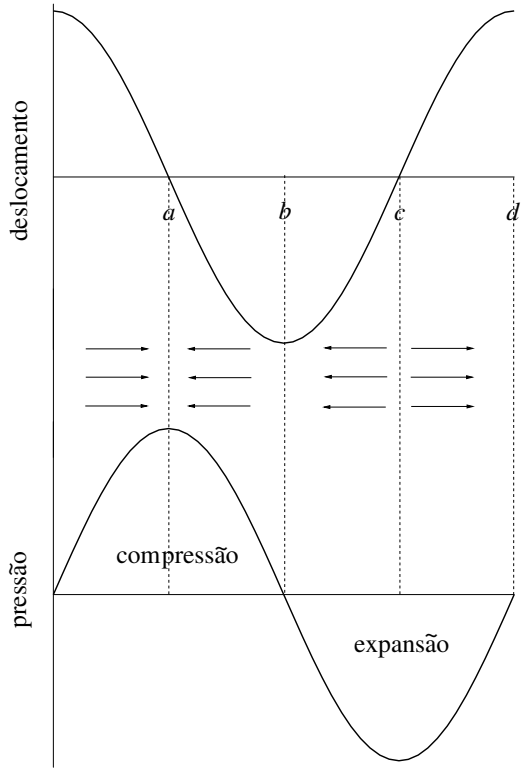
Definimos a grandeza

$$\mathcal{P} \equiv v^2 \rho_0 \, k \mathcal{U} \tag{2.1.42}$$

como a *amplitude de pressão* (verifique que $\mathcal{P}$ possui a dimensão correta). Desse modo, podemos escrever

$$P_e = \mathcal{P} \mathrm{sen}(kx - \omega t + \delta). \tag{2.1.43}$$

A figura abaixo ilustra a o significado físico da diferença de fase de $\pi/2$ entre as expressões para $u(x,t)$, dada pela equação (2.1.34), e $P_e(x,t)$.



Em pontos à esquerda de a, onde $u(x,t) > 0$, o deslocamento das porções do gás é para a direita. Por outro lado, pontos à direita de a, onde $u(x,t) < 0$, são deslocados para a esquerda. Isso faz com que a região $0 < x < b$ seja uma região de compressão. Por uma análise semelhante,

concluímos que a região entre b e d é uma região de expansão. Essa análise está de acordo com o gráfico para a pressão mostrado na parte inferior da figura acima.

Consideremos agora uma seção transversal de área A, perpendicular à direção de propagação da onda, e localizada na posição x. A força resultante sobre a superfície é

$$F(x,t) = P_e(x,t)A = \mathcal{P}\, A \,\mathrm{sen}(kx - \omega t + \delta). \tag{2.1.44}$$

Podemos agora obter a *potência instantânea*

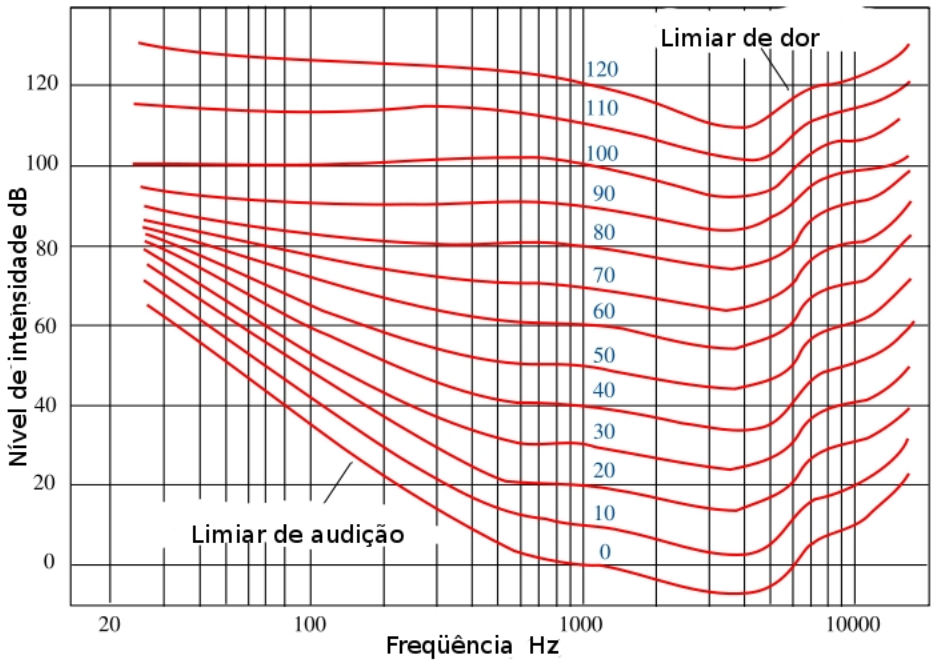
$$Pot(x,t) = P_e(x,t)A\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \mathcal{P}\, A\, \omega\, \mathcal{U} \mathrm{sen}^2(kx - \omega t + \delta). \tag{2.1.45}$$

Calculando a média no período, como fizemos nas equações (1.3.15) e (1.3.16), e dividindo o resultado pela área A, obtemos a seguinte expressão para a *intensidade da onda sonora*

$$I = \frac{\overline{Pot(x,t)}}{A} = \frac{v^2 \rho_0\, k\, \mathcal{U}^2 \omega}{2} = \frac{\rho_0\, \mathcal{U}^2 \omega^2\, v}{2}. \tag{2.1.46}$$

Vemos que a intensidade da onda sonora que se propaga em um meio de densidade ρ_0 e pressão P_0 (de modo que v também possui um valor determinado), depende da freqüência ω e da amplitude $\mathcal{U}$ (compare com a intensidade da onda em uma corda, dada pela expressão (1.3.20)).

É interessante considerar os *limiares auditivos* do ouvido humano. A figura abaixo (obtida no wikipedia) mostra as chamadas *curvas Fletcher-Munson*. A curva inferior representa o limiar de audição mínimo para diversos valores de freqüência. A curva superior é o limiar acima do qual sentimos dor. As curvas intermediárias são curvas de mesma *sensação auditiva*.



O *nível de intensidade* utilizado na figura acima é o *decibel*, cuja definição é

$$\alpha = 10 \log_{10}\left(\frac{I}{I_0}\right) db, \tag{2.1.47}$$

onde I_0 é o limiar mínimo audição, na freqüência de $10^3\,Hz$, cujo valor é

$$I_0 = 10^{-12}\,W/m^2 \tag{2.1.48}$$

O *limiar de dor* (também para $10^3\,Hz$) é 120 decibéis, ou seja, a intensidade correspondente é de $1\,W/m^2$. Note que para cada par de valores de freqüência e intensidade a amplitude da onda sonora possui um valor determinado pela equação (2.1.46). É claro que estas curvas podem variar bastante de pessoa para pessoa e também com a idade. No sítio `http://www.phys.unsw.edu.au/jw/hearing.html` você pode construir sua própria curva de Fletcher-Munson.

Exercício:

(a) Calcule as amplitudes correspondentes aos limiares mínimo e de dor.

(b) Determine as correspondentes amplitudes de pressão.

Resposta: De acordo com a equação (2.1.46), a amplitude é dada por

$$\mathcal{U} = \sqrt{\frac{2\,I}{\rho_0\omega^2\,v}} = \frac{1}{2\pi\,\nu}\sqrt{\frac{2\,I}{\rho_0\,v}}. \tag{2.1.49}$$

Usando os valores para condições atmosféricas "usuais" ($\rho_0 = 1,3\,kg/m^3$, $v = 340\,m/s$) teremos para $I = 10^{-12}\,W/m^2$ e $\nu = 10^3\,s^{-1}$

$$\mathcal{U}_{\rm min} = 1.07\times 10^{-11}\,m. \tag{2.1.50}$$

Isso corresponde a uma distância menor do que o diâmetro atômico. No caso do limiar de dor, teremos, usando $I = 1\,W/m^2$

$$\mathcal{U}_{\rm dor} = 1.07\times 10^{-2}\,mm. \tag{2.1.51}$$

Usando $k = \omega/v$ na equação (2.1.42), teremos (substituindo $\mathcal{U}$ dado na (2.1.49)), teremos

$$\mathcal{P} = v\rho_0\,\omega\,\mathcal{U} = \sqrt{2\,I\,\rho_0\,v}. \tag{2.1.52}$$

Para o limiar auditivo, teremos

$$\mathcal{P}_{\rm min} = \sqrt{2\times 10^{-12}\times 1,3\times 340} \approx 3\times 10^{-4}\times N/m^2. \tag{2.1.53}$$

Para o limiar de dor,

$$\mathcal{P}_{\rm dor} = \sqrt{2\times 1,0\times 1,3\times 340} \approx 30\times N/m^2. \tag{2.1.54}$$

Considerando que a pressão atmosférica é $10^5\times N/m^2$ e que somos capazes de suportar *pressões estáticas* de até meia atmosfera, ou seja da ordem de 10^3 vezes a pressão do limiar sonoro de dor, vemos que a dor produzida pelo som intenso se deve à existência de uma freqüência não nula.

2.2 Ondas em mais dimensões

2.2.1 Ondas planas em três dimensões

Consideremos uma linha reta orientada ao longo de uma direção qualquer, não necessariamente coincidente com as direções x, y ou z, e passando pela origem O do sistema xyz. A cada ponto

desta reta podemos associar um número ζ. Podemos então considerar a propagação de uma onda ao longo da direção definida por esta reta de tal forma que uma onda harmônica terá a forma

$$\phi(x, y, z, t) = \mathcal{A}\cos(k\zeta - \omega t + \delta). \tag{2.2.1}$$

Ou seja, a equação acima continua descrevendo uma onda que se propaga em uma única direção do espaço, mas esta direção agora é qualquer. Naturalmente o conceito chave aqui é a *isotropia* do espaço. Ou seja, estamos assumindo que todas as direções do espaço são equivalentes. Em geral, um *vetor unitário* $\hat{\zeta}$ orientado ao longo da direção de propagação, no sentido crescente de ζ, define essa direção qualquer de propagação.

Os pontos do espaço de mesma fase, ou seja aqueles para os quais $k\zeta - \omega t + \delta$ tem o mesmo valor, estão todos no plano perpendicular à direção $\hat{\zeta}$. (De fato, em qualquer outro plano o valor de ζ seria diferente e a fase teria outro valor.) Descrevendo um ponto qualquer deste plano pelo vetor $\vec{r}$, vemos que o número ζ é a projeção geométrica de $\vec{r}$ ao longo de $\hat{\zeta}$. Ou seja,

$$\zeta = \vec{r} \cdot \hat{\zeta}. \tag{2.2.2}$$

Portanto,

$$\zeta k = \vec{r} \cdot \hat{\zeta} k = \vec{r} \cdot \vec{k}. \tag{2.2.3}$$

Temos assim a seguinte forma geral para uma onda que se propaga em uma direção definida pelo vetor de onda $\vec{k}$

$$\phi(\vec{r}, t) = \mathcal{A}\cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \delta), \tag{2.2.4}$$

onde $\vec{r}$ é orientado da origem até uma ponto qualquer de coordenadas x, y, z. Nos pontos de fase constante, $k \cdot \vec{r} =$ constante define um plano cuja a equação é (expandindo o produto escalar)

$$k_x x + k_y y + k_z z = \text{constante}, \tag{2.2.5}$$

onde as componentes k_x, k_y, k_z e o valor da constante, determinam completamente o plano. Esse plano chama-se *frente de onda*. Temos assim uma *onda plana* se propagando em todo o espaço.

2.2.2 Equação de ondas em três dimensões

Substituindo (2.2.5) em (2.2.4)

$$\phi(\vec{r}, t) = \mathcal{A}\cos(k_x x + k_y y + k_z z - \omega t + \delta) \tag{2.2.6}$$

vemos a dependência explícita da onda plana nas três coordenadas espaciais. Vimos acima que esta forma da onda plana foi obtida levando em conta a *isotropia do espaço*, ou seja generalizando a propagação ao longo da direção x, para uma direção qualquer. Levando em conta o mesmo princípio de isotropia podemos facilmente generalizar a equação de ondas (1.2.3). Para isso, escrevemos inicialmente

$$\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\phi(x, y, z, t)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2\phi(x, y, z, t)}{\partial x^2} + ? = 0. \tag{2.2.7}$$

Vemos então que a única maneira de obtermos uma equivalência completa nas três coordenadas espaciais é tomando

$$? = -\frac{\partial^2\phi(x, y, z, t)}{\partial y^2} - \frac{\partial^2\phi(x, y, z, t)}{\partial z^2}. \tag{2.2.8}$$

Portanto, a equação de ondas em três dimensões é

$$\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\phi(x, y, z, t)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2\phi(x, y, z, t)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2\phi(x, y, z, t)}{\partial y^2} - \frac{\partial^2\phi(x, y, z, t)}{\partial z^2} = 0. \tag{2.2.9}$$

Se agora substituirmos a onda plana (2.2.6) na equação de ondas (2.2.9), vamos obter (verifique),

$$k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = \frac{\omega^2}{v^2}, \tag{2.2.10}$$

ou seja, em termos do módulo do vetor de onda $k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2}$, temos

$$\omega = k\,v, \tag{2.2.11}$$

que é a mesma relação de dispersão obtida anteriormente para uma onda plana propagando-se na direção x.

2.2.3 Ondas esféricas

Em um meio isotrópico, as ondas produzidas por uma fonte puntiforme (imagine um auto-falante microscópico) terão superfícies de fase constante em pontos que são equidistantes da fonte. Ou seja, as frentes de onda serão esferas de raio r, centradas na fonte. No caso de ondas harmônicas, teremos

$$\phi(r,t) = \mathcal{A}\cos(kr - \omega t + \delta), \tag{2.2.12}$$

onde $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ e $k = \omega/v$. Note que, de fato, kr constante define uma esfera de raio r.

No entanto, a amplitude $\mathcal{A}$, na equação acima, não pode ter o mesmo valor para todos os valores de r. Se assim fosse, a energia contida em frentes de onda mais distantes da fonte (as quais possuem raio maior), seria maior do que a contida nas frentes de onda mais próximas da fonte. Ou seja, a energia estaria sendo criada a medida que a onda se expande. Para manter a taxa de transmissão de energia fixa, devemos ter

$$(\text{intensidade})4\pi r^2 = \text{constante}. \tag{2.2.13}$$

Mas sabemos que a intensidade da onda é proporcional ao quadrado da amplitude. Portanto,

$$\mathcal{A}^2 r^2 = \text{constante}. \tag{2.2.14}$$

Logo,

$$\mathcal{A} = \frac{a}{r}. \tag{2.2.15}$$

Portanto, a forma geral da onda esférica é

$$\phi(r,t) = \frac{a}{r}\cos(kr - \omega t + \delta). \tag{2.2.16}$$

Analogamente, se estivéssemos tratando de ondas circulares em um superfície bi-dimensional, teríamos

$$\phi(\rho,t) = \frac{a}{\sqrt{\rho}}\cos(k\rho - \omega t + \delta). \tag{2.2.17}$$

2.2.4 Princípio de Huygens

Vamos agora abordar o problema de como obter a solução da equação de onda em três dimensões. Ou seja, conhecendo a configuração de $\phi(\vec{r},t)$ em certos pontos do espaço, queremos determinar como a onda se propaga para outros pontos do espaço. Este tipo de problema foi estudado pelo físico holandês Christiaan ındexHuygensHuygens por volta de 1678, antes, portanto da descrição

matemática em termos de uma equação de ondas. Uma formulação mais completa foi feita por Fresnel no início do século 19. O princípio de Huygens-Fresnel é um método de análise que permite tratar quantitativamente a propagação de ondas em situações bem gerais.

A idéia básica pode ser ilustrada por um fenômeno bastante familiar. Para uma pessoa que está em uma sala, com a janela aberta, os sons produzidos em qualquer local do exterior são ouvidos como se tivessem sido produzidos na própria janela. Ou seja, para quem está dentro da sala, a vibração do ar na janela constitui a fonte do sons externos.

Somos então levados a seguinte formulação devida originalmente a Huygens:

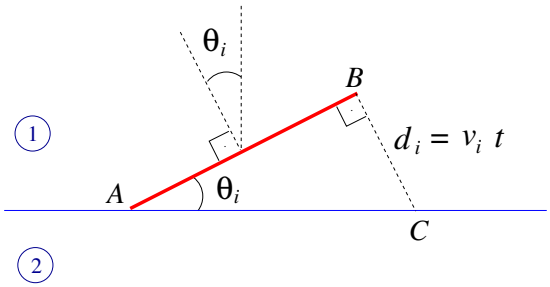
(a) Cada ponto de uma dada frente de onda comporta-se como se fosse uma *fonte de ondas secundárias*.

(b) A superposição das ondas secundárias produz a nova frente de onda de acordo com a seguinte prescrição: A frente de onda seguinte é a *envoltória* das frentes de ondas secundárias emitidas conforme (a).

Temos portanto uma análise de uma frente de onda qualquer em termos de ondas esféricas componentes, cada uma das quais é *infinitamente fraca*.

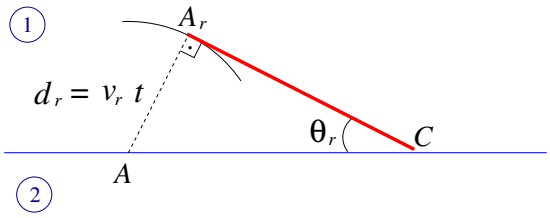
2.2.5 Reflexão e refração

A reta $\overline{AB}$, na figura abaixo, representa um trecho da intersecção de uma frente de onda plana com o plano de incidência (plano da página). A linha horizontal representa a interface de separação entre dois meios. As velocidades de propagação nos meios 1 e 2 são respectivamente v_1 e v_2. A figura também mostra o *ângulo de incidência* θ_i.



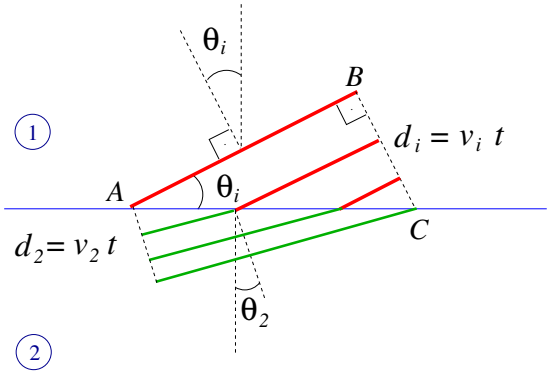
De acordo com o Princípio de Huygens, todos os pontos da frente de onda $\overline{AB}$ são fontes de ondas esféricas. Decorrido um tempo t, todas as ondas esféricas emitidas entre A e B terão atingindo a interface entre os dois meios (na figura acima a onda esférica emitida em B terá percorrido uma distância $d_i = v_i t$. Sabemos que na interface de separação entre dois meios distintos, a onda é parcialmente refletida e transmitida (veja as equações (1.5.23) e (1.5.24)).

Vamos analisar inicialmente a forma da frente de onda refletida. A figura abaixo mostra a construção de Huygens para a frente de onda já totalmente refletida após o tempo t. Note que para construir a frente de onda $\overline{A_rC}$ é suficiente considerar a tangente à esfera centrada em A e passando pelo ponto C. Note também que a reflexão se dá *no mesmo plano de incidência*. Esta importante propriedade, conhecida como *primeira lei da reflexão*, pode ser entendida considerando que a interface de descontinuidade entre os dois meios é perpendicular ao plano de incidência.

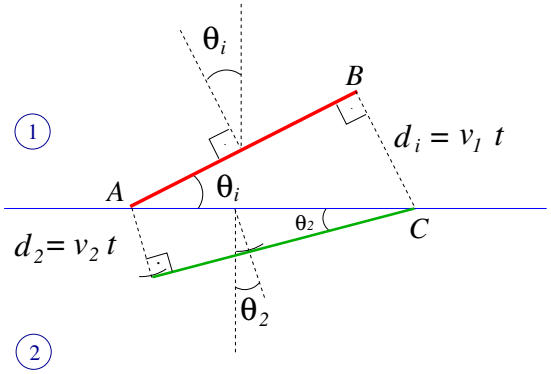


Podemos agora determinar as grandezas d_r e θ_r, mostradas na figura acima. Como $d_r = v_r t$, e $v_r = v_i = v_1$ (velocidade no meio 1) então $d_r = d_i$. Levando em conta que $\overline{AC}\text{sen}\theta_r = d_r = d_i = \overline{AC}\text{sen}\theta_i$, concluímos que $\text{sen}\theta_r = \text{sen}\theta_i$. Portanto, $\theta_r = \theta_i$, ou seja, *o ângulo de reflexão é igual ao ângulo de incidência.*

Vejamos agora o que ocorre com a frente de onda transmitida para o meio 2. Esta onda é denominada *onda refratada.* A figura abaixo ilustra o que ocorre, quando $v_2 < v_1$, para posições sucessivas da frente de onda. Note que o trecho da frente de onda que já está no meio 2, percorre distâncias menores do que o trecho que está no meio 1.



Na figura seguinte ilustramos a construção de Huygens para a frente de onda plana refratada.



Notando que $v_2 t = \overline{AC}\text{sen}\theta_2$ e $v_1 t = \overline{AC}\text{sen}\theta_i$, obtemos

$$\frac{\text{sen}\theta_i}{\text{sen}\theta_2} = \frac{v_1}{v_2} \equiv n_{12}. \tag{2.2.18}$$

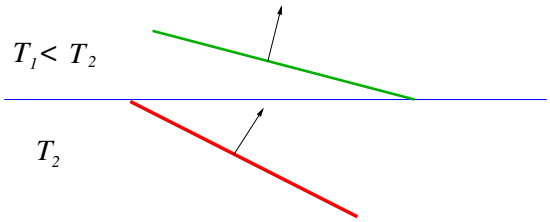
Essa é a lei de Snell para o ângulo de refração (note que, como no caso da reflexão, a onda refratada está *no mesmo plano de incidência*). A grandeza n_{12} é denominada *índice de refração.*

Vemos assim que o conceito de ondas permite *explicar* as leis de reflexão e de refração. Neste sentido, podemos dizer que o conceito de ondas fornece um entendimento mais fundamental da natureza. No caso de ondas em um meio elástico (ondas mecânicas) tudo se reduz às leis da

mecânica, uma vez que a equação de ondas foi deduzida a partir das leis de Newton. Portanto, não é necessário introduzir '*novas leis* para descrever a reflexão e refração. Para as ondas não mecânicas tudo se reduz à descrição fornecida pela Mecânica Quântica.

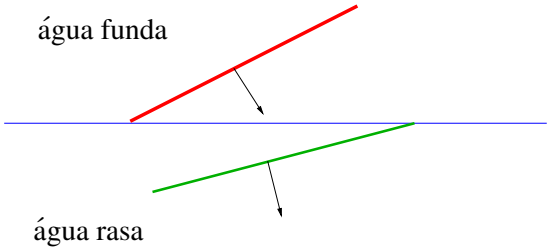
Exemplos

Vimos que a velocidade de propagação de uma onda sonora é dada pela equação (2.1.30). Portanto, ao passar de uma meio a temperatura T_1 para outro a temperatura $T_2 < T_1$ a direção de propagação muda, conforme indicado na figura abaixo, de acordo com a (2.2.18).



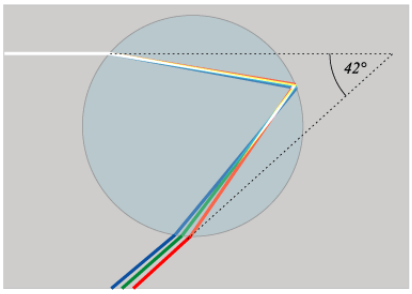
Em condições atmosféricas tais que a temperatura diminui com a altitude, o som tende a desviar-se para cima. O efeito se inverte quando o sol se põe, "tornando os sons distantes mais audíveis do que em condições usuais" (HMN). É interessante notar que podemos curvar a trajetória do som, criando um gradiente de temperatura.

Ondas na superfície da água propagam-se mais lentamente a medida que a profundidade diminui. A figura abaixo mostra qualitativamente o padrão esperado para a refração das frentes de ondas na praia, de acordo com a (2.2.18).



Isso explica porque as frentes de ondas na praia acompanham a linha da orla.

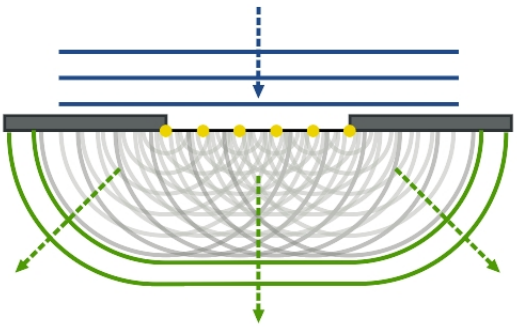
A refração e reflexão das ondas eletromagnéticas em gotas de água, permite entender, entre outras coisas, os detalhes da formação do arco-íris. A figura abaixo (obtida no wikipedia) dá uma idéia de como podemos descrever este belo fenômeno.



Note que luz de diferentes comprimentos de onda (cores) viaja com velocidades diferentes em meios materiais. A luz azul é mais refratada do que a luz vermelha (de maior comprimento de onda). Não faremos aqui a dedução detalhada; os alunos mais motivados poderão faze-lo, inclusive determinando o ângulo de 42° indicado na figura, correspondente à diferença de índice de refração entre o ar e a água.

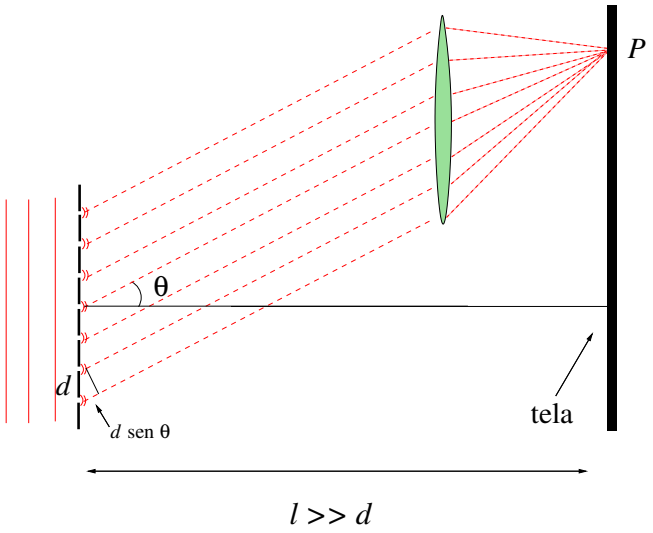
Difração

A figura abaixo (obtida no wikipedia) ilustra o que ocorre quando uma frente de onda incide sobre uma abertura. São indicados sobre a abertura alguns pontos representando fontes ondas secundárias conforme a formulação do princípio de Huygens. Também estão desenhadas as ondas esféricas emanadas e as envoltórias a elas.



Vamos agora combinar o princípio de Huygens com o fato de que existe interferência. Para isso, vamos supor que haja uma tela sobre a qual todas as ondas secundárias incidem, interferindo entre si. É possível mostrar que ocorrerá um mínimo de interferência (mancha escura na tela) quando a diferença de caminho entre as ondas secundárias emitidas nas duas extremidades da fenda for igual a um comprimento de onda.

Podemos também fazer com que uma frente de onda incida sobre uma superfície contendo um número muito grande de fendas, como na figura abaixo.



Dispositivos deste tipo são denominados *redes de difração*. As ondas esféricas emitidas por cada uma das pequenas fendas irão interferir nos pontos da tela. Quando a tela está localizada a uma distância muito grande, um determinado ponto P será um ponto de máximo se a seguinte relação for satisfeita

$$d\text{sen}\theta = m\lambda; \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots . \tag{2.2.19}$$

Demonstraremos este efeito em sala de aula, utilizando um laser comum e um CD ou DVD (e, talvez, um bluray).

2.2.6 Efeito Doppler

A experiência mostra que a freqüência do som aumenta (diminui) quando a distância entre a fonte sonora e o observador diminui (aumenta) com o tempo. Notamos isso quando uma ambulância se aproxima e depois se afasta de nós. Na aproximação o som é mais agudo do que no afastamento. De fato, esse tipo de efeito tornou-se parte do cotidiano de grandes cidades desde do fim do século 19, quando veículos de diversos tipos começaram a circular produzindo diferentes tipos de sons. Christian Doppler estudou o efeito para ondas eletromagnéticas em uma monografia escrita em 1842 cujo título (resumido) é "Sobre a luz colorida de estrelas $\cdots$". A hipótese foi testada para ondas sonoras pelo meteorologista holandês *Christophorus Henricus Diedericus Buys Ballot* em 1845. Em um experimento literalmente *espetacular*, Ballot teria colocado um grupo de trompetistas sobre um vagão de trem aberto e pediu que tocassem uma determinada nota. Parado na plataforma, observou o trem passar a grande velocidade e constatou a existência do efeito Doppler para o som, ou seja, a nota emitida pelos trompetistas foi mais aguda quando o trem se aproximava de Ballot e mais grave quando o trem se afastava (Filkin and Hawking 1997, p. 65).

Vejamos como analisar este interessante fenômeno no caso de ondas sonoras. É conveniente analisar separadamente as seguintes situações:

(a) O observador se movimenta em relação ao meio de propagação; a fonte permanece em repouso relativamente ao meio de propagação.

(b) A fonte se movimenta em relação ao meio de propagação; o observador permanece em repouso relativamente ao meio de propagação.

Note que o *meio de propagação* permite distinguir as duas possibilidades acima, que de outra forma seriam indistingüiveis de acordo com o *princípio de relatividade de Galileu* (voltaremos a este interessante assunto quando iniciarmos o estudo da relatividade restrita).

(a) Observador em movimento e fonte em repouso

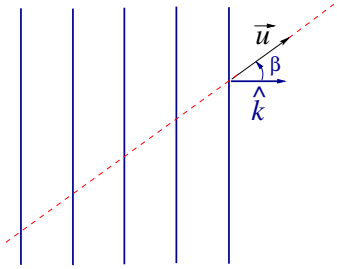
Suponhamos que a fonte, em repouso em relação ao meio de propagação, esteja produzindo oscilações de freqüência ν_0. A onda assim produzida viaja com velocidade v e possui comprimento de onda

$$\lambda_0 = \frac{v}{\nu_0}. \tag{2.2.20}$$

Considere agora o número de vezes, por segundo, que o valor máximo da oscilação atinge um determinado observador. Naturalmente esse número é a freqüência detectada pelo observador. Se o observador estivesse em repouso, teríamos simplesmente $\nu = \nu_o$. No entanto, se o observador estiver se movendo com velocidade $\vec{u}$ ele detectará um decréscimo (ou excesso, dependendo do sentido de $\vec{u}$) de cristas dado por

$$\delta\nu = -\frac{\vec{u}\cdot\hat{k}}{\lambda_0} = -\frac{u}{\lambda_0}\cos\zeta. \tag{2.2.21}$$

O ângulo ζ é formado pelas direções de propagação da onda e pela direção da velocidade do observador, como ilustrado na figura abaixo.



Portanto, a freqüência detectada pelo observador será

$$\nu = \nu_0 + \delta\nu = \nu_0 - \frac{u}{\lambda_0}\cos\zeta = \nu_0 - \frac{\nu_0}{v}\,u\cos\zeta. \tag{2.2.22}$$

Ou seja,

$$\nu = \nu_0\left(1 - \frac{u}{v}\cos\zeta\right). \tag{2.2.23}$$

Nos casos especiais quando o observador está se aproximando ($\zeta = \pi$) ou se afastando ($\zeta = 0$) da fonte, ao longo da mesma direção de propagação da onda, teremos

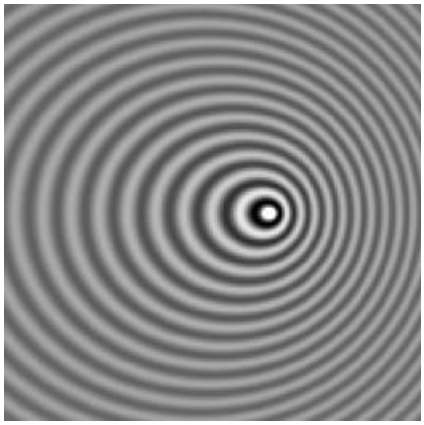
$$\nu = \begin{cases} \nu_0\left(1 + \dfrac{u}{v}\right) & \text{aproximação} \\ \\ \nu_0\left(1 - \dfrac{u}{v}\right) & \text{afastamento} \end{cases}. \tag{2.2.24}$$

Ou seja o observador detecta uma freqüência maior quando se desloca em direção à fonte e uma freqüência menor quando se afasta da fonte.

(b) Fonte em movimento e observador em repouso

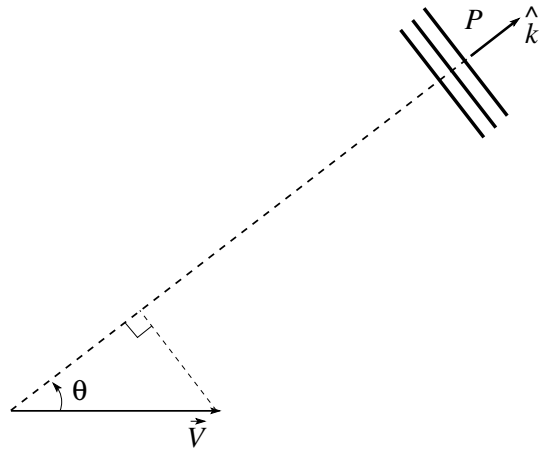
É comum supor *erroneamente* que a velocidade do que é emitido pela fonte deve ser alterada pelo próprio movimento da fonte. Isso sem dúvida é verdadeiro quando consideramos dispositivos que emitem partículas materiais, como por exemplo uma metralhadora instalada em um avião. No entanto, já sabemos que no caso de uma onda, a *velocidade de propagação só depende das propriedades do meio*. Note que estamos sempre considerando que as velocidades da fonte (ou do observador, como no caso anterior) são relativas ao meio. Sem perda de generalidade, podemos adotar um referencial em relação ao qual o meio está em repouso.

A figura abaixo (obtida no wikipedia) ilustra bem o efeito.



Neste exemplo, a fonte está se movendo com velocidade $\vec{V}$ para a direita.

Vamos agora supor que o observador esteja em repouso em um ponto P bem distanciado da fonte, de modo que a aproximação de ondas planas possa ser utilizada em P. As ondas planas cruzam o ponto P propagando-se na direção $\hat{k}$, conforme a figura abaixo.



A distância entre duas frentes de onda adjacentes, medida pelo observador em P, sofre uma alteração

$$\delta\lambda = -\frac{\vec{V}\cdot\hat{k}}{\nu_0} = -\frac{V}{\nu_0}\cos\theta = -\lambda_0\,\frac{V}{v}\cos\theta. \tag{2.2.25}$$

Assim o comprimento de onda medido pelo observador em P é

$$\lambda = \lambda_0\left(1 - \frac{V}{v}\cos\theta\right). \tag{2.2.26}$$

Por exemplo, se a fonte estiver se afastando do observador ($\theta = \pi$), $\delta\lambda = V/\nu_0 > 0$, ocorrerá um aumento do comprimento de onda ao longo da linha que une a fonte e o observador.

A freqüência medida pelo observador é

$$\nu = \frac{v}{\lambda}. \tag{2.2.27}$$

Usando a equação (2.2.26), obtemos

$$\nu = \frac{v}{\lambda_0}\frac{1}{1-\frac{V}{v}\cos\theta} = \nu_0\frac{1}{1-\frac{V}{v}\cos\theta}. \tag{2.2.28}$$

(b) Fonte *e* observador em movimento

Podemos agora combinar os dois efeitos de modo a obter o caso geral, quando tanto a fonte quanto o observador estão se movendo. Seja $\bar{\nu}_0$ a freqüência já modificada pelo movimento da fonte. Se o observador também estiver em movimento, então ele detectará uma freqüência, conforme previsto pela equação (2.2.23),

$$\nu = \bar{\nu}_0\left(1 - \frac{u}{v}\cos\zeta\right). \tag{2.2.29}$$

Por outro lado, sabemos da equação (2.2.28) que

$$\bar{\nu}_0 = \nu_0\frac{1}{1-\frac{V}{v}\cos\theta}. \tag{2.2.30}$$

Portanto, substituindo (2.2.30) em (2.2.29), teremos

$$\nu = \frac{1 - \frac{u}{v}\cos\zeta}{1 - \frac{V}{v}\cos\theta}\,\nu_0. \tag{2.2.31}$$

Exemplo: Radares utilizam microndas (ondas eletromagnéticas possuindo comprimentos de onda entre 10^{-3} m e 1 m) para medir a velocidade de veículos. Obtenha a relação entre a diferença das freqüências ν_0, da onda emitida pelo radar, e ν, da onda refletida de volta pelo veículo, e a velocidade do veículo.

Solução: A onda emitida pelo radar atinge o veículo com uma freqüência modificada pelo efeito Doppler dada por

$$\nu_1 = \nu_0\left(1 + \frac{V}{v}\right),$$

onde V é a velocidade de veículo e v é a velocidade de propagação da onda ($v \approx 3 \cdot 10^8$ m/s).

O veículo emite a onda de volta modificando sua freqüência, de tal forma que, de acordo com o efeito Doppler produzido por uma fonte em movimento,

$$\nu = \nu_1 \frac{1}{1 - V/v} = \nu_0 \frac{1 + V/v}{1 - V/v} = \nu_0 \frac{v + V}{v - V}.$$

Portanto,

$$\nu - \nu_0 = \nu_0\left(1 - \frac{v + V}{v - V}\right) = \nu_0 \frac{2\,V}{v - V}.$$

Como $v \gg V$ (pelo menos nas estradas utilizadas pelos terráqueos),

$$\Delta\nu \approx \nu_0 \frac{2\,V}{v}.$$

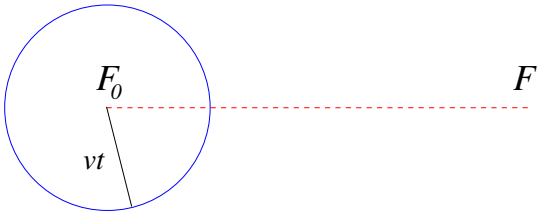
Por exemplo, no caso de um carro viajando a 100 km/h $\approx$ 28 m/s, e um radar utilizando $\lambda_0 = 10$ cm

$$\Delta\nu = 560\,\text{Hz}.$$

Observação: Tratamos este exemplo utilizando os resultados para o efeito Doppler para o som. Veremos que o efeito Doppler para ondas eletromagnéticas (efeito Doppler relativístico) obedece o princípio de invariância de Galileu. No entanto, ao tomarmos o limite $v \gg V$, os resultados coincidem.

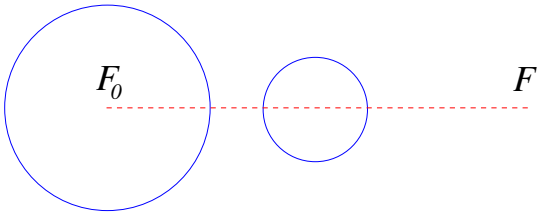
2.2.7 Cone de Mach – velocidades supersônicas

Vamos analisar o que ocorre quando a velocidade V da fonte é maior do que a velocidade v de propagação da onda. A figura abaixo mostra uma frente de onda esférica, no instante t, que foi emitida da posição F_0. Também é mostrado o percurso realizado pela fonte até atingir um ponto F; esse percurso é tal que $\overline{F_0F} = Vt$. Como estamos considerando $V > v$, então $\overline{F_0F} > vt$.

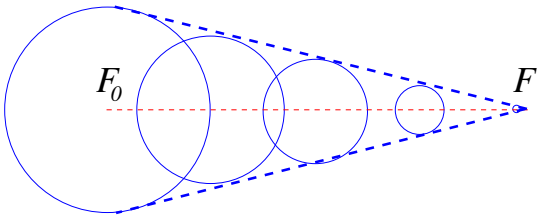


Vemos assim que a fonte ultrapassou a frente de onda por ela emitida.

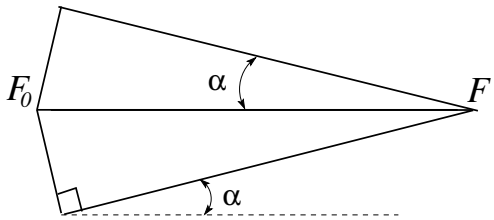
No mesmo instante t, a figura seguinte mostra uma outra frente de onda que foi emitida quando a fonte se encontrava a meio caminho entre F_0 e F.



Incluindo todas as frentes de onda emitidas ao longo do caminho $\overline{F_0F}$ teremos a formação de uma superfície *cônica*, como mostrado na figura abaixo.



Essa superfície denomina-se *Cone de Mach*. Vemos da figura abaixo



que o *ângulo de abertura do cone*, α, é tal que

$$\text{sen}\alpha = \frac{vt}{Vt} = \frac{v}{V}. \tag{2.2.32}$$

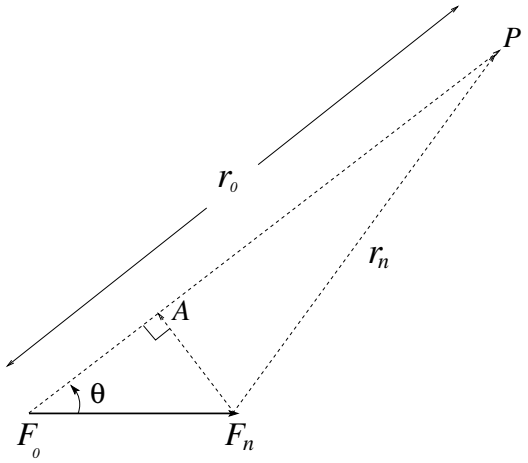
Esse ângulo é denominado *ângulo de Mach*. A razão entre as velocidades V/v é o *número de Mach*.

Onda de choque

Vamos agora analisar em maior detalhe o efeito das ondas emitidas pela fonte em movimento, produzido em um determinado ponto P. Consideremos as n frentes de onda emitidas nas proximidades de F_0, entre F_0 e F_n. O intervalo entre duas emissões consecutivas é Δt. O tempo que a n-ésima frende de onda leva para chegar em P é

$$t_n = n\Delta t + \frac{r_n}{v}. \tag{2.2.33}$$

Na figura abaixo, estão indicadas as distâncias percorridas pela onda emitida de F_0 e de F_n, que são, respectivamente, r_0 e r_n.



Como estamos considerando um entorno próximo de F_0, podemos usar a aproximação

$$r_n = r_0 - \overline{F_0 A} = r_0 - \overline{F_0 F_n} \cos\theta = r_0 - V\, n\Delta t \cos\theta \tag{2.2.34}$$

Substituindo (2.2.34) em (2.2.33), obtemos

$$t_n = n\Delta t + \frac{r_0}{v} - \frac{V}{v}\, n\Delta t \cos\theta = n\Delta t + t_0 - \frac{V}{v}\, n\Delta t \cos\theta. \tag{2.2.35}$$

Portanto,

$$t_n - t_0 = n\Delta t \left(1 - \frac{V}{v}\cos\theta\right). \tag{2.2.36}$$

O *sinal* da grandeza $t_n - t_0$ será sempre *positivo* no caso sub-sônico $V < v$ (neste caso $\frac{V}{v}\cos\theta < 1$). Logo, as ondas chegam em P na mesma ordem em que foram emitidas .

Por outro lado, no caso *supersônico*, $V > v$, existirá um ângulo θ_0 tal que $t_n = t_0$, ou seja, as ondas chegam todas ao mesmo tempo em P. De acordo eom (2.2.36), esse ângulo é tal que

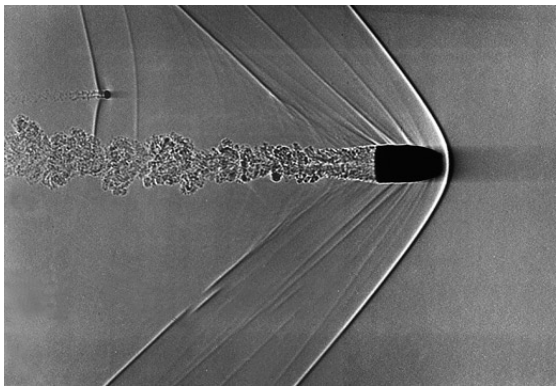
$$\cos\theta_0 = \frac{v}{V} = \text{sen}\alpha. \tag{2.2.37}$$

Logo,

$$\theta_0 = \frac{\pi}{2} - \alpha. \tag{2.2.38}$$

Portanto na direção perpendicular ao cone de Mach todas as ondas se acumulam produzindo uma *onda de choque*.

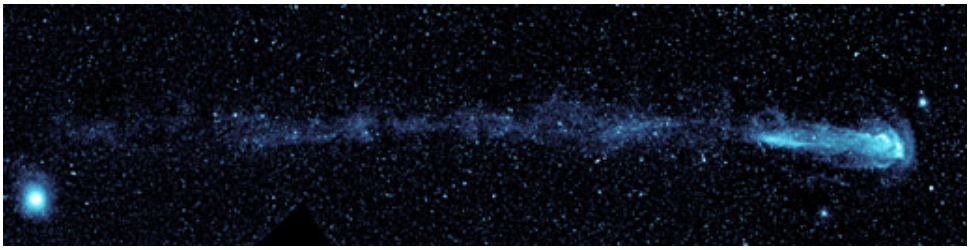
Na foto abaixo, obtida no sítio da Nasa em `http://www.nasa.gov/mission_pages/galex/20070815/f.html` vemos a onda de choque produzida por um projétil viajando no ar com uma velocidade igual a $1,5 \cdot v_{\text{som}}$.



Esta foto mostra vários outros detalhes interessantes, como por exemplo um fragmento menor cujo cone de Mach possui uma abertura maior do que o do projétil maior (qual objeto tem maior velocidade?). A foto mostra também um rastro de *turbulência*.

Em um outro link, (`http://www.nasa.gov/mission_pages/galex/20070815/a.html`) a bela foto abaixo é interpretada como sendo de uma estrela[5] que se move rapidamente no meio interestelar, produzindo uma onda de choque.

[5]Esta estrela, batizada *Mira* (do latin, *Maravilhosa*) está localizada a 350 anos-luz da Terra na constelação Cetus (Nasa).



O rastro de turbulência mostrado na figura possui 13 anos-luz de comprimento (10^{17} m). Tente identificar o padrão da onda de choque, comparando as duas fotos acima.

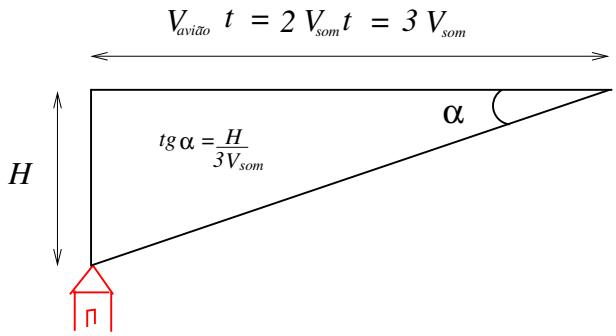
Exemplo: Decorridos 1,5 segundos depois de um avião supersônio ter sobrevoado uma casa, a onda de choque causada pela sua passagem atinge a casa, provocando um estrondo sônico. Sabendo que o avião voava com o dobro da velocidade do som, determine a altitude do avião em função da velocidade do som no ar.

Solução:

O ângulo de Mach é tal que

$$\text{sen}\alpha = \frac{v_{som}}{V_{avião}} = \frac{1}{2}$$

Portanto, $\alpha = \pi/6$. De acordo com a figura abaixo



$$\tan\alpha = \frac{H}{2\,V_{som}\,1,5}.$$

Logo

$$H = 3V_{som}\frac{1/2}{\sqrt{3}/2} = \sqrt{3}V_{som}.$$

A foto abaixo (wikipedia) mostra um interessante efeito de condensasão na região da onda de choque produzida por um avião supersônico

Note que a região de condensação possui a forma cônica.

Capítulo 3

Relatividade

3.1 Sistema de coordenadas galileano

O material desta seção foi baseado na referência [10].

De acordo com o princípio fundamental da mecânica, *um corpo suficientemente afastado de outros corpos, permanece em repouso ou em movimento com velocidade constante.* Este é o *princípio de inércia* descoberto por Galileu e incorporado na formulação das leis da mecânica por Newton. Além de formular o que há de mais fundamental sobre o movimento dos corpos, o princípio de inércia fornece também uma prescrição para determinar qual é o *sistema de referência* que devemos utilizar para descrever os sistemas mecânicos em termos das leis de Newton. Para nos certificar de que estamos utilizando o sistema "correto", podemos observar corpos que estão livres da influência de qualquer outro corpo e verificar se o movimento destes corpos obedece ao princípio de inércia.

Considere por exemplo o movimento de uma nave espacial A, que está com os motores desligados, em uma região do espaço suficientemente distante de qualquer outro objeto. Do ponto de vista dos tripulantes de uma outra nave distante B que esteja se movendo com movimento acelerado, o movimento da nave A será com velocidade não constante. Ou seja, no *sistema de referência* rigidamente ligado à nave acelerada, B, o movimento da nave A não está de acordo com o princípio de inércia. Por outro lado, em um sistema de referência S, rigidamente ligado a uma terceira nave C, que esteja se movendo com velocidade constante, a nave A possui velocidade constante, em concordância com o princípio de inércia. Os sistemas de referência segundo os quais o princípio de inércia é verificado (como por exemplo o sistema S da nave C) são denominados de *sistemas galileanos* ou *sistemas inerciais.*

O *sistema de referência* pode ser imaginado como a própria estrutura rígida da nave, possuindo ainda um padrão bem definido de medida de distância *e tempo.* Ou seja, devemos imaginar que os tripulantes de cada uma das naves estão devidamente munidos de réguas e relógios rígidamente ligados às suas respectivas naves. Isso define um *sistema de coordenadas* de *espaço-tempo* associado a cada *sistema inercial.*

3.2 Princípio de relatividade

Vamos considerar agora um sistema de referência qualquer, S', possuindo velocidade relativa $\vec{v}$, constante em relação a outro sistema S. Concretamente, podemos imaginar, como na seção anterior, que os dois sistemas S e S' estão rigidamente ligados a naves espaciais que se movem *livremente* (ou seja, sem a ação de qualquer tipo de força) com velocidade relativa $\vec{v}$. Por exemplo, os tripulantes da nave C (sistema S) observam a nave A (sistema S') se movimentando com

velocidade $\vec{v}$. Uma conclusão imediata da definição de sistema inercial é: *Se S é um sistema de coordenadas inercial então qualquer outro sistema S', que se move com velocidade constante em relação à S, também é um sistema de coordenadas inercial.* De fato, se o movimento de um corpo livre é descrito por S como sendo com velocidade constante, então o sistema S' também descreverá o movimento do corpo livre como sendo com velocidade constante. O *princípio de relatividade* é então formulado como:

"As leis que descrevem todos os fenômenos naturais são as mesmas em qualquer referencial inercial".

Esse é o princípio de relatividade Restrita de Einstein. Note que o princípio de relatividade poderia também ser chamado de "princípio das leis absolutas", uma vez que, embora o "relativo" sejam grandezas tais como as velocidades relativas dos referenciais inerciais, as leis físicas não são relativas, mas sim absolutas.

No domínio dos fenômenos da mecânica, o princípio de relatividade é nada mais nada menos do que o princípio de Relatividade de Galileu. De fato, sabemos que as leis na mecânica possuem a mesma forma em todos os referenciais inerciais (por exemplo, o movimento de um pêndulo é descrito da mesma forma pelos tripulantes do foguete A (sistema S') ou do foguete C (sistema S)). Caso a mecânica fosse suficiente para fornecer a base conceitual para *todos* os fenômenos naturais, então o assunto se encerraria por aqui. No entanto, os desenvolvimentos ocorridos na física ao longo do século 19, tornaram mais e mais evidente que a mecânica não fornece a mais completa descrição dos fenômenos naturais [1]. Veremos na seção seguinte qual foi o fenômeno chave que possibilitou o desenvolvimento da Relatividade Restrita como formulada por Einstein.

Antes disso vejamos de maneira mais qualitativa quais seriam as implicações de uma violação do princípio de relatividade. Se o princípio de relatividade não fosse verdadeiro então diferentes sistemas de coordenadas galileanos S^0, S^1, S^2, etc., forneceriam uma descrição inequivalente para os fenômenos naturais. Neste caso, leis formuladas em um determinado referencial, e.g. S^1, deveriam necessariamente depender da velocidade deste referencial, relativamente a um referencial absoluto S^0, onde as leis físicas possuem outra descrição.

Em seu movimento em torno do Sol, a Terra viaja a uma velocidade de 30 km/s. Se o princípio de relatividade não fosse válido, a direção do movimento da Terra deveria fazer parte das equações que descrevem as leis da natureza. Considerando que a Terra muda a orientação de sua velocidade ao longo de sua órbita em torno do Sol, ela não pode estar o tempo todo em repouso relativamente a um determinado referencial S^0.

3.3 Invariância da velocidade da luz

O observação e a correta descrição dos fenômenos eletromagnéticos, ao longo do século 19, culminaram com a descoberta feita por Maxwell de que a luz se propaga como uma *onda eletromagnética* com velocidade $c = 299.792.458\,\mathrm{m/s}$ no vácuo[2]. Do ponto de vista da física do século 19, uma questão relevante era: Em qual referencial a onda eletromagnética se propaga com velocidade c? Esse poderia ser também o nosso ponto de vista, uma vez que, como vimos na primeira parte desta disciplina, ondas se propagam em meios elásticos com uma determinada velocidade, *em relação ao meio elástico.* De fato, um observador que se move em relação ao meio de propagação observa a onda se propagando com uma velocidade menor (maior) quando sua velocidade é paralela (anti-

[1] Em vista destes desenvolvimentos, chegou-se até mesmo a se colocar em questão a validade do princípio de relatividade.

[2] Estamos adotando o valor que atualmente é introduzido como uma definição (sem incertezas). Outras grandezas físicas, como a definição do metro, são derivadas a partir desta definição.

paralela) ao sentido de propagação da onda. Se utilizarmos, por exemplo, um referencial inercial S' em relação ao qual o meio elástico possui velocidade V_x, a velocidade v na equação de onda muda [3], de acordo com as *transformações de Galileu* da mecânica, para (veja a derivação nas equações (3.4.1) e (3.4.2))

$$v' = v - V_x. \tag{3.3.1}$$

Por exemplo, no referencial que se move com a mesma velocidade da onda elástica, a velocidade da onda é $v' = 0$ (utilizamos esta transformação na seção 1.2). É importante ressaltar que estamos supondo que toda a derivação da equação de ondas permanece válida no referencial S', ou seja, as leis de Newton são válidas no referencial S' (princípio de relatividade de Galileu). É por essa razão que os físicos do século 19 consideravam natural supor que a luz possuía velocidade c em um determinado referencial. Era portanto uma questão importante determinar experimentalmente em que medida a velocidade relativa da Terra poderia modificar o valor de c.

Antes de passarmos ao famoso e belo experimento de Michelson e Morley, que investigou de maneira muito engenhosa o problema da velocidade da luz, é importante mencionar que essa questão também pode ser abordada de maneira conceitual. Para isso, é preciso mencionar antes, que, como será estudado na disciplina de eletromagnetismo, o fenômeno de propagação da luz (ondas eletromagnéticas) é uma conseqüência das famosas equações de Maxwell. Caso estas equações fossem válidas apenas em um referencial S^0, como sugere a analogia com as ondas elásticas, então as equações de Maxwell não constituiriam leis físicas absolutas. Ou seja, o princípio de relatividade não seria válido para as equações de Maxwell. Elas (as equações) seriam meros resultados derivados de leis mecânicas mais fundamentais, que requereriam portanto um determinado *meio elástico* em relação ao qual as equações de Maxwell, na sua forma usual seriam válidas. Tal meio ficou conhecido como o *éter*.

Por outro lado, se insistíssemos em supor que as equações de Maxwell constituem leis físicas válidas em qualquer referencial inercial (princípio de relatividade), teríamos então uma *contradição*, uma vez que, de acordo com a equação (3.3.1),

$$c' = c - V_x. \tag{3.3.2}$$

Então, o que fazer se a *natureza* nos informar de maneira indubitável que

$$c' = c \ ? \tag{3.3.3}$$

Mesmo do ponto de vista estritamente conceitual, temos a interessantíssima questão sobre como conciliar o princípio de relatividade com a equação (3.3.3).

Uma importante *"dica"* sobre como proceder consiste em notar que a equação (3.3.3) afirma que c é uma determinada *velocidade* que possui o mesmo valor *em todos* os referenciais. Mas a grandeza física "velocidade" é a razão entre as grandezas *distância* e *tempo*. Portanto, para que c tenha o mesmo valor em todos os referenciais inerciais, a transformação de Galileu, que, como sabemos não transforma o tempo (o tempo de Galileu-Newton é o mesmo, absoluto, para todos os observadores), teria que ser modificada de modo a introduzir uma *transformação também para o tempo*, que compensasse a transformação de coordenadas. Como veremos a formulação precisa destas idéias levou a um dos mais importantes desenvolvimentos de toda a história da física. O formalismo resultante, e sua posterior generalização feita também por Einstein, constitui a base conceitual de toda a física atual, onde o conceito de *espaço-tempo* é fundamental.

É importante também ressaltar que embora o fenômeno de propagação da luz tenha servido um "guia" (base experimental), a relatividade e o conceito de espaço-tempo, ancorado na existência da constante fundamental c, não são de maneira alguma restritos apenas aos fenômenos

[3] Por simplicidade estamos considerando uma onda plana se propagando na direção x.

eletromagnéticos. Ao contrário, o eletromagnetismo, assim como todas as leias fundamentais da natureza, é que são restringidos pelos conceitos da relatividade. Ou seja, há uma *constante universal* c (um *absoluto*), que, "por um acaso", é a velocidade de propagação da luz no vácuo. Mas, mesmo se o eletromagnetismo não existisse, ainda assim o conceito de espaço-tempo, ancorado na velocidade absoluta c, existiria. Em outras palavras, a teoria da relatividade é a física do espaço-tempo e qualquer refutação empírica deve necessariamente envolver modificações na própria estrutura geométrica do espaço-tempo.

3.3.1 O experimento de Michelson e Morley

O material desta seção foi parcialmente baseado no capítulo 6 da referência [4].

Se de fato existisse um meio para a propagação de ondas eletromagnéticas (o *éter*) poderíamos determinar nossa velocidade em relação a este meio, efetuando medidas da velocidade de propagação da luz em diversas direções. Ou seja, exatamente como no caso de ondas sonoras, quando nossa velocidade em relação ao meio de propagação fosse $\vec{V}$, observaríamos a onda se propagando com uma velocidade modificada

$$\vec{c}' = \vec{c} - \vec{V}, \tag{3.3.4}$$

onde estamos supondo que a onda se propaga com velocidade $\vec{c}$ em relação ao hipotético éter.

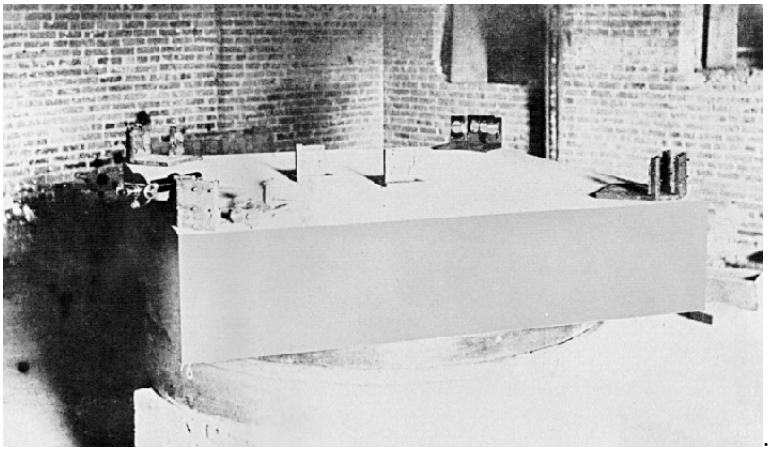
A Terra se desloca em sua órbita em torno do Sol a cerca de 30 km/s. Portanto, seria possível determinar a velocidade da Terra em relação ao hipotético éter, medindo a velocidade de ida e volta da luz em diferentes direções na superfície da Terra. Comparando as várias velocidades da luz nas diversas direções, seria então possível determinar a velocidade da Terra em relação ao hipotético éter em qualquer instante dado (note que somente em um instante de tempo específico a Terra poderia estar em repouso em relação ao hipotético éter). Esse tipo de experimento foi originalmente proposto por James Clerk Maxwell (o descobridor das ondas eletromagnéticas), em um artigo denominado "Ether", publicado na nona edição da *Encyclopædia Britannica* em 1875.

Em 1881 o físico americano[4] Albert Abraham Michelson realizou o experimento proposto por Maxwell na Universidade de Berlim, no laboratório de Hermann von Helmholtz. Para sua grande surpresa, o experimento não revelou qualquer diferença da velocidade da luz em qualquer direção. No entanto, este primeiro aparato utilizado por Michelson era um pouco rudimentar. Para a maioria dos físicos da época, especialmente Michelson, havia boas razões para supor que um aparato melhor desenhado revelaria resultados positivos, ou seja, a existência do éter [5].

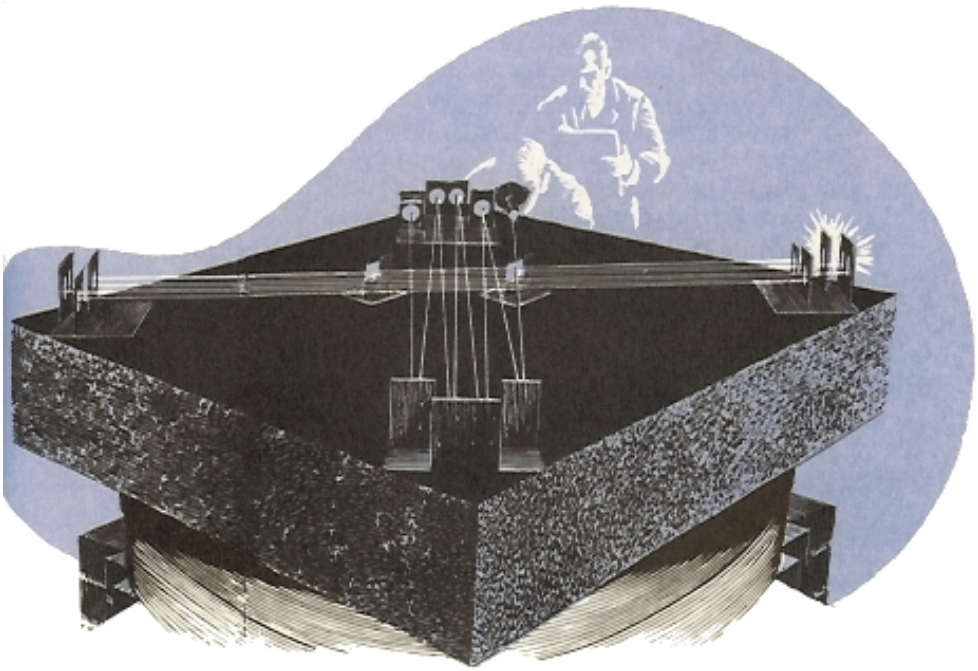
Uma versão mais precisa do experimento foi realizada em 1887 por Michelson e Edward Willians Morley no laboratório da então *Western Reserve University* onde Morley era professor. A foto abaixo mostra o aparato utilizado por Michelson e Morley em 1887.

[4] americano=estadunidense

[5] Havia exceções, como por exemplo o físico austríaco Ernest Mach que já havia criticado a hipótese do éter. Para ele esse primeiro experimento de Michelson já era suficiente para se descartar o conceito de éter.



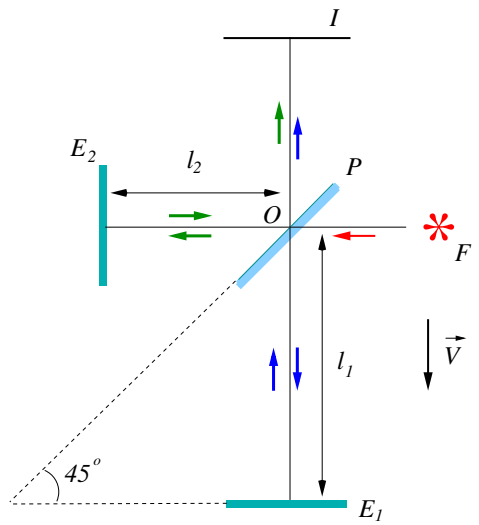
A ilustração artística abaixo[6]



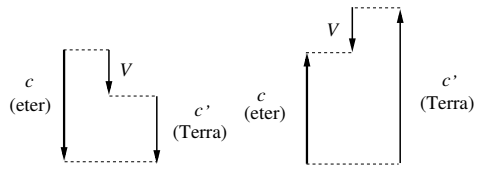
nos dá uma idéia melhor de como o aparato foi montado. A ilustração mostra um bloco de pedra que está flutuando em um recipiente de mercúrio líquido. Isso permite que o bloco seja mantido na horizontal além de facilitar a rotação em torno de um eixo central. Além disso, o mercúrio líquido absorve vibrações. O arranjo de espelhos montado sobre o bloco faz com que o feixe de luz percorra oito vezes uma determinada direção aumentando assim o caminho percorrido pela luz. A ilustração mostra também duas placas de vidro formando um ângulo de 45° com a direção dos feixes. Uma delas possui uma face *semi-espelhada* o que faz com que o feixe seja parcialmente refletido para uma direção perpendicular e parcialmente transmitido através da placa. A segunda placa de vidro não possui face espelhada; sua função é compensar o caminho ótico do feixe que atravessa a placa espelhada de tal forma que os dois feixes que chegam ao observador tenham atravessado a mesma espessura de vidro.

[6]Esta ilustração foi feita por Anthony Ravielli para o livro *Relativity Simply Explained* de Martin Gardner, Dover Publications, INC.

Na figura abaixo mostramos o esquema simplificado do aparato de Michelson-Morley (não incluímos a placa de compensação do caminho ótico). São mostrados os dois espelhos E_1 e E_2 e a placa com uma face semi-espelhada P. As distâncias entre E_1 e E_2 até a face semi-espelhada são l_1 e l_2, respectivamente. Também indicamos a velocidade $\vec{V}$ do aparato em relação ao hipotético éter e uma fonte de luz F. Por fim, os dois feixes são focalizados em um plano posicionado em I, produzindo um efeito mensurável de *interferência*.



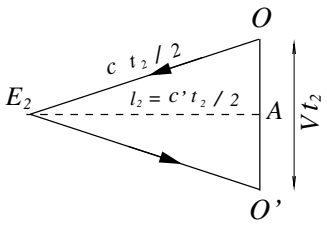
As velocidades c' de ida e de volta ao longo do percurso $\overline{OE_1}$ estão ilustradas na figura abaixo.



Usando a equação (3.3.4) teremos $c'_{\text{ida}} = c - V$ e $c'_{\text{volta}} = c + V$. Portanto, o tempo total de ida e volta ao longo do percurso l_1 é

$$t_1 = \underbrace{\frac{l_1}{c-V}}_{\text{tempo de ida}} + \underbrace{\frac{l_1}{c+V}}_{\text{tempo de volta}} = \frac{2l_1}{c}\frac{1}{1-\beta^2}; \quad \beta \equiv \frac{V}{c}. \tag{3.3.5}$$

Na figura abaixo o caminho $\overline{OE_2O'}$ é aquele seguido pela luz como visto pelo observador parado em relação ao hipotético éter e o caminho $\overline{AE_2A}$ é aquele descrito pelo observador do laboratório (aparato).



É imediato da figura que

$$c' = \sqrt{c^2 - V^2} = c\sqrt{1-\beta^2}. \tag{3.3.6}$$

Portanto,

$$t_2 = \frac{2l_2}{c'} = \frac{2l_2}{c}\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}. \tag{3.3.7}$$

Note que $t_1 > t_2$. Há portanto uma *diferença de fase* entre as duas ondas que interferem em I dada por

$$\delta_{12} = 2\pi\frac{c}{\lambda}(t_1 - t_2) = \frac{2\pi}{\lambda}\left(2l_1\frac{1}{1-\beta^2} - 2l_2\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\right) = \frac{4\pi}{\lambda}\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\left(l_1\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - l_2\right). \tag{3.3.8}$$

Suponhamos agora que o aparato seja girado de 90°. Neste caso, os correspondentes tempos serão

$$t_1' = \frac{2l_1}{c}\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{3.3.9}$$

e

$$t_2' = \frac{2l_2}{c}\frac{1}{1-\beta^2}. \tag{3.3.10}$$

A diferença de fase será alterada para

$$\delta_{12}' = \frac{4\pi}{\lambda}\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\left(-l_2\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} + l_1\right). \tag{3.3.11}$$

Fazendo a diferença entre as duas defasagens, teremos

$$\delta_{12}' - \delta_{12} = \frac{4\pi}{\lambda}\frac{l_1 + l_2}{\sqrt{1-\beta^2}}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\right). \tag{3.3.12}$$

Expandindo a raiz quadrada até ordem β^2,

$$\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \left(1-\beta^2\right)^{-1/2} \approx 1 + \frac{1}{2}\beta^2 \tag{3.3.13}$$

teremos

$$\delta_{12}' - \delta_{12} \approx -\frac{2\pi}{\lambda}\left(l_1 + l_2\right)\beta^2. \tag{3.3.14}$$

A grandeza

$$\delta m \equiv \frac{\delta_{12}' - \delta_{12}}{2\pi} = \frac{l_1 + l_2}{\lambda}\beta^2 \tag{3.3.15}$$

fornece o deslocamento das franjas de interferência (neste caso, devido à rotação de 90° do aparato) em unidades da distância entre franjas adjacentes. Na experiência de 1881, Michelson utilizou $l_1 \approx l_2 = 1,2\,\mathrm{m}$ e $\lambda = 600\,\mathrm{nm}$. Para a velocidade da Terra, $\beta \approx 10^{-4}$. Portanto, $|\delta m| \approx 0,04$ de franja. Como já mencionamos no início desta seção, Michelson não observou qualquer deslocamento compatível com este valor. No experimento de 1887, foi utilizado $l_1 \approx l_2 = 11\,\mathrm{m}$, o que daria $|\delta m| \approx 0,4$; Michelson e Morley obtiveram como limite superior $|\delta m| < 0,01$. Experimentos realizados na década de 60 por Charles Townes, utilizando um relógio atômico baseado em vibrações de moléculas (maser), foram suficientemente precisos para detectar velocidades da Terra em relação ao hipotético éter de até $30\,\mathrm{m/s}$. Também neste caso não foi detectado qualquer movimento em relação ao hipotético éter.

Portanto, os resultados exprerimentais são compatíveis com a relação (3.3.3), ou seja,

"Existe uma velocidade c que tem o mesmo valor todos os referenciais inerciais."

Esse princípio, juntamente com o princípio de relatividade, constitui a base para o desenvolvimento da Relatividade Restrita de Einstein.

3.3.2 Alternativas

Vale mencionar que existiram outras propostas para se explicar o *resultado nulo* do experimento de Michelson-Morley. Listamos abaixo algumas delas, juntamente com a correspondente refutação experimental ou comentário.

- Arrasto do Éter. *Não é compatível com a aberração da luz emitida por estrelas.*
- Teorias de emissão (a velocidade da luz mudaria de acordo com a velocidade da fonte). *Não é compatível observações astronômicas (radiação de pulsar) e com o decaimento* $\pi^0 \to \gamma + \gamma$.
- Contração de FitzGerald-Lorentz. *Tem uma pontinha de verdade. Porém, o mecanismo de contração envolve interações entre os corpos materiais e o éter.*
- Poincaré e a estrutura do espaço e do tempo. *Tem um caráter mais programático sem detalhar as consequências físicas. Mas é bem parecida com as idéias da relatividade restrita como proposta por Einstein.*

3.3.3 Einstein entra em cena

Anexamos abaixo um trecho da introdução – traduzida para a lingua inglesa – do famoso artigo de Albert Einstein.

ON THE ELECTRODYNAMICS OF MOVING BODIES

A. Einstein – June 30, 1905

It is known that Maxwell's electrodynamics – as usually understood at the present time – when applied to moving bodies, leads to asymmetries which do not appear to be inherent in the phenomena. Take, for example, the reciprocal electrodynamic action of a magnet and a conductor. The observable phenomenon here depends only on the relative motion of the conductor and the magnet, whereas the customary view draws a sharp distinction between the two cases in which either the one or the other of these bodies is in motion. For if the magnet is in motion and the conductor at rest, there arises in the neighbourhood of the magnet an electric field with a certain definite energy, producing a current at the places where parts of the conductor are situated. But if the magnet is stationary and the conductor in motion, no electric field arises in the neighbourhood of the magnet. In the conductor, however, we find an electromotive force, to which in itself there is no corresponding energy, but which gives rise – assuming equality of relative motion in the two cases discussed – to electric currents of the same path and intensity as those produced by the electric forces in the former case. Examples of this sort, together with the unsuccessful attempts to discover any motion of the earth relatively to the "light medium," suggest that the phenomena of electrodynamics as well as of mechanics possess no properties corresponding to the idea of absolute rest.

Este trabalho, e mais três outros também fundamentais, foi publicado em 1905. A lista completa dos trabalhos deste que ficou conhecido como "Annus Mirabilis" é a seguinte:

- A. Einstein, AdP 17, 132 (1905) [17 pp.] Über einen die Erzeugung und Verwandlung des Lichtes betreffenden heuristischen Gesichtspunkt (On a heuristic viewpoint concerning the production and transformation of light)
- A. Einstein, AdP 17, 549 (1905) [12 pp.] Über die von der molekularkinetischen Theorie der Wärme geforderte Bewegung von in ruhenden Flüssigkeiten suspendierten Teilchen (On the motion of small particles suspended in liquids at rest)
- A. Einstein, AdP 17, 891 (1905) [31 pp.] Zur Elektrodynamik bewegter Körper (On the Electrodynamics of moving modies).
- A. Einstein, AdP 18, 639 (1905) [3 pp.] Ist die Trägheit eines Körpers von seinem Energieinhalt abhängig? (Does the inertia of a body depend upon its energy content?").

Estes trabalhos tratam, pela ordem, do efeito fotoelétrico, efeito browniano, relatividade restrita e da derivação da famosa fórmula $E = m\,c^2$. São todos fundamentais para o desenvolvimento da física ao longo dos últimos 100 anos.

3.4 Conseqüências dos Princípios da Relatividade Restrita

O material desta seção foi baseado na referência [12].

Vamos agora explorar as conseqüências dos dois princípios básicos da relatividade restrita, discutidos nas duas seções anteriores, a saber[7]:

- *"As leis que descrevem todos os fenômenos naturais são as mesmas em qualquer referencial inercial."*
- *"Existe uma velocidade absoluta c, ou seja, c tem o mesmo valor todos os referenciais inerciais."*

Imediatamente notamos que estes dois princípios não podem ser compatíveis com as transformações de Galileu da mecânica clássica. De acordo com a mecânica de Galileu-Newton, se dois sistemas inerciais de referência S (coordenadas de posição x, y, z e tempo t) e S' (coordenadas de posição x', y', z' e tempo t') são tais que o sistema S' está se movendo com velocidade V_x relativamente à S, as coordenadas de posição e o tempo estão relacionadas pelas transformações

$$\begin{aligned} x' &= x - V_x t \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= t \end{aligned} \tag{3.4.1}$$

Uma conseqüência imediata destas transformações é que se uma partícula possui velocidade $v_x = dx/dt$ no referencial S, sua velocidade no referencial S' será, de acordo com a primeira e a última equações dadas acima,

$$v'_x = \frac{dx'}{dt'} = \frac{d}{dt'}(x - V_x t) = \frac{d}{dt}(x - V_x t) = v_x - V_x. \tag{3.4.2}$$

Mas, de acordo com o segundo princípio da relatividade restrita existe uma velocidade absoluta, c, que possui o mesmo valor em todos os sistemas inerciais de referência. Portanto, a equação acima não será válida quando $v_x = c$. Temos assim a primeira conseqüência, *negativa*, dos princípios da relatividade restrita, a saber:

As transformações de Galileu estão erradas.

Como vimos na seção anterior, os experimentos de Michelson-Morley, foram os primeiros a fornecer a base fenomenológica para a afirmação acima. Atualmente, são inúmeros os fatos experimentais e aplicações tecnológicas consistentes com os princípios da relatividade restrita, tais como:

- A famosa equvalência entre energia e massa, $E = m\,c^2$, possui diversas aplicações tecnológicas (reatores nucleares, armamentos, etc), além de ser fundamental na interpretação de fenômenos envolvendo partículas elementares.
- A limitação do número de elétrons em uma dada camada atômica é uma conseqüência direta do "casamento" da teoria da relatividade com a teoria qüântica.
- O número de raios cósmicos, possuindo velocidades próximas à c, que atingem a superfície da Terra é aumentado devido a efeitos relativísticos. Esse fato possui implicações, entre outras coisas, na taxa de mutações genéticas, e, portanto, na evolução das espécies.

[7] Parte desta seção foi baseada no livro "Introduction to Electrodynamics", David Griffiths

- O funcionamento dos sistemas de posicionamento global, que utlizam relógios em terra e nos satélites, depende das correções relativísticas (principalmente da relatividade geral).

É importante notar que a mecânica de Galileu-Newton fornece resultados muitos precisos em diversas situações. Por exemplo, toda a descrição de sistemas mecânicos tais como o movimento de projéteis, foguetes, planetas, pêndulos, etc, ou mesmo a descrição de ondas elásticas estudadas nesta disciplina, baseiam-se nas leis da mecânica newtoniana. Portanto, se de fato a relatividade restrita introduz correções às leis da mecânica, tais correções devem ser *pequenas* nos caso mencionados. Não é difícil perceber porque isso ocorre. De acordo com o segundo princípio da relatividade restrita, a velocidade absoluta, c, tem o mesmo valor da velocidade da luz, ou seja, $c = 299.792.458\,\mathrm{m/s}$. Então, segundo a equação (3.4.2) quando as velocidades relativas V_x são pequenas em comparação com c, ou seja $V_x/c \ll 1$, o segundo princípio da relatividade restrita é *aproximadamente válido*, ou seja,

$$c' = c - V_x = c\left(1 - \frac{V_x}{c}\right) \approx c. \tag{3.4.3}$$

Neste sentido, podemos dizer que as leis da mecânica de Galileu-Newton "funcionam" bem quando são aplicadas a situações tais que as velocidades relativas são pequenas em relação à c. Veremos que a mecânica relativística de fato se reduz à mecânica newtoniana no limite $v/c \to 0$, onde v representa o valor típico das velocidades envolvidas nos processos físicos.

Antes de passarmos a derivação das transformações de coordenadas relativísticas, vamos discutir nas próximas sub-seções os conceitos de espaço e tempo e de que forma os princípios da relatividade restrita modificam estes conceitos de uma maneira fundamental.

3.4.1 Relatividade da Simultaneidade

Evento

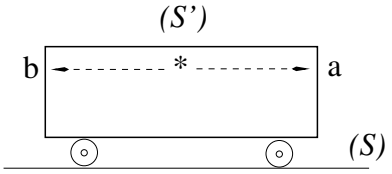
Um dos conceitos mais básicos na descrição de qualquer fenômeno natural é o conceito de *evento*. Um sistema inercial de referência S (coordenadas de posição x, y, z e tempo t) pode ser imaginado como um certo *aparato* (réguas e relógios) capaz de *registrar* a posição (x_0, y_0, z_0) e o tempo t_0 de um determinado evento E_0.

Simultaneidade de eventos

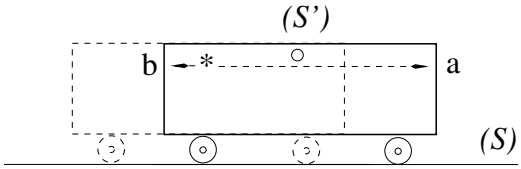
Podemos agora detalhar a noção de *simultaneidade de eventos*. Para isso é suficiente considerarmos inicialmente um exemplo simples. Considere um vagão de trem (referencial S') que está se movendo para a direta em relação ao referencial do dos trilhos (S). Um "flash" de luz é emitido por uma lâmpada que está exatamente no centro do vagão. Vamos analisar os seguintes eventos:

- E_a: O flash atinge o ponto (a), situado na frente do vagão.
- E_b: O flash atinge o ponto (b), situado na traseira do vagão.

Do ponto de vista do referencial S' (vagão) estes dois eventos são *simultâneos*, já que a luz viaja a mesma distância, entre a lâmpada e os pontos (a) e (b), como indicado na figura abaixo.



Para o observador que está em repouso em relação aos trihlos, a luz também viaja com a mesma velocidade c (segundo princípio da relatividade restrita). No entanto, o caminho percorrido pela luz entre a lâmpada e (a) será maior do que o caminho entre a lâmpada e (b). Portanto, para o observador S' (trilhos) o evento (a) ocorre depois do evento (b).



Portanto,

A simultaneidade de eventos que ocorrem em pontos distintos do espaço depende do referencial inercial.

É importante ter claro que toda vez que nos referimos a eventos, tais como E_a e E_b, estamos falando de ocorrências físicas inequivocas; imagine um filme fotográfico (ou um ccd) colocado em nas posições (a) e (b), onde estão também relógios que registram os tempos de chegada do lampejo de luz emitido pela lâmpada.

O *tempo de um evento* é um atributo de eventos simultâneos que ocorrem *no mesmo ponto do espaço*. Por exemplo, o evento "O avião chegou as 10h" significa que houve a simultaneidade dos eventos "chegada do avião" e "posição dos ponteiros do relógio", *no mesmo local* (o aeroporto). Mas se dois eventos ocorrem no *mesmo ponto*, todos os observadores inerciais (ou mesmo não inerciais) observarão estes eventos como simultâneos. Portanto,

A simultaneidade de eventos que ocorrem no mesmo ponto do espaço **não** *depende do referencial.*

Em outras palavras, quando um evento ocorre, ele ocorre para *todos os observadores inerciais*. A ocorrência de um evento é um dado absoluto, independente do *estado de movimento* do observador.

sincronização

Dois relógios dispostos em posições A e B, estarão sincronizados se um observador, parado em relação aos relógios, e situado em um ponto M tal que $\overline{MA} = \overline{MB}$ observa a chegada de sinais luminosos em M *simultaneamente*. Do que vimos acima sobre simultaneidade, conclui-se que um conjunto relógios que estão sincronizodas para o observador S, não estarão sincronizados para o observador S' que se move em relação à S.

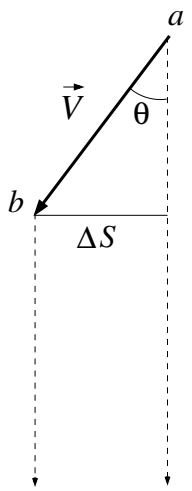
Os dois exercícios seguintes salientam a diferença entre *"ver um evento"* e *"observar um evento"*.

Exercício: Relógios, *devidamente sincronizados*, estão dispostos ao longo de uma reta, separados um do outro por uma distância de 10^9 m. Quando o relógio que está próximo de você marca meio dia:

(a) Qual horário você *vê* marcado no nonagésimo relógio?

(b) Qual horário você *observa* no nonagésimo relógio?

Exercício: Uma estrela está viajando com velocidade $\vec{V}$, formando um ângulo θ com a linha de visão, conforme a figura abaixo.



(a) Determine a *velocidade aparente* da estrela. Ou seja, determine $v_a \equiv \Delta S/\Delta t$. Sugestão: Δt é o intervalo de tempo decorrido entre as duas visualizações, na Terra, dos sinais emitidos em a e b. Expresse a resposta somente em termos de V, c e θ.

(b) Qual é o ângulo θ que resulta no máximo valor da velocidade aparente? (Resposta: $\cos\theta = V/c$)

(c) Mostre que a velocidade aparente pode ser maior do que c, mesmo quando $V < c$. Determine o valor de V/c acima do qual a velocidade aparente se torna maior do que c (resposta: $V/c = \sqrt{2}/2$)

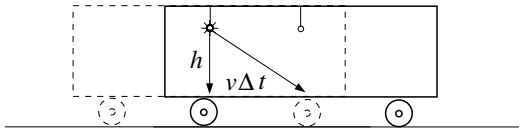
Relação de causa e efeito

Note também que eventos simultâneos que ocorrem *em pontos distintos do espaço*, para algum observador, não podem constituir um par *causa-efeito*, uma vez que a ordem temporal pode ser invertida para um outro observador, como no caso do exemplo acima (observador dos trilhos $\times$ observado do vagão).

Por outro lado, eventos que ocorrem *em um mesmo ponto do espaço*, para algum observador, podem constituir um par causa-efeito para qualquer outro observador. De fato, para um outro observador, poderá haver uma separação espacial entre os dois eventos, sempre menor do que o caminho que a luz percorreria entre os dois eventos. Logo os dois eventos podem estar correlacionados por uma relação de causa-efeito via um sinal enviado com velocidade $v \leq c$.

3.4.2 Dilatação do tempo

Voltando ao exemplo dos sistemas do vagão (S') e dos trilhos (S), consideremos agora o raio de luz que segue a trajetória indo da lâmpada até o chão do vagão, como ilustrado na figura abaixo.



Considere os seguintes eventos:

- E_a: Emissão do flash no teto do vagão.
- E_b: Detecção do flash no chão do vagão.

Estes dois eventos são observados pelo referencial S' (vagão) e S (trilhos) com intervalos de tempo respectivamente dados por $\Delta t'$ e Δt. Vejamos qual é a relação entre $\Delta t'$ e Δt.

No referencial S' (vagão) a distância espacial entre E_a e E_b é h. Como esta distância é percorrida pelo raio de luz, que viaja com velocidade c, então o tempo decorrido entre os dois eventos é

$$\Delta t' = \frac{h}{c}. \tag{3.4.4}$$

No referencial S as coordenadas dos eventos E_a e E_b são ($x_a = x_0$, $y_a = h$) e ($x_b = x_0 + v\Delta t$, $y_b = 0$), respectivamente. Portanto, a distância espacial entre E_a e E_b é

$$\sqrt{h^2 + (v\Delta t)^2}. \tag{3.4.5}$$

Esta distância é percorrida pelo raio de luz, que *também* viaja com velocidade c em S (segundo princípio de relatividade restrita). Logo, o intervalo de tempo entre E_a e E_b, medido pelo observador S é

$$\Delta t = \frac{\sqrt{h^2 + (v\Delta t)^2}}{c}. \tag{3.4.6}$$

Usando a equação (3.4.4), teremos

$$\Delta t = \frac{\sqrt{(c\Delta t')^2 + (v\Delta t)^2}}{c}. \tag{3.4.7}$$

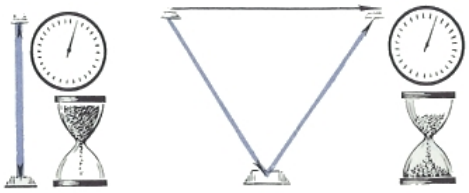
Resolvendo a equação acima para $\Delta t'$, obtemos

$$\Delta t' = \sqrt{1 - v^2/c^2}\Delta t. \tag{3.4.8}$$

Exercício: Mostre que *se* o princípio de invariância da velocidade da luz não fosse válido, ou seja, *se* S observasse a luz se propagando com velocidade $\vec{c}_S = v\hat{x} + c\hat{y}$, de modo que $|\vec{c}_S| = \sqrt{v^2 + c^2}$, então $\Delta t' = \Delta t$.

Portanto, o intervalo de tempo entre os dois *mesmos* eventos, E_a e E_b, é diferente para os observadores S e S'. No referencial do trem (S') o intervalo de tempo entre os eventos E_a e E_b é, de acordo com (3.4.8), *menor* do que no referencial S. As duas figuras abaixo[8] ilustram o significado desta relação em termos dos intervalos de tempo medidos por relógios que estão em S' e S.

[8] Esta ilustração foi feita por Anthony Ravielli para o livro *Relativity Simply Explained* de Martin Gardner, Dover Publications, INC.



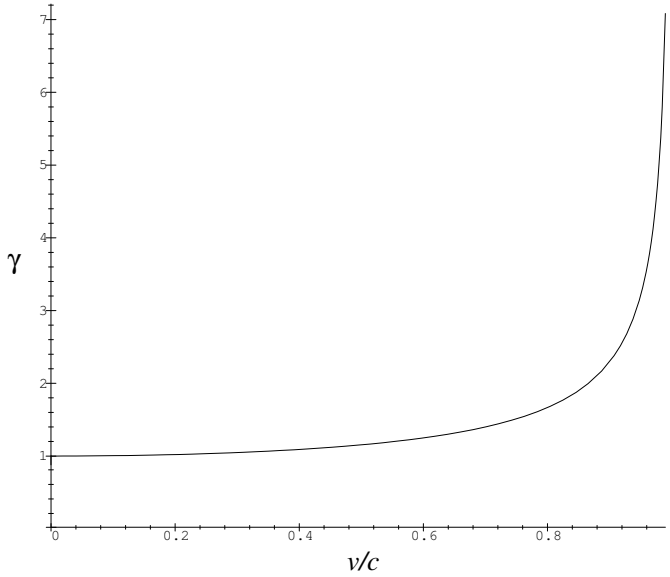
Assim quando observamos um sistema físico em movimento, o intervalo de tempo Δt, atribuido à um determinado processo que, no referencial do sistema, leva um tempo $\Delta t'$, será

$$\Delta t = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \Delta t' = \gamma \Delta t', \tag{3.4.9}$$

onde introduzimos o *fator de dilatação do tempo*

$$\gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \tag{3.4.10}$$

A figura abaixo mostra o gráfico do fator γ para um intervalo de velocidades entre 0 e $0,99\,c$.



Obviamente $\gamma = \infty$ quando $v = c$ e γ se torna imaginário quando $v > c$. Será que é possível uma interpretação que faça sentido físico no caso em que $v > c$? Afinal, os números imaginários frequentemente possuem interpretação física e nem sempre representam *soluções indesejáveis* que devem ser "jogadas fora". Será que isso ocorre no caso do fator γ? Voltaremos a esta questão quando tratarmos da mecânica relativística da partícula, ou seja, da descrição de partículas com movimento rápido em relação ao observador inercial.

Exercício: Obtenha a expressão para v em termos de γ e mostre que $\gamma \to 1$ quando $v \to c$.

Tempo próprio

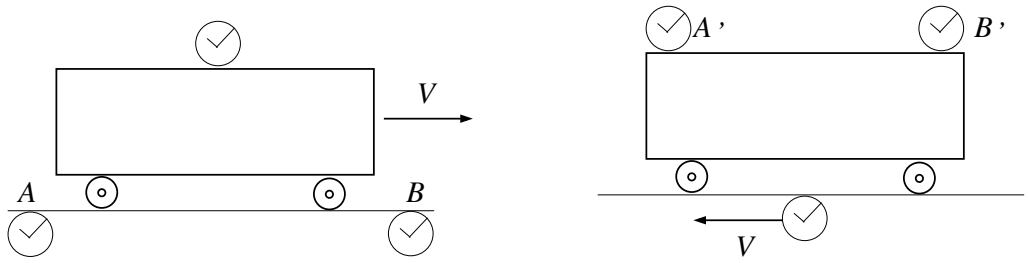
O intervalo de tempo $\Delta t'$ em (3.4.9) é denominado **intervalo de tempo próprio**. Ou seja, o intervalo de tempo medido por um observador que está em repouso em relação ao relógio. Quando

utilizamos um relógio em repouso para medir o intervalo de duração de um processo físico em um sistema também em repouso, estamos medindo o intervalo de tempo próprio do processo. O tempo próprio é uma característica intrínseca do sistema. Por exemplo, um pêndulo realiza um certo número de oscilações que é determinado pelo seu comprimento. Um relógio atômico oscila de acordo com as propriedades intrínsecas do átomo.

De todas as previsões da relatividade restrita, aquela que mais tem recebido confirmação experimental é a *dilatação do tempo*, especialmente quando consideramos os fenômenos físicos envolvendo *partículas elementares*. Muitas das partículas elementares são instáveis, desintegrando (em média) após um tempo próprio característico. Por exemplo, para o neutron esse tempo é de 15 min e para um múon é de 2×10^{-6} s. Mas esses tempos são para as partículas em repouso, ou seja, são os *tempos próprios* de desintegração. Quando estão se movendo com velocidades próximas à velocidade da luz, como ocorre nos aceleradores de partículas, seus "relógios internos" vão mais devagar, fazendo com que durem mais do que em repouso.

Exercício: Uma partícula elementar está se deslocando no laboratório com velocidade igual a $3/5c$. Sabendo que seu tempo de vida (tempo que ela existe antes de se transformar em outras partículas) é de 2×10^{-6} s quando observada em repouso, determine qual será o tempo de vida medido no referencial do laboratório.

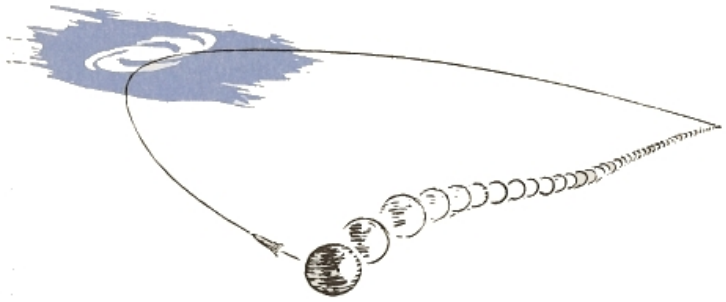
Neste ponto é comum ser confrontado com uma *aparente contradição*. Afinal, se o observador dos trilhos observa o relógio do trem indo mais devagar, então o observador do trem também pode concluir que o relógio dos trilhos anda mais devagar. Na verdade os dois pontos de vista estão corretos. Mas, os *procedimentos* dos dois observadores são, na verdade, *distintos*. O observador dos trilhos compara um relógio do trem com dois relógios *sincronizados nos trilhos*. O observador do trem compara um relógio dos trilhos com dois relógios *sincronizados no trem*. Porque então estes procedimentos são inequivalentes? A resposta é que relógios sincronizados em S não estão sincronizados em S', e vice-versa. Isso ocorre porque quando dizemos que os relógios estão sincronizados em S, significa que todos eles mostram, digamos 12h, *simultaneamente*. Mas nós já sabemos que o conceito de simultaneidade não é absoluto. Portanto, do ponto de vista de S', os relógios de S estão completamente bagunçados (e vice-versa). Ou seja, do ponto de vista de S, o observador S' utilizou relógios não sincronizados para realizar o procedimento de comparação.



Embora o *conjunto de relógios* em movimento não seja sincronizado, sempre é possível analisar um *único relógio* em movimento, e determinar o fenômeno de dilatação do tempo. Todos os relógios em movimento sofrem o mesmo fator de dilatação, mas o procedimento de verificação da dilatação deve ser feito em um único relógio, pois os diversos relógios que passam por nós não estão em sincronia. Por outro lado, podemos usar qualquer número de relógios estacionários (em repouso em relação ao observador), pois todos eles estão em sincronia no nosso referencial. Voltaremos a este problema mais adiante, utilizando as equações para as transformações de Lorentz.

3.4.3 O " paradoxo" das gêmeas

Exercício: Ao fazer 15 anos de idade Bia recebe de presente uma viagem em uma nave espacial que viaja a $(12/13)c$.Após 5 anos de viagem (no relógio de Bia) ela faz meia volta e retorna com a mesma velocidade para se reencontrar com sua irmã gêmea, Deb, que havia ficado em casa. Determine as idades de Bia e Deb no momento do reencontro (a figura abaixo é mais uma bela ilustração de Anthony Ravielli para o livro *Relativity Simply Explained* de Martin Gardner, Dover Publications, INC.)

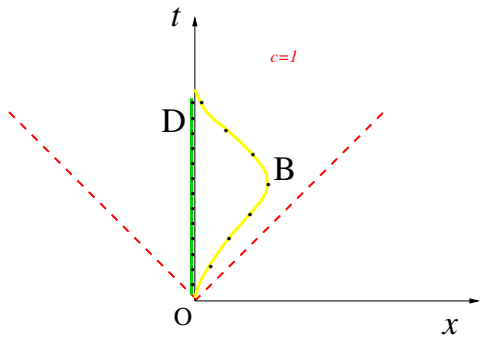


Um cálculo simples mostra que o fator γ no caso do execício acima é $\gamma = 13/5$. Ou seja, o tempo decorrido na Terra será $13/5 \cdot 10 = 26$ anos. Portanto, no reencontro, Deb terá 41 anos e Bia terá 25 anos.

Supondo que Deb e Bia estejam "programadas" para viver o mesmo número de anos, se estivessem permanecido em repouso relativo, será que poderíamos dizer que Bia terá vivido mais do que Deb pelo fato de ter feito a viagem espacial? Analisando com mais cuidado o tempo em que Bia esteve viajando, notamos que todos os seus processos biológicos – metabolismo, pulso, pensamentos, tique nervoso com a perna, etc – estiveram sujeitos ao mesmo efeito de dilatação do tempo. Ou seja, Bia não rejuvenesceu; ela simplesmente fez tudo mais lentamente. Deb, por exemplo, ao longo dos 26 anos, poderia ter completado os estudos básicos, ter vários namorados, completado um curso superior, feito pós-graduação, ter vários filhos, etc. Enquando isso, Bia poderia ter no máximo completado o mestrado (supondo que a nave seja na verdade uma grande colônia de viajantes espaciais).

Vejamos agora qual seria de fato o aparente paradoxo. Ele surge quando a história é contada do ponto de vista de Bia, a viajante. Segundo ela, é Deb que viaja com $12/13c$, faz meia volta e retorna. Portanto, no reencontro, seria Deb que estaria mais jovem. Não vamos analisar agora os detalhes da solução deste pseudo paradoxo. Faremos isso mais adiante utilizando as equações das transformações de Lorentz.

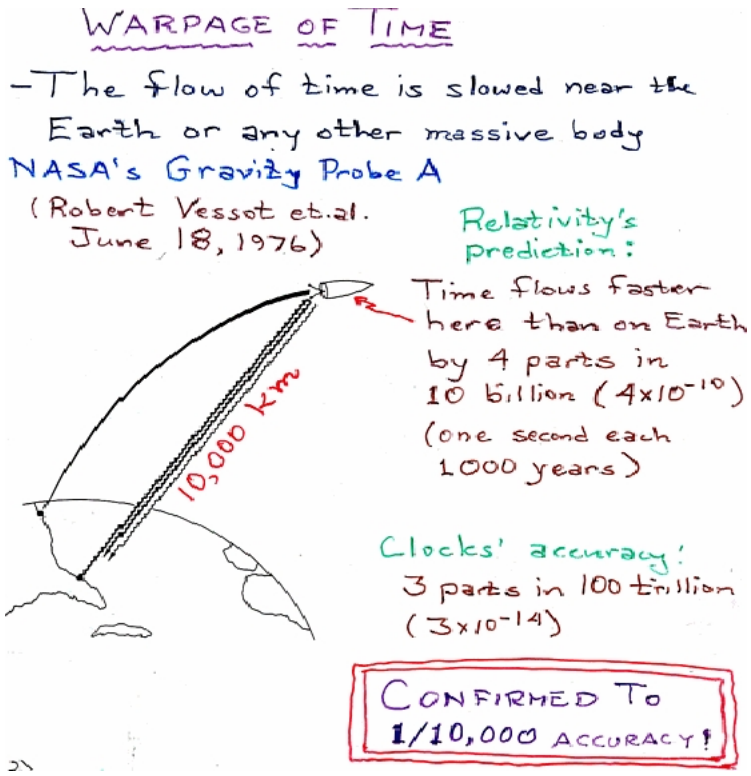
Mas é possível identificar uma falha na formulação do "paradoxo" usando somente os conceitos básicos desenvolvidos até aqui. Da maneira como está formulado, os dois pontos de vista seriam completamente equivalentes. Mas, na verdade *não são equivalentes*. O ponto de vista de Deb é o de um mesmo referencial inercial ao longo de toda a história. Por outro lado, Bia tem que necessariamente realizar um movimento acelerado para realizar sua viagem de retorno à Terra (sem contar que para sair da Terra ela também deveria ser acelerada até uma velocidade de $12/13c$). Ou seja, o referencial de Bia não é um único referencial inercial ao longo de toda a história. A figura abaixo, mostrando o *diagrama de espaço-tempo* com as *linhas de universo* de Bia e de Deb (mais detalhes na seção 3.5.7), ilustra bem a assimetria existente entre os dois pontos de vista.



Quando levamos em conta esta inequivalência, o paradoxo simplesmente evapora.

Mas será que o efeito físico de dilatação do tempo é de fato observado experimentalmente com aparatos macroscópicos (já vimos que não há dúvidas sobre isso em inúmeras situações envolvendo partículas elementares)?

A figura abaixo foi obtida em um palestra on-line, proferida pelo físico Kip Thorne, no sítio http://online.itp.ucsb.edu/online/plecture/thorne/.



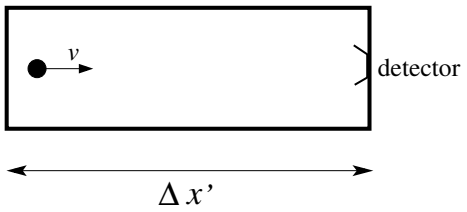
Embora a situação descrita na figura refira-se ao efeito da gravitação sobre os intervalos de tempo, mais adiante, quando abordarmos o princípio de equivalência, veremos qual é a relação entre gravitação e um referencial acelerado, como o de Bia. Na verdade, a principal razão de se mostrar esta figura, é tão somente chamar a atenção para a assombrosa precisão das medidas de tempo. Note que o efeito previsto pela *relatividade geral* é medido com uma precisão de 10^{-4} utilizando um relógio cuja precisão é 3×10^{-14} [9]

[9] Veja a seguinte notícia sobre o relógio mais preciso atualmente:

3.4.4 Contração de FitzGerald-Lorentz (distâncias longitudinais)

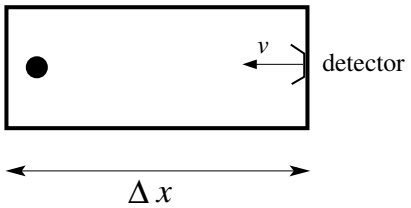
A invariância da velocidade da luz faz com que os conceitos de espaço e tempo fiquem completamente interdependentes. Podemos dizer que o segundo princípio da relatividade restrita *unifica* os conceitos de espaço e tempo[10]. Portanto, é de se esperar que as conclusões a que chegamos sobre a dilatação do tempo, impliquem em relações entre as medidas de distância realizadas pelos observadores S e S'. A derivação que faremos a seguir mostra como isso ocorre.

A figura abaixo mostra uma partícula se movendo em relação ao laboratório.



A distância $\Delta x'$ entre a partícula e o detector é medida usando um sistema de coordenadas rigidamente ligado ao laboratório.

No referencial rigidamente ligado à partícula, é o laboratório que está se movendo em relação à partícula como mostra a figura abaixo.



No primeiro caso (partícula em movimento) o intervalo de tempo entre sua posição atual e o instante em que ela é detectada é *maior* (dilatação do tempo) do que o correspondente intervalo de tempo no referencial em que a partícula está em repouso. Logo, por consistência, no referencial inercial da partícula o laboratório (em movimento) deve ser contraido pelo mesmo fator de dilatação do tempo. De fato, como já mostramos anteriormente, o evento "chegada da partícula ao detector" é independente de referencial. Ou seja, se a partícula é detectada, *todos* os observadores em qualquer referencial terão o registro deste evento. Denotando por Δx e $\Delta x'$ o comprimento do laboratório segundo o ponto de vista S' (laboratório em repouso) e S (laboratório em movimento), respectivamente, teremos então

$$\Delta x' = \gamma \Delta x. \tag{3.4.11}$$

Ou seja, o laboratório em repouso tem um comprimento maior do que o laboratório em movimento.

OPTICAL CLOCKS GET BETTER. Two separate experiments in Colorado compare the frequency of emissions from atoms or ions to an uncertainty of 10^{-16} *or better. Earlier atomic clocks operated by reading out the movements of internal transitions from one quantum state to another in cesium atoms; the light emitted was in the microwave range. With frequency comb techniques (http://www.aip.org/pnu/2008/split/853-1.html) measurement of optical-range frequencies can also be made with high accuracy. In the 28 March 2008 issue of Science two groups reported new superb levels of precision. One experiment, carried out by a JILA/Colorado/ NIST-Boulder team (Ludlow et al.), gauges the uncertainty of a clock based on neutral strontium atoms to a level of* 10^{-16} *by comparing it to a clock using calcium atoms and located a kilometer away. The other experiment, carried out at NIST-Boulder (Rosenband et al), looks at two clocks 100 meters apart. The clocks contain respectively a single aluminum and a single mercury ion. The fractional uncertainty in the ratio of the frequency outputs for the clocks was determined to be* 5.2×10^{-17}. *(NIST information at http://www.nist.gov/public_affairs/clock/clock.html)*

[10] Veremos que os conceitos de *energia e momento* também são unificados. No eletromagnetismo, os vetores de campos elétrico e magnético são unificados em um único *tensor eletromagnético*. Campos que descrevem outros tipos de interações entre partículas elementares também são parcialmente unificados pela relatividade restrita.

Comprimento próprio

O comprimento de um objeto medido no referencial de repouso do objeto é denominado *comprimento próprio* do objeto.

Dimensões perpendiculares à velocidade não sofrem contração

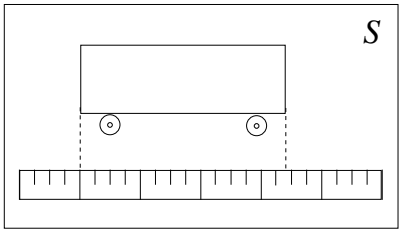
Considere a seguinte situação:

- Observador da plataforma segura um bastão de 1 m de altura posicionado verticalmente.
- Observadora do trem posiciona a mão a 1 m de altura.

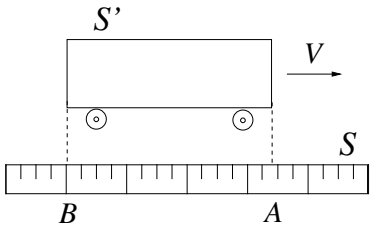
Se, do ponto de vista da observadora do trem o bastão ficasse mais curto, o evento "bastão foi tocado" não ocorreria. Por outro lado, se, do ponto de vista da plataforma a altura da mão da passageira ficasse mais para baixo, então o bastão seria tocado. Não há como conciliar estas duas possibilidades a não ser considerando que *as distâncias perpendiculares ao movimento não sofrem contração*. Somos levados a mesma conclusão se supusermos, por absurdo, que ocorre uma dilatação das dimensões perpendiculares ao movimento.

Como medir distâncias

(a) Régua e objeto a ser medido, ambos em repouso no referencial S.



(b) Régua em repouso em S e objeto a ser medido em movimento (repouso no referencial referencial S').



No caso (a), não há dúvidas sobre como determinar o comprimento do trenzinho; basta fazer duas marcas na régua, correspondentes aos extremos esquerdo e direito do trenzinho e subtrair os valores obtidos.

Também no caso (b), o observador S registra as marcas correspondentes aos extremos do trenzinho. Mas este registro deve ser feito *no mesmo instante de tempo*, de acordo com os relógios devidamente sincronizados em S. Ou seja, o procedimento de medida de comprimento de um objeto em movimento é descrito por dois eventos *simultâneos*:

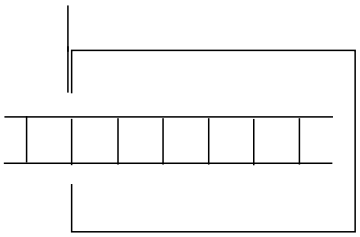
E_A: Registro da extremidade direita.

E_B: Registro da extremidade esquerda.

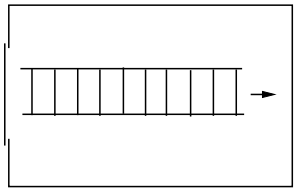
Para a observadora do trenzinho (S') E_A ocorre antes de E_B. Por outro lado, ela julga que a régua utilizada por S sofreu uma contração de Lorentz. A combinação destes dois fatores é portanto consistente com a ocorrência inequívoca dos dois eventos E_A e E_B. No entanto, no referencial (S'), os eventos E_A e E_B não representam uma medida de distância, simplesmente porque não são simultâneos.

Paradoxo da garagem

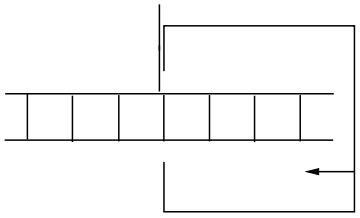
Considere o seguinte problema: O comprimento próprio de uma escada é maior do que o comprimento próprio de uma garagem, como ilustra a figura abaixo.



Alguém tem então a idéia "genial" de aplicar o princípio de relatividade para conseguir colocar a escada dentro da garagem. Para isso a escada é movida com velocidade relativística. Devido à contração de Lorentz o observador que está parado em relação à garagem julgará que a escada cabe dentro da garagem, como mostra a figura seguinte.



No entanto, do ponto de vista do observador que está se movendo com a escada, ocorre o que está esboçado da figura abaixo.



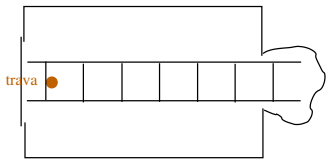
Para analisar corretamente o significado da frase "a escada entrou totalmente na garagem" devemos considerar cuidadosamente os seguintes eventos:

E_a: Extremo esquerdo da escada atinge a porta da garagem.

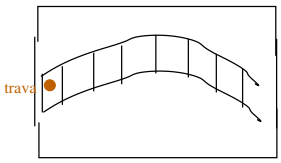
E_b: Extremo direito da escada atinge o fundo da garagem.

Para o observador da garagem, E_a ocorre antes de E_b, ou seja, a escada fica inteiramente dentro da garagem, *por algum tempo*. Para o observador que se move com a escada, E_b ocorre antes de E_a, ou seja, a escada nunca fica inteiramente dentro da garagem.

Mas o que ocorre quando a escada pára? Este é um novo dado a ser analizado! Veja as possibilidades nas duas figuras abaixo.



ou



ou ...

3.5 Transformação de Lorentz

A seguir faremos a derivação da transformações de Lorentz seguindo uma abordagem clássica como é usada por exemplo nas notas http://www2.physics.umd.edu/∼yakovenk/teaching/Lorentz.pdf. O que faremos a seguir é essencialmente uma tradução adaptada destas notas, uma vez que a fonte em LaTex foi disponibilizada no mesmo sítio, facilitando assim a digitação das equações [11]. A referência clássica sobre este tipo de derivação é [11]. Um cópia do artigo "One more derivation of the Lorentz transformation" pode ser obtido em http://plato.if.usp.br/∼fep0112n/AJP000271.pdf.

3.5.1 Derivação da transformação de Lorentz

Considere um evento qualquer no espaço-tempo e suas coordenadas (x', y', z', t'), em S'. A transformação de Lorentz (TL) é um conjunto de equações que expressa (x', y', z', t'), em termos das coordenadas (x, y, z, t) do mesmo evento em S. Uma vez obtida a TL, todos os resultados discutidos nas seções anteriores, em contextos mais ou menos particulares, podem ser derivados de maneira bastante direta.

Simetrias do espaço-tempo

Suponhamos que S' esteja se movendo com velocidade $\vec{v}$ em relação à S. Levando em conta que a escolha das direções dos eixos de coordenadas pode ser qualquer (isotropia do espaço), podemos realizar *rotações* de modo a fazer com que x e x' coincidam com a direção da velocidade relativa. Além disso, podemos escolher o origem dos sistemas de modo a fazer com que ($x = 0$,$t = 0$) e ($x' = 0$,$t' = 0$) descrevam o mesmo ponto do espaço-tempo (translação). Note que esta liberdade de escolha pressupõe propriedades de *simetria do espaço-tempo*. Na física a palavra *simetria* significa que o fenômeno observado (no caso, os eventos) não são alterados quando certas transformações são realizadas.

Levando em conta que distâncias perpendiculares à direção do movimento relativo são mantidas inalteradas nos dois referenciais (ver seção 3.4.4), a TL procurada pode ser expressa (após as rotações e translação espaço-temporal) como

$$\begin{aligned} x' &= f_x(x,t) \\ t' &= f_t(x,t). \end{aligned} \tag{3.5.1}$$

Linearidade das TL

Se usarmos novamente a simetria por translações, restrita ao plano (x,t), concluímos que a separação espaço-temporal entre dois eventos E_a e E_b, descrita por S', deve *depender apenas* da separação espaço-temporal entre dois eventos descrita por S, ou seja, usando (3.5.1)

$$\begin{aligned} x'_b - x'_a &= f_x(x_b,t_b) - f_x(x_a,t_a) = f_x(x_b - x_a, t_b - t_a) \\ t'_b - t'_a &= f_t(x_b,t_b) - f_t(x_a,t_a) = f_t(x_b - x_a, t_b - t_a). \end{aligned} \tag{3.5.2}$$

[11] É possível derivar a transformação de Lorentz usando outras abordagens. Uma das mais econômicas e elegantes está no livro "ABC of Relativity" do filósofo (o mais importante do século 20) Bertrand Russel [8]. Não resisti a tentação de colocar as três páginas em http://plato.if.usp.br/∼fep0112n/russel/.

Como os eventos E_a e E_b são quaisquer, a segunda igualdade acima somente será satisfeita se as funções f_x e f_t forem *lineares*. Logo, podemos escrever

$$\begin{aligned} x' &= A\,x + B\,t \\ t' &= C\,x + D\,t, \end{aligned} \tag{3.5.3}$$

onde A, B, C e D são constantes a serem determinadas.

Exercício: Quais são as dimensões físicas das constantes A, B, C e D? Verifique explicitamente, usando a transformação linear (3.5.3), que um movimento uniforme em S também será uniforme em S'.

Ao longo desta seção utilizaremos também o *formalismo matricial* para as transformações lineares. A forma matricial da equação (3.5.3) é

$$\begin{pmatrix} x' \\ t' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} \tag{3.5.4}$$

Relatividade do movimento

A origem do sistema S' ($x' = 0$) está se deslocando com velocidade v em relação à S, de modo que $x = v\,t$. Substituindo estes valores na primeira equação de (3.5.3), obtemos $0 = Avt + Bt$, ou seja, $B = -vA$. Com isso, restam agora apenas três constantes a serem determinadas e podemos escrever a transformação procurada como

$$\begin{aligned} x' &= A(x - vt) \\ t' &= Cx + Dt, \end{aligned} \tag{3.5.5}$$

Por outro lado, o observador S' descreve o movimento da origem do sistema S ($x = 0$) como $x' = -v\,t'$. Substituindo estes valores nas equações (3.5.7), termos $-vt' = -Avt$ e $t' = Dt$. Portanto, $D = A$, ou seja,

$$\begin{aligned} x' &= A(x - vt) \\ t' &= A\left(\frac{C}{A}x + t\right), \end{aligned} \tag{3.5.6}$$

Restam agora apenas duas constantes, C e A, a serem determinadas. Por conveniência vamos definir as seguintes grandezas: $\gamma_v \equiv A$ e $E_v \equiv C/A$, onde o subscrito v denota que as constantes dependem da velocidade relativa. Desse modo, podemos escrever a equação (3.5.6) como

$$\begin{aligned} x' &= \gamma_v(x - vt) \\ t' &= \gamma_v(E_v x + t). \end{aligned} \tag{3.5.7}$$

Em notação matricial, a equação acima pode ser escrita como

$$\begin{pmatrix} x' \\ t' \end{pmatrix} = \gamma_v \begin{pmatrix} 1 & -v \\ E_v & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix}. \tag{3.5.8}$$

A seguir determinaremos os valores de γ e E.

Propriedade de grupo

Consideremos agora três referenciais quaisquer S, S' e S''. A velocidade relativa de S' em relação à S é v_1 e a velocidade relativa de S'' em relação à S' é v_2. Então,

$$\begin{aligned} x'' &= \gamma_{v_2}\,(x' - v_2 t'), \qquad & x' &= \gamma_{v_1}\,(x - v_1 t), \\ t'' &= \gamma_{v_2}\,(E_{v_2} x' + t'), \qquad & t' &= \gamma_{v_1}\,(E_{v_1} x + t), \end{aligned} \tag{3.5.9}$$

ou, em notação matricial,

$$\begin{pmatrix} x'' \\ t'' \end{pmatrix} = \gamma_{v_2} \begin{pmatrix} 1 & -v_{v_2} \\ E_{v_2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ t' \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} x' \\ t' \end{pmatrix} = \gamma_{v_1} \begin{pmatrix} 1 & -v_{v_1} \\ E_{v_1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix}. \tag{3.5.10}$$

Combinando as equações (3.5.9), podemos escrever

$$\begin{aligned} x'' &= \gamma_{v_2}\,\gamma_{v_1}\,[(1 - E_{v_1} v_2)x - (v_1 + v_2)t)], \\ t'' &= \gamma_{v_2}\,\gamma_{v_1}\,[(E_{v_1} + E_{v_2})x + (1 - E_{v_2} v_1)t], \end{aligned} \tag{3.5.11}$$

ou, em notação matricial,

$$\begin{pmatrix} x'' \\ t'' \end{pmatrix} = \gamma_{v_2}\,\gamma_{v_1} \begin{pmatrix} 1 & -v_{v_2} \\ E_{v_2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -v_{v_1} \\ E_{v_1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix}. \tag{3.5.12}$$

Efetuando a multiplicação de matrizes, obtemos

$$\begin{pmatrix} x'' \\ t'' \end{pmatrix} = \gamma_{v_2}\,\gamma_{v_1} \begin{pmatrix} 1 - E_{v_1} v_2 & -v_1 - v_2 \\ E_{v_1} + E_{v_2} & 1 - E_{v_2} v_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix}. \tag{3.5.13}$$

A chamada *propriedade de grupo* significa, no presente contexto, que a equação (3.5.11) também representa uma TL entre S'' e S, cuja velocidade relativa é $v_1 + v_2$. Por outro lado, a forma geral da TL é, até aqui, dada pela equação (3.5.7) (ou a forma matricial (3.5.8)). Mas esta forma geral mostra que os coeficientes de x, na primeira equação, e de t, na segunda equação, são idênticos. Logo, como (3.5.11) também é uma TL, devemos ter

$$1 - E_{v_1} v_2 = 1 - E_{v_2} v_1 \quad \Rightarrow \quad \frac{v_2}{E_{v_2}} = \frac{v_1}{E_{v_1}}\,. \tag{3.5.14}$$

Na segunda igualdade acima, o lado esquerdo só depende de v_2 e o lado direito só depende de v_1. Portanto, a única maneira de satisfazer esta equação é tomando $v/E_v = a$, com a independente de v, ou seja,

$$E_v = \frac{v}{a}. \tag{3.5.15}$$

Substituindo (3.5.15) em (3.5.7) (e também na forma matricial (3.5.8)), teremos,

$$x' = \gamma_v\,(x - vt), \qquad t' = \gamma_v\,(xv/a + t), \tag{3.5.16}$$

ou, na forma matricial,

$$\begin{pmatrix} x' \\ t' \end{pmatrix} = \gamma_v \begin{pmatrix} 1 & -v \\ v/a & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix}. \tag{3.5.17}$$

Resta agora apenas a função da velocidade γ_v para ser determinada. A constante fundamental a somente será determinada com a condição física estipulada pelo princípio de constância da velocidade da luz.

Isotropia do espaço

Consideremos agora o resultado da combinação de uma TL de S para S', e, em seguida, a operação inversa de S' para S. Ou seja,

$$\begin{aligned} x &= \gamma_{-v}\,(x' + vt'), & x' &= \gamma_v\,(x - vt), \\ t &= \gamma_{-v}\,(-x'v/a + t'), & t' &= \gamma_v\,(xv/a + t), \end{aligned} \tag{3.5.18}$$

ou, em notação matricial,

$$\begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} = \gamma_{-v} \begin{pmatrix} 1 & v \\ -v/a & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ t' \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} x' \\ t' \end{pmatrix} = \gamma_v \begin{pmatrix} 1 & -v \\ v/a & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix}. \tag{3.5.19}$$

Eliminando x' e t' das equações (3.5.18), obtemos

$$x = \gamma_{-v}\,\gamma_v\,(1 + v^2/a)\,x, \qquad t = \gamma_{-v}\,\gamma_v\,(1 + v^2/a)\,t, \tag{3.5.20}$$

ou, em notação matricial,

$$\begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} = \gamma_{-v}\,\gamma_v \begin{pmatrix} 1 & v \\ -v/a & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -v \\ v/a & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} \tag{3.5.21}$$

Efetuando a multiplicação de matrizes, obtemos

$$\begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} = \gamma_{-v}\,\gamma_v \begin{pmatrix} 1 + v^2/a & 0 \\ 0 & 1 + v^2/a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix}. \tag{3.5.22}$$

As equações (3.5.20) (ou a forma matricial (3.5.22)) devem ser válidas para quaisquer x e t. Logo,

$$\gamma_{-v}\,\gamma_v = \frac{1}{1 + v^2/a}\,. \tag{3.5.23}$$

Essa condição também pode ser interpretada como sendo uma conseqüência da existência do elemento *identidade* do grupo de transformações.

Se γ_v dependesse do sentido da velocidade a *isotropia do espaço*, que utilizamos logo no início, não seria válida. Para explicitar mais esse fato, suponha que façamos uma mudança de sinal nas coordenadas espaciais, nos dois referenciais, mudando (x, x') para $(-x, -x')$. Neste caso, as equações (3.5.16) mudam para

$$-\,x' = \gamma_{-v}\,(-x + vt), \qquad t' = \gamma_{-v}\,(-x(-v)/a + t), \tag{3.5.24}$$

(note que mudamos também a velocidade relativa de v para $-v$). Cancelando os sinais, obtemos,

$$x' = \gamma_{-v}\,(x - vt), \qquad t' = \gamma_{-v}\,(xv/a + t), \tag{3.5.25}$$

A imposição de que esta transformação seja fisicamente equivalente à transformação original (isotropia) resulta em $\gamma_{-v} = \gamma_v$. Substituindo esta condição em (3.5.23), obtemos

$$\gamma_v = \frac{1}{\sqrt{1 + v^2/a}}\,. \tag{3.5.26}$$

Velocidade absoluta

Substituindo a equação (3.5.26) nas equações (3.5.16) e (3.5.17), encontramos as seguintes expressões para a TL

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 + v^2/a}}, \qquad t' = \frac{xv/a + t}{\sqrt{1 + v^2/a}}, \tag{3.5.27}$$

ou, em notação matricial,

$$\begin{pmatrix} x' \\ t' \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1 + v^2/a}} \begin{pmatrix} 1 & -v \\ v/a & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix}. \tag{3.5.28}$$

Assim, obtivemos a transformação mais geral possível, entre referenciais inerciais, compatível com as simetrias do espaço-tempo. Estas transformações possuem um parâmetro a, com dimensão de quadrado de velocidade.

Esta derivação mostra que a relação mais geral entre referenciais inerciais poderia ter sido obtida muito antes de terem surgido todas as controvérsias sobre o problema do éter, etc. As transformações (3.5.27) foram derivadas usando apenas as simetrias do espaço que já fazem parte da física newtoniana. Toda a diferença entre a física newtoniana e a relativística está no valor a ser atribuído ao parâmetro a. Isso parece simples...**mas não é!** A seguir introduziremos a condição física adicional que determina este parâmetro.

Exercício: Determine qual deve ser o valor da constante a na equação (3.5.27), para que um movimento com velocidade c no referencial S também seja um movimento com velocidade c no referencial S'. Sugestão: use $x = ct$ e $x' = ct'$ e resolva as equações para a.

O resultado do exercício acima mostra que

$$a = -c^2. \tag{3.5.29}$$

Neste caso, as equações (3.5.27) e (3.5.28) nos dão

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \qquad t' = \frac{t - xv/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \tag{3.5.30}$$

ou, em notação matricial,

$$\begin{pmatrix} x' \\ t' \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \begin{pmatrix} 1 & -v \\ -v/c^2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix}. \tag{3.5.31}$$

Essa é a transformação de Lorentz que permite expressar as coordenadas do sistema S em termos das coordenadas do sistema S'.

Portanto, podemos identificar a velocidade c com a velocidade da luz, quando levamos em conta as previsões feitas pelo eletromagnetismo, ou seja, a luz é uma onda eletromagnética que se propaga com velocidade c em todos os referenciais inerciais.

3.5.2 Transformação de Galileu

É interessante considerar o caso especial (não físico) em que é permita a propagação de sinais com velocidade infinita, ou seja, fazendo $a = \infty$, nas equações (3.5.27) e (3.5.28). Isso nos leva a transformação de Galileu

$$x' = x - vt, \qquad t' = t, \qquad \begin{pmatrix} x' \\ t' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -v \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix}. \tag{3.5.32}$$

3.5.3 Contração de Lorentz

Podemos agora analisar novamente o fenômeno de contração de Lorentz usando a transformação de Lorentz (3.5.30). Imagine uma barra se movendo para a esquerda com velocidade v. Seu comprimento próprio (comprimento em repouso) é $\Delta x' = x'_d - x'_e$, onde os subscritos denotam as extremidades direita e esquerda, respectivamente. Um observador S mede o comprimento da barra subtraindo as posições dos extremos *no mesmo instante de tempo*, ou seja, $\Delta t = t_d - t_e = 0$ e $\Delta x = x_d - x_e$. Usando a transformação de Lorentz (3.5.30), teremos

$$x'_d - x'_e = \gamma[(x_d - x_e) - v\underbrace{(t_d - t_e)}_{=0}] = \gamma(x_d - x_e). \tag{3.5.33}$$

Portanto,

$$\Delta x = \frac{1}{\gamma}\Delta x'. \tag{3.5.34}$$

Esse é o efeito de contração de Lorentz já discutido na seção 3.4.4.

3.5.4 Transformação de Lorentz em qualquer direção

Estude a seção 6.4 do vol. 4 do "Curso de Física Básica", Herch Moysés Nussenzveig [4].

3.5.5 Simultaneidade e sincronização

Uma primeira conseqüência simples da TL é a relatividade da smultaneidade e sincronização. Suponha que um evento A ocorra em $x_A = 0$ e $t_A = 0$, e um evento B ocorra em $x_B = b$ e $t_B = 0$. Ou seja, eventos simultâneos em pontos distintos do espaço. Em outro referencial inercial S', cuja origem do espaço tempo coincida com a de S, teremos, de acordo com (3.5.30), $x'_A = 0$ e $t'_A = 0$, $x'_B = \gamma b$ e $t'_B = -\gamma v/c^2 b$. Ou seja, em S' o evento B ocorre *antes* do evento A, como já havíamos discutido na seção 3.4.1 com o exemplo do trenzinho.

Suponha agora que em $t = 0$ o observador S decida examinar *todos* os relógios de S' que estão ao longo da direção x. De acordo com (3.5.30) esses relógios (que se movem no referencial S) marcam tempos dados por

$$t' = -\gamma\frac{v}{c^2}x. \tag{3.5.35}$$

Para $x < 0$ (esquerda da origem) todos os relógios estão adiantados e para $x > 0$ (direita da origem) todos os relógios estão atrasados. Esse é o efeito da não sincronia de relógios em movimento, discutido na seção 3.4.1.

3.5.6 Intervalos de Espaço-Tempo

Exercício: Verifique que a transformação (3.5.30) (ou a forma matricial (3.5.31)) deixa invariante a grandeza

$$s^2 \equiv (x)^2 - (ct)^2 \tag{3.5.36}$$

O resultado do exercício mostra que todos os observadores inerciais descrevem os eventos do espaço-tempo com o mesmo valor de s. A invariância do intervalo amarra os conceitos de espaço e tempo. Ou seja, espaço e tempo não podem mais ser julgados como grandezas independentes. Nas próximas seções derivaremos as principais conseqüências desta unificação do espaço com o tempo, como por exemplo, a dilatação do tempo e a contração das distâncias.

Invariantes relativísticos tais como s são de grande importância na física. Quando uma grandeza invariante é medida em um determinado referencial inercial, o valor obtido será o mesmo para qualquer outro observador inercial. Muitas vezes é possível encontar um referencial tal que o cálculo do invariante é simplificado.

Há aqui uma interessante analogia com a *invariância da distância* r entre dois pontos do espaço euclidiano, tal que

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2, \tag{3.5.37}$$

sob *rotações*. Neste caso, r é o mesmo para diferentes observadores que utilizam sistemas de coordenadas que diferem por rotações. Por exemplo,

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\text{sen}\theta & 0 \\ \text{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}. \tag{3.5.38}$$

Exercício: Mostre que r é invariante sob a transformação acima. Suponha que $a = \sigma^2 > 0$ na equação (3.5.27). Mostre que neste caso a transformação é uma rotação que leva $(x, \sigma t)$ em $(x', \sigma t')$. Determine o ângulo de rotação.

Se realizarmos uma translação espaço-temporal de modo que o evento correspondente à origem é transladado para (x_1, t_1) e o evento (x, t) para (x_2, t_2), teremos a forma explicitamente mais geral para o intervalo entre dois eventos quaisquer, dada por

$$(s_{12})^2 = (x_2 - x_1)^2 - c^2(t_2 - t_1)^2. \tag{3.5.39}$$

Fazendo também uma rotação espacial teremos,

$$(s_{12})^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 - c^2(t_2 - t_1)^2. \tag{3.5.40}$$

Podemos também considerar eventos *infinitesimalmente próximos*, de tal forma que

$$(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2 - c^2(dt)^2. \tag{3.5.41}$$

A grandeza ds é o elemento invariante de "distância" no *epaço-tempo de Minkowski* [12]. Neste espaço-tempo, o análogo da transformação de rotação é a TL.

Ao contrário da distância r entre dois pontos do espaço, s_{12} poder ser positiva ou negativa. É conveniente introduzir as seguintes definições:

(a) $s_{12} < 0$: intervalo do tipo tempo.

(b) $s_{12} = 0$: intervalo do tipo luz.

(c) $s_{12} > 0$: intervalo do tipo espaço.

Devido ao caráter absoluto de s_{12} as três possibilidades acima são características intrínsecas de pares de eventos, ou seja, todos os observadores inerciais atribuirão o mesmo valor ao intervalo de espaço-tempo entre dois eventos.

[12] Em 1908 o geômetra russo-alemão Hermann Minkowski, que havia sido professor de Einstein na Polytechnic de Zürich , introduziu o conceito de espaço-tempo (veja o artigo "Space and Time" de Hermann Minkowski nas páginas 75 a 91 da referência [13]). Repoduzimos aqui a tradução para o inglês de um trecho da introdução que se tornou famoso: *The views of space and time which I wish to lay before you have sprung from the soil of experimental physics, and therein lies their strength. They are radical. Henceforth space by itself, and time by itself, are doomed to fade away into mere shadows, and only a kind of union of the two will preserve an independent reality.*

Intervalo do tipo tempo e velocidade limite

No caso $s_{12}^2 < 0$, a separação espacial entre os eventos, $|x_2 - x_1|$, é *menor* do que a distância $c|t_2 - t_1|$ que a luz percorreria no mesmo intervalo de tempo. Portanto, *é possível* que os eventos ocorridos em x_1 e x_2 estejam correlacionados por um sinal que se propaga com velocidade $V < c$.

Suponhamos que de fato os eventos estejam correlacionados por um sinal se propaga com velocidade V, ou seja, $(x_2 - x_1)^2 = V^2(t_2 - t_1)^2$. Usando (3.5.39) podemos escrever

$$(s_{12})^2 = (x_2 - x_1)^2 - c^2(t_2 - t_1)^2 = (V^2 - c^2)(t_2 - t_1)^2 < 0 \tag{3.5.42}$$

Esta relação mostra que

$$|V| < c \tag{3.5.43}$$

em todos os referenciais inerciais, uma vez que s_{12} é um invariante relativístico. Note que a velocidade V não será a mesma para os diferentes observadores inerciais (em particular, $V = 0$ no sistema inercial onde os eventos ocorrem no mesmo ponto do espaço). Mas, *se* V é a velocidade de *algo que se propaga de modo a correlacionar eventos* (um sinal), então $V < c$. Tal limitação deve se aplicar também à velocidade relativa entre referenciais inerciais, uma vez que referenciais inerciais são constituídos de objetos concretos tais como réguas e relógios.

Causalidade

De acordo com (3.5.39) é possível ter as seguintes *sucessões de eventos*

$$\begin{aligned} t_2 - t_1 &> \frac{|x_2 - x_1|}{c} > 0 \\ t_2 - t_1 &< -\frac{|x_2 - x_1|}{c} < 0. \end{aligned} \tag{3.5.44}$$

Será que a sucessão de eventos também é um invariante relativístico? Considere a mesma sucessão de eventos como julgada por um observador inercial S' que se desloca com velocidade v em relação a S. De acordo a transformação de Lorentz (3.5.30),

$$t_2' - t_1' = \gamma \left[(t_2 - t_1) - \frac{v}{c^2}(x_2 - x_1) \right]. \tag{3.5.45}$$

Supondo que $t_2 - t_1 > 0$ e que $x_2 - x_1 = V(t_2 - t_1)$, ou seja, a propagação de um sinal de x_1 para $x_2 > x_1$ com velocidade V, teremos

$$t_2' - t_1' = \gamma (t_2 - t_1) \left(1 - \frac{vV}{c^2} \right). \tag{3.5.46}$$

Levando em conta que, de acordo com o resultado da seção anterior, a velocidade V do sinal e a velocidade relativa v são ambas menores do que c, a relação acima mostra que $t_2 - t_1 > 0$ se e somente se $t_2' - t_1' > 0$. portanto, não é possível inverter a ordem temporal de eventos que estão correlacionados pela propagação de um sinal. A ordem temporal é um invariante relativístico. Esse resultado está de acordo com o *princípio de causalidade*, segundo o qual, não é possível, por exemplo, nascer antes dos pais legítimos.

Tempo próprio

Exercício: Mostre que, no caso $s_{12}^2 < 0$, pode existir um referencial inercial S' onde os eventos ocorrem no mesmo ponto do espaço. Determine a velocidade relativa deste referencial.

Solução: Quando $x_1' - x_2' = 0$, o intervalo (3.5.42) é

$$(s_{12})^2 = -c^2(t_2' - t_1')^2 = -c^2\Delta\tau^2 \tag{3.5.47}$$

Portanto, $(s_{12})^2 < 0$. O intervalo

$$\Delta\tau = t_2' - t_1' \tag{3.5.48}$$

é o intervalo de tempo próprio, ou seja, o intervalo de tempo medido por um relógio estacionário.

Usando $x_2' - x_1' = 0$ na transformação de Lorentz (3.5.30), teremos

$$0 = \gamma[x_2 - x_1 - V(t_2 - t_1)]. \tag{3.5.49}$$

Portanto, a velocidade relativa é

$$V = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}. \tag{3.5.50}$$

Ou seja, S' se move em relação à S, passando por x_1 em t_1 e chegando em x_2 em t_2.

dilatação do tempo

Um observador S' mede um intervalo de tempo $\Delta t'$ em um relógio que está em repouso em relação à S'. Os eventos que caracterizam essa media são os seguintes:

E_a: Em em $t' = 0$ é disparado um cronômetro na origem $x = 0$.

E_b: Em $t' = \Delta t'$ o cronômetro é interrompido na origem $x = 0$.

Portanto, o valor do intervalo invariante de espaço-tempo é, de acordo com (3.5.36),

$$s^2 = 0 - c^2(\Delta t')^2 = -c^2(\Delta t')^2 \tag{3.5.51}$$

Como o intervalo é invariante, um outro observador inercial S cuja origem do espaço-tempo coincida com a de S', atribuirá ao evento E_b valores $x_b = \Delta x$ e $t_b = \Delta t$ tais que

$$-c^2(\Delta t)^2 + (\Delta x)^2 = -(\Delta t')^2 \tag{3.5.52}$$

Mas $\Delta x = v\Delta t$ (v é a velocidade relativa entre os observadores inerciais). Portanto,

$$\Delta t = \Delta t' \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \gamma\Delta t'. \tag{3.5.53}$$

Esse é o efeito de dilatação do tempo que já discutimos anteriormente na seção 3.4.2.

Exercício: Obtenha o efeito de dilatação do tempo diretamente da transformação de Lorentz.

Intervalo do tipo espaço

Consideremos agora um par de eventos tal que $(s_{12})^2 > 0$, ou seja eventos cujo intervalo é do tipo espaço. Neste caso, de acordo com a equação (3.5.40) teremos

$$|x_2 - x_1| > c|t_2 - t_1|. \tag{3.5.54}$$

Ou seja, um evento não pode ser causa do outro. De fato, nenhum sinal com velocidade $V \leq c$ pode ligar um evento ao outro.

Podemos mostrar que sempre existirá um referencial tal que os eventos com intervalo do tipo espaço ocorrem em um mesmo instante de tempo. Para isso, basta mostrar que existe um referencial inercial S' com velocidade relativa $V < c$. Usando a transformação de Lorentz (3.5.30) com a condição $t'_2 - t'_1 = 0$, teremos

$$0 = \gamma \left[(t_2 - t_1) - \frac{V}{c^2} (x_2 - x_1) \right]. \tag{3.5.55}$$

Portanto,

$$\frac{V}{c} = c \frac{t_2 - t_1}{x_2 - x_1} < 1, \tag{3.5.56}$$

onde usamos a relação (3.5.54). Logo, $V < c$. Neste referencial a grandeza

$$(s_{12})^2 = (x'_2 - x'_1)^2 \tag{3.5.57}$$

é a *distância própria* entre os dois eventos.

Mas podemos também encontrar um referencial tal que a ordem temporal dos eventos pode ser invertida. De fato, supondo que $t_2 > t_1$ no referencial S, teremos no referencial S'

$$t'_2 - t'_1 = \gamma \left[(t_2 - t_1) - \frac{V}{c^2} (x_2 - x_1) \right]. \tag{3.5.58}$$

De acordo com a relação (3.5.54) $(x_2 - x_1)/c$ pode ser arbitrariamente maior do que $t_2 - t_1$. Então, caso $x_2 - x_1$ seja positivo, $t'_2 - t'_1$ poderá ser negativo. Como não há relação causal entre os eventos de tipo espaço, a relatividade da ordem temporal é fisicamente consistente.

Intervalo do tipo luz

Quando $(s_{12})^2 = 0$, teremos

$$|x_2 - x_1| = c|t_2 - t_1|. \tag{3.5.59}$$

Portanto os dois eventos podem ser ligados por um sinal que se propaga com a velocidade da luz.

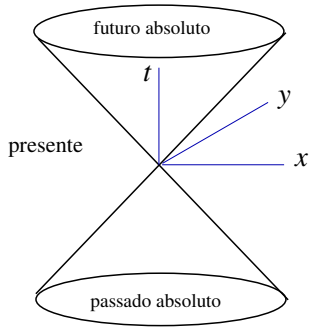
3.5.7 O cone de luz

Vamos agora analisar os resultados acima do ponto de vista geométrico.

Dado um evento qualquer E_0, podemos construir um certo "volume" de eventos E_p, que podem ser a causa de E_0, e um certo "volume" de eventos E_f que podem ser causados por E_0. Os conjuntos E_p e E_f são chamdos respectivamente de "passado absoluto" e "futuro absoluto" em relação à E_0. Se adotarmos um sistema inercial tal que E_0 coincide com a origem do espaço-tempo, os pontos correspondentes à E_p formam um hipercone cuja hipersuperfície é

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2 = 0. \tag{3.5.60}$$

Os pontos da hipersuperfície representam eventos que somente podem ser causa ($t < 0$) ou efeito ($t > 0$) de E_0 via *propagação de um sinal com velocidade c* (luz, por exemplo). Porisso a hipersuperfície é denominada *cone de luz*. Adodanto E_0 como o evento que representa o presente, os pontos que estão contidos no hipercone representarão o passado absoluto e o futuro absoluto respectivamente para $t < 0$ e $t > 0$. A figura abaixo é uma representação simplificada no caso de um espaço com somente duas dimensões espaciais.



Interpretação geométrica dos eventos do tipo tempo e do tipo espaço

Consideremos por simplicidade somente uma coordenada espacial. Um ponto (x, t) no interior do cone de luz satisfaz a condição

$$t^2 - (x/c)^2 = \tau^2, \tag{3.5.61}$$

onde τ^2 é tempo próprio invariante sob a transformação de Lorentz. Reescrevendo essa relação como

$$t = \pm\frac{1}{c}\sqrt{c^2\tau^2 + x^2}, \tag{3.5.62}$$

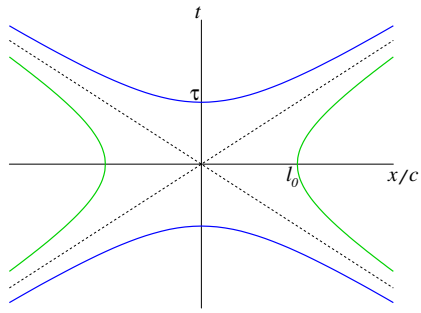
vemos que existem duas curvas, uma para cada sinal de t. Em cada uma destas curvas, um ponto pode ser obtido de outro fazendo uma transformação de Lorentz. Mas não é possível conectar pontos de curvas distintas por uma trasnformação de Lorentz. De fato, sabemos que o sinal de t não pode ser invertido, por uma TL, no interior do cone de luz.

Por outro lado, o conjunto de pontos exterior ao cone de luz é tal que (verifique)

$$x = \pm\sqrt{l_0^2 + c^2t^2}, \tag{3.5.63}$$

onde l_0 é o invariante comprimento próprio. Como estamos considerando uma dimensão espacial, as duas curvas parecem não estar conectadas. Na verdade, podemos considerar, sem perda de generalidade, apenas uma curva; a rotação em torno do eixo t produz uma superfície. Novamente, os pontos desta curva são gerados por transformações de Lorentz. Porém, neste caso, há pontos com $t < 0$ que são levados em pontos com $t > 0$. Ou seja, é possível inverter uma sucessão de eventos fazendo uma transformação de Lorentz. Esse é o resultado que já obtivemos anteriormente de forma analítica.

A figura abaixo mostra duas hipérboles formadas por eventos do tipo tempo (azul), correspondentes à equação (3.5.62), e duas de tipo espaço (verde), correpondentes à equação (3.5.63). Os cones de luz estão esboçados pelas linhas tracejadas.



3.5.8 Composição de velocidades

Vejamos agora como a velocidade de uma partícula é descrita em dois referenciais inerciais S e S' com velocidade relativa v ao longo do eixo x. Suponha que a partícula esteja se movendo com velocidade

$$\vec{u} = u_x\hat{x} + u_y\hat{y} + u_z\hat{z} \tag{3.5.64}$$

no referencial S. As componentes da velocidade são

$$u_x = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}, \quad u_x = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \quad \text{e} \quad u_z = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}. \tag{3.5.65}$$

No referencial S' teremos, usando a TL (3.5.30),

$$u'_x = \frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t'} = \frac{\mathrm{d}\left[\gamma\left(x - vt\right)\right]}{\mathrm{d}\left[\gamma\left(t - vx/c^2\right)\right]} = \frac{\mathrm{d}x - v\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t - v\mathrm{d}x/c^2} = \frac{\mathrm{d}x/\mathrm{d}t - v}{1 - (v/c^2)(\mathrm{d}x/\mathrm{d}t)}. \tag{3.5.66}$$

Portanto,

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1 - \frac{v\,u_x}{c^2}}. \tag{3.5.67}$$

Para as componentes u'_y e u'_z, teremos

$$u'_y = \frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}t'} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\left[\gamma\left(t - vx/c^2\right)\right]} = \frac{1}{\gamma}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t - v\mathrm{d}x/c^2} = \frac{\mathrm{d}y/\mathrm{d}t}{1 - (v/c^2)(\mathrm{d}x/\mathrm{d}t)} \tag{3.5.68}$$

e

$$u'_z = \frac{\mathrm{d}z'}{\mathrm{d}t'} = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\left[\gamma\left(t - vx/c^2\right)\right]} = \frac{1}{\gamma}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t - v\mathrm{d}x/c^2} = \frac{\mathrm{d}z/\mathrm{d}t}{1 - (v/c^2)(\mathrm{d}x/\mathrm{d}t)}. \tag{3.5.69}$$

Portanto,

$$u'_{y,z} = \frac{u_{y,z}}{\gamma\left(1 - \frac{v\,u_x}{c^2}\right)}. \tag{3.5.70}$$

Exercício: Mostre que:

(a) se $\vec{u} = c\hat{x}$ então $\vec{u}'_x = c$, $u'_y = u'_z = 0$.

(b) se $\vec{u} = c\hat{y}$ então $\vec{u}'_x = -v$, $u'_y = u_y/\gamma$ e $u'_z = 0$.

(c) se $u_x^2 + u_y^2 + u_z^2 = c^2$ então $(u'_x)^2 + (u'_y)^2 + (u'_z)^2 = c^2$.

Solução: Use as equações (3.5.67) e (3.5.70).

Exercício: Use as equações (3.5.67) e (3.5.70) para determinar o valor de γ' no referencial S'. (Sugestão: veja a equação (A.1.4).)

3.6 Efeito Doppler relativístico

[Seção 6.8, vol. 4 do "Curso de Física Básica", H. Moysés Nussenzveig.]

Consideremos uma onda plana que se propaga com a velociade absoluta c. A *fase* desta onda em um referencial S, cujas coordenadas são x, y, z e t, é (veja a equação (2.2.6); por simplicidade a *constante de fase* foi considerada nula)

$$\phi = k_x x + k_y y + k_z z - \omega t = \vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t \tag{3.6.1}$$

($\vec{x} \equiv x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$). Usando $\vec{k} = |\vec{k}|\hat{u} = \frac{\omega}{c}\,\hat{u}$ (onda se propagando direção $\hat{u}$ com velocidade c), teremos

$$\phi = -\omega\left(t - \frac{\hat{u}\cdot\vec{x}}{c}\right) = -2\pi\nu\left(t - \frac{\hat{u}\cdot\vec{x}}{c}\right). \tag{3.6.2}$$

Definimos agora a grandeza $F(\vec{x}, t)$ tal que

$$\phi = -2\pi F(\vec{x}, t), \tag{3.6.3}$$

ou seja,

$$F(\vec{x}, t) = \nu\left(t - \frac{\hat{u}\cdot\vec{x}}{c}\right). \tag{3.6.4}$$

Considere agora instantes sucessivos t_n para os quais F adquire valores inteiros $n = 0, 1, 2, \ldots$, em um ponto descrito pela origem espacial do sistema S, ou seja, $F(0, t_n) = n$. Como nestes instantes, $\phi = -2\pi n$, então, no instante t_{n+1} a onda tem o mesmo valor que no instante t_n. Podemos dizer que a sucessão de valores $F(0, t_n)$ constituem uma seqüência de *eventos idênticos* no ponto $\vec{x} = 0$. Levando em conta a propagação da onda, a mesma seqüência de eventos também ocorrerá em um outro ponto $\vec{x}$, distante da origem, em instantes $t_n + t_0$, tais que

$$t_0 = \frac{\hat{u}\cdot\vec{x}}{c}. \tag{3.6.5}$$

Naturalmente, os "eventos" são *frentes de onda* que passam pela origem e se propagam até o ponto $\vec{x}$. A grandeza

$$F(0, t_n) = n = \nu(t_n - t_0) \tag{3.6.6}$$

fornece a contagem destes pares frentes de onda.

Um outro observador em um sistema qualquer S' observará a mesma contagem n. Mas sabemos que o observador em S' atribuirá valores distintos para as coordenadas de espaço-tempo. Portanto, para manter n invariante na equação (3.6.6) o valor de ν também deverá mudar para um valor diferente ν'. Essa mudança na freqüência ν é o *efeito Doppler relativístico*, ou seja, o efeito Doppler para uma onda que se propaga com a velocidade absoluta c, como por exemplo a luz.

Podemos agora expressar ν' em termos de ν, usando a invariância de n, ou seja,

$$\nu'\left(t'_n - t'_0\right) = n = \nu\left(t_n - t_0\right). \tag{3.6.7}$$

Usando (3.6.5), teremos

$$\nu'\left(t'_n - \frac{\hat{u}'\cdot\vec{x}'}{c}\right) = \nu\left(t_n - \frac{\hat{u}\cdot\vec{x}}{c}\right). \tag{3.6.8}$$

Supondo que o ponto $\vec{x}$ esteja no plano xy e que S' esteja se movendo ao longo da direção x, ou seja

$$\hat{u} = \cos\theta\,\hat{x} + \mathrm{sen}\theta\,\hat{y} \tag{3.6.9}$$

e

$$\hat{u}' = \cos\theta'\,\hat{x}' + \text{sen}\theta\,\hat{y}', \tag{3.6.10}$$

podemos escrever a relação (3.6.8) como

$$\nu'\left(t'_n - \frac{x'\cos\theta'}{c} - \frac{y'\text{sen}\theta'}{c}\right) = \nu\left(t_n - \frac{x\cos\theta}{c} - \frac{y\text{sen}\theta}{c}\right). \tag{3.6.11}$$

Podemos agora usar a inversa das TL (3.5.30), expressando x, y, t em termos de x', y', t'. Fazendo isso na equação (3.6.11), teremos

$$\nu'\left(t'_n - \frac{x'\cos\theta'}{c} - \frac{y'\text{sen}\theta'}{c}\right) - \nu\left[\gamma\left(t'_n + \frac{vx'}{c^2}\right) - \frac{\cos\theta}{c}\gamma\left(x' + vt'\right) - \frac{y'\text{sen}\theta}{c}\right] = 0. \tag{3.6.12}$$

Como a identidade acima deve ser válida para quaisquer valores de x', y' e t', então, os respectivos coeficientes devem ser iguais a zero, ou seja,

$$\nu' - \gamma\nu + \gamma\beta\nu\cos\theta = 0, \tag{3.6.13}$$

$$-\nu'\frac{\cos\theta'}{c} - \frac{\beta\gamma\nu}{c} + \frac{\gamma\nu}{c}\cos\theta = 0 \tag{3.6.14}$$

e

$$-\nu'\frac{\text{sen}\theta'}{c} + \frac{\nu}{c}\text{sen}\theta = 0, \tag{3.6.15}$$

onde $\beta = v/c$. Destas relações obtemos os seguinte valores para a freqüência e ângulo no referencial S':

$$\nu' = \gamma\nu\left(1 - \beta\cos\theta\right) \tag{3.6.16}$$

e

$$\tan\theta' = \frac{1}{\gamma}\frac{\text{sen}\theta}{\cos\theta - \beta}. \tag{3.6.17}$$

Esta última equação descreve o fenômeno de aberração da luz emitida por um objeto em movimento.

O efeito Doppler relativístico é descrito pela equação (3.6.16). É interessante comparar este resultado com o que foi obtido, no caso de ondas sonoras, nas equações (2.2.23) e (2.2.28) respectivamente para um observador em movimento em relação ao ar e para a fonte em movimento. Como já havíamos salientado, no caso do som, o referencial do ar faz com que as duas situações sejam distintas.

Note que o efeito Doppler relativístico existe mesmo quando o movimento raltivo de dá na direção perpendicular à propagação da onda, ou seja, quando $\theta = \pi/2$, teremos

$$\nu' = \gamma\nu = \frac{\nu}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \tag{3.6.18}$$

Neste caso, o efeito é menos pronunciado, sendo de *segunda ordem* em v/c (veja o próximo exercício).

Exercício: Considere as equações (2.2.23) e (2.2.28) para o efeito Doppler sonoro.

(a) Mostre que o efeito Doppler sonoro desaparece quando $\zeta = \theta = \pi/2$ (efeito Doppler transverso).

(b) Considere agora o caso $\zeta = \theta = 0$. Supondo que as velocidades V e u (observador ou fonte em movimento) sejam pequenas em relação à velocidade do som v, mostre que as duas expressões para o efeito Doppler sonoro diferem apenas por termos de segunda ordem em u/v ou u/v.

(c) Obtenha a expressão para o efeito Doppler relativístico até termos de segunda ordem em β. Mostre que o efeito Doppler transverso ($\theta = \pi/2$) é de segunda ordem em β.

3.6.1 Efeito Doppler e a expansão no Universo

3.7 Mecânica relativística

Vimos que a transformação mais geral entre referenciais inerciais, compatível com as simetrias do espaço-tempo, é a dada pela equação (3.5.27). Quando levamos em conta a existência de uma velocidade absoluta c obtivemos a TL dada pela equação (3.5.30). Vimos também que a transformarão de Galileu é um caso particular de (3.5.27) quando $a \to \infty$. Por outro lado, as leis de Newton da mecânica somente mantém a mesma forma em diferentes sistemas inerciais, quando é utilizada a transformarão de Galileu. Portanto, a mecânica de Newton deve ser modificada de tal forma a manter a mesma forma sob a transformarão de Lorentz.

O material desta seção foi baseado na referência [12].

3.7.1 Velocidade

Assim como o espaço-tempo, o conceito de velocidade é um dos mais básicos em qualquer descrição de um sistema mecânico. Vimos na seção 3.5.6 que qualquer objeto físico que se desloca no espaço, o faz com velocidade $|\vec{u}| < c$. Portanto, a *linha de universo* seguida por uma partícula deve ser do tipo tempo. Ou seja,

$$c^2 \mathrm{d}t^2 - \mathrm{d}x^2 - \mathrm{d}y^2 - \mathrm{d}z^2 = c^2 \mathrm{d}\tau^2, \tag{3.7.1}$$

onde τ é o tempo próprio, ou seja, o tempo medido no referencial ligado à partícula. Usando ainda $\mathrm{d}x = u_x\,\mathrm{d}t$, $\mathrm{d}y = u_y\,\mathrm{d}t$ e $\mathrm{d}z = u_z\,\mathrm{d}t$, a relação acima permite expressar o tempo próprio como

$$\mathrm{d}\tau = \mathrm{d}t\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}. \tag{3.7.2}$$

Dividindo ambos os membros de (3.7.1) por $(\mathrm{d}\tau)^2$, obtemos

$$\left(\frac{\mathrm{d}(ct)}{\mathrm{d}\tau}\right)^2 - \left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau}\right)^2 - \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\tau}\right)^2 - \left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\tau}\right)^2 = c^2. \tag{3.7.3}$$

Definindo a *velocidade própria*

$$\vec{\eta} \equiv \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}\,\vec{u} \tag{3.7.4}$$

podemos escrever a equação (3.7.3) como

$$\left(\frac{\mathrm{d}(ct)}{\mathrm{d}\tau}\right)^2 - \eta_x^2 - \eta_y^2 - \eta_z^2 = c^2. \tag{3.7.5}$$

Portanto, temos agora uma nova grandeza invariante cujas componentes espaciais são η_x, η_y e η_z e a *componente temporal* é

$$\eta_0 \equiv \frac{\mathrm{d}(ct)}{\mathrm{d}\tau} = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}. \tag{3.7.6}$$

Ou seja,

$$c^2 = \eta_0^2 - \eta_x^2 - \eta_y^2 - \eta_z^2. \tag{3.7.7}$$

Como c^2 tem o mesmo valor em todos os sistemas inerciais, então o lado direito da equação (3.7.7) é também um invariante.

Exercício: Determine η_0', η_x', η_y' e η_z', no referencial S' que se move com velocidade $\vec{v} = v\hat{x}$ em relação à S.

Solução:

$$\eta_0{}' \equiv \frac{c}{\sqrt{1-\frac{u'^2}{c^2}}} \tag{3.7.8}$$

e

$$\vec{\eta}\,' \equiv \frac{1}{\sqrt{1-\frac{u'^2}{c^2}}}\,\vec{u}\,' \tag{3.7.9}$$

Usando as equações (A.1.4), (3.5.67) e (3.5.70) teremos

$$\eta_0{}' = c\frac{\gamma\left(1-\frac{u_x v}{c^2}\right)}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} = \gamma\left(\frac{c}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} - \frac{\frac{v}{c}u_x}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\right) = \gamma\left(\eta_0 - \frac{v}{c}\eta_x\right), \tag{3.7.10}$$

$$\eta_x{}' = \frac{\gamma\left(1-\frac{u_x v}{c^2}\right)}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\frac{u_x - v}{1-\frac{v\,u_x}{c^2}} = \gamma\left(\frac{u_x}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} - \frac{v}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\right) = \gamma\left(\eta_x - \frac{v}{c}\eta_0\right), \tag{3.7.11}$$

$$\eta_y' = \frac{\gamma\left(1-\frac{u_x v}{c^2}\right)}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\frac{u_y}{\gamma\left(1-\frac{v\,u_x}{c^2}\right)} = \eta_y \tag{3.7.12}$$

e

$$\eta_z' = \frac{\gamma\left(1-\frac{u_x v}{c^2}\right)}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\frac{u_z}{\gamma\left(1-\frac{v\,u_x}{c^2}\right)} = \eta_z \tag{3.7.13}$$

O exercício acima mostra que η_0, η_x, η_y e η_z, se transformam da mesma forma que as coordenadas de espaço-tempo $x_0 = ct$, x, y e z. Ou seja, é uma transformação de Lorentz.

3.7.2 Momento e energia

Massa

Vejamos agora como atribuir momento linear a uma partícula cuja *massa* é m. Estamos supondo que a quantidade m é medida no referencial onde a partícula se encontra em repouso. Ou seja, m é uma característica intrínseca da partícula a qual assume o *mesmo* valor para *todos* os observadores inerciais.

Momento relativístico

Uma vez definido o conceito de massa, devemos agora decidir qual é a grandeza a ser definida como o momento da partícula,

$$\vec{p} = m\vec{u} \quad \text{ou} \quad \vec{p} = m\vec{\eta}\ ? \tag{3.7.14}$$

A relação (3.7.4) mostra que as duas velocidades $\vec{\eta}$ e $\vec{u}$ coincidem quando $u/c \to 0$. Ou seja, o momento

$$\vec{p} = m\vec{\eta} \tag{3.7.15}$$

é mais geral e se reduz ao momento não relativístico quando a velocidade da partícula é pequena em comparação com c. Além disso, mostramos no apêndice A que

$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = 0 \Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}\vec{p}\,'}{\mathrm{d}t'} = 0. \tag{3.7.16}$$

Ou seja, essa definição de momento é compatível com o conceito absoluto de *conservação de momento*.

Energia-momento

Levando em conta que m é um invariante relativístico, se multiplicarmos a relação (3.7.7) por m^2, obteremos um outro invariante relativístico dado por

$$m^2c^2 = (m\,\eta_0)^2 - \left[(m\,\eta_x)^2 + (m\,\eta_y)^2 + (m\,\eta_z)^2\right]. \tag{3.7.17}$$

Usando a equação (3.7.15)

$$m^2c^2 = (m\,\eta_0)^2 - |\vec{p}|^2. \tag{3.7.18}$$

Vejamos agora qual é o significado físico da grandeza $m\eta_0$. No limite de pequenas velocidades,

$$m\eta_0 = \frac{mc}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} \approx mc\left(1+\frac{1}{2}\frac{u^2}{c^2}\right) = mc + \frac{1}{2}\frac{mu^2}{c}. \tag{3.7.19}$$

Multiplicando a expressão acima por c,

$$mc\eta_0 \approx mc^2 + \frac{mu^2}{2}. \tag{3.7.20}$$

O segundo termos no lado direito da expressão acima é a *energia cinética* não relativística. Portanto, a grandeza $mc\eta_0$ é a generalização relativística da energia da partícula (note que a partícula em questão está se movendo livremente). Imediatamente notamos qua há um importante bonus nesta generalização. De fato, podemos notar que a partícula possui uma energia não nula mesmo quando está em repouso. Esta *energia de repouso*, é

$$E_0 = mc^2. \tag{3.7.21}$$

Esta importante relação possui conseqüências importantíssimas em processos físicos onde ocorrem transformações envolvendo diferentes tipos de partículas, tais como na física de partículas elementares ou mesmo em processos que ocorrem em reatores de *fissão nuclear*, reações de *fusão nuclear* em estrelas, etc.

A partir de agora vamos designar a *energia total relativística* por

$$E(u) = mc\eta_0 = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}. \tag{3.7.22}$$

Substituindo $E = mc\eta_0$ na relação invariante (3.7.18), obtemos também a *relação entre energia e momento*

$$E^2 - p^2c^2 = m^2c^4. \tag{3.7.23}$$

O lado direito da equação (3.7.23) é um invariante relativístico. Em um outro sistema inercial, a energia e o momento da partícula serão diferentes, mas a relação $(E')^2 - (p')^2c^2$ terá sempre o mesmo valor m^2c^4.

A relação (3.7.22) pode também ser escrita como

$$E = m_{\text{rel}} c^2, \tag{3.7.24}$$

onde

$$m_{\text{rel}} \equiv \frac{m}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \tag{3.7.25}$$

é a *massa relativística*.

Massa nula

A relação (3.7.23) mostra que mesmo no caso $m = 0$ ainda há uma energia finita dada por

$$E = pc. \tag{3.7.26}$$

No entanto, de acordo com a equação (3.7.22), a energia aparentemente tenderia a zero quando a massa de repouso é nula. Porém, notando que o denominador também tende a zero quando $u \to c$, há a possibilidade de que existam partículas de massa nula, desde que possuam a velocidade absoluta c.

Mas o que poderia se propagar com a velocidade absoluta c? Há de pelo menos um exemplo, a saber, a *luz*. No eletromagnetismo é possível mostrar que a energia e o momento contidos na onda eletromagnética estão de fato relacionados como na equação (3.7.26). Mas, no presente contexto, estamos tratando da mecânica relativística de *partículas*. Porém, a *teoria quântica* prevê que uma onda de freqüência ν, tal como a onda eletromagnética, nada mais é do que uma coleção de *quanta de energia* cada um possuindo o valor

$$E = h\,\nu; \quad h = 6,6260755 \cdot 10^{-34}\,\text{Js}, \tag{3.7.27}$$

onde h é a *constante de Planck*. No caso da onda eletromagnética os quanta recebem o nome de *fótons*. Portanto, a relação entre energia e momento para os fótons, ou qualquer outra partícula de massa nula, é dada por (3.7.26) [13]. Esta relação será utilizada em diversos exemplos de processos envolvendo a interação entre fótons com elétrons ou *pósitrons*. O pósitron é uma partícula que possui a mesma massa e spin do elétron, mas sua carga possui sinal oposto; é a *anti-partícula* do elétron.

Exercício: Estime o número de fótons emitidos por segundo por uma lâmpada de 100 W (Sugestão: use o valor da freqüência da cor amarela). Calcule o momento total de fótons emitidos em 10 s.

3.7.3 Cinemática relativística

Vejamos agora algumas aplicações das leis de conservação de energia e momento relativísticos.

[13] Note que a relatividade não prevê a existência de partículas de massa nula. Porém, se elas existirem, devem necessariamente se propagar com velocidade c.

Colisões

Exercício: Dois corpos de mesma massa m colidem frontalmente, com velocidade $\frac{3}{5}c$, formando uma única massa M. Calcule o valor de M.

Solução: A energia total antes da colisão é:

$$E^i = \frac{2\,m\,c^2}{\sqrt{1-(3/5)^2}} = \frac{5}{2}mc^2. \tag{3.7.28}$$

Após a colisão a energia é

$$E^f = Mc^2. \tag{3.7.29}$$

Usando a conservação de energia $E_f = E_i$, obtemos

$$M = \frac{5}{2}m > m \tag{3.7.30}$$

O exercício mostra que a massa não foi conservada no processo de colisão. A energia cinética foi convertida em uma parte da massa de repouso M. Na análise newtoniana deste mesmo processo, diríamos que a energia cinética foi convertida em *energia térmica*. Mas o que é a energia térmica? Na relatividade, um objeto quente pesa mais do que o mesmo objeto frio.

Exercício: Um píon em repouso decai em um múon e um neutrino. Calcule a energia do múon em termos das massas do píon, m_π, e do múon m_μ (considere a massa no neutrino, m_ν, como sendo nula). Qual é a velocidade do múon?

Solução: A energia e o momento iniciais são:

$$E^i = m_\pi c^2, \quad \vec{p}^i = 0 \tag{3.7.31}$$

Após o decaimento do píon, teremos

$$E^f = E_\mu + E_\nu, \quad \vec{p}^f = \vec{p}_\mu + \vec{p}_\nu. \tag{3.7.32}$$

A conservação de energia e momento requer

$$\begin{aligned} E_\mu + E_\nu &= m_\pi c^2 \\ \vec{p}_\mu &= -\vec{p}_\nu. \end{aligned} \tag{3.7.33}$$

Como o neutrino tem massa nula, podemos tomar

$$E_\nu = |\vec{p}_\nu|c = |\vec{p}_\mu|c = \sqrt{E_\mu^2 - m_\mu^2 c^4}. \tag{3.7.34}$$

Substituindo a equação acima da primeira equação de (3.7.33), teremos

$$\sqrt{E_\mu^2 - m_\mu^2 c^4} = m_\pi c^2 - E_\mu. \tag{3.7.35}$$

Elevando ambos os membros ao quadrado,

$$E_\mu^2 - m_\mu^2 c^4 = m_\pi^2 c^4 + E_\mu^2 - 2m_\pi c^2 E_\mu. \tag{3.7.36}$$

Portanto,

$$E_\mu = \frac{(m_\pi^2 + m_\mu^2)c^2}{2m_\pi} \tag{3.7.37}$$

Podemos calcular a velocidade do múon, usando a expressão da energia relativística em termos da velocidade da partícula, de modo que

$$\frac{m_\mu c^2}{\sqrt{1-\frac{v_\mu^2}{c^2}}} = \frac{(m_\pi^2+m_\mu^2)c^2}{2m_\pi}. \tag{3.7.38}$$

Um cálculo simples mostra que

$$v_\mu = \frac{|m_\pi - m_\mu|}{\sqrt{m_\pi^2+m_\mu^2}}c. \tag{3.7.39}$$

Também no caso deste exercício, a energia cinética e a massa não são conservadas separadamente.

Exercício: Um elétron de massa m e momento p_e incide sobre um pósitron em repouso. Quando isso ocorre, o elétron e o pósitron, que possui a mesma massa do elétron e carga elétrica oposta, são aniquilados e a energia final é convertida em fótons.

(a) Mostre que não é possível ter somente um fóton no estado final.

(b) No caso em que são produzidos dois fótons, determine a energia do fóton que é emitido em uma direção formando um ângulo de 60° com a direção do elétron incidente.

Solução:

(a) A energia e o momento iniciais são

$$E^i = mc^2 + \sqrt{m^2c^4+p_e^2c^2} \quad \text{e} \quad \vec{p}^i = p_e. \tag{3.7.40}$$

Após a aniquilação, teríamos, no caso de um único fóton,

$$E^f = p^f c \quad \text{e} \quad \vec{p}^f = \vec{p}^i = \vec{p}_e. \tag{3.7.41}$$

É fácil verificar que as condições $E^f = E^i$ e $p^f = p^e$ não são compatíveis.

(b) No caso da aniquilação em dois fótons, teremos

$$E^f = p^{f_1}c + p^{f_2}c \quad \text{e} \quad \vec{p}^{f_1} + \vec{p}^{f_2} = \vec{p}_e. \tag{3.7.42}$$

A conservação de momento implica na seguinte relação

$$(\vec{p}^{f_2})^2 = (\vec{p}_e - \vec{p}^{f_1})^2 = p_e^2 + (p^{f_1})^2 - 2p_e p^{f_1}\cos\phi. \tag{3.7.43}$$

Substituindo na equação para a conservação de energia,

$$mc^2 + \sqrt{m^2c^4+p_e^2c^2} = E_1 + \sqrt{p_e^2c^2 + E_1 - 2p_e c E_1 \cos\phi}. \tag{3.7.44}$$

Esta relação permite obter a energia E_1 do fóton espalhado na direção que faz um ângulo ϕ com a direção do elétron incidente, em termos do momento e da massa do elétron.

Espalhamento Compton

Vejamos agora um exemplo de *espalhamento elástico*, ou seja, um processo tal que a soma das massas iniciais é igual à soma das massas finais. Isso ocorre, por exemplo, quando as partículas sobrevivem ao processo de colisão.

Exercício: Um fóton de energia E_0 incide sobre um elétron de massa m em repouso. É observado um fóton emergente, em uma direção que forma um ângulo θ com a direção de incidência, possuindo energia E. Qual é a relação entre E, E_0 e θ?

Solução: A energia inicial é a soma da energia do fóton E_0 com a energia de repouso do elétron mc^2. A energia final é a soma da energia E do fóton com a energia $\sqrt{p^2c^2+m^2c^4}$ do elétron emergente possuindo momento $\vec{p}$. Portanto, a conservação de energia fornece a relação

$$E_0 + mc^2 = E + \sqrt{p^2c^2+m^2c^4}. \tag{3.7.45}$$

O momento inicial é somente o momento do fóton $\vec{p}_0^f$ e o momento final é $\vec{p}+\vec{p}^f$. Impondo conservação do momento, teremos

$$\vec{p}_0^f = \vec{p}+\vec{p}^f. \tag{3.7.46}$$

Temos ainda as relações entre a energia e o momento do fóton, $E_0 = p_0^f c$ e $E = p^f c$. Além disso, o ângulo θ é tal que $\vec{p}_0^f \cdot \vec{p}^f = p_0^f p^f \cos\theta$. Usando a relação (3.7.46),

$$p^2c^2 = (\vec{p}_0^f - \vec{p}^f)^2c^2 = \left(p_0^f\right)^2c^2 + \left(p^f\right)^2c^2 - p_0^f p^f c^2\cos\theta = E_0^2 + E^2 - 2E_0E\cos\theta. \tag{3.7.47}$$

Substituindo (3.7.47) em (3.7.45),

$$E_0 + mc^2 - E = \sqrt{E_0^2 + E^2 - 2E_0E\cos\theta + m^2c^4}. \tag{3.7.48}$$

Elevando ambos os membros ao quadrado,

$$E_0^2 + m^2c^4 + E^2 + 2E_0mc^2 - 2Emc^2 - 2E_0E = E_0^2 + E^2 - 2E_0E\cos\theta + m^2c^4. \tag{3.7.49}$$

Ou seja,

$$\frac{1}{E} - \frac{1}{E_0} = \frac{1}{mc^2}\left(1-\cos\theta\right). \tag{3.7.50}$$

Podemos também combinar a equação (3.7.50) com a relação quântica de Einstein (3.7.27) de modo a expressar a relação entre as freqüências do fóton incidente e emergente. Substituindo $E_0 = h\nu_0$ e $E = h\nu$ em (3.7.50), teremos

$$\frac{1}{\nu} - \frac{1}{\nu_0} = \frac{h}{mc^2}\left(1-\cos\theta\right). \tag{3.7.51}$$

Em termos do comprimento de onda $\lambda = c/\nu$, teremos

$$\lambda - \lambda_0 = \frac{h}{mc}\left(1-\cos\theta\right). \tag{3.7.52}$$

A grandeza $h/(mc)$ é o comprimento de onda de Compton do elétron e vale $2,2463\cdot 10^{-12}$ m.

Exercício: Determine o ângulo θ para o qual a energia do fóton é *mínima*. Qual é a a energia cinética do elétron neste caso? Qual é o momento do elétron?

Solução: De acordo com a equação (3.7.50),

$$\frac{1}{E} = \frac{1}{E_0} + \frac{1}{mc^2}\left(1 - \cos\theta\right). \tag{3.7.53}$$

Portanto,

$$E = \frac{E_0 mc^2}{mc^2 + E_0(1 - \cos\theta)}. \tag{3.7.54}$$

É fácil ver que o valor *mínimo* desta expressão ocorre quando $(1 - \cos\theta)$ é *máximo*, ou seja, $\theta = \pi$. Portanto,

$$E_{\min} = \frac{E_0 mc^2}{mc^2 + 2E_0}. \tag{3.7.55}$$

Neste caso, a energia total *máxima* do elétron é

$$E_{e\max} = E_0 + mc^2 - E_{\min}. \tag{3.7.56}$$

Ou seja, a energia cinética *máxima* do elétron é

$$T_{\max} = E_{e\max} - mc^2 = E_0 - E_{\min} = 2\frac{E_0^2}{mc^2 + 2E_0}. \tag{3.7.57}$$

3.7.4 Dinâmica relativística

Primeira lei de Newton

A primeira lei de Newton está incluída na relatividade restrita. Ou seja, um movimento com velocidade constante em S também é um movimento com velocidade constante em S'.

Segunda lei de Newton

Supondo que exista uma *lei de força* que seja compatível com a relatividade, então a segunda lei de Newton pode ser generalizada como

$$\vec{F} = \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = m\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\vec{u}(t)}{\sqrt{1 - \frac{u(t)^2}{c^2}}}. \tag{3.7.58}$$

Um exemplo de lei de força compatível com a relatividade é a força produzida por campos eletromagnéticos $\vec{E}$ e $\vec{B}$ sobre uma partícula de carga q. Essa é a *força de Lorentz* dada por

$$\vec{F} = q\left(\vec{E} + \vec{u} \times \vec{B}\right). \tag{3.7.59}$$

Um caso particular é quando $q\vec{E} = F_0\hat{x}$, com F_0 independente de $\vec{x}$ e t, e $\vec{B} = 0$. Usando a segunda lei de Newton, teremos, neste caso,

$$F_0 = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}. \tag{3.7.60}$$

Integrando entre 0 e t,

$$F_0\, t = p(t) - p(0). \tag{3.7.61}$$

Supondo que a partícula esteja inicialmente em repouso ($p(0) = 0$),

$$p(t) = F_0 t. \tag{3.7.62}$$

Expressando $p(t)$ em termos de $u(t)$

$$F_0\, t = \frac{mu(t)}{\sqrt{1-u(t)^2/c^2}}. \tag{3.7.63}$$

Resolvendo para $u(t)$, teremos

$$u(t) = \frac{F_0 t/m}{\sqrt{1+(F_0^2\, t^2)/(m^2\, c^2)}}. \tag{3.7.64}$$

Esse resultado é a generalização relativística para o movimento em um campo de força uniforme e constante

Para $t \to \infty$, $(F_0^2\, t^2)/(m^2\, c^2) \gg 1$, de modo que

$$u \to \frac{Ft/m}{(F\, t)/(m\, c)} = c. \tag{3.7.65}$$

Ou seja, a aplicação da força constante e uniforme por um tempo infinito, acelera a partícula até, *no máximo*, a velocidade absoluta c.

Integrando a equação (3.7.64), teremos (tomando $x(0) = 0$)

$$x(t) = \int_0^t u(\bar{t})\mathrm{d}\bar{t} = \int_0^t \frac{F_0/m}{\sqrt{1+(F_0^2\, \bar{t}^2)/(m^2\, c^2)}}\bar{t}\,\mathrm{d}\bar{t} \tag{3.7.66}$$

Usando a variável de integração $z = 1 + F_0^2\bar{t}^2/(m^2c^2)$,

$$x(t) = \frac{mc^2}{2F_0}\int_1^{1+F_0^2\, t^2/(m^2c^2)} \frac{1}{\sqrt{z}}\mathrm{d}z = \frac{mc^2}{F_0}\left(\sqrt{1+F_0^2\, t^2/(m^2c^2)} - 1\right) \tag{3.7.67}$$

Exercício: Suponha que um raio de luz é emitido em $x = -h$. Determine o valor de h, tal que $x(t)$ dado em (3.7.67) é sempre maior do que a $x_{\text{lux}} = -h + ct$. Interprete fisicamente este resultado.

Para $F_0\, t \ll mc$, podemos expandir a raiz quadrada em (3.7.67) até primeira ordem, resultando em

$$x(t) \approx \frac{mc^2}{F_0}\left(1 + \frac{1}{2}\frac{F_0^2 t^2}{m^2c^2} - 1\right) = \frac{mc^2}{F_0}\frac{1}{2}\frac{F_0^2 t^2}{m^2c^2} = \frac{1}{2}\frac{F_0}{m}t^2 \tag{3.7.68}$$

que é a equação não relativística da partícula sob a ação de uma força uniforme e constante.

Teorema trabalho-energia

Consideremos agora o *trabalho* realizado pela força $\vec{F}$. Quando a partícula se desloca ao longo de uma trajetória qualquer, o trabalho em um trecho infinitesimal $\mathrm{d}\vec{l} = \vec{u}\,\mathrm{d}t$ da trajetória é

$$\mathrm{d}W = \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{l} = \vec{F}\cdot(\vec{u}\,\mathrm{d}t) = \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}\cdot\vec{u}\,\mathrm{d}t \tag{3.7.69}$$

Usando a expressão (3.7.15) para o momento relativístico,

$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}\cdot\vec{u} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{m\vec{u}}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\right)\cdot\vec{u}; \quad u^2 = \vec{u}\cdot\vec{u}. \tag{3.7.70}$$

Desenvolvendo essa relação,

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}\cdot\vec{u} &= \frac{m}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\frac{\mathrm{d}\vec{u}}{\mathrm{d}t}\cdot\vec{u} - \frac{1}{2}\frac{mu^2}{(1-\frac{u}{c^2})^{3/2}}\left(-\frac{2}{c^2}\frac{\mathrm{d}\vec{u}}{\mathrm{d}t}\cdot\vec{u}\right) \\
&= \frac{m}{(1-\frac{u^2}{c^2})^{3/2}}\frac{\mathrm{d}\vec{u}}{\mathrm{d}t}\cdot\vec{u} = \frac{m}{(1-\frac{u^2}{c^2})^{3/2}}\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}u^2}{\mathrm{d}t} \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{m\,c^2}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\right). \qquad (3.7.71)
\end{aligned}$$

Exercício: Verifique a última igualdade na equação acima.

Substituindo (3.7.71) em (3.7.69) em, obtemos

$$\mathrm{d}W = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{m\,c^2}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\right)\mathrm{d}t. \qquad (3.7.72)$$

Integrando,

$$W = \left(\frac{m\,c^2}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\right)_{\text{final}} - \left(\frac{m\,c^2}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\right)_{\text{inicial}}. \qquad (3.7.73)$$

Este resultado está de acordo com a interpretação da energia relativística como sendo dada pela equação (3.7.22). Como a energia de repouso é constante, o lado direito de (3.7.73) é a variação da energia cinética. Portanto, o teorema trabalho-energia permanece válido na relatividade.

Terceira lei de Newton

A terceira lei de Newton não é, em geral, compatível com a relatividade. De fato, para dois objetos separados no espaço, a terceira lei de Newton não está de acordo com a relatividade da simultaneidade. Por exemplo, se a força sobre A devida à B é $\vec{F}(t)$ e a força sobre B devida à A é $-\vec{F}(t)$, em um outro referencial inercial estas duas forças ocorrem em *instantes diferentes*; portanto a terceira lei não é verificada para outros observadores inerciais. Somente no caso especial de *interações de contato*, quando a ação e reação são aplicadas no *mesmo ponto*, (ou quando as forças não dependem do tempo), pode a terceira lei ser mantida.

3.8 Próximos assuntos

1. Princípio de relatividade geral
2. O campo gravitacional
3. Massa inercial e massa gravitacional
4. O Princípio de Equivalência
5. Termodinamica

Apêndice A

Conservação de momento na relatividade

A.1 Exercício

Demonstre que a definição de momento em (3.7.15) é tal que

$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = 0 \Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}\vec{p}\,'}{\mathrm{d}t'} = 0. \tag{A.1.1}$$

Ou seja, se o momento é conservado em um referencial, será conservado em qualquer outro.

Solução:

$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}\,'}{\mathrm{d}t'} = \frac{\mathrm{d}\vec{p}\,'}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t'} = \frac{1}{\gamma\left(1-\frac{u_x v}{c^2}\right)}\frac{\mathrm{d}\vec{p}\,'}{\mathrm{d}t} = \frac{m}{\gamma\left(1-\frac{u_x v}{c^2}\right)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\vec{u}\,'}{\sqrt{1-\frac{u'^2}{c^2}}}. \tag{A.1.2}$$

Usando as equações (3.5.67) e (3.5.70), teremos

$$\begin{aligned}
u'^2 = {u'_x}^2 + {u'_y}^2 + {u'_z}^2 &= \frac{1}{\left(1-\frac{u_x v}{c^2}\right)^2}\left[(u_x - v)^2 + \left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\underbrace{(u_y^2+u_z^2)}_{u^2-u_x^2}\right] \\
&= \frac{1}{\left(1-\frac{u_x v}{c^2}\right)^2}\left[u_x^2 - 2u_x v + v^2 + u^2 - u_x^2 - \frac{v^2u^2}{c^2} + \frac{v^2u_x^2}{c^2}\right] \\
&= \frac{1}{\left(1-\frac{u_x v}{c^2}\right)^2}\left[\left(c-\frac{u_x v}{c}\right)^2 - c^2 + v^2 + u^2 - \frac{v^2u^2}{c^2}\right] \\
&= \frac{c^2}{\left(1-\frac{u_x v}{c^2}\right)^2}\left[\left(1-\frac{u_x v}{c^2}\right)^2 - \left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\right] \\
&= c^2\left[1 - \frac{\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}{\left(1-\frac{u_x v}{c^2}\right)^2}\right]
\end{aligned} \tag{A.1.3}$$

Portanto,

$$\sqrt{1-\frac{u'^2}{c^2}} = \sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\frac{1}{1-\frac{u_x v}{c^2}} = \sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}\frac{1}{\gamma\left(1-\frac{u_x v}{c^2}\right)} \tag{A.1.4}$$

Substituindo (A.1.4) em (A.1.2), obtemos

$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}\,'}{\mathrm{d}t'} = \frac{m}{1-\frac{u_x v}{c^2}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\vec{u}\,'\left(1-\frac{u_x v}{c^2}\right)}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}. \tag{A.1.5}$$

Usando novamente a equação (3.5.67), teremos

$$\frac{\mathrm{d}p'_x}{\mathrm{d}t'} = \frac{m}{1-\frac{u_x v}{c^2}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{u_x - v}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} = \frac{m}{1-\frac{u_x v}{c^2}}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{u_x}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} - v\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\right) = \frac{1}{1-\frac{u_x v}{c^2}}\left(\frac{\mathrm{d}p_x}{\mathrm{d}t} - mv\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}.\right) \tag{A.1.6}$$

Usando a equação (3.7.71), podemos escrever

$$mv\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} = \frac{v}{c^2}\vec{u}\cdot\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} \tag{A.1.7}$$

Assim,

$$\frac{\mathrm{d}p'_x}{\mathrm{d}t'} = \frac{1}{1-\frac{u_x v}{c^2}}\left(\frac{\mathrm{d}p_x}{\mathrm{d}t} - \frac{v}{c^2}\vec{u}\cdot\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}\right). \tag{A.1.8}$$

Para as outras duas componentes as equações (A.1.5) e (3.5.70) resultam em

$$\frac{\mathrm{d}p'_y}{\mathrm{d}t'} = \frac{m}{\gamma\left(1-\frac{u_x v}{c^2}\right)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{u_y}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} = \frac{1}{\gamma\left(1-\frac{u_x v}{c^2}\right)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{mu_y}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} = \frac{1}{\gamma\left(1-\frac{u_x v}{c^2}\right)}\frac{\mathrm{d}p_y}{\mathrm{d}t} \tag{A.1.9}$$

e

$$\frac{\mathrm{d}p'_z}{\mathrm{d}t'} = \frac{m}{\gamma\left(1-\frac{u_x v}{c^2}\right)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{u_z}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} = \frac{1}{\gamma\left(1-\frac{u_x v}{c^2}\right)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{mu_z}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} = \frac{1}{\gamma\left(1-\frac{u_x v}{c^2}\right)}\frac{\mathrm{d}p_z}{\mathrm{d}t} \tag{A.1.10}$$

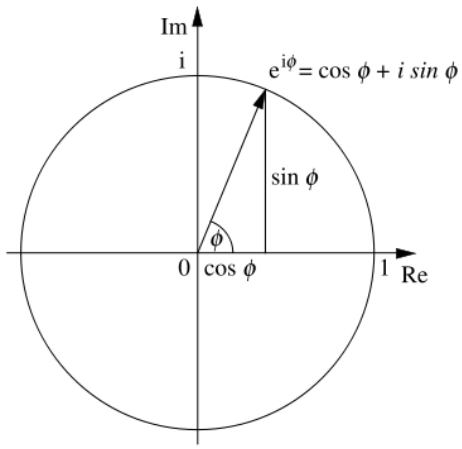
As três últimas equações levam diretamente à (A.1.1). Esta dedução também mostra que se tivéssemos empregado a definição não relativística de momento, $\vec{p} = m\vec{u}$, a implicação (A.1.1) não seria verdadeira.

Apêndice B

Formulas e tabelas de constantes físicas

B.1 Fórmulas trigonométricas

B.1.1 Fórmula de Euler



$$e^{ix} = \cos x + i \sin x; \quad i \equiv \sqrt{-1} \tag{B.1.1}$$

B.1.2 Soma de ângulos

$$\text{sen}(x \pm y) = \text{sen}(x)\cos(y) \pm \cos(x)\text{sen}(y) \tag{B.1.2}$$

$$\cos(x \pm y) = \cos(x)\cos(y) \mp \text{sen}(x)\text{sen}(y) \tag{B.1.3}$$

B.1.3 Identidades produto-soma

$$\cos(x)\cos(y) = \frac{\cos(x-y) + \cos(x+y)}{2} \tag{B.1.4}$$

$$\text{sen}(x)\,\text{sen}(y) = \frac{\cos(x-y) - \cos(x+y)}{2} \tag{B.1.5}$$

$$\operatorname{sen}(x)\cos(y) = \frac{\operatorname{sen}(x-y) + \operatorname{sen}(x+y)}{2} \tag{B.1.6}$$

B.1.4 Identidades soma-produto

$$\cos(x) + \cos(y) = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right) \tag{B.1.7}$$

$$\operatorname{sen}(x) + \operatorname{sen}(y) = 2\operatorname{sen}\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right) \tag{B.1.8}$$

$$\cos(x) - \cos(y) = -2\operatorname{sen}\left(\frac{x+y}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{x-y}{2}\right) \tag{B.1.9}$$

$$\operatorname{sen}(x) - \operatorname{sen}(y) = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{x-y}{2}\right) \tag{B.1.10}$$

B.2 Algumas integrais

B.2.1 Fórmulas básicas

$$\int x^n dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C \tag{B.2.1}$$

$$\int \frac{1}{x}dx = \ln x + C \tag{B.2.2}$$

$$\int udv = uv - \int vdu \tag{B.2.3}$$

B.2.2 Integrais de algumas funções racionais

$$\int \frac{1}{ax+b}dx = \frac{1}{a}\ln(ax+b) + C \tag{B.2.4}$$

$$\int \frac{1}{(x+a)^2}dx = -\frac{1}{x+a} + C \tag{B.2.5}$$

$$\int (x+a)^n dx = \frac{(x+a)^{n+1}}{n+1} + C, nn_{\mathrm{e}} - 1 \tag{B.2.6}$$

$$\int x(x+a)^n dx = \frac{(x+a)^{n+1}((n+1)x-a)}{(n+1)(n+2)} + C \tag{B.2.7}$$

$$\int \frac{1}{1+x^2}dx = \arctan(x) + C \tag{B.2.8}$$

$$\int \frac{x}{a^2+x^2}dx = \frac{1}{2}\ln(a^2+x^2) + C \tag{B.2.9}$$

$$\int \frac{1}{ax^2+bx+c}dx = \frac{2}{\sqrt{4ac-b^2}}\tan^{-1}\frac{2ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}} + C \tag{B.2.10}$$

$$\int \frac{1}{(x+a)(x+b)}dx = \frac{1}{b-a}\ln\frac{a+x}{b+x},\ an_{\mathrm{e}}b \tag{B.2.11}$$

B.2.3 Integrais envolvendo raízes

$$\int \sqrt{x-a}dx = \frac{2}{3}(x-a)^{3/2} + C \tag{B.2.12}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x \pm a}}dx = 2\sqrt{x \pm a} + C \tag{B.2.13}$$

$$\int x\sqrt{x-a}dx = \frac{2}{3}a(x-a)^{3/2} + \frac{2}{5}(x-a)^{5/2} + C \tag{B.2.14}$$

$$\int \sqrt{a^2-x^2}dx = \frac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2} + \frac{1}{2}a^2 \tan^{-1}\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}} + C \tag{B.2.15}$$

B.2.4 Integrais envolvendo logaritmos

$$\int \ln ax dx = x \ln ax - x + C \tag{B.2.16}$$

$$\int \frac{\ln ax}{x}dx = \frac{1}{2}\left(\ln ax\right)^2 + C \tag{B.2.17}$$

$$\int \ln\left(a^2 - b^2x^2\right)dx = x\ln\left(ar - b^2x^2\right) + \frac{2a}{b}\tan^{-1}\frac{bx}{a} - 2x + C \tag{B.2.18}$$

$$\int x\ln\left(a^2 - b^2x^2\right)dx = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}\left(x^2 - \frac{a^2}{b^2}\right)\ln\left(a^2 - b^2x^2\right) + C \tag{B.2.19}$$

B.2.5 Integrais envolvendo exponenciais

$$\int e^{ax}dx = \frac{1}{a}e^{ax} + C \tag{B.2.20}$$

$$\int xe^x dx = (x-1)e^x + C \tag{B.2.21}$$

$$\int e^{-\alpha x^2}dx = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{\pi}}{\alpha} \tag{B.2.22}$$

B.2.6 Integrais envolvendo funções trigonométricas

$$\int \mathrm{sen} ax dx = -\frac{1}{a}\cos ax + C \tag{B.2.23}$$

$$\int \mathrm{sen}^2 ax dx = \frac{x}{2} - \frac{\mathrm{sen}2ax}{4a} + C \tag{B.2.24}$$

$$\int \mathrm{sen}(x)\cos(x)dx = -\frac{\left(\cos(x)\right)^2}{2} + C \tag{B.2.25}$$

$$\int \tan ax dx = -\frac{1}{a}\ln\cos ax + C \tag{B.2.26}$$

$$\int \tan^2 ax dx = -x + \frac{1}{a}\tan ax + C \tag{B.2.27}$$

$$\int x\cos ax dx = \frac{1}{a^2}\cos ax + \frac{x}{a}\sin ax + C \tag{B.2.28}$$

$$\int e^{bx}\sin ax dx = \frac{1}{a^2+b^2}e^{bx}(b\sin ax - a\cos ax) + C \tag{B.2.29}$$

$$\int xe^x \sin x dx = \frac{1}{2}e^x(\cos x - x\cos x + x\sin x) + C \tag{B.2.30}$$

B.3 Algumas constantes físicas

Nome	**Símbolo**	**Valor**	**Unidade**
Velocidade da luz no vácuo	c	$2,99792458 \cdot 10^{8}$	m/s (def)
Carga do elétron	e	$1,60217733 \cdot 10^{-19}$	C
Constante gravitacional	G, κ	$6,67259 \cdot 10^{-11}$	$\mathrm{m^3kg^{-1}s^{-2}}$
Permeabilidade do vácuo	μ_0	$4\pi \cdot 10^{-7}$	H/m
Permissividade do vácuo	$\varepsilon_0 = 1/(\mu_0 c^2)$	$8,854187 \cdot 10^{-12}$	F/m
Constante de Stefan-Boltzmann	σ	$5,67032 \cdot 10^{-8}$	$\mathrm{Wm^{-2}K^{-4}}$
Constante de Wien	k_{W}	$2,8978 \cdot 10^{-3}$	mK
Constante universal dos gases	R	8,31441	$\mathrm{J{\cdot}mol^{-1}{\cdot}K^{-1}}$
Número de Avogadro	N_{A}	$6,0221367 \cdot 10^{23}$	$\mathrm{mol^{-1}}$
Constante de Boltzmann	$k = R/N_{\mathrm{A}}$	$1,380658 \cdot 10^{-23}$	J/K
Diâmetro do Sol	$D_\odot$	$1392 \cdot 10^{6}$	m
Massa do Sol	$M_\odot$	$1,989 \cdot 10^{30}$	kg
Período de rotação do Sol	$T_\odot$	25,38	dias
Raio da Terra	R_{A}	$6,378 \cdot 10^{6}$	m
Massa da Terra	M_{A}	$5,976 \cdot 10^{24}$	kg
Período de rotação da Terra	T_{A}	23,96	horas
Período orbital da Terra	Ano tropical	365,24219879	dias
Unidade astrnômica	AU	$1,4959787066 \cdot 10^{11}$	m
Ano-luz	lj	$9,4605 \cdot 10^{15}$	m
Parsec	pc	$3,0857 \cdot 10^{16}$	m
Constante de Hubble	H	$\approx (75 \pm 25)$	$\mathrm{km{\cdot}s^{-1}{\cdot}Mpc^{-1}}$
Massa do Elétron	m_{e}	$9,1093897 \cdot 10^{-31}$	kg
Massa do Próton	m_{p}	$1,6726231 \cdot 10^{-27}$	kg
Massa do Neutron	m_{n}	$1,674954 \cdot 10^{-27}$	kg
Unidade atômica de massa	$m_{\mathrm{u}} = \frac{1}{12} m({}^{12}_{6}\mathrm{C})$	$1,6605656 \cdot 10^{-27}$	kg
Constante de Planck	h	$6,6260755 \cdot 10^{-34}$	Js
Constante de Planck reduzida	$\hbar = h/2\pi$	$1,0545727 \cdot 10^{-34}$	Js
Magnéton de Bohr	$\mu_{\mathrm{B}} = e\hbar/2m_{\mathrm{e}}$	$9,2741 \cdot 10^{-24}$	$\mathrm{Am^2}$
Raio de Bohr	a_0	0,52918	Å
Constante de Rydberg	Ry	13,595	eV
Comprimento de onda de Compton do elétron	$\lambda_{\mathrm{Ce}} = h/m_{\mathrm{e}}c$	$2,2463 \cdot 10^{-12}$	m
Comprimento de onda de Compton do próton	$\lambda_{\mathrm{Cp}} = h/m_{\mathrm{p}}c$	$1,3214 \cdot 10^{-15}$	m
Constante de estrutura fina	$\alpha = e^2/2hc\varepsilon_0$	$\approx 1/137$	

Os valores da tabela acima foram obtidos do sítio `http://pdg.lbl.gov/2007/reviews/consrpp.pdf`, que reproduzimos abaixo

Table 1.1. Reviewed 2007 by P.J. Mohr and B.N. Taylor (NIST). Based mainly on the "CODATA Recommended Values of the Fundamental Physical Constants: 2006" by P.J. Mohr, B.N. Taylor, and D.B. Newell (to be published). The last group of constants (beginning with the Fermi coupling constant) comes from the Particle Data Group. The figures in parentheses after the values give the 1-standard-deviation uncertainties in the last digits; the corresponding fractional uncertainties in parts per 10^9 (ppb) are given in the last column. This set of constants (aside from the last group) is recommended for international use by CODATA (the Committee on Data for Science and Technology). The full 2006 CODATA set of constants may be found at `http://physics.nist.gov/constants`

Quantity	Symbol, equation	Value	Uncertainty (ppb)
speed of light in vacuum	c	299 792 458 m s^{-1}	exact*
Planck constant	h	6.626 068 96(33)$\times 10^{-34}$ J s	50
Planck constant, reduced	$\hbar \equiv h/2\pi$	1.054 571 628(53)$\times 10^{-34}$ J s	50
		= 6.582 118 99(16)$\times 10^{-22}$ MeV s	25
electron charge magnitude	e	1.602 176 487(40)$\times 10^{-19}$ C = 4.803 204 27(12)$\times 10^{-10}$ esu	25, 25
conversion constant	$\hbar c$	197.326 9631(49) MeV fm	25
conversion constant	$(\hbar c)^2$	0.389 379 304(19) GeV^2 mbarn	50
electron mass	m_e	0.510 998 910(13) MeV/c^2 = 9.109 382 15(45)$\times 10^{-31}$ kg	25, 50
proton mass	m_p	938.272 013(23) MeV/c^2 = 1.672 621 637(83)$\times 10^{-27}$ kg	25, 50
		= 1.007 276 466 77(10) u = 1836.152 672 47(80) m_e	0.10, 0.43
deuteron mass	m_d	1875.612 793(47) MeV/c^2	25
unified atomic mass unit (u)	(mass ^{12}C atom)/12 = (1 g)/(N_A mol)	931.494 028(23) MeV/c^2 = 1.660 538 782(83)$\times 10^{-27}$ kg	25, 50
permittivity of free space	$\epsilon_0 = 1/\mu_0 c^2$	8.854 187 817 ... $\times 10^{-12}$ F m^{-1}	exact
permeability of free space	μ_0	$4\pi \times 10^{-7}$ N A^{-2} = 12.566 370 614 ... $\times 10^{-7}$ N A^{-2}	exact
fine-structure constant	$\alpha = e^2/4\pi\epsilon_0\hbar c$	7.297 352 5376(50)$\times 10^{-3}$ = 1/137.035 999 679(94)†	0.68, 0.68
classical electron radius	$r_e = e^2/4\pi\epsilon_0 m_e c^2$	2.817 940 2894(58)$\times 10^{-15}$ m	2.1
(e^- Compton wavelength)/2π	$\lambdabar_e = \hbar/m_e c = r_e\alpha^{-1}$	3.861 592 6459(53)$\times 10^{-13}$ m	1.4
Bohr radius ($m_{\rm nucleus} = \infty$)	$a_\infty = 4\pi\epsilon_0\hbar^2/m_e e^2 = r_e\alpha^{-2}$	0.529 177 208 59(36)$\times 10^{-10}$ m	0.68
wavelength of 1 eV/c particle	$hc/(1\ {\rm eV})$	1.239 841 875(31)$\times 10^{-6}$ m	25
Rydberg energy	$hcR_\infty = m_e e^4/2(4\pi\epsilon_0)^2\hbar^2 = m_e c^2\alpha^2/2$	13.605 691 93(34) eV	25
Thomson cross section	$\sigma_T = 8\pi r_e^2/3$	0.665 245 8558(27) barn	4.1
Bohr magneton	$\mu_B = e\hbar/2m_e$	5.788 381 7555(79)$\times 10^{-11}$ MeV T^{-1}	1.4
nuclear magneton	$\mu_N = e\hbar/2m_p$	3.152 451 2326(45)$\times 10^{-14}$ MeV T^{-1}	1.4
electron cyclotron freq./field	$\omega^e_{\rm cycl}/B = e/m_e$	1.758 820 150(44)$\times 10^{11}$ rad s^{-1} T^{-1}	25
proton cyclotron freq./field	$\omega^p_{\rm cycl}/B = e/m_p$	9.578 833 92(24)$\times 10^{7}$ rad s^{-1} T^{-1}	25
gravitational constant‡	G_N	6.674 28(67)$\times 10^{-11}$ m^3 kg^{-1} s^{-2}	1.0×10^5
		= 6.708 81(67)$\times 10^{-39}$ $\hbar c$ (GeV/c^2)$^{-2}$	1.0×10^5
standard gravitational accel.	g_n	9.806 65 m s^{-2}	exact
Avogadro constant	N_A	6.022 141 79(30)$\times 10^{23}$ mol^{-1}	50
Boltzmann constant	k	1.380 6504(24)$\times 10^{-23}$ J K^{-1}	1700
		= 8.617 343(15)$\times 10^{-5}$ eV K^{-1}	1700
molar volume, ideal gas at STP	$N_A k(273.15\ {\rm K})/(101\ 325\ {\rm Pa})$	22.413 996(39)$\times 10^{-3}$ m^3 mol^{-1}	1700
Wien displacement law constant	$b = \lambda_{\rm max} T$	2.897 7685(51)$\times 10^{-3}$ m K	1700
Stefan-Boltzmann constant	$\sigma = \pi^2 k^4/60\hbar^3 c^2$	5.670 400(40)$\times 10^{-8}$ W m^{-2} K^{-4}	7000
Fermi coupling constant**	$G_F/(\hbar c)^3$	1.166 37(1)$\times 10^{-5}$ GeV^{-2}	9000
weak-mixing angle	$\sin^2\widehat{\theta}(M_Z)\ (\overline{\rm MS})$	0.231 22(15)††	6.5×10^5
$W^\pm$ boson mass	m_W	80.403(29) GeV/c^2	3.6×10^5
Z^0 boson mass	m_Z	91.1876(21) GeV/c^2	2.3×10^4
strong coupling constant	$\alpha_s(m_Z)$	0.1176(20)	1.7×10^7

π = 3.141 592 653 589 793 238 e = 2.718 281 828 459 045 235 γ = 0.577 215 664 901 532 861

1 in ≡ 0.0254 m 1 G ≡ 10^{-4} T 1 eV = 1.602 176 487(40) $\times 10^{-19}$ J kT at 300 K = [38.681 685(68)]$^{-1}$ eV

1 Å ≡ 0.1 nm 1 dyne ≡ 10^{-5} N 1 eV/c^2 = 1.782 661 758(44) $\times 10^{-36}$ kg 0 °C ≡ 273.15 K

1 barn ≡ 10^{-28} m^2 1 erg ≡ 10^{-7} J 2.997 924 58 $\times 10^9$ esu = 1 C 1 atmosphere ≡ 760 Torr ≡ 101 325 Pa

* The meter is the length of the path traveled by light in vacuum during a time interval of 1/299 792 458 of a second.
† At $Q^2 = 0$. At $Q^2 \approx m_W^2$ the value is $\sim 1/128$.
‡ Absolute lab measurements of G_N have been made only on scales of about 1 cm to 1 m.
** See the discussion in Sec. 10, "Electroweak model and constraints on new physics."
†† The corresponding $\sin^2\theta$ for the effective angle is 0.23152(14).

B.4 Tabela Periódica

A tabela abaixo foi obtida em `http://pdg.lbl.gov/2007/reviews/periodicrpp.pdf`,

Table 4.1. Revised 2007 by C.G. Wohl (LBNL) and D.E. Groom (LBNL). Adapted from the Commission on Isotopic Abundances and Atomic Weights, "Atomic Weights of the Elements 2005," Pure and Applied Chemistry **78**, 2051 (2006), and G. Audi, A.H. Wapstra, and C. Thibault, Nucl. Phys. **A729**, 337 (2003). The atomic number (top left) is the number of protons in the nucleus. The atomic mass (bottom) is weighted by isotopic abundances in the Earth's surface. Atomic masses are relative to the mass of ^{12}C, defined to be exactly 12 unified atomic mass units (u) (approx. g/mole). Relative isotopic abundances often vary considerably, both in natural and commercial samples; this is reflected in the number of significant figures given. A number in parentheses is the atomic mass of the longest-lived known isotope of that element as of 2005—no stable isotope exists. The exceptions are Th, Pa, and U, which do have characteristic terrestrial compositions. As of early 2006 element 112 has not been assigned a name, and there are no confirmed elements with $Z > 112$.

PERIODIC TABLE OF THE ELEMENTS

1 IA	2 IIA	3 IIIB	4 IVB	5 VB	6 VIB	7 VIIB	8 VIII	9 VIII	10 VIII	11 IB	12 IIB	13 IIIA	14 IVA	15 VA	16 VIA	17 VIIA	18 VIIIA
1 H Hydrogen 1.00794																	2 He Helium 4.002602
3 Li Lithium 6.941	4 Be Beryllium 9.012182											5 B Boron 10.811	6 C Carbon 12.0107	7 N Nitrogen 14.0067	8 O Oxygen 15.9994	9 F Fluorine 18.9984032	10 Ne Neon 20.1797
11 Na Sodium 22.98976928	12 Mg Magnesium 24.3050											13 Al Aluminum 26.9815386	14 Si Silicon 28.0855	15 P Phosph. 30.973762	16 S Sulfur 32.065	17 Cl Chlorine 35.453	18 Ar Argon 39.948
19 K Potassium 39.0983	20 Ca Calcium 40.078	21 Sc Scandium 44.955912	22 Ti Titanium 47.867	23 V Vanadium 50.9415	24 Cr Chromium 51.9961	25 Mn Manganese 54.938045	26 Fe Iron 55.845	27 Co Cobalt 58.933195	28 Ni Nickel 58.6934	29 Cu Copper 63.546	30 Zn Zinc 65.409	31 Ga Gallium 69.723	32 Ge German. 72.64	33 As Arsenic 74.92160	34 Se Selenium 78.96	35 Br Bromine 79.904	36 Kr Krypton 83.798
37 Rb Rubidium 85.4678	38 Sr Strontium 87.62	39 Y Yttrium 88.90585	40 Zr Zirconium 91.224	41 Nb Niobium 92.90638	42 Mo Molybd. 95.94	43 Tc Technet. (97.9072)	44 Ru Ruthen. 101.07	45 Rh Rhodium 102.90550	46 Pd Palladium 106.42	47 Ag Silver 107.8682	48 Cd Cadmium 112.411	49 In Indium 114.818	50 Sn Tin 118.710	51 Sb Antimony 121.760	52 Te Tellurium 127.60	53 I Iodine 126.90447	54 Xe Xenon 131.293
55 Cs Cesium 132.9054519	56 Ba Barium 137.327	57–71 Lantha-nides	72 Hf Hafnium 178.49	73 Ta Tantalum 180.94788	74 W Tungsten 183.84	75 Re Rhenium 186.207	76 Os Osmium 190.23	77 Ir Iridium 192.217	78 Pt Platinum 195.084	79 Au Gold 196.966569	80 Hg Mercury 200.59	81 Tl Thallium 204.3833	82 Pb Lead 207.2	83 Bi Bismuth 208.98040	84 Po Polonium (208.9824)	85 At Astatine (209.9871)	86 Rn Radon (222.0176)
87 Fr Francium (223.0197)	88 Ra Radium (226.0254)	89–103 Actinides	104 Rf Rutherford. (267.1215)	105 Db Dubnium (268.1255)	106 Sg Seaborg. (266.)	107 Bh Bohrium (264.)	108 Hs Hassium (277.150)	109 Mt Meitner. (276.1512)	110 Ds Darmstadt. (281.162)	111 Rg Roentgen. (280.1645)	112 (285.174)						

Lanthanide series	57 La Lanthan. 138.90547	58 Ce Cerium 140.116	59 Pr Praseodym. 140.90765	60 Nd Neodym. 144.242	61 Pm Prometh. (144.9127)	62 Sm Samarium 150.36	63 Eu Europium 151.964	64 Gd Gadolin. 157.25	65 Tb Terbium 158.92535	66 Dy Dyspros. 162.500	67 Ho Holmium 164.93032	68 Er Erbium 167.259	69 Tm Thulium 168.93421	70 Yb Ytterbium 173.04	71 Lu Lutetium 174.967
Actinide series	89 Ac Actinium (227.0278)	90 Th Thorium 232.03806	91 Pa Protactin. 231.03588	92 U Uranium 238.02891	93 Np Neptunium (237.0482)	94 Pu Plutonium (244.0642)	95 Am Americ. (243.0614)	96 Cm Curium (247.0704)	97 Bk Berkelium (247.0703)	98 Cf Californ. (251.0796)	99 Es Einstein. (252.0830)	100 Fm Fermium (257.0951)	101 Md Mendelev. (258.0984)	102 No Nobelium (259.1010)	103 Lr Lawrenc. (262.1096)

Exercícios

Além das listas já divulgadas, há mais alguns exercícios espalhados pelas seguintes páginas:

Ondas: 11, 17, 19, 21, 22, 36, 46

Relatividade: 72–77, 84, 87, 88, 90, 91, 94, 96, 98, 101–104, 105, 111

Termodinâmica:

Referências Bibliográficas

[1] NUSSENZVEIG, H. M. *Curso de Física Básica - Vol. 1*. São Paulo: Editora Edgard Blücher Ltda, 1998.

[2] NUSSENZVEIG, H. M. *Curso de Física Básica - Vol. 2*. São Paulo: Editora Edgard Blücher Ltda, 1998.

[3] NUSSENZVEIG, H. M. *Curso de Física Básica - Vol. 3*. São Paulo: Editora Edgard Blücher Ltda, 1998.

[4] NUSSENZVEIG, H. M. *Curso de Física Básica - Vol. 4*. São Paulo: Editora Edgard Blücher Ltda, 1998.

[5] FEYNMAN, R. P.; LEIGHTON, R. B.; SANDS, M. *The Feynman Lectures on Physics – Vol. 1*. London: Addison-Wesley Pub. Co., 1964.

[6] FEYNMAN, R. P.; LEIGHTON, R. B.; SANDS, M. *The Feynman Lectures on Physics – Vol. 2*. London: Addison-Wesley Pub. Co., 1964.

[7] FEYNMAN, R. P.; LEIGHTON, R. B.; SANDS, M. *The Feynman Lectures on Physics – Vol. 3*. London: Addison-Wesley Pub. Co., 1964.

[8] RUSSEL, B. *ABC of Relativity*. London: Unwin Paperbacks, 1977.

[9] GARDNER, M. *Relativity Simply Explained*. Mineola, New York: Dover Publications, Inc., 1996.

[10] EINSTEIN, A. *Relativity: The Special and General Theory (Translated: Robert W. Lawson)*. New York: Methuen & Co Ltd, 1916.

[11] LEVY-LEBLOND, J.-M. One more derivation of the Lorentz transformation. *Am. J. Phys*, v. 44, p. 271, 1976.

[12] GRIFFITHS, D. J. *Introduction to Electrodynamics*. New Jersey: Prentice Hall, 1999.

[13] EINSTEIN, A.; MINKOWSKI, H.; WEYL, H. *The Principle of Relativity: A Collection of Original Memoirs on the Special and General Theory of Relativity*. New York: Dover, 1952.