Penerapan Matrik pada Ekonomi

Dosen : Deden Rizal Riadi,SE.ME

Matriks

Matriks adalah susunan bilangan-bilangan yang terdiri atas baris-baris dan kolom-kolom.

Masing-masing bilangan dalam matriks disebut entri atau elemen. Ordo (ukuran) matriks adalah jumlah baris kali jumlah kolom.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

baris

kolom

Banyaknya baris (m) dan kolom (n) menentukan dimensi matrik (m x n) , yang dibaca *m* kali *n*

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

A adalah matrik 3 x 3 ,
B adalah matrik 2 x 3 ,
C adalah matrik 3 x 1

A' adalah transpose matrik A ,
C' adalah matrik C

$$A' = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix} \qquad C' = \begin{bmatrix} 7 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

PERANAN MATRIKS

Matriks memungkinkan :

- Menyatakan suatu sistem persamaan yang rumit dalam suatu cara yang ringkas dan sederhana
- Memberikan cara yang cepat untuk menentukan apakah suatu persamaan terdapat pemecahan sebelum dicoba
- Memberikan sarana penyelesaian sistem persamaan

Contoh :
Sebuah perusahaan dengan beberapa saluran distribusi dan menual beberapa jenis produk yang berbeda, matrik memberikan cara yang ringkas untuk mengendalikan persediaan

Produk

$$
\begin{array}{c c}
\textbf{Saluran Dist} & \begin{array}{cccc} \mathbf{A} & \mathbf{B} & \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{array} \\
\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} & \begin{bmatrix} 120 & 110 & 95 & 150 \\ 180 & 180 & 205 & 125 \\ 175 & 190 & 155 & 90 \\ 140 & 175 & 180 & 140 \end{bmatrix}
\end{array}
$$

KAIDAH DALAM MATRIKS

PENJUMLAHAN DAN PENGURANGAN MATRIK

- Syaratnya kedua matrik yang akan dijumlah (dikurangkan) harus berdimensi sama
- Elemen dari matrik satu ditambahkan (dikurangkan) langsung dengan matrik lainnya. a_{11} dalam matrik A ditambahkan (dikurangkan) dengan b_{11} dalam matrik B, a_{12} ke b_{12} dan seterusnya

$$A = \begin{bmatrix} 8 & 9 & 7 \\ 3 & 6 & 2 \\ 4 & 5 & 10 \end{bmatrix} \qquad A + B = \begin{bmatrix} 8+1 & 9+3 & 7+6 \\ 3+5 & 6+2 & 2+4 \\ 4+7 & 5+9 & 10+2 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 5 & 2 & 4 \\ 7 & 9 & 2 \end{bmatrix} \qquad = \begin{bmatrix} 9 & 12 & 13 \\ 8 & 8 & 6 \\ 11 & 14 & 12 \end{bmatrix}$$

PERKALIAN MATRIK

Definisi:

Jika A = [a_{ij}] berukuran m x r , dan B = [b_{ij}] berukuran r x n, maka matriks hasil kali A dan B, yaitu C = AB mempunyai elemen-elemen yang didefinisikan sebagai berikut:

$$(C)_{ij} = (AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{r} a_{ik}b_{kj} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots\ldots\ldots a_{ir}b_{rj}$$

- Syarat:

A	B	AB
m x r	r x n	m x n

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 8 & -7 & 9 & -4 \\ 1 & -5 & 7 & -8 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 7 & -6 \\ 4 & -9 \end{pmatrix}$$

Tentukan AB dan BA

$(3 \text{ X } 4) \longleftrightarrow (4 \text{ X } 2)$

$(3 \text{ X } 2)$

$$A\ B = \begin{pmatrix} 2.1 + 3.7 + 4.4 + 5.11 & -35 \\ -49 & -35 \\ -94 & -55 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{94} & -35 \\ -49 & -35 \\ -94 & -55 \end{pmatrix}$$

Persamaan Linier dalam persamaan matriks

Persamaan Linier dalam bentuk:

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots\ldots a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots\ldots a_{2n}x_n &= b_2 \\
&: \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \ldots\ldots a_{mn}x_n &= b_m
\end{aligned}
$$

dapat disajikan dalam bentuk persamaan matriks:

$$
\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots\ldots\ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \ldots\ldots\ldots & a_{2n} \\ : & : & : \\ a_{m1} & a_{m2} \ldots\ldots & a_{mn} \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ : \\ x_n \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ : \\ b_n \end{pmatrix}
$$

A: **matriks koefisien** **x** **b**

$$\boldsymbol{A \quad x = b}$$

Contoh Persamaan Linier

SPL

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 6$$

$$-x_2 + x_3 = 1$$

$$4x_1 + 2x_2 + x_3 = 4$$

$$\begin{pmatrix} 1.x_1 + 2.x_2 + 1.x_3 \\ 0.x_1 + -1.x_2 + 1.x_3 \\ 4.x_1 + 2.x_2 + 1.x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Matriks Penerapan Ekonomi

Penyelesaian Linier Programming dengan Kaidah / Metode “Cramer” :

$$X_i = \frac{|A_i|}{|A|}$$

X_i = variabel ke i yang tidak diketahui dalam suatu seri persamaan

$|A|$ = Determinan dari matrik koefisien

$|A_i|$ = Determinan dari matrik khusus yang dibentuk dari matrik koefisien asalnya dengan mengganti kolom dari koefisien x_i dengan vektor kolom dari konstanta

Menghitung Determinan

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \pi r^2$$

Maka determinan dari A atau |A|

$$|A| = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}\,(a_{22}\,a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}\,(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}\,(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}\,)$$

Contoh :

$$A = \begin{vmatrix} 5 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & -5 \\ 4 & -5 & 6 \end{vmatrix}$$

|A| = 5x(3x6 – (-5x-5)) – (-2)x(2x6 – 4x(-5)) + 3x(2x(-5) – 4x3)

|A| = 5(18-25) + 2(12+20) + 3(-10-12) = -37

Contoh soal :

Permintaan dan Penawaran suatu barang ditunjukkan oleh fungsi berikut : $Q_s = -5 + 3P$ dan $Q_d = 10 - 2P$, berapakah harga dan kuantitas keseimbangan produk tersebut :

Cara I : Qd = Qs

$-5 + 3P = 10 - 2P$

$5P = 15 \rightarrow P = 3$

$Qd = -5 + 3(3) = 4 = Qs$

Cara II : Matrik

Persamaan dirubah menjadi :

$Q_s - 3P = -5$ dan $Q_d + 2P = 10$

Dalam bentuk matrik menjadi

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} Q \\ P \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -5 \\ 10 \end{vmatrix}$$

A X B

Metode Cramer : $X_i = \frac{|A_i|}{|A|}$

A = $\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$ → |A| = 1 x2 – (-3) x1 = 5

A_1= $\begin{vmatrix} -5 & -3 \\ 10 & 2 \end{vmatrix}$ → $|A_1|$= |Q| = -5x2 – (-3)x(10) =- 10 + 30 = 20

A_2= $\begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 1 & 10 \end{vmatrix}$ → $|A_2|$= |P| = 1 x10 -(-5) x1 = 10 + 5 = 15

Maka besaran
P dan Q adalah

$$Q = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{20}{5} = 4$$

$$P = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{15}{5} = 3$$