Pembahasan Soal

OSN Guru 2011

OLIMPIADE SAINS NASIONAL KHUSUS GURU MATEMATIKA SMA

OSN Guru Matematika SMA

(Olimpiade Sains Nasional)

Disusun oleh:

Pak Anang

PEMBAHASAN SOAL
OLIMPIADE GURU MATEMATIKA SMA
TINGKAT PROPINSI

TANGGAL 20 JULI 2011

By Pak Anang (http://pak-anang.blogspot.com)

Bagian pertama

1. Diketahui suatu barisan bilangan riil U_n yang memenuhi $U_{n+2} = 2U_{n+1} + U_n$, dimana $U_3 = 9$ dan $U_6 = 128$, $U_5 = ...$

   Pembahasan:
   $U_3 = 2U_2 + U_1$
   $U_4 = 2U_3 + U_2 = 2(2U_2 + U_1) + U_2 = 5U_2 + 2U_1$
   $U_5 = 2U_4 + U_3 = 2(5U_2 + 2U_1) + 2U_2 + U_1 = 12U_2 + 5U_1$
   $U_6 = 2U_5 + U_4 = 2(12U_2 + 5U_1) + 5U_2 + 2U_1 = 29U_2 + 12U_1$

   Dari soal diketahui $U_3 = 9$ dan $U_6 = 128$, eliminasi U_1 untuk mendapatkan nilai U_1

   $$\begin{array}{rcl|c|l} 29U_2 + 12U_1 &=& 128 & \times\ 1 & 29U_2 + 12U_1 = 128 \\ 2U_2 + \quad U_1 &=& 9 & \times 12 & \underline{24U_2 + 12U_1 = 108} \; - \\ & & & & 5U_2 \qquad\quad = \ 20 \Leftrightarrow U_2 = 4 \end{array}$$

   Substitusi U_2 ke $2U_2 + U_1 = 9$, sehingga

   $$\begin{aligned} 2U_2 + U_1 = 9 &\Leftrightarrow 2(4) + U_1 = 9 \\ &\Leftrightarrow \quad 8 + U_1 = 9 \\ &\Leftrightarrow \qquad U_1 = 9 - 8 \\ &\Leftrightarrow \qquad U_1 = 1 \end{aligned}$$

   Jadi, didapatkan nilai U_5 yaitu:

   $$\begin{aligned} U_5 &= 12U_2 + 5U_1 \\ &= 12(4) + 5(1) \\ &= 48 + 5 \\ &= 53 \end{aligned}$$

2. Jika $\bar{u}$ dan $\bar{v}$ vektor sehingga $\left||\bar{u}+\bar{v}|\right| = 3$ dan $\left||\bar{u}-\bar{v}|\right| = 5$, maka $\bar{u}\cdot\bar{v} = \ldots.$

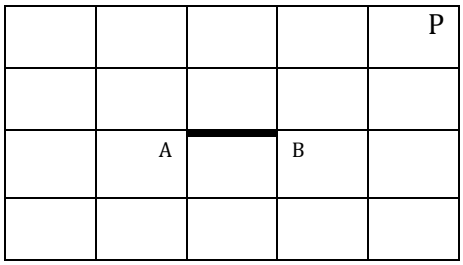
Pembahasan:
Dari bentuk berikut:
$\left||\bar{u}+\bar{v}|\right|^2 = |u|^2 + |v|^2 + 2|u||v|\cos\theta$
$\left||\bar{u}-\bar{v}|\right|^2 = |u|^2 + |v|^2 - 2|u||v|\cos\theta$

Eliminasi $|u|^2 + |v|^2$ pada $\left||\bar{u}+\bar{v}|\right|^2$ dan $\left||\bar{u}-\bar{v}|\right|^2$, sehingga:

$$\begin{array}{rr} \left||\bar{u}+\bar{v}|\right|^2 = |u|^2 + |v|^2 + 2|u||v|\cos\theta & \\ \left||\bar{u}-\bar{v}|\right|^2 = |u|^2 + |v|^2 - 2|u||v|\cos\theta & \\ \hline \left||\bar{u}+\bar{v}|\right|^2 - \left||\bar{u}-\bar{v}|\right|^2 = \quad 4|u||v|\cos\theta & \Leftrightarrow |\bar{u}||\bar{v}|\cos\theta = \dfrac{\left||\bar{u}+\bar{v}|\right|^2 - \left||\bar{u}-\bar{v}|\right|^2}{4} \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \quad \bar{u}\cdot\bar{v} = \frac{3^2 - 5^2}{4}$$
$$\Leftrightarrow \quad \bar{u}\cdot\bar{v} = \frac{9 - 25}{4}$$
$$\Leftrightarrow \quad \bar{u}\cdot\bar{v} = \frac{-16}{4}$$
$$\Leftrightarrow \quad \bar{u}\cdot\bar{v} = -4$$

3. Diberikan gambar berikut:

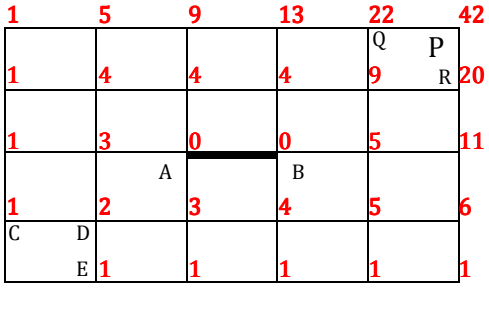


Banyaknya rute terpendek dari titik O ke P yang tidak melalui ruas garis AB adalah ….

Pembahasan:

TRIK SUPERKILAT:

Lintasan atau rute terpendek dari titik O ke P adalah lintasan yang terdiri kombinasi dari gerakan ke kanan dan ke atas. Misal titik-titik C, D, E terletak seperti pada gambar berikut:



Perhatikan gambar, dari titik O ke titik C ada 1 lintasan, dari titik O ke titik C ada 1 lintasan, sehingga dari titik O ke titik D terdapat 2 lintasan, yaitu melalui titik C atau titik E. Demikian seterusnya hingga mencapai titik P.

Dengan demikian untuk mencapai titik P dapat melalui titik Q dan R, sehingga banyak lintasan atau rute terpendek dari titik O ke titik P yang tidak melewati titik A dan B adalah sebanyak $20 + 22 = 42$ lintasan.

4. Segitiga ABC memiliki titik sudut A = (2, 0), B = (0, 2) dan C, dimana C berada pada garis $x + y = 5$. Luas segitiga ABC yang terbesar adalah ….

   Pembahasan:
   Pertama, kita harus memahami maksud soal tersebut. Misal a adalah alas segitiga ABC, dan kita misalkan ruas garis AB adalah alas dari segitiga ABC, maka
   $a = \sqrt{(0-2)^2 + (2-0)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

   Selanjutnya, tinggi segitiga ABC adalah jarak antara ruas garis AB terhadap titik C yang terletak pada garis $x + y = 5$. Luas daerah segitiga ABC akan menjadi tak hingga apabila garis $x + y = 5$ dan ruas garis AB tidak sejajar, karena tinggi segitiga ABC akan berbeda untuk setiap titik C.

   Sehingga, kita akan memeriksa apakah ruas garis AB sejajar dengan garis $x + y = 5$.
   Misal m_{AB} adalah gradien ruas garis AB, dan m adalah gradient garis $x + y = 5$, maka:
   $m_{AB} = \dfrac{2-0}{0-2} = -1$
   $x + y = 5 \Leftrightarrow y = 5 - x \Leftrightarrow m = -1$
   Karena $m_{AB} = m$, maka ruas garis AB sejajar dengan garis $x + y = 5$.

   Dengan demikian misalkan t menyatakan tinggi segitiga ABC terhadap alas AB, maka t adalah jarak titik pada ruas garis AB terhadap garis $x + y = 5$. Kita ambil titik A yang berada di ruas garis AB, maka t adalah jarak titik A = (2, 0) ke garis $x + y - 5 = 0$, sehingga:
   $t = \left|\dfrac{(2) + (0) - 5}{\sqrt{1^2 + 1^2}}\right| = \left|\dfrac{-3}{\sqrt{2}}\right| = \dfrac{3}{\sqrt{2}} = \dfrac{3}{2}\sqrt{2}$

   Jadi, luas daerah segitiga ABC yang terbesar adalah:
   $L\Delta ABC = \dfrac{1}{2}at = \dfrac{1}{2} \cdot 2\sqrt{2} \cdot \dfrac{3}{2}\sqrt{2} = 3$ satuan luas

5. Wati memiliki dua orang kakak laki-laki yang kembar. Wati berumur a tahun dan kakak laki-lakinya berumur b tahun, dimana a dan b adalah bilangan bulat. Hasil perkalian ketiga umur mereka adalah 128. Jumlah ketiga umur mereka adalah ….

   Pembahasan:
   $128 = 2^7$

   Diketahui umur Wati adalah a, umur kakak laki-laki Wati yang kembar adalah b, dimana a, b adalah bilangan bulat dan $a < b$, maka perkalian umur ketiganya adalah:
   $ab^2 = 128$

   Nilai a dan b yang mungkin adalah:
   $2 \times (2^3)^2 = 128 \Leftrightarrow a = 2, b = 2^3$

   Sehingga, misal S adalah jumlah ketiga umur mereka, maka:
   $S = a + 2b = 2 + 2 \cdot 2^3 = 2 + 16 = 18$ tahun.

6. Banyakya segitiga siku-siku yang memiliki sisi tegak a, b dan sisi miring $b+1$, dimana a, b adalah bilangan bulat dan $b < 100$, adalah ….

Pembahasan:
Jika $a, b,$ dan $b+1$ adalah sisi-sisi segitiga siku-siku dengan sisi miring $b+1$, maka nilai sisi-sisi segitiga tersebut harus memenuhi:
$a + b > b + 1 \Leftrightarrow a > 1$

Pada segitiga siku-siku dengan sisi tegak a, b dan sisi miring $b+1$ berlaku teorema Pythagoras:
$a^2 + b^2 = (b+1)^2 \Leftrightarrow a^2 = (b+1)^2 - b^2$
$\Leftrightarrow a^2 = \big((b+1)+b\big)\big((b+1)-b\big)$
$\Leftrightarrow a^2 = 2b + 1$

Padahal dari soal diketahui $b < 100$, sehingga nilai a^2 yang mungkin $a^2 < 201$. Sedangkan dari syarat $a > 1$ maka $a^2 > 1$. Berarti nilai a harus berada pada interval $1 < a^2 < 201$

Mengingat $2b$ adalah bilangan bulat dan $a^2 = 2b + 1$, sehingga a^2 pasti bernilai ganjil. Karena a adalah bilangan bulat, maka nilai a^2 adalah bilangan kuadrat yang bernilai ganjil yang harus memenuhi $1 < a^2 < 201$.

Nilai a^2 yang mungkin adalah 9, 25, 49, 81, 121, dan 169.

Sehingga pasangan sisi segitiga siku-siku yang mungkin dibuat adalah:
$a^2 = 9 \Leftrightarrow 2b + 1 = 9 \Leftrightarrow b = 4$, jadi sisi-sisi segitiga tersebut adalah 3, 4, dan 5.
$a^2 = 25 \Leftrightarrow 2b + 1 = 25 \Leftrightarrow b = 12$, jadi sisi-sisi segitiga tersebut adalah 5, 12, dan 13.
$a^2 = 49 \Leftrightarrow 2b + 1 = 49 \Leftrightarrow b = 24$, jadi sisi-sisi segitiga tersebut adalah 7, 24, dan 25.
$a^2 = 81 \Leftrightarrow 2b + 1 = 81 \Leftrightarrow b = 40$, jadi sisi-sisi segitiga tersebut adalah 9, 40, dan 41.
$a^2 = 121 \Leftrightarrow 2b + 1 = 121 \Leftrightarrow b = 60$, jadi sisi-sisi segitiga tersebut adalah 11, 60, dan 61.
$a^2 = 169 \Leftrightarrow 2b + 1 = 169 \Leftrightarrow b = 84$, jadi sisi-sisi segitiga tersebut adalah 13, 84, dan 85.

Jadi dapat disusun sebanyak 6 buah segitiga siku-siku.

7. Misalkan diberikan fungsi $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dengan $f(1)=1$ dan untuk sebarang $x\in\mathbb{R}$ memenuhi $f(x+5)\geq f(x)+5$ dan $f(x+1)\leq f(x)+1$. Jika $g(x)=f(x)-x+1$ maka $g(2011)$ adalah ....

Pembahasan:

Kita periksa fungsi rekursif dari $f(x+1)\leq f(x)+1$ dengan nilai awal $f(1)=1$, maka:

$f(2)\leq f(1)+1 \Leftrightarrow f(2)\leq 1+1 \Leftrightarrow f(2)\leq 2$

$f(3)\leq f(2)+1 \Leftrightarrow f(3)\leq 2+1 \Leftrightarrow f(3)\leq 3$

$f(4)\leq f(3)+1 \Leftrightarrow f(4)\leq 3+1 \Leftrightarrow f(4)\leq 4$

$\vdots$

$f(2012)\leq 2012$

Dari pola tersebut, bisa disimpulkan nilai $f(2012)\leq 2012$

Sekarang periksa fungsi rekursif dari $f(x+5)\geq f(x)+5$ dengan nilai awal $f(1)=1$, maka

$f(6)\geq f(1)+5 \Leftrightarrow f(6)\geq 1+5 \Leftrightarrow f(6)\geq 6$

$f(7)\geq f(2)+5 \Leftrightarrow f(7)\geq 2+5 \Leftrightarrow f(7)\geq 7$

$f(8)\geq f(1)+5 \Leftrightarrow f(8)\geq 3+5 \Leftrightarrow f(8)\geq 8$

$\vdots$

$f(2012)\geq 2012$

Dari pola tersebut, bisa disimpulkan nilai $f(2012)\geq 2012$

Karena $2012\leq f(2012)\leq 2012$, artinya $f(2012)=2012$, sehingga:

$g(x)=f(x)-x+1$, jika $x=2012$, maka diperoleh:

$g(2012)=f(2012)-2012+1=2012-2012+1=1$

8. Banyaknya nilai a yang memenuhi $\int_{-1}^{a} 3x^2 - 3\,dx = -4$ adalah ....

Pembahasan:

$$\int_{-1}^{a} 3x^2 - 3\,dx = -4 \Leftrightarrow [x^3 - 3x]_{-1}^{a} = -4$$
$$\Leftrightarrow (a^3 - 3a) - (-1 + 3) = -4$$
$$\Leftrightarrow a^3 - 3a - 2 = -4$$
$$\Leftrightarrow a^3 - 3a + 2 = 0$$
$$\Leftrightarrow (a - 1)^2(a + 2) = 0$$

Jadi, ada 2 nilai a yang memenuhi adalah $a = 1$ atau $a = -2$.

9. Misalkan a, b, c, d bilangan asli sehingga $\log_a b = \frac{3}{2}$ dan $\log_c d = \frac{5}{4}$. Jika $a - c = 9$ maka $b - d = \ldots.$

Pembahasan:

$\log_a b = \frac{3}{2} \Leftrightarrow b = a^{\frac{3}{2}}$

$\log_c d = \frac{5}{4} \Leftrightarrow d = c^{\frac{5}{4}}$

Misalkan $x = a^{\frac{1}{2}}$ maka berakibat $b = a^{\frac{3}{2}} \Leftrightarrow b = \left(a^{\frac{1}{2}}\right)^3 \Leftrightarrow b = x^3$.

Misalkan $y = c^{\frac{1}{4}}$ maka berakibat $d = c^{\frac{5}{4}} \Leftrightarrow d = \left(c^{\frac{1}{4}}\right)^5 \Leftrightarrow d = y^5$.

Sementara itu, dari $x = a^{\frac{1}{2}}$ diperoleh $a = x^2$, dan dari dari $y = c^{\frac{1}{4}}$ diperoleh $c = y^4$, sehingga:

$a - c = 9 \Leftrightarrow \quad x^2 - y^4 = 9 \left(ingat\ bentuk\ a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)\right)$

$\Leftrightarrow (x + y^2)(x - y^2) = 9\ (ingat\ faktor\ dari\ 9\ adalah\ 3 \times 3\ atau\ 9 \times 1)$

$Misal\ (x + y^2) = 3\ dan\ (x - y^2) = 3, padahal\ (x + y^2) \neq (x - y^2).$

$Jadi\ (x + y^2) = 3\ dan\ (x - y^2) = 3\ \ tidak\ memenuhi.$

$\Leftrightarrow Sehingga\ yang\ memenuhi\ adalah\ (x + y^2) = 9\ dan\ (x - y^2) = 1$

Dengan metode eliminasi dan substitusi pada persamaan $(x + y^2) = 9$ dan $(x - y^2) = 1$ akan diperoleh nilai x dan y sebagai berikut:

$$\begin{array}{rl} x + y^2 = & 9 \\ x - y^2 = & 1 \\ \hline 2x \quad = 10 & \Leftrightarrow x = 5 \end{array} +$$

Sehingga,

$x + y^2 = 9 \Leftrightarrow y^2 = 9 - x$

$\Leftrightarrow y^2 = 9 - 5$

$\Leftrightarrow y^2 = 4$

$\Leftrightarrow \ y = \pm 2\ (karena\ x, y\ bilangan\ asli, maka\ yang\ memenuhi\ hanya\ y = 2)$

$\Leftrightarrow \ y = 2$

Jadi,

$b - d = x^3 - y^5 = 5^3 - 2^5 = 125 - 32 = 93$

10. Jika a dan b bilangan asli dan $\sqrt{12+\sqrt{140}}=\sqrt{a}+\sqrt{b}$, maka nilai $a \times b$ adalah ....

Pembahasan:

$$\sqrt{12+\sqrt{140}} \Leftrightarrow \sqrt{12+2\sqrt{35}}$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{\left(7+2\sqrt{7}\sqrt{5}+5\right)}$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{\left(\sqrt{7}+\sqrt{5}\right)^2}$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{7}+\sqrt{5}$$

Jadi, nilai $a=7$ dan $b=5$, sehingga $a \times b = 7 \times 5 = 35$.

TRIK SUPERKILAT:

$$\sqrt{12+\sqrt{140}} \Leftrightarrow \sqrt{12+2\sqrt{35}}$$

Jadi, dengan mengingat konsep $\sqrt{(a+b)+2\sqrt{ab}}=\sqrt{a}+\sqrt{b}$ dan dengan melihat bentuk $\sqrt{12+2\sqrt{35}}$ di atas, sangat mudah kita temukan bahwa nilai $a \times b = 35$.

11. Nilai dari
$\log\tan 1° + \log\tan 2° + \log\tan 3° + \ \ldots\ + \log\tan 89°$
adalah ….

Pembahasan:
$\log\tan 1° + \log\tan 2° + \log\tan 3° + \ \ldots\ + \log\tan 89°$
$\Leftrightarrow \log(\tan 1° \times \tan 2° \times \tan 3° \times \ldots \times \tan 89°)$
$\Leftrightarrow \log(\tan 1° \times \tan 89° \times \tan 2° \times \tan 88° \times \tan 3° \times \tan 87° \times \ldots \times \tan 45°)$
$\Leftrightarrow \log(\tan 1° \times \tan(90° - 1°) \times \tan 2° \times \tan(90° - 2°) \times \tan 3° \times \tan(90° - 3°) \times \ldots \times \tan 45°)$
$\Leftrightarrow \log\big((\tan 1° \times \cot 1°) \times (\tan 2° \times \cot 2°) \times (\tan 3° \times \cot 3°) \times \ldots \times \tan 45°\big)$
$\Leftrightarrow \log(1 \times 1 \times 1 \times \ldots \times 1)$
$\Leftrightarrow \log 1$
$\Leftrightarrow 0$

12. $a, b, 2011$ adalah sebuah barisan dengan a dan b adalah bilangan bulat positif dan $a < b < 2011$. Jika setiap suku dikurangi dengan dua, maka barisan tersebut menjadi barisan geometri dengan rasio bilangan bulat. Nilai a adalah ….

Pembahasan:
$a, b, 2011$ adalah sebuah barisan, $a, b \in \mathbb{N}$.
Jika setiap suku dikurangi dua, diperoleh barisan geometri dengan rasio r, untuk $r \in \mathbb{Z}$.

Barisan geometri tersebut adalah:
$(a-2), (b-2), 2009$

Perhatikan bilangan pada suku ke-3 barisan geometri tersebut. Dikarenakan rumus suku ke-n dari barisan geometri adalah $u_n = ar^{n-1}$, maka suku ke-3 adalah $u_3 = ar^2$.

Padahal diketahui $a, b \in \mathbb{N}$ dan $r \in \mathbb{Z}$, maka untuk suku ke-3 pasti memuat faktor kuadrat. Kita periksa faktor dari bilangan 2009, diperoleh:
$2009 = 7^2 \times 41$

Dan karena $u_3 = ar^2$ dan $u_3 = 2009$ maka diperoleh:
$ar^2 = 7^2 \times 41 \Rightarrow r^2 = 7^2 \Rightarrow r = 7$
$\Rightarrow a = 41$

13. Suku banyak $p(x) = x^7 + ax^6 + bx^5 + cx^4 + dx^3 + ex^2 + fx + g$ mempunyai tujuh akar real berbeda dan salah satunya adalah nol. Koefisien yang tidak boleh nol adalah ….

Pembahasan:

Misal akar-akar suku banyak $p(x) = x^7 + ax^6 + bx^5 + cx^4 + dx^3 + ex^2 + fx + g$ adalah $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6,$ dan x_7. Diketahui suku banyak memiliki tujuah akar real berbeda dan salah satu akarnya adalah nol, misal $x_1 = 0$.

Sehingga dengan memeriksa sifat simetri akar (teorema Vieta) diperoleh:

$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 = -a\ (boleh\ nol)$

$x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + \ \ldots + x_6x_7 = b\ (boleh\ nol)$

$x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_2x_5 + \ \ldots + x_5x_6x_7 = -c(boleh\ nol)$

$x_1x_2x_3x_4 + x_1x_2x_3x_5 + x_1x_2x_3x_6 + \ \ldots + x_4x_5x_6x_7 = d(boleh\ nol)$

$x_1x_2x_3x_4x_5 + x_1x_2x_3x_4x_6 + x_1x_2x_3x_4x_7 + \ \ldots + x_3x_4x_5x_6x_7 = -e(boleh\ nol)$

$x_1x_2x_3x_4x_5x_6 + x_1x_2x_3x_4x_5x_7 + x_1x_2x_3x_4x_6x_7 + \ \ldots + x_2x_3x_4x_5x_6x_7 = f(tidak\ boleh\ nol)$

$x_1x_2x_3x_4x_5x_6x_7 = -g = 0(pasti\ nol)$

Nilai – $a, b, -c, d, -e$ mungkin saja nol jika jumlah suku yang tidak memuat x_1 adalah nol.

Nilai – g pasti nol. Karena terdapat $x_1 = 0$ yang membuat nilai $x_1x_2x_3x_4x_5x_6x_7 = 0$.

Sedangkan untuk f, tidak boleh nol, karena semua yang berwarna merah nilainya adalah 0, dan mengingat hanya satu akar yang nol yaitu x_1 maka akar suku banyak yang lainnya adalah tidak nol. Jadi perkalian $x_2x_3x_4x_5x_6x_7$ tidak boleh nol!

14.

		4	
1	2	32	16
		8	

Tiga dadu dibentuk dengan pola seperti gambar di atas. Jika ketiga dadu tersebut ditumpuk di atas sebuah meja sedemikian sehingga satu dadu berada di atas dadu lainnya, maka jumlah maksimum dari angka-angka yang dapat terlihat adalah ….

Pembahasan:

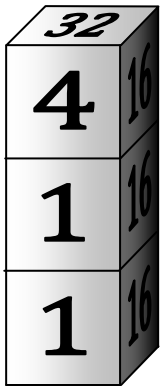
Perhatikan jumlah angka-angka pada sisi-sisi berhadapan adalah:

$1 + 32 = 33$

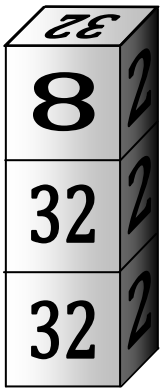
$2 + 16 = 18$

$4 + 8 = 12$

Sehingga jumlah semua angka pada sisi dadu adalah $1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 = 63$



tampak depan



tampak belakang

Jika kita menyusun tiga dadu secara bertumpuk, maka akan terdapat dua pasang sisi berhadapan yang tidak terlihat pada dua buah dadu terbawah, sementara pada dadu teratas hanya ada satu sisi yang tidak terlihat.

Sehingga, jumlah maksimum dari angka-angka yang dapat terlihat bisa diperoleh dengan meminimumkan angka-angka yang tidak terlihat.

Pertama, untuk dua pasang sisi berhadapan kita pilih pasangan angka 4 dan 8.
Kedua, untuk satu sisi yang tidak terlihat di dadu teratas kita pilih angka 1.

Jadi, jumlah maksimum dari angka-angka yang terlihat adalah:

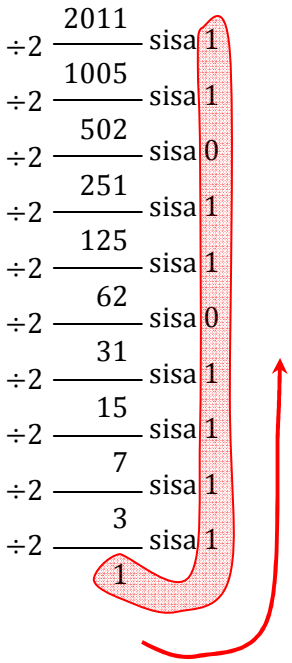
$(3 \times 63) - \big((2 \times 12) + 1\big) = 189 - 25 = 164$

15. Barisan naik 1, 3, 4, 9, 10, 12, 13, … terdiri dari bilangan-bilangan asli perpangkatan dari 3 atau jumlah dari perpangkatan 3 yang berbeda. Suku ke-2011 barisan itu adalah ….

Pembahasan:
$(3^0), (3^1), (3^1 + 3^0), (3^2), (3^2 + 3^0), (3^2 + 3^1), (3^2 + 3^1 + 3^0), \ldots$

Jika diamati, barisan tersebut ekuivalen dengan barisan bilangan biner 1, 10, 11, 100, 101, 110, 111, … pada basis 3.

Jadi untuk mendapatkan suku ke 2011 maka kita harus mencari bilangan biner untuk 2011:



Jadi $2011_{10} = 11111011011_2$.
Perhatikan bahwa bisa dibuktikan $2011 = 2^{10} + 2^9 + 2^8 + 2^7 + 2^6 + 2^4 + 2^3 + 2^1 + 2^0$.

Sehingga suku ke 2011 barisan tersebut adalah:
$u_{2011} = 3^{10} + 3^9 + 3^8 + 3^7 + 3^6 + 3^4 + 3^3 + 3^1 + 3^0$
$= 59049 + 19683 + 6561 + 2187 + 729 + 81 + 27 + 3 + 1$
$= 88321$

16. Misalkan m dan n bilangan asli yang memenuhi $\frac{1}{m}+\frac{1}{n}=\frac{4}{7}$. Nilai $m+n$ adalah ....

Pembahasan:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{m}+\frac{1}{n}=\frac{4}{7} &\Leftrightarrow \quad \frac{m+n}{mn}=\frac{4}{7}\\
&\Leftrightarrow \quad 7(m+n)=4mn\\
&\Leftrightarrow \quad 4mn-7m-7n=0\\
&\qquad GCD(4,-7,-7)=1, lalu\ kedua\ ruas\ dikali\ 4.\\
&\Leftrightarrow \quad 16mn-28m-28n=0 \ \ (tambahkan\ kedua\ ruas\ dengan\ 49)\\
&\Leftrightarrow 16mn-28m-28n+49=49\\
&\Leftrightarrow \quad (4m-7)(4n-7)=49\\
&\quad Jadi\ (4m-7)\ pasti\ salah\ satu\ faktor\ dari\ 49=\pm1,\pm7\pm49
\end{aligned}$$

- Karena 1 adalah faktor 49, maka:
  $(4m-7)=1\Leftrightarrow 4m=8\Leftrightarrow m=2$, sehingga:
  $(4m-7)(4n-7)=49\Leftrightarrow(4n-7)=\frac{49}{1}\Leftrightarrow 4n=56\Leftrightarrow n=14$
  Jadi, $m=2$ dan $n=14$ adalah solusi bulat dari $\frac{1}{m}+\frac{1}{n}=\frac{4}{7}$.

- Karena -1 adalah faktor 49, maka:
  $(4m-7)=-1\Leftrightarrow 4m=6\Leftrightarrow m=\frac{6}{4}$, sehingga ini bukan solusi bulat dari $\frac{1}{m}+\frac{1}{n}=\frac{4}{7}$.

- Karena 7 adalah faktor 49, maka:
  $(4m-7)=7\Leftrightarrow 4m=14\Leftrightarrow m=\frac{14}{4}$, sehingga ini juga bukan solusi bulat dari $\frac{1}{m}+\frac{1}{n}=\frac{4}{7}$.

- Karena -7 adalah faktor 49, maka:
  $(4m-7)=-7\Leftrightarrow 4m=0\Leftrightarrow m=0$, sehingga:
  $(4m-7)(4n-7)=49\Leftrightarrow(4n-7)=\frac{49}{-7}\Leftrightarrow 4n=0\Leftrightarrow n=0$
  Jadi, $m=0$ dan $n=0$, namun sayang bukan bilangan asli, dan penyebut pecahan haram diisi bilangan nol. Sehingga tidak jadi masuk ke jawaban. Hehe…

- Karena 49 adalah faktor 49, maka:
  $(4m-7)=49\Leftrightarrow 4m=56\Leftrightarrow m=14$, sehingga:
  $(4m-7)(4n-7)=49\Leftrightarrow(4n-7)=\frac{49}{49}\Leftrightarrow 4n=8\Leftrightarrow n=2$
  Jadi, $m=14$ dan $n=2$ adalah solusi bulat dari $\frac{1}{m}+\frac{1}{n}=\frac{4}{7}$.

- Karena -49 adalah faktor 49, maka:
  $(4m-7)=-49\Leftrightarrow 4m=-42\Leftrightarrow m=\frac{-42}{4}$, sehingga bukan solusi bulat dari $\frac{1}{m}+\frac{1}{n}=\frac{4}{7}$.

Jadi $m+n=2+14=14+2=16$

TRIK SUPERKILAT:

$$\frac{1}{m}+\frac{1}{n}=\frac{4}{7} \Leftrightarrow \quad \frac{m+n}{mn}=\frac{4}{7}$$
$$\Leftrightarrow 7(m+n)=4mn$$
$$\Leftrightarrow 7m+7n=4mn$$
$$\Leftrightarrow 7m=4mn-7n$$
$$\Leftrightarrow 7m=n(4m-7)$$
$$\Leftrightarrow n=\frac{7m}{4m-7}\ ;\ 4m-7\neq 0$$

Solusi bulat m dan n didapatkan untuk nilai $m=2 \Rightarrow n=14$ dan $m=14 \Rightarrow n=2$

Jadi $m+n=2+14=14+2=16$

17. Untuk bilangan riil a dan b didefinisikan $a \$ b = (a-b)^2$. Bentuk sederhana dari $(x-y)^2\$(y-x)^2$ adalah ....

Pembahasan:

$$\begin{aligned}(x-y)^2\$(y-x)^2 &= ((x-y)^2-(y-x)^2)^2\\ &= \left((x^2-2xy+y^2)-(y^2-2xy+x^2)\right)^2\\ &= 0^2\\ &= 0\end{aligned}$$

TRIK SUPERKILAT:

Ingat $x^2 = (-x)^2$, maka $(x-y)^2 = \left(-(x-y)\right)^2 = (y-x)^2$

$$\begin{aligned}\text{Jadi } (x-y)^2\$(y-x)^2 &= (x-y)^2\$(x-y)^2\\ &= \left((x-y)-(x-y)\right)^2\\ &= 0^2\\ &= 0\end{aligned}$$

18. Jika $50^0 + 50^1 + 50^2 + 50^3 + \ \ldots + 50^{2011}$ dibagi oleh 7, maka sisanya adalah ….

Pembahasan:
Misal x_n adalah sisa pembagian 50^n oleh 7, maka:
$50 \ \ = 1 \ (mod\ 7)$ $\{karena\ 50 - 1 = 49 = 7 \times 7, jadi\ 7|49\}$
$50^n \ = 1^n \ (mod\ 7)$
Jadi berapapun nilai n (pangkat) dari 50^n, sisa pembagian 50^n adalah $x_n = 1^n = 1$.

Sehingga,
Sisa pembagian $50^0 + 50^1 + 50^2 + 50^3 + \ \ldots + 50^{2011}$ oleh 7, bisa dituliskan sebagai:

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{2011} 5^n \ (mod\ 7) &= \sum_{n=0}^{2011} 1 \ (mod\ 7)\\ &= \left(\underbrace{1 + 1 + 1 + \ \ldots + 1}_{2012\ faktor}\right) (mod\ 7)\\ &= 2012 \ (mod\ 7)\\ &= 2^2 \times 503 \ (mod\ 7) \ \{503 = 6 \ (mod\ 7)\}\\ &= 4 \times 6 \ (mod\ \ 7)\\ &= 24 \ (mod\ 7)\\ &= 3 \ (mod\ 7)\end{aligned}$$

Jadi sisa pembagian $50^0 + 50^1 + 50^2 + 50^3 + \ \ldots + 50^{2011}$ oleh 7 adalah 3.

TRIK SUPERKILAT:
Menggunakan cara pembagian tradisional, sisa pembagian 2012 terhadap 7 adalah 3.

19. Volume dari sebuah kubus yang memiliki luas permukaan dua kali lebih luas dari luas permukaan kubus yang memiliki volume satu satuan adalah ….

Pembahasan:

Dari soal diperoleh informasi berikut:

$$L_2 = 2L_1 \Leftrightarrow 6s_2^2 = 2 \cdot 6s_1^2$$
$$\Leftrightarrow \frac{s_1^2}{s_2^2} = \frac{1}{2}$$
$$\Leftrightarrow \frac{s_1}{s_2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Sehingga, karena $\frac{s_1}{s_2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ dan $v_1 = 1$ satuan volume, maka:

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{s_1^3}{s_2^3} \Leftrightarrow \frac{v_1}{v_2} = \left(\frac{s_1}{s_2}\right)^3$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{v_2} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{v_2} = \frac{1}{\sqrt{2^3}}$$
$$\Leftrightarrow v_2 = \sqrt{8}$$
$$\Leftrightarrow v_2 = 2\sqrt{2} \text{ satuan volume}$$

TRIK SUPERKILAT:

Volume dan luas adalah $V \sim L^{\frac{3}{2}}$.

Sehingga volumenya adalah $2^{\frac{3}{2}} = 2\sqrt{2}$

20. Jika bilangan real x dan y memenuhi $(x+5)^2+(y-12)^2=14^2$, maka nilai minimum x^2+y^2 adalah ….

Pembahasan:
$(x+5)^2+(y-12)^2=14^2$
Persamaan tersebut adalah persamaan lingkaran dengan pusat $(-5,12)$ dan jari-jari 14.

$x^2+y^2=r^2$
Persamaan tersebut adalah persamaan lingkaran dengan pusat $(0,0)$ dan jari-jari r.

Sekarang, mari kita periksa apakah titik $(0,0)$ berada di dalam lingkaran atau tidak?

$x=0$ dan $y=0 \Leftrightarrow 5^2+(-12)^2<14^2$
Jadi titik $(0,0)$ berada di dalam lingkaran, sehingga agar nilai x^2+y^2 maksimum maka lingkaran $x^2+y^2=r^2$ harus menyinggung lingkaran $(x+5)^2+(y-12)^2=14^2$.

Misalkan titik singgung tersebut adalah titik P, maka diperoleh:
Jarak titik $(-5,12)$ ke titik P adalah jari-jari lingkaran tersebut, yaitu 14.
Jarak titik $(-5,12)$ ke titik $(0,0)$ dengan menggunakan teorema Pythagoras adalah 13 .

Nah, karena titik P, $(-5,12),(0,0)$ adalah sebuah garis lurus, sehingga jarak jari-jari lingkaran yang berpusat di $(0,0)$ adalah 1.

Jadi, nilai minimum x^2+y^2 adalah $1^2=1$.

TRIK SUPERKILAT:
Dari teorema Pythagoras diperoleh jarak ke titik O adalah 13, sementara jari-jari lingkaran luar adalah 14. Berarti selisihnya adalah jari-jari maksimum lingkaran dalam yang menyinggung sisi lingkaran luar. Jadi nilai maksimum $14-13=1$.

Bagian kedua

A. Persamaan kuadrat
$x^2 - (2a+1)x + a(a-1) = 0$
mempunyai dua akar real $x_1 \leq -1$ dan $x_2 > 1$.

21. Apakah nilai dari diskriminan $D \geq 0$ dan $x_1 \cdot x_2 < 0$ perlu dan cukup untuk menentukan nilai a yang memenuhi persamaan dengan akar-akar tersebut? Mengapa?

Pembahasan:
Tidak, karena jika $D \geq 0$ berarti ada kemungkinan dua akar tersebut real dan kembar. Padahal kenyataannya nilai akar-akar persamaan kuadrat tersebut terpisah pada dua interval $x_1 \leq -1$ dimana nilai x_1 pasti negatif, sementara $x_2 > 1$ nilai x_2 pasti positif. Jelas diketahui bahwa tidak aka nada irisan yang tercipta antara bilangan positif dan negatif.
Untuk syarat $x_1 \cdot x_2 < 0$ juga kurang tepat, mengingat perkalian paling kecil yang tercipta adalah -1×1 $lebih\ dikit = -1$ $kurang\ dikit$.

22. Jika tidak, tuliskan kondisi (persyaratan) yang harus dimiliki agar nilai a dapat ditentukan untuk akar-akar tersebut? **Catatan:** Saudara tidak perlu menentukan nilai a.

Pembahasan:
Syarat yang harus dimiliki adalah:
$\left.\begin{matrix} x_1 \leq -1 \\ x_2 > 1 \Leftrightarrow 1 < x_2 \end{matrix}\right\}$ Jadi $x_1 \leq -1 < 1 < x_2$.

Sehingga daerah penyelesaian dari $x_1 \leq -1 < 1 < x_2$ adalah irisan dari:
$x_1 \leq -1 < x_2 \Leftrightarrow x_1 + 1 \leq 0 < x_2 + 1 \Leftrightarrow (x_1+1)(x_2+1) \leq 0$ .....(1)
$x_1 < 1 < x_2 \Leftrightarrow x_1 - 1 < 0 < x_2 - 1 \Leftrightarrow (x_1-1)(x_2-1) < 0$ .....(2)

Dan juga jangan lupa, karena persamaan kuadrat memiliki dua akar real berbeda, maka determinan harus positif, sehingga:
$D > 0 \Leftrightarrow \big(-(2a+1)\big)^2 - 4(1)\big(a(a-1)\big) > 0$ .....(3)

Sehingga daerah penyelesaiannya agar nilai a dapat ditentukan untuk akar-akar tersebut adalah irisan dari daerah penyelesaian (1), (2), dan (3).

B. Perhatikan persamaan:
$|x-1|-3|x+1|+|x-2|=a$
Untuk mencari nilai a agar persamaan itu memiliki penyelesaian dapat dilakukan dengan menggambar grafik
$y=f(x)=|x-1|-3|x+1|+|x-2|$.

23. Gambar sketsa grafik fungsi f!

Pembahasan:
$f(x)=|x-1|-3|x+1|+|x-2|$

Pertama kita hilangkan tanda mutlak pada $|x-1|$, sehingga $f(x)$ menjadi:
$$f(x)=\begin{cases}x-1-3|x+1|+|x-2|, & x-1\geq 0\\ -x+1-3|x+1|+|x-2|, & x-1<0\end{cases}$$

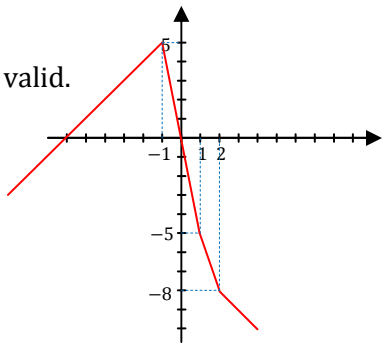
Selanjutnya kita hilangkan tanda mutlak pada $|x+1|$, sehingga $f(x)$ menjadi:
$$f(x)=\begin{cases}x-1-3(x+1)+|x-2|, & x-1\geq 0\ dan\ x+1\geq 0\\ x-1-3(-x-1)+|x-2|, & x-1\geq 0\ dan\ x+1<0\\ -x+1-3(x+1)+|x-2|, & x-1<0\ dan\ x+1\geq 0\\ -x+1-3(-x-1)+|x-2|, & x-1<0\ dan\ x+1<0\end{cases}$$

Selanjutnya kita hilangkan tanda mutlak pada $|x-2|$, sehingga $f(x)$ menjadi:
$$f(x)=\begin{cases}x-1-3(x+1)+(x-2), & x-1\geq 0\ dan\ x+1\geq 0\ dan\ x-2\geq 0\\ x-1-3(x+1)+(-x+2), & x-1\geq 0\ dan\ x+1\geq 0\ dan\ x-2<0\\ x-1-3(-x-1)+(x-2), & x-1\geq 0\ dan\ x+1<0\ dan\ x-2\geq 0\\ x-1-3(-x-1)+(-x+2), & x-1\geq 0\ dan\ x+1<0\ dan\ x-2<0\\ -x+1-3(x+1)+(x-2), & x-1<0\ dan\ x+1\geq 0\ dan\ x-2\geq 0\\ -x+1-3(x+1)+(-x+2), & x-1<0\ dan\ x+1\geq 0\ dan\ x-2<0\\ -x+1-3(-x-1)+(x-2), & x-1<0\ dan\ x+1<0\ dan\ x-2\geq 0\\ -x+1-3(-x-1)+(-x+2), & x-1<0\ dan\ x+1<0\ dan\ x-2<0\end{cases}$$

Sehingga dengan menyederhanakan fungsi $f(x)$ akan diperoleh:
$$f(x)=\begin{cases}-x-6, & x\geq 2\\ -3x-2, & 1\leq x<2\\ 5x, & x\geq 1\ dan\ x<-1\ dan\ x\geq 2\\ 3x-4, & x\geq 1\ dan\ x<-1\ dan\ x<2\\ -3x-4, & x<1\ dan\ x\geq -1\ dan\ x\geq 2\\ -5x, & -1\leq x<1\\ 3x-2, & x<1\ dan\ x<-1\ dan\ x\geq 2\\ x-6, & x<-1\end{cases}$$

Perhatikan untuk yang saya tandai merah adalah domain tidak valid.
Sehingga, fungsi $f(x)$ adalah:
$$f(x)=\begin{cases}-x-6, & untuk\ x\geq 2\\ -3x-2, & untuk\ 1\leq x<2\\ -5x-6, & untuk\ -1\leq x<1\\ x+6, & untuk\ x<-1\end{cases}$$

Untuk sketsa grafiknya bisa dilihat di sebelah kanan.



24. Dengan menggunakan sketsa grafik yang telah Saudara buat, tentukan nilai a agar persamaan itu memiliki paling sedikit satu penyelesaian untuk x.

Pembahasan:
Nilai a bisa dimaknai sebagai titik-titik potong keempat garis tersebut.
Sehingga dengan eliminasi dan substitusi diperoleh titik-titik potong berikut:
$-3x-2, -5x-6,$ dan $x+6$ berpotongan di $(-2,4)$. Sehingga $a=y=4$.
$-x-6$ dan $x+6$ berpotongan di $(-6,0)$. Sehingga $a=y=0$.
$-x-6$ dan $-3x-2$ berpotongan di $(2,-2)$. Sehingga $a=y=-2$.
$-x-6$ dan $-5x-6$ berpotongan di $(0,-6)$. Sehingga $a=y=0$.

C. Misalkan N adalah bilangan bulat positif, dan N^* menyatakan bilangan bulat yang diperoleh dari menjumlahkan bilangan N dengan semua angka-angkanya. Sebagai contoh: $5^* = 10$, $86^* = 100$, $977^* = 1000$, $9968^* = 10000$. Untuk menentukan bilangan bulat N sehingga $N^* = 1.000.000$, perhatikan proses pencarian berikut ini:
   i. N memiliki paling banyak enam angka, sehingga jumlahnya paling besar 54.
   ii. Misalkan $N = 999.9ab$ dengan a dan b adalah dua angka terakhir, dan $N \geq 999.946$
   iii. $1.000.000 = N^* = (999.900 + 10a + b) + (36 + a + b)$ atau $11a + 2b = 64$.
   iv. Kita memperoleh $46 \leq 11a \leq 64$ atau $46/11 \leq a \leq 64/11$.
   v. Nilai $a = 5$ dan $b = \frac{9}{2}$

25. Tuliskan pernyataan yang salah atau buat suatu kesimpulan dari proses pencarian bilangan bulat N di atas!

Pembahasan:

Pernyataan yang salah berwarna merah:

   i. N memiliki paling banyak enam angka, sehingga jumlahnya paling besar 54.
   ii. Misalkan $N = 999.9ab$ dengan a dan b adalah dua angka terakhir, dan $N \geq 999.946$
   iii. $1.000.000 = N^* = (999.900 + 10a + b) + (36 + a + b)$ atau $11a + 2b = 64$.
   iv. Kita memperoleh $46 \leq 11a \leq 64$ atau $46/11 \leq a \leq 64/11$.
   v. Nilai $a = 5$ dan $b = \frac{9}{2}$

Solusi bulat untuk persamaan linear dua variabel tersebut adalah dengan menggunakan teorema Diophantine.

Setelah menyelesaikan teorema Diophantine pada persamaan tersebut, ternyata tidak ditemukan hasil yang memenuhi, karena nilai bulat yang memenuhi adalah, $a = 4$, dan $b = 10$. Ingat a, b adalah bilangan satuan mulai 0 sampai 9.

Sehingga kesimpulannya, untuk $N^* = 1.000.000$ tidak akan ditemukan solusinya.

Pembahasan soal OSN Guru Matematika SMA 2011 ini sangat mungkin jauh dari sempurna mengingat keterbatasan penulis. Saran, koreksi dan tanggapan sangat diharapkan demi perbaikan pembahasan soal OSN ini.

Untuk download pembahasan soal SNMPTN, UNAS, Olimpiade, dan rangkuman materi pelajaran serta soal-soal ujian yang lainnya, silahkan kunjungi http://pak-anang.blogspot.com.

Terima kasih.

Pak Anang.