Pembahasan Soal

OSK SMA 2018

OLIMPIADE SAINS KABUPATEN/KOTA SMA 2018

OSK Matematika SMA

(Olimpiade Sains Kabupaten/Kota Matematika SMA)

Disusun oleh:

Pak Anang

Pembahasan Soal

OSK SMA 2018

OLIMPIADE SAINS KABUPATEN/KOTA SMA 2018

OSK Matematika SMA

(Olimpiade Sains Kabupaten/Kota Matematika SMA)

Disusun oleh:

Pak Anang

PEMBAHASAN SOAL
OLIMPIADE SAINS MATEMATIKA SMA
TINGKAT KABUPATEN/KOTA

28 Februari 2018

By Pak Anang (http://pak-anang.blogspot.com)

1. Misalkan a, b, dan c adalah tiga bilangan $berbeda$. Jika ketiga bilangan tersebut merupakan bilangan asli satu digit maka jumlah terbesar akar-akar persamaan $(x-a)(x-b)+(x-b)(x-c)=0$ yang mungkin adalah ....

   Pembahasan:
   Perhatikan penjabaran bentuk aljabar tersebut.
   $$\begin{aligned} & (x-a)(x-b)+(x-b)(x-c)=0 \\ \Leftrightarrow\ & x^2-(a+b)x+ab+x^2-(b+c)x+bc=0 \\ \Leftrightarrow\ & 2x^2-(a+2b+c)x+(ab+bc)=0 \end{aligned}$$

   Sehingga, jika akar-akar dari persamaan kuadrat $x^2-(a+2b+c)x+(ab+bc)=0$ adalah x_1 dan x_2, maka dengan rumus jumlah akar-akar persamaan kuadrat diperoleh:
   $$x_1+x_2=\frac{a+2b+c}{2}$$

   Perhatikan juga bahwa a, b, dan c adalah tiga bilangan satu digit berbeda, sehingga $a+2b+c$ akan maksimum apabila b adalah bilangan terbesar dan a, c masing-masing dipilih bilangan satu digit berurutan yang lebih kecil dari b.

   Sehingga apabila $b=9$ dan masing-masing a atau c adalah 8 atau 7, diperoleh jumlah terbesar akar-akar persamaan kuadrat tersebut adalah
   $$x_1+x_2=\frac{a+2b+c}{2}=\frac{33}{2}$$

   TRIK SUPERKILAT:
   Perhatikan penjabaran bentuk aljabar tersebut.
   $$\begin{aligned} & (x-a)(x-b)+(x-b)(x-c)=0 \\ \Leftrightarrow\ & (x-b)\big(2x-(a+c)\big)=0 \\ \Leftrightarrow\ & x_1=b \text{ atau } x_2=\frac{a+c}{2} \end{aligned}$$

   Sehingga, diperoleh jumlah akar-akarnya adalah
   $$x_1+x_2=b+\frac{a+c}{2}$$

   Dengan mudah kita tahu bahwa $b+\frac{a+c}{2}$ akan maksimum apabila b merupakan bilangan terbesar yaitu 9. Jadi, a atau c adalah 7 atau 8, begitu juga sebaliknya.
   $$x_1+x_2=b+\frac{a+c}{2}=9+\frac{15}{2}=9+7{,}5=16{,}5$$

2. Setiap sel dari suatu tabel berukuran 2×2 dapat diisi dengan bilangan 1, 2, atau 3. Misalkan N adalah banyaknya tabel yang memenuhi kedua sifat berikut sekaligus:
   - untuk setiap baris, hasil penjumlahannya genap
   - untuk setiap kolom, hasil penjumlahannya genap

   Nilai N adalah ....

   Pembahasan:
   Perhatikan tabel 2×2 berikut!

a	b
c	d

   Dengan memperhatikan bahwa hasil penjumlahan setiap baris dan kolom adalah genap, maka diperoleh kedua bilangan pada setiap baris atau kolom memiliki paritas yang sama.

   Perhatikan juga bahwa $a, b, c,$ atau d hanya dapat diisi dengan bilangan 1, 2, atau 3.

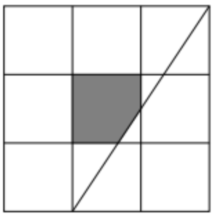
   Banyak tabel yang memenuhi dapat ditentukan dengan membagi kasus:
   - untuk a, b, c, d bilangan ganjil
     maka ada tiga kemungkinan
     - keempat bilangan a, b, c, d adalah bilangan yang sama, sebanyak ${}_2C_1 = 2$ cara.
     - diantara bilangan a, b, c, d ada tiga bilangan yang sama, sebanyak $\frac{4!}{3!} \times {}_2C_1 = 8$ cara.
     - diantara bilangan a, b, c, d ada dua bilangan yang sama, sebanyak $\frac{4!}{2!2!} = 6$ cara.
   - untuk a, b, c, d bilangan genap
     maka hanya ada satu kemungkinan yaitu keempat bilangan a, b, c, d adalah bilangan 2. Sehingga ada sebanyak 1 cara.

   Jadi, total banyak tabel yang memenuhi adalah sebanyak $2 + 8 + 6 + 1 = 17$ cara.

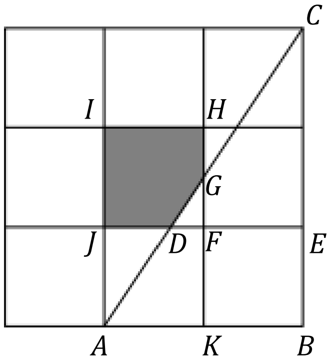
   TRIK SUPERKILAT:
   Banyak tabel yang memenuhi dapat ditentukan dengan membagi kasus:
   - Kasus pertama: a, b, c, d adalah bilangan ganjil.
     Banyak kejadian adalah $\binom{4}{0} + \binom{4}{1} + \binom{4}{2} + \binom{4}{3} + \binom{4}{4} = 2^4 = 16$
   - Kasus kedua: a, b, c, d adalah bilangan genap.
     Hanya ada satu kemungkinan, yaitu a, b, c, d adalah bilangan 2.

   Jadi, total banyak tabel yang memenuhi adalah sebanyak $16 + 1 = 17$ cara.

3. Diberikan persegi berukuran 3×3 satuan seperti pada gambar. Luas segilima yang diarsir adalah ....



Pembahasan:
Perhatikan gambar berikut!



Perhatikan, karena $AB \parallel DE$, maka $\Delta CAB \sim \Delta CDE$ sehingga diperoleh perbandingan

$$\frac{CE}{CB} = \frac{DE}{AB} \Rightarrow DE = \frac{CE}{CB} \times AB = \frac{2}{3} \times 2 = \frac{4}{3}$$

Sehingga, karena $DE = DF + FE$, dan $FE = 1$, maka diperoleh

$$DF = DE - FE = \frac{4}{3} - 1 = \frac{1}{3}$$

Perhatikan, karena $\Delta DFG \sim \Delta ABC$ sehingga diperoleh perbandingan

$$\frac{FG}{BC} = \frac{DF}{AB} \Rightarrow FG = \frac{DF}{AB} \times BC = \frac{\frac{1}{3}}{2} \times 3 = \frac{1}{2}$$

Jadi, $[DFG] = \frac{1}{2} \cdot DF \cdot FG = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{12}$

Sehingga, $[DGHIJ] = [FHIJ] - [DFG] = 1 - \frac{1}{12} = \frac{11}{12}$.

TRIK SUPERKILAT:

Perhatikan bahwa $\Delta DFG \sim \Delta ABC$, sehingga karena $DF = \frac{1}{6}AB$, maka $[DFG] = \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 3 = \frac{1}{12}$.
Sehingga $[DGHIJ] = 1 - \frac{1}{12} = \frac{11}{12}$.

4. Parabola $y = ax^2 - 4$ dan $y = 8 - bx^2$ memotong sumbu koordinat pada tepat empat titik. Keempat titik tersebut merupakan titik-titik sudut layang-layang dengan luas 24. Nilai $a + b$ adalah ....

Pembahasan:
Perhatikan, titik potong parabola $y = ax^2 - 4$ pada sumbu Y adalah di titik $(0, -4)$. Sedangkan, titik potong parabola $y = 8 - bx^2$ pada sumbu Y adalah di titik $(0, 8)$.

Perhatikan juga, agar dapat diperoleh dua titik lagi sebagai titik-titik sudut layang-layang yang lain, maka titik potong parabola $y = ax^2 - 4$ dan $y = 8 - bx^2$ pada sumbu X seharusnya adalah pada titik yang sama, sehingga dapat disimpulkan kedua kurva berpotongan di sumbu X.

Sehingga, titik potong di sumbu X dapat ditentukan dengan

$$\begin{aligned} y_1 &= y_2 \\ \Leftrightarrow \quad ax^2 - 4 &= 8 - bx^2 \\ \Leftrightarrow (a+b)x^2 - 12 &= 0 \\ \Leftrightarrow \quad x &= \pm\sqrt{\frac{12}{a+b}} \end{aligned}$$

Jadi, titik potong kedua parabola pada sumbu X adalah di titik $\left(\sqrt{\frac{12}{a+b}}, 0\right)$ dan $\left(-\sqrt{\frac{12}{a+b}}, 0\right)$.

Padahal, luas layang-layang adalah 24, sehingga

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2} \times d_1 \times d_2 \\ \Leftrightarrow \quad 24 &= \frac{1}{2} \times |8 - (-4)| \times \left|\sqrt{\frac{12}{a+b}} - \left(-\sqrt{\frac{12}{a+b}}\right)\right| \\ \Leftrightarrow \quad 24 &= \frac{1}{2} \times 12 \times 2\sqrt{\frac{12}{a+b}} \\ \Leftrightarrow \quad 2 &= \sqrt{\frac{12}{a+b}} \\ \Leftrightarrow \quad 4 &= \frac{12}{a+b} \\ \Leftrightarrow a + b &= 3 \end{aligned}$$

5. Untuk setiap bilangan asli n didefinisikan $s(n)$ sebagai hasil penjumlahan dari semua digit-digit dari n. Banyaknya bilangan asli d sehingga d habis membagi $n - s(n)$ untuk setiap bilangan asli n adalah ....

Pembahasan:
Perhatikan, bilangan asli n dapat dinyatakan sebagai $n = a_0 \cdot 10^0 + a_1 \cdot 10^1 + a_2 \cdot 10^2 + \cdots$, maka jika $s(n)$ didefinisikan sebagai hasil penjumlahan dari semua digit-digit dari n, maka diperoleh

$$s(n) = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots$$

Misal, $p = n - s(n)$, maka

$$\begin{aligned} p &= n - s(n) \\ &= (a_0 \cdot 10^0 + a_1 \cdot 10^1 + a_2 \cdot 10^2 + \cdots) - (a_0 + a_1 + a_2 + \cdots) \\ &= a_0(10^0 - 1) + a_1(10^1 - 1) + a_2(10^2 - 1) + \cdots \\ &= 9a_1 + 99a_2 + 999a_3 + \cdots \\ &= 9(a_1 + 11a_2 + 111a_3 + \cdots) \end{aligned}$$

Sehingga, $9|n - s(n)$. Jadi bilangan asli d adalah faktor bulat positif dari 9, yaitu 1, 3, dan 9.

Jadi, ada sebanyak 3 buah bilangan d yang memenuhi.

6. Diketahui x dan y bilangan prima dengan $x < y$, dan $x^3 + y^3 + 2018 = 30y^2 - 300y + 3018$. Nilai x yang memenuhi ....

Pembahasan:
Perhatikan,

$$\begin{aligned} x^3 + y^3 + 2018 &= 30y^2 - 300y + 3018 \\ \Leftrightarrow x^3 + y^3 - 30y^2 + 300y - 1000 &= 0 \\ \Leftrightarrow \qquad x^3 + (y-10)^3 &= 0 \end{aligned}$$

Sehingga, diperoleh

$$\begin{aligned} x &= -(y-10) \\ \Leftrightarrow x + y &= 10 \end{aligned}$$

Karena, x, y adalah bilangan prima, maka dua buah bilangan prima yang jumlahnya 10 adalah 3 dan 7. Mengingat $x < y$, sehingga dapat diperoleh $x = 3$ dan $y = 7$.

Jadi, x yang memenuhi adalah 3.

7. Diberikan dua bilangan asli dua angka yang selisihnya 10. Diketahui bahwa bilangan yang kecil merupakan kelipatan 3, sedangkan lainnya merupakan kelipatan 7. Diketahui pula bahwa jumlah semua faktor prima kedua bilangan tersebut adalah 17. Jumlah dua bilangan tersebut adalah ....

Pembahasan:
Perhatikan, misal kedua bilangan tersebut adalah x dan y, karena x adalah bilangan kelipatan 7 dan y adalah bilangan kelipatan 3, maka untuk m dan n adalah suatu bilangan asli, x dan y dapat dinyatakan sebagai

$$x = 7m$$
$$y = 3n$$

Karena selisih kedua bilangan adalah 10, dan $x > y$, maka $x - y = 10$. Ini sama saja dengan persamaan $7m - 3n = 10$.

Nilai m dan n dapat ditentukan menggunakan pembalikan algoritma Euclid, yaitu

$$7 = 2 \times 3 + 1$$

Sehingga,

$$1 = 7 - 2 \times 3$$

Dengan mengalikan 10 kedua ruas diperoleh

$$10 = 70 - 60$$

Sehingga, diperoleh $m = 10$ dan $n = 20$.

Sehingga, solusi umumnya adalah

$$m = 10 - 3t \Rightarrow x = 70 - 21t$$
$$n = 20 - 7t \Rightarrow y = 60 - 21t$$

Diperoleh pasangan bilangan dua digit x, y yang memenuhi adalah

$$(x, y) = \{(28, 18), (49, 39), (70, 60), (91, 81)\}$$

Perhatikan bahwa jumlah semua faktor prima x dan y adalah 17, maka $17 = 3 + p + q + 7$.
Maka $p + q = 7$, sehingga bilangan prima p, q yang memenuhi hanyalah 2 dan 5.

Sehingga, jelas diantara pasangan x, y yang memiliki faktor prima 5 hanyalah $x = 70$ dan $y = 60$.

Jadi, jumlah kedua bilangan tersebut adalah $x + y = 70 + 60 = 130$.

TRIK SUPERKILAT 1:
Perhatikan, $x \equiv 0 \pmod 7$ dan $y \equiv 0 \pmod 3$. Karena selisih kedua bilangan adalah 10, dan $x > y$, maka $x - y = 10$, sehingga

$$y = x - 10 \equiv 0 \pmod 3 \Rightarrow x \equiv 1 \pmod 3 \Rightarrow x = 3t + 1$$

Sehingga,

$$x = 3t + 1 \equiv 0 \pmod 7 \Rightarrow 3t = 6 \pmod 7 \Rightarrow 3t = 7u + 6$$

Diperoleh, $x = 21u + 7$ dan nilai x yang memenuhi adalah $x = \{28, 49, 70, 91\}$

Perhatikan bahwa jumlah semua faktor prima x dan y adalah 17, maka $17 = 3 + p + q + 7$.
Maka $p + q = 7$, sehingga bilangan prima p, q yang memenuhi hanyalah 2 dan 5.

Sehingga, diantara pasangan x, y yang memiliki faktor prima 5 hanyalah $x = 70$, akibatnya $y = 60$.

Jadi, jumlah kedua bilangan tersebut adalah $x + y = 70 + 60 = 130$.

TRIK SUPERKILAT 2 (LOGIKA PRAKTIS):
Perhatikan bahwa jumlah semua faktor prima x dan y adalah 17, maka $17 = 3 + p + q + 7$.
Maka $p + q = 7$, sehingga bilangan prima p, q yang memenuhi hanyalah 2 dan 5.

Akibatnya, kemungkinan yang terjadi adalah $x = 7(2^a \cdot 3^b \cdot 5^c \cdot 7^d)$ dan $y = 3(2^k \cdot 3^l \cdot 5^m \cdot 7^n)$.

LOGIKA:
- 5 adalah semestinya menjadi salah satu faktor prima dari salah satu dari x atau y.
- Mengingat $x - y = 10$, suatu bilangan kelipatan 5 pasti memiliki selisih 10 dengan bilangan yang lain, apabila bilangan yang lain juga kelipatan 5. Sehingga, disimpulkan 5 sudah pasti menjadi faktor dari baik x maupun y.

Sehingga dengan cara mendaftar kemungkinan secara manual:

$$x = 35t \Rightarrow 35, 70$$
$$y = 15u \Rightarrow 15, 30, 45, 60, 90$$

Jelas yang memenuhi $x - y = 10$, adalah $x = 70$ dan $y = 60$.

Jadi, jumlah kedua bilangan tersebut adalah $x + y = 70 + 60 = 130$.

TRIK SUPERKILAT 3 (LOGIKA PRAKTIS):
Perhatikan bahwa jumlah semua faktor prima x dan y adalah 17, maka $17 = 3 + p + q + 7$.
Maka $p + q = 7$, sehingga bilangan prima p, q yang memenuhi hanyalah 2 dan 5.

Akibatnya, kemungkinan yang terjadi adalah $x = 7(2^a \cdot 3^b \cdot 5^c \cdot 7^d)$ dan $y = 3(2^k \cdot 3^l \cdot 5^m \cdot 7^n)$.

LOGIKA:
- 5 adalah semestinya menjadi salah satu faktor prima dari salah satu dari x atau y.
- Mengingat $x - y = 10$, suatu bilangan kelipatan 5 pasti memiliki selisih 10 dengan bilangan yang lain, apabila bilangan yang lain juga kelipatan 5. Sehingga, disimpulkan 5 sudah pasti menjadi faktor dari baik x maupun y.
- Karena 2 belum menjadi faktor dari masing-masing bilangan, maka 2 pasti juga menjadi faktor dari salah satu bilangan. Dan karena selisihnya 10, merupakan kelipatan 10, berarti bilangan lain juga kelipatan 2.
- Akibatnya karena 2 dan 5 adalah faktor setiap bilangan, maka keduanya adalah kelipatan 10.

Sehingga, kemungkinan yang terjadi hanyalah
$$x = 70t \Rightarrow 70$$
$$y = 30u \Rightarrow 30, 60$$

Jelas yang memenuhi $x - y = 10$, adalah $x = 70$ dan $y = 60$.

Jadi, jumlah kedua bilangan tersebut adalah $x + y = 70 + 60 = 130$.

8. Diberikan satu koin yang tidak seimbang. Bila koin tersebut ditos satu kali, peluang muncul angka adalah $\frac{1}{4}$. Jika ditos n kali, peluang muncul tepat dua angka sama dengan peluang muncul tepat tiga angka. Nilai n adalah ....

Pembahasan:
Perhatikan, dengan menggunakan konsep distribusi binomial, misal $p =$ peluang kejadian muncul angka, maka $p = \frac{1}{4}$ dan $1 - p = \frac{3}{4}$.

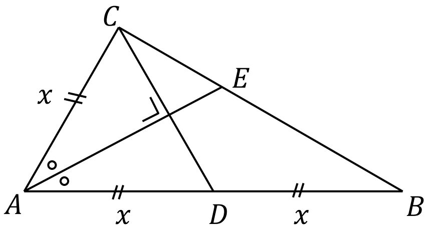
Apabila satu koin ditos n kali, maka peluang muncul tepat dua angka sama dengan peluang muncul tepat tiga angka dapat dinyatakan sebagai

$$
\begin{aligned}
& & P(X=2) &= P(X=3) \\
&\Leftrightarrow & {}_nC_2 \cdot p^2 \cdot (1-p)^{(n-2)} &= {}_nC_3 \cdot p^3 \cdot (1-p)^{(n-3)} \\
&\Leftrightarrow & \frac{n!}{(n-2)!\,2!} \cdot \left(\frac{1}{\cancel{4}}\right)^{\cancel{2}} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{\cancel{(n-2)}} &= \frac{n!}{(n-3)!\,3!} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{\cancel{3}} \cdot \cancel{\left(\frac{3}{4}\right)^{(n-3)}} \\
&\Leftrightarrow & \frac{\cancel{n \cdot (n-1)} \cdot \cancel{(n-2)!}}{\cancel{(n-2)!} \cdot 2} \cdot \frac{3}{\cancel{4}} &= \frac{\cancel{n \cdot (n-1)} \cdot (n-2) \cdot \cancel{(n-3)!}}{\cancel{(n-3)!} \cdot 3!} \cdot \frac{1}{\cancel{4}} \\
&\Leftrightarrow & \frac{3}{2} &= \frac{n-2}{6} \\
&\Leftrightarrow & 18 &= 2n - 4 \\
&\Leftrightarrow & 22 &= 2n \\
&\Leftrightarrow & n &= 11
\end{aligned}
$$

Jadi, nilai n yang memenuhi adalah 11.

9. Panjang sisi-sisi dari segitiga merupakan bilangan asli yang berurutan. Diketahui bahwa garis berat dari segitiga tegak lurus dengan salah satu garis baginya. Keliling segitiga itu adalah ....

Pembahasan:
Perhatikan gambar segitiga berikut



CD merupakan garis berat dan AE merupakan garis bagi, keduanya berpotongan saling tegak lurus.

Perhatikan segitiga ADC sama kaki, sehingga $AD = AC$. Misal $AD = AC = DB = x$.

Perhatikan juga, karena sisi-sisi segitiga merupakan bilangan asli yang berurutan, maka selisih dari dua sisi segitiga adalah 1 atau 2.

Kasus pertama, selisih dua sisi segitiga adalah 1, sehingga $2x - x = 1 \Rightarrow x = 1$
Karena $x = 1$, maka $b = 1, c = 2$, sehingga
- $a = 0$, tidak memenuhi karena sisi segitiga tidak mungkin nol
- $a = 3$, tidak mungkin karena tidak memenuhi ketaksamaan $b + c > a$

Kasus kedua, selisih dua sisi segitiga adalah 2, sehingga $2x - x = 2 \Rightarrow x = 2$
Karena $x = 2$, maka $b = 2, c = 4$, sehingga
- $a = 3$, memenuhi.

Sehingga, sisi segitiga adalah $a = 3, b = 2, c = 4$.

Jadi keliling segitiga adalah $a + b + c = 3 + 2 + 4 = 9$.

TRIK SUPERKILAT:
Perhatikan, karena panjang sisi-sisi segitiga adalah bilangan asli yang berurutan, dan dari gambar kita tahu bahwa $AB = 2 \cdot AC$.

Jadi, kemungkinan tiga bilangan urut, dimana salah satunya adalah dua kali dari yang lain adalah:
- 1, 2, 3
  Namun karena $1 + 2 \ngtr 3$, maka jelas segitiga ini tidak memenuhi ketaksamaan segitiga.
- 2, 3, 4
  Benar, bahwa $2 + 3 > 4$, maka jelas segitiga ini memenuhi ketaksamaan segitiga.

Jadi, keliling segitiga adalah $2 + 3 + 4 = 9$.

10. Diberikan suku banyak $p(x)$ dengan $p(x)^2 + p(x^2) = 2x^2$ untuk setiap bilangan real x. Jika $p(1) \neq 1$ maka jumlah semua nilai $p(10)$ yang mungkin adalah ....

Pembahasan:
Perhatikan, anggap $p(x) = ax^n + q(x), a \neq 0, q(x)$ suku banyak derajat k dengan $0 \leq k < n$, maka

$$\begin{aligned} p(x)^2 + p(x^2) &= 2x^2 \\ \Leftrightarrow \quad \left(ax^n + q(x)\right)^2 + \left(a(x^2)^n + q(x^2)\right) &= 2x^2 \\ \Leftrightarrow a^2x^{2n} + 2ax^nq(x) + q(x)^2 + ax^{2n} + q(x^2) &= 2x^2 \\ \Leftrightarrow \quad (a^2 + a)x^{2n} + 2ax^nq(x) + q(x)^2 + q(x^2) &= 2x^2 \end{aligned}$$

Sehingga, dengan memperhatikan kesamaan di atas, maka kemungkinan yang terjadi adalah
- $(a^2 + a)x^{2n} = 2x^2$, maka $n = 1$ dengan $a^2 + a = 2$.
- $(a^2 + a)x^{2n} + 2ax^nq(x) = 2x^2$, apabila $a^2 + a = 0$ maka $n + k = 2$.
  Perhatikan, $n + k = 2 \Rightarrow k = 2 - n$, maka
  $$\begin{aligned} 0 \leq k < n \Rightarrow \quad 0 &\leq 2 - n < n \\ \Leftrightarrow \quad n &\leq 2 < 2n \\ \Leftrightarrow \quad 1 &< n \leq 2 \end{aligned}$$
  Jelas bahwa $n = 2$.

Jadi, suku banyak $p(x)^2 + p(x^2) = 2x^2$, agar kesamaan berlaku maka
- $p(x)$ adalah suku banyak berderajat satu.
- $p(x)$ adalah suku banyak berderajat dua.

Kasus pertama, $p(x)$ adalah suku banyak berderajat satu.
Misal, $p(x) = ax + b, a \neq 0$, maka

$$\begin{aligned} p(x)^2 + p(x^2) &= 2x^2 \\ \Leftrightarrow \quad (ax + b)^2 + (ax^2 + b) &= 2x^2 \\ \Leftrightarrow \quad a^2x^2 + 2abx + b^2 + ax^2 + b &= 2x^2 \\ \Leftrightarrow (a^2 + a)x^2 + 2abx + (b^2 + b) &= 2x^2 \end{aligned}$$

Sehingga, dari kesamaan suku banyak diperoleh

$$2ab = 0 \Rightarrow a = 0\ (TM) \text{ atau } b = 0$$

$$\begin{aligned} a^2 + a = 2 \Rightarrow \quad a^2 + a - 2 &= 0 \\ \Leftrightarrow (a + 2)(a - 1) &= 0 \\ \Leftrightarrow \quad a = -2 &\text{ atau } a = 1 \end{aligned}$$

Dari kasus ini $p(x)$ yang memenuhi hanya jika $b = 0$, sehingga
- Apabila $a = -2$, jadi $p(x)$ yang memenuhi adalah $p(x) = -2x$, sehingga karena $p(1) = -2 \neq 1$, maka $p(10) = -2(10) = -20$.
- Apabila $a = 1$, jadi $p(x)$ yang memenuhi adalah $p(x) = x$, sehingga karena $p(1) = 1$, dan mengingat $p(1) \neq 1$, maka $p(x) = x$ tidak memenuhi. Sehingga tidak ada nilai $p(10)$ yang memenuhi.

Kasus kedua, $p(x)$ adalah suku banyak berderajat dua.
Misal, $p(x) = ax^2 + bx + c, a \neq 0$ maka

$$\begin{aligned} p(x)^2 + p(x^2) &= 2x^2 \\ \Leftrightarrow \quad (ax^2 + bx + c)^2 + (ax^4 + bx^2 + c) &= 2x^2 \\ \Leftrightarrow a^2x^4 + ax^4 + 2abx^3 + b^2x^2 + 2acx^2 + bx^2 + 2bc\,x + c^2 + c &= 2x^2 \\ \Leftrightarrow \quad (a^2 + a)x^4 + 2abx^3 + (b^2 + 2ac + b)x^2 + 2bcx + (c^2 + c) &= 2x^2 \end{aligned}$$

Sehingga, dari kesamaan suku banyak diperoleh

$$\begin{aligned} a^2 + a = 0 \Rightarrow \quad & a(a+1) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & a = 0\ (TM) \text{ atau } a = -1 \end{aligned}$$

$$2ab = 0 \Rightarrow a = 0\ (TM) \text{ atau } b = 0$$

$$\begin{aligned} b^2 + 2ac + b = 2 \Rightarrow\ & 2ac = 2 \\ \Leftrightarrow\ & -2c = 2 \\ \Leftrightarrow\ & \quad c = -1 \end{aligned}$$

Dari kasus ini $p(x)$ yang memenuhi adalah $p(x) = -x^2 - 1$, sehingga $p(10) = -(10)^2 - 1 = -101$.

Jadi jumlah semua nilai $p(10)$ yang mungkin adalah $-20 - 101 = -121$.

11. Misalkan $\{x_n\}$ adalah barisan bilangan bulat yang memenuhi $x_1 = x_2 = \cdots = x_{12} = 0$, $x_{13} = 2$, dan untuk setiap bilangan asli n berlaku $x_{n+13} = x_{n+4} + 2x_n$. Nilai x_{143} adalah ....

Pembahasan:
Perhatikan, kita akan mencoba menguraikan kombinasi linear dari bilangan 143 terhadap bilangan 9 dan 13, sehingga diperoleh
$$\begin{aligned} 9p + 13q = 143 \Rightarrow \quad 9p &= 143 - 13q \\ \Leftrightarrow 9 \cdot p &= 13 \cdot (11 - q) \end{aligned}$$

Sehingga, terdapat dua penyelesaian bulat untuk $9p + 13q = 143$, dengan p, q bilangan cacah.
- $p = 13$, sehingga $11 - q = 9 \Rightarrow q = 2$, sehingga $(p_1, q_1) = (13, 2)$
- $p = 0$, sehingga $11 - q = 0 \Rightarrow q = 11$, sehingga $(p_2, q_2) = (0,11)$

Padahal, untuk $x_{n+13} = x_{n+4} + 2x_n$, rumus umumnya untuk $n = 9p + 13q$ adalah
$$x_n = \sum_{i=1}^{k} 2^{q_i} \cdot \binom{p_i + q_i - 1}{p_i}$$

Sehingga,
$$\begin{aligned} x_n &= 2^2 \cdot \binom{14}{13} + 2^{11} \cdot \binom{10}{0} \\ &= 4 \cdot 14 + 2048 \cdot 1 \\ &= 56 + 2048 \\ &= 2104 \end{aligned}$$

Cara alternatif:
Jika kita uraikan secara terus menerus, maka kita juga akan bertemu pola kombinatorik pada suku-suku yang dihasilkan. Perhatikan,
$$\begin{aligned} x_{143} &= 2^0 \binom{1}{0} x_{134} + 2^1 \binom{1}{1} x_{130} \\ &= 2^0 \binom{2}{0} x_{125} + 2^1 \binom{2}{1} x_{121} + 2^2 \binom{2}{2} x_{117} \\ &= \cdots \\ &= 2^0 \binom{10}{0} x_{53} + 2^1 \binom{10}{1} x_{49} + 2^2 \binom{10}{2} x_{44} + \cdots + 2^{10} \binom{10}{10} x_{13} \end{aligned}$$

Jadi, rumus umum penjabaran dari x_{143} hingga langkah ke-k adalah
$$x_n = \sum_{i=0}^{k} 2^i \binom{k}{i} x_{n-9k-4i}$$

Nah, jika kita perhatikan seksama pola yang terbentuk, hanya suku dari penjabaran tersebut harus kita uraikan menjadi x_{13}, jika tidak dapat diuraikan menjadi x_{13} maka nilainya nol, mengingat bahwa $x_1 = x_2 = \cdots = x_{12} = 0$.

Sehingga, kita akan mencoba menguraikan bilangan 13 dari pengurangan bilangan 143 oleh kombinasi linear dari 9 dan 4, sehingga diperoleh
$$13 = 143 - 9(14) - 4(1)$$
$$13 = 143 - 9(10) - 4(10)$$

Jadi, nilai dari x_{143} dapat diperoleh untuk $(k_1, i_1) = (14,1)$ dan $(k_2, i_2) = (10,9)$
$$x_{143} = 2^1 \binom{14}{1} x_{13} + 2^{10} \binom{10}{10} x_{13} = 2 \cdot 14 \cdot 2 + 1024 \cdot 1 \cdot 2 = 56 + 2048 = 2104$$

12. Untuk setiap bilangan real z, $\lfloor z \rfloor$ menyatakan bilangan bulat terbesar yang lebih kecil dari atau sama dengan z. Jika diketahui $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + y = 43{,}8$ dan $x + y - \lfloor x \rfloor = 18{,}4$. Nilai $10(x + y)$ adalah ....

Pembahasan:
Perhatikan, misal $0 \leq \delta < 1$, maka untuk setiap z bilangan real berlaku:
$$z = \lfloor z \rfloor + \delta_z$$

Dari persamaan $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + y = 43{,}8$, diperoleh
$$\begin{aligned} \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + y = 43{,}8 \Rightarrow \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + \lfloor y \rfloor + \delta_y &= 43{,}8 \\ \Leftrightarrow \qquad \lfloor x \rfloor + 2\lfloor y \rfloor + \delta_y &= 43{,}8 \end{aligned}$$

Sehingga diperoleh, $\lfloor x \rfloor + 2\lfloor y \rfloor = 43$ dan $\delta_y = 0{,}8$.

Dan dari persamaan $x + y - \lfloor x \rfloor = 18{,}4$ diperoleh
$$\begin{aligned} x + y - \lfloor x \rfloor = 18{,}4 \Rightarrow \lfloor x \rfloor + \delta_x + \lfloor y \rfloor + \delta_y - \lfloor x \rfloor &= 18{,}4 \\ \Leftrightarrow \qquad \lfloor y \rfloor + \delta_x + \delta_y &= 18{,}4 \\ \Leftrightarrow \qquad \lfloor y \rfloor + \delta_x + 0{,}8 &= 18{,}4 \\ \Leftrightarrow \qquad \lfloor y \rfloor + \delta_x &= 17{,}6 \end{aligned}$$

Sehingga diperoleh $\lfloor y \rfloor = 17$, dan $\delta_x = 0{,}6$.

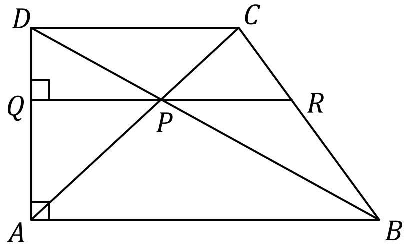
Perhatikan kembali bahwa $\lfloor x \rfloor + 2\lfloor y \rfloor = 43$, sehingga diperoleh
$$\begin{aligned} \lfloor x \rfloor + 2\lfloor y \rfloor = 43 \Rightarrow \lfloor x \rfloor + 2(17) &= 43 \\ \Leftrightarrow \qquad \lfloor x \rfloor + 34 &= 43 \\ \Leftrightarrow \qquad \lfloor x \rfloor &= 9 \end{aligned}$$

Jadi, diperoleh nilai x dan y adalah
$$x = \lfloor x \rfloor + \delta_x = 9 + 0{,}6 = 9{,}6$$
$$y = \lfloor y \rfloor + \delta_y = 17 + 0{,}8 = 17{,}8$$

Jadi, nilai $10(x + y) = 10(9{,}6 + 17{,}8) = 10(27{,}4) = 274$.

13. Misalkan $ABCD$ adalah trapesium siku-siku dengan AB sejajar DC dan AB tegak lurus AD. Misalkan juga P adalah titik potong diagonal AC dan BD. Jika perbandingan luas segitiga APD dan luas trapesium $ABCD$ adalah 4 : 25 maka nilai $\frac{AB}{DC}$ adalah ....

Pembahasan:
Perhatikan trapesium $ABCD$ berikut.
P adalah titik potong diagonal AC dan BD.



Misal,

$$\frac{AB}{DC} = m \Rightarrow AB = m \cdot DC$$

Sehingga, dari perbandingan luas segitiga APD dan trapesium $ABCD$ diperoleh

$$\frac{[APD]}{[ABCD]} = \frac{\frac{1}{2} \cdot AD \cdot PQ}{\frac{1}{2} \cdot AD \cdot (AB + DC)}$$
$$\frac{4}{25} = \frac{PQ}{AB + DC}$$
$$\frac{4}{25} = \frac{PQ}{(1+m)DC}$$

Padahal, dari kesebangunan segitiga ABD dan segitiga CAB, diperoleh $PQ = PR$.

Sedangkan, dari kesebangunan APQ dan ACD serta BPR dan BDC diperoleh.

$$\frac{AQ}{DQ} = \frac{PQ}{DC - PQ} = \frac{AB - PR}{PR}$$

Maka,

$$\begin{aligned} PQ^2 = (DC - PQ)(AB - PQ) \Rightarrow \quad & PQ^2 = (DC - PQ)(m \cdot DC - PQ) \\ \Leftrightarrow \quad & PQ^2 = m \cdot DC^2 - (1+m) \cdot DC \cdot PQ + PQ^2 \\ \Leftrightarrow \quad & (1+m) \cdot DC \cdot PQ = m \cdot DC^2 \\ \Leftrightarrow \quad & \frac{PQ}{DC} = \frac{m}{(1+m)} \end{aligned}$$

Sehingga,

$$\begin{aligned} \frac{4}{25} = \frac{PQ}{(1+m)DC} \Rightarrow \quad & \frac{4}{25} = \frac{m}{(1+m)^2} \\ \Leftrightarrow \quad & 4(1+m)^2 = 25m \\ \Leftrightarrow \quad & 4 + 8m + 4m^2 = 25m \\ \Leftrightarrow \quad & 4m^2 - 17m + 4 = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & (4m-1)(m-4) = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & m = \frac{1}{4} \text{ atau } m = 4 \end{aligned}$$

Jadi, perbandingan $\frac{AB}{DC} = \frac{1}{4}$ atau $\frac{AB}{DC} = 4$.

Catatan penulis:
Pembuat soal kurang waspada terhadap perbandingan panjang AB dan DC. Seharusnya pada soal ditambahkan keterangan $AB > DC$ atau $AB < DC$.

14. Himpunan S merupakan himpunan bilangan-bilangan 7 digit sehingga masing-masing angka 1, 2, 3, 4, 5, 6, atau 7 tepat muncul satu kali. Bilangan-bilangan di S diurutkan mulai dari yang paling kecil sampai yang paling besar. Bilangan yang berapa pada urutan ke-2018 adalah ....

Pembahasan
Pertama, kita akan memeriksa banyak bilangan dengan memeriksa digit pada tempat terbesar, yaitu tempat jutaan.

- Bilangan 1XXXXXX menyumbang sebanyak $6! = 720$ bilangan. Jadi bilangan ke-1 sampai dengan bilangan ke-720 adalah berformat 1XXXXXX.
- Bilangan 2XXXXXX menyumbang sebanyak $6! = 720$ bilangan. Jadi bilangan ke-721 sampai dengan bilangan ke-1440 adalah berformat 2XXXXXX.
- Bilangan 3XXXXXX menyumbang sebanyak $6! = 720$ bilangan. Jadi bilangan ke-1441 sampai dengan bilangan ke-2160 adalah berformat 3XXXXXX. Sehingga bilangan ke-2018 berada pada format 3XXXXXX.

Selanjutnya akan diperiksa digit pada tempat ratusan ribu.

- Bilangan 31XXXXX menyumbang sebanyak $5! = 120$ bilangan. Jadi bilangan ke-1441 sampai dengan bilangan ke-1560 adalah berformat 31XXXXX.
- Bilangan 32XXXXX menyumbang sebanyak $5! = 120$ bilangan. Jadi bilangan ke-1561 sampai dengan bilangan ke-1680 adalah berformat 32XXXXX.
- Bilangan 34XXXXX menyumbang sebanyak $5! = 120$ bilangan. Jadi bilangan ke-1681 sampai dengan bilangan ke-1800 adalah berformat 34XXXXX.
- Bilangan 35XXXXX menyumbang sebanyak $5! = 120$ bilangan. Jadi bilangan ke-1801 sampai dengan bilangan ke-1920 adalah berformat 35XXXXX.
- Bilangan 36XXXXX menyumbang sebanyak $5! = 120$ bilangan. Jadi bilangan ke-1921 sampai dengan bilangan ke-2040 adalah berformat 36XXXXX. Sehingga bilangan ke-2018 berada pada format 36XXXXX.

Selanjutnya akan diperiksa digit pada tempat puluhan ribu.

- Bilangan 361XXXX menyumbang sebanyak $4! = 24$ bilangan. Jadi bilangan ke-1921 sampai dengan bilangan ke-1944 adalah berformat 361XXXX.
- Bilangan 362XXXX menyumbang sebanyak $4! = 24$ bilangan. Jadi bilangan ke-1945 sampai dengan bilangan ke-1968 adalah berformat 362XXXX.
- Bilangan 364XXXX menyumbang sebanyak $4! = 24$ bilangan. Jadi bilangan ke-1969 sampai dengan bilangan ke-1992 adalah berformat 364XXXX.
- Bilangan 365XXXX menyumbang sebanyak $4! = 24$ bilangan. Jadi bilangan ke-1993 sampai dengan bilangan ke-2016 adalah berformat 365XXXX.
- Bilangan 367XXXX menyumbang sebanyak $4! = 24$ bilangan. Jadi bilangan ke-2017 sampai dengan bilangan ke-2040 adalah berformat 367XXXX. Sehingga bilangan ke-2018 berada pada format 367XXXX.

Selanjutnya akan diperiksa secara manual digit pada tempat ribuan.

- Bilangan 3671245 adalah bilangan ke-2017.
- Bilangan 3671254 adalah bilangan ke-2018.

Jadi, bilangan ke-2018 adalah 3671254.

TRIK SUPERKILAT:
Perhatikan,

$$\begin{aligned} 2018 &= 2 \times 6! + 578 \\ 578 &= 4 \times 5! + 98 \\ 98 &= 4 \times 4! + 2 \\ 2 &= 0 \times 3! + 2 \\ 2 &= 0 \times 2! + 2 \\ 2 &= 1 \times 1! + 1 \\ 1 &= 0 \times 0! + 1 \end{aligned}$$

12**3**4567 →3 (bilangan ke 2+1)
1245**6**7 → 6 (bilangan ke 4+1)
1245**7** → 7 (bilangan ke 4+1)
1245 → 1 (bilangan ke 0+1)
245 → 2 (bilangan ke 0+1)
4**5** → 5 (bilangan ke 1+1)
4 → 4 (bilangan ke 0+1)

Jadi, bilangan yang dimaksud adalah 3671254.

Catatan Penulis:
Menurut kunci jawaban yang beredar, jawaban untuk soal ini adalah 3561274.
Nah, penulis mencoba membuat "analisis forensik" mengapa pembuat soal bisa membuat kunci jawaban seperti tersebut di atas.

Langkah yang kurang tepat ditunjukkan oleh warna merah.
12**3**4567 →3 (bilangan ke 2+1)
124**5**67 → 5 (bilangan ke 4+1) ← pembuat soal lupa bahwa bilangan ke-5 bukan 5, tapi 6.
124**6**7 → 6 (bilangan ke 4+1) ← pembuat soal lupa bahwa bilangan ke-5 bukan 6, tapi 7.
1247 → 1 (bilangan ke 0+1)
247 → 2 (bilangan ke 0+1)
4**7** → 7 (bilangan ke 1+1)
4 → 4 (bilangan ke 0+1)

Jadi, bilangan yang dimaksud adalah 3561274. (jawaban akhir menurut kunci jawaban yang dipakai korektor untuk mengoreksi jawaban peserta)

15. Misalkan $S = \{x \in \mathbb{R} | 0 \le x \le 1\}$. Banyaknya pasangan bilangan asli (a, b) sehingga tepat ada 2018 anggota S yang dapat dinyatakan dalam bentuk $\frac{x}{a} + \frac{y}{b}$ untuk suatu bilangan bulat x dan y adalah ....

Pembahasan:
Perhatikan, dari $Bezout's\ Theorem$, yaitu "Jika a dan b dua bilangan bulat yang keduanya taknol maka terdapat bilangan bulat x dan y sehingga $FPB(a.b) = ax + by$".

Sehingga banyaknya anggota S yang dapat dinyatakan adalah banyaknya $0 \le xb + ya \le ab$; $xb + ya \in \mathbb{Z}$ yang memiliki solusi $x, y \in \mathbb{Z}$.

Dengan membagi kasus, yaitu

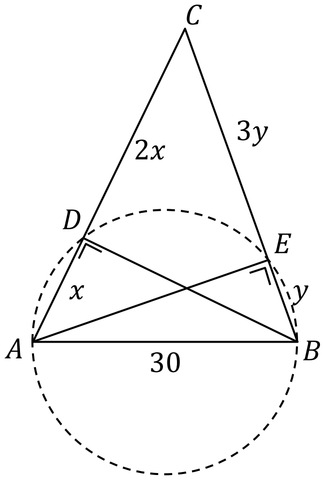
Kasus 1.
Apabila a dan b adalah relative prima, maka dari $Bezout's\ Theorem$, semua $k \in \mathbb{Z}$ dapat dinyatakan dalam $xb + ya$ sehingga haruslah $ab + 1 = 2018$, sehingga
$$ab + 1 = 2018 \Rightarrow ab = 2017$$
Sehingga, diperoleh penyelesaian $(a, b) = \{(1,2017), (2017,1)\}$.

Kasus 2.
Apabila $FPB(a, b) = d > 1$, maka $a, b > 1$. Sehingga dari $Bezout's\ Theorem$, semua (dan hanya) $dk, k \in \mathbb{Z}$ dapat dinyatakan dalam $xb + ya$. Semua dk ada sebanyak $\left\lfloor \frac{ab}{d} \right\rfloor + 1 = a\left(\frac{b}{d}\right) + 1$, sehingga
$$a\left(\frac{b}{d}\right) + 1 = 2018 \Rightarrow a\left(\frac{b}{d}\right) = 2017 \Rightarrow a = 2017$$
Sehingga diperoleh penyelesaian $(a, b) = \{(2017,2017)\}$

Jadi, banyaknya pasangan bilangan asli (a, b) yang memenuhi adalah 3 buah.

16. Diberikan segitiga ABC dan lingkaran Γ yang berdiameter AB. Lingkaran Γ memotong sisi AC dan BC berturut-turut di D dan E. Jika $AB = 30$, $AD = \frac{1}{3}AC$, dan $BE = \frac{1}{4}BC$, maka luas segitiga ABC adalah ....

Pembahasan:
Perhatikan, gambar segitiga ABC dan lingkaran Γ.



Misal,
$AD = x$, karena $AD = \frac{1}{3}AC$ maka $AC = 3AD$, sehingga $AC = 3x$, akibatnya $CD = 2x$.

$BE = y$, karena $BE = \frac{1}{4}BC$ maka $BC = 4BE$, sehingga $BC = 4y$, akibatnya $CE = 3y$.

Berdasarkan power of point diperoleh

$$\begin{aligned} CD \times CA &= CE \times CB \\ \Leftrightarrow \quad 2x \times 3x &= 3y \times 4y \\ \Leftrightarrow \quad 6x^2 &= 12y^2 \\ \Leftrightarrow \quad x^2 &= 2y^2 \end{aligned}$$

Luas ΔABC dapat dicari menggunakan sisi alas AC dan tinggi BD. Sehingga kita akan mencari AC dengan terlebih dahulu mencari nilai AD, lalu mencari BD dengan menggunakan aturan Pythagoras pada ΔABD.

BD dapat dicari dengan memandang aturan Pythagoras pada ΔABD dan ΔBDC, yaitu:

$$\begin{aligned} BD^2 &= BD^2 \\ \Leftrightarrow AB^2 - AD^2 &= BC^2 - CD^2 \\ \Leftrightarrow \quad 30^2 - x^2 &= (4y)^2 - (2x)^2 \\ \Leftrightarrow \quad 900 - x^2 &= 16y^2 - 4x^2 \\ \Leftrightarrow \quad 900 - x^2 &= 8x^2 - 4x^2 \\ \Leftrightarrow \quad 900 &= 5x^2 \\ \Leftrightarrow \quad x^2 &= 180 \end{aligned}$$

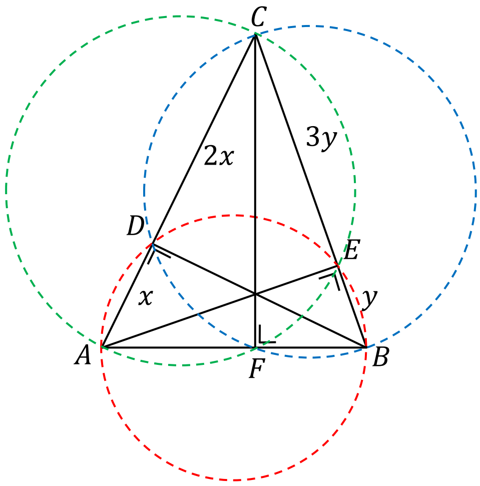
Sehingga, $BD = \sqrt{AB^2 - AD^2} = \sqrt{30^2 - x^2} = \sqrt{900 - 180} = \sqrt{720} = 12\sqrt{5}$.

Mengingat $AD = x = \sqrt{180} = 6\sqrt{5}$, maka $AC = 3AD = 3x = 18\sqrt{5}$.

Jadi, luas ΔABC adalah $L = \frac{1}{2} \times AC \times BD = \frac{1}{2} \times 18\sqrt{5} \times 12\sqrt{5} = 108 \times 5 = 540$.

TRIK SUPERKILAT:

Perhatikan, gambar segitiga ABC dan lingkaran Γ.



Perhatikan, dengan dalil de Ceva pada segitiga ABC diperoleh

$$\frac{AF}{FB} \times \frac{BE}{EC} \times \frac{CD}{DA} = 1 \Rightarrow \frac{AF}{FB} = \frac{3}{2}$$

Jadi, $AF = \frac{3}{5}AB = \frac{3}{5} \times 30 = 18$.

Berdasarkan power of point diperoleh

$$\begin{aligned} AD \times AC &= AF \times AB \\ \Leftrightarrow \quad \frac{1}{3}AC^2 &= \frac{3}{5}AB^2 \\ \Leftrightarrow \quad AC^2 &= \frac{9}{5}(30)^2 \\ \Leftrightarrow \quad AC^2 &= 1620 \end{aligned}$$

Sehingga, $CF = \sqrt{AC^2 - AF^2} = \sqrt{1620 - 324} = \sqrt{1296} = 36$.

Jadi, luas ΔABC adalah $L = \frac{1}{2} \times AB \times CF = \frac{1}{2} \times 30 \times 36 = 540$.

17. Diberikan bilangan real x dan y yang memenuhi $\frac{1}{2} < \frac{x}{y} < 2$. Nilai minimum $\frac{x}{2y-x} + \frac{2y}{2x-y}$ adalah ....

Pembahasan:

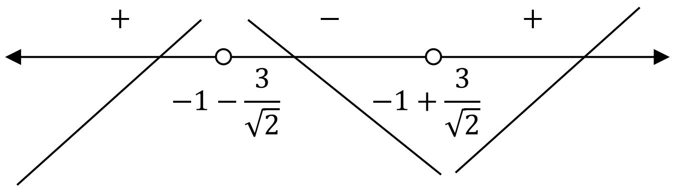
Perhatikan, $f\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{x}{2y-x} + \frac{2y}{2x-y} = \frac{\left(\frac{x}{y}\right)}{2-\left(\frac{x}{y}\right)} + \frac{2}{2\left(\frac{x}{y}\right)-1}$, dan misal $\frac{x}{y} = p$, maka $f(p) = \frac{p}{2-p} + \frac{2}{2p-1}$.

Sehingga, $f'(p) = \frac{2}{(2-p)^2} - \frac{4}{(2p-1)^2} = \frac{2(2p-1)^2 - 4(2-p)^2}{(2-p)^2(2p-1)^2} = \frac{4p^2+8p-14}{(2-p)^2(2p-1)^2}$

Diperoleh titik stasioner $f(p)$ adalah saat $f'(p) = 0$, yaitu

$$\begin{aligned} f'(p) = 0 \Rightarrow \frac{4p^2+8p-14}{(2-p)^2(2p-1)^2} &= 0 \\ \Leftrightarrow \quad 4p^2 + 8p - 14 &= 0 \\ \Leftrightarrow \quad p^2 + 2p - \frac{7}{2} &= 0 \\ \Leftrightarrow \quad p^2 + 2p + 1 &= \frac{9}{2} \\ \Leftrightarrow \quad (p+1)^2 &= \frac{9}{2} \\ \Leftrightarrow \quad p + 1 &= \pm\frac{3}{\sqrt{2}} \\ \Leftrightarrow \quad p &= -1 \pm \frac{3}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

Perhatikan garis bilangan dari $f'(p)$



Sehingga, $p = -1 + \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}-2}{2}$ adalah titik balik minimum dan karena $\frac{1}{2} < p < 2$ maka nilai minimum dari $f(p)$ adalah $f\left(-1 + \frac{3}{\sqrt{2}}\right)$, yaitu

$$\begin{aligned} f\left(-1 + \frac{3}{\sqrt{2}}\right) &= \frac{\left(\frac{3\sqrt{2}-2}{2}\right)}{2 - \left(\frac{3\sqrt{2}-2}{2}\right)} + \frac{2}{2\left(\frac{3\sqrt{2}-2}{2}\right) - 1} \\ &= \frac{3\sqrt{2}-2}{6-3\sqrt{2}} + \frac{2}{3\sqrt{2}-3} \\ &= \frac{3\sqrt{2}-2}{6-3\sqrt{2}} + \frac{2\sqrt{2}}{6-3\sqrt{2}} \\ &= \frac{5\sqrt{2}-2}{6-3\sqrt{2}} \\ &= \frac{5\sqrt{2}-2}{6-3\sqrt{2}} \times \frac{6+3\sqrt{2}}{6+3\sqrt{2}} \\ &= \frac{18+24\sqrt{2}}{18} \\ &= 1 + \frac{4\sqrt{2}}{3} \end{aligned}$$

TRIK SUPERKILAT 1:
Misal, $m = 2y - x$ dan $n = 2x - y$, maka diperoleh $x = \frac{2n+m}{3}$ dan $y = \frac{2m+n}{3}$.

Sehingga,
$$\frac{1}{2} < \frac{x}{y} < 2 \Rightarrow \frac{1}{2} < \frac{2n+m}{2m+n} < 2 \Rightarrow m > 0, n > 0$$
Dan, diperoleh
$$f(x,y) = \frac{x}{2y-x} + \frac{2y}{2x-y} \Rightarrow f(m,n) = \frac{2n+m}{3m} + \frac{2(2m+n)}{3n} = \frac{2n}{3m} + \frac{4m}{3n} + 1$$

Karena $m > 0$ dan $n > 0$, sehingga $\frac{m}{n} > 0$ dan $\frac{n}{m} > 0$, maka menurut $AM - GM$, diperoleh
$$\frac{\frac{2m}{3n} + \frac{4n}{3m}}{2} \geq \sqrt{\frac{2m}{3n} \cdot \frac{4n}{3m}}$$
$$\Leftrightarrow \quad \frac{2m}{3n} + \frac{4n}{3m} \geq \frac{4\sqrt{2}}{3}$$
$$\Leftrightarrow \frac{2m}{3n} + \frac{4n}{3m} + 1 \geq 1 + \frac{4\sqrt{2}}{3}$$

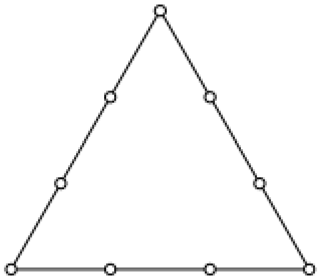
Jadi, nilai minimum $\frac{x}{2y-x} + \frac{2y}{2x-y}$ adalah $1 + \frac{4\sqrt{2}}{3}$.

TRIK SUPERKILAT 2:
Perhatikan,
$$f(x,y) = \frac{x}{2y-x} + \frac{2y}{2x-y} = \left(\frac{x}{2y-x} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{2y}{2x-y} - \frac{2}{3}\right) + 1 = \frac{2}{3}\left(\frac{2x-y}{2y-x}\right) + \frac{4}{3}\left(\frac{2y-x}{2x-y}\right) + 1$$

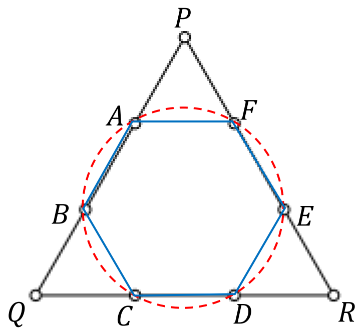
Karena $\frac{1}{2} < \frac{x}{y} < 2$, maka $2x - y > 0$ dan $2y - x > 0$.
Sehingga, untuk $\frac{2x-y}{2y-x} > 0$ dan $\frac{2y-x}{2x-y} > 0$, maka menurut $AM - GM$, diperoleh
$$\frac{\frac{2}{3}\left(\frac{2x-y}{2y-x}\right) + \frac{4}{3}\left(\frac{2y-x}{2x-y}\right)}{2} \geq \sqrt{\frac{2}{3}\left(\frac{2x-y}{2y-x}\right) \cdot \frac{4}{3}\left(\frac{2y-x}{2x-y}\right)}$$
$$\Leftrightarrow \quad \frac{2}{3}\left(\frac{2x-y}{2y-x}\right) + \frac{4}{3}\left(\frac{2y-x}{2x-y}\right) \geq \frac{4\sqrt{2}}{3}$$
$$\Leftrightarrow \frac{2}{3}\left(\frac{2x-y}{2y-x}\right) + \frac{4}{3}\left(\frac{2y-x}{2x-y}\right) + 1 \geq 1 + \frac{4\sqrt{2}}{3}$$
$$\Leftrightarrow \quad \frac{x}{2y-x} + \frac{2y}{2x-y} \geq 1 + \frac{4\sqrt{2}}{3}$$

Jadi, nilai minimum $\frac{x}{2y-x} + \frac{2y}{2x-y}$ adalah $1 + \frac{4\sqrt{2}}{3}$.

18. Diberikan sembilan titik pada bidang yang membentuk segitiga sama sisi seperti pada gambar. Pada tiap sisi, dua titik yang bukan titik sudut segitiga membagi sisi menjadi tiga bagian sama panjang. Kesembilan titik ini akan diwarnai masing-masing dengan warna merah atau biru. Peluang bahwa dari kesembilan titik tersebut, terdapat tiga titik yang warnanya sama dan membentuk segitiga siku-siku adalah ....



Pembahasan:
Perhatikan gambar berikut!



Dari keenam titik yang bukan titik sudut segitiga dapat dibuat sebuah lingkaran yang di dalamnya terdapat segienam beraturan.

Sepasang titik sudut segienam beraturan yang saling berhadapan dapat membentuk garis yang merupakan diameter lingkaran, yaitu AD, BE, dan CF.

Sehingga, apabila sepasang titik sudut yang berhadapan memiliki warna yang sama, maka jika satu titik dipilih dari empat titik yang lain pada lingkaran berwarna sama, maka jelas tiga titik berwarna sama tersebut akan terbentuk segitiga siku-siku. Ingat kembali bahwa sudut keliling yang menghadap ke diameter lingkaran pastilah siku-siku.

Sekarang, coba perhatikan bahwa kondisi terburuk yang mungkin terjadi adalah dua pasang titik sudut segienam beraturan yang saling berhadapan memiliki warna berbeda. Misalnya, A dan D berwarna merah, sedangkan B dan E berwarna biru, maka jika satu saja titik yang lain dari C atau F diberi warna apapun, pastilah akan terbentuk segitiga siku-siku dengan titik-titik sudutnya sewarna.

Kondisi terburuk lain yang mungkin terjadi adalah A, B, C dan D, E, F berlainan warna, maka jika satu saja titik sudut segitiga Q, R diberi warna apapun, pastilah akan terbentuk segitiga siku-siku dengan titik-titik sudutnya sewarna.

Sehingga peluang bahwa dari kesembilan titik tersebut, terdapat tiga titik yang warnanya sama dan membentuk segitiga siku-siku adalah 1.

19. Bilangan prima terbesar yang dapat dinyatakan dalam bentuk $a^4 + b^4 + 13$ untuk suatu bilangan-bilangan prima a dan b adalah ....

Pembahasan:
Perhatikan, teorema tentang bilangan prima yaitu "Setiap bilangan prima p dan $p > 3$, maka p dapat dinyatakan sebagai $p = 6n \pm 1$, dengan n adalah bilangan asli".

Untuk $a > 3, b > 3$, berarti $b = 6n \pm 1, n \geq 1$, maka $a^4 + b^4 + 13 \equiv 1 + 1 + 13 \equiv 15 \equiv 0 (\text{mod } 3)$

Untuk $a = 2, b \leq 3$, maka $a^4 + b^4 + 13 \equiv 1 + 1 + 13 \equiv 15 \equiv 0 (\text{mod } 5)$
Jadi untuk $a = 2, b \leq 3$, maka $a^4 + b^4 + 13$ adalah bukan bilangan prima.
Begitu pula untuk $b = 2, a \leq 3$, maka $a^4 + b^4 + 13$ adalah bukan bilangan prima.

Untuk $a = b = 3$, maka maka $a^4 + b^4 + 13 \equiv 1 + 1 + 13 \equiv 15 \equiv 0 (\text{mod } 5)$
Jadi untuk $a = b = 3$, maka $a^4 + b^4 + 13$ adalah bukan bilangan prima.

Untuk $a = 2, b > 3$, berarti $b = 6n \pm 1, n \geq 1$, maka $a^4 + b^4 + 13 \equiv 0 + 1 + 13 \equiv 14 \equiv 0 (\text{mod } 2)$
Jadi untuk $a = 2, b > 3$, maka $a^4 + b^4 + 13$ adalah bukan bilangan prima.
Begitu pula untuk $b = 2, a > 3$, maka $a^4 + b^4 + 13$ adalah bukan bilangan prima.

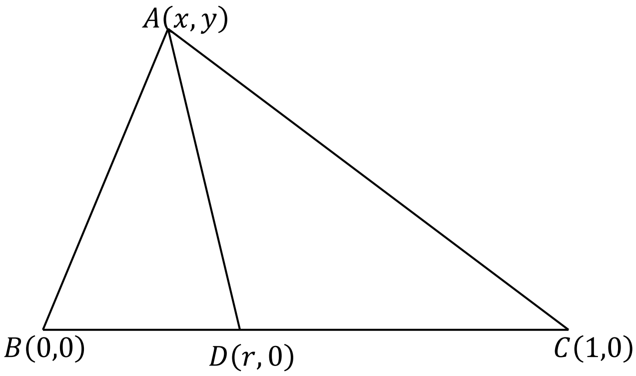
Untuk $a = 3, b > 3$, berarti $b = 6n \pm 1, n \geq 1$,

- Untuk $b = 6n + 1$, maka misal n berbentuk $5k + a$, dengan $k \geq 0$. Disini, $a \neq 4$ sebab jika $a = 4$, maka b tak prima.
  Maka, $a^4 + b^4 + 13 \equiv (81 + 6(5k + a) + 1)^4 + 13) \text{ (mod } 5)$
  $\equiv ((a + 1)^4 + 4) \text{ (mod } 5)$
  $\equiv 0 \text{ (mod } 5)$, untuk $a \neq 4$
- Untuk $b = 6n - 1$, maka misal n berbentuk $5k + a$, dengan $k \geq 0$. Disini, $a \neq 1$ sebab jika $a = 1$, maka b tak prima, kecuali untuk $n = 1$.
  Maka, $a^4 + b^4 + 13 \equiv (81 + 6(5k + a) - 1)^4 + 13) \text{ (mod } 5)$
  $\equiv ((a + 1)^4 - 1) \text{ (mod } 5)$
  $\equiv 0 \text{ (mod } 5)$, untuk $a \neq 1$
  Maka, solusi satu-satunya adalah jika $n = 1$, sehingga $a^4 + b^4 + 13$ adalah bilangan prima terbesar untuk $a = 3, b = 5$.

Jadi, $a^4 + b^4 + 13 = 3^4 + 5^4 + 13 = 81 + 625 + 13 = 719$.

20. Pada segitiga ABC, panjang sisi BC adalah 1 satuan. Ada tepat satu titik D pada sisi BC yang memenuhi $|DA|^2 = |DB| \cdot |DC|$. Jika k menyatakan keliling ABC, jumlah semua k yang mungkin adalah ....

Pembahasan:



Perhatikan,

$|AC| = p = \sqrt{(x-1)^2 + y^2} = \sqrt{(x^2+y^2) - 2x + 1}$

$|AB| = q = \sqrt{x^2 + y^2}$

$|BC| = 1$

$|DB| = r$

$|DC| = 1 - r$

$|DA| = \sqrt{(x-r)^2 + y^2}$.

Sehingga, keliling ΔABC adalah

$k = |BC| + |AC| + |AB|$

$\quad = 1 + p + q$.

Perhatikan juga bahwa pada ΔABC berlaku

$$\begin{aligned} & |DA|^2 = |DB| \cdot |DC| \\ \Leftrightarrow\ & (x-r)^2 + y^2 = r(1-r) \\ \Leftrightarrow\ & x^2 - 2xr + r^2 + y^2 = r - r^2 \\ \Leftrightarrow\ & 2r^2 - (2x+1)r + (x^2+y^2) = 0 \end{aligned}$$

Ingat, bahwa agar tepat diperoleh satu titik $D(r, 0)$ maka penyelesaian r real kembar ($D = 0$)

$$\begin{aligned} D = 0 \Rightarrow\ & b^2 - 4ac = 0 \\ \Leftrightarrow\ & \left(-(2x+1)\right)^2 - 4(2)(x^2+y^2) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & (2x+1)^2 - 8(x^2+y^2) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & \frac{(2x+1)^2}{8} = (x^2+y^2) \end{aligned}$$

Padahal, $0 < r < 1$, sehingga

$$\begin{aligned} 0 < r < 1 \Rightarrow\ & 0 < \frac{2x+1}{4} < 1 \\ \Leftrightarrow\ & 0 < 2x + 1 < 4 \\ \Leftrightarrow\ & -1 < 2x < 3 \\ \Leftrightarrow\ & -\frac{1}{2} < x < \frac{3}{2} \end{aligned}$$

Jadi, keliling ΔABC adalah

$$\begin{aligned} k &= 1 + p + q \\ &= 1 + \sqrt{(x^2+y^2) - 2x + 1} + \sqrt{(x^2+y^2)} \\ &= 1 + \sqrt{\frac{(2x+1)^2}{8} - 2x + 1} + \sqrt{\frac{(2x+1)^2}{8}} \\ &= 1 + \sqrt{\frac{(2x-3)^2}{8}} + \sqrt{\frac{(2x+1)^2}{8}} \\ &= 1 + \left(-\frac{(2x-3)}{2\sqrt{2}}\right) + \frac{2x+1}{2\sqrt{2}} \\ &= 1 + \sqrt{2} \end{aligned}$$

Pembahasan soal OSK Matematika SMA 2018 ini sangat mungkin jauh dari sempurna mengingat keterbatasan penulis. Saran, koreksi dan tanggapan sangat diharapkan demi perbaikan pembahasan soal OSN ini.

Untuk download pembahasan soal SBMPTN, UNAS, Olimpiade, dan rangkuman materi pelajaran serta soal-soal ujian yang lainnya, silahkan kunjungi http://pak-anang.blogspot.com.

Terima kasih.
Pak Anang