ONDERZOEKSCOMPETENTIES MET WISKUNNEND WISKE

ANNIE CLARYSSE EN KOEN DE NAEGHEL

SAMENVATTING. Deze nota werd geschreven naar aanleiding van een opgave uit de vierde editie van de Wiskunnend Wiske Wedstrijd [8], een initiatief van VUB-professor Ingrid Daubechies bedoeld voor leerlingen van het hoger secundair onderwijs. De wedstrijd wordt verzorgd door de vakgroep Wiskunde van de Vrije Universiteit Brussel. We motiveren waarom deze opdrachten een ideale basis zijn voor de vereiste onderzoekscompetenties binnen de vakoverschrijdende eindtermen. Met een uitgewerkte oplossing illusteren we niet alleen de rijkdom van één opgave, maar beklemtonen we ook het belang van interpretatie van de vraagstelling, wiskundig schrijven, zoeken naar meerdere oplossingen en formuleren van veralgemeningen en vermoedens.

INHOUDSOPGAVE

1. INLEIDING

Hoe ontwikkel je onderzoeksvaardigheden wiskunde? Een relevante vraag voor heel wat leerkrachten wiskunde in de derde graad van het middelbaar onderwijs. Want het realiseren van onderzoeksvaardigheden bij leerlingen is een leerplandoelstelling, zowel bij het ASO (leerplannen a,b,c) als bij het TSO/KSO (leerplan a).

Sinds september 2010 is de Wiskunnend Wiske Wedstrijd [8] een aanbod om die onderzoeksvaardigheden bij leerlingen uit het vierde, vijfde en zesde jaar van het middelbaar onderwijs te realiseren. Deelname aan deze wedstrijd gebeurt in klasverband, de voorronde bestaat uit drie opdrachten gespreid over de periode begin oktober tot eind januari. De klassen die het over alle drie de opdrachten er het beste vanaf brengen, mogen deelnemen aan de finale in maart. Deze opdrachtenreeks komt tot stand met de samenwerking van de faculteit Wetenschappen en Bio-ingenieurswetenschappen van de Vrije Universiteit Brussel, prof. Ingrid Daubechies en Standaard Uitgeverij.

Wat dit initiatief zo geschikt maakt om onderzoeksvaardigheden en in het bijzonder onderzoekscompetenties op een realistische en zinvolle manier te meten, te stimuleren en te evalueren is viervoudig.

(1) De vragen van de vorige edities zijn **online beschikbaar**. Op die manier kan een leerkracht wiskunde putten uit een groeiende reeks van onderzoeksvragen om op momenten naar keuze de onderzoeksvaardigheden bij leerlingen te realiseren.
(2) De opdrachten zijn geen klassieke vraagstukken met gegevens en formules, maar wel **uitdagende doch haalbare vragen** 'uit het leven gegrepen', wat de motivatie van leerlingen ten goede komt.
(3) De opdrachten laten ruimte voor **interpretatie, veralgemening en het formuleren van vermoedens**. Ook dat zijn zinvolle aspecten van onderzoekscompetenties.
(4) Een ander belangrijk facet van onderzoeksvaardigheden is het **rapporteren** van bevindingen. Door leerlingen hun oplossing te laten uitschrijven vraag je om hun gedachten wiskundig te verwoorden.

In dit artikel laten we met een voorbeeld zien hoe dit in de praktijk te werk gaat. Voor het vervolg van deze inleiding maken we de link met onderzoekscompetenties (derde graad ASO leerplan a), wiskundig schrijven en de getuigenis

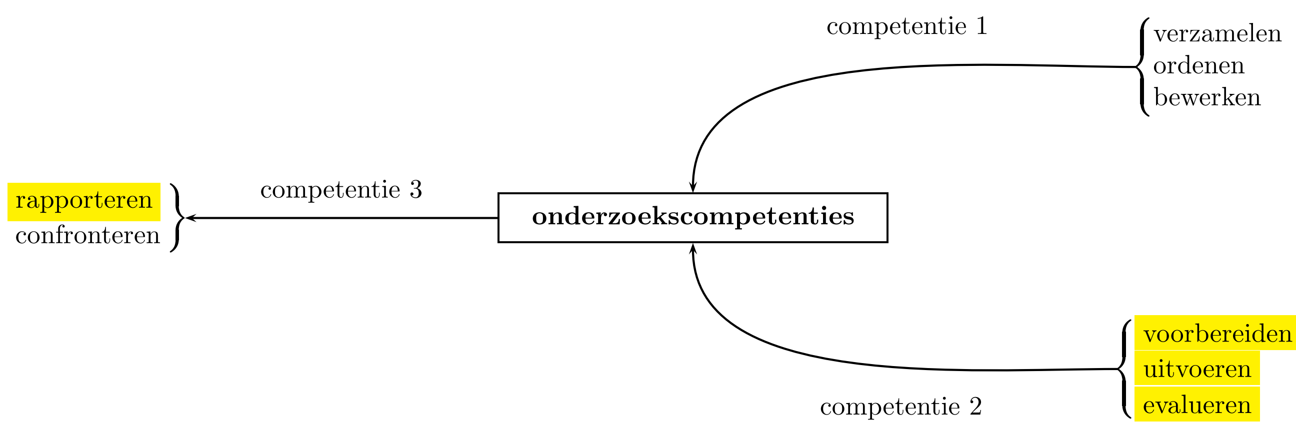
Datum: 8 januari 2014. We zijn de vakgroep Wiskunde van de Vrije Universiteit Brussel erkentelijk voor het nalezen van deze nota.

uit de klaspraktijk. Vanaf paragraaf 2 werken we de opgave van oktober 2013 uit. Hoewel we sommige ideeën ook bij leerlingen terugvonden, is deze uitwerking vooral het resultaat van eigen onderzoek.

1.1. **Onderzoekscompetenties.** Voor de studierichtingen van de derde graad ASO leerplan a (6 tot 8 wekelijkse lestijden wiskunde) vermeldt men drie specifieke eindtermen die onder de noemer onderzoekscompetenties worden gecatalogeerd [6, p.77]:

OC1 *Zich oriënteren op een onderzoeksprobleem door gericht informatie te verzamelen, ordenen en bewerken.*
OC2 *Een onderzoeksopdracht met een wiskundige component voorbereiden, uitvoeren en evalueren.*
OC3 *De onderzoeksresultaten en conclusies rapporteren en ze confronteren met andere standpunten.*

Deze onderzoekscompetenties kunnen we als volgt schematiseren, en de voornaamste aspecten die binnen een opdracht uit de Wiskunnend Wiske Wedstrijd aan bod komen zijn gefluoresceerd.



De competenties informatie verzamelen, ordenen en bewerken sluiten eerder aan bij onderzoek waarvoor de leerling informatie opzoekt in de literatuur of op het internet en deze informatie synthetiseert of toepast op een concrete onderzoeksvraag [5]. Bij wiskunde bevindt dergelijk onderzoek zich toch eerder in de marge van het gebeuren. Denk bijvoorbeeld aan het maken van een werkstuk over het leven van een wiskundige. Zo'n opdrachten waarbij gevraagd wordt om informatie te verzamelen, te ordenen en te bewerken zijn dan ook beschrijvende opdrachten. Pas als de onderzoeker een voor hem of haar relatief onbekend wiskundig terrein betreedt kunnen we spreken over een onderzoekende opdracht wiskunde. Bij zo'n onderzoekende opdracht wiskunde haal je informatie niet zozeer uit boeken, maar ga je die in de eerste plaats genereren door zelf te redeneren. Informatie opzoeken helpt je - althans op het niveau van wiskunde in het middelbaar onderwijs - vaak geen stap vooruit.

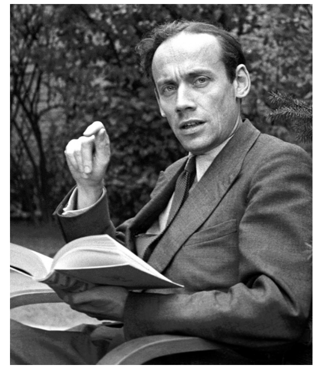
Het ontwikkelen van onderzoekscompetentie 1 kan in een afzonderlijke, **beschrijvende opdracht wiskunde** gebeuren, bijvoorbeeld met een schrijfopdracht [3, Practicum 1]. Via een aanbod van wiskundige onderwerpen (zoals Egyptische breuken, tekenregel van Descartes, ladenprincipe van Dirichlet, etc.) zoeken leerlingen meer specifieke informatie op. Typisch hierbij is de aanwezigheid van een historische component. Gevraagd wordt om de bekomen informatie te schematiseren en hiervan een samenvatting te maken. Het aanbod van 250 onderwerpen in [7] en meer dan 407 onderwerpen in [2] leent zich daar uitstekend toe.

Een opgave uit de Wiskunnend Wiske Wedstrijd valt onder de noemer **onderzoekende opdracht wiskunde**. Bij zo'n onderzoekende opdracht is het niet realistisch om aan leerlingen te vragen *vooraf* een eigen onderzoeksvraag te formuleren, een onderzoeksdomein af te bakenen of een tijdsplan op te stellen. Dit motiveren we als volgt [3, Practicum 9]:

(1) Om binnen de wiskunde een haalbaar onderzoeksdomein af te bakenen heb je heel wat **expertise** nodig. Omdat het een onderzoek betreft, gaan we ervan uit dat de onderzoeker niet vertrouwd is met het onderwerp. Academici vinden het niet eenvoudig om een eigen onderzoeksvraag op te stellen, die haalbaar is zowel naar inhoud als naar tijdsbesteding. Is het dan wel zinvol dat wij zoiets van leerlingen verwachten?
(2) In een onderzoeksopdracht wiskunde wordt de **haalbaarheid van een onderzoeksvraag pas duidelijk tijdens het onderzoek zelf**. Net hierin onderscheidt een wiskundig onderzoek zich met een taalkundig of historisch onderzoek.

Deze argumentatie doet ons besluiten dat het vooraf opstellen van een onderzoeksvraag gewoonweg niet relevant is. Men kan zelfs de omgekeerde conclusie trekken: **pas na een uitvoerig onderzoek wordt duidelijk wat een haalbare en zinvolle onderzoeksvraag is**. Net het zoeken naar de onderzoeksvraag leidt tot een redenering, die de onderzoeksvraag afbakent. In de wiskunde noemt men dit het formuleren van een vermoeden. Of, om het in de woorden van de wiskudige Emil Artin te zeggen [1, p.592]:

Our difficulty is not in the proofs, but in learning what to prove.



Emil Artin
(1898 - 1962)

We pleiten er dan ook voor om, binnen het kader van een onderzoekende opdracht wiskunde, de leerling een **vooraf gestelde onderzoeksvraag** te geven, al of niet voorzien van een aantal kleinere vragen die tot de oplossing van de onderzoeksvraag zullen leiden, of vanuit een aangestuurde reeks van mogelijkheden binnen een begeleide aanpak. Daarnaast wordt de leerling aangemoedigd om zelf kleinere onderzoeksvragen te formuleren om zo een eigen redenering op touw te zetten die de grotere, hier gestelde onderzoeksvraag beantwoordt. Dat stellen van kleinere onderzoeksvragen is een heuristiek en maakt eigenlijk al deel uit van het onderzoek zelf.

Wel zinvol is om de leerling aan te moedigen na het onderzoek een eigen **vermoeden** te formuleren, bijvoorbeeld op basis van een veralgemening of een alternatieve interpretatie van de onderzoeksvraag. Het opstellen van zo'n vermoeden gebeurt op basis van zijn eerder onderzoek, en getuigt van het inzicht die de leerling gedurende zijn onderzoek verworven heeft. De leerling kan zijn vermoeden motiveren door te verwijzen naar aanwijzingen in het eerder onderzoek, en/of een mogelijke aanpak tot het oplossen van zijn vermoeden suggereren.

Deze alternatieve aanpak strookt wel degelijk met de visie van de **onderwijsinspectie**. Op de website Doorlichten: extra informatie van de onderwijsinspectie [4] stelt men als minimumeisen voor het realiseren van de DSETOC, die de school moet kunnen aantonen bij inspectie, dat in het werk van de leerling een onderzoeksvraag/-opdracht moet aanwezig zijn (al dan niet expliciet gekoppeld aan een hypothese). Men verwacht dus niet dat de leerling een eigen onderzoeksvraag opstelt. Bovendien aanvaardt men voor de pool wiskunde dat een confrontatie met andere standpunten niet (steeds) haalbaar is.

1.2. **Wiskundig schrijven.** Het opschrijven van een wiskundige redenering, een bewijs of meer uitgebreid een nota, artikel of thesis wordt ook wel wiskundig schrijven genoemd. Zo'n redenering opschrijven is niet zomaar iets wat je doet nadat je de oplossing gevonden hebt. Het vergt heel wat oefening om hierin bedreven te worden. Leerlingen leren wiskundig schrijven door de leerkacht in actie: opbouwen van een redenering in de klas, aanreiken van uitgewerkte oplossingen, modelverbetering van een toets, etc. Daarnaast moeten leerlingen gestimuleerd worden om hun eigen redenering op een haalbaar niveau op te schrijven. Onderstaande richtlijnen kunnen daarbij helpen.

1.2.1. *Wiskundige correctheid.* Een correcte, consistente en ondubbelzinnige redenering maken is moeilijker dan je denkt. Een nodige voorwaarde is dat je zelf 100% overtuigd bent van datgene wat je opschrijft. We overlopen enkele typische valkuilen.

- ◇ **Rekenvaardigheid** Het algebraïsch manipuleren van functievoorschriften, formules, vergelijkingen, stelsels, etc. uit de eerste en de tweede graad is gekend verondersteld. Enkele misverstanden die aan de basis liggen voor heel wat elementaire rekenfouten in de derde graad (de uitspraken gelden voor gepaste keuze van $a, b, c, d \in \mathbb{R}$):
  - ▹ rekenen met vierkantswortels, $\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$ want $\sqrt{9+16} \neq 3+4$; $\sqrt{a^2} \neq a$ want $\sqrt{(-3)^2} \neq -3$;
  - ▹ vereenvoudigen van breuken, $\dfrac{2a+b}{2c+d} \neq \dfrac{a+b}{c+d}$, $\dfrac{2a+b}{2c+2d} \neq \dfrac{a+b}{c+d}$, $\dfrac{2a+2b}{2c+d} \neq \dfrac{a+b}{c+d}$;
  - ▹ ongelijkheden, uit $ac > bc$ volgt niet noodzakelijk dat $a > b$ want $5 \cdot (-2) > 7 \cdot (-2)$ en toch is $5 < 7$;
    uit $\dfrac{a}{b} > 0$ volgt niet noodzakelijk dat $a > 0$ en/of $b > 0$ want $\dfrac{-7}{-3} > 0$ en toch is $-3 < 0$ en $-7 < 0$;
    uit $a^2 > b^2$ volgt niet noodzakelijk dat $a > b$ want $(-7)^2 > (-3)^2$ en toch is $-7 < -3$.
- ◇ **Correct gebruik van implicatie en equivalentie** Vaak is een redenering wiskundig fout omdat men de "enkele pijl $\Rightarrow$" verwart met "dubbele pijl $\Leftrightarrow$". Onderstaande tabel geeft aan wat het onderscheid is. Voor de formele definitie van deze logische operaties verwijzen we naar het leerstofonderdeel logica.

naam	symbool	voorbeeld	lees als
implicatie	$\Rightarrow$	$x = -2 \Rightarrow x^2 = 4$	als $x = -2$ dan $x^2 = 4$
equivalentie	$\Leftrightarrow$	$x = \pm 2 \Leftrightarrow x^2 = 4$	$x = \pm 2$ als en slechts als $x^2 = 4$

◇ **Letters voor onbekenden eerst introduceren** Wanneer je een nieuwe letter gebruikt, dan hoor je eerst aan te geven waar die letter voor staat. Enkel op die manier kan de lezer jouw redenering volgen.

1.2.2. *Wiskundig verwoorden.* Een wiskundige redenering bestaat zeker niet alleen uit symbolen (formules, vergelijkingen, ...). Je hoort ook **bindtekst** te schrijven: taalkundige zinnen die aangeven wat je van plan bent, hoe uit de ene vergelijking de andere volgt, hoe je een controle kan maken, etc. Slechts dan zal een lezer weten wat jij bedoelt, ook al heeft hij/zij het probleem niet zelf opgelost. Typische voorbeelden van bindwoorden- en zinnen vind je in onderstaande tabel. Wannneer je een deel van de redenering weg laat, hoor je de aard en de lengte van het weggelaten deel te duiden (tweede kolom). Houd de lezer op de hoogte waar je je ergens in je redenering bevindt, en wat er nog moet gebeuren (derde kolom).

<table>
<tr><th colspan="3">Bindwoorden</th></tr>
<tr><td colspan="3">anders gezegd, anderzijds is, dan geldt, dientengevolge, dus, echter, enerzijds is, equivalent is, er geldt dat, ergo, gelijkstellen levert, hieruit volgt, met als gevolg dat, neem, noem, of nog, omdat ... is, op die manier is, terwijl, uit ... volgt dan, veronderstel dat, voor ... vinden we, voor ... bekomen we, want, waaruit, waaruit we vinden dat, waaruit volgt dat, we besluiten dat, we hebben, we vinden, zij, zodat, zodoende is</td></tr>
<tr><th colspan="3">Bindzinnen</th></tr>
<tr><td>Ons eerste doel is om ...
We vermoeden dat ...
Het idee van het bewijs is ...</td><td>Men kan eenvoudig aantonen dat ...
Twee keer toepassen van ... geeft ...
Een gelijkaardig argument toont ...</td><td>Eerst tonen we aan dat ...
Het probleem is te vereenvoudigen tot ...
Tenslotte moeten we aantonen dat ...</td></tr>
</table>

1.3. **Klaspraktijk: een getuigenis van coauteur Annie Clarysse.** In het verleden namen we al eens deel aan de wedstrijd Wiskunnend Wiske, maar dan zochten we met een aantal vrijwilligers naar de oplossingen buiten de reguliere lestijden. Toen we dit schooljaar opnieuw een uitnodiging kregen om deel te nemen, besloten we om dit te doen in het kader van de onderzoekscompetenties. Het verleden had ons immers geleerd dat de doelstellingen die opgesomd worden in het leerplan via dergelijk project behaald kunnen worden.

OC2 *Een onderzoeksopdracht met een wiskundige component voorbereiden, uitvoeren en evalueren.*

Gedurende een **tweetal uur** worden de leerlingen in groepjes verdeeld om te brainstormen over een probleem en tot een oplossing te komen. De leerlingen maken een schriftelijke neerslag van hun denkwerk en bereiden een presentatie voor die aan de medeleerlingen gegeven wordt.

OC3 *De onderzoeksresultaten en conclusies rapporteren en ze confronteren met andere standpunten.*

De verschillende groepjes stellen hun oplossing voor. Daarna wordt er in klas gediscussieerd over de verschillende oplossingswijzen tot er een **consensus** over de oplossing bereikt wordt. Tot slot wordt één groepje verantwoordelijk gesteld om de oplossing van dit vraagstuk neer te schrijven en in te dienen.

Ook de quotering wordt op voorhand in de klasgroep toegelicht. Elk groepje moet bij elke vraag een presentatie naar voor brengen. Bij de **presentatie** worden twee zaken beoordeeld: de wiskundige correctheid en de verzorgdheid. Na de klasdiscussie maakt één groepje een **schriftelijke neerslag**. Bij het toekennen van de punten houden we rekening met de wiskundige correctheid, de verzorgdheid en de stiptheid. Het toekennen van de punten per groep gebeurt door de leerkracht. De leerlingen verdelen deze punten dan individueel met het systeem van **peer evaluation**.

Eerst en vooral willen we duidelijk stellen dat de oplossingen die de leerlingen gevonden hebben, volledig hun **eigen verdienste** zijn. Als leerkrachten besloten we om ze op geen enkele manier te helpen. Het zoeken naar de oplossing gebeurde in een computerlokaal zodat de leerlingen de mogelijkheid hadden om zaken zelfstandig na te gaan. Eén groep was in staat om de correcte oplossing te vinden, de twee andere groepen zaten op een dood spoor, ook al werd in deze groepjes duchtig gediscussieerd en nagedacht. Het was niet evident voor de leerlingen om een dergelijk project tot een goed einde te brengen, maar aan de andere kant was het ook niet onmogelijk. De opdracht vereiste van de leerlingen een andere manier van denken en een bepaalde maturiteit die hopelijk groeit naarmate de volgende opdrachten verschijnen.

We vinden het als leerkracht ook belangrijk dat, nadat de verschillende oplossingswijzen voorgesteld en bediscussieerd werden, de verantwoordelijke groep leerlingen de gekozen redenering ook wiskundig correct verwoordt en neerschrijft in een verzorgd document. Dit proces verliep heel vlot. Leerlingen zijn er immers op getraind om de wiskundige taal op een correcte manier te gebruiken.

Eens de tijd om in te dienen verstreken is, wordt de oplossing door de leerkracht klassikaal naar voren gebracht. Voor de leerlingen vereenvoudigen we eerst de algemene oplossing uit deze publicatie naar de concrete oplossing voor het gestelde probleem. Via deze tussenstap is het voor de leerlingen mogelijk om de algemene oplossing te begrijpen. Als we terugkijken op het proces, dan beseffen we dat een dergelijke aanpak van onderzoekscompetenties enkel mogelijk is in een heel sterke en gemotiveerde groep. Gelukkig konden we dit jaar met een dergelijke groep leerlingen werken waardoor dit project haalbaar was.

2. Opgave "De Listige Loopband"

We benadrukken nogmaals dat deze neerslag niet het product van leerlingen is, maar wel de tekst die wij als leerkrachten opgesteld hebben. Het is wel zo dat we enkele ideeën uit de tekst ook bij leerlingen teruggevonden hebben.

loopband

Opgave *De zomervakantie is aangebroken en Suske en Wiske laten de teletijdmachine even voor wat ze is en nemen zoals iedereen het vliegtuig naar hun favoriete bestemming. In de luchthaven stappen ze, onderweg naar hun gate, over een loopband om de afstand sneller te overbruggen. Als ze zich niet haasten missen ze het vliegtuig nog. Maar plots komen de veters van Suskes schoenen los. Wat nu gedaan? Ter vereenvoudiging onderstellen we dat de doorgang in de luchthaven zich op een ééndimensionale lijn bevindt. Suskes wandelsnelheid is een constante w, maar op de loopband wordt zijn snelheid vermeerderd met de snelheid k van de band. Suskes doel is om zo snel mogelijk aan de gate te geraken.*

(1) *Suske beslist om te pauzeren om zijn veters te knopen. Is het efficiënter om dit op de loopband te doen of van de loopband af?*

(2) *Stel dat Suskes energie om te lopen beperkt is en hij zijn snelheid tijdelijk kan opdrijven tot w' (of $w' + k$ op de loopband). Is het efficiënter om op de loopband te lopen of van de loopband af?*

Beantwoord beide vragen met een volledige wiskundige argumentatie.

Afspraken en notaties Wellicht wordt opgave (2) zo opgevat dat Suske zijn snelheid tijdelijk opdrijft voor- of nadat hij zijn veters geknoopt heeft. In dat geval kunnen we opgave (2) zien als een combinatie van opgave (1) en een alternatieve opgave

(2') *Stel dat Suske beslist om zijn veters niet te knopen, en dat Suskes energie om te lopen beperkt is en hij zijn snelheid tijdelijk kan opdrijven tot w' (of $w' + k$ op de loopband). Is het efficiënter om op de loopband te lopen of van de loopband af?*

De lezer kan eenvoudig inzien dat een oplossing van opgave (1) en (2') leidt tot een oplossing van opgave (2). Daar komen we in paragraaf 4 op terug. Voorlopig zullen we ons dan ook beperken tot het oplossen van opgaven (1) en (2').

Verder mogen we, zonder de algemeenheid te schaden, aannemen dat Suske eerst de loopband moet overbruggen, om daarna een gedeelte zonder loopband af te leggen. We noemen[1]

- ◇ L de lengte van de loopband,
- ◇ Z de lengte van het gedeelte zonder loopband,
- ◇ w de constante wandelsnelheid van Suske (we nemen aan dat $w > 0$),
- ◇ k de constante snelheid van de loopband (we nemen aan dat $k > 0$).

Het vervolg van deze nota We bespreken twee manieren om deze opgave op te lossen. De eerste werkwijze is algebraïsch, waarbij afstanden, snelheden en tijdsintervallen expliciet berekend worden. Daarbij zullen de vragen (1) en (2') terzelfdertijd beantwoord worden door een meer algemene vraag op de lossen. Een tweede aanpak berust op zogenaamde *snelheid-tijd diagrammen*. Onze oplossing van opgave (1) leidt tot een bewijs van een meetkundige eigenschap. Die eigenschap kunnen we dan gebruiken om opgave (2') op te lossen. Bovendien laat deze meetkundige eigenschap een intuïtieve oplossing van de opgave toe. In paragraaf 4 formuleren we het antwoord op bovenstaande opgave. Paragraaf 5 behandelt een veralgemening van de opgave.

Opmerking In de paragrafen 2, 3 en 4 nemen we telkens aan dat Suske, bij het wijzigen van zijn snelheid, dat onmiddellijk doet. Bij het pauzeren zal hij dus niet vertragen tot hij stilstaat, maar beslist hij om onmiddellijk stil te staan. Evenals bij het sneller lopen neemt hij meteen zijn gewijzigde snelheid w' aan (of $w' + k$ op de loopband). De alternatieve interpretatie waarbij Suske zijn snelheid telkens geleidelijk aan verminderd of opdrijft is een onderdeel van een veralgemeende opgave (3), behandeld in paragraaf 5.

[1] In deze nota nemen we stilzwijgend aan dat alle snelheden 'relatief klein' zijn ten opzichte van elkaar, zodat de Newtoniaanse fysica van kracht is en we snelheden onverhinderd met elkaar mogen optellen.

3. Een algebraïsche oplossing

We zullen de vragen (1) en (2') terzelfdertijd oplossen door een **algemene vraag** op de lossen:

> *Stel dat Suske zijn wandelsnelheid tijdelijk wijzigt van w tot $w' = w+e$. In welke situatie zal Suske tijdswinst maken: indien hij zijn wandelsnelheid wijzigt op de loopband, of indien hij zijn wandelsnelheid wijzigt na de loopband?*

Is e positief, dan leidt een antwoord op onze algemene vraag tot een antwoord op opgave (2'). We laten ook toe dat e negatief is. In dat geval zal Suske tijdelijk vertragen. Is $e = -w$ dan staat Suske tijdelijk stil. In dat geval leidt een antwoord op onze algemene vraag tot een antwoord op opgave (1).

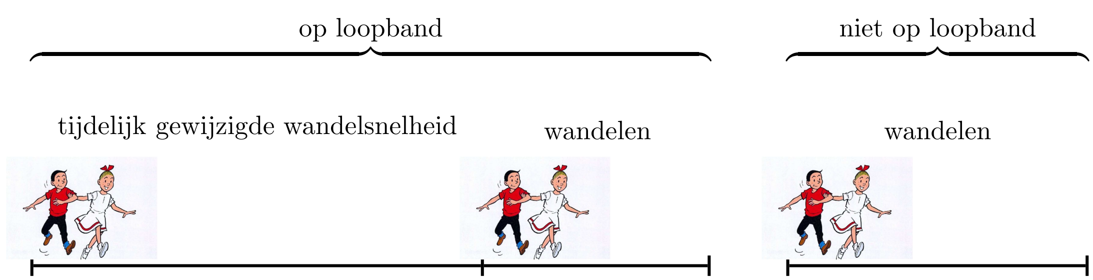
We noemen verder

- ◇ $w' = w + e$ de tijdelijk gewijzigde wandelsnelheid van Suske (hierbij kan e zowel positieve als negatieve waarden aannemen, we veronderstellen wel dat Suske niet achteruit loopt i.e. $e \geq -w$),
- ◇ t_e de tijdspanne waarin Suske zijn wandelsnelheid wijzigt van w tot $w + e$ (we nemen aan dat $t_e > 0$).

Hierna zullen we de twee situaties zoals vermeld in onze algemene vraag afzonderlijk behandelen.

$\boxed{\text{Situatie 1: Suske wijzigt zijn wandelsnelheid tijdelijk } \textbf{op} \text{ de loopband}}$

Zonder de algemeenheid te schaden mogen we aannemen dat Suske zijn wandelsnelheid wijzigt op het eerste gedeelte van de loopband. We onderscheiden drie fasen: de fase waarin Suske met een gewijzigde snelheid op de loopband wandelt, de fase waarin Suske met de gewone snelheid op de loopband wandelt en de fase waarin Suske met de gewone snelheid na de loopband wandelt. Met behulp van bovenstaande notaties en de elementaire formule "snelheid is afstand gedeeld door tijd" vinden we voor elke fase de afstand, snelheid en tijd van Suske.



afstand	$t_e(k+w+e)$	$L - t_e(k+w+e)$	Z
snelheid	$k+w+e$	$k+w$	w
tijd	t_e	$\dfrac{L - t_e(k+w+e)}{k+w}$	$\dfrac{Z}{w}$

De totale tijd die Suske nodig heeft wordt gegeven door

$$
\begin{aligned}
& T_1 = t_e + \frac{L - t_e(k+w+e)}{k+w} + \frac{Z}{w} \\
\Rightarrow\quad & T_1 = t_e + \frac{L}{k+w} - \frac{t_e(k+w)}{k+w} - \frac{t_e \cdot e}{k+w} + \frac{Z}{w} \\
\Rightarrow\quad & \boxed{T_1 = \frac{L}{k+w} + \frac{Z}{w} - \frac{t_e \cdot e}{k+w}}
\end{aligned}
\tag{$*$}
$$

Opmerkingen

◇ Indien $e > 0$ dan doet Suske een extra inspanning op de loopband, zodat hij zijn totale tijd om de totale afstand te overbruggen kleiner maakt. De lezer kan geneigd zijn te denken dat Suske eventueel zo snel kan lopen dat de eerste en de derde term in het rechterlid van de formule $(*)$ elkaar opheffen! Maar dat is onmogelijk, en wel om de volgende reden: we hebben verondersteld dat Suske enkel op de loopband een gewijzigde wandelsnelheid heeft. In deze tijdspanne t_e kan de afgelegde weg hoogstens gelijk zijn aan de lengte van de loopband. Dit impliceert

$$t_e(k+w+e) \leq L \quad \Rightarrow \quad t_e \leq \frac{L}{k+w+e} < \frac{L}{e}$$

zodat in het rechterlid van de formule $(*)$ de laatste term altijd strikt kleiner is dan de eerste term.

◇ Indien $-w \leq e < 0$ dan treuzelt Suske op de loopband, zodat hij zijn totale tijd om de totale afstand te overbruggen groter maakt. Staat Suske stil, dan vervangen we in de bovenstaande formule de parameter e door $-w$.

Situatie 2: Suske wijzigt zijn wandelsnelheid tijdelijk **na** de loopband

Zonder de algemeenheid te schaden mogen we aannemen dat Suske zijn wandelsnelheid wijzigt op het eerste gedeelte na de loopband. We onderscheiden drie fasen: de fase waarin Suske met de gewone snelheid op de loopband wandelt, de fase waarin Suske met de gewijzigde snelheid na de loopband wandelt en de fase waarin Suske met de gewone snelheid na de loopband wandelt. Met behulp van bovenstaande notaties en de elementaire formule "snelheid is afstand gedeeld door tijd" vinden we opnieuw voor elke fase de afstand, snelheid en tijd van Suske.

afstand	L	$t_e(w+e)$	$Z - t_e(w+e)$
snelheid	$k+w$	$w+e$	w
tijd	$\frac{L}{k+w}$	t_e	$\frac{Z - t_e(w+e)}{w}$

De totale tijd die Suske nodig heeft wordt dan gegeven door

$$\begin{aligned} & T_2 = \frac{L}{k+w} + t_e + \frac{Z - t_e(w+e)}{w} \\ \Rightarrow\ & T_2 = \frac{L}{k+w} + t_e + \frac{Z}{w} - t_e - \frac{t_e \cdot e}{w} \\ \Rightarrow\ & \boxed{T_2 = \frac{L}{k+w} + \frac{Z}{w} - \frac{t_e \cdot e}{w}} \end{aligned} \qquad (**)$$

Opmerkingen

- ◇ Indien $e > 0$ dan doet Suske een extra inspanning na de loopband, zodat hij zijn totale tijd om de totale afstand te overbruggen kleiner maakt. Opnieuw merken we op dat Suske enkel na de loopband een gewijzigde wandelsnelheid heeft, zodat in deze tijdspanne t_e de afgelegde weg hoogstens gelijk zijn aan de af te leggen afstand na loopband. Dit impliceert

$$t_e(w+e) \leq Z \quad \Rightarrow \quad t_e \leq \frac{Z}{w+e} < \frac{Z}{e}$$

zodat in het rechterlid van de formule $(**)$ de laatste term in de altijd strikt kleiner is dan de eerste term.

- ◇ Indien $-w \leq e < 0$ dan treuzelt Suske na de loopband, zodat hij zijn totale tijd om de totale afstand te overbruggen groter maakt. Staat Suske stil, dan vervangen we in de bovenstaande formule de parameter e door $-w$.

Antwoord op de algemene vraag en op opgaven (1) en (2')

Na ons voorbereidend werk kunnen we een antwoord formuleren op onze algemene vraag:

Stel dat Suske zijn wandelsnelheid tijdelijk wijzigt van w tot $w' = w+e$. In welke situatie zal Suske tijdswinst maken: indien hij zijn wandelsnelheid wijzigt op de loopband, of indien hij zijn wandelsnelheid wijzigt na de loopband?

We onderscheiden twee gevallen.

- ◇ **Eerste geval:** $-w \leq e < 0$

In spreektaal zeggen we dat Suske treuzelt. Uit de formules $(*)$ en $(**)$ volgt nu dat $T_1 < T_2$, want

$$\begin{aligned} T_1 < T_2 \quad & \Leftrightarrow \quad \frac{L}{k+w} + \frac{Z}{w} - \frac{t_e \cdot e}{k+w} < \frac{L}{k+w} + \frac{Z}{w} - \frac{t_e \cdot e}{w} \\ & \Leftrightarrow \quad \frac{t_e \cdot e}{k+w} > \frac{t_e \cdot e}{w} \\ & \Leftrightarrow \quad \frac{1}{k+w} < \frac{1}{w} \\ & \Leftrightarrow \quad w < k+w \end{aligned}$$

en deze laatste uitspraak is een ware uitspraak. In deze redenering hebben we gebruik gemaakt van onze veronderstellingen $e < 0$, $t_e > 0$ en $k > 0$. In het geval Suske stil staat om zijn veters te knopen, dan is $e = -w < 0$, dus het eerste geval is van toepassing, zodat $T_1 < T_2$. Veters knopen op de loopband is dus efficiënter dan veters knopen van de loopband af.

- ◇ **Tweede geval:** $e > 0$

In spreektaal zeggen we dat Suske een extra inspanning levert. Uit de formules $(*)$ en $(**)$ volgt nu dat $T_1 > T_2$, want

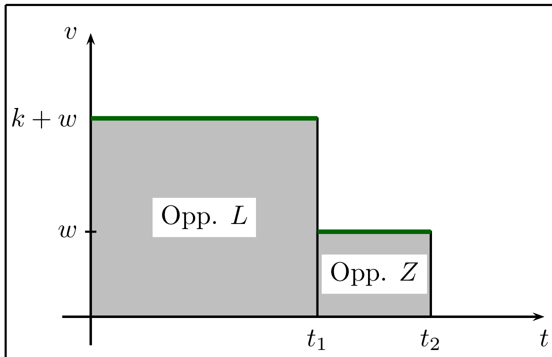
$$\begin{aligned} T_1 > T_2 \quad & \Leftrightarrow \quad \frac{L}{k+w} + \frac{Z}{w} - \frac{t_e \cdot e}{k+w} > \frac{L}{k+w} + \frac{Z}{w} - \frac{t_e \cdot e}{w} \\ & \Leftrightarrow \quad \frac{t_e \cdot e}{k+w} < \frac{t_e \cdot e}{w} \\ & \Leftrightarrow \quad \frac{1}{k+w} < \frac{1}{w} \\ & \Leftrightarrow \quad w < k+w \end{aligned}$$

en deze laatste uitspraak is een ware uitspraak. In deze redenering hebben we gebruik gemaakt van onze veronderstellingen $e > 0$, $t_e > 0$ en $k > 0$. In het geval Suske een extra inspanning levert is $e > 0$, dus het tweede geval is van toepassing, zodat $T_1 > T_2$. Van de loopband af lopen is dus efficiënter dan op de loopband lopen.

4. Een meetkundige oplossing

Een snelheid-tijd diagram is een grafiek van de snelheid in functie van de tijd. Mocht Suske zijn wandelsnelheid over het ganse traject constant houden, dan wordt het snelheid-tijd diagram gegeven door onderstaande figuur 1 (voor de behandeling van discontinuïteiten in het snelheid-tijd diagram verwijzen we naar paragraaf 5).

Hierbij noemen we t_1 de tijd die Suske nodig heeft om de loopband te overbruggen, en t_2 de tijd die hij nodig heeft om de loopband samen met het gedeelte na de loopband af te leggen. Merk op dat de onderlinge verhouding tussen de waarden k en w, alsook tussen t_1 en t_2 irrelevant is: van belang is enkel dat $0 < w < k + w$ en $0 < t_1 < t_2$.



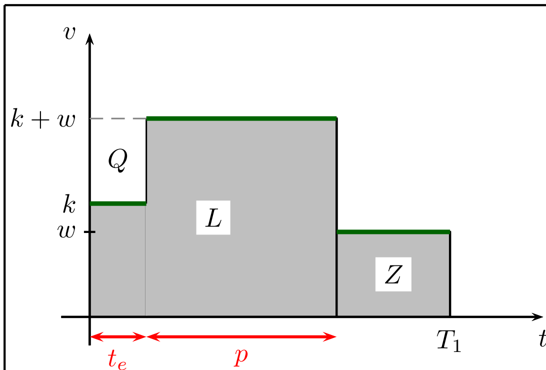
FIGUUR 1: Suske houdt zijn wandelsnelheid op en na de loopband constant.

De oppervlakte van de linkerrechthoek is gelijk aan $(k + w)t_1$. Snelheid maal tijd is gelijk aan de afgelegde weg, zodat de oppervlakte van de linkerrechthoek gelijk is aan de lengte van de loopband L. Analoog is de oppervlakte van de rechterrechthoek gelijk aan de lengte van het gedeelte zonder loopband Z.

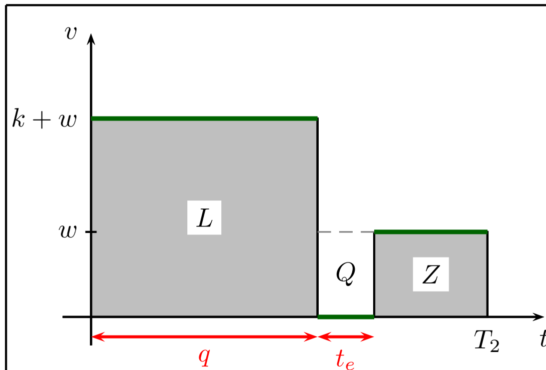
Deze redenering valt uit te breiden tot een algemeen principe: de oppervlakte tussen een snelheid-tijd diagram, de horizontale tijd-as en verticale rechten $t = p$ en $t = q$ is gelijk aan de afgelegde weg in het tijdsinterval $[p, q]$.

In het geval Suske zijn wandelsnelheid tijdelijk aanpast, dan verkrijgen we een ander snelheid-tijd diagram. Maar de af te leggen weg blijft constant: L op de loopband en Z na de loopband. Deze observatie is de sleutel om te bepalen in welke gevallen Suske tijdswinst doet.

(1) **Suske pauzeert even om zijn veters te knopen** Indien Suske pauzeert op de loopband, dan wordt zijn snelheid-tijd diagram gegeven door onderstaande figuur 2. Zonder de algemeenheid te schaden hebben we aangenomen dat Suske pauzeert op het eerste gedeelte van de loopband. Analoog stelt figuur 3 het geval voor dat Suske pauzeert op het gedeelte zonder loopband. In beide gevallen noemen we t_e de tijd die Suske nodig heeft om z'n veters te knopen. Uiteraard nemen we aan dat $t_e > 0$.



FIGUUR 2: Suske knoopt zijn veters op de loopband.



FIGUUR 3: Suske knoopt zijn veters op het gedeelte zonder loopband.

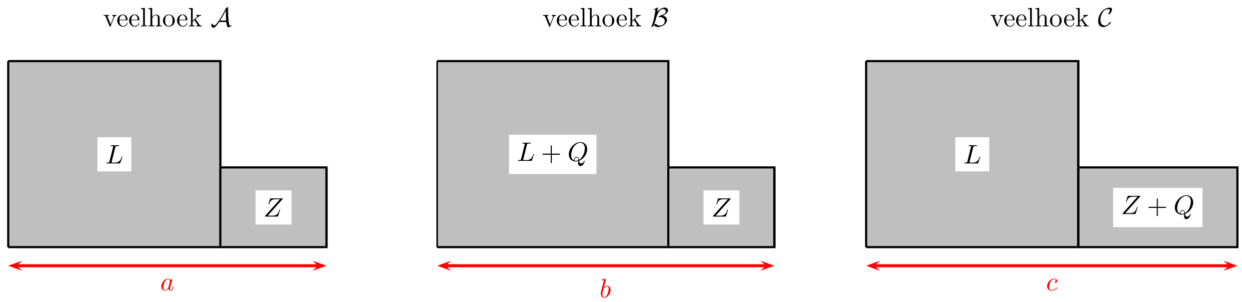
De oppervlakte van de rechthoek met basis p en hoogte $k + w$ (figuur 2) is kleiner dan de oppervlakte van de rechthoek met basis q en hoogte $k + w$ (figuur 3). Dit volgt uit het feit dat $t_e > 0$ en $k > 0$. Hieruit volgt dat $p < q$ en dus is $T_1 < T_2$. We besluiten dat veters knopen op de loopband efficiënter is dan veters knopen van de loopband af.

Opmerking Voegen we in figuur 2 een rechthoek toe met basis t_e, hoogte k en oppervlakte $Q = t_e \cdot k$, dan ontstaat een linkerrechthoek met oppervlakte $L + Q$. Analoog leidt figuur 3 tot een rechterrechthoek met oppervlakte $Z + Q$. Bovenstaande redenering leidt dan tot de volgende meetkundige

Eigenschap Beschouw een veelhoek $\mathcal{A}$ die bestaat uit twee aanliggende rechthoeken met ongelijke oppervlakte, waarvan hun basis op dezelfde drager ligt (zie figuur 4, links). Noem L de oppervlakte van de grootste rechthoek, en Z de oppervlakte van de kleinste rechthoek. We beschouwen twee manieren om de oppervlakte van de veelhoek $\mathcal{A}$ met een getal $Q > 0$ te vermeerderen (zie figuur 4, midden en rechts).

- ◇ Als we de oppervlakte van de grootste rechthoek vermeerderen met Q eenheden terwijl de hoogte constant blijft, dan wordt de basis van de grootste rechthoek breder. Noem deze nieuwe veelhoek $\mathcal{B}$.
- ◇ Als we de oppervlakte van de kleinste rechthoek vermeerderen met Q eenheden terwijl de hoogte constant blijft, dan wordt de basis van de kleinste rechthoek breder. Noem deze nieuwe veelhoek $\mathcal{C}$.

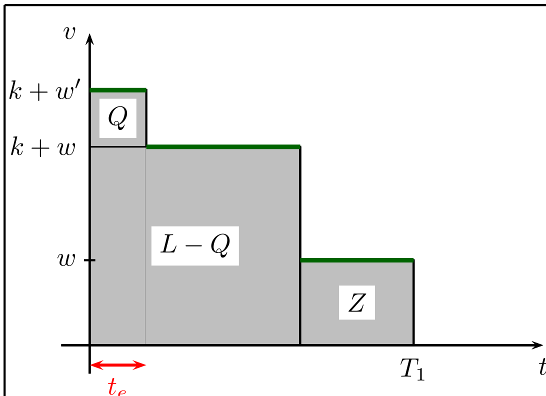
Dan is de (totale) basis van veelhoek $\mathcal{B}$ kleiner dan de (totale) basis van de veelhoek $\mathcal{C}$.



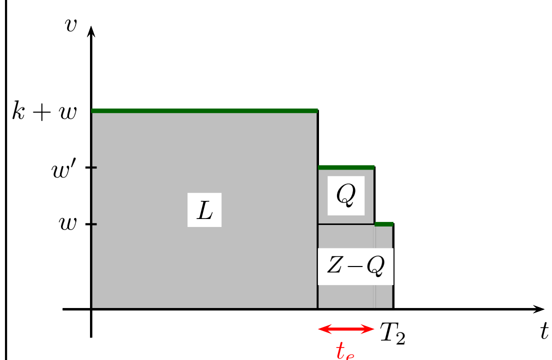
FIGUUR 4: Voor de basissen van de veelhoeken $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ en $\mathcal{C}$ gelden de ongelijkheden $a < b < c$.

Deze eigenschap zal nuttig blijken bij het bespreken van opgave

(2') **Suske knoopt zijn veters niet, doet even een extra inspanning en wandelt wat sneller** Indien Suske even sneller wandelt op de loopband, dan wordt zijn snelheid-tijd diagram gegeven door onderstaande figuur 5. Zonder de algemeenheid te schaden hebben we aangenomen dat Suske wat sneller wandelt op het eerste gedeelte van de loopband. Analoog stelt figuur 6 het geval voor dat Suske even wat sneller wandelt op het gedeelte zonder loopband. In beide gevallen noemen we t_e de tijdsduur van deze extra inspanning. Opnieuw nemen we aan dat $t_e > 0$.



FIGUUR 5: Suske loopt even sneller op de loopband.



FIGUUR 6: Suske loopt even sneller op het gedeelte zonder loopband.

Verwijderen we in figuur 5 een rechthoek met basis t_e, hoogte $w' - w$ en oppervlakte $Q = t_e \cdot (w' - w)$, dan ontstaat een linkerrechthoek met oppervlakte $L - Q$. Analoog leidt figuur 6 tot een rechterrechthoek met oppervlakte $Z - Q$. Nu passen we de bovenstaande eigenschap toe, waarbij de twee rechthoeken van de veelhoek $\mathcal{A}$ respectievelijk oppervlakte $L - Q$ en $Z - Q$ hebben. Op die manier vinden we dat de basis van de gearceerde oppervlakte in figuur 5 groter is dan de basis van de gearceerde oppervlakte in figuur 6, en dus is $T_1 > T_2$. We besluiten dat van de loopband af lopen efficiënter is dan op de loopband lopen.

5. Antwoord op de opgave

Zowel de algebraïsche als de meetkundige oplossing leiden tot een antwoord op de opgaven (1) en (2').

(1) *Suske beslist om te pauzeren om zijn veters te knopen. Is het efficiënter om dit op de loopband te doen of van de loopband af?*

Antwoord Veters knopen op de loopband is efficiënter dan veters knopen van de loopband af.

(2') *Stel dat Suske beslist om zijn veters niet te knopen, en dat Suskes energie om te lopen beperkt is en hij zijn snelheid tijdelijk kan opdrijven tot w' (of $w' + k$ op de loopband). Is het efficiënter om op de loopband te lopen of van de loopband af?*

Antwoord Van de loopband af lopen is efficiënter dan op de loopband lopen.

Na het formuleren van het antwoord op opgaven (1) en (2') ligt het antwoord op de oorspronkelijke opgave (2) voor de hand. Om alle twijfel weg te nemen, zullen we dit antwoord nu ook formeel aantonen.

(2) *Suske zal zijn veters knopen op of na de loopband. Bovendien zal Suske zijn snelheid tijdelijk kan opdrijven tot w' (of $w' + k$ op de loopband). Is het efficiënter om op de loopband te lopen of van de loopband af?*

Oplossing Suske beschikt over vier mogelijke scenario's:

scenario 1: veters knopen op de loopband, extra inspanning op de loopband,
scenario 2: veters knopen op de loopband, extra inspanning na de loopband,
scenario 3: veters knopen na de loopband, extra inspanning op de loopband,
scenario 4: veters knopen na de loopband, extra inspanning na de loopband.

In wat volgt gaan we na welk scenario het meest efficiënt is.

Stel dat Suske zijn veters knoopt na de loopband. Zowel scenario 3 als scenario 4 hebben de fase van het knopen van de veters gemeen. Negeren van deze fase leidt tot een equivalent probleem, dat op de lengte van het gedeelte zonder loopband na identiek is aan de probleemstelling van opgave (2). Als antwoord vinden we dat het efficiënter is dat Suske een extra inspanning levert na de loopband. Dus scenario 4 is efficiënter dan scenario 3.

Stel dat Suske zijn knoopt op de loopband. Een analoge redenering leidt tot de conclusie dat scenario 2 efficiënter is dan scenario 1.

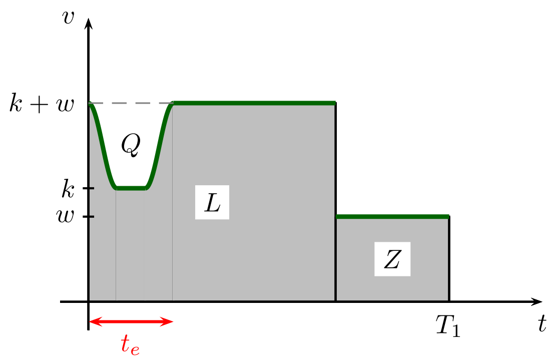
Tenslotte nemen we aan dat Suske een extra inspanning levert na de loopband. Zowel scenario 2 als scenario 4 hebben de fase van een extra inspanning na de loopband gemeen. Negeren van deze fase leidt tot een equivalent probleem, dat op de lengte van het gedeelte zonder loopband na identiek is aan de probleemstelling van opgave (1). Als antwoord vinden we dat het efficiënter is dat Suske zijn veters knoopt op de loopband. Dus scenario 2 is efficiënter dan scenario 4.

We besluiten dat scenario 2 effeciënter is dan de scenario's 1, 3 en 4.

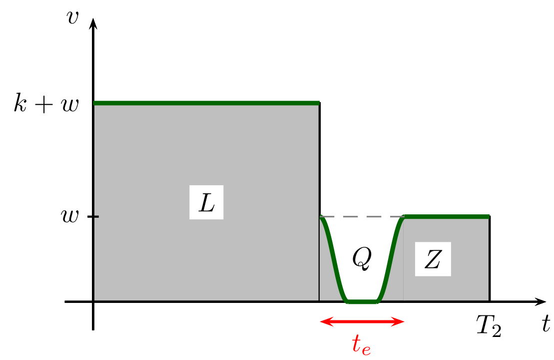
Antwoord Veters knopen op de loopband en extra inspanning leveren na de loopband is het meest efficiënt.

6. Een realistische veralgemening

In de realiteit zal Suske, die beslist om zijn snelheid te wijzigen, dat op een gelijkmatige manier doen. In het geval van het knopen van veters zullen figuren 2 en 3 eerder vervangen worden door onderstaande figuren 7 en 8.



FIGUUR 7: Suske knoopt zijn veters op de loopband, nadien drijft hij zijn snelheid geleidelijk op.



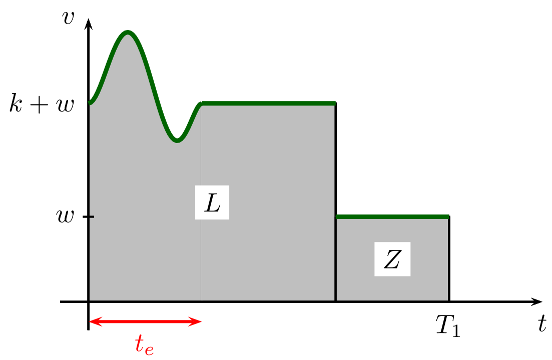
FIGUUR 8: Suske knoopt zijn veters op het gedeelte zonder loopband, nadien drijft hij zijn snelheid geleidelijk op.

Bij deze interpretatie laat de snelheid van Suske zich over een tijdspanne t_e niet langer beschrijven door een constante functie. Gelet op de fysische interpretatie zal deze nieuwe, grillige functie wel integreerbaar zijn. Op die manier is de meetkundige eigenschap uit paragraaf 3 nog steeds van toepassing, zodat we opnieuw kunnen besluiten dat ook in dit geval $T_1 < T_2$. Knopen van veters blijft dus efficiënter op de loopband. En analoog is het tijdelijk opdrijven van de snelheid, zelfs op een gelijkmatige manier, efficiënter na de loopband.

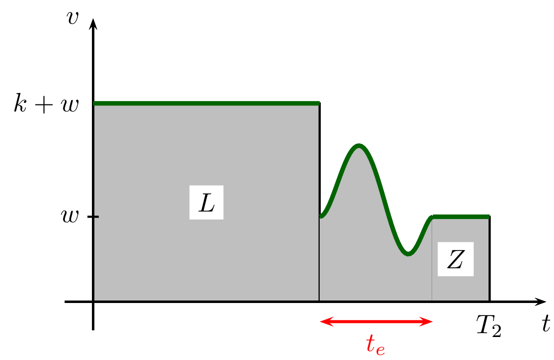
De interpretatie van **geleidelijk** opdrijven of afnemen van snelheid geeft aanleiding tot een meer algemene vraag.

(3) *Stel dat Suske zijn wandelsnelheid gedurende een tijdspanne t_e een wat afwisselend gedrag vertoont: nu eens groter dan w, dan geleidelijk aan kleiner dan w, etc. Is het efficiënter om dat afwisselend gedrag op de loopband te doen of van de loopband af?*

We beschrijven de (relatieve) snelheid van Suske met een functie f, gedefiniëerd over een tijdspanne t_e. Gelet op de fysische interpretatie nemen we aan dat deze functie f overal continu, en dus integreerbaar is. Figuren 9 en 10 laten het snelheid-tijd diagram zien voor een voorbeeld van zo'n grillig gedrag op of na de loopband.



FIGUUR 9: Suske vertoont grillig gedrag op de loopband



FIGUUR 10: Suske vertoont grillig gedrag op het gedeelte zonder loopband

De meetkundige eigenschap in paragraaf 3 leidt tot een procedure om na te gaan welke situatie tijdswinst oplevert.

(1) Bereken $Q = \displaystyle\int_0^{t_e} (w - f(t))\,dt$.
(2) Indien $Q > 0$ dan is $T_1 < T_2$ zodat het efficiënter is om het grillig gedrag op de loopband te vertonen.
(3) Indien $Q < 0$ dan is $T_1 > T_2$ zodat het efficiënter is om het grillig gedrag na de loopband te vertonen.

De functie f zal wel moeten voldoen aan enkele voorwaarden, maar deze zijn te rijmen met de fysische realiteit. Zo nemen we, naast het integreerbaar zijn van f, aan dat het grillig gedrag niet langer duurt dan de tijd die nodig is om de afstand op of na de loopband te overbruggen, wat zich vertaalt in de randvoorwaarden

$$\int_0^{t_e} (f(t)+k)\,dt \leq L \quad \text{en} \quad \int_0^{t_e} f(t)\,dt \leq Z$$

Opmerking Wie zich nog zorgen maakt om de drie overblijvende discontinuïteiten in snelheid-tijd diagram (bij aanvang van de loopband, overgang van loopband naar gedeelte zonder loopband en op het einde van de loopband), kan eenvoudig de overgang maken naar het fysisch correcte snelheid-tijddiagram (zonder discontinuïteiten) door een enkele snelheid-tijddiagrammen toe te voegen die ervoor zorgen dat het volledig snelheid-tijddiagram overal continu (en eventueel zelfs overal afleidbaar) is. Omdat deze extra diagrammen dezelfde zijn bij grillig gedrag op of na de loopband, zullen deze in bovenstaande argumentering geen enkele rol spelen.

Referenties

[1] M. Artin, *Algebra*, Pearson Prentice Hall, 1991.
[2] J. Bossaert, *Curiosa Mathematica*, online beschikbaar op http://users.ugent.be/ jebossae/docs/curiosa.pdf.
[3] K. De Naeghel, *Het practicum wiskunde: coöperatief aanleren van vaardigheden en attitudes*, print-on-demand online publishing Lulu.com (2013). Handboek online beschikbaar op http://www.koendenaeghel.be/practicumwiskunde.htm
[4] DOORLICHTEN EXTRA INFORMATIE: http://www.ond.vlaanderen.be/inspectie/opdrachten/doorlichten/extra-info.htm
[5] J. Deprez, G. Verbeeck, *Onderzoekscompetenties wiskunde in de derde graad*, 03/03/2010, DPB Brugge. Online beschikbaar op `http://home.scarlet.be/deprez.johan/100203_eekhoutcentrum_onderzoekscompetenties/`
[6] Leerplan A derde graad ASO, studierichtingen met component wiskunde D/2004/0279/019. Online beschikbaar op `http://ond.vvkso-ict.com/leerplannen/doc/Wiskunde-2004-019.pdf`
[7] C.A. Pickover, *Het wiskunde boek*, Librero Nederland (2010).
[8] WISKUNNEND WISKE WEDSTRIJD: http://www.wiskunnendwiske.be

Annie Clarysse, Sint-Andreasinstituut, Steensedijk 151, 8400 Oostende.
E-mail address, A. Clarysse: `annie.clarysse@telenet.be`

Koen De Naeghel, Onze-Lieve-Vrouwecollege, Collegestraat 24, 8310 Brugge.
E-mail address, K. De Naeghel: `koendenaeghel@hotmail.com`