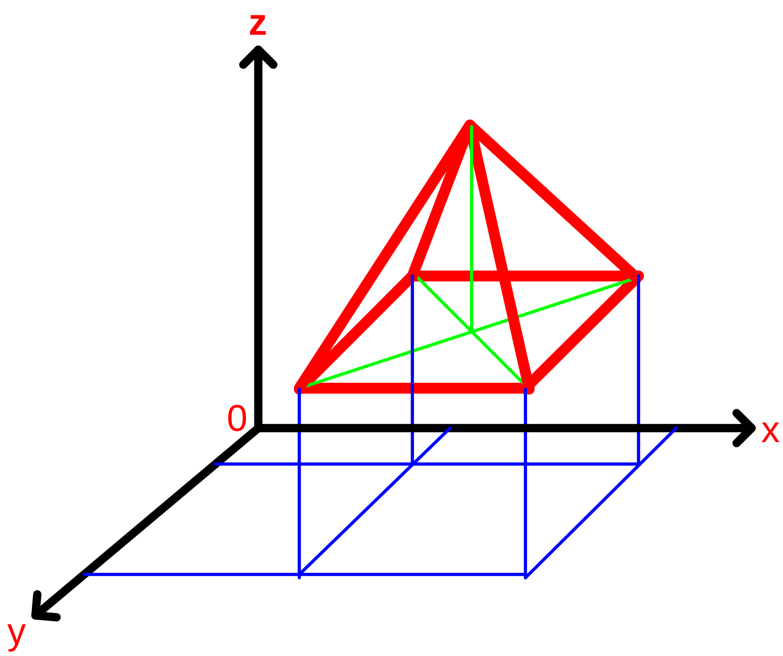
CARA JITU MENGUASAI

OLIMPIADE MATEMATIKA

UNTUK SMA



Bimmo Dwi Baskoro, S.Si.

KATA PENGANTAR

Buku ini dirancang untuk melengkapi siswa-siswi SMA dengan penalaran konsep dasar serta kemahiran dalam menyelesaikan soal-soal olimpiade matematika yang sifatnya tidak rutin. Perlu disadari bahwa tidak semua materi soal yang muncul pada kompetisi sekelas Olimpiade Matematika tercakup dalam kurikulum regular SMA. Oleh karena itu diperlukan upaya lebih besar dalam mengenalkan soal Olimpiade Matematika dengan berbagai solusi yang sifatnya dapat merangsang siswa untuk berfikir secara kreatif.

Buku ini diharapkan dapat dipelajari untuk digunakan sebagai alat bantu dalam menghadapi kompetisi matematika khususnya olimpiade matematika. Rincian pembahasan dalam buku ini terdiri atas soal olimpiade tingkat Kabupaten / Kota, Provinsi, Nasional, South East Asian Mathematic Olympiad (SEAMO), Asian Pacific Mathematic Olympiad (APMO), dan lampiran Problem Solving of International mathematic Olimpiad (IMO). Penulis sengaja memisahkannya supaya siswa dapat dengan mudah mempelajari buku ini secara bertahap. Kemudian setelah siswa dibekali taktik dan strategi pemecahan masalah, penulis sertakan pula latihan soal tanpa pembahasan di akhir bab, namun tetap diberikan kunci jawaban dan beberapa ’clue’ untuk mengevaluasi pemahaman siswa. Sasaran yang ingin dicapai setelah siswa mempelajari buku ini dengan baik adalah,

- Memperoleh pengetahuan dasar dan pola pikir bermatematika;
- Memperoleh daya nalar dan kreatifitas yang tinggi setelah diberikan taktik dan strategi dalam pemecahan soal olimpiade matematika;
- Dapat dengan mudah menerjemahkan suatu kasus ke dalam bahasa matematika;
- Siswa mendapatkan prestasi yang tinggi dalam kompetisi matematika khusususnya dalam olimpiade matematika.

Penulis menyadari bahwa dengan segala keterbatasan dan kompleksitas dalam pengerjaan buku ini, tentu saja masih terdapat kekurangan. Oleh karena itu masukan dari pembaca sangat penulis hargai dan penulis tunggu di bimmo.baskoro@yahoo.com. Dengan segala kelebihan dan kekurangannya, penulis berharap semoga buku ini bermanfaat bagi pembaca.

Jakarta, Maret 2012

Penulis

DAFTAR ISI

PETUNJUK

SELEKSI TINGKAT KAB./KOTA
OLIMPIADE MATEMATIKA

1. Banyaknya soal secara keseluruhan adalah 20 soal. Masing-masing terdiri atas 10 soal pilihan ganda dan 10 soal isian singkat. Waktu yang disediakan untuk mengerjakan semua soal adalah 90 menit.

2. Pada soal bagian pertama (pilihan ganda), setiap jawaban benar diberi nilai 6, salah diberi nilai 0, dan jawaban kosong diberi nilai 2.

3. Pada soal bagian kedua (isian singkat), hanya jawaban yang benar saja yang diberi nilai, yaitu 9 untuk setiap jawaban yang benar.

4. Tuliskan nama dan asal sekolah Anda di sebelah kanan atas pada kertas jawaban.

5. Anda diminta menuliskan jawaban pada kotak yang disediakan untuk masing-masing soal. Untuk soal bagian pertama Anda cukup menuliskan abjad (huruf) dari pilihan yang Anda anggap paling benar. Sedangkan untuk bagian kedua Anda cukup menuliskan jawaban dari pertanyaan yang diberikan.

6. Jawaban hendaknya Anda tuliskan dengan menggunakan tinta, bukan pensil.

7. Selama tes, Anda tidak diperkenankan menggunakan buku, catatan, atau alat bantu hitung. Anda juga tidak diperkenankan untuk bekerjasama.

8. Mulailah bekerja hanya setelah pengawas memberi tanda dan berhentilah bekerja segera setelah pengawas memberi tanda.

9. Selamat bekerja, Semoga berhasil.

VERSI I

DEPARTEMEN PENDIDIKAN NASIONAL
OLIMPIADE MATEMATIKA SMA
TINGKAT KABUPATEN / KOTA

SOAL BAGIAN PERTAMA

Pilih satu jawaban yang benar, dalam hal terdapat lebih dari satu jawaban yang benar, pilih jawaban yang paling baik.

1. Jumlah tiga bilangan prima pertama yang lebih besar dari 50 adalah …
   A. 169
   B. 171
   C. 173
   D. 175
   E. 177

2. Dalam sebuah kotak terdapat 5 bola merah dan 10 bola putih. Jika diambil dua bola secara bersamaan, peluang memperoleh dua bola berwarna sama adalah …
   A. $\frac{1}{2}$
   B. $\frac{1}{4}$
   C. $\frac{2}{21}$
   D. $\frac{10}{21}$
   E. $\frac{11}{21}$

3. Jika $X = \dfrac{1}{2 + \dfrac{1}{2 + \dfrac{1}{2}}}$, maka X = …

   A. $\dfrac{2}{9}$

   B. $\dfrac{5}{12}$

   C. $\dfrac{4}{9}$

   D. $\dfrac{9}{4}$

   E. $\dfrac{12}{5}$

4. Pada segitiga ABC, titik F membagi sisi AC dalam perbandingan 1 : 2. Misalkan G titik tengah BF dan E titik perpotongan antara sisi BC dengan AG. Maka titik E membagi sisi BC dalam perbandingan …

   A. 1 : 4
   B. 1 : 3
   C. 2 : 5
   D. 4 : 11
   E. 3 : 8

5. Dalam suatu pertemuan terjadi 28 jabat tangan. Setiap dua orang saling berjabat tangan paling banyak sekali. Banyaknya orang yang hadir dalam pertemuan tersebut paling sedikit adalah …

   A. 28
   B. 27
   C. 14
   D. 8
   E. 7

6. Gaji Putri lebih banyak 20 % daripada gaji Ayu. Ketika Ayu memperoleh kenaikan gaji, gajinya menjadi lebih banyak 20 % daripada gaji Putri. Persentase kenaikan gaji Ayu adalah …
   A. 0,44
   B. 20
   C. 44
   D. 144
   E. Tidak dapat ditentukan dengan pasti.

7. Misalkan P adalah himpunan semua titik pada bidang xy yang memenuhi $|x| + |y| \leq 4$. Luas daerah P adalah …
   A. 4
   B. 8
   C. 12
   D. 16
   E. 32

8. Definisikan $a * p = a + b + 1$, untuk semua bilangan bulat a dan p. Jika p memenuhi a * p = a untuk setiap bilangan bulat a, maka p = …
   A. -1
   B. 0
   C. 1
   D. 2
   E. Tidak ada yang memenuhi.

9. Setiap dong adalah ding, dan beberapa dung juga dong.
   X : Terdapat dong yang ding sekaligus dung.
   Y : Beberapa ding adalah dung.
   Z : Terdapat dong yang bukan dung.

   Manakah pernyataan yang tepat?

A. Hanya X yang benar.
B. Hanya Y yang benar.
C. Hanya Z yang benar
D. X dan Y keduanya benar.
E. X, Y, dan Z semuanya salah.

10. Banyaknya solusi pasangan bilangan bulat positif persamaan $3x + 5y = 501$ adalah …
    A. 33
    B. 34
    C. 35
    D. 36
    E. 37

SOAL BAGIAN KEDUA

11. Diketahui $a + (a + 1) + (a + 2) + \dots + 50 = 1139$. Jika a bilangan positif, maka n = …

12. Diantara 5 orang gadis, Ani, Rini, Dewi, Fani, dan Nisa, 2 orang memakai rok dan 3 orang memakai celana panjang. Ani dan Dewi mengenakan jenis pakaian yang sama. Jenis pakaian Dewi dan Rini berbeda, demikian pula dengan Rini dan Fani. Kedua gadis yang memakai rok adalah …

13. Barisan 2, 3, 5, 6, 7, 10, 11, … terdiri atas semua bilangan bulat positif (asli) yang bukan kuadrat atau pangkat tiga bilangan bulat. Suku ke-250 barisan adalah …

14. Jika $f(ab) = f(a + b)$ dan $f(7) = 7$, maka $f(49) = \dots$

15. Pada sebuah barisan aritmatika, nilai suku ke-25 adalah tiga kali suku ke-5. Suku yang bernilai dua kali nilai suku pertama adalah suku ke …

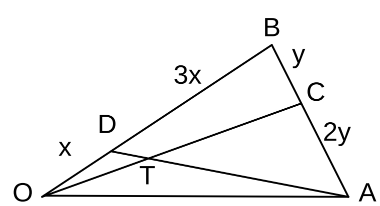
16. Rifki membeli majalah setiap 5 hari sekali, sedangkan Yusuf membeli majalah setiap 8 hari sekali. Kemarin Rifki membeli majalah. Yusuf membeli majalah hari ini. Keduanya paling cepat akan membeli majalah pada hari yang sama … hari lagi.

17. Dinda mencari semua bilangan empat angka yang selisihnya dengan jumlah keempat angkanya adalah 2007. Banyaknya bilangan yang ditemukan Dinda adalah tidak akan lebih dari …

18. Parabola $y = ax^2 + bx + c$ memiliki puncak dengan koordinat (4,2). Jika titik (2,0) terletak pada parabola, maka abc = …

19. Sebuah garis l_1 mempunyai kemiringan -2 dan melalui titik (p, - 3). Sebuah garis lainnya, l_2, tegaklurus terhadap l_1 di titik (a, b) dan melalui titik (6, p). Bila dinyatakan dalam p, maka a = …

20. Diketahui segitiga OAB seperti pada ganbar berikut !



Titik C pada garis AB dan titik D pada garis OB. Titik T pada perpotongan garis OC dan AD sedemikian hingga AC : CB = 2 : 1 dan OD : DB = 1 : 3 . Tentukan OT : TC!

SOLUSI BAGIAN PERTAMA

1. Tiga bilangan prima pertama yang lebih besar dari 50 adalah 53, 59 dan 61.
   Maka jumlahnya adalah 53 + 59 + 61 = 173
   Jawaban (C)

2. Soal ini dapat diselesaikan dengan 2 cara.

   Cara I
   Dengan cara pengambilan 2 bola sekaligus.
   Misalkan M menyatakan terambilnya bola merah
   P menyatakan terambilnya bola putih
   Semua kombinasi kejadian yang mungkin adalah MM, MP dan PP.

   - P(berwarna sama) = P(MM) + P(PP)

   $$= \frac{C_2^5}{C_2^{15}} + \frac{C_2^{10}}{C_2^{15}}$$

   $$= \frac{C_2^5 + C_2^{10}}{C_2^{15}}$$

   $$= \frac{\frac{5!}{3!2!} + \frac{10!}{8!2!}}{\frac{15!}{13!2!}}$$

   $$= \frac{10+45}{105}$$

   $$= \frac{55}{105}$$

   $$= \frac{11}{21}$$

   atau

   - P(berwarna sama) = 1 – P(berwarna beda)

   = 1 – P(MP)

$$= 1 - \frac{C_1^5 C_1^{10}}{C_2^{15}}$$

$$= 1 - \frac{\frac{5!}{4!1!} + \frac{10!}{9!1!}}{\frac{15!}{13!2!}}$$

$$= 1 - \frac{5.10}{105}$$

$$= 1 - \frac{50}{105}$$

$$= 1 - \frac{10}{21}$$

$$= \frac{11}{21}$$

Cara II

Pandang pengambilan dua bola sekaligus sebagai pengambilan bola satu persatu tanpa pengembalian.

- P(berwarna sama) = P(MM) + P(PP)

$$= \frac{5}{15}.\frac{4}{14} + \frac{10}{15}.\frac{9}{14}$$

$$= \frac{20+90}{15.14}$$

$$= \frac{110}{210}$$

$$= \frac{11}{21}$$

atau

- P(berwarna sama) = 1 – P(berwarna beda)

= 1 – (P(MP) + P(PM))

$$= 1 - \left(\frac{5}{15}.\frac{10}{14} + \frac{10}{15}.\frac{5}{14}\right)$$

$$= 1 - \frac{100}{210}$$

$$= 1 - \frac{10}{21}$$

$$= \frac{11}{21}$$

Perhatikan bahwa untuk kasus pengambilan dua bola sekaligus, P(MP) dan P(PM) tidak dibedakan sehingga P(berwarna beda) = P(MP) = P(PM).

Sedangkan untuk kasus pengambilan bola satu persatu tanpa pengembalian, P(MP) dan P(PM) dibedakan sehingga P(berwarna beda) = P(MP) + P(PM).

Jawaban (E)

3. $$X = \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}}$$

$$= \frac{1}{2 + \frac{1}{\frac{5}{2}}}$$

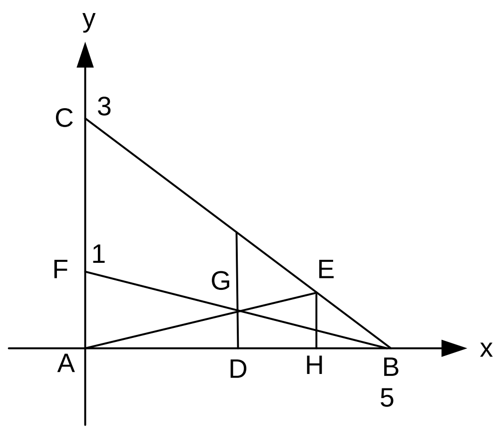
$$= \frac{1}{2 + \frac{2}{5}}$$

$$= \frac{1}{\frac{12}{5}}$$

$$= \frac{5}{12}$$

Jawaban (B)

4. Karena segitiga ABC berlaku untuk sembarang segitiga, maka kita pilih segitiga ABC Sebagai segitiga siku-siku dengan siku-siku di titik A. Kita pilih AC = 3 dan AB = 4.



Karena segitiga ABF dan DBG sebangun, maka berlaku

$$\frac{\text{AF}}{\text{DG}} = \frac{\text{BF}}{\text{BG}}$$

Karena G adalah titik tengah BF maka $\frac{BF}{BG} = \frac{2}{1}$.

Akibatnya $\frac{1}{DG} = \frac{2}{1} \Leftrightarrow$ DG = $\frac{1}{2}$.

Jika DG = $\frac{1}{2}$ DF maka DB = $\frac{1}{2}$ AB = $\frac{1}{2}$ x 4 = 2.

Jadi titik G adalah (2, $\frac{1}{2}$)

Kemiringan garis AG = $\frac{\frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{4}$

Persamaan garis AG adalah y = $\frac{1}{4}$ x

Sedangkan persamaan garis BC adalah 3x + 4y = 12 $\Leftrightarrow$ y = - $\frac{3}{4}$ x + 3

Titik E adalah perpotongan garis AG dan garis BC

Maka $\frac{1}{4}$ x = - $\frac{3}{4}$ x + 3 $\Leftrightarrow$ x = 3

Maka AH = 3 dan HB = 1

Akibatnya BE = $\frac{1}{3}$BC $\Leftrightarrow \frac{BE}{BC} = \frac{1}{3}$

Jawaban (B)

5. Misalkan terdapat n orang dalam suatu pertemuan itu.

   Sebut seluruh orang tersebut sebagai $x_1, x_2, ..., x_{n-1}, x_n$.

   Karena untuk setiap dua orang hanya terjadi maksimal satu kali salaman dan banyaaknya salaman yang terjadi adalah 28 kali, maka tanpa mengurangi keumuman, x_1 bersalaman maksimum (n - 1) kali. Kemudian karena x_2 telah bersalaman dengan x_1 sebelumnya maka x_2 hanya boleh bersalaman lagi sebanyak maksimum (n - 2) kali. Begitulah seterusnya sehingga x_{n-1} hanya boleh bersalaman sekali yaitu dengan x_n.

   Jadi banyaknya salaman adalah

   (n - 1) + (n - 2) + … + 2 + 1 = 28

   yang membentuk suatu deret aritmatika dengan suku pertama U_1 = n - 1, suku terakhir U_m = 1, dan beda b = 1.

   $S_m = \frac{m}{2}(U_1 + U_m)$, dengan m adalah banyaknya suku.

   $\Leftrightarrow \frac{(n-1)}{2}\left((n-1)+1\right) = 28$

   $\Leftrightarrow n(n-1) = 56$

   $\Leftrightarrow n^2 - n - 56 = 0$

   $\Leftrightarrow (n - 8)(n + 7) = 0$

   $\Leftrightarrow n = 8$ atau $n = -7$

   Karena banyaknya orang harus bernilai positif, maka nilai yang memenuhi adalah n = 8.

   Jadi nilai n minimum sehingga terjadi 28 kali salaman dalam pertemuan itu adalah 8.

   Jawaban (D)

6. Misalkan: I = banyaknya gaji Putri

   M = banyaknya gaji Ayu

   Mula-mula,

$$\begin{aligned} I &= M + 20\%M \\ &= 1,2M \\ &= \frac{6}{5}M \end{aligned}$$

$I = \frac{6}{5}M \Leftrightarrow M = \frac{5}{6}I$

Setelah terjadi kenaikan gaji,

$$\begin{aligned} M &= I + 20\%I \\ &= 1,2I \\ &= \frac{6}{5}I \end{aligned}$$

$M = \frac{6}{5}I$

Kenaikan gaji Ayu adalah

$\frac{6}{5}M - \frac{5}{6}M = \frac{11}{30}M$

Jadi, persentase kenaikan gaji Ayu adalah

$$\frac{\frac{11}{30}I}{\frac{5}{6}I} \times 100\% = \frac{11}{30} \times \frac{6}{5} \times 100\%$$

$$= 44\ \%$$

Jawaban (C)

7. Ingat definisi dari $f(x) = |x|$

$|x| = x$ jika $x \geq 0$ dan $|x| = -x$ jika $x < 0$

Jadi ketaksamaan $|x| + |y| \leq 4$ adalah

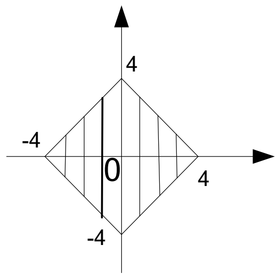
$x + y \leq 4$ jika $x \geq 0$ dan $y \geq 0$ (di kuadran I)

$x - y \leq 4$ jika $x \geq 0$ dan $y < 0$ (di kuadran IV)

$-x + y \leq 4$ jika $x < 0$ dan $y \geq 0$ (di kuadran II)

$-x - y \leq 4$ jika $x < 0$ dan $y < 0$ (di kuadran III)

Himpunan titik-titik pada bidang yang memenuhi ketaksamaan $|x| + |y| \leq 4$ dapat digambarkan sebagai berikut,



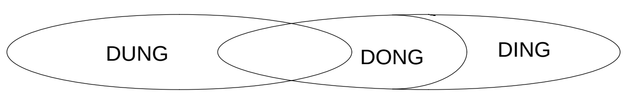
Jika P adalah himpunan titik-titik pada bidang yang diarsir, maka P adalah persegi dengan panjang sisinya $4\sqrt{2}$.

Jadi, luas P adalah $\left(4\sqrt{2}\right)^2 = 32$ satuan luas.

Jawaban (E)

8. Karena a * b = a + b + 1 untuk setiap a dan b bilangan bulat,
   maka a * p = a + p + 1.
   Karena p juga memenuhi a * p = a,
   maka a + p + 1 = a $\Leftrightarrow$ p + 1 = 0
   $\Leftrightarrow$ p = -1
   Jawaban (A)

9. Diagram umum yang tepat untuk soal ini adalah



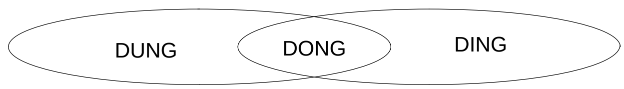
- X : Terdapat dong yang ding sekaligus dung.
  Karena untuk setiap dong adalah ding, dan beberapa dung adalah dong, maka terdapat dong yang ding sekaligus dung.
  Jadi pernyataan X benar.
- Y : Beberapa ding ada yang dung.
  Karena beberapa dari dong adalah dung, dan setiap dong adalah ding, maka beberapa ding adalah dung.

Jadi pernyataan Y benar.

- Z : Terdapat dong yang bukan dung.

  Tidak ada yang bisa menjamin bahwa terdapat dong yang bukan dung karena mungkin saja setiap dong adalah dung. Kata ‘beberapa’ dalam matematika setara (ekivalen) dengan ‘terdapat’ atau ‘paling sedikit satu’.

  Diagram di atas adalah diagram yang paling umum kasus itu terjadi. Kemungkinan lain untuk gambar diagram tersebut adalah



Jadi X dan Y keduanya benar.

Jawaban (D)

10. Akan dicari setiap pasangan terurut bilangan bulat positif (x, y) sehingga memenuhi persamaan 3x + 5y = 501.

$$3x + 5y = 501 \Leftrightarrow 5y = 501 - 3x$$

$$\Leftrightarrow 5y = 3(167 - x)$$

Karena x dan y bilangan bulat positif, maka nilai x yang diperbolehkan adalah 1, 2, … , 166.

Jika $x \in \{1, 2, ..., 166\}$, maka nilai yang mungkin untuk (167 - x) adalah 1, 2, … , 166.

Misalkan (167 - x) $\in$ {1,2, …, 166}.

Dari semua anggota {1,2, …, 166}, pilih anggotanya yang merupakan kelipatan 5, yaitu 5, 10, … ,165 yang membentuk barisan aritmatika dengan suku pertama $U_1 = 5$ dan beda b = 5.

$U_n = U_1 + (n - 1)b$ dengan n adalah banyaknya suku.

$$\Leftrightarrow 165 = 5 + (n - 1)5$$

$$\Leftrightarrow 5(n - 1) = 160$$

$$\Leftrightarrow n - 1 = 32$$

$\Leftrightarrow n = 33$

Jadi banyaknya kelipatan 5 pada {1,2, …,166} adalah 33.

Akibatnya terdapat 33 pasangan terurut bilangan bulat positif yang memenuhi persamaan 3x + 5y = 501.

Contoh :

Jika 167 – x = 5 maka x = 162

$$3(162) + 5y = 501 \Leftrightarrow 486 + 5y = 501$$
$$\Leftrightarrow 5y = 15$$
$$\Leftrightarrow y = 3$$

Jadi pasangan terurut bilangan bulat positif (x, y) = (162, 3) memenuhi persamaan 3x + 5y = 501.

Jawaban (A)

SOLUSI BAGIAN KEDUA

11. Diketahui

a + (a + 1) + (a + 2) + … + 49 + 50 = 1139

Ruas kiri pada persamaan di atas membentuk suatu deret aritmatika dengan suku pertama $U_1 = a$, suku terakhir $U_n = 50$ dengan n adalah banyaknya suku dan beda b = 1.

$$U_n = U_1 + (n - 1)b \Leftrightarrow 50 = a + (n - 1).1$$
$$\Leftrightarrow n = 51 - a$$
$$S_n = \frac{n}{2}\left(U_1 + U_n\right) \Leftrightarrow 1139 = \frac{51-a}{2}\left(a+50\right)$$
$$\Leftrightarrow 2278 = \left(51-a\right)\left(a+50\right)$$
$$\Leftrightarrow a^2 - a - 272 = 0$$
$$\Leftrightarrow \left(a+16\right)\left(a-17\right) = 0$$
$$\Leftrightarrow a = -16 \text{ atau } a = 17$$

Karena a positif, nilai a yang memenuhi adalah a = 17.

12. Kita kelompokkan kelima gadis tersebut ke dalam dua kelompok yaitu kelompok yang memakai rok dan kelompok yang memakai celana panjang.

    Karena Ani dan Dewi memakai jenis pakaian yang sama, maka Ani dan Dewi berada dalam satu kelompok, sebut kelompok I.

    Kemudian karena jenis pakaian Dewi dan Rini berbeda, maka Rini bukan kelompok I, tetapi kelompok kedua, sebut kelompok II.

    Selanjutnya, karena Rini dan Fani juga memakai jenis pakaian yang berbeda, maka Fani bukan kelompok II, melainkan kelompok I.

    Jadi, kelompok I sekarang mempunyai 3 anggota yaitu Ani, Dewi, dan Fani.

    Karena kelompok yang mempunyai 3 anggota adalah kelompok yang memakai celana panjang, akibatnya haruslah dua gadis sisanya yaitu Rini dan Nisa memakai rok.

    Jadi kedua gadis yang memakai rok adalah Rini dan Nisa.

13. Akan dicari banyaknya bilangan kuadrat (x^2), yang memenuhi $2 \leq x^2 \leq 250$ dan akan dicari banyaknya bilangan pangkat tiga (x^3), yang memenuhi $2 \leq x^3 \leq 250$ dimana x adalah bilangan bulat positif.

    Misalkan x_{max} adalah x maksimum dan x_{min} adalah x minimum.

    - Untuk $2 \leq x^2 \leq 250$

      $(x_{max})^2 = 225 \Leftrightarrow x_{max} = 15$

      $(x_{min})^2 = 4 \Leftrightarrow x_{min} = 2$

      Jadi banyaknya bilangan kuadrat yang memenuhi $2 \leq x^2 \leq 250$ adalah sama dengan banyaknya bilangan asli dari 2 sampai 15 sebanyak 14 yaitu 4, 9, …, 225.

    - Untuk $2 \leq x^3 \leq 250$

      $(x_{max})^3 = 216 \Leftrightarrow x_{max} = 6$

      $(x_{min})^3 = 8 \Leftrightarrow x_{min} = 2$

      Jadi banyaknya bilangan pangkat tiga $\left(x^3\right)$, yang memenuhi $2 \leq x^2 \leq 250$ adalah sama dengan banyaknya bilangan asli dari 2 sampai 6 yang banyaknya 5 buah yaitu 8, 27, … , 216.

Selanjutnya akan dicari kemungkinan bilangan kuadrat yang sekaligus bilangan pangkat 3 dari himpunan bilangan asli dari 2 sampai 250.

$x^3 = x^2 \Leftrightarrow x^3 - x^2 = 0$

$\Leftrightarrow x^2(x-1) = 0$

$\Leftrightarrow x = 0$ atau x = 1

Jadi tidak ada bilangan asli yang merupakan bilangan kuadrat sekaligus bilangan pangkat 3 pada himpunan bilangan asli dari 2 sampai 250.

Karena banyaknya bilangan kuadrat adalah 14, dan banyaknya bilangan pangkat tiga adalah 5,akibatnya jumlah bilangan kuadrat atau bilangan pangkat 3 adalah 19.

Oleh karena itu, banyaknya bilangan asli yang bukan bilangan kuadrat atau bilangan pangkat 3 adalah 249 – 19 = 230. Ini artinya bahwa 250 adalah bilangan ke-230 yang bukan bilangan kuadrat atau bilangan pangkat 3.

Untuk mengetahui suku ke-250 bilangan asli yang bukan bilangan kuadrat atau bilangan pangkat 3, kita daftar 20 barisan bilangan asli pertama setelah 250 yaitu 251, 152, … , 270.

Kita cari anggota dari $\{251, 252, ..., 270\}$ yang merupakan bilangan kuadarat atau bilangan pangkat 3. Diperoleh bahwa 256 adalah satu-satunya bilangan kuadrat dan tidak ada bilangan pangkat 3 pada $\{251, 252, ..., 270\}$.

Jadi hanya terdapat satu bilangan kuadrat atau bilangan pangkat 3 pada $\{251, 252, ..., 270\}$ Sehingga 270 adalah bilangan ke-249 pada barisan bilangan asli yang bukan bilangan kuadrat atau bilangan pangkat 3.

Karena 271 bukan bilangan kuadrat dan bukan bilangan pangkat 3, maka 271 adalah suku ke-250 pada barisan bilangan asli dari 2 sampai 271 yang bukan bilangan kuadrat atau bukan bilangan pangkat 3.

14. Diketahui

$f(ab) = f(a+b)$ dan $f(7) = 7$

Sehingga

$7 = f(7) = f(7.1) = f(7+1) = f(8)$

$7 = f(8) = f(8.1) = f(8+1) = f(9)$

$\vdots$

$7 = f(47) = f(47.1) = f(47+1) = f(48)$

$7 = f(48) = f(48.1) = f(48+1) = f(49)$

Jadi, $f(49) = 7$

15. Diketahui suatu barisan aritmatika,

    $U_{25} = 3U_5$ dan

    Suku ke-n (U_n) dari barisan aritmatika adalah $U_n = U_1 + (n-1)b$ dimana b adalah beda.

    $U_{25} = 3U_5 \Leftrightarrow U_1 + 24b = 3(U_1 + 4b)$

    $\Leftrightarrow a + 24b = 3a + 12b$

    $\Leftrightarrow 2a = 12b$

    $\Leftrightarrow a = 6b$

    Un = 2U$_1$ $\Leftrightarrow a + (n-1)b = 2a$

    $\Leftrightarrow (n-1)b = a$

    $\Leftrightarrow (n-1)b = 6b$

    $\Leftrightarrow (n-1) = 6$

    $\Leftrightarrow n = 7$

16. Andaikan Rifki Yusuf membeli majalah bersama pada hari ini, maka keduanya paling cepat akan membeli majalah pada hari yang sama 40 hari lagi yaitu KPK dari 5 dan 8. Tapi pada kasus soal ini, Rifki membeli majalah lebih awal satu hari dari Yusuf (yaitu kemarin) sehingga untuk mengetahui waktu keduanya akan membeli majalah pada hari yang sama yaitu dengan mencari nilai m dan n terkecil sehingga:

    5m – 1 = 8n

    Angka 1 menunjukkan selisih hari pada awal pembelian majalah. Jadi, pasangan terurut terkecil (m,n) agar memenuhi 5m – 1 = 8n adalah (5, 3).

Jadi, Rifki dan Yusuf akan membeli majalah bersama paling cepat $(5m - 1)$ atau $8n$ hari lagi yaitu 24 hari lagi.

17. Misalkan bilangan-bilangan itu adalah abcd.

    Maka $1000a + 100b + 10c + d - (a + b + c + d) = 2007$

    $\Leftrightarrow 999a + 99b + 9c = 2007$

    $\Leftrightarrow 9(111a + 11b + c) = 2007$

    $\Leftrightarrow 111a + 11b + c = 223 \ldots (1)$

a	b	c	d

    Perhatikan bahwa kotak d merupakan variabel bebas sehingga boleh diisi oleh sembarang digit yaitu 0, 1, … , 9. Terdapat 10 kemungkinan digit untuk menempati kotak d. Sedangkan kotak a, b dan c bukan merupakan variabel bebas (saling bergantung), dan nilainya masing-masing harus memenuhi persamaan (1), dan $0 \leq a, b, c \leq 9$ dimana $a, b, c \in \mathbb{Z}$

    Karena a adalah digit satuan, maka $a \neq 0$.

    Karena $a > 2$, mengakibatkan a atau b negatif, jadi a haruslah 1 atau 2.

    Jika $a = 1$, maka $11b + c = 112 \ldots (2)$

    Karena digit terbesar untuk b maupunn c adalah 9, maka tidak ada pasangan (b, c) yang memenuhi persamaan (2).

    Jika $a = 2$, maka $11b + c = 1 \ldots (3)$

    Hanya ada satu pasangan (b, c) yang memenuhi persamaan (3) yaitu (0,1).

    Akibatnya kotak a hanya boleh diisi angka 2, kotak b hanya boleh diisi angka 0, kotak c hanya boleh diisi angka 1 dan kotak d boleh diisi sembarang angka 0, 1, … ,9.

a	b	c	d

    $1 \times 1 \times 1 \times 10 = 10$

    Jadi, banyaknya bilangan empat digit yang ditemukan Dinda tidak tidak lebih dari 10 bilangan.

18. Puncak parabola $y = ax^2 + bx + c$ adalah (4,2)

    Maka $y' = 2ax + b = 0 \Leftrightarrow 8a + b = 0 \ldots (1)$

Parabola melalui titik (4, 2)

Maka 16a + 4b + c = 2 … (2)

Parabola melalui titik (2, 0)

Maka 4a + 2b + c = 0 … (3)

Dari persamaan (2) dan (3) diperoleh

16a + 4b + c = 2

4a + 2b + c = 0

------------------- --

12a + 2b = 2 $\Leftrightarrow$ 6a + b = 1 … (4)

Dari persamaan (1) dan (4) diperoleh

8a + b = 0

6a + b = 1

------------ --

2a = - 1 $\Leftrightarrow$ a = $-\frac{1}{2}$ … (5)

Dari persamaan (4) dan (5) diperoleh

b = 1 – 6a

= 1 + 3

= 4

Dari persamaan (3) dan (5) diperoleh

c = - 4a – 2b

= 2 – 8

= - 6

Jadi abc = ($-\frac{1}{2}$)(4)(- 6)

= 12

19. Misalkan garis l_1 adalah y = cx + d.

Karena gradien dari l_1 adalah – 2, maka persamaannya menjadi y = - 2x + d.

Kemudian karena persamaanya melalui titik (p, - 3), maka persamaan l_1 menjadi

- 3 = - 2p + d $\Leftrightarrow$ d = - 2p – 3.

Akibatnya persamaan l_1 menjadi y = -2x + (2p + 3)

Selanjutnya, misalkan l_2 adalah y = ex + f

Karena $l_1 \perp l_2$ maka hasil perkalian gradiennya adalah – 1.

Akibatnya $m_1.m_2 = -1 \Leftrightarrow -2e = -1$

$\Leftrightarrow e = \frac{1}{2}$

Jadi persamaan garis l_2 menjadi $y = \frac{1}{2}x + f$

Kemudian karena garis l_2 melalui (6, p) maka $p = \left(\frac{1}{2}\right)(6) + f \Leftrightarrow p = 3 + f$

$\Leftrightarrow f = p - 3$

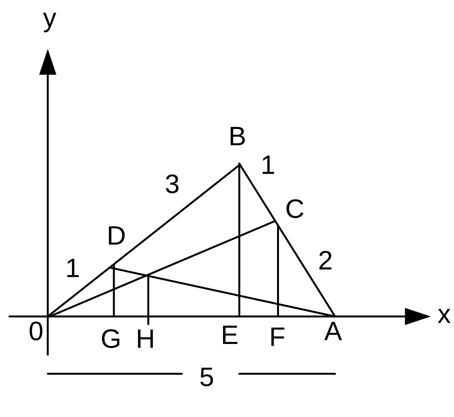
Jadi persamaan garis l_2 menjadi $y = \frac{1}{2}x + (p - 3)$

Karena l_1 dan l_2 berpotongan, maka $-2x + (2p + 3) = \frac{1}{2}x + (p - 3) \Leftrightarrow \frac{5}{2}x = p$

$\Leftrightarrow x = \frac{2}{5}p$

l_1 dan l_2 berpotongan di titik (a, b), jadi $a = \frac{2}{5}p$

20. Karena panjang OA tidak ditentukan, maka segitiga OAB berlaku untuk sembarang segitiga. Misalkan kita pilih segitiga siku-siku yang siku-siku di B, panjang OA = 5, AB = 3 dan BO = 4 seperti diperlihatkan pada gambar berikut ini !



Perhatikan segitiga ABO !

Dari kesamaan luas diperoleh

$$\frac{1}{2}(OA)(EB) = \frac{1}{2}(AB)(BO) \Leftrightarrow 5(EB) = (3)(4)$$

$$\Leftrightarrow EB = \frac{12}{5}$$

$$OE = \sqrt{(BO)^2 + (BE)^2}$$

$$= \sqrt{4^2 + \left(\frac{12}{5}\right)^2}$$

$$= \sqrt{16 + \frac{144}{25}}$$

$$= \sqrt{\frac{256}{25}}$$

$$= \frac{16}{5}$$

AE = AO – OE

$$= 5 - \frac{16}{5}$$

$$= \frac{9}{5}$$

Perhatikan bahwa segitiga OBE dan ODG sebangun.

Maka berlaku $\frac{OB}{OD} = \frac{BE}{DG} \Leftrightarrow \frac{4}{1} = \frac{\frac{12}{5}}{DG}$

$$\Leftrightarrow DG = \frac{3}{5}$$

Dan berlaku juga $\frac{OB}{OD} = \frac{OE}{OG} \Leftrightarrow \frac{4}{1} = \frac{\frac{16}{5}}{DG}$

$$\Leftrightarrow OG = \frac{4}{5}$$

Jadi titik D adalah $\left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)$

Selanjutnya perhatikan bahwa segitiga ABE dan ACF juga sebangun.

Maka berlaku $\frac{AB}{AC} = \frac{BE}{CF} \Leftrightarrow \frac{3}{2} = \frac{\frac{12}{5}}{CF}$

$$\Leftrightarrow CF = \frac{8}{5}$$

Dan berlaku juga $\frac{AB}{AC} = \frac{AE}{AF} \Leftrightarrow \frac{3}{2} = \frac{\frac{9}{5}}{AF}$

$$\Leftrightarrow AF = \frac{6}{5}$$

Jadi titik C adalah $\left(5-\frac{6}{5}, \frac{8}{5}\right) = \left(\frac{19}{5}, \frac{8}{5}\right)$

Persamaan garis OC adalah persamaan garis yang melalui titik O(0, 0) dan titik $C\left(\frac{19}{5}, \frac{8}{5}\right)$.

Jadi persamaan garis OC adalah $\frac{x - 0}{\frac{19}{5}-0} = \frac{y - 0}{\frac{8}{5}-0} \Leftrightarrow \frac{x}{\frac{19}{5}} = \frac{y}{\frac{8}{5}}$

$$\Leftrightarrow y = \frac{8}{19}x$$

Persamaan garis AD adalah persamaan garis yang melalui titik A(5, 0) dan titik $D\left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)$

Jadi persaman garis AD adalah $\frac{x - 5}{\frac{4}{5}-5} = \frac{y - 0}{\frac{3}{5}-0} \Leftrightarrow \frac{x - 5}{-\frac{21}{5}} = \frac{y}{\frac{3}{5}}$

$$\Leftrightarrow y = \frac{x - 5}{-7}$$

Titik T adalah titik perpotongan garis OC dan AD

Akibatnya $\frac{8}{19}x = \frac{x - 5}{-7} \Leftrightarrow \frac{-56}{19}x = x - 5$

$$\Leftrightarrow \frac{56}{19}x + x = 5$$

$$\Leftrightarrow \frac{75}{19}x = 5$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{19}{15}$$

Jadi OH = $\frac{19}{15}$

Perhatikan bahwa segitiga OHT dan OFC sebangun !

Maka berlaku $\frac{OT}{OC} = \frac{OH}{OF} = \frac{\frac{19}{15}}{\frac{19}{5}} = \frac{1}{3}$

Akibatnya $\frac{OT}{TC} = \frac{OT}{OC - OT} = \frac{1}{3-1} = \frac{1}{2}$

Jadi OT : TC = 1 : 2

VERSI II

DEPARTEMEN PENDIDIKAN NASIONAL
OLIMPIADE MATEMATIKA SMA
TINGKAT KABUPATEN / KOTA

SOAL BAGIAN PERTAMA

Pilih satu jawaban yang benar, dalam hal terdapat lebih dari satu jawaban yang benar, pilih jawaban yang paling baik.

1. Manakah di antara bilangan ini yang paling besar?
   A. 2^{81}
   B. 4^{32}
   C. $(4^4)^{10}$
   D. 16^{18}
   E. $(8^3)^8$

2. Misalkan terdapat beberapa trang, beberapa tring, dan bebrapa trung. Misalkan pula semua trang adalah tring dan beberapa trung adalah trang. Berdasarka informasi tersebut, yang mana saja dari pernyatan P, Q, R yang pasti benar?
   P : Semua trang adalah trung.
   Q : Beberapa trang bukan trung.
   R : Beberapa trung adalah tring.
   A. P saja
   B. Q saja
   C. R saja
   D. P dan Q saja
   E. Q dan R saja

3. Suatu bilangan bulat $a \geq 2$ merupakan bilangan prima jika faktornya hanyalah a dan 1. Misalkan M menyatakan perkalian 100 bilangan prima yang pertama. Berapa banyakkah angka 0 di akhir bilangan M?
   A. 0
   B. 1
   C. 2
   D. 3
   E. 4

4. Seorang Kimiawan menghabiskan seluruh usianya pada tahun 1800-an. Pada tahun terakhir dalam masa hidupnya dia mengatakan bahwa: “Dulu aku berusia x tahun pada tahun x^2”. Pada tahun berapakah ia dilahirkan?
   A. 1806
   B. 1822
   C. 1849
   D. 1851
   E. 1853

5. Di antara tujuh buah titik (9, 17), (6, 11), (3, 5), (7, 12), ($\frac{7}{2}$, 6), (5, 10), dan (5, 9), lima diantaranya terletak pada suatu garis lurus. Dua titik manakah yang TIDAK terletak pada garis tersebut?
   A. (5, 10) dan (7, 12)
   B. (3, 5) dan (5, 9)
   C. (9, 17) dan (7, 12)
   D. (6, 11) dan (3, 5
   E. ($\frac{7}{2}$, 6) dan (5, 9)

6. Lima ekor sapi memakan rumput seluas 5 kali ukuran lapang bola dalam 5 hari. Berapa hari yang diperlukan oleh 3 ekor sapi untuk menghabiskan rumput seluas 3 kali lapangan bola?
   A. 2
   B. 3
   C. 4
   D. 5
   E. 6

7. Indra berlari tiga kali lebih cepat dari kecepatan Abong berjalan kaki. Misalkan Abong yang lebih cerdas dari Indra menyalesaikan ujian pada pukul 02:00 siang dan mulai berjalan pulang. Indra menyelesaikan ujian pada pukul 02:12 siang dan berlari mengejar Abong. Pada pukul berapakah Indra tepat akan menyusul Abong?
   A. 02:15
   B. 02:16
   C. 02:17
   D. 02:18
   E. 02:19

8. Jika a^{-1} menyatakan bilangan $\frac{1}{a}$ untuk setiap bilangan real a bukan nol dan jika x, y dan $2x + \frac{y}{2} \neq 0$, maka $\left(2x + \frac{y}{2}\right)^{-1}\left((2x)^{-1} + \left(\frac{y}{2}\right)^{-1}\right) = \ldots$
   A. 1
   B. xy^{-1}
   C. $x^{-1}y$
   D. $(xy)^{-1}$
   E. Tidak ada jawaban yang benar

9. Misalkan $a = 10(9!)^{\frac{1}{2}}$, $b = 9(10!)^{\frac{1}{2}}$, dan $c = (11!)^{\frac{1}{2}}$, dengan $n! = 1.\ 2.\ 3.\ \ldots\ (n - 1)n$. Pengurutan yang benar dari ketiga bilangan ini adalah …
   A. $a < b < c$
   B. $b < c < a$
   C. $c < a < b$
   D. $b < a < c$
   E. $a < c < b$

10. Diberikan $a > 0$, $b > 0$, $a > b$, dan $c \neq 0$. Ketidaksamaan yang TIDAK selalu benar adalah …
   A. $a + c > b + c$
   B. $a\,c > b - c$
   C. $ac > bc$
   D. $\dfrac{a}{c^2} > \dfrac{b}{c^2}$
   E. $ac^2 > bc^2$

SOAL BAGIAN KEDUA

11. Misalkan a dan b bilangan real yang berbeda sehingga $\dfrac{a}{b} + \dfrac{a + 10b}{b + 10a} = 2$. Tentukan nilai $\dfrac{a}{b}$!

12. Berapa banyak bilangan positif yang kurang dari 10.000 dan berbentuk $x^8 + y^8$ untuk suatu bilangan bulat $x > 0$ dan $y > 0$?

13. Dalam suatu segitiga ABC diketahui $\angle A = 55°$, $\angle C = 75°$. D terletak pada sisi AB dan E pada sisi BC. Jika DEB = BE, maka $\angle BED = \ldots$

14. Berapakah jumlah digit-digit bilangan $2^{2009} \cdot 5^{2010}$?

15. Aji menuliskan suatu bilangan yang terdiri atas 6 angka (6 digit) di papan tulis, tetapi kemudian Aziz menghapus 2 buah angka 1 yang terdapat pada bilangan tersebut sehingga bilangan yang terbaca menjadi 2009. Berapa banyak bilangan dengan enam digit yang dapat Aji tuliskan agar hal seperti di atas dapat terjadi?

16. Pada suatu segitiga ABC, $\angle C$ tiga kali besar $\angle A$ dan $\angle B$ dua kali besar $\angle A$. Berapakah perbandingan (rasio) antara panjang AB dan BC?

17. Sunar dan Agus ingin mengecat pagar. Sunar dapat menyelesaikan pengecatan pagar oleh dirinya sendiri dalam waktu 3 jam, sedangkan Agus dapat menyelesaikan dalam 4 jam. Pada pukul 12:00 siang mereka mulai mengecat pagar bersama-sama. Akan tetapi pada suatu ketika mereka bertengkar. Mereka bertengkar selama 10 menit dan dalam masa itu tidak satupun yang melakukan pengecatan. Setelah pertengkaran tersebut Agus pergi dan Sunar menyelesaikan pengecatan sendirian. Jika Sunar menyelesaikan pengecatan pada pukul 14:25, pada pukul berapakah pertengkaran dimulai?

18. Misalkan a = $\frac{1^2}{1}+\frac{2^2}{3}+\frac{3^2}{5}+...+\frac{1001^2}{2001}$ dan b = $\frac{1^2}{3}+\frac{2^2}{5}+\frac{3^2}{7}+...+\frac{1001^2}{2003}$

    Tetukan bilangan bulat yang nilainya paling dekat ke (a - b)!

19. Tentukan bilangan n terkecil sehingga setiap subhimpunan dari $\{1, 2, 3,\ldots, 20\}$ yang berangotakan n unsur pasti mengandung dua anggota yang selisihnya adalah 8.

20. Suatu persegi panjang berukuran 8 kali $2\sqrt{2}$ mempunyai titik pusat yang sama dengan suatu lingkaran berjari-jari 2. Berapakah luas daerah irisan antara persegi panjang dan lingkaran tersebut?

SOLUSI BAGIAN PERTAMA

1. Untuk mengetahui bilangan terbesar dari 2^{81}, 4^{32}, $(4^4)^{10}$, 16^{18}, dan $(8^3)^8$ kita tuliskan semua bilangan sebagai pangkat dari 2, kemudian gunakan aturan perpangkatan untuk mendapatkan kesimpulan.

   $4^{32} = (2^2)^{32} = 2^{64}$

   $(4^4)^{10} = ((2^2)^4)^{10} = 2^{80}$

   $16^{18} = (2^4)^{18} = 2^{72}$

   $(8^3)^8 = ((2^3)^3)^8 = 2^{72}$

   Jadi bilangan terbesar adalah 2^{81}

   Jawaban (A)

2. Berikut ini adalah 3 kemungkinan diagram yang dapat dibuat.

   Diangram 1

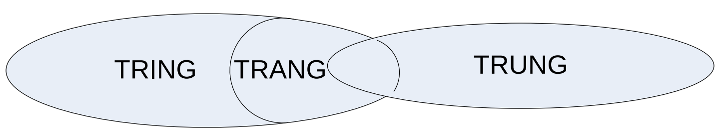


   Diagram 2

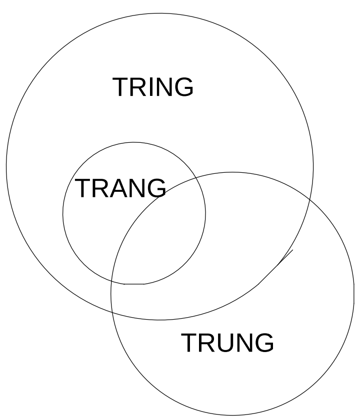
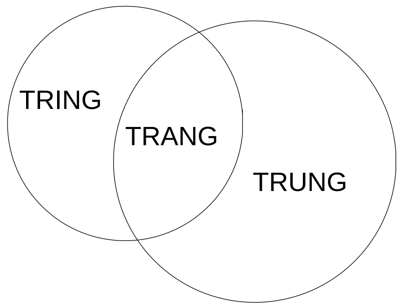


   Diagram 3



P : Semua trang adalah trung

Pernyataan P hanya berlaku pada diagram 3

Q : Beberapa trang bukan trung

Pernyataan Q hanya berlaku pada diagram 1 dan 2

R : Beberapa trung adalah tring

Pernyataan Q berlaku untuk setiap diagram

Jadi pernyataan yang betul adalah pernyataan R saja.

Jawaban (C)

3. Banyaknya digit 0 di ujung penulisan desimal sebuah bilangan bergantung kepada pangkat 10 yang menjadi faktor bilangan tersebut. Dalam kasus ini faktor M yang merpakan pangkat 10 hanyalah berasal dari digit 2 dan 5 (yang prima). Karena faktor 2 hanya muncul sekali dalam perkalian, jadi tidak mungkin bilangan tersebut habis dibagi 10^n dengan $n \geq 2$ untuk setiap n bilangan asli. Akibatnya digit 0 hanya muncul sekali di ujung bilangan M.

   Jawaban (B)

4. Mula-mula kita cari bilangan kuadrat sempurna di tahun 1800-an.

   Karena $(42)^2 = 1764 < (43)^2 = 1849 < (44)^2 = 1936$

   Maka hanya terdapat satu bilangan kuadrat sempurna di tahun 1800-an yaitu $(43)^2 = 1849$.

   Jadi $x^2 = (43)^2 \Leftrightarrow x = 43$

   Akibatnya Kimiawan berusia 43 tahun pada tahun 1849. Jadi, ia lahir pada tahun (1849 – 49) = tahun1806.

   Jawaban (A)

5. Perhatikan bahwa jika setiap titik yang terletak pada satu garis yang sama, maka gradient (m) garis yang diperoleh dari setiap garis yang menghubungkan setiap dua titik berbeda pada garis tersebut nilainya akan selalu sama.

   Misalkan A adalah kelompok 5 titik yang segaris dan B adalah sisanya.

   Titik (5, 9) dan (5, 10) terletak pada garis vertikal yang sama yaitu garis x = 5. Maka dari kedua titik tersebut minimal satu titik bukan merupakan kelompok A karena 5 titik lainnya tidak mempunyai absis x = 5.

   Andaikan titik (5, 9) adalah kelompok A

   Terhadap titik (9, 17), maka m = $\frac{17-9}{9-5} = \frac{8}{4} = 2$

   Terhadap titik (6, 11), maka m = $\frac{11-9}{6-5} = \frac{2}{1} = 2$

   Terhadap titik (3, 5), maka m = $\frac{5-9}{3-5} = \frac{-4}{-2} = 2$

   Terhadap titik (7, 12), maka m = $\frac{12-9}{7-5} = \frac{3}{2}$

   Terhadap titik ($\frac{7}{2}$, 6), maka m = $\frac{6-9}{\frac{7}{2}-5} = \frac{-3}{-\frac{3}{2}} = 2$

   Jadi titik (5, 10) dan (7, 12) bukan kelompok A

   Jawaban (A)

6. Lima ekor sapi memakan rumput seluas 5 kali ukuran lapang bola dalam 5 hari.

   Pernyataan di atas ekivalen dengan

   Satu ekor sapi memakan rumput seluas 1 kali ukuran lapang bola dalam 5 hari.

   Jadi banyaknya hari yang diperlukan 3 ekor sapi untuk memakan rumput seluas 3 kali ukuran lapang bola adalah 5 hari.

7. Misalkan V_A, S_A dan T_A masing-masing menyatakan kecepatan , jarak dan waktu yang ditempuh oleh Abong. Sedangkan V_R, S_R dan T_R masing-masing menyatakan kecepatan, jarak dan waktu yang ditempuh oleh Indra.

Perhatikan bahwa pada saat Reza menyusul Andre jarak yang telah mereka tempuh adalah sama, maka

$S_R = S_A \Leftrightarrow V_A.T_A = V_R.T_R$ . . . (1)

Kemudian karena Abong lebih dulu 12 menit dalam menyelesaikan ujian, maka

$T_R = T_A - 12$ . . . (2)

Dari persamaan (1) dan (2) diperoleh

$V_A.T_A = V_R\left(T_A - 12\right)$ . . . (3)

Selanjutnya karena kecepatan berlari Indra adalah 3 kali lebih cepat dari kecepatan Abong berjalan, maka:

$V_R = 3V_A$ . . . (4)

Dari persamaan (3) dan (4) diperoleh

$$\begin{aligned} V_A.T_A = 3V_A\left(T_A - 12\right) &\Leftrightarrow T_A = 3T_A - 36 \\ &\Leftrightarrow 2T_A = 36 \\ &\Leftrightarrow T_A = 18 \\ &\Leftrightarrow T_R = T_A - 12 \\ &\qquad = 18 - 12 \\ &\qquad = 6 \end{aligned}$$

Jadi, waktu yang diperlukan oleh Indra untuk tepat menyusul Abong adalah 6 menit yaitu pada pukul 02:12 + 00:06 = pukul 02:18 siang.

Jawaban (D)

8. Perhatikan penguraian aljabar di bawah ini!

$$\left(2x+\frac{y}{2}\right)^{-1}\left((2x)^{-1}+\left(\frac{y}{2}\right)^{-1}\right)=\left(\frac{4x+y}{2}\right)^{-1}\left((2x)^{-1}+\left(\frac{y}{2}\right)^{-1}\right)$$
$$=\left(\frac{2}{4x+y}\right)\left(\frac{1}{2x}+\frac{2}{y}\right)$$
$$=\left(\frac{2}{4x+y}\right)\left(\frac{y+4x}{2xy}\right)$$
$$=\frac{2}{2xy}$$
$$=\frac{1}{xy}$$
$$=(xy)^{-1}$$

Jawaban (D)

9. $p = 10(9!)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{10}\sqrt{10}\,(9!)^{\frac{1}{2}}$

$q = 9(10!)^{\frac{1}{2}} = 9\sqrt{10}\,(9!)^{\frac{1}{2}}$

$r = (11!)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{11}\sqrt{10}\,(9!)^{\frac{1}{2}}$

Karena $\sqrt{10} < \sqrt{11} < 9$, maka $p < r < q$

Jawaban (E)

10. Pernyataan pilihan C tidak benar karena perkalian kedua ruas dengan bilangan negatif akan membalikkan urutan (Ingat bahwa $z \neq 0$, nilai z mungkin bernilai negatif)

Jawaban (C)

SOLUSI BAGIAN KEDUA

11. $\frac{a}{b}+\frac{a + 10b}{b + 10a}=2 \Leftrightarrow \frac{a}{b}+\frac{\frac{a}{b}+10}{1+10\frac{a}{b}}=2$

Misalkan $\frac{a}{b}$ = z maka

$$z+\frac{z+10}{1+10z}=2 \Leftrightarrow \frac{z\left(1+10z\right)+z+10}{1+10z}=2$$
$$\Leftrightarrow \frac{10z^2+2z+10}{10z+1}=2$$
$$\Leftrightarrow 10z^2+2z+10=20z+2$$
$$\Leftrightarrow 10z^2-18z+8=0$$
$$\Leftrightarrow 5z^2-9z+4=0$$
$$\Leftrightarrow \left(5z\text{-}4\right)\left(z\text{-}1\right)=0$$
$$\Leftrightarrow z=\frac{4}{5} \text{ atau } z=1$$

Jadi, $\frac{a}{b}=\frac{4}{5}$ atau $\frac{a}{b}$ = 1

12. Misalkan f(x, y) = $x^8 + y^8$

Perhatikan bahwa $3^8 = 6561 < 10000 < 65536 = 4^8$

Maka haruslah $1 \le x, y \le 3$

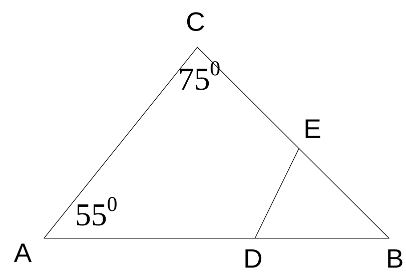
Kemudian perhatikan juga bahwa f(x, y) simetris terhadap x dan y akibatnya kita hanya perlu memeriksa f(3,3), f(3, 2), f(3, 1), f(2, 2), f(2,1), f(1,1).

f(3,3) = 13122 > 10000

Karena f(1, 1) < f(2, 1) < f(2, 2) < f(3, 1) < f(3, 2) = 6817 < 10000

Maka terdapat 5 bilangan yang berbentuk $x^8 + y^8$ yang kurang dari 10000 untuk suatu x dan y bilangan bulat positif ,x > 0 dan y > 0

13. Perhatikan gambar di bawah ini !



Karena panjang BD = BE maka segitiga DBE sama kaki dengan puncak di B.

$$\angle BED = \frac{1}{2}(180^0 - \angle B)$$

$$= \frac{1}{2}(\angle A + \angle C)$$

$$= \frac{1}{2}(55^0 + 75^0)$$

$$= \frac{1}{2}(130^0)$$

$$= 65^0$$

14. $2^{2009} . 5^{2010} = 2^{2009} . 5.5^{2009}$

$$= 5.\ 2^{2009} . 5^{2009}$$

$$= 5.\ (2.\ 5)^{2009}$$

$$= 5.\ 10^{2009}$$

Jadi jumlah digit-digit bilangan itu adalah 5

Catatan : kata “jumlah” tidak sama dengan kata “banyaknya”. Banyaknya digit pada bilangan di atas adalah banyaknya digit 0 ditambah banyaknya digit 5 yaitu 2009 + 1 = 2010.

15. Soal ini dapat diselesaikan dengan beberapa cara.

Cara I

Karena tidak memperhatikan urutan bilangan yang dihapus, maka banyaknya cara penulisan bilangan yang dapat Tedi buat adalah sama dengan banyaknya cara menyimpan dua digit 1 (yang akan dihapus) ke dalam 6 tempat digit bilangan.

1	1				

,

1		1			

, . . . dan seterusnya

Jadi terdapat C_2^6 = 15 cara yang dapat dibuat .

Cara II

Banyaknya cara Tedi menuliskan bilangan 6-angka sama dengan banyaknya cara menyisipkan dua angka 1 pada bilangan 2009 (0termasuk sebelum angka pertama dan sesudah angka terakhir). Terdapat 5 tempat menyisipkan, yaitu 3 di dalam, 1 di depan, dan 1 di belakang.

__ 2 __ 0 __ 0 __ 9 __

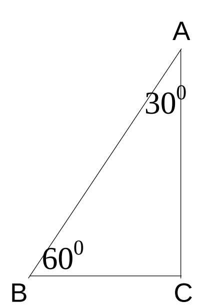
Jika kedua angka terpisah, terdapat C_2^5 = 10 cara yang dapat dilakukan. Jika kedua angka bersebelahan, terdapat 5 cara yang dapat dilakukan. Jadi terdapat 10 + 5 = 15 cara Tedi menuliskan bilangan 6-angka.

16. Misalkan $\angle A = x$ maka $\angle B = 2x$ dan $\angle C = 3x$

Dalam setiap segitiga $\angle A + \angle B + \angle C = 180^0 \Leftrightarrow x + 2x + 3x = 180^0$

$\Leftrightarrow 6x = 180^0$

$\Leftrightarrow x = 60^0$



Menurut hukum perbandingan sinus diperoleh

$$\frac{AB}{\sin C} = \frac{BC}{\sin A} = \frac{AC}{\sin B} \Rightarrow \frac{AB}{\sin 90^0} = \frac{BC}{\sin 30^0}$$

$$\Leftrightarrow \frac{AB}{1} = \frac{BC}{\frac{1}{2}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{AB}{BC} = \frac{2}{1}$$

Jadi rasio antara panjang AB dan BC adalah 2 : 1

17. Misalkan banyaknya pekerjaan itu adalah S

Kecepatan Sunar mengecat = $V_E = \frac{S}{3}$

Kecepatan Agus mengecat = $V_D = \frac{S}{4}$

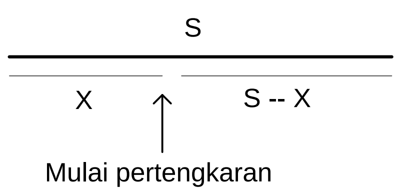
Kecepatan Sunar dan Agus bersama-sama mengecat = $V_{ED} = V_E + V_D$

$$= \frac{S}{3} + \frac{S}{4}$$

$$= \frac{7S}{12}$$

Jika mereka tidak bertengkar maka pekerjaan itu akan selesai pada pukul 14:25 – 00:10 = pukul 14:15. Jadi, lamanya pekerjaan adalah (14:15 – 12:00) jam $= \frac{9}{4}$ jam.

Perhatikan gambar di bawah ini!



Misalkan X adalah bagian yang dikerjakan berdua sedangkan (S - X) adalah bagian yang dikerjakan Sunar saja, maka:

$V_{ED} = \frac{X}{T_{ED}} \Leftrightarrow \frac{7S}{12} = \frac{X}{T_{ED}}$ di mana T_{ED} adalah lama waktu keduanya mengecat.

$$\Leftrightarrow T_{ED} = \frac{12X}{7S}$$

Selanjutnya

$V_E = \dfrac{S - X}{T_E} \Leftrightarrow \dfrac{S}{3} = \dfrac{S - X}{T_E}$ di mana T_E adalah lamanya waktu Sunar mengecat.

$$\Leftrightarrow T_E = \frac{3S - 3X}{S}$$

Total lamanya pengecatan adalah $\dfrac{9}{4}$ jam, sehingga:

$$T_{ED} + T_E = \frac{9}{4} \Leftrightarrow \frac{12X}{7S} + \frac{3S - 3X}{S} = \frac{9}{4}$$

$$\Leftrightarrow \frac{12X + 21S - 21X}{7S} = \frac{9}{4}$$

$$\Leftrightarrow \frac{21S - 9X}{7S} = \frac{9}{4}$$

$$\Leftrightarrow 84S - 36X = 63S$$

$$\Leftrightarrow 21S = 36\,X$$

$$\Leftrightarrow X = \frac{7S}{12}$$

Akibatnya $T_{ED} = \dfrac{12X}{7S}$

$$= \frac{12}{7S} \cdot \frac{7S}{12}$$

$$= 1$$

Jadi pertengkaran dimulai pada pukul 12:00 + 01:00 = 13:00

18. Perhatikan bahwa

$$
\begin{aligned}
a - b &= \frac{1^2}{1} + \left(\frac{2^2}{3} - \frac{1^2}{3}\right) + \left(\frac{3^2}{5} - \frac{2^2}{5}\right) + \ldots + \left(\frac{1001^2}{2001} - \frac{1000^2}{2001}\right) - \frac{1001^2}{2003} \\
&= \frac{1^2}{1} + \left(\frac{2^2 - 1^2}{3}\right) + \left(\frac{3^2 - 2^2}{5}\right) + \ldots + \left(\frac{1001^2 - 1000^2}{2001}\right) - \frac{1001^2}{2003} \\
&= \frac{1^2}{1} + \left(\frac{(2+1)(2-1)}{3}\right) + \left(\frac{(3+2)(3-2)}{5}\right) + \ldots + \left(\frac{(1001+1000)(1001-1000)}{2001}\right) - \frac{1001^2}{2003} \\
&= (1001)(1) - \frac{1001^2}{2003} \\
&= 1001 - \frac{1001^2}{2003} \\
&= 1001\left(1 - \frac{1001}{2003}\right) \\
&= 1001\left(\frac{1002}{2003}\right)
\end{aligned}
$$

Karena $500{,}5 = 1001\left(\frac{1002}{2004}\right) < 1001\left(\frac{1002}{2003}\right) < 1001\left(\frac{1002}{2002}\right) = 501$

Jadi, bilangan bulat yang paling dekat dengan (a - b) adalah 501.

19. Sebelum membahas soal kita pelajari dahulu Prinsip Sarang Merpati (*Pigeonhole Principle*)

Prinsip Sarang Merpati berbunyi :

"Jika kita mempunyai n buah sarang merpati dan mempunyai lebih dari n ekor merpati, maka paling sedikit satu sarang merpati dihuni paling sedikit 2 ekor merpati"

Contoh : Buktikan bahwa jika terdapat 8 orang dalam suatu kelompok belajar, maka paling sedikit 2 orang dalam kelompok belajar tersebut dilahirkan pada hari yang sama !

Solusi : Andaikan 7 dari 8 orang tersebut dilahirkan pada hari yang berbeda yaitu hari Senin, Selasa, …, Minggu. Maka 1 orang sisanya mau tidak mau harus dilahirkan pada salah satu dari ketujuh hari yang ada. Jadi terdapat paling sedikit 2 orang yang dilahirkan pada hari yang sama. Kasus lain bisa saja ketujuh orang tadi tidak dilahirkan pada hari yang berbeda, maka terbukti bahwa menurut Prinsip Sarang Merpati, terdapat paling sedikit 1 hari yang merupakan hari kelahiran dari paling sedikit 2 orang.

Catatan : Banyaknya Sarang Merpati = 7 (Hari)

Banyaknya Merpati = 8 (Orang)

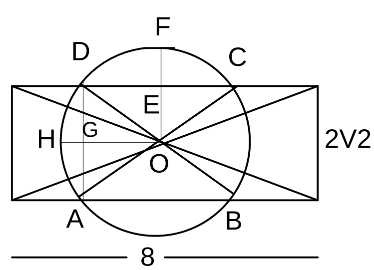
Pembahasan Soal

Pertama-tama kita tunjukkan bahwa terdapat subhimpunan dengan 12 unsur yang tidak memuat 2 unsur yang berselisih 8. Tanpa mengurangi keumuman misalkan subhimpunan itu adalah {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 17, 18, 19, 20}. Bagaimanapun kita memilih anggata-anggota dari {1, 2, 3, …, 20} untuk membentuk subhimpunan baru dengan setiap anggotanya tidak berselisih 8, selalu diperoleh banyaknya anggota paling banyak 12. Jadi jika kita tambahkan minimal satu anggota lainnya ke dalam subhimpunan tersebut maka akan mengandung paling sedikit 2 anggota yang berselisih 8. Jadi n terkecil adalah 12 + 1 = 13.

Catatan : Banyaknya Sarang Merpati = 12

Banyaknya Merpati = 20

20. Perhatikan gambar di bawah ini!



Jari-jari lingkaran = OD = 2

$OE = \frac{1}{2} AD$

$= \frac{1}{2} (2\sqrt{2})$

$= \sqrt{2}$

DC = 2DE

$= 2\ \sqrt{OD^2 - OE^2}$

$= 2\ \sqrt{2^2 - (\sqrt{2})^2}$

$= 2\ \sqrt{4-2}$

$= 2\sqrt{2}$

Luas Segitiga OCD = $\frac{1}{2}$ (DC)(OE)

$= \frac{1}{2}(2\sqrt{2})(\sqrt{2})$

= 2 satuan luas

Karena DE = EO = $\sqrt{2}$ maka $\angle$DOE = 45° akibatnya $\angle$COD = 2(45°) = 90°.

Kemudian karena $\angle$AOD dan $\angle$COD saling berpelurus maka:

$\angle AOD + \angle COD = 180° \Leftrightarrow \angle AOD = 180° - \angle COD$

$= 180° - 90°$

$= 90°$

Luas Juring OAD $= \frac{90°}{360°}\pi\left(OD^2\right)$

$= \frac{1}{4}\pi\left(2^2\right)$

$= \pi$ satuan luas

Luas irisan persegi panjang dan lingkaran

= Luas Juring OAD + Luas Juring OBC + Luas Segitiga OCD + Luas Segitiga OAB

= 2 x Luas Juring OAD + 2 x Luas Segitiga OCD

= 2(Luas Juring OAD + Luas Segitiga OCD)

= 2(π + 2) satuan luas.

VERSI III

DEPARTEMEN PENDIDIKAN NASIONAL
OLIMPIADE MATEMATIKA SMA
TINGKAT KABUPATEN / KOTA

SOAL BAGIAN PERTAMA

Pilih satu jawaban yang benar, dalam hal terdapat lebih dari satu jawaban yang benar, pilih jawaban yang paling baik.

1. Misalkan P = $\frac{7}{8}$, Q = $\frac{66}{77}$, R = $\frac{555}{666}$, S = $\frac{4444}{5555}$, dan T = $\frac{33333}{44444}$. Manakah yang terbesar?
   A. P
   B. Q
   C. R
   D. S
   E. T

2. Suatu amplop tertutup berisi sebuah kartu bertuliskan sebuah kota yang akan meraih penghargaan Adipura. Diketahui pula bahwa 3 diantara pernyataan berikut adalah benar dan sisanya salah.
   I : Kota tersebut adalah Kota Tasikmalaya
   II : Kota tersebut adalah Kota Bandung
   III : Kota tersebut adalah bukan Kota Depok
   IV : Kota tersebut adalah bukan Kota Ciamis
   Yang manakah diantara pernyataan berikut yang pasti benar?
   A. I salah
   B. II benar
   C. II salah
   D. III salah

E. IV benar

3. Pada akhir tahun 1994 Andi berusia setengah usia neneknya. Jumlah kedua tahun kelahiran mereka adalah 3844. Berapa usia Ari pada akhir tahun 2010?
   A. 48
   B. 52
   C. 56
   D. 58
   E. 64

4. Bentuk sederhana dari $\left(\frac{x^2+1}{x}\right)\left(\frac{y^2+1}{y}\right)+\left(\frac{x^2-1}{y}\right)\left(\frac{y^2-1}{x}\right), xy \neq 0$ adalah …
   A. 1
   B. 2xy
   C. $2x^2y^2 + 2$
   D. $2xy + \frac{2}{xy}$
   E. $\frac{2x}{y} + \frac{2y}{x}$

5. Jika $x – y > x$ dan $x + y < y$, maka …
   A. $y < x$
   B. $x < y$
   C. $x < y < 0$
   D. $x < 0$ dan $y < 0$
   E. $x < 0$ dan $y > 0$

6. Untuk nilai a yang manakah garis lurus $y = 6x$ memotong parabola $y = x^2 + a$ tepat di satu titik?
   A. 7
   B. 8

C. 9

D. 10

E. 11

7. Diketahui barisan 1, - 2, 3, - 4, 5, - 6, … dengan suku ke-n adalah $(-1)^{n+1}n$. Berapakah rata-rata dari 200 suku pertama barisan tersebut?

F. - 1

A. – 0,5

B. 0

C. 0,5

D. 1

8. Misalkan untuk setiap bilangan real a, b yang berbeda M (a,b) menyatakan bilangan terbesar di antara a dan b, dan m (a,b) menyatakan bilangan yang terkecil di antara a dan b . Jika $a < b < c < d < e$, maka nilai dari

M(M(m(c, d), a), m(b, m(a, e))) adalah …

A. a

B. b

C. c

D. d

E. e

9. Diketahui r menyatakan sisa dari bilangan-bilangan 1059, 1417, dan 2312 ketika dibagi dengan d, dimana d adalah bilangan bulat lebih besar dari 1. Nilai (d - r) adalah …

A. 1

B. 15

C. 179

D. d - 15

E. d - 1

10. Segitiga ABC merupakan segitiga siku-siku di A. Sisi miring BC dibagi menjadi tiga bagian di M dan N sehingga BM = MN = NC. Jika AM = x dan AM = y, maka MN sama dengan …

   A. $\frac{x+y}{2}$

   B. $\frac{\sqrt{y^2 - x^2}}{2}$

   C. $\sqrt{y^2 - x^2}$

   D. $\frac{\sqrt{y^2 + x^2}}{3}$

   E. $\sqrt{\frac{x^2 + y^2}{5}}$

SOAL BAGIAN KEDUA

11. Amin, Romi, dan Bowo memulai perjalanan sejauh 100 km. Amin dan Romi pergi dengan menggunakan sepeda motor dengan kecepatan rata-rata 25 km/jam sedangkan Bowo berjalan dengan kecepatan rata-rata 5 km/jam. Setelah jarak tertentu, Romi turun dari sepeda motor dan mulai berjalan dengan kecepatan 5 km/jam sedangkan Amin kembali lagi untuk menjemput Bowo dan mengantarkannya ke tempat tujuan tepat bersamaan dengan datangnya Romi di tempat tersebut. Berapa lamakah perjalanan tersebut?

12. Misalkan $t_n = \frac{n(n+1)}{2}$. Tentukan jumlah dari $\frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} + ... + \frac{1}{t_{2010}}$

13. Garis AB dan CD sejajar dan berjarak 4 satuan. Misalkan AD memotong BC di titik P di antara kedua garis. Jika AB = 4 dan CD = 12, berapa jauh P dari garis CD?

14. Bilangan segitiga adalah bilangan yang berbentuk $\frac{n(n+1)}{2}$ dengan n bilangan bulat positif. Berapa banyak bilangan di antara 100 bilangan segitiga yang pertama yang berakhiran 0?

15. Bilangan bulat positif $p \geq 2$ disebut bilangan prima jika ia hanya mempunyai faktor 1 dan p. Tentukan nilai penjumlahan semua bilangan prima diantara 1 dan 100 yang sekaligus bersifat: satu lebihnya dari suatu bilangan kelipatan 5 dan satu kurangnya dari suatu bilangan kelipatan 6.

16. Dua titik terbawah suatu bujursangkar terletak pada sumbu x dan dua titik teratasnya terletak pada parabola $y = 15 - x^2$. Berapa luas bujursangkar tersebut?

17. Misalkan $\frac{a}{10^x - 1} + \frac{b}{10^x + 2} = \frac{2.10^x + 3}{(10^x - 1)(10^x + 2)}$. Berapakah nilai (a – b)?

18. Diketahui masing-masing huruf mewakili satu angka (digit). Tentukanlah bilangan-bilangan DONALD, GERALD dan ROBERT pada pejumlahan di bawah ini jika diketahui D = 5!

D O N A L D

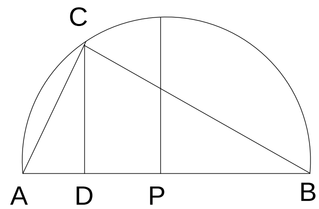
G E R A L D

--------------------- +

R O B E R T

19. Berapakah bilangan prima terkecil manakah yang membagi habis $19^{99} + 199^9$?

20. Diketahui setengah lingkaran ACB dengan jari-jari r.



Jika CD = t, AD = a dan DB = b, dapat dibuktikan bahwa $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$, Kapan kesamaan berlaku?

SOLUSI BAGIAN PERTAMA

1. Sederhanakan bilangan-bilangan yang diberikan!

   P = $\frac{7}{8}$ = 0,875

   Q = $\frac{66}{77}$ = $\frac{6}{7}$ = 0.857

   R = $\frac{555}{666}$ = $\frac{5}{6}$ = 0,833

   S = $\frac{4444}{5555}$ = $\frac{4}{5}$ = 0,800

   T = $\frac{33333}{44444}$ = $\frac{3}{4}$ = 0,750

   Jadi yang terbesar adalah P.

   Jawaban (A)

2. Dua pernyataan atau lebih dikatakan saling ekivalen jika pernyataan satu dengan yang lainnya tidak saling kontradiksi. Pernyataan I dan II saling kontradiksi karena menunjuk pada kota yang berbeda. Salah satu dari pernyataan I atau II haruslah salah. Akibatnya pernyataan I dan II tidak bisa ditentukan nilai kebenarannya.

Kemudian karena dari 4 pernyataan terdapat 3 pernyataan yang benar maka haruslah pernyataan III dan IV keduanya benar. Perhatikan juga bahwa pernyataan III dan IV tidak saling kontradiksi.

Jadi, pernyataan yang pasti benar adalah IV benar.

Jawaban (E)

3. Misalkan pada tahun 1994 usia Ari dan Nenek masing-masing x dan y, maka

   $x = \frac{1}{2}y \quad ... (1)$

   Kemudian jumlah tahun kelahiran mereka adalah 3844, maka:

   $(1994 - x) + (1994 - y) = 3844 \Leftrightarrow x + y = 144 \quad ... (2)$

   Dari persamaan (1) dan (2) diperoleh

   $$\frac{1}{2}y + y = 144 \Leftrightarrow \frac{3}{2}y = 144$$
   $$\Leftrightarrow y = 96 \quad ... (3)$$

   Dari persamaan (1) dan (3) diperoleh

   $$x = \frac{1}{2}(96)$$
   $$= 48$$

   Jadi, umur Ari pada tahun 1994 adalah 48 tahun. Akibatnya umur Ari pada tahun 2010 adalah 48 + (2010 - 1994) = 48 + 16 = 64 tahun.

   Jawaban (E)

4. Lakukan penyederhanaan aljabar!

$$\left(\frac{x^2+1}{x}\right)\left(\frac{y^2+1}{y}\right)+\left(\frac{x^2-1}{y}\right)\left(\frac{y^2-1}{x}\right)=\frac{(x^2+1)(y^2+1)}{xy}+\frac{(x^2-1)(y^2-1)}{xy}$$

$$=\frac{(x^2+1)(y^2+1)+(x^2-1)(y^2-1)}{xy}$$

$$=\frac{x^2y^2+x^2+y^2+x^2y^2-x^2\ -y^2}{xy}$$

$$=\frac{2x^2y^2}{xy}$$

$$= 2xy$$

Jawaban (B)

5. $x - y > x \Leftrightarrow -y > 0$ (Hukum pencoretan terhadap penjumlahan)

   $\Leftrightarrow y < 0$

   Kemudian

   $x + y < y \Leftrightarrow x < 0$ (Hukum pencoretan terhadap penjumlahan)

   Jadi, $x < 0$ dan $y < 0$

   Jawaban (D)

6. Supaya $y = 6x$ memotong parabola $y = x^2 + a$, maka haruslah

   $x^2 + a = 6x \Leftrightarrow x^2 - 6x + a = 0$

   Supaya berpotongan tepat di satu titik syaratnya

   $D = 0 \Leftrightarrow (-6)^2 - 4(1)(a) = 0$

   $\Leftrightarrow 36 - 4a = 0$

   $\Leftrightarrow a = 9$

   Jawaban (C)

7. Rata-rata 200 suku pertama = $\dfrac{1-2+3-4+5-6+...+199-200}{200}$

$$=\frac{(1-2)+(3-4)+(5-6)+...+(199-200)}{200}$$

$$=\frac{100(-1)}{200}$$

$$= -\frac{100}{200}$$

$= -\ 0{,}5$

Jawaban (B)

8. M(M(m(c, d), a), m(b, m(a, e))) = M(M(c, a), m(b, a))

    = M(c, a)

    = c

   Jawaban (C)

9. 1059 = ad + r . . . (1)

   1417 = bd + r . . . (2)

   2312 = cd + r . . . (3)

   Dimana a, b dan c semuanya bilangan bulat positif.

   Dari persamaan (1) dan (2) diperoleh

   1417 = bd + r

   1059 = ad + r

   ----------------- --

   358 = bd – ad $\Leftrightarrow$ (b - a)d = 358

   Perhatikan bahwa karena (b - a) dan d keduanya bilangan bulat positif, maka d haruslah merupakan faktor positif dari 358. Semua faktor positif dari 358 adalah 1, 2, 179 dan 358.

   Jika d = 1, d = 2 atau d = 358, kasus ini tidak mungkin karena jika ketiga bilangan di atas dibagi dengan ketiga nilai d itu akan menghasilkan r yang tidak seragam.

   Tetapi jika d = 179, maka akan menghasilkan r yang seragam.

   $$\frac{1059}{179} = 5(179) + 164$$

   $$\frac{1417}{179} = 7(179) + 164$$

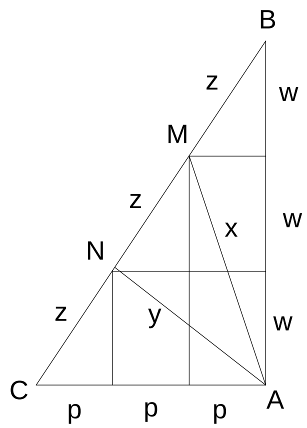
   $$\frac{2312}{179} = 12(179) + 164$$

   Jadi d = 179 dan r = 164 $\Leftrightarrow$ d – r = 179 – 164

$= 15$

Jawaban (B)

10. Perhatikan gambar di bawah ini!



Misalkan AM = x dan AN = y.

Karena BM = MN = NC = z, maka jika titik M dan N diproyeksikan terhadap garis AB dan AC akan membagi garis AB dan AC masing-masing menjadi 3 bagian yang sama panjang yaitu w dan p

$$x = \sqrt{(2w)^2 + p^2}$$

$$= \sqrt{4w^2 + p^2}$$

$$y = \sqrt{w^2 + (2p)^2}$$

$$= \sqrt{w^2 + 4p^2}$$

$$x^2 + y^2 = (4w^2 + p^2) + (w^2 + 4p^2)$$

$$= 5w^2 + 5p^2$$

$$= 5(w^2 + p^2) \qquad \Leftrightarrow (w^2 + p^2) = \frac{x^2 + y^2}{5}$$

MN = z

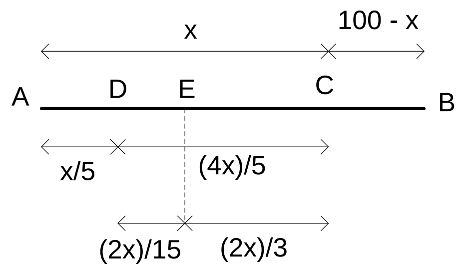
$$= \sqrt{w^2 + p^2}$$

$$= \sqrt{\frac{x^2+y^2}{5}}$$

Jawaban (E)

SOLUSI BAGIAN KEDUA

11. Perhatikan gambar di bawah ini !



Misalkan C adalah titik pada saat Indri turun dari motor dan jarak yang mereka (Amin dan Romi) tempuh sementara adalah x.

Pada saat Amin tiba di titik C, Bowo telah sampai di titik D dan telah menempuh jarak $\frac{x}{5}$ (karena kecepatan Bowo $\frac{1}{5}$ kali kecepatan motor).

Kemudian pada saat yang bersamaan Bowo dan Amin bergerak lagi dengan arah yang berlawanan untuk bertemu di titik E. Karena kecepatan motor 5 kali kecepatan Bowo maka perbandingan jarak CE dan DE haruslah 5 : 1.

Jadi, CE = $\frac{5}{6}(\frac{4x}{5})$

$= \frac{2x}{3}$

DE = $\frac{1}{6}(\frac{4x}{5})$

$= \frac{2x}{15}$

Selanjutnya karena kecepatan motor 5 kali kecepatan Romi berjalan, maka jarak tempuh motor bolak-balik (CE + EC = 2EC) ditambah jarak tempuh motor CB sama dengan 5 kali jarak tempuh Romi (EC).

Akibatnya $2(\frac{2x}{3}) + (100 - x) = 5(100 - x) \Leftrightarrow 2(\frac{2x}{3}) = 4(100 - x)$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{3} = 100 - x$$

$$\Leftrightarrow \frac{4x}{3} = 100$$

$$\Leftrightarrow x = 75$$

Jadi, lamanya perjalanan tersebut adalah waktu yang ditempuh motor sejauh 75 km dengan kecepatan 25 km/jam ditambah waktu yang ditempuh Romi sejauh (100 – 75 = 25) km dengan kecepatan 5 km/jam = $(\frac{75}{25} + \frac{25}{5})$ jam.

= (3 + 5) jam

= 8 jam

12. $t_n = \frac{n(n+1)}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{t_n} = \frac{2}{n(n+1)}$

$$= 2\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$$

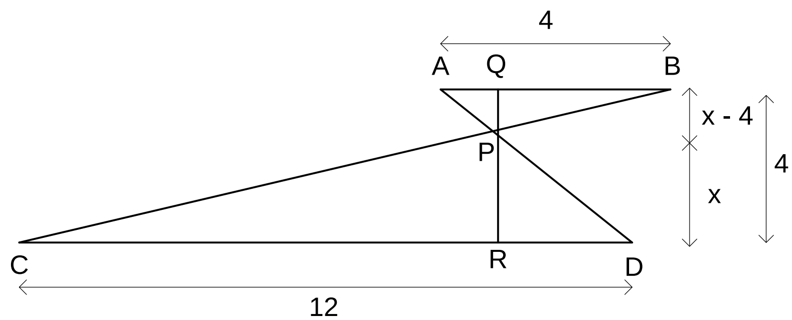
Maka $\frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} + ... + \frac{1}{t_{2010}} = 2\left(\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{2010} - \frac{1}{2011}\right)\right)$

$$= 2\left(1 - \frac{1}{2011}\right)$$

$$= 2\left(\frac{2010}{2011}\right)$$

$$= \frac{4010}{2011}$$

13. Perhatikan gambar di bawah ini!



Karena segitiga CDP dan ABP sebangun, maka berlaku

$$\frac{PR}{CD}=\frac{PQ}{AB}\Leftrightarrow\frac{x}{12}=\frac{4-x}{4}$$
$$\Leftrightarrow\frac{x}{3}=\frac{4-x}{1}$$
$$\Leftrightarrow 12-3x = x$$
$$\Leftrightarrow 4x = 12$$
$$\Leftrightarrow x = 3$$

Jadi, P terletak sejauh 3 satuan dari garis CD.

14. Akan dicari 100 bilangan segitiga pertama yang berakhiran 0.

Agar bilangan $\frac{n(n+1)}{2}$ berakhiran 0, maka $\frac{n(n+1)}{2}$ harus merupakan kelipatan 10.

$\frac{n(n+1)}{2} = 10\ k \Leftrightarrow n(n + 1) = 20\ k$,untuk setiap k bilangan bulat positif. Ini berarti bahwa di antara n atau (n + 1) harus merupakan faktor dari 20k.

Perhatikan bahwa faktor positif dari 20k adalah 20k, 10k, 5k, 4k, 2k dan k.

Jadi, di antara n atau (n + 1) harus merupakan kelipatan dari faktor-faktor positif tersebut.

- Kasus I : n atau (n + 1) kelipatan 20 atau 1(semua bilangan asli).

  Seluruh nilai n yang mungkin adalah 19, 20, 39, 40, 59, 60, 79, 80, 99, dan 100.

- Kasus II : n atau (n + 1) kelipatan 10 atau 2..

  Semua bilangan-bilangan ini telah tercakup pada kasus I
- Kasus III : n atau (n + 1) kelipatan 5 atau 4

  Seluruh nilai n yang mungkin adalah 4, 15, 24, 35, 44, 55, 64, 75, 84, dan 95.

Jadi, terdapat 20 bilangan yang berakhiran 0 dari 100 bilangan segitiga yang pertama.

15. Akan dicari penjumlahan semua bilangan prima antara 1 dan 100 yang mempunyai sifat sekaligus : satu lebihnya dari kelipatan 5 dan satu kurangnya dari kelipatan 6.

    $5m - 1 = 6n - 1 \Leftrightarrow 5m = 6n - 2$

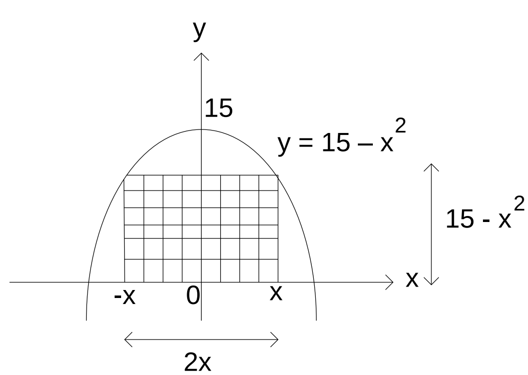
    $\Leftrightarrow 5m = 2(3n - 1)$

    Perhatikan bahwa kelipatan 5 yang dimaksud (5m) adalah bilangan genap (2k). Maka kelipatan 5 tersebut adalah 10, 20, 30, . . . , 90.

    Untuk nilai 5m sama dengan 10, 40, dan 70 diperoleh nilai $5m - 1 = 6n - 1$ masing-masing adalah 11, 41, dan 71 (ketiganya merupakan bilangan prima). Sedangkan untuk nilai 5m yang lainnya tidak menghasilkan bilangan prima.

    Jadi penjumlahan bilangan prima yang dimaksud adalah 11 + 41 + 71 = 123.

16. Perhatikan gambar di bawah ini!



Karena bangun yang diarsir adalah persegi, maka

$2x = 15 - x^2 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 15 = 0$

$\Leftrightarrow (x + 5)(x - 3) = 0$

$\Leftrightarrow x = -5$ atau $x = 3$

Karena panjang persegi harus bernilai positif, maka nilai x yang memenuhi adalah $x = 3$.

Jadi, luas persegi yang diarsir $= 2x(15 - x^2)$

$= 2(3)(15 - 9)$

$= 2(3)(6)$

$= 36$ satuan luas

17. Perhatikan penguraian bentuk aljabar di bawah ini!

$$\frac{a}{10^x - 1} + \frac{b}{10^x + 2} = \frac{2.10^x + 3}{(10^x - 1)(10^x + 2)} \Leftrightarrow \frac{a(10^x + 2) + b(10^x - 1)}{(10^x - 1)(10^x + 2)} = \frac{2.10^x + 3}{(10^x - 1)(10^x + 2)}$$

$$\Leftrightarrow a(10^x + 2) + b(10^x - 1) = 2.10^x + 3$$

$$\Leftrightarrow (a + b)10^x + (2a - b) = 2.10^x + 3$$

Akibatnya $a + b = 2$ dan $2a - b = 3$.

Dari kedua persamaan di atas diperoleh $2a - b = 3$

$a + b = 2$

------------ +

$3a = 5 \Leftrightarrow a = \frac{5}{3} \Rightarrow b = 2 - a$

$= 2 - \frac{5}{3}$

$= \frac{1}{3}$

Jadi $a - b = \frac{5}{3} - \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$

18. Karena D = 5 maka T = 0

```
                    1
 5  O  N  A  L  5
G  E   R  A  L  5
---------------------  +
R  O  B  E   R  0
```

Kemudian perhatikan kolom kedua dari lajur kiri!

O + E menghasilkan O memberikan penjelasan kepada kita bahwa hanya terdapat 2 kemungkinan untuk E yaitu E = 0 atau E = 9.

Kemungkinan I

E = 0 terjadi jika penjumlahan pada kolom di lajur kanannya yaitu N + R menghasilkan bilangan satuan (yaitu B). Tetapi angka 0 telah dipergunakan oleh T. Jadi tidak mungkin E = 0

Kemungkinan II

E = 9 terjadi jika penjumlahan pada kolom di lajur kanannya yaitu N + R menghasilkan bilangan belasan.

Akibatnya

```
 1   1            1
 5  O  N  A  L  5
G  9   R  A  L  5
---------------------  +
R  O  B  9   R  0
```

Selanjutnya perhatikan kolom ke-empat dari lajur kiri!

Penjumlahan 2 angka yang sama (A + A) menghasilkan digit satuan 9. Hanya terdapat 2 kemungkinan nilai untuk A, yaitu A = 4 atau A = 9. A = 9 tidak mungkin terjadi karena digit 9 telah dipergunakan oleh E. Jika A = 4 maka penjumlahan angka pada kolom di lajur sebelah kanannya haruslah menghasilkan bilangan belasan.

Akibatnya

1 1 1 1
5 O N 4 L 5
G 9 R 4 L 5
--------------------- +
R O B 9 R 0

Perhatikan bahwa angka yang belum dipergunakan adalah 1, 2, 3, 6, 7 dan 8.
Selanjutnya perhatikan kolom paling kiri. Penjumlahan 1 + 5 + G atau (6 + G) menghasilkan angka R (bilangan 1 digit). Nilai R yang mungkin adalah 7 atau 8 . Jadi haruslah G = 1 atau G = 2.
Jika G = 2 maka R = 8 (termasuk nilai R pada kolom ke-5). Jika R = 8 maka penjumlahan kolom ke-5 tidak mungkin sesuai, karena penjumlahan pada kolom ke-5 harus menghasilkan bilangan belasan..Dengan kata lain jika R = 8 memaksa L harus bernilai 7. Ini tidak mungkin karena 1 + 7 + 7 menghasilkan digit satuan R = 5, kontradiksi dengan pengandaian awal bahwa R = 8 .
Jadi G = 1. Karena G = 1, maka R = 7. Ini mengakibatkan L =8, sehingga 1 + 8 + 8 = 17 (digit satuannya 7 = R), sesuai dengan pengandaian awal.
Akibatnya
1 1 1 1
5 O N 4 8 5
1 9 7 4 8 5
--------------------- +
7 O B 9 7 0
Sekarang angka yang belum dipergunakan adalah 2, 3 dan 6.
Pada kolom ke-3, penjumlahan N + 7 harus menghasilkan bilangan belasan. Maka haruslah N = 6. Jika N = 6, maka N + 7 = 6 + 7 = 13. Akibatnya B = 3 dan O = 2
1 1 1 1
5 2 6 4 8 5
1 9 7 4 8 5
--------------------- +
7 2 3 9 7 0

Jadi DONALD = 526485

GERALD = 197485

ROBERT = 723970

19. Bilangan prima terkecil yang membagi habis $19^{99} + 199^{9}$ adalah 2.

Bukti

$19^{99} = (2 . 9 + 1)^{99}$

$\equiv 1^{99} \bmod(2)$

$\equiv 1 \bmod(2)$

Jadi sisa pembagian 19^{99} oleh 2 adalah 1.

Dengan kata lain $19^{99} = 2m + 1$, untuk suatu m $\in$ □ .

Kemudian

$199^{9} = (2 . 99 + 1)^{9}$

$\equiv 1^{99} \bmod(2)$

$\equiv 1 \bmod(2)$

Jadi sisa pembagian 199^{9} oleh 2 adalah 1.

Dengan kata lain $199^{9} = 2n + 1$, untuk suatu n $\in$ □ .

Jadi $19^{99} + 199^{9} = (2m + 1) + (2n + 1)$

$= 2m + 2n + 2$

$= 2(m + n + 1)$

$= 2k$, untuk suatu k $\in$ □

Hasilnya $19^{99} + 199^{9}$ merupakan bilangan genap. Jadi $19^{99} + 199^{9}$ habis dibagi 2.

Catatan :

Topik Kongruen Modulo

Misalkan A, B adalah bilangan bulat dan M adalah bilangan bulat yang lebih besar dari 1.

Bilangan A dikatakan kongruen dengan B modulo M (Biasa ditulis $A \equiv B \bmod(M)$) jika A dan B keduanya memberikan hasil (bilangan bulat) yang sama jika keduanya dibagi dengan M.

Contoh :

$7 \equiv 5 \bmod(2)$

Sifat-Sifat Kongruen Modulo

$(an + b)^m = b^m \bmod(n)$

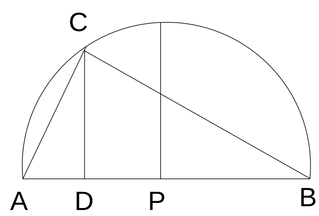
Bukti

$(an + b)^m = (an)^m + m(an)^{m-1}b + \ldots + m(an)b^{m-1} +$

Karena $[(an)^m + m(an)^{m-1}b + \ldots + m(an)b^{m-1}]$ habis dibgi n, maka $(an + b)^m$ akan bersisa b^m jika dibagi n.

Jadi $(an + b)^m = b^m \bmod(n)$

20. Perhatikan gambar setengah lingkaran ACB !



Jika AD = a dan DB = b, maka selalu berlaku

$$(a - b)^2 \geq 0 \Leftrightarrow a^2 + b^2 - 2ab \geq 0$$

$$\Leftrightarrow a^2 + b^2 \geq 2ab \qquad \text{(kedua ruas ditambah 2ab)}$$

$$\Leftrightarrow a^2 + b^2 + 2ab \geq 4ab$$

$$\Leftrightarrow (a + b)^2 \geq 4ab$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{a + b}{2}\right)^2 \geq ab \qquad \text{(kedua ruas ditarik akar)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{a + b}{2} \geq \sqrt{ab} \qquad \text{(terbukti)}$$

Kesamaan berlaku jika $\frac{a + b}{2} = \sqrt{ab} \Leftrightarrow a + b = 2\sqrt{ab}$

$$\Leftrightarrow (a + b)^2 = 4ab$$

$$\Leftrightarrow a^2 + b^2 + 2ab = 4ab$$

$$\Leftrightarrow a^2 + b^2 - 2ab = 0$$

$$\Leftrightarrow (a - b)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow a = b$$

Jadi kesamaan berlaku jika a = b.

LATIHAN I

DEPARTEMEN PENDIDIKAN NASIONAL
OLIMPIADE MATEMATIKA SMA
TINGKAT KABUPATEN / KOTA

SOAL BAGIAN PERTAMA

Pilih satu jawaban yang benar, dalam hal terdapat lebih dari satu jawaban yang benar, pilih jawaban yang paling baik.

1. Ada berapa banyak di antara bilangan-bilangan
   20077002, 20088002, 20099002, 20100102
   yang habis dibagi 9?
   A. 0
   B. 2
   C. 3
   D. 4
   E. 1

2. Ada berapa banyak bilangan 4 angka yang semua angkanya genap dan bukan merupakan kelipatan 2003?
   A. 499
   B. 500
   C. 624
   D. 625
   E. Tidak satupun di antaranya

3. Hari ini usiaku $\frac{1}{3}$ usia ayahku. Lima tahun yang lalu , usiaku $\frac{1}{4}$ kali usia ayahku pada waktu itu. Berapakah usiaku sekarang?
   A. 12

B. 15
C. 17
D. 20
E. 21

4. Sebuah kelas terdiri atas 40 siswa. Diantaranya 20 orang menyukai Matematika, 15 orang menyukai Biologi, 15 orang menyukai bahasa Inggris, dan 5 orang menyukai ketiganya. Banyaknya siswa yang menyukai sedikitnya satu dari ketiga pelajaran adalah . . .
   A. 10
   B. 15
   C. 20
   D. 25
   E. Tidak satupun di antaranya.

5. Masing-masing dari kelima pernyataan berikut bernilai benar atau salah.

   i. Pernyataan iii dan iv keduanya benar.
   ii. Pernyataan iv dan v tidak keduanya salah.
   iii. Pernyataan i benar
   iv.Pernyataan iii salah
   v. Pernyataan i dan iii keduanya salah

   Berapa banyak di antara kelima pernyataan di atas yang benar?
   A. 0
   B. 1
   C. 2
   D. 3
   E. 4

6. Misalkan x dan y adalah bilangan taknol yang memenuhi

$xy = \frac{x}{y} = x - y$

Berapakah nilai x + y ?

A. $-\frac{3}{2}$

B. $-\frac{1}{2}$

C. 0

D. $\frac{1}{2}$

E. $\frac{3}{2}$

7. Di dalam suatu lingkaran L_1 berjari-jari 1 dan berpusat di titik asal dilukis suatu lingkaran L_2 yang bersinggungan dengan lingkaran L_1, dan dengan sumbu x dan sumbu y positif. Jari-jari lingkaran L_2 adalah . . .

A. $\frac{1}{3}$

B. $\frac{2}{5}$

C. $\sqrt{2}$ - 1

D. $\frac{1}{2}$

E. 2 - $\sqrt{2}$

8. Misalka;n $3^a = 4$, $4^b = 5$, $5^c = 6$, $6^d = 7$, $7^e = 8$, dan $8^f = 9$. Berapakah hasil kali abcdef ?

A. 1

B. 2

C. $\sqrt{6}$

D. 3

E. $\frac{10}{3}$

9. Misalkan N adalah bilangan asli terkecil yang bersifat: bersisa 2 jika dibagi 5, bersisa 3 jika dibagi 7, dan bersuisa 4 jika dibagi 9. Berapakah hasil penjumlahan digit-digit dari N?
   A. 4
   B. 8
   C. 13
   D. 22
   E. 40

10. Suatu garis melalui titik (m, -9) dan (7, m) dengan kemiringan m. Berapakah nilai m?
    A. 1
    B. 2
    C. 3
    D. 4
    E. 5

SOAL BAGIAN KEDUA

11. Misalkan f adalah fugsi yang memenuhi $f\left(\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{x}f\left(-x\right)=2x$ untuk setiap bilangan real $x \neq 0$. Berapakah nilai f(2)?

12. Jika a dan b bilangan bulat sedemikian sehingga $a^2 - b^2 = 2003$. Berapakah nilai $a^2 + b^2$?

13. Berapakah hasil perkalian $\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\left(1-\frac{1}{4^2}\right)...\left(1-\frac{1}{2009^2}\right)$?

14. Emil selalu berbohong pada hari senin, selasa, rabu, dan berkata jujur pada hari-hari lainnya. Di lain pihak, Asep selalu berbohong pada hari kamis, jumat , sabtu, dan berkata jujur pada hari lainnya. Pada suatu hari terjadi percakapan berikut:

Emil: ”Kemarin saya berbohong”

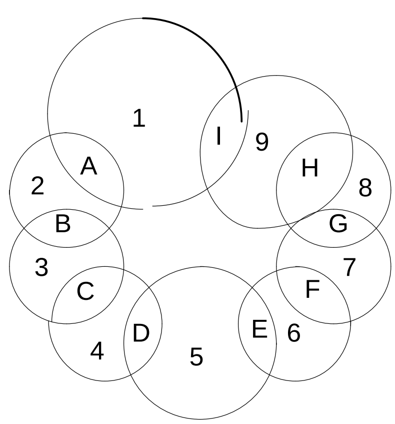
Asep: ”Saya juga”

Pada hari apa percakapan tersebut terjadi?

15. Untuk setiap bilangan real a, kita definisikan $\lfloor a \rfloor$ sebagai bilangan bulat terbesar yang kurang dari atau sama dengan a. Sebagai contoh $\lfloor 4{,}9 \rfloor = 4$ dan $\lfloor 7 \rfloor = 7$. Jika x dan y bilangan real sehingga $\lfloor \sqrt{x} \rfloor = 9$ dan $\lfloor \sqrt{y} \rfloor = 12$, maka nilai terkecil yang mungkin dicapai oleh $\lfloor y - x \rfloor$ adalah . . .

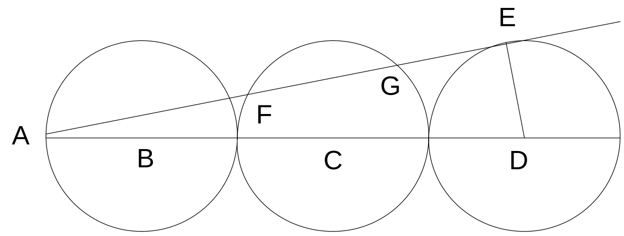
16. Dari 10 orang siswa akan dibentuk 5 kelompok, masing-masing beranggotakan 2 orang. Berapa banyaknya cara membentuk kelima kelompok ini?

17. Misalkan A, B, C, D, E, F, G, H, dan I menyatakan bilangan-bilangan bulat positif berbeda yang kurang dari atau sama dengan 9. Jika jumlah setiap 3 bilangan dalam setiap lingkaran bernilai sama, berapakah nilai A + D + G?



18. Perhatikan jarum jam kinetik, pada jam berapa antara jam 10 dan 11 jarum pendek dan jarum panjang membentuk sudut $90^{0?}$

19. Pada gambar di bawah ini, 3 buah lingkaran memiliki jari-jari 2 cm dan saling bersinggungan seperti tampak pada gambar, dengan pusat lingkaran masing-masing B, C, dan D. Garis AE merupakan garis singung lingkaran ketiga dan memotong lingkaran kedua di titik F dan G. Hitunglah panjang FG!



20. Titik E dipilih pada sisi AB, segitiga ABC, sedemikian hingga AE : EB = 1 : 3 dan titik D dipilih pada sisi BC sehingga CD : DB = 1 : 2. Titik potong dari AD dan CE adalah F. Carilah nilai $\frac{AF}{FC}+\frac{AF}{FD}$!

KUNCI JAWABAN BAGIAN PERTAMA

1. E
2. A
3. B
4. E
5. D
6. A
7. C
8. B
9. C
10. C

KUNCI JAWABAN BAGIAN KEDUA

11. $\frac{9}{2}$
12. 2006005
13. $\frac{2005}{2009}$
14. Hari Kamis
15. 44
16. 945
17. 18
18. Pukul 10 lebih $5\frac{5}{11}$ menit dan Pukul 10 lebih 10 lebih $38\frac{2}{11}$.
19. 3,2 cm
20. $1 + \frac{\sqrt{130}}{20}$

LATIHAN II

DEPARTEMEN PENDIDIKAN NASIONAL
OLIMPIADE MATEMATIKA SMA
TINGKAT KABUPATEN / KOTA

SOAL BAGIAN PERTAMA

Pilih satu jawaban yang benar, dalam hal terdapat lebih dari satu jawaban yang benar, pilih jawaban yang paling baik.

1. Berapa banyaknya bilangan 4 angka (digit) yang semua angkanya genap dan lebih besar dari 2003?
   A. 0
   B. 1
   C. 2
   D. 3
   E. 4

2. Seorang ayah dan anak lahir pada tanggal dan bulan yang sama. Pada suatu hari di tahun 2003 si ayah tepat berusia 42 tahun dan si anak 11 tahun. Pada tahun berapakah usia sang ayah tepat dua kali usia anaknya?
   A. 2013
   B. 2015
   C. 2017
   D. 2021
   E. 2023

3. Tiga buah bilangan taknol yang berbeda a, b, c dipilihsedemikian sehingga
   $$\frac{a+b}{c}+\frac{b+c}{a}+\frac{a+c}{b}=\lambda.$$
   Berapakah nilai λ?

A. - 3
B. - 1
C. 0
D. 1
E. 3

4. Dua buah lingkaran masing-masing berjari-jari 6. Jarak antara kedua pusatnya adalah $6\sqrt{3}$. Berapakah luas irisan kedua lingkaran tersebut?
   A. $2\pi - \sqrt{3}$
   B. $6\pi - 4\sqrt{3}$
   C. $6\pi - 12\sqrt{3}$
   D. $12\pi - 18\sqrt{3}$
   E. $12\pi - 24\sqrt{3}$

5. Garis y = 3 – x berpotongan dengan parabola $y = 3x - x^2$ di dua titik (x_1, y_1) dan (x_2, y_2). Berapakah nilai $y_1 + y_2$?
   A. 2
   B. 3
   C. 5
   D. 6
   E. 7

6. Jika Ali memacu sepedanya ke sekolah dengan kecepatan x km/jam maka ia akan terlambat satu menit, tetapi jika ia memacu sepedanya dengan laju y km/jam maka ia akan datang lebih awal 1 menit. Berapa jauh jarak yang Ali tempuh untuk sampai ke sekolah?
   A. $\dfrac{xy}{30(y - x)}$

B. $\frac{2xy}{y - x}$

C. $\frac{x+y}{y - x}$

D. $\frac{x+y}{2}$

E. $\frac{x+y}{60(y - x)}$

7. Saya berusia empat puluh delapan tahun, empat puluh delapan bulan, empat puluh delapan minggu, empat puluh delapan hari. Berapakah umur saya?
   A. 48
   B. 50
   C. 51
   D. 52
   E. 53

8. Berapakah bilangan prima terkecil yang membagi $1999^{2000} + 2001^{2002}$?
   A. 2
   B. 3
   C. 5
   D. $1999^{2000} + 2001^{2002}$
   E. Tidak satupun

9. Mickey Mouse (M) dan Donald Duck (D) dapat mendayung perahu bersama-sama dalam air tenang dengan laju 5 km/jam. M sendirian dapat mendayung dengan laju 2 m/jam, sedangkan D sendiria dapat mendayung dengan laju 3 km/jam. Pada pukul 12:00 tengah hari mereka mulai mendayung bersama-sama menyusuri sungai yang mengalir dengan laju 1 km/jam. Pada pukul 13:00, D(yang duduk di belakang) kehilangan dayungnya tetapi tidak membri tahu M. Pada pukul 14:00 M melihat ke belakang , melihat D tidak memegang dayungnya dan mendorongnya sehingga topi D terjatuh. Kemudian M memberikan dayungnya

pada D yang selanjutnya mendayung melawan arus untuk mengambil kembali dayungnya. Segera setelah mendapatkan kembali dayungnya, mereka brputar haluan, mengikuti arus sungai, mendayung bersama-samasampai mereka mendapatkan topi D pada pukul?

A. 14:32
B. 14:58
C. 15:04
D. 15:22
E. Tidak satupun di antaranya.

10. Bilangan $2^{48} - 1$ tepat habis dibagi oleh dua bilangan di antara 60 dan 70. Bilangan tersebut adalah

A. 61 dan 63
B. 61 dan 65
C. 63 dan 65
D. 63 dan 67
E. 67 dan 69

SOAL BAGIAN KEDUA

11. Dari sembilan orang siswa akan dibentuk tiga kelompok, masing-masing berangotakan tiga orang. Berapa banyaknya cara membentuk ketiga kelompok ini?

12. Apakah dua angka (digit) terakhir dari 2^{2003}?

13. Bilangan real x mana sajakah yang memenuhi pertaksamaan $x^3 + 1 > x^2 + x$?

14. Sebuah jam digital menunjukkan empat angka, dua angka pertama menunjukkan jam dan dua angka berikutnya menunjukkan menit. Jam tersebut adalah jam 12-an

(ini berarti waktu 13:15 atau 21:19 tidak akan muncul). Kalau keempat angka yang ditunjukkan jam tersebut kita baca sebagai bilangan dengan paling banyak 4 angka (angka 0 di depan boleh dibuang). Berapa kalikah dalam periode 12 jam bilangan yang dapat merupakan kelipatan 11?

15. Kuadrat suatu bilangan bulat bila dibagi dengan 19 akan memberikan sebuah bilangan prima dan sisa pembagian 9. Berapakah bilangan prima tersebut?

16. Untuk menentukan wakilnya dalam cabgang lari 110 m gawang putera, sebuah SMA mengadakan seleksi yang diikuti 5 orang siswa. Dalam seleksi diadakan 3 kali lomba yang diikuti kelima siswa. Pada setiap lomba, pelari akan memperoleh nilai sesuai dengan peringkatnya pada lomba tersebut. Pelari tercepat memperoleh nilai 5, sedangkan peringkat di bawahnya memperoleh nilai berturut-turut 3, 2, 1, 1. Tidak ada 2 pelari yang menempati peringkat yang sama. Nilai total seorang pelari adalah jumlah nilai pada ketiga lomba, da pelari dengan nilai tertinggi dinyatakan sebagai pemenang seleksi. Berapakah nilai terrendah yang mungkin oleh pemenang seleksi?

17. Berapa banyakkah bilangan 4 angka yang semua angkanya genap?

18. Ketiga sisi suatu segitiga panjangnya masing-msing adalah 8, (12,5) , dan s. Di mana s adalah bilangan bulat. Tentukan nilai sekecil-kecilnya yang dapat dicapai oleh s.

19. Diketahui $\frac{xy}{x+y}$ = a, $\frac{xz}{x+z}$ = b, $\frac{yz}{y+z}$ = c. dengan a, b, dan c semuanya tak nol. Tentukan x dinyatakan sebagai fungsi dari a, b, dan c.

20. Tentukan nilai minimum dari $f(x) = \frac{4x^2 + 8x + 13}{6(1+x)}$ untuk $x \geq 0$.

KUNCI JAWABAN BAGIAN PERTAMA

1. E
2. E
3. B
4. D
5. A
6. A
7. E
8. A
9. C
10. C

KUNCI JAWABAN BAGIAN KEDUA

11. 280 Cara
12. 08
13. $x > -1$ dan $x \neq 1$
14. 65
15. 13
16. 8
17. 500
18. 5
19. $\dfrac{2abc}{bc + ac - ab}$
20. 2

PETUNJUK UMUM

SELEKSI TINGKAT PROVINSI

OLIMPIADE MATEMATIKA

1. Kegiatan seleksi dibagi ke dalam tiga sesi :
    i. Pengisian data peserta 20 menit.
    ii. Tes bagian pertama 90 menit.
    iii. Tes bagian kedua 120 menit.

2. Diantara tes bagian pertama dan bagian kedua disediakan waktu istirahat selama 30 menit dan dapat digunakan untuk mengunjungi kamar kecil atau makan.

3. Pada sesi pengisian data, isilah formulir yang disediakan selengkap mungkin. Jangan lupa membubuhkan tandatangan Anda pada tempat yang telah disediakan.

4. Pada bagian pertama Anda diminta menuliskan jawaban dari pertanyaan yang diberikan. Tuliskan jawaban tersebut pada tempat yang telah disediakan.

5. Pada tes bagian kedua, Anda diminta menuliskan jawaban Anda lengkap dengan semua langkah dan alasan yang Anda gunakan untuk memperoleh jawaban tersebut.

6. Sebelum mulai mengerjakan tes, periksa apakah naskah yang diberikan sudah lengkap. Jika tidak, minta pengawas untuk mengganti naskah.

7. Jawaban hendaknya Anda tuliskan dengan menggunakan tinta, bukan pensil. Anda boleh menggunakan pensil untuk menggambar.

8. Selama tes, Anda tidak diperkenankan menggunakan buku, catatan atau alat bantu hitung. Anda juga tidak diperkenankan untuk bekerjasama.

9. Selama kedua bagian tes, Anda tidak diperkenankan meninggalkan ruangan. Anda akan dinyatakan telah menyelesaikan bagian tes yang sedang berlangsung jika Anda meninggalkan ruangan.

10. Mulailah bekerja hanya setelah pengawas memberi tanda dan berhentilah bekerja segera setelah pengawas memberi tanda.

11. Berkas jawaban tes bagian pertama dari semua peserta akan diperiksa dan dinilai terlebih dahulu. Kemudian, berkas jawaban tes bagian kedua dari 400-600 peserta terbaik secara nasional yang akan diperiksa. Penentuan peserta yang akan diundang untuk mengikuti pembinaan tahap berikutnya ditentukan berdasakan nilai tes bagian kedua.

VERSI I

DEPARTEMEN PENDIDIKAN NASIONAL
OLIMPIADE MATEMATIKA SMA
TINGKAT PROVINSI

SOAL BAGIAN PERTAMA (ISIAN SINGKAT)

1. Jika diketahui bilangan real positif a, b, dan c sedemikian hingga $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{a}$.

   Berapa nilai $\frac{3a + 2b + c}{3a + 2b - c}$?

2. Nilai dari $\frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}} = \ldots$

3. Tentukan nilai x dan y yang memenuhi system persamaan $xy + x + y = 11$ dan $x^2 + 5xy + y^2 = 51$!

4. Tentukanlah $\frac{yz + zx + xy}{x^2 + y^2 + z^2}$ jika diketahui $\frac{x + 2y}{6} = \frac{2y + 3z}{8} = \frac{3z + x}{10}$!

5. Berapa jumlah dari $\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \ldots + \frac{1}{2001.2002}$?

6. Dua buah roda gigi masing-masing berjari-jari 90 cm dan 30 cm. Kedua roda gigi ini diketahui bersinggungan dan dikelilingi dengan erat dengan sebuah rantai. Tentukan panjang rantai tersebut!

7. Jika $\frac{30}{7} = x + \frac{1}{y + \frac{1}{z}}$ dengan x, y, dan z adalah bilangan bulat positif, berapakah nilai $x + y + z$?

8. Berapa nilai dari $\left(\frac{4^{2003}}{6^{2002}}\right)\left(\frac{3^{2002}}{2^{2003}}\right)$?

9. Suatu fungsi mempunyai sifat f(2x + 3) = 2f(x) + 3 untuk setiap nilai x bilangan real. Jika f(0) = 6, maka nilai f(9) = …

10. Sebuah bola jatuh dari krtinggian 2,5 m dan memantul kembali dengan ketinggian $\frac{3}{5}$ kali tinggi sebelumnya, pemantulan itu berlangsung terus-menrus hingga bola berhenti. Tentukan panjang lintasan seluruhnya hingga bola berhenti!

11. Jika $\sqrt{4x+\sqrt{4x+\sqrt{4x+...}}}=10$. Tentukan nilai x yang memenuhi persamaan tersebut!

12. Diketahui persegi PQRS dengan panjang sisi 10 cm. Di dalam persegi PQRS dibuat persegi $P_1Q_1R_1S_1$ dengan P_1, Q_1, R_1, dan S_1 masing-masing sebagai titik tengah PQ, QR, RS, dan SP. Pembuatan persegi dilakukan terus-menerus sampai tak terhingga yang prosesnya sama seperti pembuatan persegi $P_1Q_1R_1S_1$. Berapakah jumlah seluruh persegi tersebut?

13. Diketahui segitiga ABC, panjang AB = 15 cm, BC = 14 cm, dan AC = 13 cm. Garis AD adalah garis tingginya dan garis bagi sudut B memotong garis AD di titik E. Hitung panjang garis DE !

14. Sepotong kawat dibagi 5 bagian dengan panjang masing-masing membentuk barisan aritmatika. Panjang kawat yang terpendek 4 cm dan terpanjang 108 cm. Tentukan panjang kawat seluruhnya!

15. Tiga buah bilangan membentuk sebuah barisan gometri. Jumlahnya adalah 35 sedangkan perkaliannya adalah 1000. Berapakah rasio dari deret geometri tersebut!

16. Ada berapa banyak angka (digit) pada bilangan terkecil yang mempunyai sifat : semua angkanya tediri atas 5 semua (sebagai contoh 55555) dan yang habis dibagi 99 ?

17. Berapa luas bidang datar yang dibatasi kurva-kurva $y = \frac{1}{2}x$, $y = \frac{1}{4}x^2 + 2$, garis $x = 0$ dan garis $x = 4$

18. Empat bilangan 1, 2, 3, dan 4 dituliskan dalam urutan naik. Anda harus menyisipkan satu tanda tambah dan satu tanda kurang di antara 1 dan 2, atau di antara 2 dan 3, atau di antara 3 dan 4 , untuk menghasilkan jawaban yang berbeda. Sebagai contoh,
    $1 - 23 + 4$ memberikan jawaban -18
    Berapa banyak bilangan positif yang berbeda yang dapat dihasilkan dengan cara ini?

19. Apakah digit terakhir dari $2002^{(2008 + 2009 + 2010)}$?

20. Terdapat 2 buah pensil dan 3 buah ballpoint yang akan diberikan kepada 5 orang siswa A, B, C, D, dan E yang masing-masingnya tepat akan mendapatkan satu alat tulis. Siapakah yang akan mendapatkan pensil jika diketahui A dan B mendapatkan alat tulis yang sama, B dan D mendapatkan alat tulis yang berbeda, D dan E mendapatkan alat tulis yang berbeda.

SOAL BAGIAN KEDUA (URAIAN)

1. Hitunglah luas sebuah segi-8 yang titik-titik sudutnya terletak selingkaran, empat sisi panjangnya masing-masing 2 cm dan empat sisi lainnya panjangnya masing-masing 3 cm.

2. Dalam sebuah kubus dengan panjang rusuk a cm dilukis beberapa buah tabung yang sumbunya berimpit dengan diagonal ruang kubus tersebut, sedangkan lingkaran alas dan lingkaran atas menyinggung bidang sisi kubus itu. Hitunglah jari-jari lingkaran alas tabung yang mempunyai luas bidang lengkung terbesar!

3. Jika a, b, dan c semuanya bilanghan positif, buktikan bahwa
   $(a + b)(b + c)(c + a) \geq 8abc$

4. Anda diminta menuliskan bilangan-bilangan 1, 2, …, n di papan tulis, di mana n adalah bilangan asli. Lalu saya hapus sembarang dua bilangan di antaranya, katakan a dan b, kemudian Anda menuliskan bilangan yang merupakan selisih antara a dan b. Proses ini Anda lakukan secara berulang-ulang sampai akhirnya tersisa satu bilangan saja. Jika A(n) menyatakan bilangan terbesar yang mungkin tersisa, buktikan bahwa A(n) = n jika dan hanya jika untuk setiap n atau (n – 1) adalah kelipatan 4.

5. Jika x, y, z, dan n adalah bilangan-bilangan asli dengan $x^n + y^n = z^n$, maka tunjukkan bahwa x, y, dan z semuanya lebih besar dari n.

SOLUSI BAGIAN PERTAMA (ISIAN SINGKAT)

1. Karena $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{a}$

Maka $a^2 = bc$ … (1)

$b^2 = ac$ … (2)

$c^2 = ab$ … (3)

Dari persamaan (1) dan (3) diperoleh

$$\frac{(1)}{(3)} \Leftrightarrow \frac{a^2}{c^2} = \frac{bc}{ab}$$

$$\Leftrightarrow \frac{a^2}{c^2} = \frac{c}{a}$$

$$\Leftrightarrow c^3 = a^3$$

$$\Leftrightarrow c = a \quad ... (4)$$

Kemudian dari persamaan (2) dan (4) diperoleh

$b^2 = a^2 \Leftrightarrow b = a$ atau $b = -a$

Jika $b = a$ maka $a = b = c$

Jika $b = -a$ maka terjadi kontradiksi dengan persamaan (3) karena tidak mungkin diperoleh $c^2 = -a^2$.

Jadi diperoleh solusi tunggal yaitu $a = b = c$.

Akibatnya

$$\frac{3a + 2b + c}{3a + 2b - c} = \frac{3a + 2a + a}{3a + 2a - a}$$

$$= \frac{6a}{4a}$$

$$= \frac{3}{2}$$

2. Perhatikan bahwa setiap suku pada deret dalam soal berbentuk $\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{a+1}}$ yang dapat disederhanakan menjadi

$$\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{a+1}} \cdot \frac{\sqrt{a}-\sqrt{a+1}}{\sqrt{a}-\sqrt{a+1}} = \frac{\sqrt{a}-\sqrt{a+1}}{a-(a+1)}$$

$$= \frac{\sqrt{a}-\sqrt{a+1}}{-1}$$

$$= \sqrt{a+1}-\sqrt{a}$$

Jadi

$$\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+...+\frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}}=\left(\sqrt{2}-1\right)+\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)+\left(\sqrt{4}-\sqrt{3}\right)+...+\left(\sqrt{100}-\sqrt{99}\right)$$

$= -1 + \sqrt{100}$

$= -1 + 10$

$= 9$

3. $x^2 + 5xy + y^2 = 51$ … (1)

$xy + x + y = 11$ … (2)

Persaman (1) dapat diuraikan menjadi

$x^2 + y^2 + 5xy = 51 \Leftrightarrow (x + y)^2 - 2xy + 5xy = 51$

$\Leftrightarrow (x + y)^2 + 3xy = 51$ .... (3)

Persamaan (2) dapat diuraikan menjadi $xy = 11 - (x + y)$ ... (4)

Dari persamaan (3) dan (4) diperoleh

$(x + y)^2 + 3(11 - (x + y)) = 51 \Leftrightarrow (x + y)^2 - 3(x + y) - 18 = 0$ ... (5)

Misalkan $(x + y) = p$, maka persamaan (5) menjadi

$p^2 - 3p - 18 = 0 \Leftrightarrow (p - 6)(p + 3) = 0$

$\Leftrightarrow p = 6$ atau $p = -3$

- Jika $p = 6$

  Maka $x + y = 6 \Leftrightarrow y = 6 - x$

  Substitusikan $y = 6 - x$ ke persamaan (2), diperoleh

  $x(6 - x) + x + 6 - x = 11 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 5 = 0$

  $\Leftrightarrow (x - 5)(x - 1) = 0$

  $\Leftrightarrow x = 5$ atau $x = 1$

  Jika $x = 5$ maka $y = 1$ diperoleh $(x, y) = (5, 1)$

  Jika $x = 1$ maka $y = 5$ diperoleh $(x, y) = (1, 5)$

- Jika $p = -3$

  Maka $x + y = -3 \Leftrightarrow y = -(x + 3)$

  Substitusikan $y = -(x + y)$ ke persamaan (2), diperoleh

  $-x(x + 3) + x - (x + 3) = 11 \Leftrightarrow x^2 + 3x + 14 = 0$

  Karena $D < 0$, maka nilai x tidak real.

Jadi pasangan (x, y) yang memenuhi persamaan (1) dan (2) adalah (1, 5) dan (5,1)

4. $\frac{x+2y}{6} = \frac{2y+3z}{8} = \frac{3z+x}{10} \Leftrightarrow \frac{x+2y}{3} = \frac{2y+3z}{4} = \frac{3z+x}{5}$

Diperoleh 3 persamaan yaitu

$\frac{x+2y}{3} = \frac{2y+3z}{4}$ … (1)

$\frac{x+2y}{3} = \frac{3z+x}{5}$ … (2)

$\frac{2y+3z}{4} = \frac{3z+x}{5}$ … (3)

(1) $\Leftrightarrow$ 6y + 9z = 4x + 8y

$\Leftrightarrow$ 9z = 4x + 2y … (4)

(2) $\Leftrightarrow$ 5x + 10y = 9z + 3x

$\Leftrightarrow$ 9z = 2x + 10y …(5)

Dari persamaan (4) dan (5) diperoleh

4x + 2y = 2x + 10y $\Leftrightarrow$ 8y = 2x

$\Leftrightarrow$ y = $\frac{x}{4}$ … (6)

Dari persamaan (4) dan (6) diperoleh

9z = 4x + 2y

= 4x + 2($\frac{x}{4}$)

= $\frac{9}{2}$ x

$\Leftrightarrow$ z = $\frac{x}{2}$

Jadi $\frac{yz+zx+xy}{x^2+y^2+z^2} = \frac{\left(\frac{x}{4}\right)\left(\frac{x}{2}\right)+\left(\frac{x}{2}\right)x+x\left(\frac{x}{4}\right)}{x^2+\left(\frac{x}{4}\right)^2+\left(\frac{x}{2}\right)^2}$

$$= \frac{\frac{x^2}{8} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{4}}{x^2 + \frac{x^2}{16} + \frac{x^2}{4}}$$

$$= \frac{\frac{1}{8} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}}{1 + \frac{1}{16} + \frac{1}{4}}$$

$$= \frac{2}{3}$$

5. Perhatikan bahwa setiap suku pada deret tersebut berbentuk $\frac{1}{n(n+1)}$ yang dapat disederhanakan menjadi $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$.

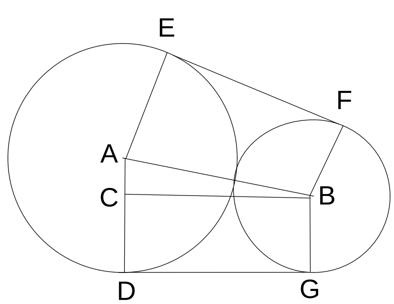
   Jadi

$$\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \ldots + \frac{1}{2001.2002} = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{2000} - \frac{1}{2001}\right) + \left(\frac{1}{2001} - \frac{1}{2002}\right)$$

$$= 1 - \frac{1}{2002}$$

$$= \frac{2001}{2002}$$

6. Perhatikan gambar di baah ini!



   AC = AD – CD

   = AD – BG

   = 90 – 30

$= 60$

$AB = 90 + 30$

$= 120$

$$\cos(\angle BAC) = \frac{AC}{AB}$$

$$= \frac{60}{120}$$

$$= \frac{1}{2}$$

$\angle BAC = 60^0$

Jadi $\angle DAE = \angle GBF = 2 \text{ x } \angle BAC$

$= 2 \text{ x } 60^0$

$= 120^0$

Panjang rantai = DG + GF + FE + ED

= (DG + FE) + GF + ED

$= 2DG + [\frac{120}{360}$ x Keliling Lingkaran B] + $[\frac{240}{360}$ x Keliling Lingkaran A]

$= 2\sqrt{AB^2 - AC^2} + [\frac{1}{3} . 2. \pi .AD] + [\frac{2}{3} .2. \pi .BG]$

$= 2\sqrt{120^2 - 60^2} + [\frac{1}{3} . 2. \pi .30] + [\frac{2}{3} .2. \pi .90]$

$= 120\sqrt{3} + 20\pi + 120\pi$

$= 120\sqrt{3} + 140\pi$

$= 20(6\sqrt{3} + 7\pi)$

Jadi panjang rantai adalah $20(6\sqrt{3} + 7\pi)$ cm.

7. Perhatikan bahwa x, y dan z semuanya bilangan bulat positif.

$$\frac{30}{7} = x + \frac{1}{y + \frac{1}{z}} \Leftrightarrow 4 + \frac{2}{7} = x + \frac{1}{y + \frac{1}{z}}$$

Jadi x = 4

Kemudian

$$\frac{2}{7} = \frac{1}{y + \frac{1}{z}} \Leftrightarrow \frac{1}{\frac{7}{2}} = \frac{1}{y + \frac{1}{z}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{7}{2} = y + \frac{1}{z}$$

$$\Leftrightarrow 3 + \frac{1}{2} = y + \frac{1}{z}$$

Jadi y = 3 dan z = 2.

Akibatnya x + y + z = 2 + 3 + 4

= 9

8. $$\left(\frac{4^{2003}}{6^{2002}}\right)\left(\frac{3^{2002}}{2^{2003}}\right) = \left(\frac{4}{2}\right)^{2003} . \left(\frac{3}{6}\right)^{2002}$$

$$= 2^{2003} . \left(\frac{1}{2}\right)^{2002}$$

$$= 2^{2003} . 2^{-2002}$$

$$= 2$$

9. f(2x + 3) = 2f(x) + 3

- Jika x = 0 maka

  f(3) = 2f(0) + 3

  Kemudian diketahui bahwa f(0) = 6, maka

  f(3) = 2(6) + 3

  = 15

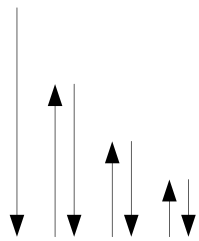
- Jika x = 3 maka

  f(9) = 2f(3) + 3

  = 2(15) + 3

  = 33

10. Perhatikan gambar di bawah ini !



U_0 $2U_1$ $2U_2$ $2U_3$ ...

$U_0 = \frac{5}{2}$

$U_1 = \frac{3}{5}\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{3}{2}$

U_1, U_2, U_3, … membentuk suatu deret geometri tak hingga yang konvergen dengan rasio $r = \frac{3}{5}$.

Panjang lintasan yang ditempuh bola $= U_0 + 2(U_1 + U_2 + U_3 + \ldots)$

$$= U_0 + 2S_\infty$$

$$= U_0 + 2\left(\frac{U_1}{1-r}\right)$$

$$= \frac{5}{2} + 2\left(\frac{\frac{3}{2}}{1-\frac{3}{5}}\right)$$

$$= \frac{5}{2} + 2\left(\frac{\frac{3}{2}}{\frac{2}{5}}\right)$$

$$= \frac{5}{2} + \frac{15}{2}$$

$$= 10$$

Jadi panjang lintasan yang ditempuh bola adalah 10 m.

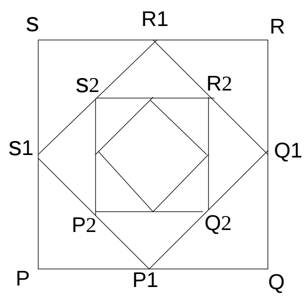
11. $\sqrt{4x+\sqrt{4x+\sqrt{4x+\ldots}}} = 10 \Leftrightarrow 4x + \sqrt{4x+\sqrt{4x+\ldots}} = 100$

$$\Leftrightarrow 4x + 10 = 100$$

$$\Leftrightarrow \; 4x = 90$$

$$\Leftrightarrow \; x = \frac{45}{2}$$

12. Perhatikan gambar di bawah ini !



Misalkan persegi $P_nQ_nR_nS_n$ kita sebut sebagai persegi $(PQRS)_n$.

Dari gambar dapat diketahui bahwa

Luas persegi $(PQRS)_n = \frac{1}{2}$ (Luas persegi $(PQRS)_{n-1}$)

Akibatnya luas semua persegi membentuk deret geometri tak hingga yang konvergen dengan U_1 = Luas persegi PQRS = 10^2 = 100, dan rasio r = $\frac{1}{2}$.

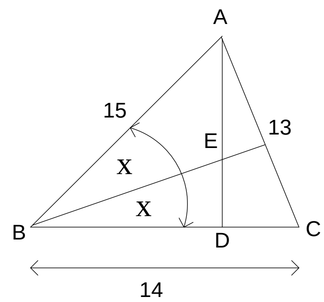
$$\text{Luas total persegi} = \frac{U_1}{1-r}$$

$$= \frac{100}{1-\frac{1}{2}}$$

$$= 200$$

Jadi luas total persegi = 200 cm^2.

13. Perhatikan gambar di bawah ini !



$$\cos 2x = \frac{AB^2+BC^2-AC^2}{2(AB)(BC)}$$

$$= \frac{15^2+14^2-13^2}{2(15)(14)}$$

$$= \frac{225+196-169}{2(15)(14)}$$

$$= \frac{252}{420}$$

$$= \frac{3}{5}$$

$$\cos 2x = \frac{3}{5} \Leftrightarrow \frac{BD}{AB} = \frac{3}{5}$$

$$\Leftrightarrow \frac{BD}{15} = \frac{3}{5}$$

$$\Leftrightarrow BD = 9$$

Perhatikan bahwa

$$\cos 2x = \cos (x + x)$$

$$= (\cos x)(\cos x) - (\sin x)(\sin x)$$

$$= \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$= \cos^2 x - (1 - \cos^2 x)$$

$$= 2\cos^2 x - 1$$

$$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1 \Leftrightarrow 2\cos^2 x = \cos 2x + 1$$

$$\Leftrightarrow \cos^2 x = \frac{\cos 2x + 1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos x = \sqrt{\frac{\cos 2x + 1}{2}} \text{ atau } \cos x = -\sqrt{\frac{\cos 2x + 1}{2}}$$

Karena x lancip maka kita pilih

$$\cos x = \sqrt{\frac{\cos 2x + 1}{2}}$$

$$= \sqrt{\frac{\frac{3}{5} + 1}{2}}$$

$$= \sqrt{\frac{4}{5}}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{5}}$$

Pandang segitiga BDE !

$$\cos x = \frac{BD}{BE} \Leftrightarrow \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{9}{BE}$$

$$\Leftrightarrow BE = \frac{9}{2}\sqrt{5}$$

$$DE = \sqrt{BE^2 - BD^2}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{9}{2}\sqrt{5}\right)^2 - 9^2}$$

$$= \sqrt{\frac{5}{4}(81) - 81}$$

$$= \sqrt{\frac{81}{4}}$$

$$= \frac{9}{2}$$

Jadi panjang garis DE = $\frac{9}{2}$ cm.

14. diketahui $U_1 = 4$

$U_5 = 108$

Pada deret aritmatika, jumlah n suku pertamanya adalah

$$S_n = \frac{n}{2}\left(U_1 + U_n\right) \Leftrightarrow S_5 = \frac{5}{2}\left(U_1 + U_5\right)$$

$$= \frac{5}{2}\left(4 + 108\right)$$

$$= \frac{5}{2}\left(112\right)$$

$$= 280$$

Jadi panjang kawat seluruhnya adalah 280 cm.

15. Karena ketiga bilangan itu membentuk barisan geometri, maka ketiganya bisa dituliskan sebagai

a, ar, ar^2

dengan a adalah suku pertama dan r adalah rasio.

Selanjutnya

$$a + ar + ar^2 = 35 \Leftrightarrow a(1 + r + r^2) = 35 \quad \ldots (1)$$

$$(a)\,(ar)\,(ar^2) = 1000 \Leftrightarrow (ar)^3 = 1000$$

$$\Leftrightarrow ar = 10$$

$$\Leftrightarrow a = \frac{10}{r} \quad \ldots (2)$$

Dari persamaan (1) dan (2) diperoleh

$$\frac{10}{r}(1 + r + r^2) = 35 \Leftrightarrow 10 + 10r + 10\,r^2 = 35r$$

$$\Leftrightarrow 10\,r^2 - 25r + 10 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2r^2 - 5r + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (2r - 1)(r - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow r = \frac{1}{2} \text{ atau } r = 2.$$

Jadi rasio dari deret geometri itu adalah $\frac{1}{2}$ atau 2.

16. Misalkan n adalah banyaknya digit pada bilangan 555...5 = P.

Akan dicari bilangan terkecil n sehingga P habis dibagi 99.

Karena P habis dibagi 99 maka

$99\ k = P \Leftrightarrow 99\ k = 555\ldots5$ dengan k suatu bilangan bulat tak negatif.

Perhatikan bahwa 99 k adalah kelipatan 5, akibatnya k haruslah kelipatan 5, sebut k = 5c dengan c suatu bilangan bulat tak negatif.

Jadi $99(5c) = 555\ldots5 \Leftrightarrow 99c = 111\ldots1$

$\Leftrightarrow (9)(11)c = 111\ldots1$

Karena 111…1 kelipatan 9 maka menurut teorema, jumlah seluruh digit-digitnya harus habis dibagi 9. Akibatnya nilai n haruslah 9, 18, 27, ...

Selanjutnya, 111...1 juga merupakan kelipatan 11, maka menurut teorema, jumlah selang-seling dari setiap digit 111...1 atau (1 – 1 + 1 - ...) harus habis dibagi 11.

Perhatikan bahwa nilai (1 – 1 + 1 - ...) adalah 0 (jika n genap) atau 1 (jika n ganjil). Agar (1 – 1 + 1 - ...) habis dibagi 11 syaratnya n harus genap (karena 0 habis dibagi 11). Maka nilai n yang mungkin sekarang adalah 18, 36, 54, ...

Jadi nilai n terkecil sehingga P habis dibagi 99 adalah 18.

Catatan :

Bukti Teorema

Teorema Binomial Newton

$(p + q)^n = C^n_0 p^n q^0 + C^n_1 p^{n-1} q^1 + C^n_2 p^{n-2} q^2 + \ldots + C^n_{n-1} p^1 q^{n-1} + C^n_n p^0 q^n$

- *Suatu bilangan habis dibagi 9 jika jumlah digit-digitnya habis dibagi 9.*

  Bukti

  Lihat catatan pembahasan soal nomor 19 uraian versi II Kab/Kota.

- *Suatu bilangan habis dibagi 11 jika jumlah selang-seling digit-digitnya habis dibagi 11.*

  Bukti

  Misalkan bilangan itu adalah

  $a = a_n\ a_{n-1}\ a_{n-2} \ldots a_1\ a_0$

  $= (a_n \times 10^n) + (a_{n-1} \times 10^{n-1}) + \ldots + (a_1 \times 10^1) + a_0$

  $= a_n(11 - 1)^n + a_{n-1}(11 - 1)^{n-1} + \ldots + a_1(11 - 1) + a_0$

  Menurut Teorema Binomial Newton

  $a = a_n[11^n - (n)11^{n-1} + \ldots] + a_{n-1}[11^n - (n - 1)11^{n-2} + \ldots] + \ldots$

Jika n genap (banyaknya digit a ganjil) maka

$a = a_n[11^n - (n)11^{n-1} + \ldots] + a_{n-1}[11^n - (n - 1)11^{n-2} + \ldots] + \ldots$

$+ a_n - a_{n-1} + a_{n-2} - a_{n-3} + \ldots$

Jika n ganjil (banyaknya digit a genap) maka

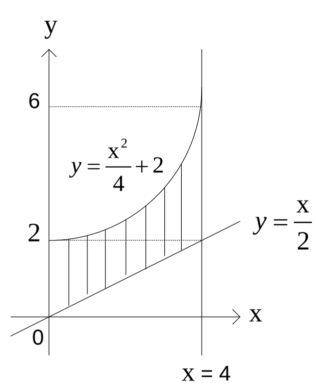
$a = a_n[11^n - (n)11^{n-1} + \ldots] + a_{n-1}[11^n - (n - 1)11^{n-2} + \ldots] + \ldots$

$- a_n + a_{n-1} - a_{n-2} + a_{n-3} - \ldots$

Perhatikan bahwa suku $a_n[11^n - (n)11^{n-1} + \ldots] + a_{n-1}[11^n - (n - 1)11^{n-2} + \ldots] + \ldots$ habis dibagi 11.

Jadi supaya a habis dibagi 11 syaratnya jumlah selang-seling dari digit-digitnya harus habis dibagi 11.

17. Perhatikan gambar di bawah ini !



Luas yang diarsir = $\int_0^4 \left(\frac{x^2}{4} + 2 - \frac{x}{2} \right) dx$

$= \left(\frac{x^3}{12} + 2x - \frac{x^2}{4} \right)_0^4$

$= \frac{16}{3} + 8 - 4$

$= \frac{28}{3}$ satuan luas.

18. 1 – 2 + 34 > 0

1 + 2 – 34 < 0

$1 - 23 + 4 < 0$

$1 + 23 - 4 > 0$

$12 - 3 - 4 > 0$

$12 + 3 - 4 > 0$

Jadi terdapat 4 bilangan positif yang memenuhi.

19. Perhatikan bahawa digit terakhir dari $2002^{(2008 + 2009 + 2010)}$ sama dengan digit terakhir dari $2^{(2008 + 2009 + 2010)}$. Jadi kita cukup mencari digit terakhir dari $2^{(2008 + 2009 + 2010)}$.

    Soal ini dapat diseleasaikan dengan dua cara.

    - Cara I

      Perhatikan sifat keperiodikan digit satuan dari 2^n dengan n bilangan asli.

      $2^1 = 2$

      $2^2 = 4$

      $2^3 = 8$

      $2^4 = 16$

      $2^5 = 32$

      $2^6 = 64$

      $2^7 = 128$

      $2^8 = 256$

      $\vdots$

      $2^{4k + 1} = \ldots 2$

      $2^{4k + 2} = \ldots 4$

      $2^{4k + 3} = \ldots 8$

      $2^{4k} \quad = \ldots 6$ untuk suatu k bilangan asli.

      Karena $2^{(2008 + 2009 + 2010)} = 2^{6027}$

      $= 2^{4 \, . \, 1506 + 3}$

      $= 2^{4k + 3}$

      Jadi digit terakhir dari $2002^{(2008 + 2009 + 2010)}$ adalah 8.

    - Cara II

      $2^{(2008 + 2009 + 2010)} = 2^{6027}$

Digit terakhir dari 2^{6027} adalah sisa pembagian 2^{6027} oleh 10.

$2^{6027} = 2^{6025 + 2}$

$= 2^2 . 2^{6025}$

$= 2^2 . 2^{5.\ 1205}$

$= 2^2 . 32^{1205}$

$= 2^2 . (3.10 + 2)^{1205}$

$\equiv 2^2 . 2^{1205} \bmod(10)$

$= 2^2 . 2^{5.\ 241} \bmod(10)$

$= 2^2 . 2^{5.\ 240 + 1} \bmod(10)$

$= 2^3 . 2^{5.\ 240} \bmod(10)$

$= 2^3 . 32^{240} \bmod(10)$

$= 2^3 . (3.10 + 2)^{240} \bmod(10)$

$\equiv 2^3 . 2^{240} \bmod(10)$

$= 2^3 . 2^{5.48} \bmod(10)$

$= 2^3 . 32^{48} \bmod(10)$

$= 2^3 . (3.10 + 2)^{48} \bmod(10)$

$\equiv 2^3 . 2^{48} \bmod(10)$

$= 2. 2^{50} \bmod(10)$

$= 2. 2^{5.10} \bmod(10)$

$= 2. 32^{10} \bmod(10)$

$= 2. (3.10 + 2)^{10} \bmod(10)$

$\equiv 2. 2^{10} \bmod(10)$

$= 2. 2^{5.\ 2} \bmod(10)$

$= 2. 32^2 \bmod(10)$

$= 2. (3.10 + 2)^2 \bmod(10)$

$\equiv 2. 2^2 \bmod(10)$

$= 8 \bmod(10)$

Jadi digit terakhir dari $2002^{(2008 + 2009 + 2010)}$ adalah 8.

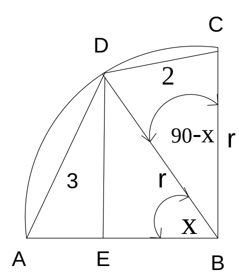
Catatan:

Lihat juga catatan pembahasan nomor 19 uraian versi III Kab/Kota.

20. Karena A dan B mndapatkan alat tulis yang sama, maka A dan B berada pada kelompok yang sama mislnya kelompok I. Karena B dan D mendapatkan alat tulis yang berbeda maka D bukan kelompok I, melainkan lain mislnya kelompok II. Selanjutnya D dan E mendapatkan alat tulis yang berbeda, maka E bukan kelompok II, tapi kelompok I. Kelompok I telah beranggotakan 3 orang yaitu A, B, dan E. Jadi kelompok II terdiri atas C dan D. Jadi yang mendapatkan pensil adalah C dan D.

SOLUSI BAGIAN KEDUA (URAIAN)

1. Pandang seperempat lingkaran dari lingkaran yang dimaksud! Setiap seperempat lingkaran memiliki satu tali busur yang panjangnya 3 cm dan 2 cm.



$$\cos x = \frac{AB^2 + BD^2 - AD^2}{2(AB)(BD)}$$

$$= \frac{r^2 + r^2 - 3^2}{2(r)(r)}$$

$$= \frac{2r^2 - 9}{2r^2}$$

$$\cos (90 - x) = \sin x \Leftrightarrow \frac{BD^2 + BC^2 - CD^2}{2(BD)(BC)} = \frac{DE}{BD}$$

$$\Leftrightarrow \frac{r^2 + r^2 - 2^2}{2(r)(r)} = \frac{DE}{r}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2r^2 - 4}{2r^2} = \frac{DE}{r}$$

$$\Leftrightarrow DE = \frac{2r^2 - 4}{2r}$$

$$= r - \frac{2}{r}$$

$$EB = \sqrt{BD^2 - DE^2}$$

$$= \sqrt{r^2 - \left(r - \frac{2}{r}\right)^2}$$

$$= \sqrt{r^2 - \left(r^2 - 4 + \frac{4}{r^2}\right)^2}$$

$$= \sqrt{4 - \frac{4}{r^2}}$$

$$= 2\sqrt{1 - \frac{1}{r^2}}$$

$$AE = AB - EB$$

$$= r - 2\sqrt{1 - \frac{1}{r^2}}$$

Pandang segitiga ADE!

$$AE^2 + DE^2 = 9 \Leftrightarrow \left(r - 2\sqrt{1 - \frac{1}{r^2}}\right)^2 + \left(r - \frac{2}{r}\right)^2 = 9$$

$$\Leftrightarrow r^2 + 4\left(1 - \frac{1}{r^2}\right) - 4r\sqrt{1 - \frac{1}{r^2}} + r^2 - 4 + \frac{4}{r^2} = 9$$

$$\Leftrightarrow 2r^2 - 4r\sqrt{1 - \frac{1}{r^2}} = 9$$

$$\Leftrightarrow 2r^2 - 9 = 4r\sqrt{1 - \frac{1}{r^2}}$$

$$\Leftrightarrow 4r^4 - 36r^2 + 81 = 16\,r^2\left(1 - \frac{1}{r^2}\right)$$

$$\Leftrightarrow 4r^4 - 36r^2 + 81 = 16\,r^2 - 16$$

$\Leftrightarrow$ $4r^4 - 52r^2 + 97 = 0$

$\Leftrightarrow$ $4(r^2)^2 - 52(r^2) + 97 = 0$

$$\Leftrightarrow r^2 = \frac{52 \pm \sqrt{52^2 - 4.4.97}}{2.4}$$

$$= \frac{13 \pm 6\sqrt{2}}{2}$$

Luas segi-8 = 4 x Luas segiempat ABCD

= 4 x [Luas segitiga ABD + Luas segitiga CBD]

$= 4 \text{ x } [\frac{1}{2}(AB)(BD)(\sin x) + \frac{1}{2}(DB)(CB)(\sin(90 - x))]$

Catatan : sin (90 - x) = cos x

Luas segi-8 $= 4 \text{ x } [\frac{1}{2} r^2 \frac{2r^2 - 4}{2r^2} + \frac{1}{2} r^2 \frac{2r^2 - 9}{2r^2}]$

$= 4r^2 - 13$

$= 4\left(\frac{13 \pm 6\sqrt{2}}{2}\right) - 13$

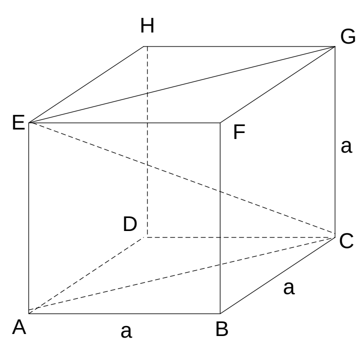
$= 26 \pm 12\sqrt{6} - 13$

$= 13 \pm 12\sqrt{6}$

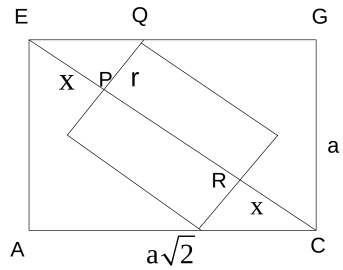
Karena luas harus bernilai positif, maka

Luas segi-8 = $13 + 12\sqrt{6}$ satuan luas.

2. Perhatikan kubus ABCD-EFGH di bawah ini, dimana CE adalah diagonal ruangnya sekaligus merupakan umbu tabung.



Pandang diagonal bidang ACGE!



Perhatikan bahwa PR adalah sumbu (tinggi) tabung.

PR = CE – (EP + CR) $\Leftrightarrow$ t = a$\sqrt{3}$ - 2x

Perhatikan juga bahwa segitiga ACE dan PEQ sebangun.

Maka berlaku $\frac{AE}{AC} = \frac{PQ}{PE} \Leftrightarrow \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{r}{x}$

$$\Leftrightarrow r = \frac{x}{\sqrt{2}}$$

Luas bidang lengkung tabung,

$$L(r, t) = 2\pi r t \Leftrightarrow L(x) = 2\pi \left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)(a\sqrt{3} - 2x)$$

$$= \sqrt{6}\pi a x - 2\sqrt{2}\pi x^2$$

L(x) akan maksimum jika turunan pertamanya sama dengan nol.

$$L'(x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{6}\pi a - 4\sqrt{2}\pi x = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{a\sqrt{3}}{4}$$

$$r = \frac{x}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{a\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}$$

$$= \frac{a\sqrt{6}}{8}$$

Jadi agar luas bidang lengkung tabung maksimum, maka panjang jari-jarinya haruslah $\frac{a\sqrt{6}}{8}$ cm.

3. $(a + b)(b + c)(c + a) = (ab + ac + b^2 + bc)(a + c)$

$$= a^2b + abc + a^2c + ac^2 + ab^2 + b^2c + abc + bc^2$$

$$= c(a^2 + b^2) + b(a^2 + c^2) + a(b^2 + c^2) + 2abc$$

Perhatikan bahwa untuk setiap bilangan real a dan b berlaku

$(a - b)^2 \geq 0 \Leftrightarrow a^2 + b^2 \geq 2ab$

Dengan cara yang sama akan diperoleh

$a^2 + c^2 \geq 2ac$

$b^2 + c^2 \geq 2ac$

Akibatnya

$c(a^2 + b^2) + b(a^2 + c^2) + a(b^2 + c^2) + 2abc \geq 6abc + 2abc$

$\Leftrightarrow c(a^2 + b^2) + b(a^2 + c^2) + a(b^2 + c^2) + 2abc \geq 8abc$

Jadi terbukti bahwa $(a + b)(b + c)(c + a) \geq 8abc$.

4. Misalkan A(n) adalah bilangan terbesar yang mungkin tersisa.

Akan dibuktikan

A(n) = n **jika dan hanya jika** untuk setiap n atau (n - 1) kelipatan 4

- **Bukti ($\Leftarrow$)**

  untuk setiap n atau (n - 1) $\in$ 4k $\Rightarrow$ A(n) = n

  (1). Kasus n $\in$ 4k

  Pandang barisan berikut ini

  $\underbrace{1,\ 2,\ 3,\ 4,}_{\text{Kelompok 1}}\quad \underbrace{5,\ 6,\ 7,\ 8,}_{\text{Kelompok 2}}\quad \ldots\quad , \underbrace{(n - 3), (n - 2), (n - 1), (n)}_{\text{Kelompok } \frac{n}{4}}$

  Jika n = 4, algoritmanya sebagai berikut :

  Selisihkan 1 dengan 3 sehingga diperoleh selisih, $S_1 = 3 - 1 = 2$.

  Kemudian selisihkan S_1 dengan 2 (bagian dari 1, 2, 3, 4) sehingga diperoleh selisih, $S_2 = 2 - 2 = 0$.

  Terakhir selisihkan S_2 dengan 4 sehingga diperoleh selisih, $S_3 = 4 - 0$

  4 = A(4) = A(n).

  Jadi terbukti A(n) adalah bilangan terbesar yang mungkin tersia.

Jika n > 4, algoritmanya sebagai berikut :

Misalkan keempat bilangan pada setiap kelompok adalah a, b, c, dan d. Dimana a < b < c < d.

Selisihkan bilangan yang tersisa pada kelompok sebelumnya yaitu (a - 1) dengan a sehingga diperoleh S_1 = a – (a - 1) = 1.

Kemudian selisihkan b dengan c sehingga diperoleh S_2 = c – b = (a + 2) – (a + 1) = 1.

Selanjutnya selisihkan S_1 dengan S_2 sehingga diperoleh $S_3 = S_2 - S_1$ = 1 – 1 = 0.

Terakhir selisihkan S_3 dengan d sehingga diperoleh $S_4 = d - S_3 = d - 0 = d$.

Jadi terbukti A(n) adalah bilangan terbesar yang mungkin tersia.

(2). Kasus (n – 1) $\in$ 4k

Jika n – 1 = 4k maka n = 4k + 1

Pandang barisan berikut ini

$\underline{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5}\quad \underline{6,\ 7,\ 8,\ 9,}\quad \ldots\quad ,\underline{(n-3), (n-2), (n-1), (n)}$

Kelompok 1 Kelompok 2 Kelompok $\frac{n-1}{4}$

Jika n = 5, algoritmanya sebagai berikut :

Selisihkan 1 dengan 2 sehingga diperoleh S_1 = 2 - 1 = 1.

Kemudian selisihkan 3 dengan 4 sehingga diperoleh S_2 = 4 - 3 = 1.

Selanjutnya selisihkan S_1 dengan S_2 sehingga diperoleh $S_3 = S_2 - S_1$ = 1 – 1 = 0.

Terakhir selisihkan S_3 dengan 5 sehingga diperoleh $S_4 = 5 - S_3 = 5 - 0 = 5$ = A(5) = A(n)

Jadi terbukti A(n) adalah bilangan terbesar yang mungkin tersia.

Jika n > 5, algoritmanya sama seperti (n > 4)

Jadi untuk setiap n atau (n - 1) kelipatan 4 $\Rightarrow$ A(n) = n

Kita telah membuktikan bagian ($\Leftarrow$).

- **Bukti ($\Rightarrow$)**

  A(n) = n $\Rightarrow$ untuk setiap n atau (n - 1) $\in$ 4k

  Pernyatan tersebut ekivalen dengan kontraposisinya yaitu

  Terdapat n atau (n - 1) $\notin$ 4k $\Rightarrow$ A(n) $\neq$ n

  Karena ada kata "terdapat", maka kita cukup membuktikan satu contoh saja.

  Contoh

  n = 4k + 2, misalnya n = 2.

  Barisannya adalah 1, 2

  Hanya terdapat Satu selisih yang mungkin yaitu 2 – 1 = 1 = A(n) $\neq$ n = 2

  Jadi A(n) = n $\Rightarrow$ untuk setiap n atau (n - 1) $\in$ 4k

  Kita telah membuktikan bagian **($\Rightarrow$)**

Kesimpulan :

Karena untuk setiap n atau (n - 1) kelipatan 4 $\Rightarrow$ A(n) = n dan A(n) = n $\Rightarrow$ untuk setiap n atau (n - 1) $\in$ 4k, maka

A(n) = n $\Leftrightarrow$ untuk setiap n atau (n - 1) kelipatan 4.

Catatan :

Kontraposisi dari P$\Rightarrow$Q adalah $\neg$ Q$\Rightarrow$ $\neg$ P

5. Akan ditunjukkan $x^n + y^n = z^n$ untuk suatu x, y, z, dan n bilangan asli maka. x, y, dan z semuanya lebih besar dari n.

   Perhatikan bahwa implikasi di atas ekivalen dengan kontraposisinya yaitu

   Jika di antara x, y, dan z terdapat yang lebih kecil atau sama dengan n maka $x^n + y^n \neq z^n$ untuk setiap x, y, z, dan n bilangan asli.

   Misalkan z = n

   x < n $\Leftrightarrow$ x – a = n $\Leftrightarrow$ x = n + a untuk suatu a bilangan asli.

   y < n $\Leftrightarrow$ y – b = n $\Leftrightarrow$ y = n + b untuk suatu b bilangan asli.

$x^n + y^n = (n + a)^n + (n + b)^n$

Menurut Teorema Binomial Newton,

$(n + a)^n = C_0^n n^n + C_1^n n^{n-1} a + C_2^n n^{n-2} a^2 + ... + C_n^n a^n$

$$(n + b)^n = C_0^n n^n + C_1^n n^{n-1} b + C_2^n n^{n-2} b^2 + \ldots + C_n^n b^n$$

$$x^n + y^n = 2\, C_0^n n^n + C_1^n n^{n-1}\left(a + b\right) + C_2^n n^{n-2}\left(a^2 + b^2\right) + \ldots + C_n^n\left(a^n + b^n\right)$$

$$z^n = n^n$$

$$= C_n^n n^n$$

Jadi $x^n + y^n \neq z^n$ untuk setiap x, y, z, dan n bilangan asli.

VERSI II

DEPARTEMEN PENDIDIKAN NASIONAL
OLIMPIADE MATEMATIKA SMA
TINGKAT PROVINSI

SOAL BAGIAN PERTAMA (ISIAN SINGKAT)

1. Jika a adalah sebuah bilangan rasional dan b sebuah bilangan tak rasional, maka a + b adalah bilangan ...

2. Jumlah sepuluh bilangan prima pertama adalah …

3. Banyaknya himpunan X yang memenuhi $\{1, 2\} \subseteq X \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5\}$ adalah …

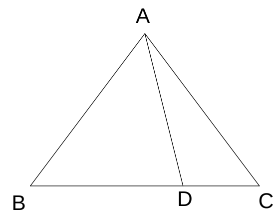
4. Jika N = 123456789101112 ... 9899100, maka tiga angka pertama dari $\sqrt{N}$ adalah ...

5. Misalkan ABCD sebuah trapesium dengan BC // AD. Titik-titik P dan R berturut-turut adalah titik tengah sisi AB dan CD. Titik Q terletak pada sisi BC sehingga BQ : QC = 3 : 1, sedangkan titik S terletak pada sisi AD sehingga AS : SD = 1 : 3. Maka rasio luas segiempat PQRS terhadap luas trapesium adalah ...

6. Bilangan tiga-angka terkecil yang merupakan bilangan kuadrat sempurna dan bilangan kubik (pangkat tiga) sempurna sekaligus adalah ...

7. Jika a dan b adalah dua bilangan asli , $a \le b$, sehingga $\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{a}}{\sqrt{4}+\sqrt{b}}$ adalah bilangan rasional, maka pasangan terurut (a, b) = ...

8. Perhatikan gambar di bawah ini !



Jika AB = AC , AD = BD dan $\angle DAC = 39^0$. Maka $\angle BAD = \ldots$

9. Ketika mendaki sebuah bukit, seseorang berjalan dengan kecepatan 1,5 km/jam. Ketika menuruni bukit tersebut, ia berjalan tiga kali lebih cepat. Jika waktu yang dibutuhkan untuk melakukan perjalanan bolak-balik dari kaki bukit ke puncak bukit dan kembali kekaki bukit adalah 6 jam, maka jarak antara kaki bukit dan puncak bukit (dalam km) adalah ...

10. Sebuah segienam dan sebuah segtiga sama sisi mempunyai keliling yang sama. Jika luas segitiga adalah $\sqrt{3}$, maka luas segienam adalah ...

11. Dua buah dadu dilemparkan secara bersamaan . Peluang jumlah kedua angka yang muncul adalah bilangan prima adalah ...

12. Keliling sebuah segtiga sama sisi adalah p. Misalkan Q sebuah titik di dalam segtiga tesebut. Jika jumlah jarak dari Q ke ketiga sisi segtiga adalah s, ,maka dinyatakan dalam s, p = ...

13. Barisan bilangan asli (a, b, c), dengan $a \geq b \geq c$, yang memenuhi sekaligus kdua persamaan $ab + bc = 44$ dan $ac + bc = 23$ adalah ...

14. Empat titik berbeda terletak pada sebuah garis. Jarak antara sebarang dua titik dapat diurutkan menjadi barisan 1, 4, 5, k, 9, 10. Maka k = ...

15. Sebuah kelompok terdiri atas 2005 anggota. Setiap anggota memgang tepat satu rahasia. Setiap anggota dapat mengirim surat kepada anggota lain manapun untuk menyampaikan seluruh rahasia yang dipegangnya. Banyaknya surat minimum yang perlu dikirim agar semua angota kelompok mengetahui seluruh rahasia adalah ...

16. Banyaknya pasangan bilangan bulat (x, y) yang memenuhi persamaan 2xy - 5x + y = 55 adalah ...

17. Himpunan A dan B saling lepas dan $A \cup B = \{1, 2, 3, \ldots, 9\}$. Hasil perkalian semua unsur A sama dengan jumlah semua unsur B. Unsur terkecil B adalah …

18. Bentuk sederhana dari $\frac{\left(2^3-1\right)\left(3^3-1\right)\left(4^3-1\right)...\left(100^3-1\right)}{\left(2^3+1\right)\left(3^3+1\right)\left(4^3+1\right)...\left(100^3+1\right)}$ adalah …

19. Misalkan ABCD adalah limas segitiga beraturan, yaitu bangun ruang bersisi empat yang berbentuk segitiga sama sisi. Misalkan S adalah titik tengah rusuk CD. Jika panjang rusuk ABCD adalah 1 satuan panjang, maka panjang ST adalah ...

20. Untuk sembarang bilangan real a, notasi $\lfloor a \rfloor$ menyatakan bilangan bulat terbesar yang lebih kecil aau sama dengan a. Jika x bilangan real yang memenuhi $\lfloor x + \sqrt{3} \rfloor = \lfloor x \rfloor + \lfloor \sqrt{3} \rfloor$, maka $x - \lfloor x \rfloor$ tidak akan lebih besar dari …

SOAL BAGIAN KEDUA (URAIAN)

1. Panjang sisi terbesar pada segiempat talibusur ABCD adalah a, sedangkan jari-jari lingkaran luar segitiga ACD adalah 1. Tentukan nilai terkecil yang mungkin bagi

a. Segiempat ABCD yang bagaimana yang memberkan nilai a sama dengan nilai terkecil tersebut?

2. Di dalam sebuah kotak terdapat 4 buah bola, masing-masing bernomor 1, 2, 3, dan 4. Anggi mengambil sebuah bola secara acak, mencatat nomornya, dan mengembalikannya ke dalam kotak. Hal yang sama ia lakukan sebanyak 4 kali. Misalkan jumlah dari keempat nomor yang terambil adalah 12. Berapakah peluang bahwa bola yang terambil selalu bernomor 3?

3. Jika a, b, dan c adalah akar-akar persamaan $x^3 - x - 1 = 0$, tentukan $\frac{1+a}{1-a} + \frac{1+b}{1-b} + \frac{1+c}{1-c}$

4. Panjang ketiga sisi a, b, c, dengan $a \le b \le c$, sebuah segitiga siki-siku adalah bilangan bulat. Tentukan semua barisan (a, b, c) agar nilai keliling dan nilai luas segitiga tersebut sama.

5. Misalkan A dan B dua himpunan , masing-masing beranggotakan bilangan-bilangan asli yang berurutan. Jumlah rata-rata aritmatika unsur-unsur A dan rata-rata aritmatika unsur-unsur B adalah 5002. Jika $A \cap B = \{2005\}$, tentukan unsur terbsar yang mungkin dari himpunan $A \cup B$.

SOLUSI BAGIAN PERTAMA (ISIAN SINGKAT)

1. Andaikan a + b = c bilangan rasional, maka
   b = c – a bilangan rasional. Hal ini kontradiksi dengan pengandaian semula bahwa b irasional.
   Jadi a + b haruslah bilangan irasional.

2. Jumlah sepuluh bilangan prima yang pertama adalah

2 + 3 + 4 + 5 + 7 + 11 + 13 + 17 + 19 + 23 = 12

3. Himpunan bilangan X adalah himpunan yang memuat minimal unsur 1 dan 2 serta maksimal memuat unsur 1, 2, 3, 4, dan 5. Himpunan X bisa terdiri atas 2 unur, 3 unsur, sampai 5 unsur dengan unsur yang telah ditentukan.

   - Banyaknya himpunan X yang terdiri atas 2 unsur = 1.
   - Banyaknya himpunan X yang terdiri atas 3 unsur = C_1^3 = 3.
   - Banyaknya himpunan X yang terdiri atas 4 unsur = C_2^3 = 3.
   - Banyaknya himpunan X yang terdiri atas 5 unsur = C_3^3 = 1.

   Jadi banyaknya himpunan X yang memenuhi $\{1, 2\} \subseteq X \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5\}$ adalah 1 + 3 + 3 1 = 8.

   Dengan metode lain kita bisa menganggap bahwa banyaknya himpunan X yang memenuhi $\{1, 2\} \subseteq X \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5\}$ sama dengan mencari banyaknya himpunan bagian dari {3, 4, 5} yaitu sebanyak $2^3 = 8$.

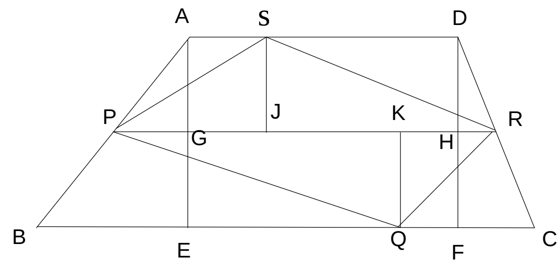
4. 123456789101112 ... 9899100

3 x 3	9
	334
65 x 5	325
	956
701 x 1	701
	25578

⋮

Jadi tiga angka pertama dari $\sqrt{N}$ adalah 351.

5. Perhatikan gambar berikut ini!



Karena titik P dan R merupakan titik tengah AB dan CD, maka

BE = 2PG dan FC = 2HR.

Selanjutnya

$$
\begin{aligned}
AD + BC &= GH + (EF + BE + FC) \\
&= (GH + EF) + (BE + FC) \\
&= 2GH + 2PG + 2HR \\
&= 2(GH + PG + HR) \\
&= 2PR
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{Luas segiempat PQRS} &= \text{Luas segitiga PRS} + \text{Luas segitiga PQR} \\
&= \frac{1}{2}(PR)(SJ) + \frac{1}{2}(PR)(KQ) \\
&= \frac{1}{2}(PR)(SJ + KQ)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{Luas trapesium ABCD} &= \frac{1}{2}(AD + BC)(SJ + KQ) \\
&= \frac{1}{2}(2PR)(SJ + KQ) \\
&= (PR)(SJ + KQ)
\end{aligned}
$$

Jadi rasio luas segiempat PQRS terhadap luas trapesium adalah

$$\frac{\frac{1}{2}(PR)(SJ + KQ)}{(PR)(SJ + KQ)} = \frac{1}{2} = 1 : 2.$$

6. Bilangan tiga-angka yang merupakan bilangan kubik sempurna adalah

   $5^3 = 125$, $6^3 = 216$, $7^3 = 343$, $8^3 = 512$, dan $9^3 = 729$

Diantara kelima bilangan itu yang merupakan kuadrat sempurna adalah 9^3 = 729 = 9^3 = 27.

7. Misalkan $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{a}}{\sqrt{4}+\sqrt{b}} = \frac{p}{q}$ dengan p dan q bilangan asli. Oleh karena itu,

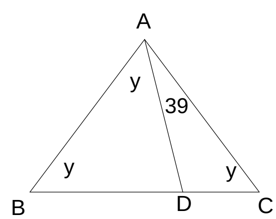
$$2p + \sqrt{b}\,p = \sqrt{3}\,q + \sqrt{a}\,q \Leftrightarrow 2p - \sqrt{3}\,q = \sqrt{a}\,q - \sqrt{b}\,p$$
$$\Leftrightarrow 4p^2 - 4pq\sqrt{3} + 3q^2 = aq^2 - 2pq\sqrt{ab} + bp^2$$
$$\Leftrightarrow 2pq(\sqrt{ab} - 2\sqrt{3}) = aq^2 + bp^2 - 4p^2 - 3q^2$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{ab} - 2\sqrt{3} = \frac{aq^2 + bp^2 - 4p^2 - 3q^2}{2pq}$$

Karena $\frac{aq^2 + bp^2 - 4p^2 - 3q^2}{2pq}$ rasional, maka $\sqrt{ab} - 2\sqrt{3}$ merupakan bilangan rasional. Supaya $\sqrt{ab} - 2\sqrt{3}$ rasional, maka haruslah $\sqrt{ab} - 2\sqrt{3} = 0$.

Jadi $\sqrt{ab} = 2\sqrt{3} \Leftrightarrow ab = 12$.

Karena $a \leq b$, maka kemungkinan untuk (a, b) adalah (1, 12), (2, 6), atau (3, 4). Setelah dicocokkan dengan soal, ternyata yang memenuhi adalah (1, 12).

8. Perhatikan gambar berikut ini!



Misalkan $\angle BAD = y$

Pada segitiga ABD, AD = BD maka $\angle ABD = \angle BAD = y$

Pada segitiga ABC, AB = AC maka $\angle ACD = \angle ABD = y$

Selanjutnya

$$\angle ABD + \angle BAD + \angle ADB = 180^0 \Leftrightarrow y + y + \angle ADB = 180^0$$
$$\Leftrightarrow \angle ADB = 180^0 - 2y$$
$$\angle CAD + \angle ACD + \angle ADC = 180^0 \Leftrightarrow 39^0 + y + \angle ADC = 180^0$$

$$\Leftrightarrow \angle ADC = 141^0 - y$$

Karena $\angle$ADB dan $\angle$ADC saling berpelurus, maka

$$\angle ADB + \angle ADC = 180^0 \Leftrightarrow 180^0 - 2y + 141^0 - y = 180^0$$

$$\Leftrightarrow 3y = 141^0$$

$$\Leftrightarrow y = 47^0$$

Jadi $\angle$BAD = 47^0.

9. Karena kecepatan menuruni bukit 3 kali kecepatan mendaki bukit, maka waktu yang diperlukan untuk menuruni bukit adalah $\frac{1}{3}$ kali waktu yang diperlukan untuk mendaki bukit.

   Misalkan waktu yang diperlukan untuk mendaki bukit adalah t, maka

   $$t + \frac{1}{3}t = 6 \text{ jam} \Leftrightarrow \frac{4}{3}t = 6 \text{ jam}$$

   $$\Leftrightarrow t = \frac{9}{2} \text{ jam}$$

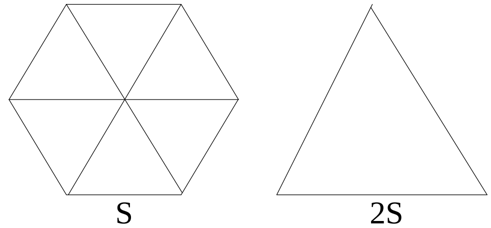
   $$v = \frac{s}{t} \Leftrightarrow s = v\,t$$

   $$= \left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{9}{2}\right) \text{ km}$$

   $$= \frac{27}{4} \text{ km}$$

   Jadi jarak antara kaki bukit dan puncak bukit adalah $\frac{27}{4}$ km.

10. Perhatikan gambar berikut ini!



Luas segitiga besar = $\sqrt{3} \Leftrightarrow \frac{1}{2}(2S)(2S)\sin 60^0 = \sqrt{3}$

$$\Leftrightarrow S^2\sqrt{3} = \sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow S^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow S = 1$$

Luas segienam = 6 (Luas segitiga kecil)

$$= 6\left(\frac{1}{2} S^2 \sin 60^0\right)$$

$$= 6\left(\frac{1}{2} .1 . \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

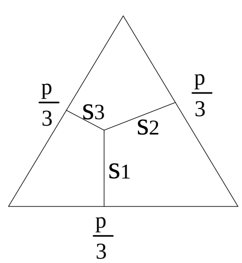
$$= \frac{3}{2}\sqrt{3}$$

11. Perhatikan tabel jumlah dua mata dadu berikut ini!

Dadu 2 / Dadu 1	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Peluang jumlah kedua angka adalah bilangan prima adalah $\frac{15}{36} = \frac{5}{12}$.

12. Misalkan $s = s_1 + s_2 + s_3$



Luas segitiga = $\frac{1}{2}\left(\frac{p}{3}\right)\left(\frac{p}{3}\right)(\sin 60^0)$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\left(\frac{p}{3}\right)(s_1) + \frac{1}{2}\left(\frac{p}{3}\right)(s_2) + \frac{1}{2}\left(\frac{p}{3}\right)(s_3) = \frac{1}{2}\left(\frac{p}{3}\right)\left(\frac{p}{3}\right)(\sin 60^0)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\left(\frac{p}{3}\right)(s_1 + s_2 + s_3) = \frac{1}{2}\left(\frac{p}{3}\right)\left(\frac{p}{3}\right)(\sin 60^0)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\left(\frac{p}{3}\right)(s) = \frac{1}{2}\left(\frac{p}{3}\right)\left(\frac{p}{3}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow s = \frac{p\sqrt{3}}{6}$$

$$\Leftrightarrow p = 2s\sqrt{3}$$

13. ab + bc = 44 . . . (1)

ac + bc = 23 . . . (2)

Dari persamaan (1) dan (2) diperoleh

ab + bc = 44

ac + bc = 23

--------------- -

ab – ac = 21 $\Leftrightarrow$ a(b - c) = 21

Karena a, b, dan c semuanya bilangan asli, maka haruslah nilai a merupakan faktor positif dari 21 yaitu 21, 7 , 3, atau 1.

Jika a = 21

Maka b – c = 1 $\Leftrightarrow$ c = b – 1 . . . (3)

Dari persamaan (1) dan (3) diperoleh

ab + bc = 44 $\Leftrightarrow$ b(a + c) = 44

$\Leftrightarrow$ b(21 + b - 1) = 44

$\Leftrightarrow$ $b^2 + 20b - 44 = 0$

$\Leftrightarrow$ (b - 2)(b + 22) = 0

$\Leftrightarrow$ b = 2 atau b = - 22

Karena b bilangan asli, maka b = 2

Dari persamaan (3) diperoleh

c = b – 1 $\Leftrightarrow$ c = 2 – 1 = 1

Jadi a = 21, b = 2, dan c = 1

Jika a = 7

Maka $b - c = 3 \Leftrightarrow c = b - 3$ . . . (3)

Dari persamaan (1) dan (3) diperoleh

$ab + bc = 44 \Leftrightarrow b(a + c) = 44$

$\Leftrightarrow b(7 + b - 3) = 44$

$\Leftrightarrow b(b + 4) = 44$

$\Leftrightarrow b^2 + 4b - 44 = 0$

Nilai b bukan bilangan asli.

Jika a = 3

Maka $b - c = 7 \Leftrightarrow c = b - 7$ . . . (3)

Dari persamaan (1) dan (3) diperoleh

$ab + bc = 44 \Leftrightarrow b(a + c) = 44$

$\Leftrightarrow b(3 + b - 7) = 44$

$\Leftrightarrow b(b - 4) = 44$

$\Leftrightarrow b^2 - 4b - 44 = 0$

Nilai b bukan bilangan asli.

Jika a = 1

Maka $b - c = 21 \Leftrightarrow c = b - 21$ . . . (3)

Dari persamaan (1) dan (3) diperoleh

$ab + bc = 44 \Leftrightarrow b(a + c) = 44$

$\Leftrightarrow b(1 + b - 21) = 44$

$\Leftrightarrow b(b - 20) = 44$

$\Leftrightarrow b^2 - 20b - 44 = 0$

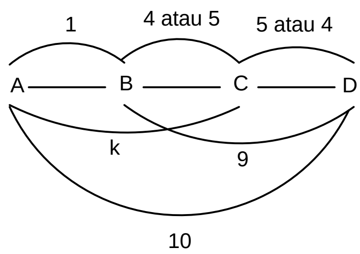
$\Leftrightarrow (b - 22)(b + 2) = 0$

$\Leftrightarrow b = 22$ atau $b = -2$

Karena $a \le b$ dan b bilangan asli, maka tidak ada nilai b yang memenuhi.

Jadi $(a, b, c) = (21, 2, 1)$

14. Misalkan Keempat titik itu adalah A, B, C, dan D.



Karena AD adalah jarak terpanjang, maka AD = 10.

Tanpa mengurangi keumuman, misalkan AB = k dan BD = 9.

Jika BD = 9 maka AB = 1. Akibatnya BC = 4 atau BC = 5.

Jadi k = 1 + 4 = 5 atau k = 1 + 5 = 6.

Untuk kasus AB = 9 dan BD = k akan menghasilkan nilai k = 5 atau k = 6 juga.

15. Misalkan anggota kelompok itu adalah

$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{2005}$.

Agar banyaknya surat yang dikirim minimum, maka tanpa mengurangi keumuman misalkan $a_2, a_3, \ldots, a_{2005}$ masing-masing mengirimkan pesannya kepada a_1 sehingga telah terjadi 2004 pengiriman surat. Akibatnya a_1 mengetahui 2005 rahasia yang ada. Selanjutnya a_1 mengirimkan 2005 rahasia tersebut ke 2004 anggota lainnya. Jadi sekarang telah terkirim sebanyak 2004 + 2004 = 4008 buah pesan.

16. $2xy - 5x + y = 55 \Leftrightarrow 4xy - 10x + 2y = 110$

$\Leftrightarrow (2x + 1)(2y - 5) + 5 = 110$

$\Leftrightarrow (2x + 1)(2y - 5) = 105$

Karena x dan y bilangan bulat, maka (2x + 1) dan (2y - 5) harus bilangan bulat.

Agar (2x + 1) dan (2y - 5) bulat, maka (2x + 1) dan (2y - 5) harus merupakan faktor dari 105 yaitu ± 1, ± 3, ± 5, ± 7, ± 15, ± 21, ± 35, ± 105. Sehingga menghasilkan 16 kemungkinan, yaitu

2x + 1	2y - 5	x	y
1	105	0	55
- 1	- 105	- 1	- 50
3	35	1	20
- 3	- 35	- 2	- 15
5	21	2	13
- 5	- 21	- 3	- 8
7	15	3	10
- 7	- 15	- 4	- 5
15	7	7	6
- 15	- 7	- 8	- 1
21	5	10	5
- 21	- 5	- 11	0
35	3	17	4
- 35	- 3	- 18	- 1
105	1	52	3
- 105	- 1	- 53	2

17. Perhatikan bahwa 1 + 2 + 3+ … + 9 = 45.

Hasil perkalian semua unsur A = Jumlah semua unsur B

= 45 - Jumlah semua unsur A

Maka A = {1, 4, 8}, karena (1)(4)(8) = 32 = 45 – (1 + 4 + 8)

Akibatnya B = $(A \cup B) \setminus A$

= $\{1, 2, 3, \ldots, 9\} \setminus \{1, 4, 8\}$

= {2, 3, 5, 6, 7, 9}

Jadi unsur terkecil B adalah 2.

18. Perhatikan bahwa setiap suku pada pembilang berbentuk $x^3 - 1$ dan pada penyebut berbentuk $x^3 + 1$.

Dengan $x^3 - 1 = (x^2 + x + 1)(x - 1)$

$x^3 + 1 = (x^2 - x + 1)(x + 1)$

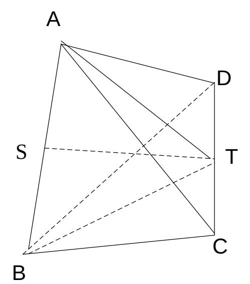
Jadi

$$\frac{(2^3-1)(3^3-1)(4^3-1)\ldots(100^3-1)}{(2^3+1)(3^3+1)(4^3+1)\ldots(100^3+1)} = \frac{7.1}{3.3}.\frac{13.2}{7.4}.\frac{21.3}{13.5}.\frac{31.4}{21.6}\ldots\frac{(98^2+98+1)97}{(98^2-98+1)99}.\frac{(99^2+99+1)98}{(99^2-99+1)100}.\frac{(100^2+100+1)99}{(100^2-100+1)101}$$

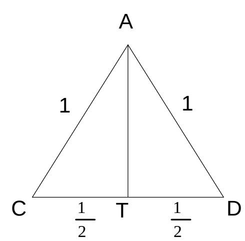
$$= \frac{(1)(2)}{3}.\frac{(100^2+100+1)}{(100)(101)}$$

$$= \frac{3367}{5050}$$

19. Perhatikan gambar berikut ini!



Pandang segitiga ACD !



$$AT = \sqrt{AC^2 - CT^2}$$

$$= \sqrt{1^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{3}{4}}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{3}$$

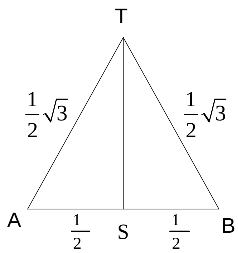
Karena segitiga BCD kongruen dengan segitiga ACD,

Maka BT = AT

$$= \frac{1}{2}\sqrt{3}$$

Selanjutnya pandang segitiga ATB !

Karena BT = AT, maka segitiga ATB sama kaki.



$$TS = \sqrt{AT^2 - AS^2}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{2}$$

20. $\lfloor x + \sqrt{3} \rfloor = \lfloor x \rfloor + \lfloor \sqrt{3} \rfloor$

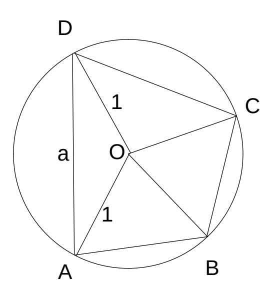
$$= \lfloor x \rfloor + 1$$

$$= \lfloor x + 1 \rfloor$$

Agar $\lfloor x + \sqrt{3} \rfloor = \lfloor x + 1 \rfloor$, maka digit desimal dari x tidak boleh melebihi 2 - $\sqrt{3}$. Jadi x - $\lfloor x \rfloor$ tidak akan lebih besar dari 2 – $\sqrt{3}$.

SOLUSI BAGIAN KEDUA (URAIAN)

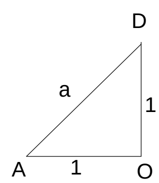
1. Perhatikan gambar berikut ini!



Misalkan a adalah tali busur terpanjang. Perhatikan bahwa panjang setiap tali busur (sisi segi empat ABCD) berbanding lurus dengan besar sudut yang menghadapinya. Kita dapat meminimumkan panjang a dengan cara meminimumkan besar $\angle$AOD. Andaikan $\angle$AOD diperkecil menjadi lancip ($\angle$AOD < 90^0), maka $\angle$AOB + $\angle$BOC + $\angle$COD > 270^0. Akibatnya minimal salah satu dari $\angle$AOB, $\angle$BOC, atau $\angle$COD besar sudutnya lebih besar dari 90^0. Ini menyebabakan terdapat tali busur yang lebih panjang dari a. Jadi $\angle$AOD tidak boleh lancip.

Andaikan $\angle$AOD = 90^0, maka $\angle$AOB + $\angle$BOC + $\angle$COD = 270^0. Agar $\angle$AOB, $\angle$BOC, dan $\angle$COD tidak akan melebihi $\angle$AOD = 90^0, maka $\angle$AOB, $\angle$BOC, dan $\angle$COD semuanya harus 90^0. Sehingga diperoleh persegi ABCD.

Jadi nilai terkecil yang mungkin untuk a adalah pada saat $\angle$AOD = 90^0



$$a = \sqrt{AO^2 + DO^2}$$
$$= \sqrt{1^2 + 1^2}$$
$$= \sqrt{2}$$

Dan ABCD merupakan suatu persegi.

2. Pengambilan empat bola yang menghasilkan jumlah nomor bola 12 adalah salah satu dari :

(1, 3, 4, 4), (1, 4, 3, 4), (1, 4, 4, 3), (3, 1, 4, 4), (4, 1, 3, 4), (4, 1, 4, 3), (3, 4, 1, 4), (4, 3, 1, 4), (4, 4, 1, 3), (3, 4, 4, 1), (4, 3, 4, 1), (4, 4, 3, 1), (2, 2, 4, 4), (2, 4, 2, 4), (2, 4, 4, 2), (4, 2, 2, 4), (4, 2, 4, 2), (4, 4, 2, 2), (2, 3, 3, 4), (2, 3, 4, 3), (2, 4, 3, 3), (3, 2, 3, 4), (3, 2, 4, 3), (4, 2, 3, 3), (3, 3, 2, 4), (3, 4, 2, 3), (4, 3, 2, 3), (3, 3, 4, 2), (3, 4, 3, 2), (4, 3, 3, 2), (3, 3, 3, 3).

Dengan demikian terdapat 31 cara untuk memperoleh jumlah nomor bola 12 dengan empat pengambilan. Jadi peluang terambilnya bola selalu bernomor 3 adalah $\frac{1}{31}$.

3. Jika a, b, dan c adalah akar-akar persamaan $x^3 - x - 1 = 0$, maka menurut Teorema Vieta,

$a + b + c = \frac{-(0)}{1} = 0$

$ab + ac + bc = \frac{-1}{1} = -1$

$abc = \frac{-(-1)}{1} = 1$

$$\frac{1+a}{1-a}+\frac{1+b}{1-b}+\frac{1+c}{1-c}=\frac{(1+a)(1-b)(1-c)+(1+b)(1-a)(1-c)+(1+c)(1-a)(1-b)}{(1-a)(1-b)(1-c)}$$

$$= \frac{3-(a+b+c)-(ab+ac+bc)+3abc}{1-(a+b+c)+(ab+ac+bc)-abc}$$

$$= \frac{3-(0)-(-1)+3(1)}{1-(0)+(-1)-1}$$

$$= \frac{7}{-1}$$

$$= -7$$

Catatan

Bukti Teorema Vieta

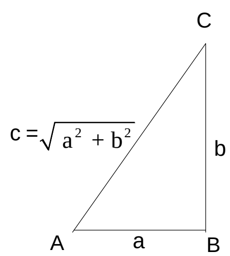
Misalkan x_1, x_2, dan x_3 adalah akar-akar dari persamaan kubik $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$. Maka

$$\begin{aligned}
ax^3 + bx^2 + cx + d &= a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \\
&= a[(x - x_1)(x^2 - (x_2 + x_3)x + x_2x_3)] \\
&= a[x^3 - (x_1 + x_2 + x_3)x^2 + (x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)x - x_1x_2x_3] \\
&= ax^3 - a(x_1 + x_2 + x_3)x^2 + a(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)x - ax_1x_2x_3
\end{aligned}$$

Jadi

- $-a(x_1 + x_2 + x_3)x^2 = bx^2 \Leftrightarrow x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a}$
- $a(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)x = cx \Leftrightarrow x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \frac{c}{a}$
- $-ax_1x_2x_3 = d \Leftrightarrow x_1x_2x_3 = -\frac{d}{a}$

4. Misalkan L dan K masing- masing menyatakan luas dan keliling segitiga ABC.



Karena besar luas dan keliling segitiga ABC sama, maka

$$L = K \Leftrightarrow \frac{1}{2}ab = a + b + c$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}ab = a + b + \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}ab - (a + b) = \sqrt{a^2 + b^2} \quad \text{(Kedua ruas dikuadratkan)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(ab)^2}{4} + (a^2 + b^2) + 2ab - ab(a + b) = a^2 + b^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{(ab)^2}{4} + 2ab - ab(a + b) = 0 \quad \text{(Kedua ruas dikalikan dengan 4)}$$

$$\Leftrightarrow (ab)^2 + 8ab - 4ab(a + b) = 0$$

$$\Leftrightarrow ab[ab + 8 - 4(a + b)] = 0$$

$$\Leftrightarrow ab = 0 \text{ atau } ab + 8 - 4(a + b) = 0$$

ab = 0 tidak mungkin karena a dan b keduanya harus bilangan asli.

$$ab + 8 - 4(a + b) = 0 \Leftrightarrow 4a + 4b - ab = 8$$

$$\Leftrightarrow (a - 4)(-b + 4) + 16 = 8$$

$$\Leftrightarrow (a - 4)(-b + 4) = -8 \quad \text{(Kalikan dengan } -1\text{)}$$

$$\Leftrightarrow (a - 4)(b - 4) = 8$$

Karena a dan bilangan asli, maka (a - 4) dan (b - 4) harus bilangan asli. Agar (a - 4) bilangan asli, maka (a - 4) harus merupakan faktor dari 8 yaitu ± 1, ± 2, ± 4, atau ± 8.

- Jika $a - 4 = -1 \Rightarrow a = 3$

  Maka $b - 4 = -8 \Rightarrow b = -4$

  Tidak memenuhi karena b bukan bilangan asli.

- Jika $a - 4 = 1 \Rightarrow a = 5$

  Maka $b - 4 = 8 \Rightarrow b = 12$

  $c = \sqrt{a^2 + b^2}$

  $= \sqrt{5^2 + 12^2}$

  $= \sqrt{169}$

  $= 13$

  Dengan $5 \leq 12 \leq 13 \Leftrightarrow a \leq b \leq c$.

- Jika $a - 4 = -2 \Rightarrow a = 2$

  Maka $b - 4 = -4 \Rightarrow b = 0$

  Tidak memenuhi karena b bukan bilangan asli.

- Jika $a - 4 = 2 \Rightarrow a = 6$

  Maka $b - 4 = 4 \Rightarrow b = 8$

  $c = \sqrt{a^2 + b^2}$

  $= \sqrt{6^2 + 8^2}$

  $= \sqrt{100}$

  $= 10$

  Dengan $6 \leq 8 \leq 10 \Leftrightarrow a \leq b \leq c$.

- Jika $a - 4 = -4 \Rightarrow a = 0$

  Tidak memenuhi karena a bukan bilangan asli.

- Jika $a - 4 = 4 \Rightarrow a = 8$

  Maka $b - 4 = 2 \Rightarrow b = 6$

  Tidak memenuhi karena $b < a$.

- Jika $a - 4 = -8 \Rightarrow a = -4$

  Tidak memenuhi karena a bukan bilangan asli.
- Jika $a - 4 = 8 \Rightarrow a = 12$

  Maka $b - 4 = 1 \Rightarrow b = 5$

  Tidak memenuhi karena $b < a$.

Jadi barisan (a, b, c) yang memenuhi semua persyaratan adalah (5, 12, 13) dan (6, 8, 10).

5. Misalkan $A = \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_m\}$

   $B = \{b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n\}$

   Karena $A \cap B = \{2005\}$ dan setiap anggota A dan B adalah bilangan asli yang berurutan, maka haruslah $a_m = b_1 = 2005$.

   Jadi $A \cup B = \{a_1, a_2, a_3, \ldots, 2005, b_2, b_3, \ldots, b_n\}$

   Pada barisan dalam himpunan A, $a_m = 2005 \Leftrightarrow a_1 + (m - 1) = 2005$

   $\Leftrightarrow a_1 = 2006 - m$

   Pada barisan dalam himpunan B, $a_n = b_n \Leftrightarrow b_1 + (n - 1) = b_n$

   $\Leftrightarrow 2005 + (n - 1) = b_n$

   $\Leftrightarrow b_n = 2004 + n$

   Rata-rata aritmatika unsur-unsur A = $\dfrac{\frac{m}{2}\left(a_1 + a_m\right)}{m}$

   $= \dfrac{\left(a_1 + a_m\right)}{2}$

   $= \dfrac{\left(2006 - m + 2005\right)}{2}$

   $= \dfrac{\left(4011 - m\right)}{2}$

   Rata-rata aritmatika unsur-unsur B = $\dfrac{\frac{n}{2}\left(b_1 + b_n\right)}{n}$

   $= \dfrac{\left(b_1 + b_n\right)}{2}$

$$= \frac{(2005 + 2004 + n)}{2}$$

$$= \frac{(4009 + n)}{2}$$

Selanjutnya, jumlah rata-rata aritmatika unsur-unsur A dan rata-rata aritmatika unsur-unsur B = 5002

$$\Leftrightarrow \frac{(4011 - m)}{2} + \frac{(4009 + n)}{2} = 5002$$

$$\Leftrightarrow 8020 + n - m = 10004$$

$$\Leftrightarrow n = 1984 + m$$

Perhatikan bahwa agar b_n maksimum maka n harus maksimum. Nilai n akan maksimum jika m maksimum. Nilai m akan maksimum jika $a_1 = 1$ (Bilangan asli terkecil).

Jika $a_1 = 1$, maka m = 2005.

Akibatnya n = 1984 + 2005

= 3989

Jadi b_n = 2004 + n

= 2004 + 3989

= 5993.

LATIHAN I

DEPARTEMEN PENDIDIKAN NASIONAL
OLIMPIADE MATEMATIKA SMA
TINGKAT PROVINSI

SOAL BAGIAN PERTAMA (ISIAN SINGKAT)

1. Diketahui $y = |x| - 3$, untuk semua $x \in \mathbb{R}$. Jika $x = -2$, berapakah y?

2. Berapakah sisa pembagian $x^{99} + 1$ oleh $x - 1$?

3. Jika diketahui $f(x) = 2x + 1$ dan $g(f(x)) = x^2 + 3x + 1$, berapakah $g(3)$?

4. Bilangan bulat terkecil yang lebih besar atau sama dengan x dituliskan sebagai $\lceil x \rceil$. Berapakah nilai $\left\lceil (-2)^{\frac{1}{3}} \right\rceil + \left\lceil 2^{\frac{1}{3}} \right\rceil$?

5. Berapakah bilangan real x terkecil yang memenuhi sekaligus $x^2 \geq 4$ dan $|x - 1| \leq 2$?

6. Jika diketahui $a + b = 1$ dan $a^2 + b^2 = 2$, berapakah $a^4 + b^4$?

7. Misalkan x dan y bilangan real dan $x^2 + 3xy + y^2 = 60$. Berapakah nilai maksimum yang mungkin untuk xy?

8. Bilangan bulat terbesar manakah yang membagi habis semua bilangan yang berbentuk $m^2 - n^2$, dimana m, n keduanya bilangan bulat ganjil dan $m > n$?

9. Misalkan m dan n bilangan bulat positif yang memenuhi $\frac{1}{m}+\frac{1}{n}=\frac{4}{7}$. Berapakah nilai $m^2 + n^2$?

10. Misalkan $f(x) = x^2 + 3x + 2$ dan S adalah himpunan bilangan bulat {0, 1, 2, 3, …, 25}. Berapakah banyaknya unsur a dari S sehingga f(a) bersisa 0 jika dibagi 6?

11. Misalkan P adalah hasil kali semua bilangan prima yang lebih kecil atau sama dengan 61. Berapa banyakkah bilangan prima diantara ke-58 bilangan P + 2, P + 3, …, P + 59?

12. Jika m = $\frac{5^{15}-1}{5^3-1}$, berapakah faktor prima terkecil dari m?

13. Pada persegi ABCD dibuat segitiga sama sisi CMN dengan M terletak pada AD dan N pada AB. Jika luas persegi tersebut adalah 1 satuan luas, berapakah luas segitiga CMN?

14. Pada segitiga ABC, garis yang membagi dua sama besar $\angle$ABC dan garis yang membagi dua sama besar $\angle$ACB berpotongan di titik O. Melalui O dibuat garis sejajar dengan BC yang memotong AB di M dan AC di N. Jika panjang AB = 12, BC = 24, dan AC = 18, berapakah keliling segitiga AMN?

15. Diberikan segitiga ABC dengan panjang sisi AB, BC, dan CA berturut-turut adalah 5 cm, 6 cm, dan 4 cm. Berapakah $\sin^2(\angle BAC)$?

16. Sebuah persegi disisipkan di dalam lingkaran dalam sebuah segitiga samasisi (ini berarti keempat titik sudut persegi terletak pada lingkaran). Berapakah perbandingan luas segitiga terhadap luas persegi?

17. Segitiga ABC memiliki alas AB yang tetep, sedangkan puncak C bergerak sepanjang sebuah garis lurus. Berupa apakah lengkungan tempat kedudukan titik berat segitiga?

18. Setiap dua titik berbeda pada bidang menentukan tepat sebuah garis lurus. Berapakah banyaknya garis lurus yang ditentukan oleh 12 buah titik di bidang kalau tidak ada tiga titik yang sgaris?

19. Berapakah banyaknya diagonal yang dapat dibuat pada sebuah poligon (segi banyak) dengan 100 sisi?

20. Berapa banyakkah nomor telepon yang terdiri atas 7 angka, dan dapat dibuat dengan 4 digit awalnya adalah 0812, tigadigit sisanya harus saling berbeda dan bukan merupakan bilangan 0, 3atau 5, serta digit terakhirnya bukan angka 9?

SOAL BAGIAN KEDUA (URAIAN)

1. Gambarkan semua titik (x, y) pada bidang yang memenuhi
   $|x + y| + |x - y| = 2$.

2. Tunjukkan bahwa $1^{2001} + 2^{2001} + 3^{2001} + \ldots + 2001^{2001}$ adalah kelipatan 13.

3. Misalkan sisi BC dari segitiga siku-siku ABC adalah garis tengah sebuah lingkaran yang memotong sisi miring AB di D. Garis singgung lingkaran di D memotong sisi CA di F. Buktikan bahwa besar sudut CFD adalah dua kali besar sudut A.

4. Misalkan H suatu himpunan yang beranggotakan lima unsur. Tentukan banyaknya pasangan himpunan (A, B) yang bersifat
   (a). A dan B himpunan bagian dari H yang bukan himpunan kosong,

(b). $A \cap B = \varnothing$, dan

(c). anggota A lebih banyak dari anggota B.

5. Untuk bilangan real a, b, dan c yang memenuhi $a \geq b \geq c \geq 0$, buktikan bahwa
$$\frac{a^2 - b^2}{c} + \frac{c^2 - b^2}{a} + \frac{a^2 - c^2}{b} \geq 3a - 4b + c$$

KUNCI JAWABAN BAGIAN PERTAMA (ISIAN SINGKAT)

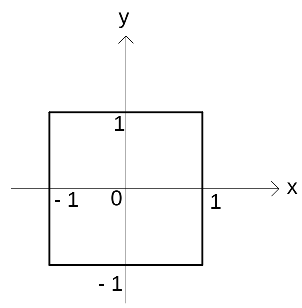
1. -1
2. 2
3. 5
4. 1
5. $\{x \mid 2 \leq x \leq 3, x \in \mathbb{R}\}$
6. $\frac{7}{2}$
7. 12
8. 8
9. 200
10. 16
11. 0
12. 11
13. $2\sqrt{3} - 3$
14. 30
15. $\frac{63}{64}$
16. $3\sqrt{3} : 2$
17. Garis lurus
18. 66
19. 4850

20. 180

KUNCI JAWABAN BAGIAN KEDUA (URAIAN)

1. Klu : Gunakan definisi $|x| = \begin{cases} x \text{ jika } x \geq 0 \\ -x \text{ jika } x < 0 \end{cases}$

   Gambar :



2. Klu : Kelompokkan setiap anggota himpunan {1, 2, 3, …, 2001} menjadi bentuk $13k + a$ dimana $0 \leq a \leq 12$, a bilangan bulat. Kemudian tentukan sisa pembagian oleh 13 dari masing-masing bentuk $(13k + a)^{2001}$. Selanjutnya jumlah sisa dibagi kembali oleh 13 sehingga diperoleh sisa = 0. Untuk mempermudah, gunakan konsep kongruen modulo (Lihat catatan pada solusi tingkat Kota/Kab. Versi III nomor 19).

3. Klu :

   - Besar sudut keliling = $\frac{1}{2}$ Besar sudut pusat.
   - Garis singgung selalu tegak lurus terhadap jari-jari.

4. 65 pasangan himpunan.

5. Klu : Gunakan ketaksamaan a $\geq$ b $\geq$ c $\geq$ 0 untuk memperoleh $\frac{a}{c} \geq 1$, $\frac{b}{c} \geq 1$, $\frac{c}{a} \leq 1$, $\frac{b}{a} \leq 1$, dan $\frac{a}{b} \geq 1$. Perhatikan bahwa (a - c) < 0.

DEPARTEMEN PENDIDIKAN NASIONAL
OLIMPIADE MATEMATIKA SMA
TINGKAT NASIONAL

SOAL URAIAN

1. Suatu himpunan bilangan bulat berurutan dimulai dari 1 ditulis di papan tulis . Kemudian satu bilangan dihapus. Rata-rata bilangan yang tersisa adalah $35\frac{7}{17}$. Bilangan berapakah yang dihapus?

2. Berapa bayankkah bilangan bulat a dengan $1 < a < 100$ yang mengakibatkan faktor sekutu terbesar dari $a^2 + 4$ dan $a + 3$ lebih besar dari 1?

3. Suatu lingkaran mempunyai dua talibusur AB dan CD yang saling tegak lurus dan berpotongan di E sedemikian sehingga AE = 12, DE = 4, dan CE = 6. Berapakah luas lingkaran tersebut?

4. Tentukan parameter real p sehingga sistem persamaan
   $x^2 + 1 = (p + 1)x + py - z$
   $y^2 + 1 = (p + 1)y + pz - x$
   $z^2 + 1 = (p + 1)z + px - y$
   dengan variabel real x, y, z mempunyai tepat satu solusi.

5. Tentukan semua bilangan bulat $n > 1$, sedemikian sehingga terdapat permutasi siklis dari (1, 1, 2, 2, ..., n, n) yang memenuhi:
   (a) Tidak terdapat dua suku bertetangga dari permutasi tersebut (termasuk suku terakhir dan pertama)
   (b) Tidak terdapat blok yang terdiri atas n suku berturutan dan terdiri atas n bilangan berbeda.

6. Misalkan x, y, z bilangan real positif sedemikian rupa sehingga $x + y + z + \sqrt{xyz} = 4$. Buktikan bahwa $xy + xz + yz + \sqrt{xyz} \leq 4$

7. misalkan a, b, c, dan d adalah bilangan real positif sedemikian hingga abcd = 1. Tunjukkan bahwa $\frac{1}{3} \geq \frac{1}{a+b+c+9} + \frac{1}{b+c+d+9} + \frac{1}{c+d+a+9} + \frac{1}{d+a+b+9}$

SOLUSI SOAL URAIAN

1. Misalkan n menyatakan bilangan terbesar yang ditulis di papan.

   Jika 1 dihapus dari papan maka kita akan memperoleh nilai rata-rata terbesar yaitu

$$\frac{2+3+4+...+n}{n-1} = \frac{\frac{n-1}{2}(2+n)}{n-1}$$

$$= \frac{n+2}{2}$$

$$= \frac{n}{2} + 1$$

   Sedangkan rata-rata terkecil akan diperoleh jika n dihapus dari papan, dan rata-ratanya adalah

$$\frac{1+2+3+...+(n-1)}{n-1} = \frac{\frac{n-1}{2}(1+n-1)}{n-1}$$

$$= \frac{n}{2}$$

   Oleh karena itu,

$$\frac{n}{2} \leq 35\frac{7}{17} \leq \frac{n}{2} + 1 \Leftrightarrow \frac{n}{2} \leq 35\frac{7}{17} \text{ dan } \frac{n}{2} + 1 \geq 35\frac{7}{17}$$

$$\Leftrightarrow n \leq 70\frac{14}{17} \text{ dan } n \geq 68\frac{14}{17}$$

$$\Leftrightarrow 68\frac{14}{17} \leq n \leq 70\frac{14}{17}$$

Karena n bilangan bulat, maka n = 69 atau n = 70.

Perhatikan bahwa $35\frac{7}{17}$ merupakan rata-rata dari n – 1 bilangan, akibatnya $35\frac{7}{17}$(n - 1) harus merupakan bilangan bulat. Jadi haruslah n = 69.

Selanjutnya, misalkan x adalah bilangan yang telah dihapus, maka

$$\frac{1+2+3+\ldots+69-x}{68}=35\frac{7}{17} \Leftrightarrow \frac{\frac{69}{2}(1+69)-x}{68}=35\frac{7}{17}$$

$$\Leftrightarrow 35.\,69 - x = 68.\,35\frac{7}{17}$$

$$\Leftrightarrow 35.\,69 - x = 68.\,35 + 4.\,7$$

$$\Leftrightarrow x = 35 - 28$$

$$= 7$$

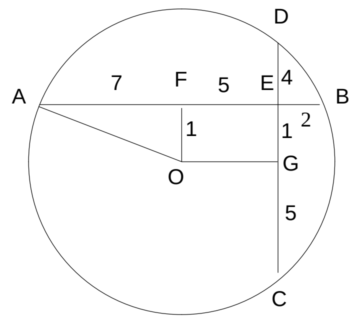
Jadi bilangan yang dihapus adalah 7.

2. Karena faktor sekutu terbesar dari $a^2 + 4$ dan $a + 3$ lebih besar dari 1, maka akan ada bilangan bulat $b > 1$ yang membagi habis kedua bilangan tersebut.

   Jika $a^2 + 4$ dan $a + 3$ habis dibagi b, maka $a^2 + 4 - (a + 3)(a - 3) = 13$ habis dibagi b. Karena 13 habis dibagi b, maka b = 1 atau b = 13. Perhatikan bahwa b > 1. Jadi yang memenuhi adalah b = 13.

   a + 3 kelipatan 13 jika $\frac{a+3}{13}=\frac{(a-10)+13}{13}=1+\frac{(a-10)}{13}$ merupakan bilangan bulat. Hal ini akan terjadi jika a – 10 kelipatan 13 atau a = 13k + 10 untuk suatu bilangan bulat k. Karena 1 < a < 100, maka k yang memenuhi adalah k = 0, 1, 2, …, 6. Jadi terdapat 7 buah a yang memenuhi.

3. Perhatikan gambar di bawah ini!



$\angle$BDC = $\angle$BAC karena keduanya menghadap tali busur yang sama. Hal ini menyebabkan segitiga BDE dan segitiga CAE sebngun (serupa) karena ketiga sudut yang bersesuaian besarnya sama. Karena adanya kesebangunan kedua segitiga tersebut, maka berlaku

$$\frac{AE}{DE} = \frac{CE}{BE} \Leftrightarrow \frac{12}{6} = \frac{4}{BE}$$

$$\Leftrightarrow BE = 2$$

Selanjutnya buat titik F yang diperoleh dari perpotongan garis AB dengan garis yang tegak lurus dengan AB melalui titik pusat lingkaran O.

$$AF = \frac{1}{2} AB$$

$$= \frac{1}{2} (AE + BE)$$

$$= \frac{1}{2} (12 + 2)$$

$$= \frac{1}{2} (14)$$

$$= 7$$

Setelah itu, buat titik G dengan cara menarik garis dari titik O yang tegak lurus garis CD.

$$CG = \frac{1}{2} CD$$

$$= \frac{1}{2} (CE + DE)$$

$= \frac{1}{2}(6 + 4)$

$= \frac{1}{2}(10)$

$= 5$

$GE = CE - CG$

$= 6 - 5$

$= 1$

$= OF$

$(OA)^2 = (AF)^2 + (OF)^2$

$= 7^2 + 1^2$

$= 50$

Luas lingkaran = $\pi (OA)^2$

$= 50\pi$ satuan luas.

4. Soal ini dapat diselesaikan dengan beberapa cara.

Cara I

$x^2 + 1 = (p + 1)x + py - z$ … (1)

$y^2 + 1 = (p + 1)y + pz - x$ … (2)

$z^2 + 1 = (p + 1)z + px - y$ … (3)

$(1) + (2) + (3) \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 + 3 = 2px + 2py + 2pz$

$\Leftrightarrow 3(p^2 - 1) = (x - p)^2 + (y - p)^2 + (z - p)^2 > 0$ … (4)

$\Leftrightarrow 3(p^2 - 1) > 0$

$\Leftrightarrow p^2 > 1$

Perahatkan bahwa (x, y, z) = (k, k, k) merupakan solusi dari persamaan (4) yang akan diuraikan di bawah ini.

Jika (x, y, z) = (k, k, k) maka persamaan (4) menjadi

$3(p^2 - 1) = (k - p)^2 + (k - p)^2 + (k - p)^2$

$= 3(k - p)^2$

$\Leftrightarrow p^2 - 1 = (k - p)^2$

$= p^2 + k^2 - 2kp$

$\Leftrightarrow k^2 - 2kp + 1 = 0$

$\Leftrightarrow k = \dfrac{2p \pm \sqrt{4p^2 - 4}}{2}$

$= p \pm \sqrt{p^2 - 1}$

Agar k bilangan real maka haruslah $p^2 \geq 1$

Kasus $p^2 > 1$, maka persamaan di atas akan memiliki minimal 2 solusi. Sedangkan untuk kasus $p^2 = 1$, maka p = 1 atau p = - 1.

Untuk p = 1, maka k = 1. Jadi solusi persamaan adalah (1, 1, 1).

Untuk p = - 1, maka k = - 1. Jadi solusi persamaan adalah (- 1, - 1, - 1).

Cara II

Apabila (x, y, z) = (a, b, c) merupakan solusi, maka (x, y, z) = (b, c, a) dan (x, y, z) = (c, b, a) juga merupakan solusi. Jadi supaya persamaan di atas mempunyai tepat satu solusi, hasuslah a = b = c atau (x, y, z) = (a, a, a).

Jika (x, y, z) = (a, a, a) disubstitusikan ke salah satu persamaan di atas, misal ke persamaan (1), maka akan diperoleh

$a^2 + 1 = (p + 1)a + pa - a \Leftrightarrow a^2 + 1 = 2pa$

$\Leftrightarrow a^2 - 2pa + 1 = 0 \quad \ldots (5)$

Agar persamaan (5) memiliki solusi tunggal, maka diskriminan, D = 0, yaitu

$4p^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow p = 1$ atau $p = - 1$

Untuk p = 1, maka k = 1. Jadi solusi persamaan adalah (1, 1, 1).

Untuk p = - 1, maka k = - 1. Jadi solusi persamaan adalah (- 1, - 1, - 1).

5. Misalkan $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{2n})$ adalah suatu permutasi siklis dari (1, 1, 2, 2, …, n,n).

   Sebagai catatan, penulisan WLOG (Without loss of generation) diartikan sebagai “Tanpa mengurangi keumuman”.

   - **Untuk n = 2**

Tidak ada permutasi siklis untuk n = 2, karena tidak hanya ada dua kemungkinan untuk keadaan a_1 dan a_2 yaitu $a_1 = a_2$ atau $a_1 \neq a_2$ yang keduanya melanggar persyaratan.

- **Untuk n = 3**

Misalkan (a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6) adalah permutasi siklis dari (1, 1, 2, 2, …, 3, 3).

Karena semua unsur belum terambil, maka WLOG, a_1 = 1.

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
1					

Menurut (a), $a_2 \neq 1$. Maka a_2 bernilai 2 atau 3.

Karena 2 dan 3 keduanya belum terambil, maka WLOG, a_2 = 2.

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
1	2				

Menurut (a), $a_3 \neq 2$, dan menurut (3), $a_3 \neq 3$. Maka haruslah a_3 = 1.

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
1	2	1			

Menurut (b), $a_4 \neq 3$, maka a_4 = 2.

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
1	2	1	2		

Dari table, mengharuskan a_5 = 3 yang kontradiksi dengan (b).

Jadi tidak ada permutasi siklis untuk n = 3.

- **Untuk n = 4**

Misalkan (a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8) adalah permutasi siklis dari (1, 1, 2, 2, …, 4, 4).

Karena semua unsur belum terambil, maka WLOG, a_1 = 1.

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8
1							

Menurut (a), $a_2 \neq 1$. Maka a_2 bernilai 2, 3, atau 4.

Karena 2, 3 dan 4 ketiganya belum terambil, maka WLOG, $a_2 = 2$.

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8
1	2						

Menurut (a), $a_3 \neq 2$, maka a_3 bernilai 1, 3, atau 4. Kasus a_3 bernilai 1, berbeda dengan kasus a_3 bernilai 3 atau 4 karena unsur 1 telah digunakan satu kali, sedangkan unsur 3 dan 4 belum pernah digunakan.

(i) Kasus $a_3 = 1$

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8
1	2	1					

Karena unsur 1 telah digunakan dua kali, maka a_4 bernilai 2, 3 atau 4. Subkasus a_4 bernilai 2 berbeda dengan a_4 bernilai 3 atau 4 karena unsur 2 telah digunakan satu kali.

(i). 1 Subkasus $a_4 = 2$

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8
1	2	1	2				

Karena unsur 1 dan 2 telah digunakan, maka a_5 bernilai 3 atau 4.

WLOG, $a_5 = 3$.

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8
1	2	1	2	3			

Menurut (a), $a_6 \neq 3$, dan menurut (b), $a_6 \neq 4$. Hal ini kontradiksi dengan kenyataan bahwa unsur yang tersisa adalah 3 dan 4.

Jadi tidak terdapat permutasi siklis untuk subkasus ini.

(i). 2 Subkasus a_4 bernilai 3 atau 4

WLOG, $a_4 = 3$.

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8
1	2	1	3				

Menurut (a), $a_5 \neq 3$, dan menurut (b), $a_5 \neq 4$. Jadi $a_5 = 2$.

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8
1	2	1	3	2			

Menurut (b), $a_6 \neq 4$. Jadi $a_6 = 3$.

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8
1	2	1	3	2	3		

Hal ini memaksa $a_7 = a_8 = 4$ yang kontradiksi dengan (a).

Jadi tidak terdapat permutasi siklis untuk subkasus ini.

(ii) Kasus a_3 bernilai 3 atau 4

Karena 3 dan 4 keduanya belum digunakan, maka WLOG, $a_3 = 3$.

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8
1	2	3					

Menurut (a), $a_4 \neq 3$, dan menurut (b), $a_4 \neq 4$. Jadi a_4 harus bernilai 1 atau 2.

Karena unsur 1 dan 2 sama-sama telah digunakan dua kali, maka WLOG, $a_4 = 1$.

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8
1	2	3	1				

Menurut (b), $a_5 \neq 4$. Jadi a_5 bernilai 2 atau 3.

Karena 2 dan 3 sama-sama telah digunakan satu kali, maka WLOG, $a_5 = 2$.

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8
1	2	3	1	2			

Menurut (b), $a_6 \neq 4$. Jadi $a_6 = 3$.

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8
1	2	3	1	2	3		

Hal ini mengharuskan $a_7 = a_8 = 4$ yang kontradiksi dengan (a).
Jadi tidak terdapat permutasi siklis untuk kasus ini.

- **Untuk n = 5**
  Perhatikan bahwa permutasi siklis dari (1, 2, 1, 2, 3, 4, 3, 5, 4, 5) memenuhi syarat (a) dan (b) pada soal.
- **Untuk n > 5**
  Secara umum, untuk $n > 5$, permutasi berikut memenuhi syarat (a) dan (b) pada soal
  $(1, 2, 1, 2, 3, 4, 3, n, n-1, \ldots, 5, 4, 5, \ldots, n-1, n)$

6. Misalkan

$$p = 2\sqrt{\frac{x}{yz}} + 1$$

$$q = 2\sqrt{\frac{y}{xz}} + 1$$

$$r = \frac{x + y + \sqrt{xyz}}{z} = \frac{4-z}{z} = \frac{4}{z} - 1$$

Dari uraian di atas, terlihat bahwa p, q, dan r ketiganya positif.

Selanjutnya,

$$\frac{p+q}{r} = \frac{z}{4-z}\left(2\sqrt{\frac{x}{yz}} + 2\sqrt{\frac{y}{xz}} + 2\right)$$

$$= \frac{z}{4-z}\left(\frac{2\left(x + y + \sqrt{xyz}\right)}{\sqrt{xyz}}\right)$$

$$= \frac{2z}{4-z}\left(\frac{4-z}{\sqrt{xyz}}\right)$$

$$= 2\sqrt{\frac{z}{xy}}$$

$$q + r = 2\sqrt{\frac{y}{xz}} + 1 + \frac{4}{z} - 1$$

$$= 2\sqrt{\frac{y}{xz}} + \frac{4}{z}$$

$$= 2\sqrt{\frac{y}{xz}}\left(1 + 2\sqrt{\frac{x}{yz}}\right)$$

$$= 2p\sqrt{\frac{y}{xz}}$$

$$\frac{q + r}{p} = 2\sqrt{\frac{y}{xz}}$$

$$p + r = 2\sqrt{\frac{x}{yz}} + 1 + \frac{4}{z} - 1$$

$$= 2\sqrt{\frac{x}{yz}} + \frac{4}{z}$$

$$= 2\sqrt{\frac{x}{yz}}\left(1 + 2\sqrt{\frac{y}{xz}}\right)$$

$$= 2q\sqrt{\frac{x}{yz}}$$

$$\frac{p + r}{q} = 2\sqrt{\frac{x}{yz}}$$

Kemudian

$$2\sqrt{\frac{z}{xy}} + 2\sqrt{\frac{y}{xz}} + 2\sqrt{\frac{x}{yz}} = \frac{p + q}{r} + \frac{q + r}{p} + \frac{p + r}{q}$$

$$= p\left(\frac{1}{q}+\frac{1}{r}\right)+q\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{r}\right)+r\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right)$$

Menurut ketaksamaan rataan aritmatika dan rataan harmonik,

$$\frac{1}{q}+\frac{1}{r} \geq \frac{4}{q+r}.$$

Maka $p\left(\frac{1}{q}+\frac{1}{r}\right)+q\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{r}\right)+r\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right) \geq p\left(\frac{4}{q+r}\right)+q\left(\frac{4}{p+r}\right)+r\left(\frac{4}{p+q}\right)$

$$= 4\left(\frac{p}{q+r}+\frac{q}{p+r}+\frac{r}{p+q}\right)$$

$$= 4\left(2\sqrt{\frac{xy}{z}} + 2\sqrt{\frac{xz}{y}} + 2\sqrt{\frac{yz}{x}}\right)$$

$$\geq 2\sqrt{\frac{xy}{z}} + 2\sqrt{\frac{xz}{y}} + 2\sqrt{\frac{yz}{x}}$$

Jadi $2\sqrt{\frac{z}{xy}} + 2\sqrt{\frac{y}{xz}} + 2\sqrt{\frac{x}{yz}} \geq 2\sqrt{\frac{xy}{z}} + 2\sqrt{\frac{xz}{y}} + 2\sqrt{\frac{yz}{x}}$

$\Leftrightarrow \sqrt{\frac{z}{xy}} + \sqrt{\frac{y}{xz}} + \sqrt{\frac{x}{yz}} \geq \sqrt{\frac{xy}{z}} + \sqrt{\frac{xz}{y}} + \sqrt{\frac{yz}{x}}$

$\Leftrightarrow \frac{x+y+z}{\sqrt{xyz}} \geq \frac{xy+xz+yz}{\sqrt{xyz}}$

$\Leftrightarrow x + y + z \geq xy + xz + yz$

Karena $x + y + z + \sqrt{xyz} = 4$ dan $x + y + z \geq xy + xz + yz$

Maka $4 = x + y + z + \sqrt{xyz} \geq xy + xz + yz + \sqrt{xyz}$

Jadi $xy + xz + yz + \sqrt{xyz} \leq 4$ (Terbukti)

Catatan

Misalkan AM (Aritmatic Mean), GM (Geometry Mean), dan HM (Harmonic Mean) masing-masing menyatakan rataan aritmatika, rataan geometri, dan rataan harmonic.

Akan dibuktikan bahwa

AM $\geq$ GM $\geq$ HM

Bukti

Untuk sembarang bilangan real positif a dan b, berlaku

$$\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2 \geq 0 \Leftrightarrow a + b - 2\sqrt{ab} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow a + b \geq 2\sqrt{ab}$$

$$\Leftrightarrow \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \quad \ldots (1)$$

Jadi AM $\geq$ GM ... (2)

Jika kedua ruas pada ketaksamaan (1) masing-masing dibagi ab akan diperoleh

$$\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{2} \geq \frac{1}{\sqrt{ab}} \Leftrightarrow \sqrt{ab} \geq \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$$

Jadi $\dfrac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \geq \dfrac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$

Akibatnya AM $\geq$ GM $\geq$ HM

Secara umum jika terdapat bilangan-bilangan real positif a_1, a_2, a_3, ..., a_n, maka berlaku

$$\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n} \geq \frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}}$$

7. Misalkan x, y, z, dan w adalah bilangan real positifsedemikian hingga $x^4 = a$, $y^4 = b$, $z^4 = c$, dan $w^4 = d$.

   Karena abcd = 1 maka $(xyzw)^4 = 1 \Leftrightarrow xyzw = 1$

   $$\Leftrightarrow xyz = \frac{1}{w}$$

   Menurut ketaksamaan aritmatika dan geometri,

   AM $\geq$ GM, maka

$$\frac{x^4 + y^4 + z^4}{3} \geq \sqrt[3]{x^4y^4z^4} \Leftrightarrow x^4 + y^4 + z^4 \geq 3\sqrt[3]{x^4y^4z^4} \quad . . . (1)$$

Dan

$$\frac{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}}{3} \geq \sqrt[3]{\frac{1}{xyz}} \Leftrightarrow \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} \geq 3\sqrt[3]{\frac{1}{xyz}} \quad . . . (2)$$

Dari ketaksamaan (1) dan (2) diperoleh

$$\left(x^4 + y^4 + z^4\right)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right) \geq \left(3\sqrt[3]{x^4y^4z^4}\right)\left(3\sqrt[3]{\frac{1}{xyz}}\right)$$

$$= 9xyz$$

$$= \frac{9}{w}$$

Jadi

$$\left(x^4 + y^4 + z^4\right)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right) \geq \frac{9}{w}$$

$$\Leftrightarrow \left(x^4 + y^4 + z^4 + 9\right)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right) \geq \frac{9}{w} + 9\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)$$

$$= 9\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{w}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}}{9\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{w}\right)} \geq \frac{1}{x^4 + y^4 + z^4 + 9}$$

$$= \frac{1}{a + b + c + 9}$$

Akibatnya

$$\frac{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}}{9\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{w}\right)} \geq \frac{1}{a + b + c + 9} \quad . . . (*)$$

Dengan cara yang sama, akan diperoleh

$$\frac{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{w}}{9\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{w}\right)} \geq \frac{1}{d+a+b+9} \quad ...(**)$$

$$\frac{\frac{1}{x}+\frac{1}{z}+\frac{1}{w}}{9\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{w}\right)} \geq \frac{1}{c+d+a+9} \quad ...(***)$$

$$\frac{\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{w}}{9\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{w}\right)} \geq \frac{1}{b+c+d+9} \quad ...(****)$$

Jika ketaksamaan (*), (**), (***), dan (****) dijumlahkan akan diperoleh

$$\frac{3\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{w}\right)}{9\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{w}\right)} \geq \frac{1}{a+b+c+9}+\frac{1}{d+a+b+9}+\frac{1}{c+d+a+9}+\frac{1}{b+c+d+9}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3} \geq \frac{1}{a+b+c+9}+\frac{1}{b+c+d+9}+\frac{1}{c+d+a+9}+\frac{1}{d+a+b+9}$$

Catatan

- Lihat catatan pada pembahasan soal no. 6
- Soal dengan metode solusi seperti di atas mirip atau sudah banyak ditemukan penulis seperti pada US. Mathematics Olympiad (USAMO). Sehingga jam terbang dalam menguasai “Problem solving” perlu dikembangkan untuk melengkapi referensi pembendaharaan penyelesaian masalah kompleks.

LATIHAN

DEPARTEMEN PENDIDIKAN NASIONAL
OLIMPIADE MATEMATIKA SMA
TINGKAT NASIONAL

SOAL URAIAN

1. Berapa banyak bilangan dengan empat digit di antara 1000 dan 9999 sedemikian hingga harga mutlak dari selisih digit pertama dan digit terakhirnya adalah 2?

2. mialkan a, b, dan c merupakan bilangan real positif yang memenuhi system persamaan berikut
   $a + b^2 + 2ac = 29$
   $b + c^2 + 2ab = 18$
   $c + a^2 + 2bc = 25$
   Berapakah nilai dari a + b + c?

3. Jika a dan b adalah bilangan real positif yang kurang dari atau sama dengan 1, maka buktikanlah $\frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+1} \le \frac{2}{\sqrt{ab}+1}$

4. Dalam segitiga ABC dilukis segitiga A'B'C' yang tidak sama dengan segitiga ABC dan sisis A'B' sejajar dengan AB, B'C' sejajar dengan BC, dan C'A' sejajar dengan CA. Tunjukkan bahwa perpanjangan garis AA', BB', dan CC' berpotongan tepat di satu titik.

5. Jika r adalah sisa pembagian bilangan 1059, 1417, dan 2312 oleh d, dengan d adalah bilangan bulat yang lebih besar dari satu. Berapakah nilai d – r?

6. Tuliskan digit satuan dalam ekspansi desimal dari

$$\left(15+\sqrt{220}\right)^{19}+\left(15+\sqrt{220}\right)^{82}$$

7. Berapa banyaknya solusi (x, y) dalam bilangan bulat positif dari persamaan $x^2 + y^2 = x^3$?

KUNCI JAWABAN

1. Jawaban: 1500

   Klu: Ingat bahwa digit pertama tidak boleh ditempati angka 0.

2. Jawaban: 8

3. Jawaban: - (Soal Pembuktian)

4. Jawaban: - (Soal Pembuktian)

5. Jawaban: 15

6. Jawaban: 9

7. Jawaban: Tak berhingga

SOUTH EAST ASIAN MATHEMATICS OLYMPIAD
(SEAMO)
English Version Problem
6 Hours

A. Individual Problem (4.5 Hours)

1. Simple Question Type (1.5 Hours, 1 Credit Each)

1. 60% of pupils in a school are girls. 60% of the girls and 50% of the boys in this school travel to school by bus. What is the percentage of the pupils in the school who travel by bus?

2. In ⊔ ABC, AB = 20 cm, BC = 12 cm, AC = s16 cm. Find the radius of the inscribed circle of the ⊔ ABC.

3. Ali is 11 years younger than Lim. In 7 years time, Ali will be half of Liem's age. What is the sum of their ages now?

4. In ⊔ ABC, D is a point on BC such that AB = AD = CD and $\angle$BAD = $\angle$CAD = θ. Find θ.

5. Find $\cos^2 1^0 + \cos^2 2^0 + \cos^2 3^0 + \ldots + \cos^2 89^0$.

6. Find all pairs of integers (x, y) such that $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{3}$.

7. How many integers from 1 to 2005 have the sum of their digits divisible by 5?

8. Let a, b, c be real numbers such that $a + b + c = 80$ and $a^2 + b^2 + c^2 = 2390$. Find the value of $ab + ac + bc$.

9. Let AB be the diameter of a semicircle with centre O. Let C and D be points on the emicircle ith C in between B and D. The segments AC and BD intersect at a point.E, AC and OD intersect at a point F, BD and OC intersect at a point G. If the quadrilateral OFEG is cyclic, find $\angle AEB$.

10. Let $p(x)$ be a polynomial such that $p(x^2 - 1) = x^4 - 3x^2 + 3$. Find $p(x^2 + 1)$.

11. Find the angle beteen the minute and the hour hands at 04:35.

12. Find the coefficient of x in the expansion of $(1 + x)(1 - 2x)(1 + 3x)(1 - 4x)\ldots(1 + 2005x)$.

13. If $\sin x + \sin y = \frac{\sqrt{7}}{2}$, what is the maximum value of $100(\cos x + \cos y)$?

14. How many pairs of integer (x, y) such that $x \geq y > 0$, satisfy

$$(x + y) + (x - y) + xy + \frac{x}{y} = 2005?$$

15. Find the largest positive integer n such that the arithmetic mean of the integer 1 to n is strictly less than 2005.

16. Let a, b, c, d and e be real numbers such that $a + b + c + d + e = 0$, and $abc + abd + abe + acd + ace + ade + bcd + bce + bde + cde = 2005$. Find the value of $a^3 + b^3 + c^3 + d^3 + e^3$.

17. Let S = $\frac{1+2}{2}+\frac{1+2+3}{2^2}+\frac{1+2+3+4}{2^3}+\ldots$

Find the value of S.

18. Solve for x where

$$x^2-2\sqrt{x-1-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}-x+\frac{2}{x}=1, x\neq 0$$

19. Let N be the set of all positive integer.

Let f : N $\rightarrow$ N be a function such that f(x + 1) = f(x) + x for x $\in$ N and f(1) = 5. Find the value of f(2005).

20. Find the smallest positive integer n such that n leaves the remainders 1, 2, 3, 4 and 5 when devided by 2, 3, 4, 5 and 6 respectively.

2. Essay Question Type (3 Hours, 7 Credit Each)

1. Let a, b, c, be positive real numbers. Show that

$$\frac{1}{a(1+b)}+\frac{1}{b(1+c)}+\frac{1}{c(1+a)}\geq\frac{3}{1+abc}$$

2. Let ABCDE be a cyclic pentagon such that AB = AE and $\angle$BAE = 2$\angle$CAD. Let F be a point such that BF and EF are parallel to CA and DA respectively. Let H be the orthocenter of $\triangle$ACD. Show that BHEF is a cyclic quadrilateral.

3. Let $\mathbb{Z}$ be the set of all integers. Given two polynomials p(x) = x^3 + ax^2 + bx + c, where a, b, c $\in$ $\mathbb{Z}$ and q(x) = x^2 - 40x + 2410. Assume that p(x) = 0 has 3 distinct integer roots, p(2005) = - 2005, and that p(q(x)) has no real roots. Find the value of a.

4. Let □ be the set of all positive integers. Let f : □ $\to$ □ be a function satisfying f(1) = 1, f(2n) = f(n), and f(2n + 1) = f(2n) + 1, for all positive integers n. Find the maximum of f(n) when $1 \leq n \leq 2005$.

5. Let □ be the set of all integers. For every a, b, c $\in$ □, let F(a, b, c) = $(a^3b - ab^3)(b^3c - bc^3)(c^3a - ca^3)$.

   a. Proove that F(a, b, c) is divisible by 160 for a, b, c $\in$ □.

   b. Find the maximum positive integer n such that n devides F(a, b, c) for a, b, c $\in$ □.

B. Group Problem (1.5 Hours, 2 Credit Each)

1. Solve $\left|x^2 - 6x + 1\right| < \frac{1}{2}x^2 - 3x + 5$.

2. Let ABC be atriangle with sides a, b and c such that a + b = 4c. Show that $\cot\frac{A}{2} . \cot\frac{B}{2} = \frac{5}{3}$.

3. The sequence $x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots$ is defined by $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_{k+1} = x_k^2 + x_k$, for all $k \geq 1$. Find the greatest integer less than or equal to

   $$\frac{1}{x_1 + 1} + \frac{1}{x_2 + 1} + \ldots + \frac{1}{x_{2005} + 1}.$$

4. Let a and b be two positive integers. Show that $\sqrt{2}$ always lies between $\frac{a}{b}$ and $\frac{a + 2b}{a + b}$.

5. Find all triples (a, b, c) of consecutive odd positive integers such that a < b < c and $a^2 + b^2 + c^2$ is a four digit number with all digit number with all digits equal.

6. Show that $x^2 + 8z = 3 + 2y^2$ has no solution of positive integers x, y and z.

7. Let ABCDE be a convex pentagon. Let L, M, P and Q be the midpoints of AB, CD, BC and DE respectively. Let R and S be the midpoints of LM and PQ respectively. If AE = 10 cm, find SR.

8. Let $\mathbb{R}$ be the set of all real numbers. Find all function $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ that satisfy the following conditions:

   (i). $f(2x) = f(x + y)f(x - y) + f(y - x)f(- x - y)$ for all $x, y \in \mathbb{R}$.

   (ii). $f(x) \geq 0$ for all $x \in \mathbb{R}$.

9. Let a, b, c d be positive real numbers. Prove that

   $$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{d}+\frac{d}{a} \geq \frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{d}{c}+\frac{a}{d}.$$

10. Let n be an integer larger than 1 and suppose that for every positive integer d, if d devides n, then d + 1 divides n + 1. Prove that n is a prime.

OLIMPIADE MATEMATIKA ASIA TENGGARA

(SEAMO)

Versi Bahasa Indonesia

6 Jam

A. Soal Individu (4,5 Jam)

1. Soal Isian Singkat (1,5 Jam, Masing-masing Bernilai 1)

1. 60% dari siswa di suatu sekolah adalah perempuan. 60% dari siswa perempuan dan 50% dari siswa laki-laki di sekolah ini ke sekolah menggunakan bis. Berapa persenkah di sekolah ini yang menggunakan bis ke sekolah?

2. Pada $\triangle$ ABC, AB = 20 cm, BC = 12 cm, AC = s16 cm. Carilah jari-jari lingkaran dalam $\triangle$ ABC.

3. Ali 11 tahun lebih muda daripada Lim. Dalam waktu 7 tahun mendatang, umur Ali akan menjadi setengah dari umur Lim. Berapa jumlah umur mereka sekarang?

4. Pada $\triangle$ ABC, D adalah titik pada BC sehingga AB = AD = CD dan $\angle BAD = \angle CAD = \theta$. Tentukan θ.

5. Tentukan $\cos^2 1^0 + \cos^2 2^0 + \cos^2 3^0 + \ldots + \cos^2 89^0$.

6. Tentukan semua pasangan bilangan bulat (x, y) sehingga $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{3}$.

7. Berapa banyak bilangan bulat dari 1 sampai 2005 yang jumlah digitnya terbagi oleh 5?

8. Misalkan a, b, c bilangan real sehingga $a + b + c = 80$ dan $a^2 + b^2 + c^2 = 2390$. Tentukan nilai dari $ab + ac + bc$.

9. Misalkan AB adalah diameter setengah lingkaran dengan pusat O. Misalkan C dan D adalah titik pada setengah lingkaran dengan C di antara B dan D. Ruas garis AC dan BD berpotongan dititik E, AC dan OD berpotongan di titik F, BD dan OC berpotongan di titik G. Jika OFEG adalah segiempat talibusur, tentukan $\angle AEB$.

10. Misalkan p(x) polinom sehingga $p(x^2 - 1) = x^4 - 3x^2 + 3$. Tentukan $p(x^2 + 1)$.

11. Tentukan sudut yang dibentuk oleh jarum panjang (menit) dan jarum pendek (jam) pada pukul 04:35.

12. Tentukan koefisien x pada ekspansi $(1 + x)(1 - 2x)(1 + 3x)(1 - 4x)\ldots(1 + 2005x)$.

13. Jika $\sin x + \sin y = \frac{\sqrt{7}}{2}$, berapa nilai maksimum $100(\cos x + \cos y)$?

14. Berapa banyak pasangan bilangan bulat (x, y) sehingga $x \geq y > 0$, memenuhi

$$(x + y) + (x - y) + xy + \frac{x}{y} = 2005?$$

15. Tentukan bilangan bulat positif terbesar n sehingga rataan aritmatika bilangan bulat dari 1 sampai n adalah kurang dari 2005.

16. Misalkan a, b, c, d dan e adalah bilangan real sehingga a + b + c + d + e = 0, dan abc + abd + abe + acd + ace + ade + bcd + bce + bde + cde = 2005. tentukan nilai dari $a^3 + b^3 + c^3 + d^3 + e^3$.

17. Misalkan S = $\frac{1+2}{2} + \frac{1+2+3}{2^2} + \frac{1+2+3+4}{2^3} + \ldots$

Tentukan nilai dari S.

18. Selesaikan untuk x dimana

$$x^2 - 2\sqrt{x - 1 - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}} - x + \frac{2}{x} = 1, x \neq 0$$

19. Misalkan N himpunan semua bilangan bulat positif.

Misalkan f : N $\to$ N adalah suatu fungsi sehingga f(x + 1) = f(x) + x untuk x $\in$ N dan f(1) = 5. Tentukan nilai dari f(2005).

20. Tentukan bilangan bulat positif terkecil n sehingga n meninggalkan sisa berturut-turut 1, 2, 3, 4 dan 5 jika dibagi 2, 3, 4, 5 dan 6.

2. Soal Uraian (3 Jam, Masing-masing Bernilai 7)

1. Misalkan a, b, c bilangan real positif. Tunjukkan bahwa

$$\frac{1}{a(1+b)} + \frac{1}{b(1+c)} + \frac{1}{c(1+a)} \geq \frac{3}{1+abc}$$

2. Misalkan ABCDE segilima talibusur sehingga AB = AE dan $\angle$BAE = 2$\angle$CAD. Misalkan F adalah suatu titik sehingga BF dan EF berturut-turut sejajar dengan CA dan DA. Misalkan H titik potong garis-garis tinggi $\triangle$ACD. Tunjukkan bahwa BHEF merupakan segiempat talibusur.

3. Misalkan □ himpunan semua bilangan bulat. Diberikan dua polinom $p(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, dimana $a, b, c \in$ □ dan $q(x) = x^2 - 40x + 2410$. Asumsikan $p(x) = 0$ has 3 memiliki 3 akar bilangan bulat, $p(2005) = -2005$, dan $p(q(x))$ tidak memiliki akar realno real. Tentukan nilai a.

4. Misalkan □ himpuna semua bilangan asli. Misalkan f : □ $\rightarrow$ □ adalah fungsi yang memenuhi $f(1) = 1$, $f(2n) = f(n)$, dan $f(2n + 1) = f(2n) + 1$, untuk semua bilangan bulat positif (asli) n. Tentukan nilai maksimum dari f(n) untuk $1 \le n \le 2005$.

5. Misalkan □ himpunan setmua bilangan bulat. Untuk setiap $a, b, c \in$ □, misalkan pula $F(a, b, c) = (a^3b - ab^3)(b^3c - bc^3)(c^3a - ca^3)$.
   a. Buktikan bahwa F(a, b, c) dapat dibagi oleh 160 untuk $a, b, c \in$ □ .
   b. Tentukan bilangan bulat positif terbesar n sehingga n dapat dibagi oleh F(a, b, c) untuk $a, b, c \in$ □ .

B. Soal Uraian Beregu (1.5 Jam, Masing-masing Bernilai 2)

1. Selesaikan $\left|x^2 - 6x + 1\right| < \frac{1}{2}x^2 - 3x + 5$.

2. Misalkan ABC segitiga dengan sisi-sisi a, b dan c sehingga $a + b = 4c$. Tunjukkan bahwa $\cot\frac{A}{2} . \cot\frac{B}{2} = \frac{5}{3}$.

3. Barisan $x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots$ didefinisikan dengan $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_{k+1} = x_k^2 + x_k$, untuk setiap $k \ge 1$. Tentukan bilangan bulat terbesar yang lebih kecil atau sama dengan
$$\frac{1}{x_1 + 1} + \frac{1}{x_2 + 1} + \ldots + \frac{1}{x_{2005} + 1}.$$

4. Misalkan a dan b adalahn dua bilangan bulat positif. Tunjukkan bahwa $\sqrt{2}$ selalu terletak antara $\frac{a}{b}$ dan $\frac{a + 2b}{a + b}$.

5. Tentukan semua triple (a, b, c) dari bilangan bulat ganjil positif sehingga $a < b < c$ dan $a^2 + b^2 + c^2$ merupakan bilangan empat digit yang semua digitnya sama.

6. Tunjukkan bahwa $x^2 + 8z = 3 + 2y^2$ tidak memiliki solusi bilangan positif x, y dan z.

7. Misalkan ABCDE segilima convex. Misalkan pula L, M, P dan Q masing-masing titik tengah dari ruas AB, CD, BC dan DE. Misalkan R dan S masing-masing merupakan titik tengah dari ruas LM dan PQ. Jika AE = 10 cm, tentukan SR.

8. Misalkan $\mathbb{R}$ himpunan semua bilangan real. Tentukan semua fungsi $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ yang memenuhi kondisi di bawah ini:
   (i). $f(2x) = f(x + y)f(x - y) + f(y - x)f(- x - y)$ untuk setiap $x, y \in \mathbb{R}$.
   (ii). $f(x) \geq 0$ untuk setiap $x \in \mathbb{R}$.

9. Misalkan a, b, c d bilangan real positif. Buktikan bahwa
   $$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{d} + \frac{d}{a} \geq \frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{d}{c} + \frac{a}{d}.$$

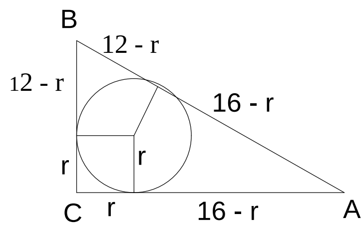
10. Misalkan n suatu bilangan bulat lebih besar dari 1 dan berlaku bahwa untuk setiap bilangan bulat positivf d, jika d membagi n, maka d + 1 membagi n + 1. Buktikan bahwa n bilangan prima.

A. Solusi Soal Individu

1. Solusi Soal Isian Singkat

1. Siswa perempuan yang menggunakan bis adalah 60% x 60% = 36%.
   Siswa laki-laki yang menggunakan bis adalah 50% x 40% = 20%.
   Jadi 56% siswa yang menggunakan bis ke sekolah.

2. Perhatikan gambar di bawah ini!



   Karena $BC^2 + AC^2 = 12^2 + 16^2$
   $= 20^2$
   $= AB^2$
   Maka $\angle ACB = 90^0$.
   Jika r jari-jari lingkaran dalam $\triangle$ ABC,
   Maka 20 = (12 - r) + (16 - r)
   = 28 – 2r
   $\Leftrightarrow$ r = 4.
   Jadi r = 4 cm.

3. Misalkan umur Ali sekarang adalah x tahun. Maka umur Lim sekarang adalah x + 11 tahun.
   Dalam waktu 7 tahun mendatang, umur Ali menjadi x + 7 tahun dan umur Lim menjadi x + 18 tahun.
   Karena x + 18 = 2(x + 7) $\Leftrightarrow$ x = 4.
   Umur mereka sekarang adalah x + (x + 11) = 2x + 11 = 8 + 11 = 19 tahun.

4. Karena AD = DC

Maka $\angle$DCA = θ, $\angle$ADB = 2θ, $\angle$ABD = 2θ.

Oleh karena itu,

$180^0 = \theta + 2\theta + 2\theta$

$= 5\theta$

Jadi $\theta = 36^0$.

5. $\cos^2 1^0 + \cos^2 2^0 + \cos^2 3^0 + \ldots + \cos^2 89^0$

$= (\cos^2 1^0 + \cos^2 89^0) + (\cos^2 2^0 + \cos^2 88^0) + \ldots + (\cos^2 44^0 + \cos^2 46^0) + \cos^2 45^0$

$= (\cos^2 1^0 + \sin^2 1^0) + (\cos^2 2^0 + \sin^2 2^0) + \ldots + (\cos^2 44^0 + \sin^2 44^0) + \cos^2 45^0$

$= 1 + 1 + \ldots + 1 + 1 + \left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)^2$

$= 44 + \frac{1}{2}$

$= 44\frac{1}{2}$.

6. $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{1}{y} = \frac{1}{3} - \frac{1}{x}$

$= \frac{x - 3}{3x}$

$\Leftrightarrow y = \frac{3x}{x - 3}$

$\Leftrightarrow y = \frac{3(x - 3) + 9}{x - 3}$

$\Leftrightarrow y = 3 + \frac{9}{x - 3}$

Agar y bilangan bulat, syaratnya $\frac{9}{x - 3}$ harus bilangan bulat. Agar $\frac{9}{x - 3}$ bulat, maka x – 3 harus faktor dari 9 yaitu – 9, - 3, - 1, 1, 3, dan 9. Karena $x \neq 0$, maka $x \in \{-6, 2, 4, 6, 12\}$. Jadi diperoleh (x, y) adalah (- 6, 2), (2, - 6), (4, 12), (6, 6), (12, 4).

7. Dari 1 sampai 9, hanya ada 1 bilangan bulat yang jumlah digitnya terbagi oleh 5, yaitu 5.

   Dari 10n sampai 10n + 9, dengan $1 \leq n \leq 199$, terdapat 2 bilangan bulat yang jumlah digitnya terbagi oleh 5 untuk masing-masing n..

   Jadi dari 2000 sampai 2005, hanya ada 1 bilangan bulat yang jumlah digitnya terbagi oleh 5, yaitu 2003.

   Jadi dari 1 sampai dengan 2005 terdapat 400 bilangan bulat yang jumlah digitnya terbagi oleh 5.

8. Karena $(a + b + c)^2 = (a^2 + b^2 + c^2) + 2(ab + bc + ac)$

   Maka $ab + bc + ac = \frac{80^2 - 2390}{2}$

   $= 2005$

9. Misalkan $\angle AEB = \alpha$ dan $\angle COD = \beta$.

   Karena OFEG segiempat talibusur, maka $\alpha + \beta = 180^0$.

   Karena $\angle CBD = \frac{\beta}{2}$ dan $\angle BCE = 90^0$.

   Maka $\alpha = 90^0 + \frac{\beta}{2}$.

   Dari dua persamaan $\alpha + \beta = 180^0$ dan $\alpha = 90^0 + \frac{\beta}{2}$ diperoleh

   $\angle AEB = \alpha = 120^0$.

10. Perhatikan bahwa $p(x^2 + 1) = p(x^2 + 2 - 1)$

Misalkan $y^2 = x^2 + 2$, diperoleh

$$\begin{aligned} p(x^2 + 1) &= p(y^2 - 1) \\ &= y^4 - 3y^2 + 3 \\ &= (x^2 + 2)^2 - 3(x^2 + 2) + 3 \\ &= x^4 + 4x^2 + 4 - 3x^2 - 6 + 3 \\ &= x^4 + x^2 + 1. \end{aligned}$$

11. Pada pukul 04:30, sudut antara jarum panjang dan jarum pendek adalah 45^0.

    Pada 5 menit berikutnya, jarum panjang bergerak sejauh 30^0 dan jarum pendek bergerak sejauh $\frac{5}{60} \times 30^0 = 2,5^0$.

    Jadi sudut antara jarum panjang dan jarum pendek pada pukul 04:35 adalah $75^0 - 2,5^0 = 72,5^0$.

12. Koefisien x adalah

    $1 - 2 + 3 - 4 + 5 - ... - 2004 + 2005$

    $= 1 + (- 2 + 3) + (- 4 + 5) + ... + (- 204 + 2005)$

    $= 1 + 1 + 1 + ... + 1$

    $= 1 + 1002$

    $= 1003$

13. Misalkan $p = \cos x + \cos y$.

    Diperoleh $p^2 = \cos^2 x + \cos^2 y + 2\cos x \cos y$.

    Perhatikan bahwa
    $$\begin{aligned} \frac{7}{4} &= \left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2 \\ &= (\sin x + \sin y)^2 \\ &= \sin^2 x + \sin^2 y + 2\sin x \sin y \end{aligned}$$

    Diperoleh

$p^2 + \frac{7}{4} = (\cos^2 x + \cos^2 y + 2\cos x \cos y) + (\sin^2 x + \sin^2 y + 2\sin x$

$\sin y)$

$= (\cos^2 x + \cos^2 y) + (\sin^2 x + \sin^2 y) + 2(\cos x \cos y + \sin x$

$\sin y)$

$= 2 + 2(\cos x \cos y + \sin x \sin y)$

$= 2 + 2\cos(x - y)$

Jadi $p^2 = \frac{1}{4} + 2\cos(x - y)$

Sehingga nilai maksimum p^2 adalah $\frac{1}{4} + 2 = \frac{9}{4}$.

Nilai maksimum p adalah $\frac{3}{2}$

Nilai maksimum 100p adalah 150.

14. Perhatikan bahwa

$2005 = (x + y) + (x - y) + xy + \frac{x}{y}$

$= 2x + xy + \frac{x}{y}$

$= \frac{x}{y}(y^2 + 2y + 1)$

$= \frac{x}{y}(y + 1)^2$.

Haruslah $(y + 1)^2 = 1$. Diperoleh $y = -2$.

Jadi tidak ada solusi.

15. Dari rata-rata aritmatika dari bilangan bulat dai 1 sampai n adalah kurang dari 205 diperoleh

$$\frac{n+1}{2} = \frac{\frac{n}{2}(n+1)}{n}$$

$= \frac{1+2+...+n}{n}$

$< 2005.$

Sehingga $n + 1 < 4010$.

Jadi $n < 4009$.

Akibatnya n terbesar adalah 4008.

16. Perhatikan bahwa

$0 = (a + b + c + d + e)^3$

$= (a^3 + b^3 + c^3 + d^3 + e^3) + 3a^2(b + c + d + e) + 3b^2(a + c + d + e) + 3c^2(a + b + d + e) + 3d^2(a + b + c + e) + 3e^2(a + b + c + d) + 6(abc + abd + abe + acd + ace + ade + bcd + bce + bde + cde)$

$= (a^3 + b^3 + c^3 + d^3 + e^3) - 3a^3 - 3b^3 - 3c^3 - 3d^3 - 3e^3 + 6(2005)$

Jadi

$2(a^3 + b^3 + c^3 + d^3 + e^3) = 6(2005)$

$\Leftrightarrow a^3 + b^3 + c^3 + d^3 + e^3 = 3(2005)$

$\Leftrightarrow a^3 + b^3 + c^3 + d^3 + e^3 = 6015.$

17. Diketahui

$S = \frac{1+2}{2} + \frac{1+2+3}{2^2} + \frac{1+2+3+4}{2^3} + ... \quad \dots (1)$

$\frac{S}{2} = \frac{1+2}{2^2} + \frac{1+2+3}{2^3} + \frac{1+2+3+4}{2^4} + ... \quad \dots (2)$

Dari persamaan (1) dan (2) diperoleh

$(1) - (2) \Leftrightarrow \frac{S}{2} = \frac{1+2}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{4}{2^3} + ... \quad \dots (3)$

Jika persamaan (3) dibagi 2 maka diperoleh

$\frac{S}{4} = \frac{1+2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \frac{4}{2^4} + ... \quad \dots (4)$

Dari persamaan (3) dan (4) diperoleh

$\frac{S}{4} = \frac{3}{2} + 0 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + ...$

$$= \frac{3}{2} + \frac{\frac{1}{2^3}}{1-\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{3}{2} + \frac{1}{4}$$

$$= \frac{7}{4}.$$

Jadi S = 7.

18. Pada persamaan $x^2 - 2\sqrt{x - 1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} - x + \frac{2}{x} = 1$, kedua ruas dikalikan dengan x, sehingga diperoleh

$$x^3 - 2x\sqrt{x - 1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} - x^2 + 2 - x = 0$$

$$\Leftrightarrow \; x^3 - 2\sqrt{x^3 - x^2 - x + 1} - x^2 + 2 - x = 0$$

$$\Leftrightarrow \; \left(x^3 - x^2 - x + 1\right) - 2\sqrt{x^3 - x^2 - x + 1} + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \; \left(\sqrt{x^3 - x^2 - x + 1} - 1\right)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \; \sqrt{x^3 - x^2 - x + 1} = 1$$

$$\Leftrightarrow \; x^3 - x^2 - x + 1 = 1$$

$$\Leftrightarrow \; x^3 - x^2 - x = 0$$

$$\Leftrightarrow \; x(x^2 - x - 1) = 0$$

Karena $x \neq 0$, maka

$$\Leftrightarrow \; x^2 - x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \; x = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(1)(-1)}}{2(1)}$$

$$= \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

19. Perhatikan bahwa

$f(1) + f(2) + f(3) + ... + f(n + 1)$

$= 5 + (f(1) + 1) + (f(2) + 2) + ... + (f(n) + n)$

Maka

$f(n + 1) = 5 + (1 + 2 + ... + n)$

$= 5 + \frac{n}{2}(n + 1)$

$f(2005) = 5 + \frac{2004 \times 2005}{2}$

$= 2009015$

20. Perhatikan bahwa

$n \equiv 1 (\text{mod } 2)$

$\equiv 2 (\text{mod } 3)$

$\equiv 3 (\text{mod } 4)$

$\equiv 4 (\text{mod } 5)$

$\equiv 5 (\text{mod } 8)$

Maka

$n + 1 \equiv 0 (\text{mod } 2)$

$\equiv 0 (\text{mod } 3)$

$\equiv 0 (\text{mod } 4)$

$\equiv 0 (\text{mod } 5)$

$\equiv 0 (\text{mod } 6)$

Jadi n + 1 = KPK dari 2, 3, 4, 5, dan 6

= 60

2. Solusi Soal Uraian

1. Perhatikan bahwa

$$\frac{1}{a(1 + b)} + \frac{1}{1 + abc} = \frac{1}{1 + abc}\left(\frac{1 + a}{a(1 + b)} + \frac{b(1 + c)}{1 + b}\right)$$

Maka

$$\frac{1}{a(1+b)}+\frac{1}{b(1+c)}+\frac{1}{c(1+a)}+\frac{3}{1+abc}=$$

$$\frac{1}{1+abc}\left(\frac{1+a}{a(1+b)}+\frac{b(1+c)}{1+b}+\frac{1+b}{b(1+c)}+\frac{c(1+a)}{1+}+\frac{1+c}{c(1+a)}+\frac{a(1+b)}{1+a}\right)$$

Dengan memenfaatkan ketaksamaan AM-GM diperoleh

$$=\frac{1+a}{a(1+b)}+\frac{b(1+c)}{1+b}+\frac{1+b}{b(1+c)}+\frac{c(1+a)}{1+}+\frac{1+c}{c(1+a)}+\frac{a(1+b)}{1+a}$$

≥ 6

Akibatnya

$$\frac{1}{a(1+b)}+\frac{1}{b(1+c)}+\frac{1}{c(1+a)}+\frac{3}{1+abc}\geq\frac{1}{1+abc}(6)$$

Jadi

$$\frac{1}{a(1+b)}+\frac{1}{b(1+c)}+\frac{1}{c(1+a)}\geq\frac{3}{1+abc}$$

2. Karena $\angle BAE = 2\angle CAD$

$= 2\angle BFE$

Maka A adalah pusat lingkaran luar $\triangle$ BFE.

Akibatnya AF = AB = AE.

Karena $\triangle$ BAE samakaki,

Maka $2\angle ABE = 180^0 - \angle BAE$.

Oleh karena itu $\angle ACE = \angle ABE$

$= 90^0 - \angle CAD$.

Akibatnya AD dann CE tegak lurus. Dengan cara yang sama dapat diperoleh bahwa AC dan BD juga tegak lurus. Maka BD dan CE berpotongan di H, orthocenter $\triangle$ ACD.

Karena BHE + $\angle CAD = 180^0$ dan $\angle CAD = \angle BFE$.

Maka $\angle BHE + \angle BFE = 180^0$.

Jadi BHEF adalah suatu segiempat talibusur.

3. Misalkan $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ akar-akar bulat berbeda dari p(x)

Maka p(x) = (x - α_1)(x - α_2)(x - α_3)

Kemudian q(x) dapat ditulis sebagai

q(x) = $(x - 20)^2 + 2010$

$\geq$ 2010

Karena persamaan p(q(x)) tidak memiliki akar real, maka

p(q(x)) = [q(x) - α_1][q(x) - α_2][q(x) - α_3]

$\neq$ 0 untuk setiap x real.

Akibatnya $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ < 2010.

Perhatikan bahwa

p(2005) = (2005 - α_1)(2005 - α_2)(2005 - α_3)

= - 2005

= - (1 x 1 x 2005)

= - (1 x 5 x 401)

Oleh karena itu

{(2005 - α_1), (2005 - α_2), (2005 - α_3)} = {- 1, 1, 2005}

atau

{(2005 - α_1), (2005 - α_2), (2005 - α_3)} = {- 1, 5, 401}

Sehingga {$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$} = {2006, 2004, 0}

atau {$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$} = {2006, 2000, 1604}

Jadi

a = - ($\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$)

= - 4010

atau

a = - 5610

4. Akan dicari formula eksplisit untuk f. Karena relasi rekursif melibatkan perkalian dengan 2 dan penambahan oleh 1, maka menuliskan bilangan dalam basis 2 adalah merupakan ide yang baik. Perlu diperhatikan

bahwa perkalian oleh $2 = 10_2$ adalah penambahan nol pada digit terakhir.

Akan dihitung

$f(10_2) = 1$, $f(11_2) = 2$, $f(110_2) = 2$.

Akan ditunjukkan dengan menggunakan induksi matematika bahwa f(n) sama dengan banyaknya 1 pada ekspansi biner dari n. Jika n genap, yaitu $n = 10_2.m$, maka menurut definisi $f(m) = f(10_2.m)$. Karena banyaknya 1 pada Misalkan $\mathbb{N}$ himpuna semua bilangan asli. Misalkan $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ adalah fungsi yang memenuhi $f(1) = 1$, $f(2n) = f(n)$, dan $f(2n + 1) = f(2n) + 1$, untuk semua bilangan bulat positif (asli) n. Tentukan nilai maksimum dari f(n) untuk $1 \leq n \leq 2005$ adalah 10.

5. Perhatikan bahwa

$$F(a, b, c) = (a^3b - ab^3)(b^3c - bc^3)(c^3a - ca^3)$$
$$= a^2b^2c^2(a^2 - b^2)(b^2 - c^2)(c^2 - a^2)$$
$$= a^2b^2c^2(a - b)(a + b)(b - c)(b + c)(c - a)(c + a)$$

a. Jelas bahwa a, b, dan c semuanya berbeda.

Perhatikan bahwa $F(1, 2, 3) = 2^5 3^3 5^1$

Akan ditunjukkan bahwa $5|F(a, b, c)$, untuk semua $a, b, c \in \mathbb{N}$. Jika 5 membagi salah satu dari a, b, atau c, maka $5|F(a, b, c)$.

Sekarang misalkan $a, b, c \neq 0 \pmod 5$.

Menurut Pigeon hole principle (Prinsip sarang merpati), salah satu dari $(a^2 - b^2)$, $(b^2 - c^2)$, $(c^2 - a^2)$ terbagi oleh 5, karena $a^2, b^2, c^2 \equiv \pm 1 \pmod 5$. Jadi $5|F(a, b, c)$, untuk semua $a, b, c \in \mathbb{N}$.

Selanjutnya kita akan mencari p terbesar sehingga $2^p|F(a, b, c)$, untuk semua $a, b, c \in \mathbb{N}$.

Misalkan $a \equiv b \equiv k \pmod 2$ dan $c \equiv k + 1$, dengan $k = 0, 1$.

Jika $k = 0$, maka $2^4|a^2b^2$ dan $2|(a^2 - b^2)$.

Jika $k = 1$, maka $2^2|c^2$ dan $2^3|(a^2 - b^2)$.

Sehingga diperoleh $p = 5$.

Jadi $160|F(a, b, c)$, untuk semua $a, b, c \in$ □ .

b. Akan dicari q terbesar sehingga $3^q|F(a, b, c)$, untuk semua $a, b, c \in$ □ .

Kita hanya akan melihat tiga kasus berikut ini (Kasus yang lain cukup mudah)

Kasus 1

Tanpa mengurangi keumuman, misalkan $a \equiv 0$, $b \equiv 1$, $c \equiv 2 \pmod 3$. Akibatnya $3^2|a^2$ dan $3|(b^2 - c^2)$.

Kasus 2

Tanpa mengurangi keumuman, misalkan $a \equiv b \equiv 1$, $c \equiv 2 \pmod 3$. Akibatnya $3|(a - b)$, $3|(b + c)$, dan $3|(c + a)$

Kasus 3

Tanpa mengurangi keumuman, misalkan $a \equiv b \equiv 2$, $c \equiv 1 \pmod 3$. Akibatnya $3|(a - b)$, $3|(b + c)$, dan $3|(c + a)$.

Dengan demikian $3^3|F(a, b, c)$ untuk semua $a, b, c \in$ □ .

Jadi bilangan bulat positif terbesar n sehinga n membagi $F(a, b, c)$ untuk $a, b, c \in$ □ adalah $2^5 3^3 5^1 = 4320$.

B. Solusi Soal Beregu

1. Perhatikan bahwa Selesaikan $x^2 - 6x + 1 = (x - 3)^2 - 8$ dan $\frac{1}{2}x^2 - 3x + 5 = \frac{1}{2}(x - 3)^2 + \frac{1}{2}$.

   Misalkan $y = (x - 3)^2$. Diperoleh $|y - 8| < \frac{1}{2}(y + 1)$ dan $y > 0$.

   Maka $-\frac{1}{2}(y + 1) < y - 8 < \frac{1}{2}(y + 1) \Leftrightarrow 5 < y < 17$.

   Aehingga $5 < (x - 3)^2 < 17$ yang berakibat $-\sqrt{17} < x - 3 < \sqrt{17}$ dan $x - 3 > \sqrt{5}$ atau $x - 3 < -.\sqrt{5}$.

   Jadi solusinya $(3 - \sqrt{17}, 3 - \sqrt{5}) \cup (3 + \sqrt{5}, 3 + \sqrt{17})$.

2. Dengan memanfaatkan aturan sinus,

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c} = k$$

Karena a + b = 4c, maka $\frac{\sin A}{k} + \frac{\sin B}{k} = 4\frac{\sin C}{k} = k$, dengan C = π - (A + B).

Oleh karena itu sin A + sin B = 4sin (A + B), yang ekivalen dengan

$$2\sin \frac{A + B}{2} .\cos \frac{A - B}{2} = 8 \sin \frac{A + B}{2} .\cos \frac{A + B}{2} .$$

Karena sin $\frac{A + B}{2} \neq 0$, maka

$$\cos \frac{A - B}{2} = 4\cos \frac{A + B}{2} .$$

Oleh karena itu

$$\cos \frac{A}{2} .\cos \frac{B}{2} + \sin \frac{A}{2} .\sin \frac{B}{2} = 4 \left(\cos \frac{A}{2} .\cos \frac{B}{2} - \sin \frac{A}{2} .\sin \frac{B}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow 3\cos \frac{A}{2} .\cos \frac{B}{2} = 5\sin \frac{A}{2} .\sin \frac{B}{2}$$

$$\text{Jadi } \cot \frac{A}{2} .\cot \frac{B}{2} = \frac{\cos \frac{A}{2}.\cos \frac{B}{2}}{\sin \frac{A}{2}.\sin \frac{B}{2}}$$

$$= \frac{5}{3}$$

3. Karena $x_{k+1} = x_k^2 + x_k$

$$= x_k(x_k + 1)$$

Maka

$$\frac{1}{x_{k+1}} = \frac{1}{x_k(x_k + 1)}$$

$$= \frac{1}{x_k} - \frac{1}{x_k + 1}$$

Oleh karena itu

$$\frac{1}{x_1+1}+\frac{1}{x_2+1}+\ldots+\frac{1}{x_{2005}+1}.$$

$$= \left(\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_2}\right)+\left(\frac{1}{x_2}-\frac{1}{x_3}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{x_{2005}}-\frac{1}{x_{2006}}\right)$$

$$= \frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_{2006}}$$

$$= 2 - \frac{1}{x_{2006}}$$

Karena $0 < \frac{1}{x_{2006}} < 1$, bagian bulat dari $\left[2 - -\frac{1}{x_{2006}}\right]$ adalah 1.

Jadi bilangan bulat terbesar yang kurangb atau sama dengan $\frac{1}{x_1+1}+\frac{1}{x_2+1}+\ldots+\frac{1}{x_{2005}+1}$. adalah 1.

4. Misalkan $\sqrt{2} < \frac{a}{b}$.

   Diperoleh $ab^2 < a^2$.

   Oleh karena itu $(a + 2b)^2 = a^2 + 4b^2 + 4ab$

   $< 2a^2 + 2b^2 + 4ab$

   $= 2(a + b)^2$

   Akibatnya $\frac{(a+2b)^2}{(a+b)^2} < 2$.

   Diperoleh $\frac{(a+2b)}{(a+b)} < \sqrt{2}$.

   Di lain pihak misalkan $\sqrt{2} > \frac{a}{b}$.

   Diperoleh $a^2 < 2b^2$.

   Oleh karena itu, $2(a + b)^2 = 2a^2 + 2b^2 + 4ab$

   $< a^2 + 4b^2 + 4ab$

   $= (a + 2b)^2$.

Akibatnya $2 > \dfrac{(a + 2b)^2}{(a + b)^2}$.

Diperoleh $\sqrt{2} < \dfrac{(a + 2b)}{(a + b)}$.

5. Misalkan a = 2n – 1, b = 2n + 1, dan c = 2n + 3.

   Diperoleh

   $$\left(2n - 1\right)^2 + \left(2n + 1\right)^2 + \left(2n + 3\right)^2 = 2n^2 + 12n + 11$$

   $$= 12n(n + 1) + 11.$$

   Bilangan 4 digit yang semua digitnya sama adalah 1111, 2222, ..., 9999.

   Jika masing-masing bilangan itu dikurangi oleh 11, hasilnya harus terbagi oleh 12. Diantara 1100, 2211, 3322, ..., 8877, 9988, dibuang yang tidak terbagi oleh 3 atau 4. Diperoleh hanya 5544 yang terbagi oleh 12 dengan pemfaktoran 5544 = 12 x 462

   = 12 x 21 x 22

   Sehingga n = 21.

   Perhatikan bahwa $5555 = (2.21 - 1)^2 + (2.21 + 1)^2 + (2.21 + 3)^2$

   $= 41^2 + 43^2 + 45^2$.

   Jadi 41, 43, 45 adalah tiga bilangan ganjil berurutan yang dimaksudkan.

6. Tulislah $x^2 = 3 – 8z + 2y^2$.

   Akan dibahas 2 kasus, yaitu y genap dan y ganjil.

   Misalkan y genap dan y = 2k.

   Diperoleh $x^2 = 3 – 8z + 8k^2$.

   Oleh karena itu $x^2 = 3 \pmod 8$.

   Karena sebarang bilangan kuadrat sempurna bersisa 0, 1, atau 4 jika dibagi oleh 8, maka kasus ini tidak mungkin.

   Sekarang misalkan y ganjil dan y 2k + 1.

   Diperoleh $x^2 = 3 – 8z + 2(2k + 1)^2$

   $= 3 – 8z + 8k^2 + 8k + 2$

   $= 5 – 8z + 8k^2 + 8k$.

Oleh karena itu $x^2 = 5 \pmod 8$, tidak mungkin dengan argumen serupa.

Jadi persamaan $x^2 + 8z = 3 + 2y^2$ tidak memiliki solusi bilangan bulat.

7. Misalkan T titik tengah BE.

   Karena QM || EC, TP || EC, maka QM || TP.

   Demikian j7uga karena QT || DB, MP ||DB, maka QT || MP.

   Oleh karena itu QMPT adalah jajargenjuang. Dapat ditunjukkan bahwa T, S, dan M segaris dengan S titi tengah TM.

   Pandang segitiga EAB, maka akan diperoleh EA = 2 TL.

   Selanjutnya pandang segitiga TLM, maka akan diperoleh TL = 2 RS.

   Jadi $RS = \frac{1}{4} EA$

   $= 2{,}5$ cm.

8. Solusinya adalah f adalah fungsi konstan 0 atau fungsi konstan $\frac{1}{2}$.

   Jelas bahwa kedua fungsi konstan itu memenuhi kondisi yang diberikan.

   Sebaliknya, misalkan f memenuhi kondisi yang diberikan.

   Ambil x = y, maka akan diperoleh

   $f(2x) = f(2x)f(0) + f(0)f(-2x)$.

   Kasus I

   $f(0) = 0$. Diperoleh $f(2x) = 0$ untuk semua $x \in \mathbb{R}$.

   Oleh karena itu, f adalah fungsi konstan 0.

   Kasus II

   $f(0) = c \neq 0$. Diperoleh $f(-2x) = \frac{1-c}{c} f(2x)$ untuk semua $x \in \mathbb{R}$.

   Ambil x = 0. Diperoleh $c = 1 - c \Leftrightarrow c = \frac{1}{2}$.

   Akibatnya $f(-x) = f(x)$ untuk semua $x \in \mathbb{R}$.

   Oleh karena itu

   $f(2x) = f(x+y)f(x-y) + f(x-y)f(x+y)$

   $= 2f(x+y)f(x-y)$

Ambil x = 0, diperoleh

$$\frac{1}{2} = f(0)$$

$$= 2f(y)f(-y)$$

$$= 2[f(y)]^2$$

Jadi $f(y) = \frac{1}{2}$ untuk semua $y \in □$, karena $f(y) \geq 0$.

9. Dengan memanfaatkan ketaksamaan AM-GM akan diperoleh

$$1 + \frac{b^4}{c^4} + \frac{c^4}{d^4} + \frac{d^4}{a^4} \geq \frac{4b}{a},$$

$$1 + \frac{a^4}{b^4} + \frac{c^4}{d^4} + \frac{d^4}{a^4} \geq \frac{4c}{b},$$

$$1 + \frac{a^4}{b^4} + \frac{b^4}{c^4} + \frac{d^4}{a^4} \geq \frac{4d}{c},$$

$$1 + \frac{a^4}{b^4} + \frac{b^4}{c^4} + \frac{c^4}{d^4} \geq \frac{4a}{d}, \text{ dan}$$

$$\frac{a^4}{b^4} + \frac{b^4}{c^4} + \frac{c^4}{d^4} + \frac{d^4}{a^4} \geq 4.$$

Dengan menjumlahkan kelima ketaksamaan di atas diperoleh kesimpulan seperti pada soal.

10. Misalkan p bilangan prima terkecil pembagi n dan misalkan $d = \frac{n}{p}$.

Diperoleh (d + 1) | (n + 1) dan $\frac{np + p}{p + p} = \frac{p(n + 1)}{p(d + 1)} \in □^{+}$.

Sehingga (n + p) | (np + p). Karena (n + p) | (np + p^2) juga, maka (n + p) | (p^2 - p), akibatnya n < p^2. Sehingga d < p. Karena p bilangan prima terkecil pembagi n dan d | n, maka d = 1. Jadi n = p.

ASIAN PACIFIC MATHEMATICS OLYMPIADS (APMO)

English Version Problem

---

1. The polynomial $a_8x^8 + a_7x^7 + \ldots + a_0$ has $a_8 = 1$, $a_7 = -4$, $a_6 = 7$ and all its roots positive and real. Find the possible values for a_0.

2. A unit square lies across two parallel lines a unit distance apart, so that two triangular areas of the square lie outside the lines. Show that the sum of the perimeters of these two triangles is independent of how the square is placed.

3. $k \geq 14$ is an integer and p is the largest prime smaller than k. k is chosen so that $p \geq \frac{3k}{4}$. Prove that 2p does not divide $(2p - k)!$, but that n does divide $(n - k)!$ for composite $n > 2p$.

4. Show that $(a^n + b^n)^{\frac{1}{n}} + (b^n + c^n)^{\frac{1}{n}} + (c^n + a^n)^{\frac{1}{n}} < 1 + \frac{2^{\frac{1}{n}}}{2}$, where $n > 1$ is an integer and a, b, c are the sides of a triangle with unit perimeter.

5. Find the smallest positive integer k such that among any k people, either there are 2m who can be divided into m pairs of people who know each other, or there are 2n who can be divided into n pairs of people who do not know each other.

OLIMPIADE MATEMATIKA ASIA PASIFIK
(APMO)
Soal Bahasa Indonesia

---

1. Misalkan a, b, c, d, e, dan f adalah bilangan real sedemikian hingga polinom
   $p(x) = x^8 - 4x^7 + 7x^6 + ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f$
   dapat difaktorkan menjadi delapan faktor linier $x - x_i$, dengan $x_i > 0$ untuk I = 1, 2, …, 8. Tentukan semua nilai yang mungkin untuk f.

2. Misalkan ABCD adalah sepotong karton berbentuk bujursangkar dengan panjang sisi a satuan. Pada sebuah bidang terdapat 2 gariss sejajar l_1 dan l_2 yang terpisah sejauh a satuan. Bujursangkar ABCD kemudian diletakkan pada bidang sedemikian hingga sisi-sisi AB dan AD memotong l_1 berturut-turut di titik E dan F. Selain itu, sisi-sisi CB dan CD memotong l_2 berturut-turut di titik G dan H. Misalkan keliling dari segitiga AEF dan segitiga CGH berturut-turut adalah m_1 dan m_2. Buktikan bahwa bagaimanapun bujursangkar tersebut diletakkan pada bidang, $m_1 + m_2$ adalah selalu konstan.

3. Misalkan $k \geq 14$ adalah bilangan bulat, dan misalkan p_k adalah bilangan prima terbesar yang lebih kecil dari k. Asumsikan bahwa $p_k \geq \frac{3k}{4}$. Misalkan n adalah bilangan bulatkomposit. Buktikan
   (a). jika $n = 2p_k$, maka n tidak membagi $(n - k)!$
   (b). jika $n > 2p_k$, maka n membagi $(n - k)!$

4. Misalkan a, b, dan c adalah sisi-sisi dari suatu segitiga, dengan $a + b + c = 1$, dan misalkan $n \geq 2$ adalah suatu bilangan bulat. Tunjukkan bahwa

$$(a^n + b^n)^{\frac{1}{n}} + (b^n + c^n)^{\frac{1}{n}} + (c^n + a^n)^{\frac{1}{n}} < 1 + \frac{2^{\frac{1}{n}}}{2}.$$

5. Diberikan dua bilangan bulat positif m dan n, tentukan bilangan bulat positif terkecil k sedemikian sehingga diantara sebarang k orang, berlaku salah satu dari terdapat 2m orang dari mereka yang membentuk n pasangan yang tidak saling mengenal.

Solusi (Bahasa Indonesia)

1. Mula-mula kita tulis

$x^8 - 4x^7 + 7x^6 + ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f = (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_8)$

Perhatikan bahwa

$$\sum_{i=1}^{8} x_i = 4, \qquad \dots (1)$$

$$\sum_{1 \le i < j \le 8} x_i x_j = 7 \quad \dots (2)$$

$x_1 x_2 x_3 \dots x_8 = f \dots (3)$

Dari persamaan (1) diperoleh

$$16 = \left(\sum_{i=1}^{8} x_i \right)^2$$

$$= \sum_{i=1}^{8} x_i^{\,2} + 2 \sum_{1 \le i < j \le 8} x_i x_j$$

Substitusikan persamaan (2)

$$= \sum_{i=1}^{8} x_i^{\,2} + 2(7)$$

$$= \sum_{i=1}^{8} x_i^{\,2} + 14$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{8} x_i^{\,2} = 2$$

Selanjutnya

$$\sum_{1 \le i < j \le 8} \left(x_i^{\,2} + x_j^{\,2} \right) = \sum_{i=1}^{7} \sum_{j=i+1}^{8} \left(x_i^{\,2} + x_j^{\,2} \right)$$

$$= \sum_{j=i+1}^{7} x_i^{\,2} \sum_{j=i+1}^{8} 1 + \sum_{j=2}^{8} x_j^{\,2} \sum_{j=i+1}^{8} 1$$

$$= \sum_{j=i+1}^{7} x_i^{\,2} \left(8 - i \right) \sum_{j=2}^{8} x_j^{\,2} \sum_{j=i+1}^{8} \left(j - 1 \right)$$

$$= 7x_1^{\,2} + \sum_{j=i+1}^{7} [x_i^{\,2} \left(8 - i \right) + x_i^{\,2} \left(i - 1 \right)] + 7x_8^{\,2}$$

$$= 7\sum_{i=1}^{8} x_i^{\,2}$$

$$= 7(2)$$

Oleh karena itu

$$\sum_{1 \le i < j \le 8} \left(x_i - x_j\right)^2 = \sum_{1 \le i < j \le 8} \left(x_i^{\,2} + x_j^{\,2} - 2x_i x_j\right)$$

$$= 7(2) - 2(7)$$

$$= 0$$

Akibatnya

$x_i - x_j = 0,\ 1 \le i < j \le 8.$

Dengan mengambil i = 1, akan diperoleh $x_1 = x_2 = \ldots = x_8$

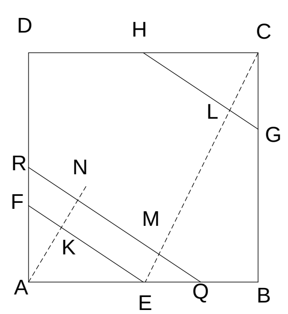
Karena $4 = \sum_{i=1}^{8} x_i = 8x_1$

Maka $x_1 = x_2 = \ldots = x_8 = \frac{1}{2}$

Jadi $f = x_1 x_2 x_3 \ldots x_8$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^8$$

2. Perhatikan gambar di bawah ini!



Kita perhatikan bahwa segitiga AEF sebangun dengan segitiga CHG karena keduanya memiliki tiga sisi yang sejajar.

Oleh karena itu terdapat bilangan real c > 0 sehingga

$$\frac{CH}{AE} = \frac{CG}{AF} = \frac{HG}{EF} = c$$

Sehingga kita dapat memperoleh

m_2 = CH + HG + CG

= c(AE) + c(EF) + c(AF)

= c(AE + EF + AF)

= $c(m_1)$

Maka $m_1 + m_2 = (1 + c)m_1$

Misal AK adalah garis tinggi dari A ke sisi EF dan CL adalah garis tinggi dari C ke sisi GH. Misalkan pula l_3 adalah garis melalui titik C yang sejaar dengan l_1 (dan l_2). Misalkan d adalah jarak dari A ke l_3. Sifat sebangun dari segitiga AEF dan segitiga CHG menyebabkan $\frac{CL}{AK} = c$.

Selanjutnya kita amati pula bahwa

AK + CL = d – a,

Akibatnya

$(1 + c)AK = d - a$ dan $m_1 + m_2 = \frac{m_1(d - a)}{AK}$.

Langkah berikutnya adalah menarik garis l_4 yang sejajar l_3 dan berjarak a dari C, sehingga A dan l_4 berada pada pihak yang sama terhadap l_3.

Andaikan l_4 memotong sisi-sisi AB dan AD berturut-turut di Q dan R. Misalkan M terletak pada l_4 sehingga CM tegaklurus terhadap l_4.

Kita amati bahwa segitiga CMQ kongruen (sama) dengan segitiga CBQ. Begitu juga dengan segitiga CMR dan CDR.

Akibatnya

QM = QB dan MR = DR.

Oleh karena itu kita memperoleh

Keliling segitiga AQR = m_3

= AQ + QR + RA

= AQ + QM + MR + RA

= AQ + QB + DR + RA

= AB + DA

= 2a.

Perhatikan bahwa segitiga AEF sebangun dengan segitiga AQR. Misalkan AN adalah garis tinggi dari A ke sisi QR. Andaikan perbandingan segitiga AQR terhadap AEF adalah k, maka

$$\frac{m_3}{m_1} = \frac{AN}{AK} = k,$$

Akibatnya,

$$\frac{m_1 AN}{AK} = m_3 = 2.$$

Jadi $m_1 + m_2 = 2$.

Dalam hal ini, 2 sebagai konstanta yang independen (tidak bergantung pada bagaimana persegi ABCD ditempatkan).

3. (a). Misal $n = 2p_k$.

Karena $p_k < k$,

maka $n - k = 2p_k - k$

$< 2p_k - p_k$

$= p_k$

Andaikan $n = 2p_k \mid (n - k)!$

Maka $p_k \mid (n - k)!$

Karena p_k bilangan prima, maka haruslah p_k membagi m, untuk suatu bilangan asli $m \le n - k$. Sehingga $p_k \le m \le n - k$ yang merupakan suatu sangkalan terhadap pengandaian semula (kontradiksi).

Akibatnya, haruslah $n \nmid (n - k)!$

(b). Misalkan $n > 2p_k$.

Karena $n > 2p_k \ge \frac{3k}{2}$

Maka $k < \frac{2n}{3}$ dan $n - k > \frac{n}{3}$.

Selanjutnya perhatikan bahwa $k \ge 14$, maka $p_k \ge 13$, akibatnya $n > 2p_k \ge 26$.

Misalkan sekarang $n = ab$, dengan $a > b \ge 3$.

Maka $b < a = \frac{n}{b} \le \frac{n}{3} < n - k$.

Akibatnya a dan b adalah dua unsur berbeda himpunan {1, 2, ..., n - k}, sehingga n = ab | (n - k)!. Ini berarti jika a = ab, dengan a > b $\geq$ 3, maka n | (n - k)!.

Pandang kasus n = 2^e untuk suatu $e \in \square$.

Karena n $\geq$ 26, maka e $\geq$ 5.

Pilihlah a = 2^{e-2} $\geq$ 2^3 = 8 dan b = 2^2 = 4.

Maka n = ab, dengan a > b > 3, sehingga n | (n - k)!

Selanjutnya untuk kasus n memiliki faktor prima ganjil p $\geq$ 3.

Untuk subkasus p $\neq \frac{n}{p}$ dan $\frac{n}{p} \geq 3$, diperoleh n | (n - k)!

Untuk subkasus p = $\frac{n}{p}$, n = p^2 , karena n $\geq$ 26, p > 6.

Diperoleh juga n – k > $\frac{p^2}{3}$ > 2p.

Akibatnya, p dan 2p adalah dua unsur berbeda himpunan {1, 2, ..., n - k}, sehingga $2p^2$ = p(2p) | (n - k)!. Dengan demikian, karena n = p^2 | $2p^2$, maka n | (n - k)!.

Terakhir kita pandang subkasus $\frac{n}{p}$ < 3.

Karena n merupakan bilangan komposit, maka haruslah $\frac{n}{p}$ = 2 $\Leftrightarrow$ n = 2p.

Karena n > $2p_k$, maka p > p_k. Dari definisi p_k, haruslah p $\geq$ k. Sehingga diperoleh n – k = 2p – k $\geq$ p.

Karena p bilangan prima ganjil, maka n – k $\geq$ p > 2. Akibatnya 2 dan p adalah dua unsur berbeda himpunan {1, 2, ..., n - k}, Ini dapat disimpulkan bahwa n = 2p | (n - k)!.

4. Tanpa kehilangan sifat keumuman (wlog), anggaplah 0 < a $\leq$ b $\leq$ c.

   Karena a + b > c dan a + b + c = 1, maka

$$\frac{2^{\frac{1}{n}}}{2} = \frac{2^{\frac{1}{n}}}{2}(a + b + c)$$

$$> \frac{2^{\frac{1}{n}}}{2}(c + c)$$

$$= 2^{\frac{1}{n}} c$$

$$= \left(2c^n\right)^{\frac{1}{n}}$$

$$\geq \left(b^n + c^n\right)^{\frac{1}{n}} \qquad \ldots \text{(i)}$$

Karena a $\leq$ c, maka dengan memanfaatkan aturan Binomial Newton,

$$\left(c + \frac{a}{2}\right)^n = c^n + nc^{n-1}\frac{a}{2} + L$$

$$> c^n + \frac{n}{2}ac^{n-1}$$

$$\geq c^n + ac^{n-1}$$

$$\geq c^n + a^n$$

Dengan L adalah suku-suku binomial lainnya.

Maka

$$(c^n + a^n)^{\frac{1}{n}} < c + \frac{a}{2} \qquad \ldots \text{(ii)}$$

Dengan cara yang sama kita dapat menukar c dengan b, sehingga diperoleh

$$(b^n + a^n)^{\frac{1}{n}} < b + \frac{a}{2} \qquad \ldots \text{(iii)}$$

Dengan menjumlahkan persamaan (i), (ii), dan (iii) diperoleh

$$(a^n + b^n)^{\frac{1}{n}} + (b^n + c^n)^{\frac{1}{n}} + (c^n + a^n)^{\frac{1}{n}}$$

$$< b + \frac{a}{2} + \frac{2^{\frac{1}{n}}}{2} + c + \frac{a}{2}$$

$$= a + b + c + \frac{2^{\frac{1}{n}}}{2}$$

$$= 1 + \frac{2^{\frac{1}{n}}}{2}.$$

5. Misalkan bilangan bulat positif terkecil k yang memenuhi kondisi seperti pada soal adalah r(m, n).

   Mula-mula kita klaim bahwa r(m, n) = 2(m, n) – min(m, n) – 1.

   Dalam soal disebutkan bahwa terdapat sifat kesimetrisan, maka r(n, m) = r (m, n), akibatnya yang perlu diperiksa hanyalah kasus $m \geq n$ yang kemudian membuktikan bahwa r(m, n) = 2m + n – 1.

   Akan ditunjukka bahawa r(m, n) $\geq$ 2m + n – 1, untuk setiap bilangan bulat positif m, n, dengan memberikan contoh bahwa k = 2m + n – 2 tidak memenuhi kondisi pada soal. Kita berikan dua kelompok orang. Kelompok pertama terdiri atas 2m – 1 orang yang saling mengenal satu sama lain di dalam kelompok tersebut., sedangkan kelompok kedua terdiri atas n – 1 orang yang tidak mengenal satu pun orang lain baik di kelompok pertama maupun di kelompok kedua. Maka dari 2m + n – 2 orang dalam kedua kelompok tersebut kita tidak dapat mengambil 2m orang yang membentuk m pasangan yang saling mengenal atau mengambil 2n orang yang membentuk n pasangan yang saling tidak mengenal. Jadi haruslah r(m, n) $\geq$ 2m + n – 1.

   Selanjutnya kita akan tunjukan bahwa r(m, n) $\leq$ 2m + n – 1. Ini kita lakukan dengan menunjukkan bahwa r(m, n) $\leq$ r(m – 1, n - 1) + 3 untuk semua $m \geq n \geq 2$, selanjutnya mengunakan induksi matematika untuk melengkapkan pembuktian.

   Misalkan G adalah sebuah kelompok yang terdiri atas t = r(m – 1, n - 1) + 3 orang. Dari bagian pertama kita memperoleh t $\geq$ 2(m - 1) + (n - 1) – 1 + 3 = 2m + n – 1 $\geq$ 2m $\geq$ 2n. Jika semua anggota G saling mengenal, maka kita dapat mengambil 2m orang yang membentuk m pasangan yang saling mengenal. Demikian pula, jika setiap anggota G tidak mengenal setiap anggota lainnya, maka kita dapat mengambil 2n orang yang membentuk n pasangan yang saling tidak mengenal.

   Selanjutnya anggaplah kedua situasi di atas tidak terjadi. Maka terdapat tiga anggota G, sebut a, b, dan c sehingga a dan b saling mengenal, tetapi a dan c saling tidak mengenal. Sekarang pandang kelompok H yang diperoleh dengan cara mengeluarkan a, b, dan cketiganya dari G. Selanjutnya berati sekarang H terdiri atas r(m – 1, n - 1) anggota. Mengikuti definisi r(m, n), haruslah (i) terdapat

$2(m - 1)$ anggota H tyang membentuk $m – 1$ pasangan yang saling mengenal, atau (ii) terdapat $2(n - 1)$ angggota H yang membentuk $n – 1$ pasangan yang saling tidak mengenal.

Pada kasus (i), kita gabungkan pasangan (a, b) untuk memperoleh 2n anggota G yang membentuk m pasangan yang saling mengenal. Sedangkan dalam kasus (ii), kita gabungkan pasangan (a, c) untuk memperoleh 2n anggota G yang membentuk n pasangan yang saling tidak mengenal. Jadi $t = r(m – 1, n - 1) + 3$ memenuhi kondisi pada soal, sehingga $r(m, n) \leq t$.

Perhatikan bahwa $r(1, 1) = 2$ karena setiap dua orang akan saling mengenal atau saling tidak mengenal. Anggaplah $r(m – 1, 1) = 2(m - 1)$. Akan kita tunjukkan bahwa di antara 2m orang akan selalu terdapat sepasang orang yang saling tidak mengenal atau ke-2m orang tersebut dapat membentuk m pasangan yang saling mengenal. Misalkan tidak ada pasangan yang saling tidak mengenal di antara 2m orang. Ini berarti bahwa setiap orang saling mengenal. Kemudia keluarkan a dan b dari kelompok, pandang $2(m - 1)$ orang sisanya. Tidak akan ada pasangan yang saling tidak mengenal di antara kelompok sisa ini. Akibatnya mereka dapat membentuk $m – 1$ pasangan yang saling mengenal. Kembalikan pasangan (a, b) untuk memperoleh m pasangan yang saling mengenal. Jadi $2m \geq r(m, 1) \geq 2m$, yaitu $r(m, 1) = 2m$, untuk semua bilangan bulat positif m.

Kita gunakan prinsip induksi matematika untuk memperoleh $2m + n – 1 \leq r(m, n) \leq r(m – 1, n - 1) + 3 = 2(m - 1) + (n - 1) – 1 + 3 = 2m + n – 1$, yaitu $r(m, n) = 2m + n – 1$, untuk semua bilangan bulat positif m, n.

LAMPIRAN I

INTERNATIONAL MATHEMATICS OLYMPIADS 2002

(IMO 2002)

---

1. S is the set of all (h, k) with h, k non-negative integers such that $h + k < n$. Each element of S is colored red or blue, so that if (h, k) is red and $h' \leq h$, $k' \leq k$, then (h', k') is also red. A type 1 subset of S has n blue element with different firt member and a type 2 subset of S has n blue elements with different second members. Show that there are the same number of type 1 and type 2 subsets.sssssw2

Solution

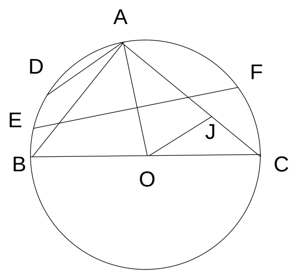
Let a_i be the number of blue members (h, k) in S with h = i, and let b_i be the number of blue members (h, k) with k = i. It is sufficient to show that $b_0, b_1, \ldots, b_{n-1}$ is a rearrangement of $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ (because the number of type 1 subsets is the product of the ai and the number of type 2 subsets is the product of the b_i).

Let c_i be the largest k such that (i, k) is red. If (i, k) is blue for all k then we put $c_i = -1$. Note that if $i < j$, then $c_i \geq c_j$, since if (j, c_i) is red, then so is (i, c_i). Note also that (i, k) is red for $k \leq c_i$, so the sequence $c_0, c_1, \ldots, c_{n-1}$ completely defines the coloring of S.

Let S_i be the set with the sequence $c_0, c_1, \ldots, c_i, -1, \ldots, -1$, so that $S_{n-1} = S$. We also take S_{-1} as the set with the sequence -1, -1, ... , -1, so that all its members are blue. We show that the rearrangement result is true for S_{-1} and that if it is true for S_i then it is true for S_{i+1}. It is obvious for S_{-1}, because both ai and bi are n, n-1, ... , 2, 1. So suppose it is true for S_i (where $i < n - 1$). The only difference between the a_j for S_i and for S_{i+1} is that $a_{i+1} = n – i - 1$ for S_i and $(n – i - 1) - (c_{i+1} + 1)$ for S_{i+1}. In other words, the number $n – i - 1$ is replaced by the number $n – i – c - 2$, where $c = c_{i+1}$. The difference in the b_j is that 1 is deducted from each of $b_0, b_1, \ldots, b_c$. But these numbers are just $n – i - 1$, $n – i - 1$, $n – i - 2$, ... , $n – i – c - 1$. So the effect of deducting 1 from each is to replace $n – i - 1$ by $n – i – c - 2$, which is the same change as was made to the a_j. So the rearrangement result also holds for S_{i+1}. Hence it holds for S.

2. BC is a diameter of a circle center O. A is any point on the circle with angle AOC > 60^o. EF is the chord which is the perpendicular bisector of AO. D is the midpoint of the minor arc AB. The line through O parallel to AD meets AC at J. Show that J is the incenter of triangle CEF.

Solution



F is equidistant from A and O. But OF = OA, so OFA is equilateral and hence angle AOF = 60^o. Since angle AOC > 60^o, F lies between A and C. Hence the ray CJ lies between CE and CF.

D is the midpoint of the arc AB, so angle DOB = $\frac{1}{2} \angle$ AOB = $\angle$ ACB. Hence DO is parallel to AC. But OJ is parallel to AD, so AJOD is a parallelogram. Hence AJ = OD. So AJ = AE = AF, so J lies on the opposite side of EF to A and hence on the same side as C. So J must lie inside the triangle CEF.

Also, since EF is the perpendicular bisector of AO, we have AE = AF = OE, so A is the center of the circle through E, F and J. Hence angle EFJ = $\frac{1}{2} \angle$ EAJ. But $\angle$ EAJ = $\angle$ EAC (same angle) = $\angle$ EFC. Hence J lies on the bisector of angle EFC.

Since EF is perpendicular to AO, A is the midpoint of the arc EF. Hence $\angle$ ACE = $\angle$ ACF, so J lies on the bisector of $\angle$ ECF. Hence J is the incenter.

Many thanks to Dirk Laurie for pointing out that the original version of this solution failed to show the relevance of $\angle$ AOC > 60^o. According to the official marking scheme, one apparently lost a mark for failing to show J lies inside CEF.

3. Find all pairs of integers m > 2, n > 2 such that there are infinitely many positive integers k for which $(k^n + k^2 - 1)$ divides $(k^m + k - 1)$.

Solution

Answer: m = 5, n = 3.

Obviously m > n. Take polynomials q(x), r(x) with integer coefficients and with degree r(x) < n such that $x^m + x - 1 = q(x)(x^n + x^2 - 1) + r(x)$. Then $x^n + x^2 - 1$ divides r(x) for infinitely many positive integers x. But for sufficiently large x, $x^n + x^2 - 1 > r(x)$ since r(x) has smaller degree. So r(x) must be zero. So $x^m + x - 1$ factorises as $q(x)(x^n + x^2 - 1)$, where $q(x) = x^{m-n} + a_{m-n-1} x^{m-n-1} + \dots + a_0$.

At this point I use an elegant approach provided by Jean-Pierre Ehrmann

We have $(x^m + x - 1) = x^{m-n}(x^n + x^2 - 1) + (1 - x)(x^{m-n+1} + x^{m-n} - 1)$, so $(x^n + x^2 - 1)$ must divide $(x^{m-n+1} + x^{m-n} - 1)$. So, in particular, $m \geq 2n - 1$. Also $(x^n + x^2 - 1)$ must divide $(x^{m-n+1} + x^{m-n} - 1) - x^{m-2n+1}(x^n + x2 - 1) = x^{m-n} - x^{m-2n+3} + x^{m-2n+1} - 1$ (*).

At this point there are several ways to go. The neatest is Bill Dubuque's:

(*) can be written as $x^{m-2n+3}(x^{n-3} - 1) + (x^{m-(2n-1)} - 1)$ which is < 0 for all x in (0, 1) unless n - 3 = 0 and m - (2n - 1) = 0. So unless n = 3, m = 5, it is has no roots in (0, 1). But $x^n + x^2 - 1$ (which divides it) has at least one becaause it is -1 at x = 0 and +1 at x = 1. So we must have n = 3, m = 5. It is easy to check that in this case we have an identity.

Two alternatives follow. Jean-Pierre Ehrmann continued:

If m = 2n-1, (*) is $x^{n-1} - x^2$. If n = 3, this is 0 and indeed we find m = 5, n = 3 gives an identity. If n > 3, then it is $x^2(x^{n-3} - 1)$. But this has no roots in the interval (0, 1), whereas $x^n + x^2 - 1$ has at least one (because it is -1 at x = 0 and +1 at x = 1), so $x^n + x^2 - 1$ cannot be a factor.

If m > 2n-1, then (*) has four terms and factorises as $(x - 1)(x^{m-n-1} + x^{m-n-2} + \dots + x^{m-2n+3} + x^{m-2n} + x^{m-2n-1} + \dots + 1)$. Again, this has no roots in the interval (0, 1), whereas $x^n + x^2 - 1$ has at least one, so $x^n + x^2 - 1$ cannot be a factor.

François Lo Jacomo, having got to $x^n + x^2 - 1$ divides $x^{m-n+1} + x^{m-n} - 1$ and looking at the case $m - n + 1 > n$, continues:

$x^n + x^2 - 1$ has a root r such that 0 < r < 1 (because it is -1 at x = 0 and + 1 at x = 1). So $r^n = 1 - r^2$. It must also be a root of $x^m + x - 1$, so $1 - r = r^m \leq r^{2n} = (1 - r^2)^2$. Hence (1 -

$r^2)^2$ - (1 - r) = (1 - r) r (1 - r - r^2) = 0, so 1 - r - r^2 = 0. Hence rn = 1 - r^2 = r, which is impossible.

4. The positive divisors of the integer n > 1 are $d_1 < d_2 < ... < d_k$, so that $d_1 = 1$, $d_k = n$. Let $d = d_1d_2 + d_2d_3 + ... + d_{k-1} d_k$. Show that $d < n^2$ and find all n for which d divides n^2.

Solution

$d_{k+1-m} \le \frac{n}{m}$. So $d < n^2(\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + ...)$. The inequality is certainly strict because d has only finitely many terms.

But $\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + ... = (\frac{1}{1} - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + (\frac{1}{3} - \frac{1}{4}) + ...$

$= 1$.

So $d < n^2$.

Obviously d divides n^2 for n prime. Suppose n is composite. Let p be the smallest prime dividing n. Then $d > \frac{n^2}{p}$. But the smallest divisor of n^2 apart from 1 is p, so if d divides n^2, then $d \le \frac{n^2}{p}$. So d cannot divide n^2 for n composite.

5. Find all real-valued functions f on the reals such that (f(x) + f(y)) (f(u) + f(v)) = f(xu - yv) + f(xv + yu) for all x, y, u, v.

Solution

Answer: there are three possible functions: (1) f(x) = 0 for all x; (2) $f(x) = \frac{1}{2}$ for all x; or (3) $f(x) = x^2$.

Put x = y = 0, u = v, then 4 f(0) f(u) = 2 f(0). So either $f(u) = \frac{1}{2}$ for all u, or f(0) = 0. $f(u) = \frac{1}{2}$ for all u is certainly a solution. So assume f(0) = 0.

Putting y = v = 0, f(x) f(u) = f(xu) (*). In particular, taking x = u = 1, $f(1)^2 = f(1)$. So f(1) = 0 or 1. Suppose f(1) = 0. Putting x = y = 1, v = 0, we get 0 = 2f(u), so f(x) = 0 or all x. That is certainly a solution. So assume f(1) = 1.

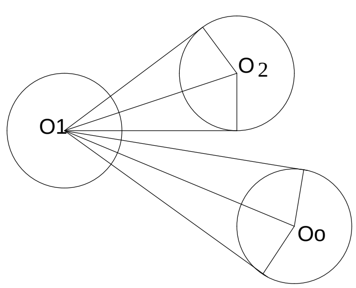
Putting x = 0, u = v = 1 we get 2 f(y) = f(y) + f(-y), so f(-y) = f(y). So we need only consider f(x) for x positive. We show next that $f(r) = r^2$ for r rational. The first step is to show that $f(n) = n^2$ for n an integer. We use induction on n. It is true for n = 0 and 1. Suppose it is true for n - 1 and n. Then putting x = n, y = u = v = 1, we get 2f(n) + 2 = f(n-1) + f(n+1), so $f(n+1) = 2n^2 + 2 - (n-1)^2 = (n+1)^2$ and it is true for n+1. Now (*) implies that $f(n)\ f(\frac{m}{n}) = f(m)$, so $f(\frac{m}{n}) = \frac{m^2}{n^2}$ for integers m, n. So we have established $f(r) = r^2$ for all rational r.

From (*) above, we have $f(x^2) = f(x)^2 \geq 0$, so f(x) is always non-negative for positive x and hence for all x. Putting u = y, v = x, we get $(f(x) + f(y))^2 = f(x^2 + y^2)$, so $f(x^2 + y^2) = f(x)^2 + 2f(x)f(y) + f(y)^2 \geq f(x)^2 = f(x^2)$. For any u > v > 0, we may put $u = x^2 + y^2$, $v = x^2$ and hence $f(u) \geq f(v)$. In other words, f is an increasing function.

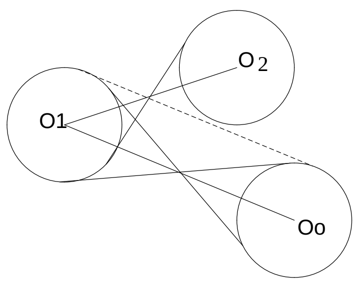
So for any x we may take a sequence of rationals r_n all less than x we converge to x and another sequence of rationals s_n all greater than x which converge to x. Then $r_n^2 = f(r_n) \leq f(x) \leq f(s_n) = s_n^2$ for all x and hence $f(x) = x^2$.

6. 2 circles of radius 1 are drawn in the plane so that no line meets more than two of the circles. Their centers are $O_1, O_2, \ldots, O_n$. Show that $\sum_{i<j} \frac{1}{O_iO_j} \leq (n - 1)\ \frac{\pi}{4}$

Solution



Denote the circle center O_i by C_i. The tangents from O_1 to C_i contain an angle 2x where $\sin x = \frac{1}{O_1O_i}$. So $2x > \frac{2}{O_1O_i}$. These double sectors cannot overlap, so $\sum \frac{2}{O_iO_j} < \pi$. Adding the equations derived from O_2, O_3, ... we get $4\sum O_iO_j < n\pi$, so $\sum O_iO_j < \frac{n\pi}{4}$ which is not quite good enough.



There are two key observations. The first is that it is better to consider the angle $O_iO_1O_j$ than the angle between the tangents to a single circle. It is not hard to show that this angle must exceed both $\frac{2}{O_1O_i}$ and $\frac{2}{O_iO_j}$. For consider the two common tangents to C_1 and C_i which intersect at the midpoint of O_1O_i. The angle between the center line and one of the tangents is at least $\frac{2}{O_1O_i}$. No part of the circle C_j can cross this line, so its center O_j cannot cross the line parallel to the tangent through O_1. In other word, angle $O_iO_1O_j$ is at least $\frac{2}{O_1O_i}$. A similar argument establishes it is at least $\frac{2}{O_iO_j}$.

Now consider the convex hull of the n points O_i. $m \leq n$ of these points form the convex hull and the angles in the convex m-gon sum to $(m - 2)\pi$. That is the second key observation. That gains us not one but two amounts $\frac{\pi}{4}$. However, we lose one back. Suppose O_1 is a vertex of the convex hull and that its angle is θ_1. Suppose for convenience that the rays O_1O_2, O_1O_3, ... , O_1O_n occur in that order with O_2 and O_n adjacent vertices to O_1 in the convex hull. We have that the (n – 2) angles between adjacent rays sum to θ_1. So we have $\sum \frac{2}{O_1O_i} < \theta_1$, where the sum is taken over only (n – 2) of the i, not all (n – 1). But we can choose which i to drop, because of our freedom to choose either distance for each angle. So we drop the longest distance O_1O_i. [If O_1O_k is the longest, then we work outwards from that ray. Angle $O_{k-1}O_1O_k > \frac{2}{O_1O_{k-1}}$, and angle $O_kO_1O_{k+1} > \frac{2}{O_1O_{k+1}}$ and so on.]

We now sum over all the vertices in the convex hull. For any centers O_i inside the hull we use the $\sum_j \frac{2}{O_iO_j} < \pi$ which we established in the first paragraph, where the sum has all (n – 1) terms. Thus we get $\sum_{i,j} \frac{2}{O_iO_j} < (n - 2)\pi$, where for vertices i for which O_i is a vertex of the convex hull the sum is only over (n – 2) values of j and excludes $\frac{2}{O_iO_{\max i}}$ where $O_{\max i}$ denotes the furthest center from O_i.

Now for O_i a vertex of the convex hull we have that the sum over all j, $\sum \frac{2}{O_iO_j}$, is the sum $\sum'$ over all but j = max i plus at most $\frac{1}{n-2}\sum'$. In other words we must increase the sum by at most a factor $\frac{n-1}{n-2}$ to include the missing term. For O_i not a vertex of the hull, obviously no increase is needed. Thus the full sum $\sum_{i,j} \frac{2}{O_iO_j} < (n - 1)\pi$. Hence $\sum_{i<j} \frac{2}{O_iO_j} < (n - 1)\frac{\pi}{4}$ as required.

DAFTAR PUSTAKA

Frank C. , 2000, *Australian Mathematics Olympiad* , Sydney Press.

Gardiner A. ,*1997*, *Discovering mathematics,* Clarendon press – Oxford.

_ , 2004, 2007, 2008, *Naskah Olimpiade Matematika Tingkat Kabupaten / Kota, Provinsi dan Nasional*, Depdiknas.