P₁ : CINÉMATIQUE DU POINT

La cinématique consiste à analyser de façon purement mathématique le mouvement des corps en assimilant à des points matériels sans se préoccuper des causes de ce mouvement. Les grandeurs physiques de la cinématique sont le temps, la position, la vitesse et l'accélération.

I. Notion de système :

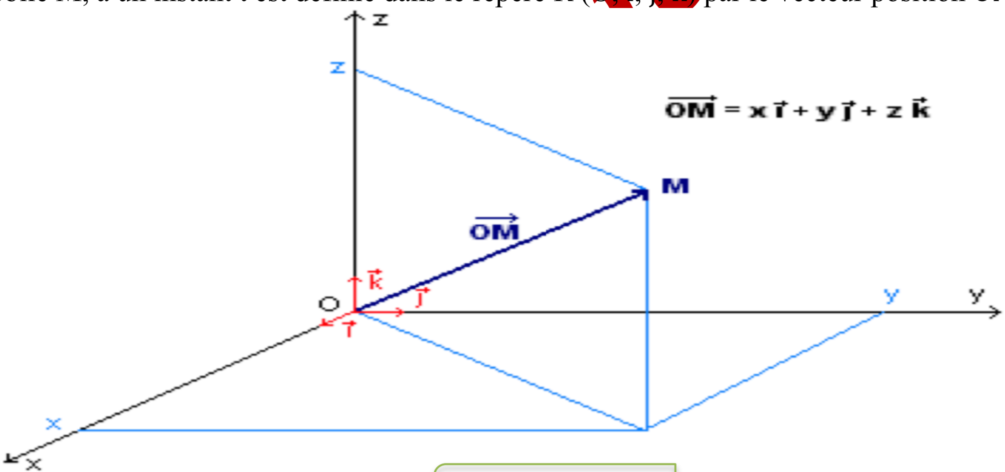
Dans ce qui suit, ou plus globalement en physique, on s'intéresse aux propriétés d'un objet ou d'un ensemble d'objets : par exemple on s'intéressera au mouvement d'un véhicule, aux interactions entre la Terre et la Lune, etc., le véhicule, l'ensemble Terre-Lune, etc., constitue le système étudié.

Le système étudié peut être **indéformable** : si la distance de deux points quelconques de ses points demeure invariable au cours de son évolution : les solides constituent un exemple de tels systèmes. Dans le cas contraire, le système est **déformable** : cas de la pâte à modeler par exemple.

Pour ce qui nous concerne, en cinématique et ultérieurement en dynamique, les systèmes que nous considérerons seront ponctuels ou encore des points matériels, c'est-à-dire des solides dont les dimensions sont suffisamment petites pour qu'on puisse les assimilés à un point. En général, on assimilera un solide à un point matériel qui est confondu avec le centre d'inertie du solide et dont la masse est égale à la masse du solide considéré.

II. Vecteur position :

La position d'un mobile M, à un instant t est définie dans le repère R $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ par le vecteur position $\overrightarrow{OM}$.



La position du point M est repérée par son vecteur position $\boxed{\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}}$. Sa norme est : $\boxed{OM = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$

- Si le repère est orthonormé x, y, z sont appelés coordonnées cartésiennes du point M.
- Si le mobile M est immobile dans le repère R ses coordonnées sont indépendantes du temps.
- Si M est en mouvement dans le repère R, ses coordonnées sont en fonction du temps. Ainsi x(t), y(t) et z(t) sont appelées équations horaires ou équations paramétriques du mouvement.
- Pour déterminer l'équation cartésienne de la trajectoire, on élimine la variable temps t entre les paramètres x, y et z.

<u>Application 1</u> : On donne les équations horaires d'un mouvement d'un point M sous la forme : $x(t) = 2t + 3$ et $y(t) = 4t + 2$. Déterminer l'équation de la trajectoire décrite par le point M.

<u>Application 2</u> : On donne les équations horaires d'un mouvement d'un point M sous la forme : $x(t) = t + 1$ et $y(t) = t^2 + 2t$. Déterminer l'équation de la trajectoire décrite par le point M.

<u>Application 3</u> : On donne les équations horaires d'un mouvement d'un point M sous la forme : $x(t) = 2\cos(t) + 2$ et $y(t) = 2\sin(t) – 1$. Déterminer l'équation de la trajectoire d'écrite par le point M.

III. Vecteur vitesse :

1. Définition :

La vitesse instantanée à un instant t est : $\boxed{\vec{v} = \frac{\overrightarrow{OM}}{dt}}$

Le vecteur vitesse est défini comme la dérivée première du vecteur position par rapport au temps.

Les caractéristiques du vecteur vitesse sont :

- **Point d'application : point M ou l'on veut définir la vitesse**
- **Direction : la tangente en la trajectoire en ce point M**
- **Sens : celui du mouvement**
- **Norme : l'intensité du vecteur vitesse. Elle s'exprime en m/s ou m.s^{-1}**

2. Vecteur vitesse et coordonnées cartésiennes :

Par définition : $\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}$ avec $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \Longrightarrow \vec{v} = \frac{d}{dt}(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k} \Longrightarrow$

$$\boxed{\vec{v} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k}} \Longrightarrow \vec{v}\begin{cases} v_x = \dot{x} = \frac{dx}{dt} \\ v_y = \dot{y} = \frac{dy}{dt} \\ v_z = \dot{z} = \frac{dz}{dt} \end{cases}$$

En norme : $\boxed{v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}}$

Nous allons reprendre les exemples vus plus haut et donner dans chaque cas le vecteur vitesse et sa norme.

Exercice à faire à la maison : Dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ le vecteur position d'un mobile M est défini par : $\overrightarrow{OM} = 10\vec{i} + (-5t^2 + 10t)\vec{j}$. Les coordonnées sont en mètre et le temps en secondes.

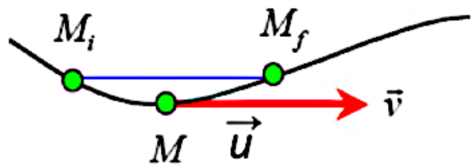
a. Déterminer l'équation de la trajectoire. La représenter.

b. Déterminer l'expression du vecteur vitesse du mobile M.

c. En déduire :

- La valeur de la vitesse à la date t = 2 s
- La valeur de la vitesse lorsque le mobile passe au sommet de sa trajectoire.

3. Vecteur vitesse et coordonnée curviligne :



$v = \frac{\widehat{OM}}{dt} = \frac{ds}{dt} = \dot{s}$; s étant l'abscisse curviligne

$$\boxed{\vec{v} = \frac{ds}{dt}\vec{u} = \dot{s}\vec{u}}$$

$\vec{u}$ vecteur unitaire tangent à la trajectoire et orienté dans le sens du mouvement

IV. Accélération :

1. Définition :

On appelle vecteur accélération d'un point mobile à la date t, le vecteur dérivé par rapport au temps du vecteur vitesse. Elle s'exprime m/s^2.

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right) = \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2} \Longrightarrow \vec{a} = \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}$$

$$\boxed{\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}}$$

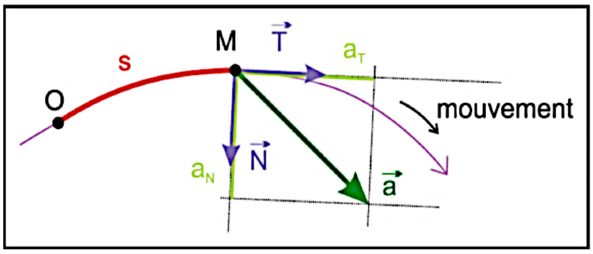
On peut définir ainsi le vecteur accélération comme la dérivée seconde par rapport au temps du vecteur position.

2. Vecteur accélération et coordonnées cartésiennes :

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2} = \frac{d^2}{dt^2}(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) = \frac{d^2x}{dt^2}\vec{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\vec{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\vec{k} \Longrightarrow \boxed{\vec{a} = \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}\vec{k}} \Longrightarrow \boxed{\vec{a}\begin{cases} a_x = \ddot{x} \\ a_y = \ddot{y} \\ a_z = \ddot{z} \end{cases}}$$

Nous allons maintenant reprendre les exemples vus plus haut et donner dans chacun des cas, le vecteur accélération ainsi que sa norme.

3. Vecteur accélération et coordonnées curvilignes :



Soit $\vec{T}$ le vecteur unitaire tangent en M à la trajectoire et orienté dans le sens du mouvement.

$$\vec{v} = v\vec{T} \Longrightarrow \vec{a} = \frac{d}{dt}(v\vec{t}) = \frac{dv}{dt}\vec{T} + \frac{d\vec{T}}{dt}v$$

Le vecteur accélération peut se décomposer en deux vecteurs :

- L'accélération tangentielle : $\vec{a_t} = \frac{dv}{dt}\vec{T}$
- L'accélération normale : $\vec{a_n} = v\frac{d\vec{T}}{dt}$

Soit $\vec{N}$ le vecteur unitaire orthogonal à $\vec{T}$ et orienté vers l'intérieur de la trajectoire. On démontre que :

$\vec{a_n} = v\frac{d\vec{T}}{dt} = \frac{v^2}{R}\vec{N}$; avec R le rayon de courbure de la trajectoire.

Donc : $\vec{a} = a_t\vec{T} + a_n\vec{N} \Longrightarrow \boxed{\vec{a} = \frac{dv}{dt}\vec{T} + \frac{v^2}{R}\vec{N}}$

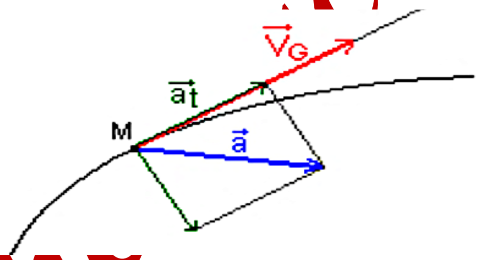
La base $(\vec{T}, \vec{N})$ constitue la base de Frenet. $(M, \vec{T}, \vec{N})$ est le repère de Frenet.

4. Mouvement accéléré, retardé ou uniforme :

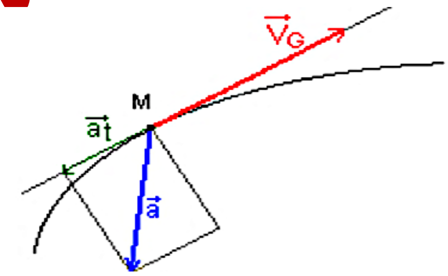
Un mouvement est dit accéléré si la mesure $\|\vec{v}\|$ de la vitesse augmente, retardé si elle diminue, uniforme si elle est constante.

Lorsque v2 augmente $\frac{d\vec{v}^2}{dt} = 2\vec{v}.\frac{d\vec{v}}{dt} = 2\vec{v}.\vec{a} > 0$

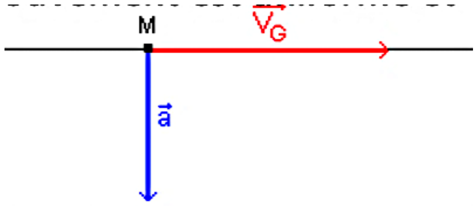
☒ Si v augmente le mouvement est accéléré et $\vec{v}.\vec{a} > 0$ ($\vec{a_t}$ et $\vec{v_G}$ sont de même sens)



☒ Si v diminue le mouvement est décéléré et $\vec{v}.\vec{a} < 0$ ($\vec{a_t}$ et $\vec{v_G}$ sont de sens opposés)



☒ Si v est constante le mouvement est uniforme et $\vec{v}.\vec{a} = 0$ ($a_t = 0$)



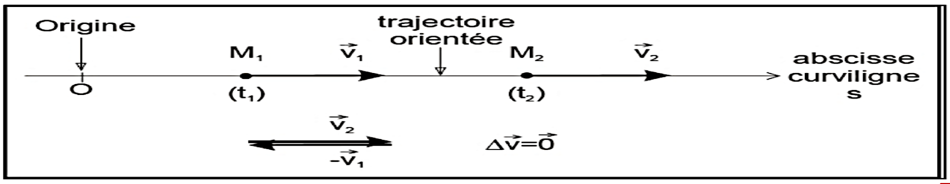
☒ Si $\vec{a}$ et $\vec{v_G}$ sont de même direction, le mouvement est rectiligne.

V. Étude de quelques mouvements :

1. Mouvement rectiligne uniforme :

a. Définition :

Un mobile est animé d'un mouvement rectiligne uniforme lorsque sa trajectoire est une droite et le vecteur vitesse constant ($\vec{v} = v_0\vec{i}$). C'est un mouvement à vecteur accélération nul.



b. Équation horaire :

Conditions initiales : A $t = 0 \Rightarrow x = x_0$ et $v = v_0$

$$v = v_0 = cte \Longrightarrow a = \frac{dv}{dt} = 0 \Longrightarrow \mathbf{a = 0} \text{ et } v = v_0 \Longrightarrow x = v_0 t + C$$

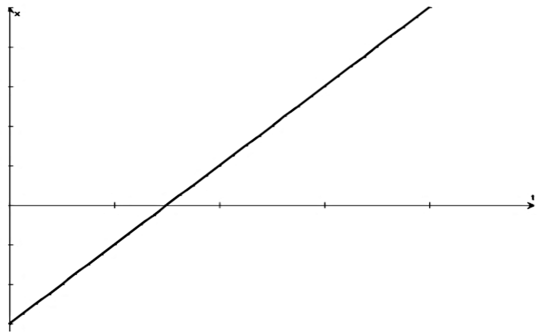
(C constante d'intégration déterminée par les conditions initiales)

$$A\ t = 0, x = x_0 \Longrightarrow x = x_0 \Rightarrow x_0 = v_0 x 0 + C \Rightarrow C = x_0 \text{ d'où } \mathbf{x = v_0 t + x_0}$$

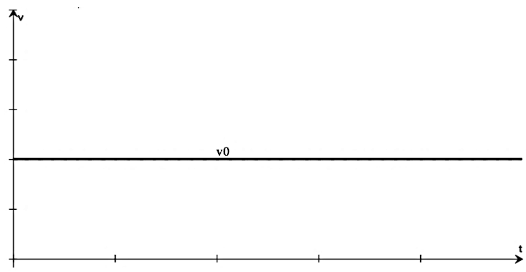
$$\text{Equations horaires d'un mouvement rectiligne uniforme: } \boxed{\begin{cases} \mathbf{a = 0} \\ \mathbf{v = v_0} \\ \mathbf{x = v_0 t + x_0} \end{cases}}$$

***Remarque* : Toutes les grandeurs qui apparaissent dans les équations horaires sont algébriques.**

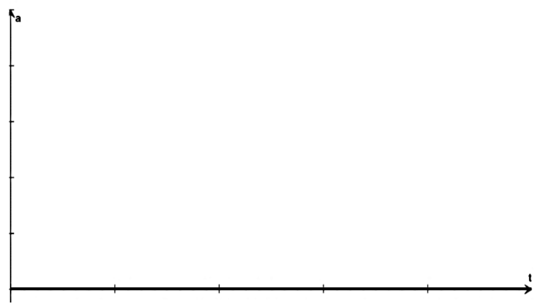
On donne ici les graphes des fonctions x, v et a en fonction du temps



La pente de la droite donne v_0 du mouvement, son ordonnée à l'origine donne l'abscisse x_0 à l'origine des temps



Le diagramme des vitesses est la droite parallèle à l'axe des temps d'ordonnée l'origine v_0.



Le diagramme des accélérations se réduit à l'axe des temps

c. Application :

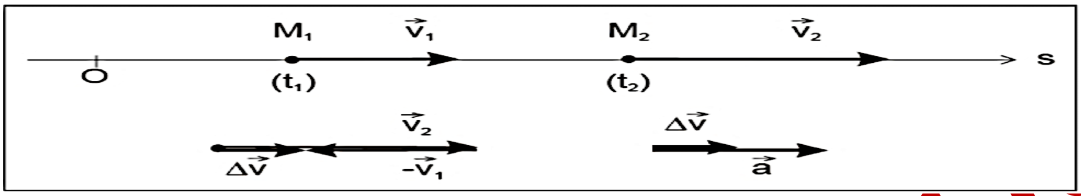
Les équations paramétriques du mouvement donnant le vecteur position $\overrightarrow{OM}$ sont : $\overrightarrow{\mathbf{OM}} \begin{cases} \mathbf{x = t} \\ \mathbf{y = 2t + 4} \\ \mathbf{z = 0} \end{cases}$

Montrer que ce point est animé d'un mouvement rectiligne uniforme.

2. Mouvement rectiligne uniformément varié :

a. Définition :

Un mobile est animé d'un mouvement rectiligne uniformément varié si sa trajectoire est une droite et son vecteur accélération constant ($\vec{a} = a_0\vec{\imath}$)



b. Équation horaire :

$$a = a_0 = cte \Rightarrow v = at + v_0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + x_0$$

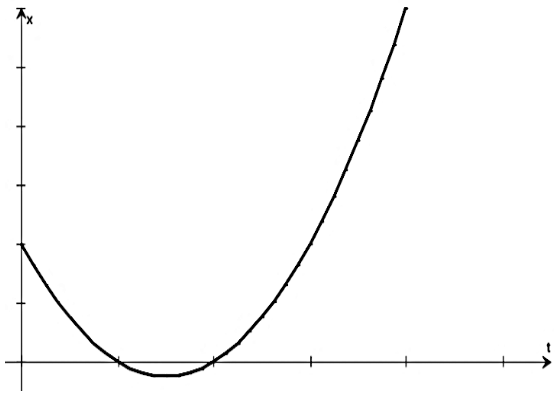
$$v = at + v_0 \Rightarrow t = \frac{v - v_0}{a}$$

$$x - x_0 = \frac{1}{2}a\frac{v-v_0}{a} + v_0\frac{v-v_0}{a} = \frac{v^2-v_0^2}{2a} \Rightarrow x - x_0 = \frac{v^2-v_0^2}{2a}$$ **(Formule de Torricelli)**

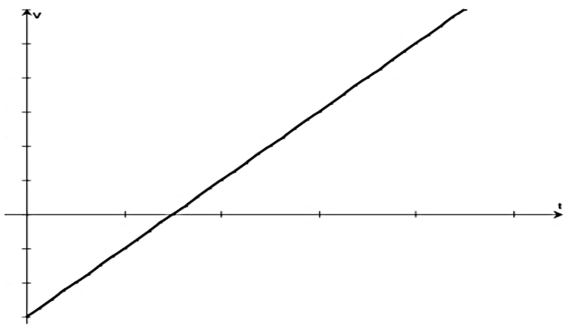
Équations horaires d'un MRUV : $\boxed{\begin{cases} a = cte \Rightarrow v = at + v_0 \\ x = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + x_0 \\ v^2 - v_0^2 = 2a(x - x_0) \end{cases}}$

On donne ici les représentations graphiques de x, v et a en fonction du temps

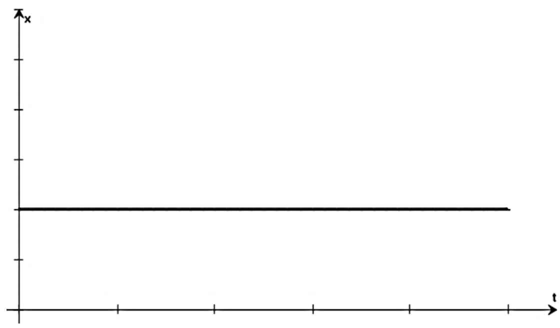
Le graphique des espaces, est une parabole à concavité tournée vers le haut ou le bas selon que l'accélération a est positive ou négative ; l'ordonnée à l'origine de cette courbe donne x_0, position du mobile à l'origine des temps à l'origine des temps.



Le diagramme des vitesses, est une droite dont la pente est égale à l'accélération et dont l'ordonnée à l'origine est la vitesse initiale (à l'instant t = 0) v_0 du mobile



Le diagramme des accélérations, est la droite parallèle à l'axe des temps dont l'ordonnée à l'origine est l'accélération du mouvement a.



c. **Application :**

Un point mobile M décrit sur un axe $O\vec{\imath}$ un mouvement rectiligne uniformément varié d'accélération $\vec{a} = 4\vec{\imath}$. A l'instant t = 0, le vecteur est $\overrightarrow{v_0} = -8\vec{\imath}$ et le vecteur position de M est $\overrightarrow{OM_0} = 2\vec{\imath}$.

a. Établir les équations horaires x(t) et v(t).

b. Déterminer la date et la position pour lesquelles la vitesse s'annule.

c. Entre quelles dates le mouvement est-il accéléré ? retardé ?

3. Mouvement rectiligne sinusoïdal :

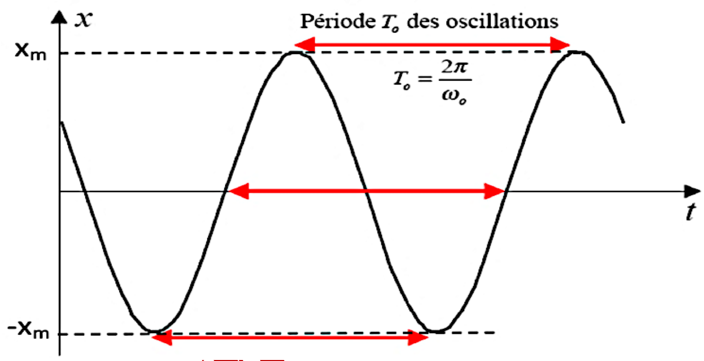
a. **Définition :**

Un mobile M est animé d'un mouvement rectiligne sinusoïdal si son équation horaire peut s'écrire sous la forme : *$x = X_m sin(wt + \varphi)$*.

x :élongation ou abscisse ; X_m : amplitude maximale (toujours positive) ; w(rad/s) : pulsation ; (wt + φ) : phase à l'instant t ; φ : phase à l'origine.

b. **Position du mobile :**

Sin(wt + φ) ∈ $[-1; 1]$ donc $\mathbf{x} \in [-\mathbf{X_m}; \mathbf{X_m}]$: le mobile se déplace sur un segment de droite $[AA']$. M est animé d'un mouvement de va et vient de part et d'autre de O centre du mouvement.



Les expressions de la période (T) et la fréquence (N ou f) sont : $\mathbf{T = \frac{2\pi}{w}}$ et $\mathbf{f = \frac{1}{f}}$

c. **Vitesse et accélération :**

$$x = X_m \sin(wt + \Phi) \Rightarrow \mathbf{v = \frac{dx}{dt} = X_m w \cos(wt + \Phi)} \Rightarrow \mathbf{a = \frac{dv}{dt} = -X_m w^2 \sin(wt + \Phi)}$$

$$a = -w^2(X_m \sin(wt + \Phi)) = -w^2 x \Rightarrow \boxed{\ddot{x} + w_0^2 x = 0}$$

C'est une différentielle caractéristique d'un mouvement rectiligne sinusoïdal.

d. **Application :**

Un mobile est animé d'un mouvement rectiligne sinusoïdal d'axe x'Ox support de la trajectoire. Le point O est le centre du mouvement de période temporelle **T = 1,00 s.** A l'instant initial $t_0 = 0$ pris comme origine des dates, la position du mobile est **x_0 = 1,41 cm** et sa vitesse **v_0 = 8,88 cm/s**.

a. Déterminer la loi horaire de l'élongation du mobile.

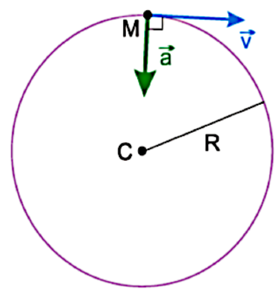
b. A quelles dates le mobile passe-t-il à l'élongation x = - 1 cm en se déplaçant dans le sens négatif ?

4. Mouvement circulaire uniforme :

a. **Définition :**

Un mobile décrit un mouvement circulaire uniforme si sa trajectoire est un cercle et la norme de son vecteur vitesse constante.

b. **Accélération :**



$$s = \widehat{AM} \text{ et } \vec{v} = \frac{ds}{dt}\vec{T} = v\vec{T}$$

$$\vec{a} = \vec{a_t} + \vec{a_n} \text{ or } \vec{a_t} = \frac{dv}{dt}\vec{T} = \vec{0} \text{ car v est une constante et } \vec{a_n} = \frac{v^2}{R}\vec{N} \Rightarrow \boxed{\vec{a} = \vec{a_n} = \frac{v^2}{R}\vec{N}}$$

Le vecteur accélération d'un mouvement circulaire uniforme est dirigé vers le centre de la trajectoire : ont dit l'accélération est **centripète**.

c. **<u>Équations horaires</u>** :

La position du mobile peut être repérée par l'abscisse angulaire α. Par définition la vitesse angulaire w est l'angle balayé pendant l'unité de temps.

$$\boxed{w = \frac{d\alpha}{dt}\ (rad/s)}$$

Pour un mouvement circulaire uniforme $w = \frac{d\alpha}{dt} = cte; v = \frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt}(R\alpha) = R\frac{d\alpha}{dt} = Rw \Rightarrow \mathbf{v = Rw}$

$$\vec{a} = \vec{a_n} = \frac{v^2}{R}\vec{N} = Rw^2\vec{N}$$

$$w = \frac{d\alpha}{dt} = cte \Rightarrow \alpha = wt + \alpha_0$$

équations horaires d'un mouvement circulaire uniforme: $\boxed{\begin{cases} \vec{a} = \frac{v^2}{R}\vec{N} = Rw^2\vec{N} \\ v = Rw \\ \alpha = wt + \alpha_0 \end{cases}}$

d. <u>Application :</u>

Un mobile M est animé dans le plan rapporté au repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ d'un mouvement circulaire. Ces coordonnées s'expriment par : $\begin{cases} x = 2\cos(wt) \\ y = 2\sin(wt) \end{cases}$

a. Monter que le mouvement est circulaire uniforme.

b. `déterminer les coordonnées du vecteur accélération.

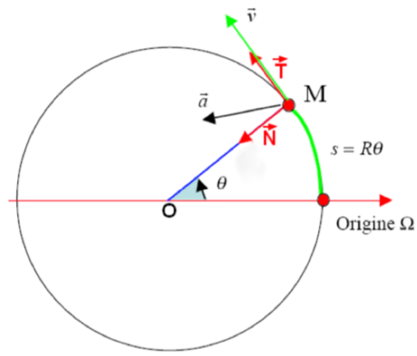
c. Quelle est l'expression de l'abscisse curviligne ?

5. Mouvement circulaire uniformément varié :

a. **<u>Définition :</u>**

Un mobile est animé d'un mouvement uniformément varié si la trajectoire est un cercle et que son accélération angulaire constante.

b. <u>Accélération :</u>



$$\vec{a} = \vec{a_t} + \vec{a_n} = \frac{dv}{dt}\vec{T} + \frac{v^2}{R}\vec{N} \Rightarrow \vec{a} = \frac{d}{dt}(Rw)\vec{T} + \frac{v^2}{R}\vec{N} = R\frac{dw}{dt}\vec{T} + \frac{v^2}{R}\vec{N}$$

$$= R\frac{d^2\alpha}{dt^2}\vec{T} + Rw^2\vec{N} \Rightarrow \boxed{\vec{a} = R\ddot{\alpha}\vec{T} + Rw^2\vec{N}}$$

$$\ddot{\alpha} = \frac{d^2\alpha}{dt^2} = \frac{dw}{dt} : \text{accélération angulaire (rad/s)}$$

$$\ddot{\alpha} = \frac{dw}{dt} \Rightarrow \alpha = \ddot{\alpha}t + \dot{\alpha}_0 \Rightarrow \alpha = \frac{1}{2}\ddot{\alpha}t^2 + \dot{\alpha}_0 t + \alpha_0$$

Équations horaires d'un mouvement circulaire uniformément $\boxed{\begin{cases} \dot{\alpha} = \ddot{\alpha}t + \dot{\alpha}_0 \\ \alpha = \frac{1}{2}\ddot{\alpha}t^2 + \dot{\alpha}_0 t + \alpha_0 \\ \alpha_2^2 - \alpha_1^2 = 2\ddot{\alpha}(\alpha_2 - \alpha_1) \end{cases}}$

c. **<u>Application</u> :** Les équations horaires d'un mouvement plan sont : $\begin{cases} x = t^2 \\ y = \sqrt{4 - t^2} \end{cases}$

a. Quelle est la nature de la trajectoire.

b. Déterminer le vecteur vitesse et sa valeur.

c. En déduire les composantes normales et tangentielles de l'accélération dans la base de Frenet.

d. En déduire les composantes cartésiennes du vecteur accélération.

e. En déduire que le module de l'accélération est indépendant du repère d'étude.