

Pembahasan Soal
SNMPTN 2010

SELEKSI NASIONAL MASUK PERGURUAN TINGGI NEGERI

Disertai TRIK SUPERKILAT dan LOGIKA PRAKTIS



Matematika IPA

Disusun Oleh :
Pak Anang

Kumpulan SMART SOLUTION dan TRIK SUPERKILAT

Pembahasan Soal SNMPTN 2010

Matematika IPA Kode Soal 546

By Pak Anang (<http://pak-anang.blogspot.com>)

1. Diketahui a dan b adalah dua bilangan bulat positif yang memenuhi $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{13}{36}$. Nilai $ab(a + b)$ adalah ...

- ~~A.~~ 468
- B. 448
- C. 368
- D. 49
- E. 36

Penyelesaian:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{13}{36}$$

$$\Rightarrow \frac{a + b}{ab} = \frac{13}{36}$$

$$\Rightarrow a + b = 13 \text{ dan } ab = 36$$

$$\Leftrightarrow ab(a + b) = 36 \times 13 = 468$$

2. Diketahui $x < -3$. Bentuk yang setara dengan $|1 - |1 + 3x||$ adalah

- ~~A.~~ $-2 - 3x$
- B. $3x$
- C. $-2 + 3x$
- D. $-3x$
- E. $2 - 3x$

Penyelesaian:

Ingat:

Untuk fungsi mutlak:

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{untuk } x \geq 0 \\ -x, & \text{untuk } x < 0 \end{cases}$$

$$|1 + 3x| = \begin{cases} 1 + 3x, & \text{untuk } x \geq -\frac{1}{3} \\ -1 - 3x, & \text{untuk } x < -\frac{1}{3} \end{cases}$$

Jadi, untuk $x < -3$ dimana berada pada daerah $x < -\frac{1}{3}$, maka fungsi harga mutlak bernilai fungsi negatifnya harga mutlak.

$$\Rightarrow |1 + 3x| = -1 - 3x$$

Sehingga,

$$\begin{aligned} |1 - |1 + 3x|| &= |1 - (-1 - 3x)| \\ \Rightarrow &= |1 + 1 + 3x| \\ \Leftrightarrow &= |2 + 3x| \end{aligned}$$

Ternyata kita masih bertemu lagi dengan fungsi bernilai mutlak, $|2 + 3x|$.

$$|2 + 3x| = \begin{cases} 2 + 3x, & \text{untuk } x \geq -\frac{2}{3} \\ -2 - 3x, & \text{untuk } x < -\frac{2}{3} \end{cases}$$

Jadi, untuk $x < -3$ dimana berada pada daerah $x < -\frac{2}{3}$, maka fungsi harga mutlak bernilai fungsi negatifnya harga mutlak.

$$\Rightarrow |2 + 3x| = -2 - 3x$$

Sehingga jawaban yang tepat adalah A.

TRIK SUPERKILAT:

Coba saja substitusikan salah satu nilai yang memenuhi $x < -3$, misalkan ambil nilai $x = -4$

$$\begin{aligned} x = -4 &\Rightarrow |1 - |1 + 3(-4)|| \\ &\Leftrightarrow |1 - |1 - 12|| \\ &\Leftrightarrow |1 - |-11|| \\ &\Leftrightarrow |1 - 11| \\ &\Leftrightarrow |-10| \\ &\Leftrightarrow 10 \end{aligned}$$

Maka cari di pilihan jawaban jika disubstitusikan $x = -4$ menghasilkan nilai 10.

Ternyata hanya dipenuhi oleh jawaban A.
Selesai!

3. Suku banyak yang akarnya $\sqrt{2} - \sqrt{5}$ adalah

- A. $x^4 + 14x^2 + 9$
- ~~B. $x^4 - 14x^2 + 9$~~
- C. $x^4 - 14x^2 - 9$
- D. $x^4 + 14x^2 + 89$
- E. $x^4 - 14x^2 + 89$

Pembahasan:

$$x = \sqrt{2} - \sqrt{5}$$

Karena suku banyak mengandung variabel x^2 dan x^4 , maka tentukan nilai x^2 dan x^4 :

$$x^2 = (\sqrt{2} - \sqrt{5})^2 = (\sqrt{2} - \sqrt{5})(\sqrt{2} - \sqrt{5}) = 2 - \sqrt{10} - \sqrt{10} + 5 = 7 - 2\sqrt{10}$$

$$x^4 = (7 - 2\sqrt{10})^2 = (7 - 2\sqrt{10})(7 - 2\sqrt{10}) = 49 - 14\sqrt{10} - 14\sqrt{10} + 40 = 89 - 28\sqrt{10}$$

Jadi,

$$x^4 + x^2 = (89 - 28\sqrt{10}) + (7 - 2\sqrt{10})$$

$$\Rightarrow x^4 + x^2 = 96 - 30\sqrt{10}$$

$$\Leftrightarrow x^4 + x^2 = 15(7 - 2\sqrt{10}) - 9 \text{ (ingat } x^2 = 7 - 2\sqrt{10}\text{)}$$

$$\Leftrightarrow x^4 + x^2 = 15x^2 - 9$$

$$\Leftrightarrow x^4 + x^2 - 15x^2 + 9 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^4 - 14x^2 + 9 = 0$$

4. Diketahui \vec{a} , \vec{b} , dan \vec{c} vektor dalam dimensi-3. Jika $\vec{a} \perp \vec{b}$ dan $\vec{a} \perp (\vec{b} + 2\vec{c})$, maka $\vec{a} \cdot (2\vec{b} - \vec{c})$ adalah

....

- A. 4
- B. 2
- C. 1
- ~~D. 0~~
- E. -1

Penyelesaian:

Ingat:

Jika \vec{a} dan \vec{b} saling tegak lurus maka $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

Dan pada perkalian titik berlaku: $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$

Dari soal diketahui bahwa:

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

$$\vec{a} \perp (\vec{b} + 2\vec{c}) \Rightarrow \vec{a} \cdot (\vec{b} + 2\vec{c}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot 2\vec{c} = 0 \text{ (ingat } \vec{a} \cdot \vec{b} = 0\text{)}$$

$$\Leftrightarrow 0 + 2(\vec{a} \cdot \vec{c}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{c} = 0$$

Maka nilai dari $\vec{a} \cdot (2\vec{b} - \vec{c})$ adalah:

$$\vec{a} \cdot (2\vec{b} - \vec{c}) = \vec{a} \cdot 2\vec{b} - \vec{a} \cdot \vec{c}$$

$$= 2(\vec{a} \cdot \vec{b}) - \vec{a} \cdot \vec{c}$$

$$= 2(0) - 0$$

$$= 0$$

5. Jumlah 50 suku pertama deret $\log 5 + \log 55 + \log 605 + \log 6655 + \dots$ adalah
- A. $\log(55^{1150})$
 B. $\log(55^{1150})$
 C. $\log(5^{25}11^{1225})$
~~D. $\log(25^{25}11^{1225})$~~
 E. $1150 \log(5)$

Penyelesaian:

Ingat:

Deret aritmetika:

$$S_n = \frac{n}{2}(2a + (n - 1)b)$$

Logaritma:

$$\log(a \times b) = \log a + \log b$$

$$a \log b = \log b^a$$

Pangkat:

$$(a^m)^n = a^{m \times n}$$

Dari deret tersebut kita bisa menentukan suku-suku barisan sebagai berikut:

U_1	U_2	U_3	U_4
$\log 5$	$\log 55$	$\log 605$	$\log 6655$

Perhatikan, pertama kita harus menentukan termasuk dalam barisan apakah barisan tersebut?

Barisan aritmetika yang mempunyai selisih tetap, atau barisan geometri yang memiliki rasio tetap?

Oke, mari kita lihat dengan seksama bahwa,

$$U_1 = \log 5$$

$$U_2 = \log 55 = \log(5 \times 11) = \log 5 + \log 11$$

$$U_3 = \log 605 = \log(55 \times 11) = \log 55 + \log 11$$

$$U_4 = \log 6655 = \log(605 \times 11) = \log 605 + \log 11$$

Jadi dari barisan tersebut kita bisa menyimpulkan bahwa barisan tersebut memenuhi ciri-ciri barisan aritmetika yang memiliki selisih tetap.

$$a = \log 5$$

$$b = \log 11$$

Sehingga jumlah 50 suku pertama deret aritmetika tersebut adalah:

$$S_n = \frac{n}{2}(2a + (n - 1)b)$$

$$n = 50 \Rightarrow S_{50} = \frac{50}{2}(2 \log 5 + (50 - 1) \log 11) \text{ (ingat } a \log b = \log b^a)$$

$$\Leftrightarrow = 25(\log 5^2 + \log 11^{49})$$

$$\Leftrightarrow = 25 \log 25 + 25 \log 11^{49} \text{ (ingat } a \log b = \log b^a)$$

$$\Leftrightarrow = \log 25^{25} + \log(11^{49})^{25} \text{ (ingat } (a^m)^n = a^{m \times n})$$

$$\Leftrightarrow = \log 25^{25} + \log 11^{1225} \text{ (ingat } \log a + \log b = \log(a \times b))$$

$$\Leftrightarrow = \log(25^{25} 11^{1225})$$

6. Diketahui barisan dengan suku pertama $u_1 = 15$ dan memenuhi $u_n - u_{n-1} = 2n + 3, n \geq 2$. Nilai $u_{50} + u_2$ adalah
- A. 2688
 B. 2710
~~C. 2732~~
 D. 2755
 E. 2762

Penyelesaian:

Ingat:

Barisan aritmetika adalah barisan yang memiliki selisih tetap.

Sedangkan kadang kita menemui barisan yang bukan barisan geometri tetapi selisihnya tidak tetap. Nah mungkin kita sedang menemui barisan aritmetika bertingkat.

Apa itu barisan aritmetika bertingkat? Barisan aritmetika bertingkat adalah barisan bilangan yang tidak memiliki beda tetap, tetapi apabila beda itu dijadikan barisan bilangan, demikian seterusnya maka pada suatu saat akan ditemukan beda yang tetap.

$$U_n = \frac{a}{0!} + \frac{(n-1)b}{1!} + \frac{(n-2)(n-1)c}{2!} + \frac{(n-3)(n-2)(n-1)d}{3!} + \dots \text{dst dst dst}$$

Barisan aritmetika bertingkat n , artinya beda tetap didapatkan pada tingkat ke- n .

$$u_1 = 15$$

$$u_n - u_{n-1} = 2n + 3; n \geq 2$$

$$n = 2 \Rightarrow u_2 - u_1 = 2(2) + 3$$

$$\Leftrightarrow u_2 - 15 = 7$$

$$\Leftrightarrow u_2 = 7 + 15$$

$$\Leftrightarrow u_2 = 22$$

$$n = 3 \Rightarrow u_3 - u_2 = 2(3) + 3$$

$$\Leftrightarrow u_3 - 22 = 9$$

$$\Leftrightarrow u_3 = 9 + 22$$

$$\Leftrightarrow u_3 = 31$$

$$n = 4 \Rightarrow u_4 - u_3 = 2(4) + 3$$

$$\Leftrightarrow u_4 - 31 = 11$$

$$\Leftrightarrow u_4 = 11 + 31$$

$$\Leftrightarrow u_4 = 42$$

Terlihat bahwa beda tetap didapatkan pada tingkat ke-2. Jadi barisan tersebut merupakan barisan aritmetika tingkat 2.

Rumus suku ke- n barisan aritmetika tingkat 2:

$$U_n = \frac{a}{0!} + \frac{(n-1)b}{1!} + \frac{(n-2)(n-1)c}{2!}$$

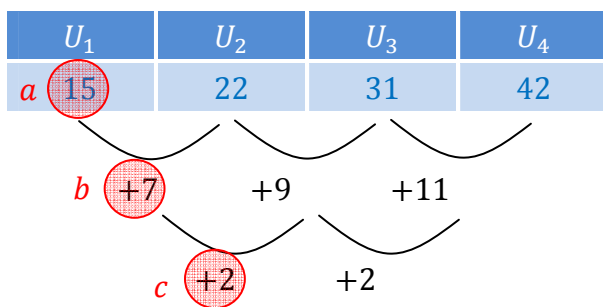
dengan $a = 15, b = 7$, dan $c = 2$.

Jadi:

$$\begin{aligned} U_n &= \frac{15}{0!} + \frac{(n-1) \cdot 7}{1!} + \frac{(n-2)(n-1) \cdot 2}{2!} \\ &= 15 + 7n - 7 + n^2 - 3n + 2 \\ &= n^2 + 4n + 10 \end{aligned}$$

Sehingga:

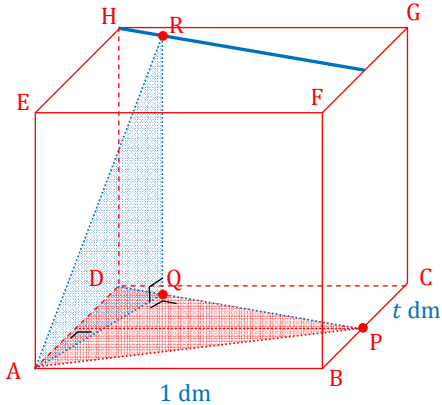
$$\begin{aligned} U_{50} + U_2 &= ((50)^2 + 4(50) + 10) + 22 \\ &= (2500 + 200 + 10) + 22 \\ &= 2710 + 22 \\ &= 2732 \end{aligned}$$



7. Kubus $ABCD.EFGH$ panjang sisinya 1 dm. Titik P pada BC dengan $|PC| = t$ dm. Titik Q adalah proyeksi A pada DP dan R adalah proyeksi Q pada bidang $EFGH$. Luas segitiga AQR adalah dm^2

- ~~A.~~ $\frac{1}{2\sqrt{t^2+1}}$
 B. $\frac{1}{\sqrt{t^2+1}}$
 C. $2\sqrt{t^2+1}$
 D. $\frac{\sqrt{t^2-1}}{1}$
 E. $1+t^2$

Penyelesaian:



TRIK SUPERKILAT:

Misal $t = 1$ dm berarti luas daerah diarsir adalah seperempat dari luas bidang diagonal.

Luas bidang diagonal adalah diagonal sisi kali panjang sisi.

$$L_{\text{bidang diagonal}} = \sqrt{2} \cdot 1 = \sqrt{2}$$

Jadi luas daerah adalah $\frac{1}{4}\sqrt{2}$

Cek di jawaban jika disubstitusi $t = 1$, maka

- A. $\frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{4}\sqrt{2}$. Horeeee ini jawabannya...
 B. $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$. Salah!
 C. $2\sqrt{2}$. Salah!
 D. $\frac{0}{1} = 0$. Salah!
 E. $1 + 1 = 2$. Salah...

Gampang kan?

Perhatikan segitiga PCD , berlaku aturan Pythagoras sebagai berikut:

$$DP^2 = PC^2 + CD^2 \Rightarrow DP^2 = t^2 + 1^2 \\ \Leftrightarrow DP = \sqrt{t^2 + 1}$$

Perhatikan segitiga APD . Misal P' adalah proyeksi dari P pada garis AD

Luas segitiga APD bisa dicari menggunakan 2 cara.

$$\text{Pertama, } L_{\Delta APD} = \frac{1}{2} \times PP' \times AD$$

$$\text{Kedua, } L_{\Delta APD} = \frac{1}{2} \times AQ \times DP$$

Sehingga:

$$\frac{1}{2} \times PP' \times AD = \frac{1}{2} \times AQ \times DP$$

$$\Rightarrow PP' \times AD = AQ \times DP$$

$$\Leftrightarrow AQ = \frac{PP' \times AD}{DP}$$

$$\Leftrightarrow AQ = \frac{1 \times 1}{\sqrt{t^2 + 1}}$$

$$\Leftrightarrow AQ = \frac{1}{\sqrt{t^2 + 1}}$$

Jadi luas segitiga AQR adalah:

$$L_{\Delta AQR} = \frac{1}{2} \times AQ \times QR \\ = \frac{1}{2} \times \frac{1}{\sqrt{t^2 + 1}} \times 1 \\ = \frac{1}{2\sqrt{t^2 + 1}} \text{ dm}^2$$

8. Manakah pernyataan berikut yang benar?

- A. Jika $\sin x = \sin y$, maka $x = y$
- B. Jika $\cos x = \cos y$, maka $x = y$
- C. Jika $x^2 = 2 \log x$, untuk semua $x \neq 0$
- ~~D.~~ Jika $\log x = \log y$, maka $x = y$
- E. $\sqrt{x^2} = x$, untuk semua x

Penyelesaian:

Penyelesaian untuk soal ini harus dianalisis setiap pilihan jawaban.

Analisis jawaban:

A. Jika $\sin x = \sin y$, maka $x = y$.

Ini kurang tepat karena tidak selalu $x = y$, tetapi ada nilai lain selain y yang memenuhi persamaan tersebut. Ingat lagi konsep trigonometri antar kuadran.

$$\begin{aligned}\sin x = \sin y &\Rightarrow x = y + k \cdot 360^\circ \\ &\Rightarrow x = (180^\circ - y) + k \cdot 360^\circ\end{aligned}$$

Jadi jawaban A salah.

B. Jika $\cos x = \cos y$, maka $x = y$.

Ini kurang tepat karena tidak selalu $x = y$, tetapi ada nilai lain selain y yang memenuhi persamaan tersebut. Ingat lagi konsep trigonometri antar kuadran.

$$\begin{aligned}\cos x = \cos y &\Rightarrow x = y + k \cdot 360^\circ \\ &\Rightarrow x = (360^\circ - y) + k \cdot 360^\circ\end{aligned}$$

Jadi jawaban B juga salah.

C. Jika $x^2 = 2 \log x$, untuk semua $x \neq 0$.

Ingat syarat logaritma, jika ${}^a \log f(x) = p$, maka $f(x) = a^p$, syarat $f(x) > 0$.

Jadi untuk $x^2 = 2 \log x$, syarat $x > 0$. Sehingga tidak semua $x \neq 0$ yang bisa memenuhi persamaan tersebut, karena jelas tidak akan memenuhi untuk bilangan $x < 0$.

Jadi jawaban C juga salah.

D. Jika $\log x = \log y$, maka $x = y$. Jelas ini sesuai dengan sifat persamaan logaritma, dengan tambahan syarat $x, y > 0$.

Jadi jawaban D adalah jawaban yang tepat.

E. $\sqrt{x^2} = x$, untuk semua x .

$$\text{Ingat definisi akar, } \sqrt{x^2} = |x| = \pm x = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

Jadi jawaban E juga salah.

9. Nilai $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4x}}{\sqrt{\sin x}}$ adalah

- ~~A.~~ $\sqrt{2}$
- B. 1
- C. $\frac{1}{2}$
- D. $\frac{1}{4}$
- E. 0

Penyelesaian:

Ingat:

Sifat akar:

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$$

Sifat limit:

$$\lim_{x \rightarrow a} \sqrt{f(x)} = \sqrt{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax}{\sin ax} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{ax} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan ax}{ax} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax}{\tan ax} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} c = c$$

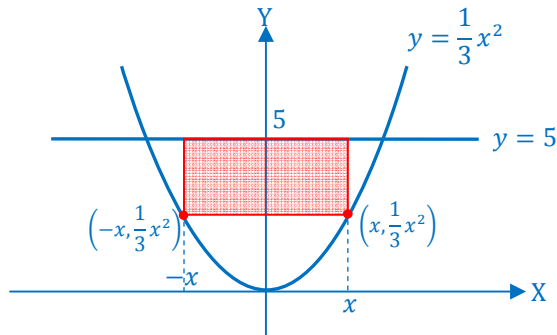
$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4x}}{\sqrt{\sin 2x}} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4x}}{\sqrt{\sin 2x}} \left(\text{ingat } \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}} \right) \\ \Leftrightarrow &= \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{\frac{4x}{\sin 2x}} \left(\text{ingat } \lim_{x \rightarrow a} \sqrt{f(x)} = \sqrt{\lim_{x \rightarrow a} f(x)} \right) \\ \Leftrightarrow &= \sqrt{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x}{\sin 2x}} \left(\text{ingat buat limit menjadi ke bentuk } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax}{\sin ax} = 1 \right) \\ \Leftrightarrow &= \sqrt{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x}{\sin 2x} \cdot \frac{2x}{2x}} \\ \Leftrightarrow &= \sqrt{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{\sin 2x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x}{2x}} \left(\text{ingat } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax}{\sin ax} = 1 \right) \\ \Leftrightarrow &= \sqrt{1 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} 2} \left(\text{ingat } \lim_{x \rightarrow 0} c = c \right) \\ \Leftrightarrow &= \sqrt{1 \cdot 2} \\ \Leftrightarrow &= \sqrt{2} \end{aligned}$$

10. Luas daerah persegi panjang terbesar yang dapat dibuat dalam daerah yang dibatasi kurva $y = \frac{1}{3}x^2$ dan $y = 5$ adalah

- A. $\frac{16}{3}\sqrt{5}$
- B. $\frac{17}{3}\sqrt{5}$
- C. $6\sqrt{5}$
- D. $\frac{19}{3}\sqrt{5}$
- ~~E. $\frac{20}{3}\sqrt{5}$~~

Penyelesaian:

Mari kita sketsa dulu grafiknya:



Perhatikan daerah berwarna merah. Daerah tersebut adalah daerah persegi panjang yang dapat dibuat di dalam daerah yang dibatasi kurva $y = \frac{1}{3}x^2$ dan $y = 5$.

Panjang persegi panjang tersebut adalah jarak dari x ke $-x$ yaitu $x - (-x) = 2x$.

Lebar persegi panjang tersebut adalah jarak dari 5 ke $\frac{1}{3}x^2$ yaitu $5 - \frac{1}{3}x^2$.

Luas daerah persegi panjang tersebut adalah:

$$L = p \times \ell = 2x \left(5 - \frac{1}{3}x^2 \right) = 10x - \frac{2}{3}x^3$$

$$L = 10x - \frac{2}{3}x^3 \Rightarrow L' = 10 - 2x^2$$

Luas maksimum akan dipenuhi untuk $L' = 0$

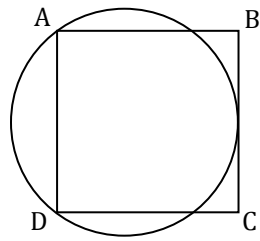
$$\begin{aligned} 10 - 2x^2 &= 0 \\ \Rightarrow 2x^2 &= 10 \\ \Leftrightarrow x^2 &= 5 \\ \Leftrightarrow x &= \sqrt{5} \end{aligned}$$

Jadi luas maksimum persegi panjang tersebut adalah:

$$\begin{aligned} L &= 2(\sqrt{5}) \left(5 - \frac{1}{3}(\sqrt{5})^2 \right) \\ &= 2\sqrt{5} \left(\frac{15}{3} - \frac{5}{3} \right) \\ &= 2\sqrt{5} \left(\frac{10}{3} \right) \\ &= \frac{20}{3}\sqrt{5} \end{aligned}$$

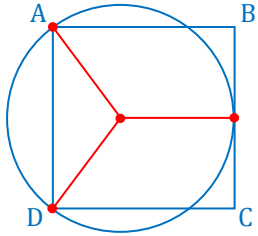
11. Perhatikan gambar berikut! Persegi $ABCD$ dengan panjang sisi 10 cm. Lingkaran melalui titik A dan D dan menyinggung sisi BC . Luas lingkaran tersebut adalah cm^2

- A. 10π
- B. 20π
- ~~C. $\frac{625}{16}\pi$~~
- D. $\frac{325}{8}\pi$
- E. $\frac{85}{2}\pi$



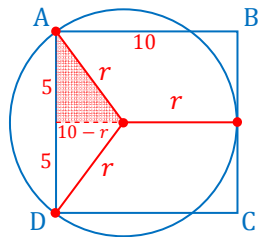
Penyelesaian:

Mari kita lihat titik singgung persegi $ABCD$ terhadap lingkaran. Juga lihat titik pusat lingkaran.

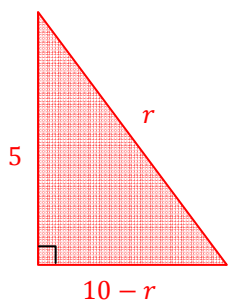


Maka garis merah tersebut adalah jari-jari lingkaran.

Nah, sekarang mari kita lihat ukuran persegi panjang dan misalkan jari-jari lingkaran adalah r .



Perhatikan segitiga berwarna merah. Pada segitiga tersebut berlaku aturan Pythagoras:



$$\begin{aligned}
 (10 - r)^2 + 5^2 &= r^2 \\
 \Rightarrow 100 - 20r + r^2 + 25 &= r^2 \\
 \Leftrightarrow 125 - 20r &= 0 \\
 \Leftrightarrow 20r &= 125 \\
 \Leftrightarrow r &= \frac{125}{20} \\
 \Leftrightarrow r &= \frac{25}{4}
 \end{aligned}$$

Jadi luas lingkaran dengan jari-jari $r = \frac{25}{4}$ adalah:

$$L = \pi r^2 = \pi \left(\frac{25}{4}\right)^2 = \frac{625}{16}\pi$$

12. Jika nilai maksimum $f(x) = x + \sqrt{2p - 3x}$ adalah $\frac{5}{4}$, maka nilai p adalah

- A. 1
- B. $\frac{2}{3}$
- ~~C. $\frac{3}{4}$~~
- D. $\frac{3}{2}$
- E. 2

Penyelesaian:

Ingat:

Sifat turunan:

$$y = x^n \Rightarrow y' = nx^{n-1}$$

Sifat turunan substitusi:

$$y = (f(x))^n \Rightarrow y' = n \cdot (f(x))^{n-1} \cdot f'(x)$$

$$f(x) = x + \sqrt{2p - 3x} = x + (2p - 3x)^{\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow f'(x) = 1 + \frac{1}{2}(2p - 3x)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-3) = 1 - \frac{3}{2} \frac{1}{(2p - 3x)^{\frac{1}{2}}} = 1 - \frac{3}{2\sqrt{2p - 3x}}$$

Nilai $f(x)$ akan maksimum untuk $f'(x) = 0$.

$$f'(x) = 0$$

$$\Rightarrow 1 - \frac{3}{2\sqrt{2p - 3x}} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{2\sqrt{2p - 3x}} = 1$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{2p - 3x} = 3$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2p - 3x} = \frac{3}{2} \text{ (kuadratkan kedua ruas)}$$

$$\Leftrightarrow 2p - 3x = \frac{9}{4}$$

$$\Leftrightarrow 3x = 2p - \frac{9}{4} \text{ (bagi kedua ruas dengan 3)}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{2}{3}p - \frac{3}{4}$$

Maka nilai p adalah:

$$f\left(\frac{2}{3}p - \frac{3}{4}\right) = \frac{5}{4} \Rightarrow \left(\frac{2}{3}p - \frac{3}{4}\right) + \sqrt{2p - 3\left(\frac{2}{3}p - \frac{3}{4}\right)} = \frac{5}{4}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{3}p - \frac{3}{4} + \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{5}{4}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{3}p - \frac{3}{4} + \frac{3}{2} = \frac{5}{4}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{3}p = \frac{5}{4} + \frac{3}{4} - \frac{6}{4}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{3}p = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow p = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2}$$

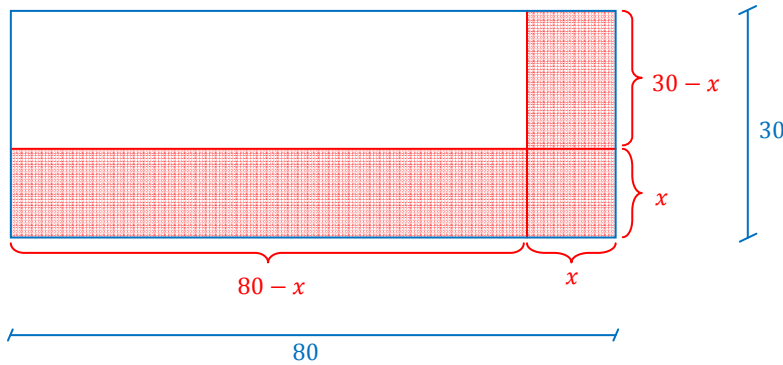
$$\Leftrightarrow p = \frac{3}{4}$$

13. Diketahui selembar seng dengan panjang 80 cm dan lebar 30 cm. Jika panjang dan lebarnya dipotong dengan ukuran sama sehingga luas seng menjadi 275 cm^2 , maka panjang dan lebarnya harus dipotong cm
- A. 30
~~B. 25~~
 C. 24
 D. 20
 E. 15

TRIK SUPERKILAT LOGIKA PRAKTIS:

Bilangan $(80 - x)(30 - x) = 275$
 Bilangan dengan angka terakhir 5, hanya dihasilkan dari perkalian angka terakhir 5 dan 5.
 Jadi angka terakhir x juga harus 5. Sehingga jawaban tinggal B. 25 dan E. 15 saja.....
 Dengan menggunakan cara coba-coba, mensubstitusikan x , maka jawaban yang tepat ternyata hanya B saja! $x = 25 \Rightarrow 55 \times 5 = 275$!!

Penyelesaian:



Perhatikan daerah diarsir berwarna merah. Daerah tersebut adalah daerah yang harus dipotong. Luas daerah yang tidak diarsir adalah 275 cm^2 .

Sehingga,

$$\begin{aligned}
 L = 275 &\Rightarrow (80 - x)(30 - x) = 275 \\
 &\Leftrightarrow 2400 - 110x + x^2 = 275 \\
 &\Leftrightarrow x^2 - 110x + 2125 = 0 \\
 &\Leftrightarrow (x - 25)(x - 85) = 0 \\
 &\Leftrightarrow x - 25 = 0 \text{ atau } x - 85 = 0 \\
 &\Leftrightarrow x = 25 \qquad \qquad x = 85
 \end{aligned}$$

Ada dua nilai x yaitu 85 (tidak mungkin karena lebarnya hanya 30) dan 25.

Jadi seng tersebut harus dipotong panjang dan lebarnya sepanjang 25 cm, supaya luas seng yang tersisa sebesar 275 cm^2 .

14. Sejumlah siswa terdiri atas 5 putra dan 5 putri membentuk panitia yang terdiri atas 4 orang siswa. Peluang panitia tersebut memuat paling banyak 2 siswa putri adalah

- A. $\frac{16}{21}$
- B. $\frac{11}{37}$
- C. $\frac{42}{23}$
- ~~D. $\frac{31}{42}$~~
- E. $\frac{35}{42}$

Penyelesaian:

Ingat:

$${}_n C_r = \frac{n!}{(n-r)! r!}$$

A = Banyaknya cara membentuk panitia beranggotakan 4 orang, paling banyak 2 siswi putri:

$$0 \text{ orang perempuan} + 4 \text{ orang laki-laki} = {}_5 C_0 \cdot {}_5 C_4 = \frac{5!}{(5-0)! 0!} \cdot \frac{5!}{(5-4)! 4!} = 1 \cdot 5 = 5$$

$$1 \text{ orang perempuan} + 3 \text{ orang laki-laki} = {}_5 C_1 \cdot {}_5 C_3 = \frac{5!}{(5-1)! 1!} \cdot \frac{5!}{(5-3)! 3!} = 5 \cdot 10 = 50$$

$$2 \text{ orang perempuan} + 2 \text{ orang laki-laki} = {}_5 C_2 \cdot {}_5 C_2 = \frac{5!}{(5-2)! 2!} \cdot \frac{5!}{(5-2)! 2!} = 10 \cdot 10 = 100$$

Jadi,

$$n(A) = 5 + 50 + 100 = 155$$

S = Banyaknya cara membentuk panitia beranggotakan 4 orang dari 10 orang adalah:

$$n(S) = {}_{10} C_4 = \frac{10!}{(10-4)! 4!} = 210$$

Sehingga peluang membentuk panitia adalah:

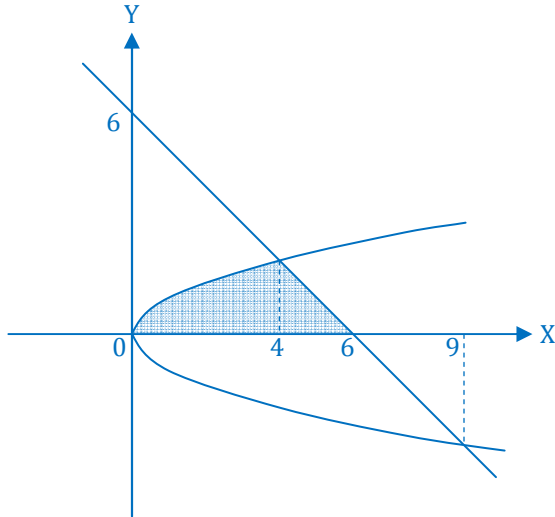
$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{155}{210} = \frac{31}{42}$$

15. Integral yang menyatakan luas daerah yang dibatasi oleh kurva $y = \sqrt{x}$, $x + y - 6 = 0$, dan sumbu X adalah

- A. $\int_0^6 \sqrt{x} dx + \int_6^9 (x - 6) dx$
- B. $\int_0^4 \sqrt{x} dx - \int_4^9 (x - 6) dx$
- C. $\int_0^4 \sqrt{x} dx + \int_4^9 (x - 6) dx$
- ~~D. $\int_0^4 \sqrt{x} dx - \int_4^6 (x - 6) dx$~~
- E. $\int_0^4 \sqrt{x} dx + \int_4^6 (x - 6) dx$

Penyelesaian:

Mari kita sketsa dulu grafiknya.



Perpotongan kurva $y = \sqrt{x}$ dan $y = 6 - x$

$$\sqrt{x} = 6 - x \text{ (kuadratkan kedua ruas)}$$

$$\Rightarrow x = 36 - 12x + x^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 13x + 36 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 4)(x - 9) = 0$$

$$\Leftrightarrow x - 4 = 0 \text{ atau } x - 9 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 4 \quad x = 9$$

Jadi titik potong kurva dan garis tersebut adalah di $x = 4$ dan $x = 9$.

Perhatikan daerah yang diarsir, daerah tersebut adalah daerah yang dibatasi oleh kurva $y = \sqrt{x}$, garis $y = 6 - x$ dan sumbu X.

Jadi integral yang menyatakan luas daerah arsir tersebut adalah:

$$L = \int_0^4 \sqrt{x} dx + \int_4^6 (6 - x) dx$$

Lho kok di pilihan jawaban A, B, C, D, maupun E nggak ada? Yang ada bentuknya adalah $(x - 6)$.

Perhatikan yang ditandai dengan warna merah pada integral luas diatas.

Ingat: $\int_a^b -f(x) dx = - \int_a^b f(x) dx$

Sehingga, integral luas bisa diubah menjadi:

$$L = \int_0^4 \sqrt{x} dx + \int_4^6 (6 - x) dx = \int_0^4 \sqrt{x} dx - \int_4^6 (x - 6) dx$$

Untuk download rangkuman materi, kumpulan SMART SOLUTION dan TRIK SUPERKILAT dalam menghadapi SNMPTN serta kumpulan pembahasan soal SNMPTN yang lainnya jangan lupa untuk selalu mengunjungi <http://pak-anang.blogspot.com>.

Terimakasih,

Pak Anang.