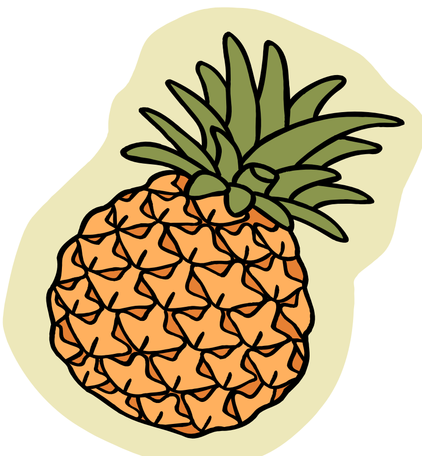
Patrones Repetitivos y Crecientes

Módulo #4

4t0, 5t0, 6t0 grado



Preparado por Dra. Yolanda Vélez

Yolanda.velez2@upr.edu yolandav@coqui.net

Catedrática Departamento de Matemáticas

Universidad de Puerto Rico en Bayamón

Indice

Pre prueba

I. Mencione los términos que faltan para completar un posible patrón:

a) 1, 4, 7, 10, ____ , _____, ____ .

b) 2, 4, 8, 16, __ , ____ , _____ .

c) 3, 9, 27 , 81 , _____ , ______ .

d) a, b , c, g, h, i, ____ , _____ , _____ .

e) #, $, *, *, #, $, *,*, ____ , _____, _____.______ .

II. Clasifique cada sucesión en aritmética, geométrica o ninguna de las anteriores.

a) 1, 2, 3, 5, 8, 13, ….

b) 2 , 7 , 12, 17,…….

c) $\frac{1}{2}$, 1 , 2 , 4, ……..

d) 1 , 3, 9 , 27, …..

e) 3, 9,15,21, …..

III. Determine los primeros tres términos de la sucesión que se genera por la formula : (n representa los enteros positivos)

a) 2n +1

b) 3n -2

c) $n^2 + 2n$

IV. Determine las siguientes sumas

a) los números cardinales desde el 1 hasta el 300.

b) los números cardinales desde el 1 hasta el 505.

c) Los primeros 40 términos de la sucesión aritmética 2, 7, 12, 17, 22, …,

V. Determine la fórmula que genera a la sucesión:

a. $\frac{1}{2}$, 1 , 2 , 4, ……..

b. 2, 4, 6, 8, 10 , 12,…..

c. $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$, ….. , …….

VI. Complete el siguiente cuadrado mágico

a. Utilizando los dígitos del 1 al 16 llene los cuadros que faltan de tal modo que cada fila, columna o diagonal sumen 34.

7	12	13	
	1		11
9		3	16

VII. Un restaurante tiene 35 mesas pequeñas cuadradas para usarlas en un banquete. En cada mesa se puede sentar una persona en cada lado de la mesa o sea cuatro personas. Si las mesas se van a colocar de tal modo que quede una sola mesa larga, ¿Cuántas personas se podrán sentar en la mesa larga?

VIII. ¿Cuál de las siguientes sucesiones representa la sucesión de Fibonacci?

a) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7,…… c) 1, 1, 2 ,2 , 3 , 3, ……

b) 1, 1, 2 , 3, 5, 8, …. D) 1 , 2, 3 , 5 , 8, …..

Respuestas a la Pre prueba

I. a) 13, 16, 19

b) 32, 64, 128

c) 243, 729

d) m, n, o

e) #, $, *, *

II. a) ninguna

b) aritmética

c)geométrica

d) geométrica

e) aritmética

III. a)3, 5, 7, 9, 11,…

b) 1 , 4, 7, 10,…

c) 3, 8, 15 , 24, …..

IV. a) 4,150

b) 127,253

c) La suma es 3980.

V. a) $\frac{1}{2}(2)^{n-1}$

b) 2 + (n-1) 2 ó 2n +1

c) $\frac{1}{n+1}$

VI.

7	**12**	**13**	**2**
14	1	8	11
4	15	10	5
9	6	3	16

VII. Se pueden sentar 70 personas.

VIII. b

Justificación: En la resolución de problemas verbales existen varias estrategias. Entre ellas está la búsqueda de patrones para resolver el problema. Esta búsqueda de patrones para solucionar problemas no sólo se usa en matemáticas, sino en muchas áreas de la vida diaria. Los detectives, al investigar un caso, observan los patrones de los criminales, los estadísticos observan los patrones para poder hacer inferencias, los farmacéuticos, recurren al método científico y observan los patrones, antes de sacar una droga al mercado. Se podría seguir enumerando los ejemplos donde la búsqueda de patrones ayuda a resolver problemas. Por eso es bien importante ir desarrollando en el niño esta destreza desde edad temprana.

Objetivos Generales:

Al finalizar el taller los participantes podrán:

1. Reconocer, leer, describir, identificar, completar y crear patrones de repetición y crecientes que incluye modelos concretos y numéricos.

2. Completar tablas basadas en una regla para revelar patrones.

3. Reconocer, describir e identificar patrones de su diario vivir.

4. Resolver problemas verbales utilizando patrones.

5. Reconocer que los patrones no implican reglas, pero que las reglas implican patrones.

6. Completar y describir patrones repetitivos, crecientes y decrecientes que incluyen formas geométricas o modelos concretos de uso cotidiano.

Objetivos Específicos:

Al finalizar el taller los participantes podrán:

1. Identificar si existe un patrón en una sucesión de números.
2. Construir la fórmula que genera los términos de una sucesión.
3. Diferenciar entre sucesión aritmética y geométrica.
4. Establecer el patrón o la fórmula que genera todos los términos de cualquier sucesión de números.
5. Establecer un patrón para hallar la suma en una sucesión de números.
6. Analizar patrones mediante el uso de tablas y resolver cuadrados mágicos.
7. Resolver problemas verbales utilizando patrones.
8. Completar y describir patrones repetitivos, crecientes y decrecientes que incluyen formas geométricas.

Introducción:

Una de las estrategias más importantes en la resolución de problemas es el descubrimiento de patrones. Los detectives observan el modo de operar de muchos criminales para poder capturarlos. El descubrimiento de un patrón no necesariamente los conduce a descubrir el criminal pero crea un perfil del mismo. Esto mismo sucede en las matemáticas. En la resolución de problemas tratamos de buscar patrones que se repiten para ayudarnos a resolver el problema. No siempre se obtiene la solución.

El razonamiento inductivo es aquel razonamiento que está basado en examinar una gran variedad de datos. Los científicos utilizan el método inductivo cuando realizan experimentos para llegar al descubrimiento de leyes de la naturaleza. Los estadísticos utilizan este método cuando forman conclusiones basados en un grupo de datos organizados.

Al observar un patrón que se repite podemos establecer una ***conjetura***. Una ***conjetura*** es un hecho que se piensa cierto hasta que se pruebe que es cierto o no es cierto. Un contraejemplo puede demostrar que una conjetura no es cierta.

Si un niño multiplica diferentes números por 1 obtiene el mismo número y puede establecer una conjetura.

Ejemplo: 2 x 1 = 2 4 x 1 = 4 5 x 1 = 5

Todo número entero que se multiplica por 1 da el mismo. Pero sabemos que esto es cierto porque es una de las propiedades de los números naturales. El uno es elemento de identidad de multiplicación para los naturales.

Supongamos que alguien dice: Todos los números primos son impares. 9 es impar. Pero no es primo. Para entender mejor estos conceptos debemos empezar con la búsqueda de patrones.

Búsqueda de patrones

Uno de los patrones con los cuales se comienza en primer grado es cuando los niños comienzan a contar y se les presentan diferentes sucesiones de números para que éstos busquen un patrón ó sigan la secuencia.

Veamos algunos ejemplos.

1) Cuente de 5 en 5.

5, 10, 15,___ , ____

15, ____, ____, 30, ____

10, ____, ___, ____, ____

Es importante que para seguir la secuencia se le suma siempre 5 al último número.

2) En cada ejercicio llene los blancos siguiendo el patrón establecido.

a) 74, ____, ____, 77, ___, _____

b) 91, 92, _____, _____, _____, 96

c) 53, ____ , 55, _____, 57, ____, 59, ___.

Es importante que para seguir las secuencias de números anteriores se le suma siempre 1 al número anterior.

3) Escriba los números de 50 en 50

50, 100, 150 , _____ , _______, _____.

Es importante que para seguir la secuencia se le suma siempre 50 al número anterior.

No siempre tendremos números. A veces tenemos lo siguiente:

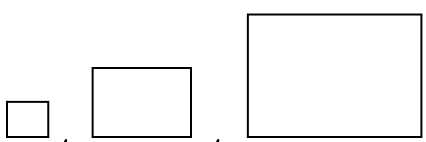
4) Escriba las letras que faltan:

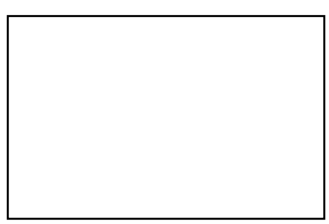
a) a , b, c, e, f, g, __ , ___ , _____ .

Las letras que faltan son i, j, k. En este caso observamos que el patrón es tres letras y se elimina la siguiente.

b) △ , ○ , ○ , △ , ○ , ○ , ___ , ___, ____ .

El patrón es △, ○, ○ . luego vuelve y se repite.

c)  , ____________ .

El próximo término es:  .

En los primeros grados, el objetivo que se persigue es que el estudiante identifique el patrón, el cuál es que la figura va aumenta de tamaño. No se establece a que proporción está creciendo el rectángulo.

d) & , &, * , #, #, &, &, ___ , ____ , ____ .

En este caso el patrón es &, &,* ,#, # . y se repite.

Sucesiones

En los ejemplos previos los números aparecen como si estuvieran ordenados. La palabra sucesión se utiliza para describir un conjunto de números dados de tal manera que parecen enumerados, o sea el primero, el segundo, el tercero, etc. Cada número se conoce como término. Cada término sucesivo en una sucesión se obtiene del término anterior, a veces sumándole un número y otras veces multiplicando por un número y otras veces por una fórmula. Observemos el siguiente ejemplo:

¿Cuál es el patrón en las siguientes sucesiones de números?

a) 2, 4, 6, __, ___ ,____, ______ .

Obsérvese que el patrón aquí es que se presentan los números pares.

b) 1, 3, 5, 7, ___ , ____ , _____ , ____ .

En este caso se presentan los números impares

c) 2, 7, 12, 17, ____ , ____ , ____ , ____ .

En este caso, cada término se consigue sumándole 5 al término anterior.

d) 2, 4, 8, 16, _____ , ______, _____ .

En este caso tenemos que cada término se genera multiplicando por 2 el anterior.

e) $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5},$ ____ , _____ , ______ .

En este caso tenemos que los términos se generan sumando 1 al número del denominador.

f) 1, $\frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16},$ ____ , _____ , ______ .

En este caso cada término se obtiene elevando al cuadrado el número que sigue en el denominador. O sea $\frac{1}{1^2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{3^2}, \ldots, \ldots,$

Sería interesante conseguir una fórmula para cada una de las sucesiones de tal modo que podamos generar cualquier término, por ejemplo el término número 100 sin tener que desarrollarla. Para esto debemos conocer un poco más sobre las sucesiones.

Sucesión aritmética

En una sucesión aritmética cada término se obtiene del anterior sumando por una cantidad única llamada la diferencia común (d). Observemos la siguiente sucesión:

4, 7, 10, 13,…, …. Observemos que la diferencia entre los términos es 3 unidades.

Organicemos los términos en una tabla para observar el siguiente patrón:

Número de término	término
1	4
2	7 = 4 + 3
3	10 = 4 + 3 + 3 = 4 + 2(3)
4	13 = 4 + 3 + 3 + 3 = 4 + 3(3)
enésimo	4 + (n-1) 3

Observando la tabla podemos concluir que para hallar cualquier término de una sucesión aritmética la fórmula es: $a_n = a_1 + (n-1)d$ donde a_1 es el primer término de la sucesión, d es la diferencia única, a_n es el enésimo término de la sucesión y donde n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, … . Si queremos obtener el término número 15 de esta sucesión sustituimos n = 15 en la fórmula $\boldsymbol{a_n = a_1 + (n-1)d}$ y obtenemos

$a_{15} = 4 + (15-1)3 = 4 + (14)4$

$a_{15} = 4 + 56 \rightarrow a_{15} = 60$

Ejemplos:

1. Determina la fórmula que nos da el enésimo término de la sucesión:

1 , 8 ,15 ,22 , ……

El primer término es 1 y la diferencia entre ellos es 7, por lo tanto

$a_n = 1 + (n-1)7$

2. Determine los primeros cuatro términos de las sucesiones siguientes y mencione si son o no sucesiones aritméticas.

a) $a_n = 5 + (n-1)4$ Es una sucesión aritmética.

Número de término	Término
1	5
2	9
3	13
4	17

b) $a_n = 2n^2 - 2$ No es una sucesión aritmética ya que no existe una diferencia única entre sus términos.

Número de término	Término
1	0
2	6
3	16
4	30

3. Determine la fórmula del enésimo término de la sucesión aritmética cuyo término número 3 es 13 $(a_3 = 13)$ y su término número 7 es 33 $(a_7 = 33)$. Utilice la fórmula para hallar el término número 20. (a_{20})

Utilicemos una tabla para analizar este problema.

Número de término	Término
1	¿
2	¿

Número de término	Término
4	13 + d
5	13 + 2d
6	13 + 3d
7	13 + 4d = 33

Como $a_7 = 33$ tenemos que, 33 = 13 + 4 d

20 = 4d → 5 = d

Como d es 5 tenemos que el segundo término es 8 y el primer término es 3.

Entonces la fórmula es $a_n = 3 + (n-1)5$ y

$a_{20} = 3 + (20 - 1)5.$

$a_{20} = 3 + (19)5$ → $a_{20} = 3 + 95$ → $a_{20} = 98.$

Nota: Hay otras técnicas para resolver este ejemplo.

Ejercicios # 1.

I. Mencione los términos que faltan para completar el patrón y menciona cuál es el patrón:

a) 4, 8, 12, 16, ____ , _____ , ______ .

b) 3, 6, 9, 12, ____ , _____, ______ .

c) 1, 2, 3, 2, 9, 2, 27, 2, ____ , ____ , _____ , _____ .

II. Determine el término enésimo de las sucesiones siguientes:

a) 22, 32, 42, 52, …

b) 2, 10 , 18, 26, …

c) 15, 19, 23, 27, 31, …

III. ¿Cuáles de las siguientes sucesiones son aritméticas?

a) 2, 4 , 6 , 8, …

b) 1, 3, 6, 10, 15, …

c) 2, 8, 14, 20, ….

d) $\frac{1}{2}$, 1, $\frac{3}{2}$, 2, $\frac{5}{2}$, 3, $\frac{7}{2}$, ….

IV.

1. Determine el enésimo término de la sucesión aritmética que tiene su tercer término igual a 7 y su sexto término igual a 16.

2. Determine el enésimo término de la sucesión aritmética que tiene su segundo término igual a 8 y su quinto término igual a 23.

Respuestas a los ejercicios #1:

I. a) 20, 24, 28. Se le suma 4 al número anterior y se obtiene el siguiente.

b) 15, 18,21. Se le suma 3 al número anterior y se obtiene el siguiente.

c) 81, 2, 243, 2. Se multiplica por 3 el primer número y el segundo no se altera.

II. a) $d = 10$ $a_1 = 22$ $a_n = 22 + (n - 1)10$

b) $d = 8$ $a_1 = 2$ $a_n = 2 + (n - 1)8$

c) $d = 4$ $a_1 = 15$ $a_n = 15 + (n - 1)4$

III. a) Sí

b) No

c) Sí

d) Sí

IV. a) $a_n = 1 + (n - 1)3$

b) $a_n = 3 + (n - 1)5$

Sucesión geométrica

En una sucesión geométrica cada término se obtiene del anterior multiplicando por una cantidad fija llamada la razón común ó radio (r). Un ejemplo simple de una sucesión geométrica es:

2, 6 , 18, 54, 162, ... Observemos que comenzamos con el número 2 y el próximo término se genera multiplicando el primero por 3 y así sucesivamente. Para generar la fórmula de una sucesión geométrica vamos a poner cada uno de los términos en una tabla. Si llamamos a el primer término tenemos que ocurre lo siguiente:

Número de término	Término	Observación
1	$2 = 2\,x\,3^0$	a
2	$6 = 2 \times 3^1$	$a \times r^1$
3	$18 = 2 \times 9 = 2 \times 3^2$	$a \times r^2$
4	$54 = 2 \times 27 = 2 \times 3^3$	$a \times r^3$
5		$a \times r^{(5-1)}$
n		$a \times r^{(n-1)}$

Entonces podemos concluir que la fórmula que genera el enésimo término de una sucesión geométrica está dada por: $\boldsymbol{a_n = a \times r^{n-1}}$ donde a representa el primer término y r es la razón común.

Ejemplos de sucesiones geométricas

1) $\frac{9}{2}$, $9,\ 18,\ 36\ ,\ 72, \ldots$

La siguiente sucesión es geométrica porque el primer término es $\frac{9}{2}$ y los demás se consiguen multiplicando por 2. La fórmula que genera todos sus términos es:

$$\boldsymbol{a_n = \frac{9}{2}(2)^{n-1}}$$

2) 2 , 10 , 50 , 250, ……

La siguiente sucesión es geométrica porque el primer término es 2 y los demás se consiguen multiplicando por 5. La fórmula que genera todos sus términos es:

$$\boldsymbol{a_n = 2(5)^{n-1}}$$

3) 2, 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, ….

La siguiente sucesión es geométrica porque el primer término es 2 y los demás se consiguen multiplicando por $\frac{1}{2}$. La fórmula que genera todos sus términos es:

$$\boldsymbol{a_n = 2\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}$$

4) Dada la fórmula para la serie geométrica $\boldsymbol{a_n = \frac{1}{2}(3)^{n-1}}$ desarrolle los primeros cuatro términos. Tenemos que si empezamos con n = 1 tenemos

$\boldsymbol{a_n = \frac{1}{2}(3)^{1-1}}$ y entonces $\boldsymbol{a_1 = \frac{1}{2} \times (3)^{1-1} = \frac{1}{2} \times (3)^0}$

$$\boldsymbol{a_1 = \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{2}}$$

Si n = 2 tenemos que $\boldsymbol{a_2 = \frac{1}{2}(3)^{2-1}}$

$$\boldsymbol{a_2 = \frac{1}{2}(3)^1 = \frac{3}{2}}$$

Si n = 3 tenemos que $\boldsymbol{a_3 = \frac{1}{2}(3)^{3-1}}$

$$\boldsymbol{a_3 = \frac{1}{2}(3)^2 = \frac{1}{2} \times 9 = \frac{9}{2}}$$

Observando el patrón podemos deducir que $\boldsymbol{a_4 = \frac{27}{2}}$

Los primeros cuatro términos de la sucesión geométrica son $\left\{\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{9}{2}, \frac{27}{2}\right\}$.

5) Un niño tiene dos padres, 4 abuelos, 8 bisabuelos, 16 tatarabuelos y así sucesivamente. Si fuéramos a escribir una sucesión para el número de ancestros que tenemos tendríamos: 2, 4, 8, 16, …. El número de ancestros de este niño ó de cualquier persona forma una sucesión geométrica donde a = 2 y la razón común es 2. La fórmula general de la sucesión es: $a_n = 2(2)^{(n-1)}$. En la naturaleza podemos ver otros patrones. Estos se discutirán más adelante.

Ejercicios # 2:

I. Determine la fórmula que genera los términos de las siguientes sucesiones geométricas:

a) 1, 3 ,9 ,27, …

b) 2, 8, 32, 128,…

c) $\frac{1}{2}$, 2, 8, 32, …

d) $\mathbf{1}, \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}, \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{16}}, \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{64}}, \ldots$

II. Desarrolle los primeros cuatro términos de las siguientes sucesiones geométricas:

a) $\boldsymbol{a_n} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}(\mathbf{4})^{\boldsymbol{n-1}}$

b) $\boldsymbol{a_n} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}(\mathbf{2})^{\boldsymbol{n-1}}$

c) $\boldsymbol{a_n} = \mathbf{3}(\mathbf{4})^{\boldsymbol{n-1}}$

Respuestas a los ejercicios #2:

I. a) $a_n = 1(3)^{n-1}$ b) $a_n = 2(4)^{n-1}$

c) $a_n = \frac{1}{2}(4)^{n-1}$ d) $a_n = 1\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$

II. a) $\frac{1}{2},\ 2,\ 8,\ 32$ c) 3, 12, 48, 192

b) $\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{4}{3}, \frac{8}{3}$

Definir el término enésimo de cualquier sucesión

Es importante saber establecer la fórmula que genera todos los términos de una sucesión. Esto permite que podamos buscar cualquier término sin necesidad de desarrollar la sucesión.

Ejemplo:

1) ¿Cuál es la fórmula que genera cualquier término en las siguientes sucesiones de números?

a) 2, 4, 6, 8, …

Obsérvese que el patrón aquí es que se presentan los números pares. La formula es: $a_n = 2n$ donde n representa los números naturales. Observa también que es una sucesión aritmética con d = 2.

b) 1, 3, 5, 7, …

En este caso se presentan los números impares. Si en el problema anterior un número par se representa por 2n, entonces un número impar debe representarse por 2n - 1. La fórmula es $a_n = 2n - 1$. Observa que si queremos conocer el término número 25, con sustituir n = 25 en la fórmula obtenemos :

$$a_{25} = 2(25) - 1 = 50 - 1 = 49$$

Si queremos saber el término número 100, con sustituir n = 100 obtenemos:

$$a_{100} = 2(100) - 1 = 199.$$

Observa también que es una sucesión aritmética con d = 2.

c) 2, 7, 12, 17, …

En este caso, cada término se consigue sumándole 5 al término anterior. Observamos que es una sucesión aritmética. Sabemos que d = 5 y el primer término es a =2, entonces la fórmula que genera todos los términos es $a_n = 2 + (n-1)5$.

d) 2, 4, 8, 16, …

En este caso tenemos que cada término se genera multiplicando por 2 el anterior, por lo que tenemos una sucesión geométrica, entonces la razón común es

r = 2 y a = 2. La fórmula que genera la sucesión es $a_n = 2(2)^{n-1}$

e) $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots$

En este caso tenemos que los términos se generan sumando 1 al número del denominador. La fórmula es $a_n = \frac{1}{n+1}$.

f) $1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \ldots$

En este caso cada término se obtiene elevando al cuadrado el número que sigue en el denominador. O sea $\frac{1}{1^2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{3^2}, \ldots, \ldots$. La fórmula es $a_n = \frac{1}{n^2}$.

A veces no se nos ofrece suficiente información sobre una sucesión, como por ejemplo la siguiente:

1 , 2 , 4, …

Podemos inmediatamente pensar que el patrón es que se multiplica por 2 el término anterior. O sea que los términos que siguen son 8, 16, 32, …. Pero si observamos bien la diferencia entre 1 y 2 es 1, la diferencia entre 2 y 4 es 2. Podemos pensar que lo que sigue es un número cuya diferencia entre él y 4 es 3. Entonces siguiendo este patrón tendríamos:1, 2, 4, 7, 11, 16,….

Necesitamos más información para poder decidir exactamente cuál es el patrón. Por eso es importante que se describan una cantidad razonable de términos de una sucesión de manera que se observe el patrón y no haya lugar a dudas.

Por ejemplo , obsérvese la siguiente sucesión : 1,2,3,4,5,1,2,3,4,5,… . En esta sucesión no hay duda de que el patrón es 1,2,3,4,5, y se repite.

Ejercicios # 3.

1. Desarrolle los primeros cuatro términos de la sucesión representada por la fórmula: (Recuerde que n es un número entero positivo)

a) $\left\{\frac{1}{n}\right\}$

b) $\left\{\frac{n+2}{2n-1}\right\}$

c) $\left\{\frac{3}{n^2}\right\}$

d) $\{5(2)^{n-1}\}$

II. ¿Cuántos términos hay en las sucesiones aritméticas siguientes?

a) 2, 8, 14, 20, …. , 68, 74, 80.

b) 3, 7, 11, 15, 19, … , 83.

Respuestas a los ejercicios #3.

I. a) $\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots\right\}$ b) $\left\{\frac{3}{1}, \frac{4}{3}, \frac{5}{5}, \frac{6}{7_{,,}} \ldots\ldots\right\}$

c) $\left\{3, \frac{3}{4}, \frac{1}{3}, \frac{3}{16,} \ldots\ldots\right\}$

II. a) $a = 2; d = 6; \quad a_n = 2 + (n-1)6$

$80 = 2 + (n-1)6 \rightarrow n = 14$

b) $a = 3; d = 4; \quad a_n = 3 + (n-1)4$

$83 = 3 + (n-1)4 \rightarrow n = 21$

Suma de los primeros n términos de una sucesión

Para el siglo 18 en Alemania, una maestra le pidió a los niños que sumaran los números del 1 al 100 esperando tener un respiro en su clase. A los pocos minutos un niño llamado Karl Friedrich Gauss (1777-1855) le llevó la contestación. "Maestra, la suma es 5050". La maestra se quedó sorprendida desconociendo que tenía un genio de las matemáticas en el salón.

¿Cómo él hizo esta suma? El buscó un patrón. El problema es hallar la suma de los números enteros positivos del 1 al 100. Esto es 1 + 2 + 3 + 4 + 5+ … + 98 + 99 + 100. Si sumamos los extremos vamos a obtener un patrón.

1 + 2 + 3 + ………..+ 49 + 50 + 51 + 52 + ….. + 99 + 100

1	2	3	……….	…	49	50
+ 100	+ 99	+ 98	……..	…	+ 52	+51
101	101	101			101	101

Tenemos el total de 101 cincuenta veces. Entonces (101)(50) =5050.

Si sustituimos 100 por n tenemos que 101 es igual a n + 1 y 50 es igual a n/2.

Entonces la suma de los números enteros de 1 a n está dada por (n + 1) (n /2).

Veamos un ejemplo.

1. Determina la suma de los números enteros positivos desde 1 hasta 76.

La suma es (76 +1) (76/2) = 77*38 =2926.

Observa lo que ocurre cuando el número es impar.

2. Supongamos que queremos hallar la suma de todos los enteros positivos del 1 al 25. Por la fórmula tenemos que sería

$(25+1)\ (25/2) = 26 \times 12.5 = 325.$

Supongamos que tenemos duda de este resultado ya que 25 es impar.

Hagamos el proceso como sumas pequeñas de números que dan 26.

25	24	23	22	……………	15	14	13
+1	+2	+3	+4	……………	+11	+12	
26	26	26	26		26	26	

Tenemos que la suma se repite doce veces y 13 se queda solo. Entonces

$(12)(26) + 13 = 325$ lo cual es correcto.

3. Determina la suma de los números enteros positivos desde 1 hasta 75

$(75 + 1)\ (75/2) = 76 \times 37.5 = = 2850.$

Ejercicios # 4 Repuestas:

1. Determine la suma de los números cardinales desde 1 hasta 200. (20,100)
2. Determine la suma de los números cardinales desde 1 hasta 501. (125,500)
3. Determine la suma de los números cardinales desde 1 hasta 1,000. (500,500)

La suma de los primeros n términos de una sucesión aritmética.

En una sucesión aritmética, la suma de todos sus términos está dada por:

$S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d] = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$ donde a_1 es el primer término y a_n es el último término de la sucesión.

Ejemplos:

Halle la suma de cada una de las siguientes sucesiones aritméticas

a)1 + 3 + 5 + 7 + 9 + … + 99.

Observemos que a_1= 1, a_n = 99 y la diferencia única es 2. Tenemos que

99 = 1 + (n-1) 2 = 1 + 2n -2 = 2n -1

99 + 1 = 2n

100 = 2n → n = 50. Entonces la suma es:

$$S_{50} = \frac{50}{2}[2(1) + (50-1)2]$$

$$S_{50} = 2{,}50$$

b) 7 + 12 + 17 + 22 + 27 + … + 102.

En este caso a = 7 y la diferencia común es d = 5. El último término es 102.

Debemos hallar cuántos términos tiene la sucesión. Para esto utilizamos la fórmula del enésimo término. 102 = 7 + (n-1) 5

102 = 7 + 5n - 5 = 5n + 2

102 – 2 = 5n

100 = 5n → n = 20

Entonces la suma de los primeros 20 términos de la sucesión es:

$$S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d] = S_{20} = \frac{20}{2}[2(7) + (20-1)5]$$

$$S_{20} = 10[14 + (19)5]$$

$$S_{20} = 10[14 + 95] = 10(109) = 1090.$$

Ejercicios # 5

1. Determine la suma de los números cardinales desde 1 hasta 1,000.

2. Determine la suma de 5 + 9 + 13 + 17 + 21 + 25 + … + 53

3. Determine la suma de 1 + 3 + 5 + … + 59.

Repuestas:

1) Tiene 1,000 término y su suma es 500,000

2) Tiene 13 términos y la suma es 377.

3) Tiene 30 términos y la suma es 900.

Análisis de patrones mediante el uso de tablas: *Cuadrados Mágicos:*

Ejemplo #1:

Utilizando los dígitos del 1 al 9 llene los cuadros que faltan de tal modo que cada fila, columna o diagonal sumen lo mismo.

Habrás obtenido un resultado parecido al de tu compañero. Por ejemplo veamos los siguientes:

4	**9**	**2**
3	5	7
8	1	6

2	**7**	**6**
9	5	1
4	3	8

Algunas instrucciones que nos dan una pista de lo que debemos hacer.

1. Para saber cuánto debe sumar cada fila o columna suma todos los números y divide el resultado por 3.

2. Escribe todos los números 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

3. Suma el 1 con el 9, el 2 con el 8, el 3 con el 7 , el 4 con el 6 y el 5 es el número que va en el medio.

4. Nunca pongas el 9 en una esquina.

Lo que acabamos de trabajar se conoce como un cuadrado mágico. Un cuadrado mágico es un arreglo cuadrado de números con la propiedad que la suma a lo largo de cada fila, cada columna, cada diagonal es la misma. El resultado de esa suma se llama la suma mágica. El orden de un cuadrado mágico es el número de filas o columnas que él tenga.

Cuenta la leyenda que alrededor del 2200 A.C. el Emperador Chino Yu descubrió en los bancos del Rio Amarillo una tortuga donde en el caparazón tenía un dibujo como el de la figura # 1. Si se cuentan los puntos en el caparazón de la tortuga tendremos el cuadrado mágico de la figura #2. El llamado *lo-shu* de la tortuga es un ejemplo temprano de lo que se conoce hoy en día como un cuadrado mágico.

Figura # 1

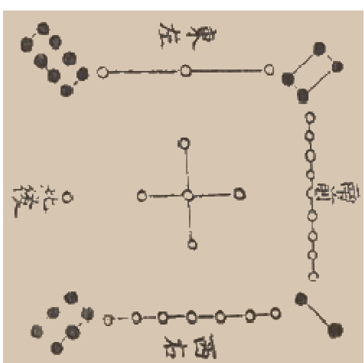


Figura # 2

8	**3**	**4**
1	5	9
6	7	2

No existe un cuadrado mágico de orden 2. De orden 3 solo existe uno. Todo los que conoces son múltiplos del que se presenta arriba. De orden 4 existen 880 y de orden 5 existen 275,305,224. ¿Cuántos conoces tú?

Resolvamos algunos cuadrados mágicos de orden 4 y de orden 5.

Ejemplo #2 : Utilice los números del 1 al 16 . La suma de cada fila, columna y diagonal debe dar 34.

1)

16	**9**	**6**	
	4		10
11		1	
	7		13

2)

7			**2**
	1	8	
4			5
9	6	3	

3)

4	**15**	**10**	
	6	3	16
7			2
14		8	

4)

1		**13**	**12**
	11		7
4			9
15			6

A diferencia del ejemplo #1, aquí los números aparecen en un orden diferente. Por eso es que existen 880 cuadrados mágicos de orden 4.

Ejemplo #3. : Utilice los números del 1 al 25. La suma de cada fila, columna y diagonal debe dar 65.

3		**9**		**15**
20	8		14	2
	25	13	1	
24		5		6
	4		10	23

Respuestas a los cuadrados mágicos:

1)

16	**9**	**6**	**3**
5	4	15	10
11	14	1	8
2	7	12	13

2)

7	**12**	**13**	**2**
14	1	8	11
4	15	10	5
9	6	3	16

3)

4	**15**	**10**	**5**
9	6	3	16
7	12	13	2
14	1	8	11

1	**8**	**13**	**12**
14	11	2	7
4	5	16	9
15	10	3	6

Respuesta al ejemplo #3.

3	**16**	**9**	**22**	**15**
20	8	21	14	2
7	25	13	1	19
24	12	5	18	6
11	4	17	10	23

Ejercicios # 6.

1. Llene los cuadros que faltan de tal modo que cada fila, columna o diagonal sumen lo mismo.

a)

389		**227**
107	269	431
311	347	149

b)

401	**227**	**179**
47	269	491
359		137

c)

401	**257**	**149**
17		521
389	281	137

2. Complete los siguientes cuadros de tal modo que cada fila, columna o diagonal sumen lo mismo **(34)**.

16	**3**	**2**	**13**
	10		
9		7	12
4		14	

3. Halle los dígitos que faltan.

16	9	4	(a)
(b)	6	15	10
13	12	1	(c)
(d)	(e)	(f)	(g)

Respuestas a los ejercicios # 6:

1.

389	191	**227**
107	269	431
311	347	149

2.

401	**227**	**179**
47	269	491
359	**321**	137

3.

401	**257**	**149**
17	**269**	521
389	281	137

2.

16	**3**	**2**	**13**
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

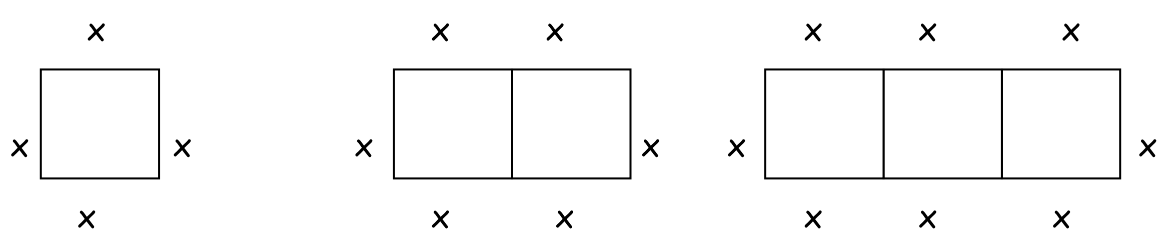
3.

16	9	4	(a) 5
(b)3	6	15	10
13	12	1	(c)8
(d)2	(e)7	(f)14	(g)11

Uso de patrones para resolver problemas verbales

1. Un restaurante tiene 40 mesas pequeñas cuadradas para usarlas en un banquete. En cada mesa se puede sentar una persona en cada lado de la mesa o sea cuatro personas. Si las mesas se van a colocar de tal modo que quede una sola mesa larga, ¿Cuántas personas se podrán sentar en la mesa larga?

Para resolver éste problema podemos trabajarlo en una escala más pequeña. Hagamos un dibujo de la situación y pensemos cuantas personas podemos sentar si tenemos una mesa, dos mesas, tres mesas, …. Veamos:



1 mesa → 4 personas 2 mesas → 6 personas 3 mesas → 8 personas

4 mesas → 10 personas

Observemos el patrón:

1 mesa-- 4 personas 4 = 2 (1) +2

2 mesas-- 6 personas 6 = 2(2) + 2

3 mesas—8 personas 8 = 2(3) + 2

4 mesas—10 personas 10 = 2(4) + 2

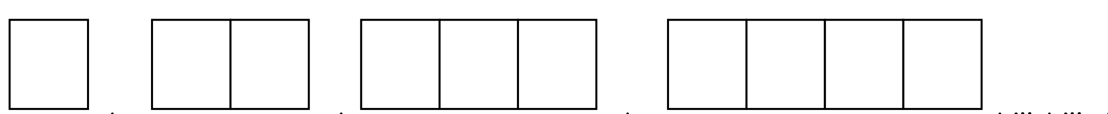
Entonces podemos concluir que si tenemos 40 mesas podemos sentar 2(40) +2 = 82 personas.

Observa que aquí se ha formado una sucesión aritmética. Los términos son: 4, 6, 8, 10, … . El primer término es 4 y la diferencia común es 2. La fórmula que genera el enésimo término de la sucesión es: $a_n = 4 + (n-1)2$. Si queremos hallar cuántas personas podemos sentar con 15 mesas, tenemos que sustituir n = 15 en la fórmula y obtenemos como resultado:

$a_n = 4 + (15-1)2.$

$a_n = 4 + (14)2 = 4 + 28 = 32$ personas que podemos sentar.

2. Determine un patrón que nos dé el número de palitos para continuar el patrón siguiente:



Observemos que el primer término se forma con 4 palitos

El segundo término se forma con 7 palitos

El tercer término se forma con 10 palitos

El cuarto término se forma con 13 palitos

Entonces tenemos una sucesión de números cuyo comportamiento es el siguiente:

4, 7, 10, 13,.....

Observemos que se forma una serie aritmética que comienza con 4 y la diferencia común es 3. Por lo tanto la fórmula que genera el enésimo término es:

$$a_n = 4 + (n-1)3$$

Si queremos saber cuántos palitos necesitamos para el término #20 con sustituir n= 20 en la fórmula es suficiente. Veamos:

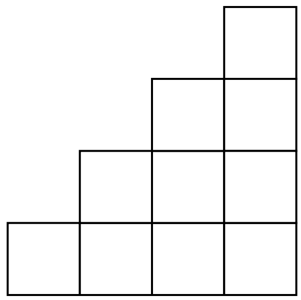
$$a_{20} = 4 + (20-1)3$$

$$a_{20} = 4 + (19)3 = 57$$

Ejercicios # 7.

1. Un restaurante tiene 30 mesas pequeñas cuadradas para usarlas en un banquete. En cada mesa se puede sentar una persona en cada lado de la mesa o sea cuatro personas. Si las mesas se van a colocar de tal modo que quede una sola mesa larga, ¿Cuántas personas se podrán sentar en la mesa larga?

2. María está construyendo una escalera de bloques siguiendo el patrón que se muestra en la figura #1. ¿Cuántos bloques le tomará a María construir una escalera de 50 escalones?



3. Un sapo cayó en un hoyo de 18 pies de profundidad. Cada día sube 3 pies y cada noche se resbala 2 pies. ¿Cuántos días le tomará al sapo salir del hoyo?

4. Al comparar 8 bolas todas parecen iguales, pero una es levemente más pesada que las otras. Usando una balanza, ¿cómo puedes determinar la más pesada solo en tres pesajes?

5. José entró a una tienda y tiene en su bolsillo cambio exactamente para un dólar. Tiene monedas, excepto de medio dólar. Puede que tenga repetidas las otras pero no sobrepasan la cantidad de 50 cada una.

a) ¿Cuál es el número menor de monedas que José puede tener?

b) ¿Cuál es el número mayor de monedas que José pueda tener?

6. Tania está planeando una reunión con los comerciantes de la Avenida donde está su negocio. Ella desea utilizar 36 mesas cuadradas pequeñas para hacer una sola

mesa grande cuadrada. Si cada mesa pequeña puede sentar solo a una persona en un lado, ¿Cuántas personas pueden sentarse en la mesa grande cuadrada?

(Se recomienda que comience con 4 mesas y luego con 9 mesas)

Repuestas a ejercicios #7

1. 30(2) +2 = 62

2. Lo mismo que sumar los números del 1 al 25. (25 + 1)(25/2) = (26)(12.5) = 325.

3. 18 días.

4. Se ponen 4 bolas en cada balanza. El lado que más pese es el que tiene la bola más pesada. Este grupo de 4 se divide en dos grupos de 2 y vuelven a pesarse. El par más pesado vuelve y se divide en 1 y 1 . Vuelve y se pesa. La más pesada es la bola que estamos buscando.

5. Debe hacerse una tabla y buscar todas las posibles combinaciones. Véase actividad siguiente.

En la tabla siguiente mencione todas las formas de representar 100 centavos.

Moneda de 25	Moneda de 10	Moneda de 5	Moneda de 1	Total
2	3	3	5	13 monedas
4	0	0	0	4 monedas
0	0	10	50	60 monedas
2	0	0	50	52 monedas

Pueden hacerse más combinaciones pero el número mínimo de monedas para dar cambio es 4 y el número máximo de monedas para dar cambio es 60 monedas.

6. La sucesión es 8, 12,16,20,24. Sólo puede sentar 24 personas.

La Sucesión de Fibonacci

Uno de los problemas más famosos en matemáticas elemental es el siguiente:

Un hombre puso un par de conejos bebés en una jaula. Durante el primer mes los conejos no procrearon, pero después cada mes procreaban una pareja de conejos. Cada nueva pareja también se reproducía del mismo modo que la pareja original. ¿Cuántos conejos habrá al final del año?

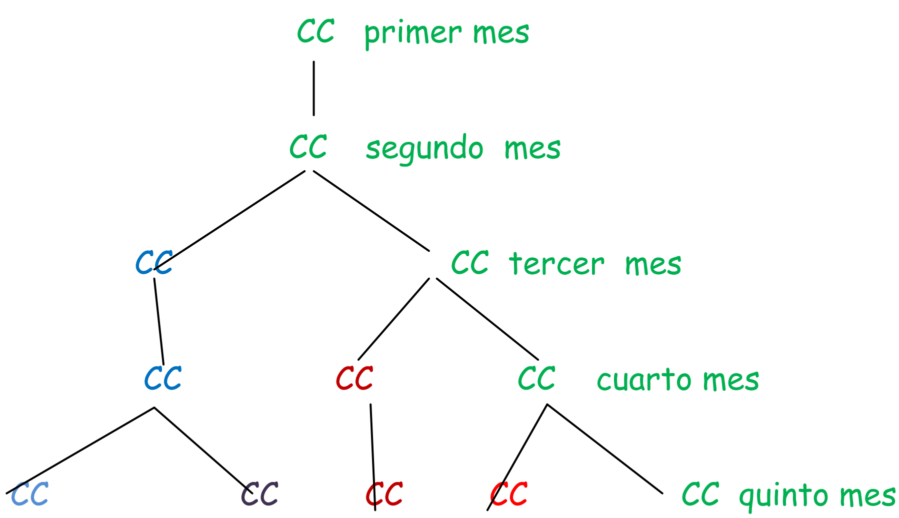
La solución de este problema nos lleva a la famosa sucesión de Fibonacci.

Analicemos lo que tenemos. Hagamos una tabla.

Mes	Cantidad de parejas de conejos	
1	1	a_1
2	1	a_2
3	1 + 1 = 2	$a_3 = a_1 + a_2$
4	2 + 1 = 3	$a_4 = a_2 + a_3$
5	3 + 2 = 5	$a_5 = a_3 + a_4$
6	5 + 3 = 8	$a_6 = a_4 + a_5$

7	8 + 5 = 13	
8	13 + 8 = 21	
9	21 + 13 = 34	
10	34 + 21 = 55	

Vamos a representar esto por medio de un diagrama:



Lo ideal es conseguir una fórmula que nos genere el enésimo término de la sucesión.

Observando la última columna de la tabla anterior podemos decir que la fórmula es

$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$. Al final del año tendríamos que la variable n = 12 meses.

Sustituyendo n en la fórmula tenemos

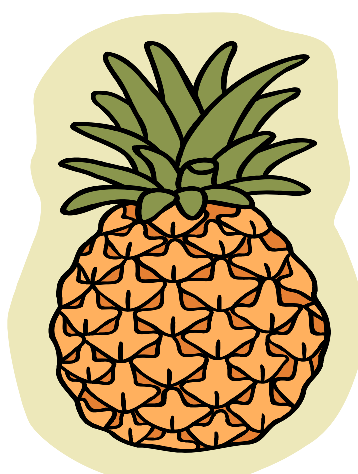
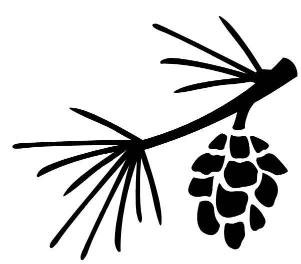
$$a_{12} = a_{12-1} + a_{12-2} = a_{11} + a_{10}.$$

$$a_{12} = (a_{10} + a_9) + a_{10}$$

$$a_{12} = 55 + 34 + 55 = 144.$$

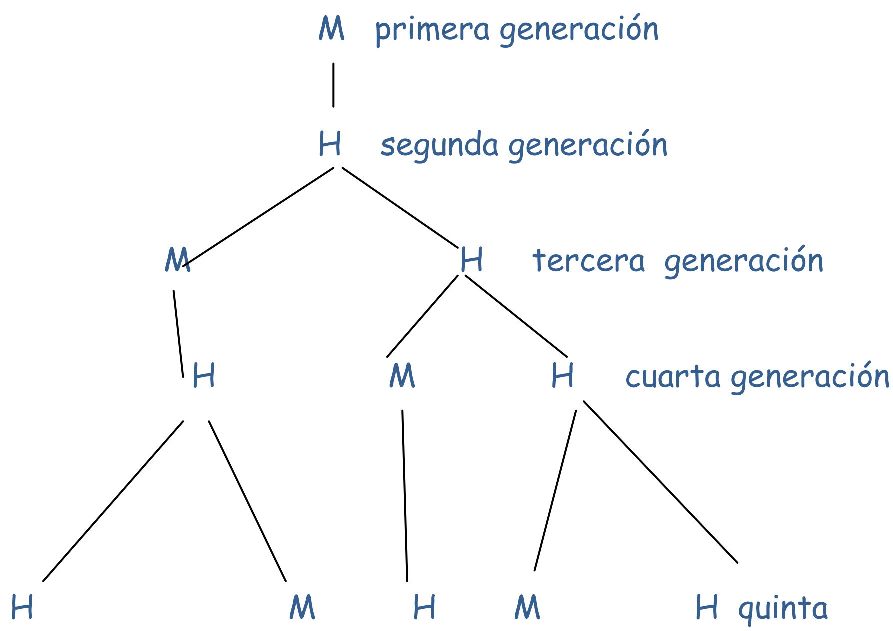
Hay muchas cosas en la naturaleza que expresan un patrón similar a la sucesión de Fibonacci. Por ejemplo, la flor de doble espiral de girasol tiene 21 pétalos para un lado y 34 hacia el otro lado. Esto compara con el octavo y el noveno término de la sucesión de Fibonacci.

La piña muestra también este patrón. Si contamos los nudos de la izquierda baja hasta la derecha hacia arriba tenemos 8. Si contamos en sentido contrario tenemos 13 nudos. Los conos de pino tienen 5 y 8 nudos y los conos de las secollas gigantes tienen 3 y 5 nudos.

Ejemplo:

La abeja macho sale de un huevo que no ha sido fertilizado, por lo tanto, una abeja macho sólo tiene un pariente que es hembra. Por otro lado, la abeja hembra sale de un huevo fertilizado, entonces la abeja hembra tiene dos parientes, uno hembra y otro macho. Si se forma el árbol genealógico de una abeja macho, ¿sería similar a la sucesión de Fibonacci?



Si observamos tenemos 1,1, 2, 3, 5,… Sí se comporta como la sucesión de Fibonacci porque repite el mismo patrón.

Ejercicios # 8

1. ¿Cuál de las siguientes sucesiones representa la sucesión de Fibonacci?

   a) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7,……

   b) 1, 1, 2 ,2 , 3 , 3, ……

   c) 1, 1, 2 , 3, 5, 8, ….

   d) 1 , 2, 4 , 8 , 16, …..

2. ¿Cuál es el término número 15 en la sucesión de Fibonacci?

   a) 144

   b) 233

   c) 377

   d) 610

3. ¿Qué sucesión se forma cuando dividimos un número de la sucesión de Fibonacci por el anterior?

a) $\frac{1}{1} =$

b) $\frac{2}{1} =$

c) $\frac{3}{2}$

d) $\frac{5}{3} =$

e) $\frac{8}{5} =$ etc,

f) $\frac{13}{8} =$

4. Si en la sucesión de Fibonacci el término número 16 es 987 y el término número 17 es 1597, ¿Cuál es el término número 18?

Respuestas al ejercicio # 8.:

1. b

2. d

3. $\{1\ , 2\ , 1.5, 1.666\ \ldots, 1.6,\ \ 1.625,\ \ 1.61534615,\ \ \ 1.619047619,\ \ \ 1.617647059\} \rightarrow \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

Este número se llama la razón dorada $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

4. 2,584.

Pos prueba

I. Mencione los términos que faltan para completar un posible patrón:

a) 1, 4, 7, 10, ___ , ____, ___ .

b) 2, 4, 8, 16, __ , ___ , ____ .

c) 3, 9, 27 , 81 , ____ , _____ .

d) a, b , c, g, h, i, ___ , ____ , ____ .

e) #, $, *, *, #, $, *,*, ___ , ____, ____._____ .

II. Clasifique cada sucesión en aritmética, geométrica o ninguna de las anteriores.

a) 1, 2, 3, 5, 8, 13, ….

b) 2 , 7 , 12, 17,…….

c) $\frac{1}{2}$, 1 , 2 , 4, ……..

d) 1 , 3, 9 , 27, …..

e) 3, 9,15,21, …..

III. Determine los primeros cuatro términos de la sucesión que se genera por la fórmula : (n representa los enteros positivos)

a) 2n +1

b) 3n -2

c) $n^2 + 2n$

IV. Determine las siguientes sumas

a) los números enteros desde el 1 hasta el 300.

b) los números enteros desde el 1 hasta el 505.

c) Los primeros 40 términos de la sucesión aritmética 2, 7, 12, 17, 22, …,

V. Determine la fórmula que genera a la sucesión:

a. $\frac{1}{2}$, 1 , 2 , 4, ……..

b. 2, 4, 6, 8, 10 , 12,…..

c. $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4},$ ….. , …….

VI. Complete el siguiente cuadrado mágico

a. Utilizando los dígitos del 1 al 16 llene los cuadros que faltan de tal modo que cada fila, columna o diagonal sumen 34.

7	**12**	**13**	
	1		11
9		3	16

VII. Un restaurante tiene 35 mesas pequeñas cuadradas para usarlas en un banquete. En cada mesa se puede sentar una persona en cada lado de la mesa o sea cuatro personas. Si las mesas se van a colocar de tal modo que quede una sola mesa larga, ¿Cuántas personas se podrán sentar en la mesa larga?

VIII. ¿Cuál de las siguientes sucesiones representa la sucesión de Fibonacci?

a) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7,…… c) 1, 1, 2 ,2 , 3 , 3, ……

b) 1, 1, 2 , 3, 5, 8, …. D) 1 , 2, 3 , 5 , 8, …..

Respuestas a la Pos prueba

I. a) 13, 16, 19

b) 32, 64, 128

c) 243, 729

d) m, n, o

e) #, $, *, *

II. a) ninguna

b) aritmética

c)geométrica
d) geométrica

e) aritmética

III. a)3, 5, 7, 9,

b) 1 , 4, 7, 10

c) 3, 8, 15, 24

IV. a) 4,150

b) 127,253

c) La suma es 3980.

V. a) $\frac{1}{2}(2)^{n-1}$

b) 2 + (n-1) 2 ó 2n +1

c) $\frac{1}{n+1}$

VI.

7	**12**	**13**	**2**
14	1	8	11
4	15	10	5
9	6	3	16

VII. Se pueden sentar 70 personas.

VIII. b