# PENGANTAR FISIKA DASAR

Penulis:

**Dr. Valentinus Galih Vidia Putra., S.Si., M.Sc.**

CV. MuliaJaya
Publisher & Supplier Modul Lab

# PENGANTAR FISIKA DASAR

Penulis:

**Dr. Valentinus Galih Vidia Putra., S.Si., M.Sc.**

Pengantar Fisika Dasar

**Penulis** :
Dr. Valentinus Galih V.P M.Sc

**ISBN** : 978-602-72713-6-4

**Editor** :
Budi Soewondo, M.Sc.

**Penyunting** :
Andi Risnawan, S.T

**Desain Sampul dan Tata Letak** :
Agustinus Budi, S.S

**Penerbit** :
CV. Mulia Jaya Publisher

**Redaksi** :
Jalan Anggajaya II No. 291-A,
Condong Catur
Kabupaten Sleman, Yogyakarta
Telp: 0812-4994-0973
Email:
**cv.muliajaya291@yahoo.com**

**Cetakan Pertama September 2017**

# KATA PENGANTAR

Dengan mempersembahkan puji dan syukur kehadirat Tuhan Yang Maha Esa atas segala rahmat dan karunia-Nya, akhirnya penulis dapat menyelesaikan penyusunan buku yang berjudul “PENGANTAR FISIKA DASAR ”. Buku ini ditulis dengan tujuan menjadikan pelajaran fisika dapat dengan mudah dimengerti dan dipahami oleh sebagian siswa di tingkat universitas. Selain itu pada bagian appendiks diberikan pengetahuan matematika dasar, yang dimungkinkan siswa-siswa tingkat universitas dapat mempelajarinya secara mandiri.

Penulis menyadari bahwa buku ini dapat diselesaikan berkat dukungan dan bantuan dari berbagai pihak. Oleh karena itu, ucapan terima kasih kepada semua pihak yang secara langsung dan tidak langsung memberikan kontribusi dalam penyelesaian buku ini. Pada kesempatan ini penulis juga menghaturkan terima kasih kepada:

1. Direktur Politeknik STTT Bandung
2. Rekan-rekan dosen di Politeknik STTT Bandung dan di UGM
3. Anggota tim riset smart textile Lab Fisika-Mekatronika, Politeknik STTT Bandung

Pada kesempatan ini, penulis ingin menyampaikan permohonan maaf kepada semua pihak karena dalam penyusunan buku ini ini tentunya masih banyak kekurangan dan kelemahan yang penulis tidak sadari. Untuk itu, saran dan masukan untuk perbaikan yang membangun sangat penulis harapkan. Semoga karya kecil ini dapat berguna bagi kita semua.

Yogyakarta,      Juli 2017

Penulis

# DAFTAR ISI


| | | |
|---|---|---|
| KATA PENGANTAR | .................. | *iii* |
| DAFTAR ISI | .................. | *v* |
| KINEMATIKA PARTIKEL | .................. | 1 |
| A. GERAK LURUS BERATURAN | .................. | 1 |
| B. GERAK LURUS BERUBAH BERATURAN | .................. | 1 |
| C. GERAK JATUH BEBAS | .................. | 2 |
| D. GERAK BENDA YANG BERGERAK LINEAR KEATAS | .................. | 2 |
| E. GERAK PARABOLA | .................. | 2 |
| F. SOAL DAN PEMBAHASAN | .................. | 3 |
| GAYA-GAYA LINEAR | .................. | 10 |
| A. HUKUM NEWTON PADA GERAK LINEAR | .................. | 11 |
| B. SOAL DAN PEMBAHASAN | .................. | 12 |
| GERAK MELINGKAR | .................. | 24 |
| A. GERAK DALAM SISTEM KOORDINAT POLAR | .................. | 24 |
| B. SOAL DAN PEMBAHASAN | .................. | 30 |
| KERJA DAN USAHA | .................. | 42 |
| A. PENGERTIAN KERJA DAN USAHA | .................. | 42 |
| B. SOAL DAN PEMBAHASAN | .................. | 43 |
| MEKANIKA LAGRANGE | .................. | 52 |
| A. PENGERTIAN MEKANIKA LAGRANGE | .................. | 52 |
| B. SOAL DAN PEMBAHASAN | .................. | 53 |
| TEORI RELATIVITAS EINSTEIN | .................. | 64 |
| A. POSTULAT TEORI RELATIVITAS | .................. | 64 |
| B. RELATIVITAS EINSTEIN | .................. | 65 |
| C. SOAL DAN PEMBAHASAN | .................. | 80 |
| GETARAN PADA MATERI | .................. | 89 |
| A. GETARAN BEBAS TANPA PEREDAM | .................. | 89 |
| B. GERAKAN OSILASI BEBAS PADA BANDUL | .................. | 94 |

C. SOAL DAN PEMBAHASAN .................. 96
GELOMBANG .................. 111
A. RUMUSAN UMUM GELOMBANG .................. 111
B. INTENSITAS BUNYI .................. 113
C. JENIS GELOMBANG .................. 113
D. PERCOBAAN MELDE .................. 117
E. SOAL DAN PEMBAHASAN .................. 118
FISIKA MODERN DAN KUANTUM .................. 121
A. HASIL KARYA FISIKA MODERN DAN KUANTUM .................. 121
B. RUMUSAN DASAR MEKANIKA KUANTUM .................. 122
C. SUMUR POTENSIAL TAK HINGGA .................. 125
D. SOAL DAN PEMBAHASAN .................. 132
KELISTRIKAN .................. 158
A. HUKUM COLOUMB .................. 158
B. HUKUM GAUSS .................. 160
C. SOAL DAN PEMBAHASAN .................. 160
IMPULS DAN MOMENTUM .................. 171
A. IMPULS DAN MOMENTUM .................. 172
B. TUMBUKAN .................. 174
C. SOAL DAN PEMBAHASAN .................. 176
KEMAGNETAN .................. 200
A. HUKUM BIOT-SAVART .................. 200
B. HUKUM AMPERE .................. 201
C. SOAL DAN PEMBAHASAN .................. 201
APPENDIKS (MATEMATIKA-FISIKA) .................. 214
DAFTAR PUSTAKA .................. 224

Kinematika adalah ilmu yang mempelajari tentang pergerakan suatu benda tanpa memperhitungkan besar massa dan gaya-gaya yang mempengaruhi pada benda tersebut

Kinematika biasanya diajarkan sebelum dinamika atau sebelum konsep mengenai gaya diperkenalkan.

A. GERAK LURUS BERATURAN ($a = 0$)

$$v(t) = vo \qquad \text{Pers-1.1}$$

$$x(t) = vo.t \qquad \text{Pers-1.2}$$

B. GERAK LURUS BERUBAH BERATURAN

Persamaan gerak benda GLBB adalah

$$t = \frac{v(t) - vo}{a} \qquad \text{Pers-1.3}$$

$$x(t) = \frac{v(t)^2}{2a} - \frac{1v_o{}^2}{2a} \qquad \text{Pers-1.4}$$

$$v(t) = \sqrt{v_o{}^2 + 2ax(t)} \qquad \text{Pers-1.5}$$

$$a(t) = \frac{v(t) - vo}{t} \qquad \text{Pers-1.6}$$

Keterangan

$$t = waktu\ (sekon)$$
$$x(t) = posisi\ saat\ t\ sekon(m)$$

$$v(t) = kecepatan\ saat\ t\ sekon\ \left(\frac{m}{s}\right)$$

$$vo = kecepatan\ awal \left(\frac{m}{s}\right)$$

$$a = percepatan\ \left(\frac{m}{s^2}\right)$$

C. GERAK JATUH BEBAS ($vo = 0$)

$$t = \frac{v(t)}{g} = \frac{\sqrt{2\,g\,y(t)}}{g} = \sqrt{\frac{2\,y(t)}{g}}$$ Pers-1.7

$$y(t) = \frac{1}{2g} v(t)^2 = \frac{1}{2g}\ (gt)^2 = \frac{1}{2} g\ (t)^2$$ Pers-1.8

$$v(t) = \sqrt{2\,g\,y}$$ Pers-1.9

$$a(t) = g = 9{,}81\ m/s^2$$ Pers-1.10

D. GERAK BENDA YANG BERGERAK LINEAR KE ATAS

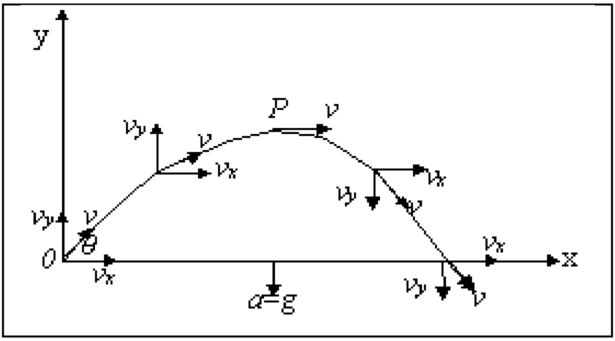
$$t = -\frac{v(t) - v_o}{g}$$ Pers-1.11

$$x(t) = \frac{1}{-2g} (v(t)^2 - {v_o}^2)$$ Pers-1.12

$$v(t) = \sqrt{{v_o}^2 - 2g\ y(t)}$$ Pers-1.13

$$a(t) = -g$$ Pers-1.14

E. GERAK PARABOLA / PERPADUAN GERAK




$$hmax = \frac{{v_o}^2 sin^2\phi}{2g} \quad \text{Pers-1.15}$$

$$t\ saat\ hmax = \frac{v_o sin\phi}{g} \quad \text{Pers-1.16}$$

$$smax\ = \frac{{v_o}^2 \sin(2\phi)}{g} \quad \text{Pers-1.17}$$

$$t\ sampai\ tanah = 2\frac{v_o sin\phi}{g} \quad \text{Pers-1.18}$$

F. SOAL DAN PEMBAHASAN KINEMATIKA PARTIKEL

1. Besar kecepatan suatu partikel yang mengalami perlambatan konstan ternyata berubah dari 30m/ menjadi 15 m/s setelah menempuh jarak sejauh 75 m. partikel tersebut akan berhenti setelah menempuh lagi jarak sejauh (SPMB 2003)

jawab

GLBB saat jarak $s_1$

$$2as_1 = {v_t}^2 - {v_0}^2$$

$$2a75 = 15^2 - 30^2$$

$$a = -4{,}5$$

GLBB saat jarak $s_2$

$$2.-4{,}5s_2 = 0^2 - 15^2$$

$$-9s_2 = -225$$

$$s_2 = 25\text{m}$$

2. Pada waktu bersamaan dua buah bola dilempar secara bersamaan keatas, masing-masing dengan kelajuan $v_1$= 10m/s dan $v_2$= 20 m/s jarak antara kedua bola pada saat bola 1 mencapai titik tertinggi adalah(UMPTN 1997 Rayon C)

jawab

$$\sum F = \frac{mdv}{dt}$$

$$2a(x(t) - xo) = (\text{v(t)}^2 - \text{vo}^2)$$

dengan percepatan $a = \pm\text{g}$, yang bermakna g akan positif jika menuju pusat bumi, sedangkan akan negatif jika menjauhi pusat bumi

$$2a(x(t) - xo) = (v(t)^2 - vo^2)$$

GLBB untuk bola 1

$$-2gh_1 = {v_t}^2 - {v_0}^2$$

$$-2gh_{max} = 0^2 - 10^2$$

$$h_{max} = 5m$$

$$-g = \frac{1}{t}(v_t - v_o)$$

$$t = -\frac{v_o}{-g} = 1 \text{ sekon}$$

GLBB untuk bola 2

ketinggian bola saat t= 1 sekon

$$\mathrm{h_2 = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2}$$

$$\mathrm{h_2 = 20.1 - \frac{1}{2} 10 = 15m}$$

maka selisih ketinggian bola adalah $h_2$-$h_1$= 10 meter

3. Bola A terletak pada ketinggian 60 meter vertikal diatas bola B, pada saat yang bersamaan bola A dilepas dengan jatuh bebas dan bola B dilemparkan vertikal ke atas dengan kecepatan 20m/s tentukan bola A dan B bertemu paa saat (UMPTN 2001 Rayon A)

jawab

$$h_A(t) = v_{0A} t + \frac{1}{2} g t^2$$

$$h_B(t) = v_{0B}\, t - \frac{1}{2} g t^2$$

$$h = h_A(t) + h_B(t) = v_{0A} t + \frac{1}{2} g t^2 + v_{0B}\, t - \frac{1}{2} g t^2 = v_{0A} t + v_{0B}\, t$$

$$t = \frac{h}{v_{0A} + v_{0B}} = \frac{60}{0 + 20} = 3 \text{ sekon}$$

GLBB bola A

$$g = \frac{(v(t) - vo)}{t}$$

$$v(t) = gt = 30m/s$$

GLBB bola B

$$-g = \frac{(v(t) - vo)}{t}$$

$$vo - gt = v(t)$$

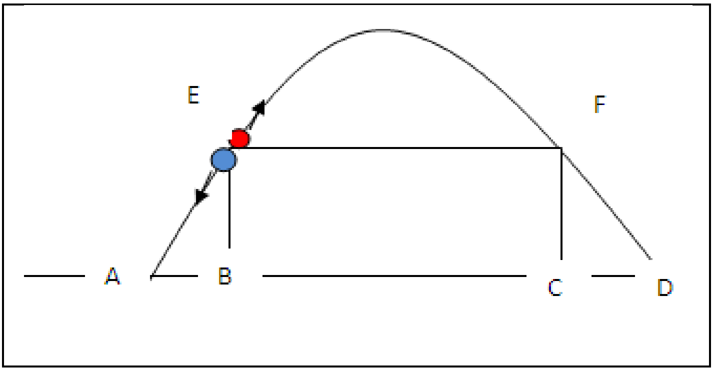
$$20 - 30 = -10m/s = v(t)$$

ketinggian bola B saat bertemu adalah =

$$h_B\,(t = 3\text{sekon}) = v_{0B}\,t - \frac{1}{2}gt^2 = 15 \text{ meter}$$

4. Dua buah peluru ditembakkan secara bersamaan, tetapi dengan arah yang berlawanan . Kedua peluru ditembakkan dengan kecepatan awal $v_o$ dan ketinggian h dari sebuah gedung, berapakah jarak kedua peluru saat kedua peluru sampai tanah

Jawab



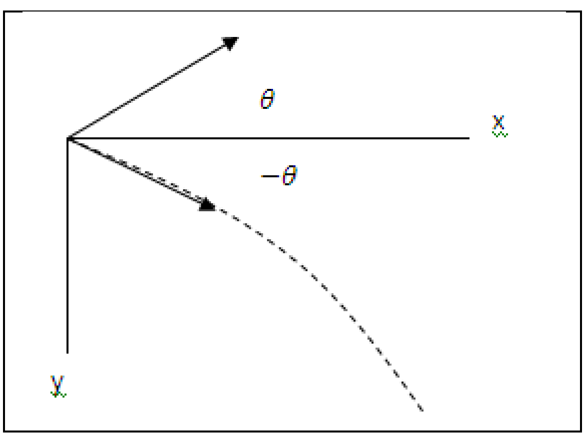

Jarak dari BC adalah

$$x = v_o \cos(\theta)\ t_{x\,max} = v_o \cos(\theta)\ 2t_{h\,max}$$

$$x = v_o \cos(\theta) \frac{2v_o sin\theta}{g}$$

$$x = 2{v_o}^2 sin\theta \frac{cos\theta}{g}$$

Jika kita buat Jarak dari BA=CD



$$x = v_o \cos(\theta) \,.\, t$$

$$h = v_o \sin(-\theta). t - \frac{1}{2} g t^2$$

$$\frac{1}{2} g t^2 - v_o \sin(-\theta). t + h = 0$$

$$a t^2 + bt + c = 0$$

$$t = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$t = \frac{v_o \sin(-\theta) \pm \sqrt{(v_o \sin(-\theta))^2 - 4\frac{1}{2} gh}}{2\frac{1}{2} g}$$

$$t = \frac{v_o \ \sin(-\theta) + \sqrt{(v_o \sin(-\theta))^2 - 4\frac{1}{2} gh}}{2\frac{1}{2} g}$$

$$t = \frac{-v_o \ \sin(\theta) + \sqrt{(v_o \sin(\theta))^2 - 2gh}}{g}$$

$$x = v_o \cos(\theta) \,.\frac{-v_o \ \sin(\theta) + \sqrt{(v_o \sin(\theta))^2 - 2gh}}{g}$$

Sehingga jarak pisah kedua benda setelah sampai di tanah adalah

$$stotal = x_{BC} + x_{cD} + x_{AB} = x_{BC} + 2x_{AB}$$

$$s\,total = 2{v_o}^2 sin\theta \frac{cos\theta}{g} + 2\left(v_o \cos(\theta) \,.\frac{-v_o \ \sin(\theta) + \sqrt{(v_o \ \sin(\theta))^2 - 2gh}}{g}\right)$$

5. Tunjukkan besar sudut pada gerak parabola, supaya jangkauan mendatarnya sama dengan tinggi maksimum

Jawab

Pada gerak GLB kearah sumbu-x persamaan gerak parabola menjadi

$$s = v_o\ cos\theta . t$$

$$y\ max = \frac{{v_o}^2 sin^2\theta}{2g}$$

$$s = v_o\ cos\theta . 2tmax = v_o\ cos\theta . 2v_o \frac{sin\theta}{g}$$

$$s = hmax$$

$$\frac{{v_o}^2 2cos\theta sin\theta}{g} = \frac{{v_o}^2 sin^2\theta}{2g}$$

$$\frac{sin\theta}{cos\theta} = 4$$

$$tgn\theta = 4$$

$$\theta = arctgn\ 4$$

Mekanika klasik menggambarkan dinamika partikel atau sistem partikel. Pada kasus-kasus dinamika partikel dapat ditunjukkan melalui hukum-hukum Newton tentang gerak, terutama oleh hukum Newton ke-2. Hukum ini menyatakan, "Sebuah benda yang memperoleh pengaruh gaya atau interaksi akan bergerak sedemikian rupa sehingga laju perubahan waktu dari momentum sama dengan gaya tersebut". Dalam pelajaran dinamika hukum-hukum Newton sangat berperan dalam penyelesaian kasus-kasus gaya. Ilmuwan yang mempelopori dinamika adalah Sir Isaac Newton.

Hukum-hukum gerak Newton baru memiliki arti fisis, jika hukum-hukum tersebut diacukan terhadap suatu kerangka acuan tertentu, yakni kerangka acuan inersia (suatu kerangka acuan yang bergerak serba sama - tak mengalami percepatan). Hukum Newton memiliki rumusan sebagai berikut

$$\sum F = ma = m\frac{dv}{dt} = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

Keterangan

$F = gaya\ yang\ bekerja\ (Newton)$

$m = massa\ benda\ (kg)$

$$a = percepatan\ \left(\frac{m}{s^2}\right)$$

$$v = kecepatan\ benda\ \left(\frac{m}{s}\right)$$

$$x = posisi\ benda\ (m)$$

## A. HUKUM NEWTON PADA GERAK LINEAR

Pergerakan benda yang mengalami GLB dan GLBB

Pada gerak lurus beraturan (GLB)

$$\sum F = ma = 0 \qquad \text{Pers-2.1}$$

$$\frac{d}{dt}(m\dot{x}) = 0 \qquad \text{Pers-2.2}$$

$$\ddot{x} = a = 0 \qquad \text{Pers-2.3}$$

$$\frac{d}{dt}(m\dot{x}) = 0 \qquad \text{Pers-2.4}$$

$$\dot{x} = v = konstan \qquad \text{Pers-2.5}$$

$$v(t) = vo \qquad \text{Pers-2.6}$$

$$a(t) = \ddot{x} = 0 \qquad \text{Pers-2.7}$$

Pada Gerak Lurus Berubah Beraturan (GLBB)

$$\sum F = m\frac{dv}{dt}$$

$$ma = m\frac{dv}{dt}$$

$$a = \frac{dv}{dt}$$

$$v(t) = vo + at$$

$$ma = mv\frac{dv}{dx}$$

$$adx = vdv$$

$$\int_{x=0}^{x=x(t)} a\,dx = \int_{v=vo}^{v(t)} vdv$$

$$x(t) = \frac{v(t)^2}{2a} - \frac{1v_o{}^2}{2a}$$

$$v(t) = \dot{x} = \sqrt{v_o{}^2 + 2ax(t)}$$

Persamaan gerak benda GLBB adalah

$$t = \frac{v(t) - vo}{a} \qquad \text{Pers-2.8}$$

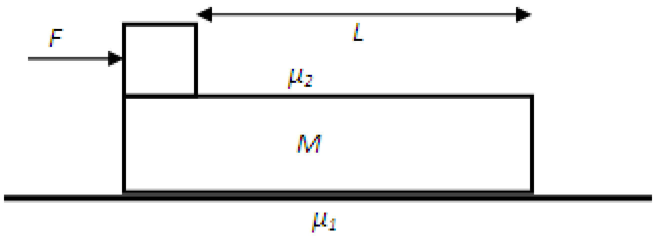
$$x(t) = \frac{1}{2a}v(t)^2 - \frac{1v_o{}^2}{2a} \qquad \text{Pers-2.9}$$

$$v(t) = \dot{x} = \sqrt{v_o{}^2 + 2ax(t)} \qquad \text{Pers-2.10}$$

$$a(t) = a = \frac{v(t) - vo}{t} \qquad \text{Pers-2.11}$$

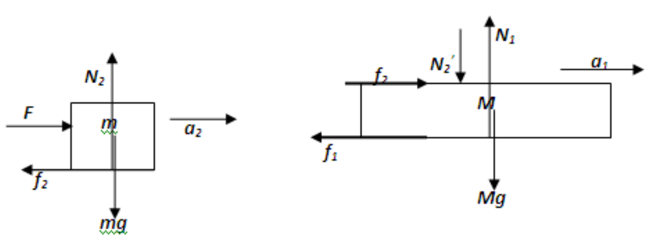
B. SOAL DAN PEMBAHASAN DINAMIKA PARTIKEL

1. Perhatikan sistem di bawah ini.




Ada dua balok, masing-masing massanya *m* dan *M*. Koefisien gesekan antara balok *M* dengan lantai $\mu_1$, sedangkan koefisien gesekan antara balok *m* dengan balok *M* adalah $\mu_2$. Pada balok *m* diberi gaya mendatar *F* yang cukup besar sehingga balok *m* akan bergerak dipunggung balok *M*, dan balok *M* juga bergerak akibat gaya *F* ini (asumsi $\mu_2$ cukup besar), Jika balok *m* berpindah sejauh *L* relatif terhadap balok *M*, berapa usaha yang dilakukan gaya *F* ?( Seleksi Provinsi 2007)

jawab




Dengan menggunakan hukum Newton

Komponen gaya pada sumbu y

$$\sum F = 0$$

$$N_2 - mg = 0$$

$$N_2 = mg$$

$$\sum F = 0$$

$$N_1 = N_2 + Mg$$

Komponen gaya pada sumbu x

$$\sum F = ma_2$$

$$F - f_2 = ma_2$$

$$f_2 = F - ma_2$$

$$\mu_2 N_2 = F - ma_2$$

$$\sum F = Ma_1$$

$$f_2 - f_1 = Ma_1$$

$$f_2 - \mu_1 N_1 = Ma_1$$

$$f_2 - \mu_1(N_2 + Mg) = Ma_1$$

$$\mu_2(mg) - \mu_1(mg + Mg) = Ma_1$$

$$a_1 = \frac{\mu_2(mg) - \mu_1(mg + Mg)}{m}$$

$$s(1) = vot + \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2}a_1t^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{\mu_2(mg) - \mu_1(mg + Mg)}{M}\right)t^2$$

Untuk mencari kecepatan $a_2$

$$\mu_2 N_2 = F - ma_2$$

$$\mu_2 mg = F - ma_2$$

$$\frac{F - \mu_2 mg}{m} = a_2$$

$$s(2) = vot + \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2}a_2t^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{F - \mu_2 mg}{m}\right)t^2$$

Selisaih jarak S(2) dan S(1) adalah L sehingga

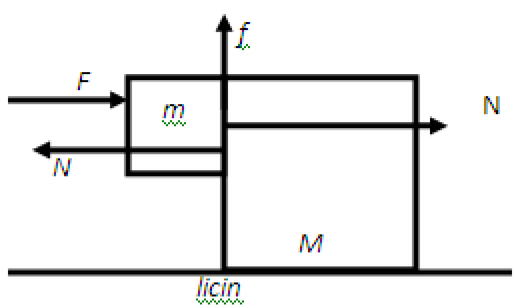
$$L = \frac{1}{2}\left(\frac{F - \mu_2 mg}{m}\right)t^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{\mu_2(mg) - \mu_1(mg + Mg)}{M}\right)t^2$$

Dari persamaan ini dapat ditentukan nilai F sebagai fungsi $F(m, M, L, \mu_2, \mu_1, t)$

Usaha yang dilakukan oleh gaya F adalah

$$W = FS_2 = F\frac{1}{2}\left(\frac{F - \mu_2 N_2}{m}\right)t^2 = \frac{F}{2}\left(\frac{F - \mu_2 N_2}{m}\right)t^2$$

2. Sebuah sistem terdiri atas dua buah balok massanya masing-masing *m* dan *M* (lihat gambar). Koefisien gesekan antara kedua balok $\mu_s$ dan tidak ada gesekan antara alok *M* dengan lantai. Tentukan besar gaya *F* yang harus diberikan pada balok *m* supaya tidak turun ke bawah (Seleksi Provinsi OSN 2007)



- Tinjau *m*

Arah mendatar pada sumbu-x,

$$\sum F = m(a' + a) = ma$$

$$F - N = ma$$

$$F = N + ma$$

Arah vertikal pada sumbu-y,

$$\sum F = 0$$

$$mg - f = 0$$

$$mg = f$$

$$mg = \mu N$$

$$N = \frac{mg}{\mu}$$

- Tinjau *M*

Arah mendatar pada sumbu-x,

$$\sum F = Ma$$

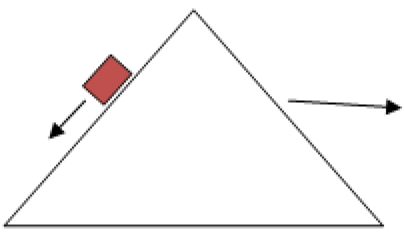
$$N = Ma$$

$$a = \frac{N}{M}$$

dari persamaan- persamaan di atas didapatkan :

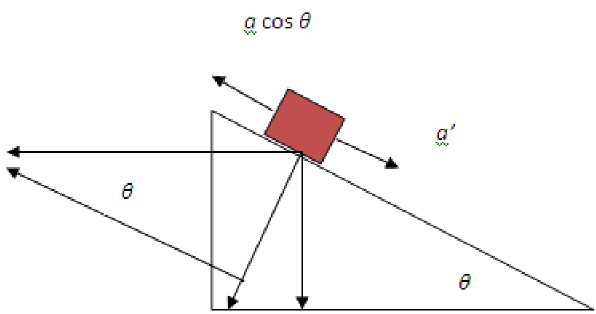
$$F = N + ma = \frac{mg}{\mu} + m\frac{N}{M} = \frac{mg}{\mu} + m\frac{\frac{mg}{\mu}}{M}$$
$$= \frac{mg}{\mu}\left(1 + \frac{m}{M}\right)$$

3. Suatu benda berada diatas sebuah prisma segitiga. Massa prisma $M$ dan massa benda $m$. Prisma mendapat gaya konstan arah mendatar sehingga sistem bergerak ke kanan dengan percepatan $a$. Koefisien gesek benda dan prisma adalah $\mu$. Hitung percepatan benda relatif terhadap prisma! Hitung juga kecepatan benda setelah waktu $t$ ditinjau oleh pengamat yang diam di lantai! (TOFI 2002)



Jawab

Percepatan searah bidang adalah




**Vektor Proyeksi haruslah :memenuhi arah N(sebagai patokan) yang tegak lurus lintasan dan arah lintasannya awalnya.**

$$\sum F = \frac{mdv}{dt}$$

$$\sum F = \frac{mdv}{dt} = m(a_{sistem})$$

$$mg\ sin\theta - f(gesek) = m(a' - a\ cos\theta)$$

$$mg\ sin\theta - \mu mg\ cos\theta = m(a' - a\ cos\theta)$$

Hukum kekekalan momentum untuk tumbukan

Momentum pada sumbu x adalah

$$m(v'\cos\theta - v) - Mv = 0$$

$$m(v'\cos\theta - v) = Mv$$

Jika dideferensialkan terhadap waktu t maka akan didapatkan bahwa

$$m(a'\cos\theta - a) = Ma$$

Nilai dari

$$a' = \frac{(M+m)a}{m\cos\theta}$$

Substitusikan hasil ini ke

$$mg\ sin\theta - \mu mg\ cos\theta = m(a' - a\ cos\theta)$$

$$a' = \frac{mg\ sin\theta - \mu mg\ cos\theta + macos\theta}{m}$$

Penggunaan rumus cepat☺

$$a' = \frac{\sum F\ (pada\ lintasan)}{\sum m(bergerak\ pada\ a'\ )} = \frac{(mg\ sin\theta - \mu mg\ cos\theta \pm macos\theta)}{(m)}$$

Untuk arah percepatan kerangka gerak berlawanan dengan arah gerak benda maka"+"

Untuk arah percepatan kerangka yang searah dengan arah gerak benda maka “- “

$$a' = \frac{(mg\ sin\theta - \mu mg\ cos\theta + macos\theta)}{(m)}$$

Mudahkan☺

$$mg\ sin\theta - \mu mg\ cos\theta = m\left(\frac{(M+m)a}{m\cos\theta} - a\ cos\theta\right)$$

$$gsin\theta - \mu g\ cos\theta = \frac{(M+m)a}{m\cos\theta} - ma\frac{cos^2\theta}{m\cos\theta}$$

$$mgsin\theta\ \cos\theta - \mu mg\ cos^2\theta = (M + m - mcos^2\theta)a$$

$$a = \frac{mgsin\theta\ \cos\theta - \mu mg\ cos^2\theta}{(M + m - mcos^2\theta)}$$

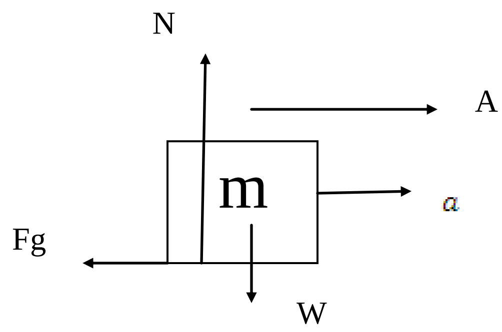
Maka

$$a' = \frac{(M+m)a}{m\cos\theta}$$

$$a' = \frac{(M+m)\dfrac{mgsin\theta\ \cos\theta - \mu mg\ cos^2\theta}{(M + m - mcos^2\theta)}}{m\cos\theta}$$

$$a' = (M+m)\frac{gsin\theta - \mu mgcos\theta}{(M + m - mcos^2\theta)} = \frac{gsin\theta - \mu mgcos\theta}{\left(1 - \dfrac{m}{M+m}cos^2\theta\right)}$$

4. Sebuah benda bermassa m diletakkan di atas sebuah truk, jika truk bergerak dengan percepatan A dan benda terpengaruh gaya gesek $f_g$ Tentukan percepatan truk agar benda tidak dapat bergerak dan tergelincir dari truk.




Jawab

Pada sumbu y

$$\sum F = 0$$

$$N - W = 0$$

$$N = W$$

Pada sumbu x

$$\sum F = m(A + a)$$

$$-f_g = m(A + a)$$

$$a = \frac{-f_g - mA}{m} = \frac{-\mu N - mA}{m}$$

Agar benda tidak bergerak, maka $a = 0$

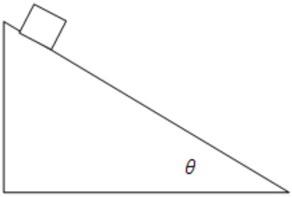
$$-\mu N - mA = 0$$

$$mA = -\mu N$$

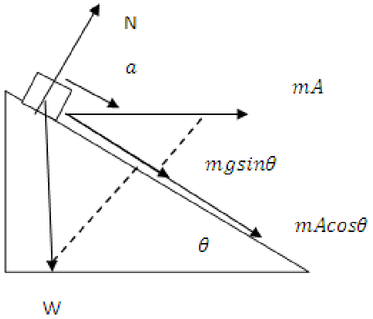
$$A = -\frac{\mu N}{m}$$

Dengan kata lain benda harus bergerak dengan percepatan $A = \frac{\mu N}{m}$ dengan arah gaya gesek searah dengan arah gerak truk

5. Sebuah benda diletakkan pada bidang miring licin seperti pada gambar, jika bidang miring dipercepatan dengan percepatan A searah dengan arah gerak benda, tentukan percepatan benda tersebut untuk percepatan tertentu, dan analisalah jika benda ternyata bergerak dengan percepatan konstan




Jawab




$$\sum F = m(a + Acos\theta)$$

$$mg\ sin\theta = m(a + Acos\theta)$$

$$g\ sin\theta - Acos\theta = a$$

Jika benda diam atau bergerak dengan kecepatan konstan, maka

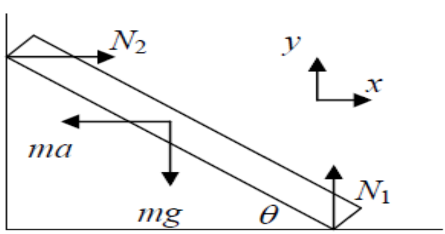
$a = 0$, sehingga

$$g\ sin\theta = Acos\theta$$

$$A = g\ tgn\theta$$

6. Di belakang sebuah truk terdapat suatu batang dengan massa *m* dan panjang *l* yang bersandar di dinding belakang truk. Sudut antara batang dengan lantai truk adalah θ. Kalau seandainya lantai dan dinding truk licin, berapakah percepatan yang dibutuhkan oleh truk agar batang ini tidak terpeleset (OSN 2007)

Jawab




Tinjau gaya-gaya translasi

Tinjau sumbu-x

$$\sum F = ma_{sistem} = m(a + a') = ma$$

$$-N_2 = ma$$

$$N_2 = -ma$$

Tinjau sumbu-y

$$\sum F = 0$$

$$N_1 - mg = 0$$

$$N_1 = mg$$

Karena batang seharusnya dapat bergerak rotasi, karena tidak ada gaya gesek pada dinding dan lantai, coba anda bayangkan jika dinding dan lantai tidak ada, maka pastinya benda akan melakukan gerak melingkar dengan poros di pusat batang.

$$\sum \tau = I\ddot{\theta} = 0$$

$$\frac{N_2 l}{2} \sin\theta - \frac{N_1 l}{2} \cos\theta = 0$$

$$\frac{-mal}{2} \sin\theta - \frac{mgl}{2} \cos\theta = 0$$

$$\frac{-mal}{2} \sin\theta = \frac{mgl}{2} \cos\theta$$

$$a = -g\, ctgn\, \theta$$

**Gerak Melingkar** adalah gerak suatu benda yang membentuk lintasan berupa lingkaran mengelilingi suatu titik tetap. Agar suatu benda dapat bergerak melingkar ia membutuhkan adanya gaya yang selalu *membelokkan*-nya menuju pusat lintasan lingkaran. Gaya ini dinamakan gaya sentripetal. Suatu gerak melingkar beraturan dapat dikatakan sebagai suatu gerak dipercepat beraturan, mengingat perlu adanya suatu percepatan yang besarnya tetap dengan arah yang berubah, yang selalu mengubah arah gerak benda agar menempuh lintasan berbentuk lingkaran.

## A. GERAKAN DALAM SYSTEM KOORDINAT POLAR

**Gaya Tangential**

$$\sum \tau = \frac{d}{dt}(I \times \omega) = I \times \alpha \qquad \text{Pers-3.1}$$

$$\sum Fl \sin(\measuredangle F, l) = \frac{d}{dt}(I\omega) = I\alpha = kMr^2\alpha \qquad \text{Pers-3.2}$$

Bentuk diatas akan sangat ringkas jika $\sin(\measuredangle F, l) = 1$

$$\sum F = Ml\alpha \qquad \text{Pers-3.3}$$

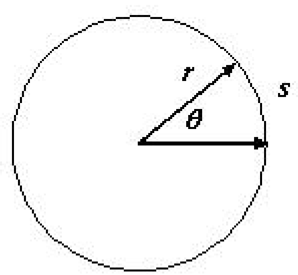
$$I = kMr^2 \ dan \ \alpha = \frac{a}{r}$$ Pers-3.4

**Gaya Normal**

$$\sum F = \frac{mv^2}{l} = ma'_{normal}$$ Pers-3.5

$l$ adalah panjang jarak dari titik pusat rotasi/ poros menuju ke gaya benda. Persamaan-persamaan gerak rotasi dan gerak linear memiliki suatu hubungan yang dapat dijelaskan sebagai berikut

Tinjau rotasi sebuah partikel dalam lintasan lingkaran dengan jejari $l = r$. Jarak yang telah ditempuh dalam selang waktu $\Delta$t adalah s terkait dengan sudut $\theta$ (dalam radian). Hubungan s dan $\theta$ diberikan oleh s = r $\theta$.




Untuk selang waktu yang sangat kecil maka besar kecepatan linier diberikan oleh

$$\frac{ds}{dt} = r\frac{d\theta}{dt} = r\omega \qquad \text{Pers-3.6}$$

$\omega$ disebut sebagai kecepatan sudut, yang arahnya diberikan oleh arah putar tangan kanan, tegak lurus bidang lingkaran. Jadi hubungan antara kecepatan linier dengan kecepatan sudut diberikan oleh

$$v = \omega \times r \qquad \text{Pers-3.7}$$

Percepatan sudut $\alpha$ didefinisikan sebagai laju perubahan kecepatan sudut terhadap waktu,

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} \qquad \text{Pers-3.8}$$

Hubungan antara percepatan linier dan percepatan sudut diberikan oleh

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d(\omega \times r)}{dt} = r\frac{d\omega}{dt} = r\alpha \qquad \text{Pers-3.9}$$

dengan arah $\alpha$ diberikan oleh arah perubahan $\omega$ atau secara vektor

$$a = \alpha \times r \qquad \text{Pers-3.10}$$

Karena persamaan-persamaan kinematika yang menghubungkan $\theta$, $\omega$ dan $\alpha$ bentuknya sama dengan persamaan-persamaan kinematika gerak linear, maka dengan memakai analogi ini akan diperoleh kaitan sebagai berikut untuk keceptan sudut konstan

$$2\alpha\theta = {\omega_t}^2 - {\omega_o}^2 \qquad \text{Pers-3.11}$$

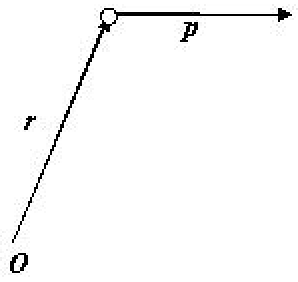
$$\theta = \omega_o t + \frac{1}{2}\alpha t^2 \qquad \text{Pers-3.12}$$

$$\alpha = (\omega_t - \omega_o)\frac{1}{t} \qquad \text{Pers-3.13}$$

Untuk memudahkan menganalisa gerak rotasi/ melingkar, maka akan didefinisikan beberapa besaran sebagai analog konsep gaya dan momentum. Pertama didefinisikan konsep momentum sudut *l*. Momentum sudut suatu partikel yang memiliki momentum linear *p* dan berada pada posisi *r* dari suatu titik referensi O adalah

$$l = r \times p = r \times mv = mr \times v = mr \times \omega \times r = mr^2 \times \omega = I \times \omega \qquad \text{Pers-3.14}$$

Perlu diperhatikan bahwa nilai *l* bergantung pada pemilihan titik referensi asal O, nilainya dapat berubah bila digunakan titik referensi yang berbeda.




Laju perubahan momentum sudut terhadap waktu didefinisikan sebagai besaran torka $\tau$

$$\tau = \frac{dl}{dt} = \frac{d(r \times p)}{dt} \qquad \text{Pers-3.15}$$

Kita tinjau suatu sistem partikel yang berotasi terhadap suatu sumbu tetap. Jarak setiap partikel terhadapa sumbu rotasi selalu tetap. Bila sistem partikel ini adalah benda tegar maka kesemua partikel akan bergerak bersamasama dengan kecepatan sudut yang sama. Energi kinetik sistem partikel tersebut adalah

$$T = \frac{1}{2} I \ \omega^2 \qquad \text{Pers-3.16}$$

Besaran yang ada dalam tanda kurung didefinisikan sebagai momen inersia *I* dari sistem relatif terhadap sumbu rotasi . Secara umum besar momen inersia dapat diukur dengan menggunakan rumus

$$I = \int r^2\, dm \qquad \text{Pers-3.17}$$

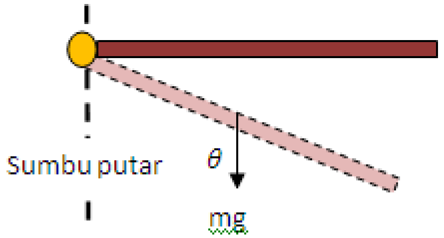
$$dm = \frac{dI}{r^2} \qquad \text{Pers-3.18}$$

Atau dengan kata lain, persamaan ini dapat ditulis

$$m = \frac{I}{r^2} \qquad \text{Pers-3.19}$$

dengan $r$ adalah jarak tegak lurus elemen pusat massa dm ke sumbu putar

Sebagai contoh jika anda ingin menghitung besar momen inersia batang panjang $L$ yang digantungkan pada poros di salah satu ujungnya




$$I = \int r^2\, dm = \int x^2 \rho dx = \int_{x=0}^{L} x^2 \rho dx = \frac{1}{3}\rho L^3 = \frac{1}{3}\left(\frac{m}{L}\right) L^3$$
$$= \frac{1}{3} m L^2$$

Elemen gaya yang mempengaruhi system ini

$$\sum FR \sin\theta = \frac{mgL}{2} \sin\theta$$

Pada hukum Newton berlaku

$$\sum F = ma \qquad \text{Pers-3.20}$$

Pada kasus benda yang bergerak dalam koordinat polar, maka

$$\sum \frac{\tau}{r} = \frac{I}{r^2}\, \alpha r \qquad \text{Pers-3.21}$$

$$\sum \tau = \frac{I}{r^2}\, \alpha r^2 = I\alpha$$

Maka hukum Newton untuk gerak melingkar adalah

$$\sum \tau = \frac{d}{dt}(I \times \omega) = I \times \alpha \qquad \text{Pers-3.22}$$

B. SOAL DAN PEMBAHASAN GERAK MELINGKAR

1. Suatu benda yang diikatkan pada sebuah tali mengalami gerak dalam bidang vertical, agar benda dapat mengalami gerakan satu putaran penuh berapa kecepatan dan gaya sentripental yang dibutuhkannya

Jawab

Saat dititik terbawah maka resultan gaya-gayanya adalah

$$\sum F = \frac{mv^2}{r}$$

$$T - mg = \frac{mv^2}{r} = 0$$

Pada keadaan benda posisi dibawah, besar resultan gaya akan dalam keadaan setimbang, sebab anda bayangkan saja saat anda memegang tali dan benda tersebut dalam bidang vertical, maka keadaan setimbang ( diam) berada pada keadaan benda dititik terbawahnya, sedangkan pada gerak rotasi, pusat acuan berada pada pusat gerak melingkar, sehingga gaya-gaya yang mengarah ke sumbu pusat lingkaran akan bernilai positif, saat pada keadaan di puncak teratas, inilah keadaan yang menentukan batas kecepatan minimalnya, sebab pada keadaan ini besar gaya-gayanya akan semakin besar.

$$T + mg = \frac{mv^2}{r}$$

$$T = 0$$

saat $mg = \frac{mv^2}{r}$, maka gaya normal T bola adalah nol, yang bermakna bola akan meninggalkan lintasan. maka T=0 dapat dipandang sebagai gaya normal minimal yang dibutuhkan agar bola tidak meninggalkan lintasan atau $0 \leq T_{minimal}$ , sehingga dari persamaan ini didapatkan bahwa

$$mg = \frac{mv^2}{r}$$

$$v = \sqrt{gr}$$

Sekarang agar dapat melakukan satu putaran penuh, yang bermakna benda dapat bergerak dari atas (titik tertinggi hingga titik terendah), dapat digunakan hukum kekekalan energy

$$mgho + \frac{mv_o{}^2}{2} = mgh + \frac{mv^2}{2}$$

Dengan nilai-nilai ho= 2r dan $v_0 = \sqrt{gr}$ karena berada di ketinggian maksimum, dan h=0, berada pada titik terbawah, sedangkan $v = \sqrt{gr}$ ,Sehingga

$$mgho + \frac{mv_o{}^2}{2} = mgh + \frac{mv^2}{2}$$

$$mg\ (2r) + \frac{mgr}{2} = \frac{mv^2}{2}$$

$$4mgr + mgr = mv^2$$

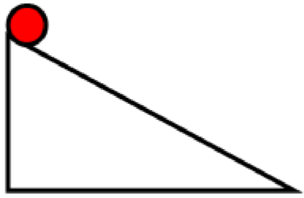
$$v = \sqrt{5gr}$$

Maka besar gaya sentripental minimal agar benda dapat melakukan satu putaran penuh adalah

$$F = \frac{mv^2}{r} = \frac{m5gr}{r} = 5mg$$

2. Sebuah silinder pejal homogen dengan jari-jari R dan massa m menggelinding dari puncak bidang miring dengan sudut bidang $\theta$ dan tinggi bola dari permukaan tanah adalah h, seperti pada gambar. Hitunglah kelajuan

silinder saat tiba di tanah dengan hukum Newton dan bandingkan hasilnya dengan hukum kekekalan energy mekanik



Dengan menggunakan hukum Newton

$$\sum \tau = I\alpha$$

$$\sum FR\sin(\measuredangle F, R) = I\alpha$$

$$FR = \frac{\frac{1}{2}mR^2 a}{R} = \frac{1}{2}mRa$$

$$F = \frac{1}{2}ma$$

$$\sum F = ma$$

$$mg\sin\theta - F = ma$$

$$mg\ sin\theta - \frac{1}{2}ma = ma$$

$$mg\ sin\theta = \frac{1}{2}ma + ma$$

$$g\ sin\theta = a(\frac{1}{2}+1)$$

$$a = g\frac{sin\theta}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}g\ sin\theta$$

Penggunaan rumus cepat☺

$$a = \frac{\sum F(pada\ lintasan)}{\sum m(\ bergerak)} = \frac{mgsin\theta}{(km+m)} = \frac{mgsin\theta}{(\frac{1}{2}m+m)} = \frac{2}{3}g\ sin\theta$$

Mudahkan☺

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{ds}\frac{ds}{dt} = \frac{2}{3}g\ sin\theta$$

$$v\frac{dv}{ds} = \frac{2}{3}g\ sin\theta$$

$$vdv = \frac{2}{3}g\ sin\theta\ ds$$

$$\int_{vo}^{vt} v\ dv = \int_{so}^{st}\frac{2}{3}g\ sin\theta\ \ ds$$

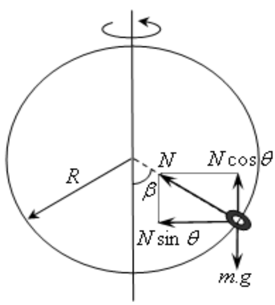
$$so = \frac{h}{sin\theta}\ \ sedangkan\ st = 0$$

Sedangkan bola bergerak tanpa kecepatan awal vt =0

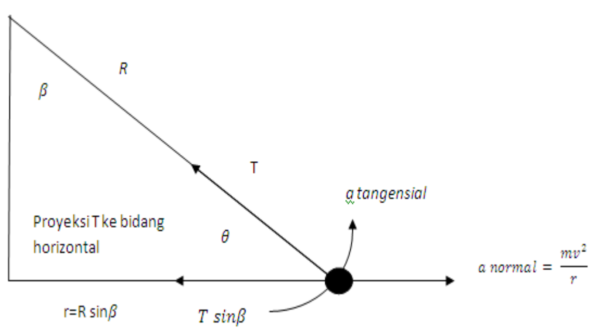
$$\frac{1}{2}(vt^2 - 0) = \frac{2}{3}g\ sin\theta\left(0 - \frac{h}{sin\theta}\right)$$

$$vt = \sqrt{\frac{4}{3}gh}$$

3. Lingkaran yang terbuat dari kawat dengan jari-jari $R$ bergerak melingkar tanpa gesekan pada sumbu vertikal yang melewati diameternya, (lihat gambar). Kelajuan linear titik pada kawat di mana terletak cincin adalah $v$. Jika cincin yang terletak pada kawat tersebut berada pada kesetimbangan. Tentukan sudut $\theta$ yang memenuhi kesetimbangan stabil. (Seleksi provinsi OSN 2006)




Jawab




Gaya –gaya di sumbu-x adalah gaya-gaya normal

Gaya normal

$$\sum F = \frac{mv^2}{r} = ma'_{normal}$$

$$\sum F_{Pusat} = \frac{mv^2}{r} = \frac{mv^2}{R\ sin\beta} = \frac{m\omega^2(R\ sin\beta)^2}{R\ sin\beta} = mR\ sin\beta\ \omega^2$$

$$T\ sin\beta = mR\ sin\beta\ \omega^2$$

Gaya-gaya di sumbu-y adalah gaya-gaya tangential

Karena dianggap benda melakukan gerak rotasi dengan kecepatan sudut konstan, maka

$$\sum FR\sin(\measuredangle F,R) = \sum \tau = 0$$

$$T\ cos\beta - mg = 0$$

$$T\ cos\beta = mg$$

Sehingga

$$T\ sin\beta = mR\ sin\beta\ \omega^2$$

$$mg\frac{sin\beta}{cos\beta} = mR\ sin\beta\ \omega^2$$

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{Rcos\beta}}$$

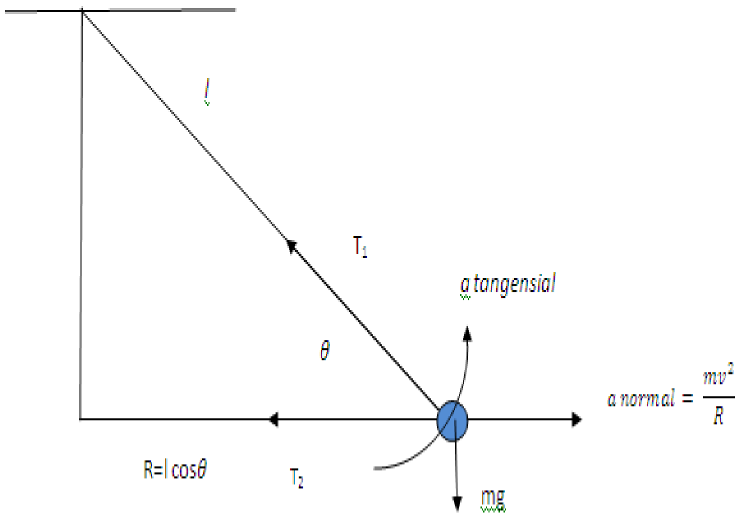
Maka besar sudut $\beta$ adalah

$$\beta = arccos\frac{g}{\omega^2 R} = \arccos\frac{gR}{v^2}$$

Sehingga besar sudut $\theta$ adalah

$$\theta = arcsin\frac{g}{\omega^2 R} = \arcsin\frac{gR}{v^2}$$

4. Sebuah massa m diikatkan dengan dua tali kesebuah tongkat vertical. Panjang tali yang miring adalah l. Tali kedua dalam keadaan mendatar horizontal. System diputar dengan kecepatan sudut $\omega$ terhadap sumbu putar/ tongkat vertical sedemikian hingga akhirnya kedua tali memiliki tegangan yang sama sudut antara kedua tali adalah $sin\theta = 0{,}8$ hitung tegangan tali dan kecepatan sudut system (seleksi kabupaten OSN 2009)




Jawab

Pada gerak rotasi, pusat acuan berada pada pusat gerak melingkar, sehingga gaya-gaya yang mengarah ke sumbu pusat lingkaran akan bernilai positif. Besar gaya $\sum F = \frac{mv^2}{R}$, arahya $\frac{mv^2}{R}$ **selalu memiliki arah yang berlawanan dengan gaya yang menuju ke pusat lingkaran.**

Gaya normal ( gaya yang dibutuhkan benda untuk tetap pada lintasannya)

Gaya-gaya disumbu-x melakukan pergerakan memutar, sehingga

$$\sum F = \frac{mv^2}{R} = ma_{normal}$$

$$T_2 + T_1 \cos\theta = \frac{m\omega^2 R^2}{R} = m\omega^2 R \ = m\omega^2 l \ cos\theta$$

Gaya-gaya disumbu-y adalah gaya-gaya tangential yang mengalami kesetimbangan posisi karena kecepatan sudut benda konstan, sehingga

$$\sum \tau = \sum FR \sin(\measuredangle F, R) = 0$$

$$\sum F = 0$$

$$T_1 sin\theta - mg = 0$$

$$T_1 sin\theta = mg$$

$$T_1 = T = \frac{mg}{sin\theta}$$

Untuk mencari kecepatan sudut, maka

$$T_2 + T_1 \cos\theta = \frac{m\omega^2 R^2}{R} cos\theta = m\omega^2 R\ cos\theta = m\omega^2 l\ cos\theta$$

$$T + T\cos\theta = \frac{m\omega^2 R^2}{R} cos\theta = m\omega^2 R\ cos\theta = m\omega^2 l\ cos\theta$$

$$\frac{mg}{sin\theta} + \frac{mg}{sin\theta}\cos\theta = m\omega^2 l\ cos\theta$$

$$\frac{g}{lsin\theta cos\theta} + \frac{g}{lsin\theta} = \omega^2$$

$$\frac{g/l}{0{,}8.0{,}6} + \frac{g/l}{0{,}8} = \omega^2$$

$$\frac{g/l}{0{,}8.0{,}6} + \frac{\frac{g}{l}.0{,}6}{0{,}8.0{,}6} = \omega^2$$

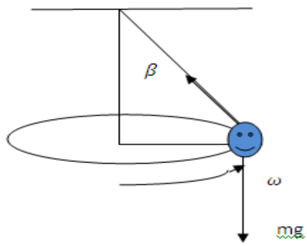
$$\frac{g/l}{0{,}8.0{,}6} + \frac{g/l.0{,}6}{0{,}8.0{,}6} = \omega^2$$

$$\frac{1{,}6\ g/l}{0{,}48} = \omega^2$$

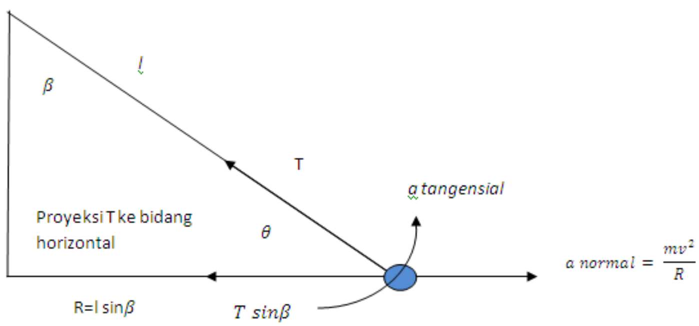
$$\frac{10}{3}\frac{g}{l} = \omega^2$$

$$\omega = \sqrt{\frac{10}{3}\frac{g}{l}}$$

5. Sebuah boneka digantungkan pada sebuah tali dan diputar dengan keceptan sudut $\omega$, benda digantungkan pada tali sepanjang $l$ meter, sedangkan tali membentuk sudut $\beta$ pada titik pusat benda ( seperti pada gambar), tunjukkan berapakah besar $\omega$ (SUNY, buffalo)




Jawab




Gaya –gaya di sumbu-x adalah gaya-gaya normal

Gaya normal

$$\sum F = \frac{mv^2}{R} = ma'_{normal}$$

$$\sum F_{Pusat} = \frac{mv^2}{R} = \frac{mv^2}{l\ sin\beta} = \frac{m\omega^2(l\ sin\beta)^2}{l\ sin\beta} = ml\ sin\beta\ \omega^2$$

$$T\ sin\beta = ml\ sin\beta\ \omega^2$$

Gaya-gaya di sumbu-y adalah gaya-gaya tangential

Karena dianggap benda melakukan gerak rotasi dengan kecepatan sudut konstan, maka

$$\sum FR \sin (\measuredangle F, R) = \sum \tau = 0$$

$$T \cos\beta - mg = 0$$

$$T \cos\beta = mg$$

Sehingga

$$T \sin\beta = ml \sin\beta \ \omega^2$$

$$mg \frac{\sin\beta}{\cos\beta} = ml \sin\beta \ \omega^2$$

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l\cos\beta}}$$

Kerja memiliki pengertian yaitu usaha yang diberikan kepada sebuah benda oleh suatu gaya hanya bila titik tangkap gaya itu bergerak melewati suatu jarak dan ada komponen gaya sepanjang lintasan geraknya, sedangkan energi adalah kemampuan untuk melakukan kerja Dalam mekanika klasik teori tentang gerak yang sistem pergerakan benda tidak dapat diketahui seperti apa pergerakannya dan didasarkan pada konsep massa dan gaya serta hukum-hukum yang menghubungkan konsep-konsep fisis ini dengan besaran kinematika dan dinamika sebaiknya digunakan hukum kekekalan energi. Sama dengan bab I semua gejala dalam mekanika klasik dapat digambarkan secara sederhana dengan menerapkan hukum Newton tentang gerak (dari hukum Newton dapat dijabarkan hukum kekekalan energi).

## A. PENGERTIAN KERJA DAN USAHA

Kerja adalah suatu besaran skalar, kita definisikan kerja yang dilakukan oleh suatu gaya pada suatu benda sebagai hasil kali gaya tersebut dengan perpinahan titik dimana gaya itu bekerja. karena kerja adalah hasil kali perkalian skalar antara gaya dengan perpindahan titik dimana gaya itu bekerja, maka rumus untuk usaha adalah

$$W = F.S = FS\cos(\measuredangle F, S) \qquad \text{Pers-4.1}$$

Besar gaya F yang digunakan untuk memindahkan suatu partikel dari titik yang satu ke titik yang lain sejauh x adalah sebagai pengurangan fungsi energi potensial U.

$$F = -\nabla U = -\frac{dU}{dx} \qquad \text{Pers-4.2}$$

B. CONTOH SOAL DAN PEMBAHASAN

1. sebuah gaya F=(2i+3j)N melakukan usaha dengan titik tangkapnya berpindah menurut r=(4i+aj) m, bila usaha itu bernilai 26 joule, maka nilai a sama dengan (UMPTN 1991 Rayon C)

   jawab

   Usaha adalah besaran skalar, sehingga perkalian antara gaya dengan perpindahan r adalah perkalian dot

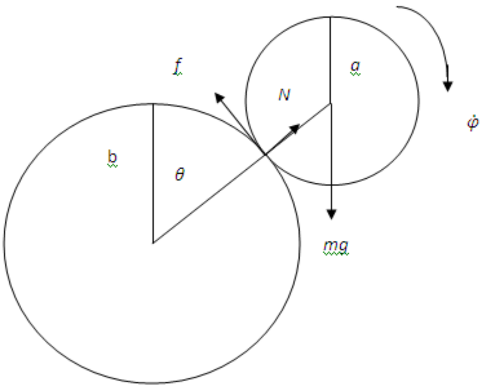
$$W = F.r = (2i + 3j).(4i + aj) = 26$$

$$8 + 3a = 26$$

$$a = \frac{18}{3} = 6$$

2. Sebuah bola pejal dengan massa *m* dan radius *a* menggelinding tanpa tergelincir dari titik awal, pada keadaan

diam diatas sebuah silinder diam dengan radius $b$ tentukan besar percepatannya dan kecepatannnya (Wisconsin)




Jawab

soal diatas akan lebih mudah dikerjakan dengan menggunakan konsep hukum kekekalan energy momen inersia $I = \frac{2}{5}mr^2$, r adalah jarak poros ke titik pusat benda

$$To = 0$$

$$T = \frac{1}{2}m(a+b)^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}m(a+b)^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}\frac{2}{5}m(a+b)^2\,\dot{\theta}^2$$

$$Vo = mg(a+b)$$

$$V = mg(a+b)cos\theta$$

$$To + Vo = T + V$$

$$0 + mg(a+b) = \frac{1}{2}m(a+b)^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}\frac{2}{5}(a+b)^2 m\dot{\theta}^2 + mg(a+b)cos\theta$$

$$mg(a+b) = \frac{1}{2}m(a+b)^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{5}m(a+b)^2\,\dot{\theta}^2 + mg(a+b)cos\theta$$

$$2mg(a+b)(1-cos\theta)=\frac{7}{5}m(a+b)^2\,\dot{\theta}^2$$

$$\frac{\frac{5}{7}2g(1-cos\theta)}{(a+b)}=\dot{\theta}^2$$

$$\dot{\theta}=\sqrt{\frac{10}{7}\frac{g(1-cos\theta)}{(a+b)}}$$

$$\ddot{\theta}=\frac{d\dot{\theta}}{dt}=\frac{d\dot{\theta}}{d\theta}\frac{d\theta}{dt}=\dot{\theta}\frac{d}{d\theta}\sqrt{\frac{10}{7}\frac{g(1-cos\theta)}{(a+b)}}$$

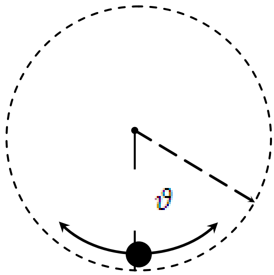
$$\ddot{\theta}=\dot{\theta}\frac{d}{d\theta}\sqrt{\frac{10}{7}g\frac{1-\left(1-\cos^2\frac{\theta}{2}+\sin^2\frac{\theta}{2}\right)}{(a+b)}}$$

$$\ddot{\theta}=\dot{\theta}\frac{d}{d\theta}\sqrt{\frac{10}{7}g\frac{2sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}{(a+b)}}$$

$$\ddot{\theta}=\sqrt{\frac{10}{7}g\frac{2sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}{(a+b)}}\frac{d}{d\theta}\sqrt{\frac{10}{7}g\frac{2sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}{(a+b)}}$$

$$\ddot{\theta}=\frac{5g\,sin\theta}{7(a+b)}$$

3. Sebuah bola kecil dengan dengan kerapatan homogen, jari-jari ***r*** menggelinding tanpa slip disekitardasar silinder yang berjari-jari ***R.*** (lihat gambar). Anggap ***r*** << ***R.*** Berapa frekuensi osilasi bola disekitar dasar silinder (Seleksi Provinsi OSN 2004)




Jawab

Jika dianggap $b = R - r$, adalah jarak dari poros ke pusat massa benda, maka

$$To = 0$$

$$T = \frac{1}{2}mb^2\dot{\vartheta}^2 + \frac{1}{2}I\dot{\vartheta}^2 = \frac{1}{2}mb^2\dot{\vartheta}^2 + \frac{1}{2}\frac{2}{5}mb^2\dot{\vartheta}^2$$

$$= \frac{1}{2}mb^2\dot{\vartheta}^2 + \frac{1}{5}mb^2\dot{\vartheta}^2$$

$$Vo = mgh = mgb\,cos\vartheta$$

$$V = 0$$

$$To + Vo = T + V$$

$$mgb\,cos\vartheta = \frac{1}{2}mb^2\dot{\vartheta}^2 + \frac{1}{5}mb^2\dot{\vartheta}^2 + 0$$

$$\frac{g}{b}cos\vartheta = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{5}\right)\dot{\vartheta}^2$$

$$\frac{g}{b}cos\vartheta = \left(\frac{5}{10} + \frac{2}{10}\right)\dot{\vartheta}^2$$

$$\frac{10g}{7b}cos\vartheta = \dot{\vartheta}^2$$

$$\frac{10g}{7(R-r)}cos\vartheta = \dot{\vartheta}^2$$

Deret Taylor

$$\sin\theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} = \theta$$

$$\cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2!} = 1$$

Sehingga

$$\frac{10g}{7(R-r)} = \dot{\vartheta}^2$$

Periode ini adalah untuk dari titik pusat B ke titik C, maka untuk A-B-C memiliki periode dua kalinya, sehingga kecepatan dari A-B-C adalah

$$\frac{5g}{7(R-r)} = \dot{\vartheta}^2$$

$$\omega^2 = \frac{5g}{7(R-r)}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{5g}{7(R-r)}}$$

$$2\pi f = \sqrt{\frac{5g}{7(R-r)}}$$

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{5g}{7(R-r)}}$$

4. Seorang *bungee jumper* diikatkan pada salah satu ujung tali elastis. Ujung satunya dari tali itu disambung ke suatu jembatan yang tinggi. Kemudian si *bungee jumper* ini

melompat turun dari jembatan itu dari keadaan diam. Massa orang ini adalah *m*. Panjang tali kalau kendor adalah *L* dan konstanta pegas tali adalah *k*. Medan gravitasi bumi adalah *g*. Berapa panjang akhir tali saat si *bungee jumper* ini berhenti sesaat? (Seleksi Kabupaten 2007)

Jawab

jika panjang tali adalah L dan pertambahan panjang adalah x, maka

$$\sum F = \frac{mdv}{dt} = m\frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} = mv\frac{dv}{dx}$$

dengan menerapkan hukum kekekalan energi, maka akan didapatkan bahwa

$$mgh = \frac{1}{2}k(\Delta l)^2$$

$$mg(L+x) = \frac{1}{2}kx^2$$

$$x^2 = \frac{2mg(L+x)}{k}$$

$$x^2 = \frac{2mgx}{k} + \frac{2mgL}{k}$$

$$x^2 - \frac{2mgx}{k} - \frac{2mgL}{k} = 0$$

$$x^2 - ax - c = 0$$

$$x = \frac{\left(\frac{2mg}{k} \pm \sqrt{\left(\frac{2mg}{k}\right)^2 - 4.1. - \frac{2mgL}{k}}\right)}{2}$$

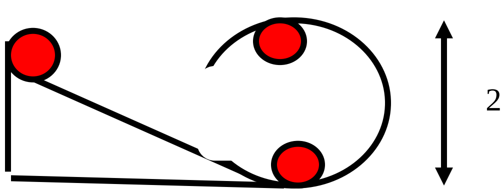
$$x = \left(\frac{mg}{k} \pm \sqrt{\left(\frac{mg}{k}\right)^2 + \frac{2mgL}{k}}\right)$$

$$x = \left(\frac{mg}{k} \pm \sqrt{\left(\frac{mg}{k}\right)^2 \left(1 + \frac{2kL}{mg}\right)}\right)$$

$$x = \left(\frac{mg}{k} \pm \frac{mg}{k}\sqrt{\left(1 + \frac{2kL}{mg}\right)}\right)$$

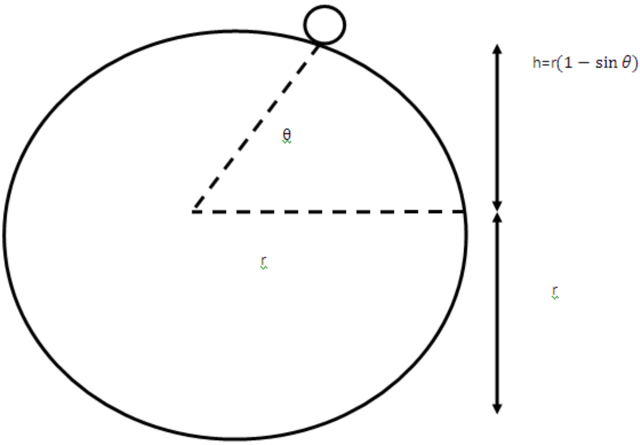
$$L' = L + \left(\frac{mg}{k} + \frac{mg}{k}\sqrt{\left(1 + \frac{2kL}{mg}\right)}\right)$$

5. Sebuah partikel bermassa m dilepaskan tanpa kecepatan awal dari ketinggian 2r dalam lintasan licin, tentukan dimana partikel meninggalkan lintasan dan kecepatan saat dititik p tersebut adalah (OSN 2008)




jawab

$$2gh = v^2 - vo^2$$




kecepatan saat waktu t sekon adalah

$$v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2gr(1 - \sin\theta)}$$

$$\sum F = \frac{mv^2}{r}$$

pada gerak rotasi, pusat acuan berada pada pusat gerak melingkar, sehingga gaya-gaya yang mengarah ke sumbu pusat lingkaran akan bernilai positif, saat pada keadaan di titik p

$$N + mg\,sin\theta = \frac{mv^2}{r}$$

$$N = 0$$

saat $mgsin\theta = \frac{mv^2}{r}$, maka gaya normal bola adalah nol, yang bermakna bola akan meninggalkan lintasan. maka N=0 dapat dipandang sebagai gaya normal minimal yang dibutuhkan agar bola tidak meninggalkan lintasan atau $0 \leq N_{minimal}$ , sehingga dari persamaan ini didapatkan bahwa

$$mg\ sin\theta\ = \frac{m2gr(1-\sin\theta)}{r}$$

$$\sin\theta\ = 2 - 2\sin\theta$$

$$\sin\theta\ = \frac{2}{3}$$

yang bermakna partikel akan meninggalkan lintasan untuk ketinggian h dari lantai

$$h = r + rsin\theta = r\left(1+\frac{2}{3}\right) = \frac{5}{3}r$$

kecepatan saat dititik p adalah

$$v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2gr(1-\sin\theta)} = \sqrt{\frac{2}{3}gr}$$

Metode penyelesaian persoalan dalam mekanika klasik pada umumnya dapat diselesaikan dengan hukum Newton, khususnya gerakan 1-3 dimensi, tetapi kadang kala penyelesaian suatu persoalan dalam mekanika klasik sulit diselesaikan dengan hukum Newton, karena kompleksitas permasalahan dan terkadang kurangnya daya imajinasi siswa dalam penggambaran bentuk pergerakan suatu sistem yang bergerak. Mekanika lagrange akan membantu siswa dalam penggambaran gerakan suatu sistem dengan pemilihan suatu kerangka koordinat

Mekanika Lagrange memiliki beberapa ciri yakni tidak lagi mengindahkan gaya-gaya yang bekerja dalam sistem mekanik, hanya berkepentingan dengan besaran skalar tenaga (kinetik dan potensial), memandang sistem mekanik sebagai satu kesatuan sehingga untuk menyelesaikannya tidak dipecah menjadi kepingan-kepingan kecil seperti dalam mekanika Newtonian. Karena itu, cara pandang Lagrangian merupakan cara pandang yang holistik terhadap suatu sistem mekanik (holisme).

## A. PENGERTIAN MEKANIKA LAGRANGE

Berikut rumus yang dipakai dalam menganalisa sistem pergerakan benda melalui metode persamaan Lagrange:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dL}{d\dot{q}}\right) = \frac{dL}{dq};\ jika\ tanpa\ gaya\ luar$$ Pers-5.1

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dL}{d\dot{q}}\right) = F + \frac{dL}{dq};\ jika\ ada\ gaya\ luar$$

Dengan $L = T - V$ Pers-5.2

$$L = \frac{1}{2}m(v^2) - mgh$$ Pers-5.3

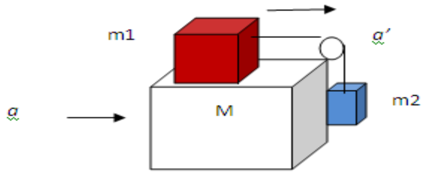
$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - mgh(0,0)$$ Pers-5.4

$$L = \frac{1}{2}m\left(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2\right) - mgh(0,0)$$ Pers-5.5

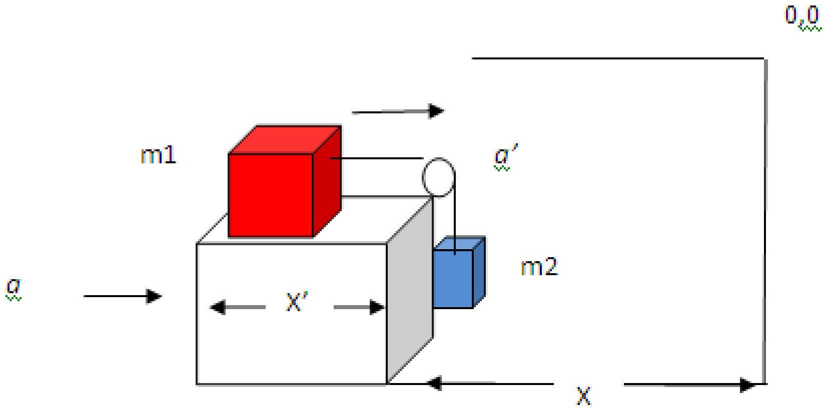
$$L = \frac{1}{2}m(\dot{l}^2 + l^2\dot{\theta}^2) - mgh(0,0)$$

B. SOAL DAN PEMBAHASAN MEKANIKA LAGRANGE

1. Sebuah benda diikatkan pada sebuah katrol diatas sebuah mobil seperti pada gambar,mobil bergerak dengan percepatan $a$ dan gaya $f$, sehingga membuat benda mengalami percepatan $a'$ dalam pergerakannya, tentukan persamaan gerak benda tersebut dan tentukan $a'$- nya (Wisconsin)




Jawab




Mencari T

Benda m1 bergerak dengan arah vector yang searah dengan vector benda M, sehingga posisi benda m1 haruslah bernilai penjumlahan kedua vector tersebut, sehingga hasil dari kecepatan resultannya haruslah bernilai penjumlahan dari kecepatan kedua vector tersebut

Persamaan kendala/ Constrain

$$l(panjang\ tali) = X_1 + X_2$$

$$X_2 = l - X_1 = l - (x + x')$$

Tinjau posisi benda m1

Karena bergerak pada system satu dimensi, maka tidak bergantung tanda plus/ minus untuk nilai V di sumbu vertikal, tetapi hanya bergantung pada posisi benda di bidang horizontal dan persamaan kendala

$$X = x + x'$$

Tinjau posisi benda m2

$$X = l - (x + x')$$

Tinjau posisi benda M

$$X = x$$

Tinjau kecepatan masing-masing benda

Benda m1

$$v_1 = \dot{X} = \frac{d}{dt}(x + x') = \dot{x} + \dot{x}'$$

Benda m2

$$v_2 = \dot{X} = -\dot{x} - \dot{x}'$$

Karena $m_2$ tidak bergerak sepanjang sumbu-x maka kecepatan disumbu x adalah nol / benda tidak terpengaruh kecepatan benda M, Sehingga

$$v_2 = \dot{X} = -\dot{x}'$$

Benda M

$$v_M = \dot{X} = \dot{x}$$

$$L = T - V$$

$$T = \frac{1}{2}m_1(\dot{x} + \dot{x}')^2 + \frac{1}{2}m_2(\dot{x}')^2 + \frac{1}{2}M(\dot{x})^2$$

$$V = m_2 g\left(l - (x + x')\right) = m_2 gl - m_2 gx - m_2 gx'$$

$$L = \frac{1}{2}mv^2 - mgh$$

$$L = \frac{1}{2}m_1(\dot{x} + \dot{x}')^2 + \frac{1}{2}m_2(\dot{x}')^2 + \frac{1}{2}M(\dot{x})^2 - m_2 g(l - (x + x'))$$

$$L = \frac{1}{2}m_1(\dot{x}^2 + 2\dot{x}\dot{x}' + \dot{x}'^2) + \frac{1}{2}m_2(\dot{x}'^2) + \frac{1}{2}M(\dot{x})^2 - m_2 gl + m_2 g(x + x')$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dL}{d\dot{q}}\right) = \frac{dL}{dq}$$

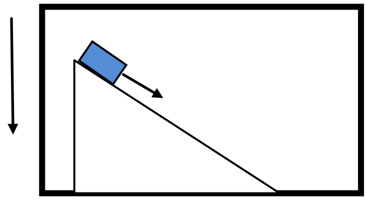
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dL}{d\dot{x}'}\right) = \frac{dL}{dx'}$$

$$\frac{d}{dt}(m_1\dot{x} + m_1\dot{x}' + m_2\dot{x}) = m_2 g$$

$$m_1\ddot{x} + m_1\ddot{x}' + m_2\ddot{x} = m_2 g$$

$$\ddot{x}' = \frac{m_2 g - m_1\ddot{x}}{m_2 + m_1} = \frac{(m_2 g - m_1\ddot{x})}{m_2 + m_1}$$

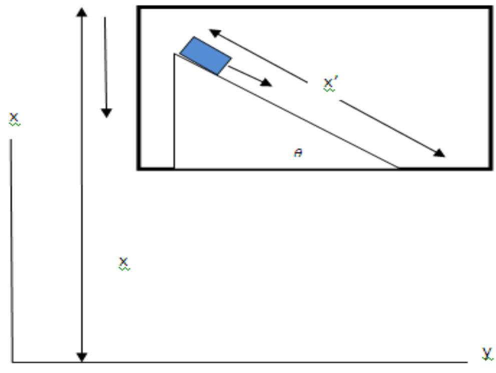
2. Pada gambar dibawah ini sebuah lift dengan percepatan konstan A dan di dalam lift terdapat benda bermassa m yang terletak diatas bidang miring hitunglah percepatan benda bermassa m dan gaya normalnya



Jawab

Mencari T

Benda m bergerak dengan arah vector yang searah dengan vector lift, sehingga posisi benda m haruslah bernilai penjumlahan kedua vector tersebut, sehingga hasil dari kecepatan resultannya haruslah bernilai penjumlahan dari kecepatan kedua vector tersebut




Tinjau posisi benda dalam system satu dimensi, terhadap bidang horizontal, sehingga tidak bergantung tanda plus/ minus untuk nilai V di sumbu vertikal, tetapi hanya bergantung pada posisi benda di bidang horizontal

$$X = x - x' \sin\theta$$

$$Y = y' \cos\theta$$

Tinjau kecepatan benda

$$\frac{d}{dt}X = \dot{x} - \dot{x}' \sin\theta$$

$$L = T - V$$

$$T=\frac{1}{2}m(\dot{x}^2-2\dot{x}\dot{x}'sin\theta+(\dot{x}'sin\theta)^2)+\frac{1}{2}m(\dot{y}'cos\theta)^2$$

$$V=mg(x-x'sin\theta)=mgx-mgx'sin\theta$$

$$L=\frac{1}{2}mv^2-mgh$$

$$L=\frac{1}{2}m(\dot{x}^2-2\dot{x}\dot{x}'sin\theta+(\dot{x}'sin\theta)^2)+\frac{1}{2}m(\dot{y}'cos\theta)^2-mg(x-x'sin\theta)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dL}{d\dot{q}}\right)=\frac{dL}{dq}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dL}{d\dot{x}'}\right)=\frac{dL}{dx'}$$

$$m\ddot{x}'\,sin^2\theta+m\ddot{x}sin\theta=mgsin\theta$$

$$\ddot{x}'=gsin\theta-\ddot{x}sin\theta=(g-\ddot{x})\sin\theta$$

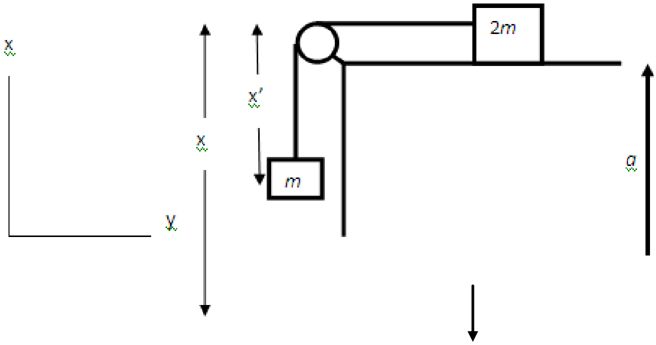
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dL}{d\dot{q}}\right)=\frac{dL}{dq}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dL}{d\dot{y}}\right)=\frac{dL}{dy}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dL}{d\dot{y}}\right)=0$$

$$m\dot{y}'cos^2\theta=const$$

3. Sebuah sistem ditunjukkan pada gambar, diletakkan dalam elevator yang bergerak ke atas dengan percepatan *a*. Tentukan tegangan tali *T* jika meja licin. Diketahui massa masing-masing balok m dan 2m dan percepatan grafitasi adalah g. (Seleksi Tingkat Provinsi 2006)




Jawab

Mencari T

Benda m bergerak dengan arah vector yang berlawanan arah dengan vector lift, sehingga posisi benda m haruslah bernilai pengurangan kedua vector tersebut, sehingga hasil dari kecepatan resultannya haruslah bernilai pengurangan dari kecepatan kedua vector tersebut

Persamaan kendala/ constraint

$$l = X_1 + X_2$$

$$X_2 = l - X_1$$

Tinjau posisi benda m

$$X = (x - x')$$

Kecepatan benda m

$$\dot{X} = \dot{x} - \dot{x}'$$

Tinjau posisi benda 2m

$$X = l - ((x - x')) = l - (x - x')$$

Kecepatan benda 2m

$$\dot{X} = \dot{x}' - \dot{x}$$

Karena pada benda 2m tidak terdapat gerakan ke arah vertical sehingga tidak terpengaruh keceptan vertical lift $\dot{x}$, sehingga

$$\dot{X} = \dot{x}'$$

$$L = T - V$$

$$L = \frac{1}{2} m v^2 - mgh$$

$$T = \frac{1}{2} m(\dot{x}^2 - 2\dot{x}\dot{x}' + (\dot{x}')^2 + \frac{1}{2} 2m(\dot{x}')^2$$

$$V = mg((x - x'))$$

$$L = \frac{1}{2} m(\dot{x}^2 - 2\dot{x}\dot{x}' + (\dot{x}')^2) + \frac{1}{2} 2m(\dot{x}')^2 - mg((x - x'))$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dL}{d\dot{q}}\right) = \frac{dL}{dq}$$

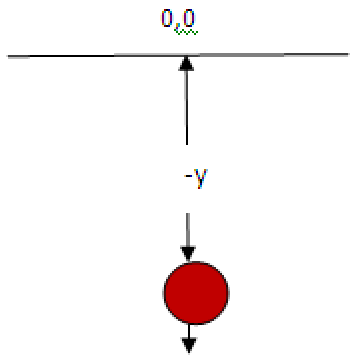
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dL}{d\dot{x}'}\right) = \frac{dL}{dx'}$$

$$\frac{d}{dt}(-m\dot{x} + m\dot{x}' + 2m\dot{x}') = mg$$

$$\ddot{x}' = \frac{mg + ma}{m + 2m}$$

4. Suatu partikel bermassa m jatuh bebas dari sebuah gedung, tentukan percepatan benda tersebut dengan metode Lagrange

Jawab




Untuk mencari titik pusat : Dalam menentukan titik pusat pada pergerakan arah vektor, kita harus menentukan titik dimana benda tersebut berasal, cara paling mudah melihat posisi benda adalah dari arah-arah vector percepatannya

Metode Lagrange

Posisi benda adalah

$$x, y = 0, -y$$

$$T = \frac{1}{2} m\dot{y}^2$$

$$V = -mgy$$

$$L = T - V$$

$$L = \frac{1}{2} m\dot{y}^2 - (-mgy)$$

$$L = \frac{1}{2} m\dot{y}^2 + (mgy)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dL}{d\dot{q}}\right) = \frac{dL}{dq}$$

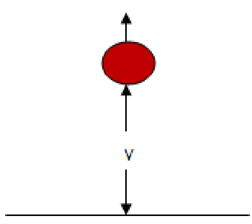
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dL}{d\dot{y}}\right) = \frac{dL}{dy}$$

$$\ddot{y} = g$$

5. Suatu benda dengan massa m dilempar ke atas, tentukan percepatan benda tersebut dengan menggunakan metode Lagrange dan Hamiltonian

Jawab

Untuk mencari titik pusat : Dalam menentukan titik pusat pada pergerakan arah vektor, kita harus menentukan titik dimana benda tersebut berasal, cara paling mudah melihat posisi benda adalah dari arah-arah vector percepatannya. Dengan menggunakan metode Lagrange




$$x, y = 0, y$$

$$L = T - V$$

$$L = \frac{1}{2}m\dot{y}^2 - (mgy)$$

$$L = \frac{1}{2}m\dot{y}^2 - (mgy)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dL}{d\dot{q}}\right) = \frac{dL}{dq}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dL}{d\dot{y}}\right)=\frac{dL}{dy}$$

$$\ddot{y}=-g$$

Dengan menggunakan metode Hamilton

$$x, y = 0, y$$

$$T=\frac{1}{2}m\dot{y}^2$$

$$p_y = mv = m\dot{y}$$

$$p_y{}^2 = m^2\dot{y}^2$$

$$V = mgy$$

$$H = T + V$$

$$H=\frac{1}{2}m\dot{y}^2+(mgy)$$

$$H=\frac{1}{2}m\dot{y}^2+mgy$$

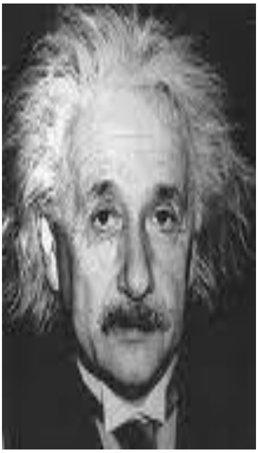
$$H=\frac{1}{2m}(p_y{}^2)$$

$$\frac{d}{dt}P_q=-\frac{\partial H}{\partial q}$$

$$\frac{d}{dt}P_y=-\frac{\partial H}{\partial y}$$

$$m\ddot{y}=-mg$$

$$\ddot{y}=a=-g$$



Albert Einstein seorang fisikawan jenius pernah menjelaskan teori relativitas untuk kalayak umum yang awam terhadap konsep dasar fisika berdasarkan suatu pengalaman cintanya dengan seorang wanita yang ia senangi, yaitu saat ia mengatakan :When you are courting a nice girl an hour, it seems like a second. When you sit on a red-hot cinder a second seems like an hour. That's relativity .

Albert Einsten membagi teori relativitas menjadi dua jenis yaitu : Teori relativitas khusus dan teori relativitas umum. Teori relativitas khusus bertolak dari kerangka acuan inersial, yaitu kerangka acuan yang bergerak dengan kecepatan konstan terhadap kerangka acuan yang lainnya, sedangkan teori relativitas umum bertolak dari kerangka acuan inersial yang bergerak dengan kecepatan yang mengalami percepatan/ dapat pula dikatakan kerangka acuan yang dipercepat relative terhadap kerangka acuan yang lain.

## A. POSTULAT TEORI RELATIVITAS

Teori relativitas Einsten akan sangat berguna untuk suatu pergerakan benda yang bergerak dengan kecepatan yang sangat tinggi ( hampir mendekati kecepatan cahaya), pada benda yang bergerak dengan kecepatan yang kecil maka dapat digunakan relativitas Newton atau transformasi Galileo. Postulat Einsten dalam teori relativitas khusus adalah

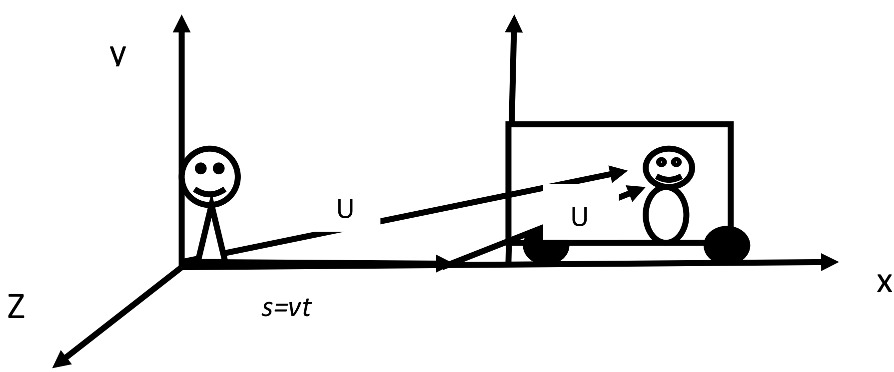
1) **Postulat pertama**: Hukum Fisika memiliki bentuk yang sama pada semua kerangka acuan inersial, karena tidak ada kerangka acuan universal sebagai acuan mutlak. Postulat ini adalah perluasan dari prinsip relativitas Newton, yaitu bahwa tidak hanya mekanika hukum ini berlaku, tetapi juga hukum-hukum fisika yang lainnya.
2) **Postulat Kedua**: kelajuan cahaya adalah sama untuk semua pengamat, yang bermakna bahwa kecepatan, waktu, posisi dan massa semuanya relative.

## B. RELATIVITAS EINSTEIN

Beda Relativitas Newton dengan Relativitas Einsten melalui pendekatan yang bersifat konvensional yaitu dengan memilih ruang dan waktu sebagai variable awal yang digunakan dalam merumuskan kaedah transformasi Lorentz. Dengan pendekatan ini, kaedah transformasi untuk besaran momentum dan energy baru didapatkan

Relativitas Newton/ Transformasi Galileo dapat dijelaskan sebagai berikut

Misalkan ada sebuah mobil bergerak dengan kecepatan konstan v(kerangka acuan gerak), dari terminal A(kerangka acuan diam) menuju ke suatu tempat sejauh s. Di dalam mobil terdapat seseorang yang bergerak searah dengan arah gerak mobil dengan kecepatan U' dalam kerangka acuan mobil, sedangkan pengamat yang satu diam di terminal A, seperti pada gambar



$$x' = x - vt$$

$$y' = y\, dan\, z' = z$$

$$\frac{d}{dt}x' = \frac{d}{dt}(x - vt)$$

$$U' = U - v$$

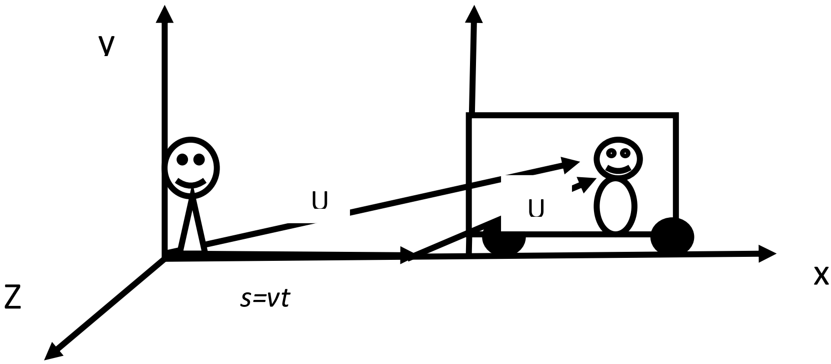
$$a'_x = a_x$$

$$\frac{dy'}{dt} = Y' = Y$$

$$a'_y = a_y\ begitupula a_z' = a_z$$

Relativitas Einsten/ Transformasi Lorentz dapat dijelaskan sebagai berikut

Misalkan ada sebuah mobil bergerak dengan kecepatan konstan v $\sim c$ (kerangka acuan gerak), dari terminal A( kerangka diam) menuju ke suatu tempat sejauh s. Di dalam mobil terdapat seorang pengamat yang bergerak searah dengan arah gerak mobil dengan kecepatan U' kearah sumbu x dalam kerangka acuan mobil, sedangkan di terminal A ada seorang pengamat yang diam tak bergerak. seperti pada gambar.




Dalam relativitas Einsten hubungan transformasi mengandung suatu pengali $\gamma$ yang disebut tetapan transformasi. Hubungan ini dapat dijelaskan sebagai berikut

1. Saat dilihat **dikerangka bergerak**, selama selang waktu t

$$\boldsymbol{x' = \gamma(x - vt);\ dimana\, x' = ct'}$$

2. **Karena kita ingin tahu bagaimana gerakan benda tersebut dikerangka diam dan ingin mencari t'**, maka dapat dijabarkan sebagai berikut: jika di lihat dikerangka diam selama selang waktu t'

$$\boldsymbol{x = \gamma(x' + vt');\ dimana\, x = ct}$$

$$x = \gamma(\gamma(x - vt) + vt')$$

$$x = \gamma^2(x - vt) + \gamma v t'$$

$$x = \gamma^2 x - \gamma^2 vt + \gamma v t'$$

$$x(1 - \gamma^2) + \gamma^2 vt = \gamma v t'$$

$$\frac{x(1 - \gamma^2)}{\gamma v} + \gamma t = t'$$

Karena menurut Einsten $x' = ct' = \gamma(x - vt)$, dimana kecepatan cahaya adalah sama disemua kerangka acuan dan juga pada kerangka acuan diam $x = ct$.

3. Untuk mencari $\gamma$ **dapat digunakan kembali kerangka acuan gerak**

$$ct' = \gamma(x - vt)$$

$$c\left(\frac{x(1 - \gamma^2)}{\gamma v} + \gamma t\right) = \gamma(x - vt)$$

$$\frac{xc(1 - \gamma^2)}{\gamma v} + c\gamma t = \gamma(x - vt)$$

$$\frac{xc(1 - \gamma^2)}{\gamma v} - \gamma x = -c\gamma t - v\gamma t$$

$$\frac{xc(1-\gamma^2)}{\gamma v}-\frac{\gamma^2 vx}{\gamma v}=-c\,\gamma t-v\gamma t$$

$$xc(1-\gamma^2)-\gamma^2 vx=-c\,v\gamma^2 t-v^2\gamma^2 t$$

Eliminasikan variable waktu t

$$x=\frac{-c\,v\gamma^2 t-v^2\gamma^2 t}{c(1-\gamma^2)-\gamma^2 v}$$

$$ct=\frac{-c\,v\gamma^2 t-v^2\gamma^2 t}{c(1-\gamma^2)-\gamma^2 v}$$

$$c\{c(1-\gamma^2)-\gamma^2 v\}=-c\,v\gamma^2-v^2\gamma^2$$

$$c^2-c^2\gamma^2-cv\gamma^2=-c\,v\gamma^2-v^2\gamma^2$$

$$c^2\gamma^2\left(1+\frac{v}{c}\right)-\left(\frac{c}{v}+1\right)v^2\gamma^2=c^2$$

$$\gamma^2\left(1+\frac{v}{c}\right)-\left(\frac{c}{v}+1\right)\frac{v^2}{c^2}\gamma^2=1$$

$$\gamma^2\left(1+\frac{v}{c}\right)-\left(\frac{v}{c}+\frac{v^2}{c^2}\right)\gamma^2=1$$

$$\gamma^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)=1$$

$$\boldsymbol{\gamma} = \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\left(\mathbf{1} - \frac{\boldsymbol{v}^{\mathbf{2}}}{\boldsymbol{c}^{\mathbf{2}}}\right)}}$$

Dari sini kita tahu bahwa posisi orang ditinjau dari kerangka gerak adalah

$$x'(x, v, t) = \gamma(x - vt) = \frac{(x - vt)}{\sqrt{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}}$$

$$y' = y \, dan \, z' = z$$

Jika $v \ll c$, bentuk diatas akan menjadi sama seperti transformasi Galileo

$$x' = \gamma(x - vt) = \frac{(x - vt)}{\sqrt{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}} = (x - vt)$$

$$x' = x - vt$$

Untuk mencari waktu orang ditinjau dari kerangka gerak adalah

$$x' = ct' = \gamma(x - vt)$$

$$ct' = \gamma(x - vt)$$

$$t'(x,v,t) = \frac{\gamma}{c}(x - vt)$$

$$t' = \frac{\gamma}{c}(ct - vt); x = ct$$

$$t' = \frac{\gamma}{c}c\left(t - \frac{v}{c}t\right)$$

$$t' = \gamma\left(t - \frac{v}{c}t\right)$$

$$t'(x,v,t) = \gamma\left(t - \frac{v}{c}\left(\frac{x}{c}\right)\right)$$

$$t'(x,v,t) = \gamma\left(t - \frac{vx}{c^2}\right)$$

Sama dengan posisi, jika Jika $v \ll c$, bentuk diatas akan menjadi sama seperti transformasi Galileo, maka

$$t' = \gamma\left(t - \frac{vx}{c^2}\right)$$

$$t' = \gamma t = t$$

Lalu bagaimana besar kecepatannya masing-masing

$$x' = \gamma(x - vt) = \frac{(x - vt)}{\sqrt{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}}$$

$$U' = \frac{dx'}{dt'} = \frac{d(\gamma(x - vt))}{d\left(\gamma\left(t - \frac{vx}{c^2}\right)\right)} = \frac{dx - vdt}{dt - \frac{vdx}{c^2}} = \frac{U - v}{1 - \frac{vU}{c^2}}$$

Untuk kecepatan di sumbu y dan z adalah

Pada sumbu y

$$Y' = \frac{dy'}{dt'} = \frac{dy}{d\left(\gamma\left(t - \frac{vx}{c^2}\right)\right)} = \frac{dy}{\gamma\left(dt - \frac{vdx}{c^2}\right)} = \frac{Y}{\gamma\left(1 - \frac{vU}{c^2}\right)}$$

Pada sumbu Z

$$Z' = \frac{dz'}{dt'} = \frac{dz}{d\left(\gamma\left(t - \frac{vx}{c^2}\right)\right)} = \frac{dz}{\gamma\left(dt - \frac{vdx}{c^2}\right)} = \frac{Z}{\gamma\left(1 - \frac{vU}{c^2}\right)}$$

posisi benda dilihat di kerangka diam adalah

$$x(x', v, t') = \gamma(x' + vt')$$

Waktu t pada kerangka diam adalah

$$ct = \gamma(x' + vt')$$

$$t(x',v,t') = \frac{\gamma(ct' + vt')}{c} = \gamma\left(t' + \frac{v}{c}t'\right) = \gamma\left(t' + \frac{v}{c}\ (x'/c)\ \right)$$
$$= \gamma\left(t' + \frac{vx'}{c^2}\right)$$

Maka kecepatan di kerangka diam sepanjang sumbu x adalah

$$U = \frac{dx}{dt} = \frac{d\big(\gamma(x' + vt')\big)}{dt} = \frac{d\big(\gamma(x' + vt')\big)}{d\left(\gamma\left(t' + \frac{vx'}{c^2}\right)\right)} = \frac{U' + v}{1 + \frac{vU'}{c^2}}$$

Kontraksi panjang ( benda yang bergerak akan lebih pendek dilihat dikerangka diam)

$$x_2' - x_1' = \gamma(x_2 - vt) - \gamma(x_1 - vt)$$

$$x_2' - x_1' = \gamma(x_2 - x_1)$$

$\Delta x'$ $(\boldsymbol{panjang\ benda\ yang\ diam\ pada\ suatu\ kerangka\ acuan})$ $= \boldsymbol{\gamma\Delta x}$

Dilatasi waktu (benda yang bergerak akan lebih muda dilihat dikerangka diam/ proper time)

$$t_2' - t_1' = \gamma\left(t_2 - \frac{vx}{c^2}\right) - \gamma\left(t_1 - \frac{vx}{c^2}\right)$$

$$\Delta \boldsymbol{t}' \, (\boldsymbol{selang\, waktu\, yang\, diukur\, pengamat\, yang\, bergerak}) = \boldsymbol{\gamma} \Delta \boldsymbol{t}$$

Massa relativistic

$$\rho = \frac{m}{Vol}; \; untuk\, 3\, dimensi$$

$$\rho = \frac{m}{x}; untuk\, 1\, dimensi$$

$$m = x\rho$$

Dari sini kita tahu bahwa hubungan antara kontraksi panjang dengan massa adalah sebanding/ berbanding lurus

$$m \sim x$$

Maka massa dapat dianalogikan menjadi

(penggunaan otak kanan: jika anda memukul dengan kecepatan tinggi, massa di otot lengan anda akan terasa lebih besar dibandingkan memukul dengan kecepatan rendah/ diam)

$$\boldsymbol{m}' = \boldsymbol{\gamma m_o}$$

Dengan m' adalah massa benda yang bergerak, sedang $m_o$ adalah massa benda yang diam

Momentum relativistic

$$\boldsymbol{P = m'v = \gamma m_o v}$$

Energi relativistic

$$\boldsymbol{E\ total = m'c^2 = E_k + m_o c^2 = E_k + E_0}$$

$$\boldsymbol{E\ total^2 = (pc)^2 + (m_o c^2)^2}$$

Transformasi Lorentz untuk besaran ( E dan p)

Untuk transformasi Lorentz antara kerangka diam dan kerangka gerak ( kerangka yang bergerak terhadap kerangka diam) dengan kecepatan v, yang secara linear menghubungkan besaran-besaran $(\boldsymbol{p_x, p_y, p_z, E})$dan $(\boldsymbol{p'_x, p'_y, p'_z, E'})$ yang mirip seperti Transformasi posisi dan waktu ( R dan t) seperti (x,y,z,t) dan (x',y',z',t').

$$\boldsymbol{p = \frac{Ev}{c^2}}$$

Transformasi posisi dan waktu ( R dan t) seperti (x,y,z,t) dan (x',y',z',t')

$$x'(x,v,t) = \gamma(x - vt) = \frac{(x - vt)}{\sqrt{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}}$$

$$y' = y \; dan \; z' = z$$

$$t' = \gamma\left(t - \frac{vx}{c^2}\right)$$

$$x(x', v, t') = \gamma(x' + vt')$$

$$\boldsymbol{t = \gamma\left(t' + \frac{vx'}{c^2}\right)}$$

Transformasi Energi dan momentum (E dan *p*) seperti ($\boldsymbol{E, p_x, p_y, p_z}$)dan ($\boldsymbol{E', p'_x, p'_y, p'_z}$)

$$P_{//}' = P_x'(p_x, v, E) = \gamma\left(p_x - \frac{vE}{c^2}\right) = \frac{(p_x - vE/c^2)}{\sqrt{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}}$$

$$p_y = p'_y \; dan \; p_z = p'_z$$

$$p_\perp = p'_\perp$$

Sedangkan

$$E' = \gamma(E - vp_x)$$

$$P_x \quad (p'_x, v, E') = \gamma\left(p'_x + \frac{vE'}{c^2}\right) = \frac{(p'_x - vE'/c^2)}{\sqrt{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}}$$

$$p_y = p'_y \; dan \; p_z = p'_z$$

$$p_\perp = p'_\perp$$

$$E = \gamma(E' + vp'_x)$$

Besar gaya

$$f_x' = \frac{dp_x{}'}{dt'} = \frac{\gamma\left(dp_x - \frac{vdE}{c^2}\right)}{\gamma\left(dt - \frac{vdx}{c^2}\right)} = \frac{\left(f_x - \frac{v}{c^2}\frac{dE}{dt}\right)}{\left(1 - \frac{v\,v_x}{c^2}\right)} = \frac{\left(f_x - \frac{v}{c^2}\frac{dE}{dt}\right)}{\left(1 - \frac{v\,v_x}{c^2}\right)}$$

$$f_x' = \frac{\left(f_x - \frac{v}{c^2}(f.\ v_x)\right)}{\left(1 - \frac{v\,v_x}{c^2}\right)}$$

$$f_y' = \frac{(f_y)}{\gamma\left(1 - \frac{v\,v_x}{c^2}\right)}$$

Secara umum bentuk formula Transformasi Lorentz adalah sebagai berikut

| Posisi | Energi |
|---|---|
| $x'(x,v,t) = \gamma(x - vt)$<br><br>$x(x',v,t') = \gamma(x' + vt')$ | $E' = \gamma(E - vp_x)$<br><br>$E = \gamma(E' + vp'_x)$ |
| Waktu | Momentum |
| $t' = \gamma\left(t - \frac{vx}{c^2}\right)$<br><br>$\boldsymbol{t = \gamma\left(t' + \frac{vx'}{c^2}\right)}$ | $P_{//}' = P_x'(p_x, v, E) = \gamma\left(p_x - \frac{vE}{c^2}\right)$<br><br>$P_x \quad (p'_x, v, E') = \gamma\left(p'_x + \frac{vE'}{c^2}\right)$ |

Penggunaan otak kanan : Dari sini didapatkan kesimpulan bahwa huruf x dapat digantikan sebagai E begitu juga sebaliknya, sedangkan t dapat menggantikan p, begitu juga sebaliknya☺

C. SOAL DAN PEMBAHASAN

1. Sebuah pesawat menembakkan sebuah rudal dengan kecepatan x dilihat dari pesawat oleh pilot dan pesawat tersebut bergerak dengan kecepatan y, tentukan kecepatan rudal menurut pengamat yang diam di bumi

Jawab

$$x = \gamma(x' + vt')$$

$$ct = \gamma(x' + vt')$$

$$t(x', v, t') = \frac{\gamma(ct' + vt')}{c} = \gamma\left(t' + \frac{v}{c}t'\right) = \gamma\left(t' + \frac{v}{c}\ \ (x'/c)\ \right)$$
$$= \gamma\left(t' + \frac{vx'}{c^2}\right)$$

Maka kecepatan di kerangka diam sepanjang sumbu x adalah

$$U = \frac{dx}{dt} = \frac{d\big(\gamma(x' + vt')\big)}{dt} = \frac{d\big(\gamma(x' + vt')\big)}{d\left(\gamma\left(t' + \frac{vx'}{c^2}\right)\right)} = \frac{U' + v}{1 + \frac{vU'}{c^2}}$$

Sehingga

$$U = \frac{x + y}{1 + \frac{yx}{c^2}}$$

Dimana v adalah kecepatan kerangka (dalam hal ini ditinjau pesawat), sedangkan U' adalah kecepatan peluru yang dilihat dari pesawat

2. Pada suatu saat radar di bandara adisucipto mendeteksi sebuah pesawat asing yang bergerak mendekati lapangan terbang, kemudian untuk mengawasi pesawat itu diluncurkan sebuah pesawat tempur INA dengan kecepatan x. Radar mendeteksi pesawat asing itu bergerak dengan kecepatan y mendekati bandara dan berlawanan arah dengan pesawat tempur INA, tentukan kelajuan relative pesawat asing tersebut terhadap pilot pada pesawat tempur INA, sehingga pilot dapat mencegah agar pesawat asing tersebut tidak bisa mendekati bandara

Jawab

$$x' = \gamma(x - vt)$$

$$x' = ct'$$

$$t'(x, v, t) = \frac{\gamma(x - vt)}{c} = \gamma\left(\frac{x}{c} - \frac{vt}{c}\right) = \gamma\left(t - \frac{vx}{c^2}\right)$$

$$U^{'} = \frac{dx^{'}}{dt'} = \frac{d\big(\gamma(x - vt)\big)}{d\left(\gamma\left(t - \frac{vx}{c^2}\right)\right)} = \frac{dx - vdt}{dt - \frac{vdx}{c^2}} = \frac{U - v}{1 - \frac{vU}{c^2}}$$

$$U^{'} = \frac{-y - x}{1 - \frac{x.(-y)}{c^2}} = \frac{-y - x}{1 + \frac{xy}{c^2}}$$

3. Gunakan metric Minkowski dalam menemukan besaran-besaran relativistic seperti :

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$E = \sqrt{p^2c^2 + m^2c^4}$$

$$E = m'c^2 = \gamma mc^2$$

$$p = \gamma mv$$

Jawab

$$ds^2 = -c^2dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$$

Penulisan dalam bentuk vector koordinat-4 kontravarian adalah

$$x^{\mu} = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, x, y, z) = (ct, r)$$

$$ds^2 = g_{\mu v} dx^{\mu} dx^{v} = -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$$

Bermakna

$$g_{\mu v} = 1 \; jika \; \mu = v$$

Dan

$$g_{\mu v} = 0 \; jika \; \mu \neq v$$

Untuk komponen tensor metrix rank dua kovarian adalah

$$g_{\mu v} = g_{00} = -1$$

$$g_{\mu v} = g_{11} = g_{22} = g_{33} = 1$$

Untuk komponen tensor metrix rank dua kontravarian adalah

$$g^{\mu v} = g^{00} = -1$$

$$g^{\mu v} = g^{11} = g^{22} = g^{33} = 1$$

$$g^{\mu v} = 0 \; jika \; \mu \neq v$$

a. Kaitan antara waktu pribadi $\tau$ dan elemen garis s adalah

$$ds^2 = -c^2 d\tau^2$$

Sehingga didapatkan bahwa

$$ds^2 = -c^2 d\tau^2 = g_{\mu v} dx^\mu dx^v = -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$$

$$d\tau^2 = dt^2 - \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{c^2}$$

$$d\tau^2 = dt^2 - \frac{dr^2}{c^2}$$

$$d\tau^2 = dt^2\left(1 - \frac{dr^2}{dt^2 c^2}\right) = dt^2\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)$$

$$d\tau = \frac{dt}{\gamma}$$

Atau dapat dituliskan sebagai berikut

$$\gamma = \frac{dt}{d\tau}$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

b. vector koordinat-4 kontravarian dirumuskan sebagai berikut

$$x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, x, y, z) = (ct, r)$$

Didefinisikan vector kecepatan-4 kontravarian

$$V^{\mu} = \frac{dx^{\mu}}{d\tau} = \frac{dx^{\mu}}{dt}\frac{dt}{d\tau} = \frac{dx^{\mu}}{dt}\gamma = \gamma\frac{d(ct, r)}{dt} = \gamma(c, v)$$

Sedangkan vector kecepatan kovariannya adalah

$$V_{\mu} = g_{\mu v}V^{v} = \gamma(-c, v)$$

Didefinisikan vector momentum-4 kontravarian adalah

$$P^{\mu} = mV^{\mu} = m\gamma(c, v) = (m\gamma c, m\gamma v) = \left(\frac{m\gamma c^2}{c}, m\gamma v\right) = \left(\frac{E}{c}, p\right)$$

Dengan energy adalah

$$E = m\gamma c^2 \; atau \frac{E}{c^2} = m\gamma$$

Dan momentum adalah

$$p = m\gamma v$$

Hubungan energy dengan momentum adalah

$$p = m\gamma v = \frac{E}{c^2}v$$

Vector momentum-4 kovarian adalah

$$P_\mu = g_{\mu v} P^v = \left(-\frac{E}{c}, p\right)$$

Vector gaya-4 kontravarian adalah

$$F^\mu = \frac{dP^\mu}{d\tau} = \frac{dP^\mu}{dt}\frac{dt}{d\tau} = \gamma\left(\frac{dE}{c\,dt}, f\right) = \gamma\left(\frac{fv}{c}, f\right)$$

Dengan gaya didefinisikan sebagai

$$f = \frac{dP}{dt}$$

$$f = \frac{dE}{dr}, maka f\,dr = dE, sehingga \frac{f dr}{dt} = \frac{dE}{dt}\ atau\ fv = \frac{dE}{dt}$$

Vector gaya-4 kovariannya adalah

$$F_\mu = g_{\mu v} F^v = \gamma\left(\frac{-dE}{c\,dt}, f\right)$$

Perkalian inner product vector kovarian dan kontravarian akan menghasilkan besaran scalar

$$P_\mu P^\mu = \left(-\frac{E}{c}, p\right)\left(\frac{E}{c}, p\right) = -\left(\frac{E}{c}\right)^2 + p^2$$

$$P_\mu P^\mu = mV_\mu mV^\mu = m^2 V_\mu V^\mu = m^2\gamma(-c,v)\gamma(c,v)$$

Nilai ini akan sama dengan

$$\gamma(-c,v)\gamma(c,v) = -\gamma^2c^2 + \gamma^2v^2 = -\gamma^2c^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right) = -c^2$$

Sehingga

$$P_\mu P^\mu = mV_\mu mV^\mu = m^2 V_\mu V^\mu = m^2\gamma(-c,v)\gamma(c,v) = -m^2c^2$$

$$P_\mu P^\mu = P_\mu P^\mu$$

$$-m^2c^2 = -\left(\frac{E}{c}\right)^2 + p^2$$

$$-m^2c^4 = -E^2 + p^2c^2$$

Dengan energy total E adalah

$$E = \sqrt{p^2c^2 + m^2c^4}$$

4. Vani dan Markus adalah dua orang bersaudara yang kembar dengan usia 20 tahun, suatu saat vani diharuskan untuk pergi ke suatu planet yang berjarak 4 tahun kecepatan cahaya dari bumi. Vani pergi ke planet

dengan suatu pesawat yang berkecepatan 8/10 kecepatan cahaya, tentukanlah manakah yang lebih muda saat keduanya bertemu di bumi, berapa selisih umur mereka sekarang?

Jawab

$$t = \frac{2s}{v} = \frac{2\ x\ 4\ tahun\ xc}{0{,}8c} = 10\ tahun$$

Untuk pengukuran di bumi/ kerangka diam maka benda yang bergerak akan lebih muda dibandingkan yang diam

$$\frac{\Delta \boldsymbol{t}'}{\boldsymbol{\gamma}} = \Delta \boldsymbol{t}$$

$$10\sqrt{1 - \frac{(0{,}8c)^2}{c^2}} = \Delta \boldsymbol{t}$$

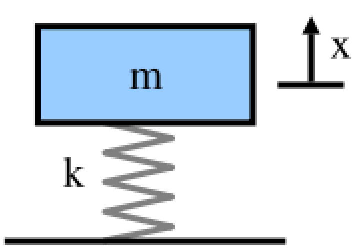
$$\Delta \boldsymbol{t} = 6\ tahun$$

Maka umur vani adalah 20 + 6= 26 tahun , sedangkan umur markus adalah 20 + 10= 30

Getaran adalah suatu gerak bolak-balik di sekitar kesetimbangan. Kesetimbangan di sini maksudnya adalah keadaan dimana suatu benda berada pada posisi diam jika tidak ada gaya yang bekerja pada benda tersebut. Getaran mempunyai amplitudo (jarak simpangan terjauh dengan titik tengah) yang sama.

Getaran bebas terjadi bila sistem mekanis dimulai dengan gaya awal, lalu dibiarkan bergetar secara bebas. Contoh getaran seperti ini adalah memukul garpu tala dan membiarkannya bergetar, atau bandul yang ditarik dari keadaan setimbang lalu dilepaskan.

A. GETARAN BEBAS TANPA PEREDAM



Pada model yang paling sederhana redaman dianggap dapat diabaikan, dan tidak ada gaya luar yang mempengaruhi massa (getaran bebas).

Dalam keadaan ini gaya yang berlaku pada pegas $F$ sebanding dengan panjang peregangan $x$, sesuai dengan hukum Hooke, atau bila dirumuskan secara matematis:

$$F(pegas) = -kx$$

Arah gaya pegas berlawanan arah dengan arah gerak partikel massa m

dengan $k$ adalah tetapan pegas.

Sesuai Hukum kedua Newton gaya yang ditimbulkan sebanding dengan percepatan massa:

$$\sum F = m\frac{dv}{dt} = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

$$-kx = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0$$

$$m\ddot{x} + kx = 0$$

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

$$\left(D^2 + \frac{k}{m}\right)x = 0$$

$$D_{1,2} = \pm\sqrt{-\frac{k}{m}} = \pm i\sqrt{\frac{k}{m}}$$

Bila kita menganggap bahwa kita memulai getaran sistem dengan meregangkan pegas sejauh *A* kemudian melepaskannya, solusi persamaan di atas yang memberikan gerakan massa adalah:

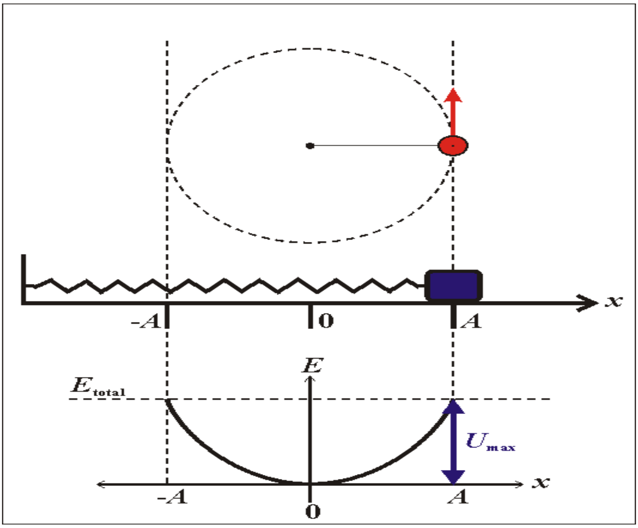
$$x = Aexp\ i\sqrt{\frac{k}{m}}t + B\exp -i\sqrt{\frac{k}{m}}t$$

$$x = A\cos\sqrt{\frac{k}{m}}t + B\sin\sqrt{\frac{k}{m}}\ t = A\cos\omega\, t + B\sin\omega\, t$$

$$x = A\sin(\omega t + \gamma) = A\sin(2\pi f t + \gamma)$$

$$v = \frac{dx}{dt} = A\omega\ cos(\omega t + \gamma)$$

$$a = \frac{dv}{dt} = -A\omega^2\ sin(\omega t + \gamma)$$




Solusi ini menyatakan bahwa massa akan berosilasi dalam gerak harmonis sederhana yang memiliki amplitudo *A* dan frekuensi *f*. Bilangan *f* adalah salah satu besaran yang terpenting dalam analisis getaran, dan dinamakan **frekuensi alami takredam.** Untuk sistem massa-pegas sederhana, didefinisikan sebagai:

$$2\pi f = \omega$$

$$2\pi f = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

Catatan: frekuensi sudut ω (ω = 2π*f*) dengan satuan radian per detik kerap kali digunakan dalam persamaan karena menyederhanakan persamaan, namun besaran ini biasanya diubah ke dalam frekuensi "standar" (satuan Hz) ketika menyatakan frekuensi sistem.

Bila massa dan kekakuan (tetapan *k*) diketahui frekuensi getaran sistem akan dapat ditentukan menggunakan rumus di atas.

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2$$

Saat posisi x sama dengan amplitudo A, maka energy kinetic = nol, sedangkan energy total adalah sama dengan enrgi potensial maksimumnya, yaitu

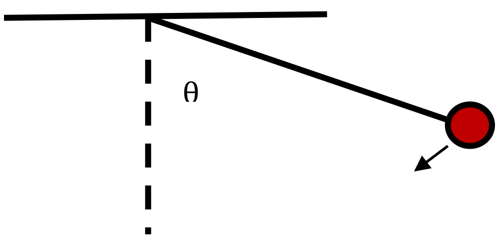
$$E = \frac{1}{2}kA^2$$

Saat posisi x=0, maka energy kinetiknya akan maksimal, sedangkan energy potensialnya adalah nol

$$E = \frac{1}{2} m {v_{max}}^2$$

B. GERAKAN OSILASI BEBAS PADA BANDUL

Gerak pada bandul adalah salah satu contoh gerak bolak-balik suatu benda digantungkan pada seutas tali dengan panjang l, kemudian benda tersebut diputar dengan sudut θ, tentukan persamaan gerak benda tersebut




$$L = \frac{1}{2} m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - (mgy)$$

kita tinjau posisi benda yang bermassa

$$x, y, z = l sin(\theta), -l cos(\theta), 0$$

kita tinjau perubahan posisi terhadap perubahan waktu

$$\frac{d}{dt}(x, y, z) = \frac{d}{dt}\{l sin(\theta), -l cos(\theta), 0\}$$

panjang *l* tidak mengalami perubahan untuk setiap waktu *t* sekon, sedangkan sudut θ mengalami perubahan untuk setiap waktu *t* sekon, sehingga persamaan diatas akan menjadi

$$\frac{d}{dt}(x,y,z) = l\frac{d}{dt}\{sin(\theta), -cos(\theta), 0\}$$

$$= l\frac{d\theta}{dt}\frac{d}{d\theta}\{sin(\theta), -cos(\theta), 0\}$$

$$\frac{d}{dt}(x,y,z) = l\dot{\theta}cos\theta, l\dot{\theta}\ sin\theta, 0$$

masukkan persamaan diatas

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - (mgy)$$

$$L = \frac{1}{2}m\left((l\dot{\theta}cos\theta)^2 + (l\dot{\theta}\ sin\theta)^2 + 0\right) - (-mglcos(\theta))$$

$$L = \frac{1}{2}m\ l^2\dot{\theta}^2 + mglcos\theta$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dL}{d\dot{q}}\right) = \frac{dL}{dq}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dL}{d\dot{\theta}}\right) = \frac{dL}{d\theta}$$

$$\frac{d}{dt}ml^2\dot{\theta} = -mglsin\theta$$

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l}sin\theta$$

Untuk sudut $\theta$ yang kecil dapat digunakan deret Fourier, sehingga penyelesaian persamaan ini adalah

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0$$

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0$$

$$\left(D^2 + \frac{g}{l}\right)\theta = 0$$

$$D_{1,2} = \pm\sqrt{-\frac{g}{l}} = \pm i\sqrt{\frac{g}{l}}$$

Bila kita menganggap bahwa kita memulai getaran sistem dengan meregangkan bandul sejauh $A$ kemudian melepaskannya, solusi persamaan di atas yang memberikan gerakan massa adalah:

$$\theta = Aexp\ i\sqrt{\frac{g}{l}}t + B\exp - i\sqrt{\frac{g}{l}}t$$

$$\theta = A\cos\sqrt{\frac{g}{l}}t + B\sin\sqrt{\frac{g}{l}}\ t = A\cos\omega\, t + B\sin\omega\, t$$

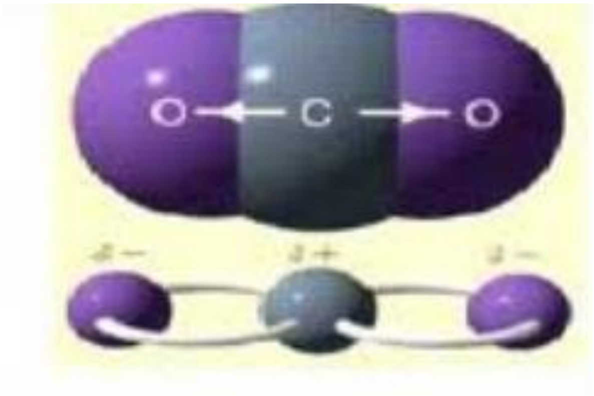
$$\theta = A\sin(\omega t + \gamma) = A\sin(2\pi f t + \gamma)$$

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} = A\omega\ cos(\omega t + \gamma)$$

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = -A\omega^2\ sin(\omega t + \gamma)$$

C. SOAL DAN PEMBAHASAN

1. Sebuah model klasik molekul $CO_2$ yang terdiri dari struktur linear tiga massa dengan gaya listrik diantara ion-ionnya yang direpresentasikan dengan dua buah pegas yang identik dan konstanta pegas tersebut k. abaikan efek rotasi, anggaplah m adalah $O^-$ dan M adalah $C^{++}$,tentukan kecepatan sudut masing-masing massa (MIT)

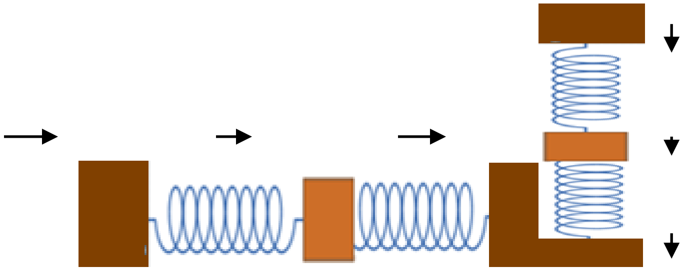



Jawab

Pada kaadaan tertentu setiap senyawa mempunyai tiga macam gerakan, yaitu :

1. Gerak Translasi, yaitu perpindahan dari satu titik ke titik lain.
2. Gerak Rotasi, yaitu berputar pada porosnya, dan
3. Gerak Vibrasi, yaitu bergetar pada tempatnya

Karena pada soal ini gerak rotasi diabaikan, maka dapat dipandang gerakan pada senyawa tersebut dapat berupa gerak translasi dan vibrasi, jika kita buat system klasik maka dapat dibuat seperti pada gambar di bawah



$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}_1^{\,2} + \frac{1}{2}M\dot{x}_2^{\,2} + \frac{1}{2}m\dot{x}_3^{\,2}$$

Karena kedua pegas mengalami peregangan dan pengerutan, maka besar energy potensialya adalah

$$V = \frac{1}{2}k(-x_1 + x_2)^2 + \frac{1}{2}k(-x_2 + x_3)^2$$

$$V = \frac{1}{2}k(x_2 - x_1)^2 + \frac{1}{2}k(x_3 - x_2)^2$$

$$V = \frac{1}{2}k(x_2^{\,2} - 2x_2x_1 + x_1^{\,2}) + \frac{1}{2}k(x_3^{\,2} - 2x_3x_2 + x_2^{\,2})$$

maka

$$L = T - V$$

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x_1}^2 + \frac{1}{2}M\dot{x_2}^2 + \frac{1}{2}m\dot{x_3}^2 - \frac{1}{2}k(x_2^2 - 2x_2x_1 + x_1^2) - \frac{1}{2}k(x_3^2 - 2x_3x_2 + x_2^2)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dL}{d\dot{q}}\right) = F + \frac{dL}{dq}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dL}{d\dot{x_1}}\right) = \frac{dL}{dx_1}$$

$$m\frac{d}{dt}\dot{x_1} = k(x_2 - x_1)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dL}{d\dot{x_2}}\right) = \frac{dL}{dx_2}$$

$$M\frac{d}{dt}\dot{x_2} = k(x_1 - x_2) + k(x_3 - x_2)$$

$$M\frac{d}{dt}\dot{x_2} = k(x_1 - 2x_2 + x_3)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dL}{d\dot{x_3}}\right) = \frac{dL}{dx_3}$$

$$m\frac{d}{dt}\dot{x_3} = k(x_2 - x_3)$$

Gerakan pada gerak pegas yang harmonis akan menghasilkan suatu fungsi sinusoidal, maka jika dibuat bahwa

$$x_1 = A\cos\omega t$$

$$x_2 = B\cos\omega t$$

$$x_3 = C\cos\omega t$$

Sehingga

$$m\frac{d}{dt}\dot{x}_1 = k(x_2 - x_1)$$

$$-m\omega^2 A\cos\omega t = k\cos\omega t\,(B - A)$$

$$\boldsymbol{(k - m\omega^2)A - kB = 0}$$

$$M\frac{d}{dt}\dot{x}_2 = k(x_1 - 2x_2 + x_3)$$

$$-M\omega^2 B\cos\omega t = k\cos\omega t\,(A - 2B + C)$$

$$\boldsymbol{(2k - M\omega^2)B - kA - kC = 0}$$

$$m\frac{d}{dt}\dot{x}_3 = k(x_2 - x_3)$$

$$-m\omega^2 C\cos\omega t = k\cos\omega t\,(B - C)$$

$$\boldsymbol{(k - m\omega^2)C - kB = 0}$$

dengan menggunakan matrix dan metode Crammer

$$\begin{pmatrix} k - m\omega^2 & -k & 0 \\ -k & 2k - M\omega^2 & -k \\ 0 & -k & k - m\omega^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} = 0$$

Penyelesaian ini mengharuskan

$$\begin{pmatrix} k - m\omega^2 & -k & 0 \\ -k & 2k - M\omega^2 & -k \\ 0 & -k & k - m\omega^2 \end{pmatrix} = 0$$

Maka persamaan ini akan menjadi

$$\begin{bmatrix} k - m\omega^2 & -k & 0 \\ -k & 2k - M\omega^2 & -k \\ 0 & -k & k - m\omega^2 \end{bmatrix} = 0$$

$$k - m\omega^2 \begin{bmatrix} 2k - M\omega^2 & -k \\ -k & k - m\omega^2 \end{bmatrix} - (-k)\begin{bmatrix} -k & -k \\ 0 & k - m\omega^2 \end{bmatrix} + 0 = 0$$

$$(k - m\omega^2)\left(\left((2k - M\omega^2).(k - m\omega^2)\right) - k^2\right) + k\left(-k.(k - m\omega^2)\right) = 0$$

$$(k - m\omega^2)\left((2k^2 - (2m + M)k\omega^2 + Mm\omega^4) - k^2\right) - k^2(k - m\omega^2) = 0$$

$$2k^2(k - m\omega^2) - \left((2m + M)k\omega^2 + Mm\omega^4\right)(k - m\omega^2) - 2k^2(k - m\omega^2) = 0$$

dari persamaan ini diharuskan bahwa

$$\left((2m + M)k\omega^2 + Mm\omega^4\right)(k - m\omega^2) = 0$$

$$\omega_1 = \pm\sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{(2m + M)k}{Mm}}$$

$$\omega_3 = 0$$

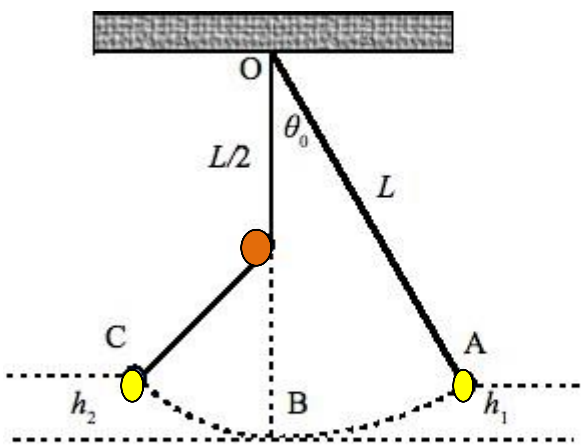
2. Sebuah sistem bandul sederhana mempunyai panjang tali $L$ berada dalam medan gravitasi $g$. Beban yang digunakan mempunyai massa $m$ dan dapat dianggap berbentuk massa titik. Pada posisi vertikal di bawah titik O terdapat sebuah paku pada jarak $L/2$ dari O. Akibat paku ini, ayunan bandul berubah arah seperti

ditunjukkan pada gambar. Sudut simpangan mula-mula $\theta 0$ dipilih sedemikian rupa sehingga ketinggian maksimum (titik A) massa $m$ relatif terhadap titik terendah (titik B) adalah $h1$. Anggap simpangan sudut $\theta 0$ kecil.

a) Berapakah ketinggian $h2$ dari titik C (titik C adalah posisi simpangan maksimum).

b) Hitung periode osilasi sistem (yaitu gerak dari A – B – C – B – A). (Seleksi Kabupaten OSN 2009)

Jawab




a) Dari gambar dapat dilihat bahwa ketinggian benda adalah sama, hal tersebut dapat dijelaskan sebagai berikut

$$To = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 = 0$$

Jika benda dijatuhkan tanpa kecepatan awal, maka energy kinetic awal To benda adalah nol

$$Vo = mgh_1$$

$$T = \frac{1}{2}mv'^2 + \frac{1}{2}I\omega'^2 = 0$$

Pada ketinggian maksimum benda di titik C kecepatan benda adalah nol, maka T=0

$$V = mgh_2$$

Berdasarkan hukum kekekalan energy mekanik maka didapatkan bahwa

$$To + Vo = T + V$$

$$h_2 = h_1$$

b) Pada soal b

$$L = \frac{1}{2}m\, l^2\dot{\theta}^2 + mglcos\theta$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dL}{d\dot{q}}\right) = \frac{dL}{dq}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dL}{d\dot{\theta}}\right) = \frac{dL}{d\theta}$$

$$\frac{d}{dt}ml^2\dot{\theta} = -mglsin\theta$$

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l}sin\theta$$

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0$$

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0$$

$$\left(D^2 + \frac{g}{l}\right)\theta = 0$$

$$D_{1,2} = \pm\sqrt{-\frac{g}{l}} = \pm i\sqrt{\frac{g}{l}}$$

$$\theta = Aexp\ i\sqrt{\frac{g}{l}}t + B\exp -i\sqrt{\frac{g}{l}}t$$

$$\theta = A\cos\sqrt{\frac{g}{l}}t + B\sin\sqrt{\frac{g}{l}}\ t = A\cos\omega\,t + B\sin\omega\,t$$

$$\theta = A\sin(\omega t + \gamma) = A\sin(2\pi f t + \gamma)$$

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} = A\omega\ cos(\omega t + \gamma)$$

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = -A\omega^2\ sin(\omega t + \gamma)$$

Sehingga besar periode untuk panjang tali l adalah

$$\frac{2\pi}{T} = \omega$$

$$\frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

$$T_l = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

Periode bandul dengan panjang tali l/2adalah

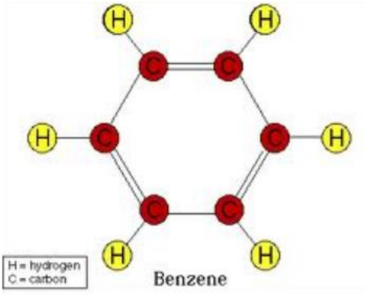
$$T_{l/2} = 2\pi\sqrt{\frac{l/2}{g}}$$

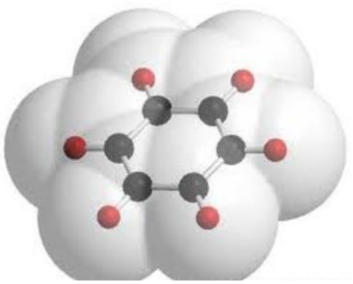
Sehingga total waktu osilasi bandul untuk kembali ketitik awal adalah

$$t = T_l + T_{l/2} + T_l + T_{l/2} = 2T_l + 2T_{\frac{l}{2}}$$

$$T = 4\pi\sqrt{\frac{l}{g}} + 4\pi\sqrt{\frac{l}{2g}}$$

3. Sebuah rantai benzene seperti pada gambar yang terdiri dari enam buah massa identik dan dihubungkan oleh dengan gaya listrik diantara ion-ionnya yang direpresentasikan dengan sebuah pegas, jika konstanta pegas k pada setiap massanya. Tentukan periode yang terjadi pada setiap massanya (Princenton)



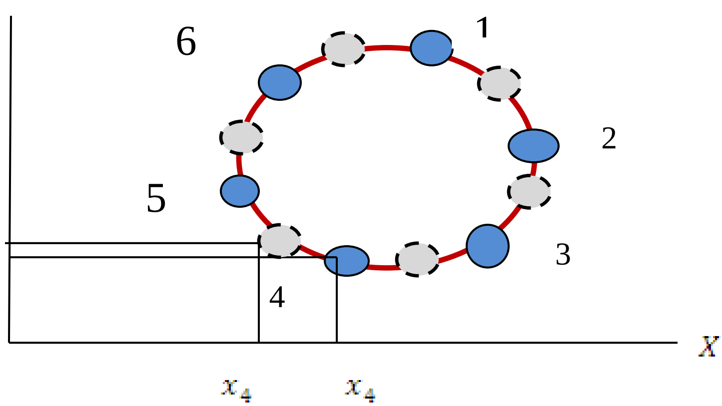
Jawab

Kita permudah bentuk rantai benzene ini dengan bentuk lingkaran dan terhubung oleh pegas dengan konstanta k. Jika kita tinjau soal no. 1 dimana pada massa ditengah (yang terpengaruh dua pegas) dari soal tersebut sebenarnya massa tersebut terpengaruh oleh dua pergerakan pegas yaitu pada tiap massa benda akan mengalami gaya seperti pada massa yang terpengaruh pada pegas di soal no.1, dari soal tersebut kita tahu bahwa persamaan gaya-gaya pada pegas tersebut adalah

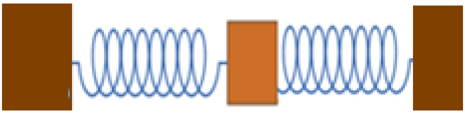
$$m\frac{d}{dt}\dot{x}_2 = k(x_1 - x_2) + k(x_3 - x_2)$$

$$m\frac{d}{dt}\dot{x}_2 = k(x_1 - 2x_2 + x_3)$$

Jika pada gambar benzene di atas kita beri simbol



Dan kita buat persamaan gambar seperti pada gambar soal no.1



1 2 3

maka

persamaan pada massa ke-2 di rantai benzene adalah

$$m\frac{d}{dt}\dot{x}_2 = k(x_1 - x_2) + k(x_3 - x_2)$$

$$m\frac{d}{dt}\dot{x}_2 = k(x_1 - 2x_2 + x_3)$$

Persamaan pada massa ke-3 di rantai benzene adalah

$$m\frac{d}{dt}\dot{x}_3 = k(x_2 - x_3) + k(x_4 - x_3)$$

$$m\frac{d}{dt}\dot{x}_3 = k(x_2 - 2x_3 + x_4)$$

Persamaan tersebut dapat dibentuk menjadi suatu fungsi yaitu sebagai berikut:

$$m\ddot{x}_n = k(x_{n-1} - x_n) + k(x_{n+1} - x_n)$$

$$m\ddot{x}_n = k(x_{n-1} - 2x_n + x_{n+1})$$

Jika

$$x_1 = A\cos\omega t$$

$$x_2 = B\cos\omega t$$

$$x_3 = C\cos\omega t$$

$$x_4 = D\cos\omega t$$

$$x_5 = E\cos\omega t$$

$$x_6 = F\cos\omega t$$

Bentuk nilai-nilai posisi partikel dapat dituliskan dalam persamaan

$$x_n = A_n\ cos\omega t$$

Pada soal no. 1, setelah memasukkan nilai posisi ini maka akan didapatkan

$$m\frac{d}{dt}\dot{x_2} = k(x_1 - 2x_2 + x_3)$$

$$-m\omega^2 B\cos\omega t = k\cos\omega t\,(A - 2B + C)$$

Maka persamaan untuk massa benzene pada posisi ke-2 adalah

$$-m\omega^2 B\cos\omega t = k\cos\omega t\,(A - 2B + C)$$

$$-m\omega^2 B = k(A - 2B + C)$$

Atau jika dituliskan dalam bentuk persamaan yang lebih cantik

$$-m\omega^2 B\cos\omega t = k\cos\omega t\,(A - 2B + C)$$

$$-m\omega^2 A_n\cos\omega t = k\cos\omega t\,(A_{n-1} - 2A_n + A_{n+1})$$

$$-m\omega^2 A_n = k(A_{n-1} - 2A_n + A_{n+1})$$

$$\left(A_{n-1} - 2A_n + \frac{m\omega^2}{k}A_n + A_{n+1}\right) = 0$$

$$A_{n-1} + \left(-2 + \frac{m\omega^2}{k}\right)A_n + A_{n+1}$$

$$A_{n-1} + eA_n + A_{n+1} = 0$$

Persamaan ini dapat dituliskan menjadi

Untuk massa ke-1

$$F + eA + B = 0$$

Untuk massa ke-2

$$A + eB + C = 0$$

Untuk massa ke-3

$$B + eC + D = 0$$

Untuk massa ke-4

$$C + eD + E = 0$$

Untuk massa ke-5

$$D + eE + F = 0$$

Untuk massa ke-6

$$E + eF + A = 0$$

Persamaan-persamaan diatas dapat dituliskan dalam bentuk matriks menjadi

$$\begin{pmatrix} e & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & e & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & e & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & e & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & e & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ F \end{pmatrix} = 0$$

Penyelesaian system ini mengharuskan

$$\begin{vmatrix} e & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & e & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & e & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & e & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & e & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & e \end{vmatrix} = 0$$

Nilai e akan didapatkan dari perhitungan ini, kemudian nilai $\omega$ akan didapatkan dari perhitungan ini pula, karena

$$-2 + \frac{m\omega^2}{k} = e$$

Dari contoh soal no. 1 semestinya nilai-nilai frekuensi antara lain terdapat nilai-nilai yang sama, seperti $\omega = 0$; $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ dan juga $\omega = \sqrt{\frac{3k}{m}}$, dan beberapa nilai lain yang masih perlu anda cari.

Gelombang adalah bentuk dari getaran yang merambat pada suatu medium. Pada suatu satuan atau gabungan getaran yang merambat adalah gelombangnya, bukan zat medium perantaranya. Satu gelombang dapat dilihat panjangnya dengan menghitung jarak antara lembah dan bukit (gelombang tranversal) atau menhitung jarak antara satu rapatan dengan satu renggangan (gelombang longitudinal). Cepat rambat gelombang adalah jarak yang ditempuh oleh gelombang dalam waktu satu detik.

A. RUMUSAN UMUM GELOMBANG

$$E = \frac{hv}{\lambda} = hf \qquad \text{Pers-8.1}$$

$$\lambda(t) = \frac{Ts}{t} \, atau \, \lambda(n) = \frac{s}{\sum n_{gelombang}} \qquad \text{Pers-8.2}$$

Hubungan antara periode T dan panjang gelombang adalah

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \qquad \text{Pers-8.3}$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \qquad \text{Pers-8.4}$$

Sehingga

$$v = \lambda f = \frac{2\pi}{k}\frac{\omega}{2\pi} = \frac{\omega}{k}$$

Keterangan

E adalah energy gelombang (joule)

$\lambda$ adalah panjang gelombang ,dimana satu $\lambda$ adalah **jumlahan satu bukit dan lembah** (m)

$f$ adalah frekuensi / banyak getaran tiap sekon dengan satu $f$ yaitu **jumlahan satu bukit dan lembah** (Hz)

$T$ adalah periode yang besarnya yaitu **jumlahan satu bukit dan satu lembah**.

$\omega$ adalah kecepatan anguler gelombang ( rad/s)

$v$ adalah cepat rambat gelombang (m/s)

$s$ adalah jarak tempuh gelombang dari sumber sampai ke tujuan (m)

$t$ adalah waktu perambatan (s)

$$\frac{f_p}{f_s} = \frac{C - v_p}{C - v_s} \qquad \text{Pers-8.5}$$

$$f_p = \frac{C - v_p}{C - v_s} f_s \qquad \text{Pers-8.6}$$

Jadi rumusan secara umum adalah

$$f_p = \frac{C \pm v_p}{C \pm v_s} f_s \qquad \text{Pers-8.7}$$

C adalah kecepatan bunyi di udara 340 m/s

Jika ada kecepatan angin

$$\frac{f_p}{f_s} = \frac{C + v_w \pm v_p}{C + +v_w \pm v_s} \qquad \text{Pers-8.8}$$

Frekuensi pelayangan adalah frekuensi yang di dengar oleh satu sumber tetapi memiliki frekuensi sumber ganda dengan amplitude yang sama

$$f_{pA} - f_{pB} = \frac{C \pm v_p}{C \pm v_A} f_A - \frac{C \pm v_p}{C \pm v_B} f_B \qquad \text{Pers-8.9}$$

## B. INTENSITAS BUNYI

Adalah besar daya P gelombang yang diberikan pada tiap satuan luas A ($m^2$)

$$I = \frac{P}{A} = \frac{P}{\int R^2 \, sin\theta \, d\varphi d\theta} = \frac{P}{4\pi R^2} = \varepsilon_o E^2 c$$

Taraf Intensitas

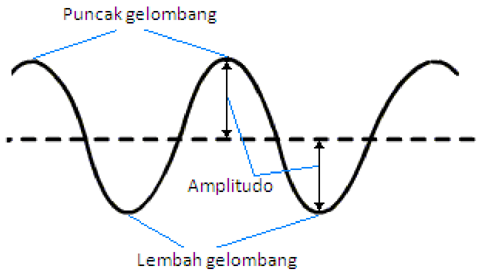
$$TI = 10 \log \frac{I}{Io}$$

*Io* adalah taraf intensitas awal ($10^{-12}$ watt/ $m^2$)

## C. JENIS GELOMBANG

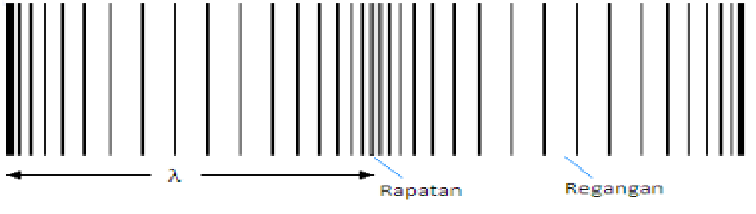
***Gelombang Transversal***

Suatu gelombang dapat dikelompokkan menjadi gelombang trasnversal jika partikel-partikel mediumnya bergetar ke atas dan ke bawah dalam arah tegak lurus terhadap gerak gelombang. Contoh gelombang transversal adalah gelombang tali. Ketika kita menggerakan tali naik turun, tampak bahwa tali bergerak naik turun dalam arah tegak lurus dengan arah gerak gelombang. Bentuk gelombang transversal tampak seperti gambar di bawah.




***Gelombang Longitudinal***

Selain gelombang transversal, terdapat juga gelombang longitudinal. Jika pada gelombang transversal arah getaran medium tegak lurus arah rambatan, maka pada gelombang longitudinal, arah getaran medium sejajar dengan arah rambat gelombang. bayangkanlah getaran sebuah pegas. *Perhatikan gambar di bawah*



Pada gambar di atas tampak bahwa arah getaran sejajar dengan arah rambatan gelombang. Serangkaian **rapatan** dan **regangan** merambat sepanjang pegas. **Rapatan** merupakan daerah di mana kumparan pegas saling mendekat, sedangkan **regangan** merupakan daerah di mana kumparan pegas saling menjahui. Jika gelombang tranversal memiliki pola berupa puncak dan lembah, maka gelombang longitudinal terdiri dari pola rapatan dan regangan.

Gelombang tali merupakan contoh gelombang transversal, sedangkan contoh gelombang longitudinal adalah gelombang bunyi. Lalu bagaimana dengan gelombang air ? gelombang air bukan sepenuhnya gelombang transversal atau gelombang longitudinal. Gelombang air merupakan gabungan antara gelombang transversal dan gelombang longitudinal.

Pada saat titik maksimum A gelombang merambat ke kiri sejauh x

$$y = A\sin(\omega t + kx) \qquad \text{Pers-8.10}$$

Gelombang merambat ke kanan sejauh x

$$y = A\sin(\omega t - kx) \qquad \text{Pers-8.11}$$

$$y = A\sin\left(\frac{2\pi t}{T} - \frac{2\pi x}{\lambda}\right) = A sin(2\pi\varphi) \qquad \text{Pers-8.12}$$

Beda fase antara dua buah titik adalah

$$2\pi\Delta\varphi = \left(\frac{2\pi t_A}{T} - \frac{2\pi x}{\lambda}\right) - \left(\frac{2\pi t_B}{T} - \frac{2\pi x}{\lambda}\right) = \frac{2\pi t_A}{T} - \frac{2\pi t_B}{T} \qquad \text{Pers-8.13}$$

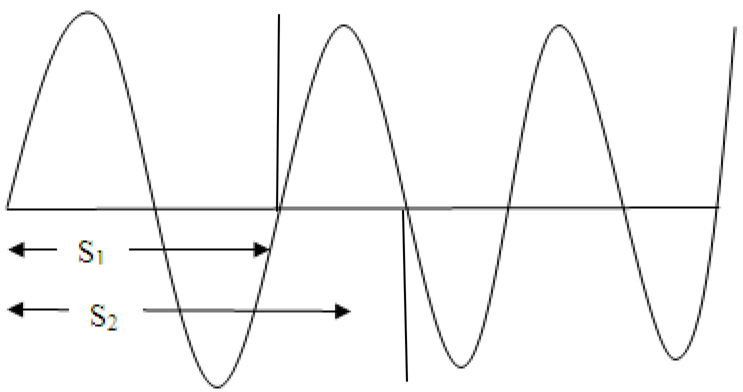
$$2\pi\Delta\varphi = \left(\frac{2\pi t}{T} - \frac{2\pi x_A}{\lambda}\right) - \left(\frac{2\pi t}{T} - \frac{2\pi x_B}{\lambda}\right) = -\frac{2\pi x_A}{\lambda} + \frac{2\pi x}{\lambda} \quad \text{Pers-8.14}$$

Superposisi dua buah gelombang adalah penjumlahan dua buah gelombang

$$y = y(1) + y(2)$$

$$y = A\sin(kx + \omega t) + A\sin(kx - \omega t)$$

$$y = 2A\sin\left(\frac{1}{2}2kx\right)\cos\left(\frac{1}{2}.-2\omega t\right)$$
$$= 2A\sin(kx)\cos(-\omega t) = 2A\sin(kx)\cos(\omega t)$$




Menurut Doppler

$$S_1 = \lambda$$

$$S_2 = \left(1 + \frac{1}{4}\right)\lambda = \left(\sum n_{gelombang}\right)\lambda$$

$$simpul\ ke - 3 = \frac{5}{4}\lambda$$

## D. PERCOBAAN MELDE

Melde melakukan percobaan untuk mengamati besar gaya yang dihasilkan oleh sebuah gelombang transfersal pada tali

$$F = \frac{mv^2}{R} \qquad \text{Pers-8.15}$$

$$v = \sqrt{\frac{FR}{m}} \qquad \text{Pers-8.16}$$

$$v = \lambda f = \sqrt{\frac{FR}{m}} \qquad \text{Pers-8.17}$$

$$f = \frac{1}{\lambda}\sqrt{\frac{FR}{m}} \qquad \text{Pers-8.18}$$

Maka besar frekuensi pada dawai adalah

$$f = \frac{1}{\lambda}\sqrt{\frac{FR}{m}} = \frac{1}{2R}\sqrt{\frac{FR}{m}}$$

$$f_o = \frac{1}{\lambda_o}\sqrt{\frac{FR}{m}} = \frac{1}{2R}\sqrt{\frac{FR}{m}}$$

$$f_o : f_1 : f_2 = 1 : 2 : 3$$

R adalah panjang tali

E. SOAL DAN PEMBAHASAN GETARAN

1. Sebuah Gelombang berjalan akan memenuhi suatu persamaan $y = 0{,}2 \sin 0{,}4\pi(60t - x)$ tentukan kecepatan rambat gelombang, panjang gelombang dan frekuensi gelombang

Jawab

$$y = 0{,}2 \sin 0{,}4\pi(60t - x)$$

$$y = 0{,}2 \sin(24\pi t - 0{,}4\pi x)$$

$$y = A \sin(\omega t - kx) = A \sin\left(\frac{2\pi t}{T} - \frac{2\pi x}{\lambda}\right)$$

Frekuensi gelombang

$$f = \frac{1}{T}$$

$$\frac{2\pi t}{T} = 24\pi t$$

$$T = \frac{1}{12} \rightarrow f = 12\ Hz$$

Panjang gelombang

$$\frac{2\pi x}{\lambda} = 0{,}4\pi x$$

$$\lambda = 5m$$

Kecepatan rambat gelombang

$$v = \lambda f = 60m/s$$

2. Gelombang air laut menyebabkan permukaan air naik turun dengan periode 2 sekon. Jika jarak antar dua puncak gelombang adalah 5 meter,maka gelombang akan mencapai jarak 10 meter dalam waktu (UMPTN 2001)

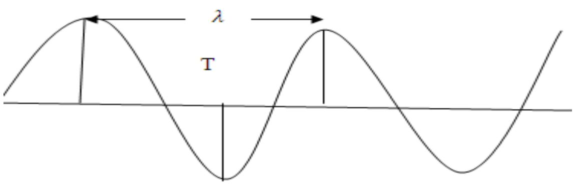
Jawab

$$v = \lambda f = \frac{\lambda}{T} = \frac{s}{t}$$

$$\frac{\lambda(t)}{T} = \frac{s}{t}$$

$$\frac{5}{2} = \frac{10}{t}$$

$$t = 4\ sekon$$




3. Tali yang panjangnya 5 meter dan bertegangan 2 N digetarkan sehingga terbentuk gelombang stasioner. Jika massa tali adalah 0,625 kg, maka cepat rambat gelombang tali adalah

Jawab

$$F = \frac{mv^2}{R}$$

$$v = \sqrt{\frac{FR}{m}} = \sqrt{\frac{2.5}{0{,}625}} = 4m/s$$

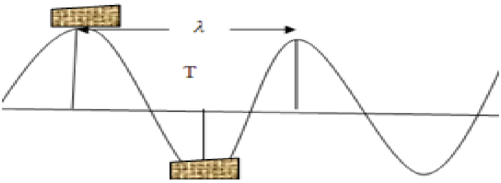
4. Seorang nelayan merasakan perahunya dihempaskan oleh gelombang sehingga perahu bergerak naik turun. Waktu yang dibutuhkan untuk untuk bergerak dari puncak ke lembah adalah 3 sekon. Jarak antar puncak gelombang adalah 12 meter. Waktu yang diperlukan gelombang untuk mencapai pantai yang jauhnya 100 m adalah

Jawab

$$\frac{1}{2}T = 3sekon$$

$$T = 6\ sekon$$

$$\lambda = 12$$




$$\lambda(t) = \frac{Ts}{t}$$

$$t = \frac{Ts}{\lambda(t)} = \frac{6.100}{12} = 50\ s$$

Mekanika kuantum adalah cabang dasar fisika modern yang menggantikan mekanika klasik pada tataran atom dan subatom. Ilmu ini memberikan kerangka matematika untuk berbagai cabang fisika dan kimia, termasuk fisika atom, fisika molekular, kimia komputasi, kimia kuantum, fisika partikel, dan fisika nuklir. Mekanika kuantum adalah bagian dari teori medan kuantum dan fisika kuantum umumnya, yang, bersama relativitas umum, merupakan salah satu pilar fisika modern. Dasar dari mekanika kuantum adalah bahwa energy itu tidak kontinyu, tapi diskrit atau berupa 'paket' atau 'kuanta'. Konsep ini cukup revolusioner, karena bertentangan dengan fisika klasik yang berasumsi bahwa energi itu berkesinambungan.

## A. HASIL KARYA FISIKA MODERN DAN KUANTUM

Hasil karya dari mekanika kuantum adalah salah satunya penurunan rumus besar energy yang dipancarkan atau diserap dan juga berapakah besar penjang gelombang ataupun besar momentum sudut pada atom hydrogen.

Penemu-penemu deret (Lyman, Balmer,, Paschen, Brachet, Pfund)☺

$$\frac{1}{\lambda} = R\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2}\right)$$

- Model atom Bohr ☺

  Besar momentum sudut dan energy electron dalam bergerak

$$L = Pr = I\omega = mvr = (no.\, lintasan).\frac{h}{2\pi}$$

Panjang gelombang menurut Bohr

$$mvr = n\frac{h}{2\pi}$$

$$2\pi r = n\frac{h}{mv}$$

$$2\pi r = n\lambda$$

$$\lambda = \frac{h}{mv}$$

- Energy untuk pindah lintasan pada atom hydrogen adalah

$$\Delta E = E_2 - E_1 = 13{,}6\ eV\left(\frac{1}{{R_1}^2} - \frac{1}{{R_2}^2}\right)$$

B. RUMUSAN DASAR MEKANIKA KUANTUM

Rumus-rumus fundamental dalam mekanika kuantum

Hamiltonian suatu paket gelombang dari partikel dapat dituliskan sebagai berikut

$$H\psi(x,t) = T\psi(x,t) + V\ \psi(x,t) \qquad \text{Pers-9.1}$$

$$i\hbar\frac{d\psi(x,t)}{dt} = \frac{p^2}{2m}\psi(x,t) + V\psi(x,t)$$

Persamaan Schrödinger

$$i\hbar\frac{d\psi(x,t)}{dt} = H\psi(x,t) \qquad \text{Pers-9.2}$$

Persamaan fungsi gelombang gayut waktu

$$\psi_n(x,t) = \varphi_n(x)exp(-i\omega t) \qquad \text{Pers-9.3}$$

Persamaan gelombang sinusoidal

$$\psi_n(x,t) = A\ exp\{i(kx - wt)\} = A\sin(kx - \omega t) \qquad \text{Pers-9.4}$$

Persamaan gelombang eksponensial

$$\psi_n(x,t) = A\ exp\{(kx - wt)\} \qquad \text{Pers-9.5}$$

$$= A\ exp\{(kx - wt)\}$$

Operator momentum

$$\hat{P} = -i\hbar\nabla = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}$$ Pers-9.6

Operator posisi

$$\hat{X} = x$$ Pers-9.7

Normalisasi

$$\langle\psi|\psi\rangle = \int d^3r\ \psi(r)^\dagger\ \psi(r) = 1$$ Pers-9.8

Harga ekspektasi menemukan partikel pada posisi x

$$\langle\hat{x}\rangle = \langle\psi|\hat{x}|\psi\rangle = \int d^3r\ \psi(r)^\dagger\,\hat{x}\ \psi(r)$$ Pers-9.9

Dalam penentuan bentuk fungsi gelombang harus diperhatikan hal-hal sebagai berikut ini:

Gelombang akan berbentuk sinusoidal jika tidak mengalami peluruhan/ suatu hambatan dalam pergerakannya sehingga mengakibatkan bentuk fungsi gelombangnya mengalami perubahan bentuk menjadi eksponensial. Jika gelombang datang dari tak hingga sampai daerah tak hingga maka bentuk fungsi nya secara umum adalah sinusoidal positif untuk daerah tujuannya ( batasan tak hingganya)

Gelombang akan berbentuk eksponensial jika gelombang tersebut mengalami peluruhan. Pada kasus ini jika gelombang datang dari tak hingga tetapi gelombang dapat menembus padatan/ solid, maka bentuk fungsi gelombangnya adalah suatu eksponensial yang positif ( menandakan gelombang akan menembus padatan tersebut dengan suatu energy tertentu), sedangkan jika gelombang menembus padatan hingga takhingga jauhnya maka bentuk gelombangnya akan menjadi bentuk eksponensial yang negative.

## C. SUMUR POTENSIAL TAK HINGGA

Diketahui suatu partikel dengan suatu potensial V dalam sumur potensial tak hingga ( kotak satu dimensi )yang memenuhi suatu persamaan Schrodinger dengan fungsi gelombang $\psi\ (x,t)$ , maka persamaan fungsi gelombangnya adalah

$$\grave{H} = \grave{T} + \grave{V}$$

$$\hat{H}\psi(x,t) = \hat{T}\psi(x,t) + \hat{V}\psi(x,t)$$

$$i\hbar\frac{d\psi(x,t)}{dt} = \frac{p^2}{2m}\psi(x,t) + V\psi(x,t)$$

$$i\hbar\frac{d\psi(x,t)}{dt} = \frac{\left(-i\hbar d/_{dx}\right)^2}{2m}\psi(x,t) + V\psi(x,t)$$

$$i\hbar\frac{d\psi(x,t)}{dt} = -\hbar^2\frac{d^2\psi(x,t)}{2m\,dx^2} + V\psi(x,t)$$

$$i\hbar\frac{d(XT)}{dt} = -\hbar^2\frac{d^2(XT)}{2m\,dx^2} + V\psi(x,t)$$

$$i\hbar X\frac{d(T)}{dt} = -\hbar^2 T\frac{d^2(X)}{2m\,dx^2} + V\psi(x,t)$$

$$i\hbar\frac{d(T)}{T\,dt} = -\hbar^2\frac{d^2(X)}{2mX\ \ dx^2} + V$$

$$i\hbar\frac{d(T)}{T\,dt} = -\hbar^2\frac{d^2(X)}{2mX\ \ dx^2} + V = E$$

Penyelesaian terhadap waktu adalah

$$i\hbar\frac{d(T)}{T\,dt} = E$$

$$\frac{d(T)}{dt} = -iET/\hbar$$

$$\left(D + \frac{iE}{\hbar}\right)T = 0$$

$$T = \psi(t) = exp(-iEt/\hbar)$$

Sehingga penyelesaian umumnya adalah

$$\psi(x,t) = X(x)exp\left(-\frac{iEt}{\hbar}\right)$$

Penyelesaian fungsi gelombang terhadap posisi adalah

$$-\hbar^2 \frac{d^2(X)}{2mX \;\; dx^2} + V = E$$

$$-\hbar^2 \frac{d^2(X)}{2mX \;\; dx^2} = E$$

$$\frac{d^2(X)}{dx^2} = -\frac{2mE}{\hbar^2}X$$

$$\frac{d^2(X)}{dx^2} + \frac{2mE}{\hbar^2}X = 0$$

$$\left(D^2 + \frac{2mE}{\hbar^2}\right)X = 0$$

$$D1, D2 = \pm i\sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$$

$$\psi(x) = Aexp\left(i\sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}x\right) + Bexp\left(-i\sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}x\right)$$

$$\psi(x) = A\cos\sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}x + B\sin\sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}\;x$$

Pemasukkan syarat batas

Syarat pertama adalah : Tidak ada partikel saat batas x=0, karena tidak ada partikel yang dapat menembus dinding

$$\psi(x=0)=0=A\cos\sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}x+B\sin\sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}x$$

$$0=A+0$$

Dari rumusan ini akan didapatkan bahwa nilai A akan = 0, agar penyelesaiannya memenuhi syarat batas.

Syarat kedua adalah: Tidak ada partikel saat batas x=L, karena tidak ada partikel yang dapat menembus dinding

$$\psi(x=L)=0=A\cos\sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}x+B\sin\sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}x$$

$$0=0+B\sin\sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}L$$

Dari rumusan diatas, maka diharuskan nilai dari sinus adalah suatu nilai yang harus bernilai nol

$$\sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}L=n\pi; n=1,2,3$$

$$E=\frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2m\,L^2}$$

Didapatkan E, yaitu besar Energi partikel tersebut.

Fungsi gelombangterhadap posisi secara umum dituliskan sebagai

$$\psi(x) = A\cos\sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}\,x + B\sin\sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}\,x = B\sin\sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}\,x$$

$$\psi(x) = B\sin\sqrt{\frac{2m\frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2m\,L^2}}{\hbar^2}}\,x$$

$$\psi(x) = B\sin\sqrt{\frac{2m\frac{k^2\hbar^2}{2m}}{\hbar^2}}\,x = B\sin kx$$

Dengan nilai k adalah $k^2 = n^2\pi^2/L^2$

Untuk mencari nilai B, maka dilakukan normalisasi, yaitu dengan cara

$$\langle\psi|\psi\rangle = 1$$

Yang bermakna probabilitas menemukan partikel dengan kebolehjadian terbesar

$$\langle\hat{x}\rangle = \langle\psi|\hat{x}|\psi\rangle = \int d^3r\ \psi(r)^\dagger\hat{x}\ \psi(r);\ \hat{x} = 1$$

$\langle\psi|\psi\rangle = 1$, normalisasi/probabilitas menemukan partikel dengan kebolehjadian terbesar

$$\langle\psi|\psi\rangle = \int d^3r\ \psi(r)^\dagger\ \psi(r) = 1$$

Karena pada kasus ini dipandang sebagai kasus 1 dimensi, maka nilai $d^3r = dx$

$$\langle\psi|\psi\rangle = \int dx\ \psi(x)^\dagger\ \psi(x) = 1$$

$$\langle\psi|\psi\rangle = \int dx\ (B\sin kx)^\dagger B\sin kx = 1$$

$$\langle\psi|\psi\rangle = B^2\int dx\ (\sin kx)^\dagger \sin kx = 1$$

$$B^2\int_0^L dx\ (\sin kx)^\dagger \sin kx = 1$$

$$\int_0^L dx\ (\sin kx)^2 = \frac{1}{B^2}$$

Masih ingatkah anda dengan rumus-rumus dasar trigonometri

$$\cos 2x = cos^2 x - sin^2 x$$

$$cos^2 x + sin^2 x = 1$$

Maka

$$\cos 2x = 1 - sin^2 x - sin^2 x = 1 - 2sin^2 x$$

Atau dengan kata lain

$$sin^2 x = \frac{(1-\cos 2x)}{2}$$

$$\int_0^L \frac{(1-\cos 2kx)}{2} dx = \frac{1}{B^2}$$

$$\int_0^L \frac{1}{2} dx - \int_0^L \cos 2kx \, dx = \frac{1}{B^2}$$

$$\frac{L}{2} - \int_0^L \cos \frac{2n\pi x}{L} \, dx = \frac{1}{B^2}$$

$$\frac{L}{2} - 0 = \frac{1}{B^2}$$

Maka nilai B adalah

$$B = \sqrt{\frac{2}{L}}$$

Sehingga penyelesaian lengkap fungsi gelombangnya adalah

$$\psi(x,t) = X(x) exp\left(-\frac{iEt}{\hbar}\right) = \psi(x) exp\left(-\frac{iEt}{\hbar}\right); E = \hbar\omega$$

$$= \frac{n^2 \pi^2 \hbar^2}{2m\, L^2}$$

$$\psi(x,t) = \psi(x) exp(-i\omega t)$$

$$= \sqrt{\frac{2}{L}} \sin(kx) exp(-i\omega t); k^2 = \frac{n^2 \pi^2}{L^2}$$

$$\psi(x,t) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin(kx - \omega t); k^2 = \frac{n^2 \pi^2}{L^2}$$

D. SOAL DAN PEMBAHASAN

1. Suatu partikel bergerak dalam ruang satu dimensi, dimana fungsi gelombang terhadap posisi adalah $\psi(x)$ tentukan persamaan gelombang partikel tersebut dengan menerapkan hamiltoniannya

$$\grave{H} = \grave{T} + \grave{V}$$

$$\grave{H}\psi(x,t) = \grave{T}\psi(x,t) + \grave{V}\psi(x,t)$$

$$i\hbar\frac{d\psi(x,t)}{dt} = \frac{p^2}{2m}\psi(x,t) + V\psi(x,t)$$

$$i\hbar\frac{d\psi(x,t)}{dt} = \frac{\left(-i\hbar d/_{dx}\right)^2}{2m}\psi(x,t) + V\psi(x,t)$$

$$i\hbar\frac{d\psi(x,t)}{dt} = -\hbar^2\frac{d^2\psi(x,t)}{2m\,dx^2} + V\psi(x,t)$$

$$i\hbar\frac{d(XT)}{dt} = -\hbar^2\frac{d^2(XT)}{2m\,dx^2} + V\psi(x,t); X = \psi(x) dan\ T = \psi(t)$$

$$i\hbar X\frac{d(T)}{dt} = -\hbar^2 T\frac{d^2(X)}{2m\,dx^2} + V\psi(x,t)$$

$$i\hbar\frac{d(T)}{T\ dt} = -\hbar^2\frac{d^2(X)}{2mX\ \ dx^2} + V$$

$$i\hbar\frac{d(T)}{T\ dt} = -\hbar^2\frac{d^2(X)}{2mX\ \ dx^2} + V = E$$

Penyelesaian terhadap waktu adalah

$$i\hbar\frac{d(T)}{T\ dt} = E$$

$$\frac{d(T)}{dt} = -iET/\hbar$$

$$\left(D + \frac{iE}{\hbar}\right)T = 0$$

$$T = exp(-iEt/\hbar)$$

Sehingga penyelesaian umumnya adalah

$$\psi(x,t) = X(x)exp\left(-\frac{iEt}{\hbar}\right) = \varphi(x)exp\left(-\frac{iEt}{\hbar}\right); E = \hbar\omega$$

$$\psi(x,t) = \varphi(x)exp(-i\omega t)$$

$$\psi(x,t) = \varphi_n(x)exp(-i\omega t) = A\exp(i(kx-\omega t))$$

$$= A\sin(kx-\omega t)$$

2. Suatu partikel dalam kotak 3 dimensi dengan panjang masing-masing sisi adalah a,b,c dari titik pusat (0,0,0), jika potensial V( x,y,z)= 0, daerah $0 < x < a\ dan\ juga\ 0 < y < b; dan\ 0 < z < c$, sedangkan selain itu adalah tak berhingga, maka tentukan persamaan fungsi gelombangnya

Jawab

$$\hat{H} = \hat{T} + \hat{V}$$

$$\hat{H}\psi(x,y,z,t) = \hat{T}\psi(x,y,z,t) + \hat{V}\psi(x,y,z,t)$$

$$i\hbar\frac{d\psi(x,y,z,t)}{dt}=\frac{p^2}{2m}\psi(x,y,z,t)+V\psi(x,y,z,t)$$

$$i\hbar\frac{d\psi(x,y,z,t)}{dt}=\frac{(-i\hbar\nabla)^2}{2m}\psi(x,y,z,t)+V\psi(x,y,z,t)$$

$$i\hbar\frac{d\psi(x,y,z,t)}{dt}$$
$$=-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{d^2\psi(x,y,z,t)}{dx^2}+\frac{d^2\psi(x,y,z,t)}{dy^2}\right.$$
$$\left.+\frac{d^2\psi(x,y,z,t)}{dz^2}\right)+V\psi(x,y,z,t)$$

$$i\hbar\frac{d(XYZT)}{dt}=-\frac{\hbar^2}{2m}\left(ZYT\frac{d^2X}{dx^2}+XZT\frac{d^2Y}{dy^2}+XYT\frac{d^2Z}{dz^2}\right)$$
$$+VXYZT$$

$$i\hbar XYZ\frac{d(T)}{dt}=-\frac{\hbar^2}{2m}\left(ZYT\frac{d^2X}{dx^2}+XZT\frac{d^2Y}{dy^2}+XYT\frac{d^2Z}{dz^2}\right)$$
$$+VXYZT$$

$$i\hbar\frac{d(T)}{T\ dt}=-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{d^2X}{X\ dx^2}+\frac{d^2Y}{Y\ dy^2}+\frac{d^2Z}{Z\ dz^2}\right)+V$$

$$i\hbar\frac{d(T)}{T\ dt}=-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{d^2X}{X\ dx^2}+\frac{d^2Y}{Y\ dy^2}+\frac{d^2Z}{Z\ dz^2}\right)+V=E$$

Penyelesaian terhadap waktu adalah

$$i\hbar\frac{d(T)}{T\ dt}=E$$

$$\frac{d(T)}{dt} = -iET/\hbar$$

$$\left(D + \frac{iE}{\hbar}\right)T = 0$$

$$T = exp(-iEt/\hbar)$$

Sehingga penyelesaian umumnya adalah

$$\psi(x,y,z,t) = X(x)Y(y)Z(z)exp\left(-\frac{iEt}{\hbar}\right)$$

Penyelesaian fungsi gelombang terhadap posisi adalah

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{d^2X}{X\ dx^2} + \frac{d^2Y}{Y\ dy^2} + \frac{d^2Z}{Z\ dz^2}\right) + V = E$$

$$\left(\frac{d^2X}{X\ dx^2} + \frac{d^2Y}{Y\ dy^2} + \frac{d^2Z}{Z\ dz^2}\right) = -\frac{2mE}{\hbar^2}$$

$$\frac{d^2(X)}{Xdx^2} = -\frac{d^2Y}{Y\ dy^2} - \frac{d^2Z}{Z\ dz^2} - \frac{2mE}{\hbar^2} = -{k_1}^2$$

$$\frac{d^2(X)}{dx^2} = -{k_1}^2X$$

Penyelesaian terhadap posisi x adalah

$$\left(D^2 + {k_1}^2\right)X = 0$$

$$D1, D2 = \pm ik_1$$

$$\psi(x) = Aexp\ (ik_1x) + Bexp\ (-ik_1x)$$

$$\psi(x) = A\cos k_1x + B\sin k_1\ x$$

Pemasukkan syarat batas

Syarat pertama adalah : Tidak ada partikel saat batas x=0, karena tidak ada partikel yang dapat menembus dinding

$$\psi(x = 0) = 0 = A\cos k_1 x + B\sin k_1 x$$

$$0 = A + 0$$

Dari rumusan ini akan didapatkan bahwa nilai A akan = 0, agar penyelesaiannya memenuhi syarat batas.

Syarat kedua adalah: Tidak ada partikel saat batas x=$a$, karena tidak ada partikel yang dapat menembus dinding

$$\psi(x = a) = 0 = A\cos k_1 x + B\sin k_1 x$$

$$0 = 0 + B\sin k_1 a$$

Dari rumusan diatas, maka diharuskan nilai dari sinus adalah suatu nilai yang harus bernilai nol, sehingga

$$k_1 a = n\pi$$

$$k_1 = \frac{n\pi}{a}$$

Fungsi gelombang terhadap posisi secara umum dituliskan sebagai

$$\psi(x) = A\cos k_1 x + B\sin k_1\ x = B\sin k_1\ x$$

Untuk mencari nilai B dapat dilakukan normalisasi, yaitu dengan cara

$$\langle\psi|\psi\rangle = \int d^3r\ \psi(r)^\dagger\ \psi(r) = 1$$

Karena pada kasus ini dipandang sebagai kasus 1 dimensi, maka nilai $d^3r = dx$

$$\langle\psi|\psi\rangle = \int dx\ \psi(x)^\dagger\ \psi(x) = 1$$

$$\langle\psi|\psi\rangle = \int dx\ (B\sin k_1x)^\dagger B\sin k_1x = 1$$

$$\langle\psi|\psi\rangle = B^2\int dx\ (\sin k_1x)^\dagger \sin k_1x = 1$$

$$B^2\int_0^a dx\ (\sin k_1x)^\dagger \sin k_1x = 1$$

$$\int_0^a dx\ (\sin k_1x)^2 = \frac{1}{B^2}$$

Masih ingatkah anda dengan rumus-rumus dasar trigonometri

$$\cos 2x = cos^2 x - sin^2 x$$

$$cos^2 x + sin^2 x = 1$$

Maka

$$\cos 2x = 1 - sin^2 x - sin^2 x = 1 - 2sin^2 x$$

Atau dengan kata lain

$$sin^2 x = \frac{(1-\cos 2x)}{2}$$

$$\int_0^a \frac{(1-\cos 2k_1x)}{2}dx = \frac{1}{B^2}$$

$$\int_0^a \frac{1}{2}dx - \int_0^a \cos 2k_1x\, dx = \frac{1}{B^2}$$

$$\frac{a}{2} - \int_0^a \cos\frac{2n\pi x}{a}\, dx = \frac{1}{B^2}$$

$$\frac{a}{2} - 0 = \frac{1}{B^2}$$

Maka nilai B adalah

$$B = \sqrt{\frac{2}{a}}$$

$$-\frac{d^2Y}{Y\,dy^2} - \frac{d^2Z}{Z\,dz^2} - \frac{2mE}{\hbar^2} = -{k_1}^2$$

$$\frac{d^2Y}{Y\,dy^2} = -\frac{d^2Z}{Z\,dz^2} - \frac{2mE}{\hbar^2} + {k_1}^2 = -{k_2}^2$$

$$\frac{d^2(Y)}{dy^2} = -{k_2}^2Y$$

Penyelesaian terhadap posisi y adalah

$$\left(D^2 + {k_2}^2\right)Y = 0$$

$$D1, D2 = \pm ik_2$$

$$\psi(y) = C exp\,(ik_2y) + D exp\,(-ik_2y)$$

$$\psi(y) = C\cos k_2y + D\sin k_2\ y$$

Pemasukkan syarat batas

Syarat pertama adalah : Tidak ada partikel saat batas y=0, karena tidak ada partikel yang dapat menembus dinding

$$\psi(y = 0) = 0 = C \cos k_2 y + D \sin k_2 \ y$$

$$0 = C + 0$$

Dari rumusan ini akan didapatkan bahwa nilai C akan = 0, agar penyelesaiannya memenuhi syarat batas.

Syarat kedua adalah: Tidak ada partikel saat batas y=$b$, karena tidak ada partikel yang dapat menembus dinding

$$\psi(y = b) = 0 = C \cos k_2 y + D \sin k_2 \ y$$

Hasil ini juga harus memenuhi suatu syarat batas, yaitu

$$k_2 b = n\pi$$

$$k_2 = \frac{n\pi}{b}$$

Fungsi gelombang terhadap posisi secara umum dituliskan sebagai

$$\psi(y) = C \cos k_2 y + D \sin k_2 \ y = D \sin k_2 \ y$$

Untuk mencari nilai B dapat dilakukan normalisasi, yaitu dengan cara

$$\langle\psi|\psi\rangle = \int d^3r \ \psi(r)^\dagger \ \psi(r) = 1$$

Karena pada kasus ini dipandang sebagai kasus 1 dimensi, maka nilai $d^3r = dy$

$$\langle\psi|\psi\rangle = \int dy\, \psi(y)^\dagger\, \psi(y) = 1$$

$$\langle\psi|\psi\rangle = \int dy\ (D \sin k_2 y)^\dagger D \sin k_2 y = 1$$

$$\int_0^b dy\ (\sin k_2 y)^2 = \frac{1}{D^2}$$

$$sin^2 x = \frac{(1 - \cos 2x)}{2}$$

Dengan menggunakan rumus identitas trigonomtetri di atas dan sedikit perhitungan, maka nilai D adalah

$$D = \sqrt{\frac{2}{b}}$$

Dari rumusan diatas, maka diharuskan nilai dari sinus adalah suatu nilai yang harus bernilai nol

Fungsi gelombang terhadap posisi secara umum dituliskan sebagai

$$\psi(y) = C \cos k_2 y + D \sin k_2\ y = D \sin k_2\ y$$

$$\frac{d^2 Z}{Z\ dz^2} = -\frac{2mE}{\hbar^2} + {k_1}^2 + {k_2}^2 = -{k_3}^2$$

Dengan cara yang sama, maka akan didapatkan bahwa bentuk fungsi gelombang terhadap sumbu-z adalah

$$\psi(y) = E\cos k_3 y + F\sin k_3\ y = F\sin k_3\ y$$

Dengan sedikit perhitungan seperti pada sumbu x dan sumbu y , maka nilai dari F adalah

$$F = \sqrt{\frac{2}{c}}$$

Atau dengan kata lain

$$\frac{2mE}{\hbar^2} = {k_1}^2 + {k_2}^2 + {k_3}^2$$

Dengan kata lain besar energy E adalah

$$E = \frac{\hbar^2\left({k_1}^2 + {k_2}^2 + {k_3}^2\right)}{2m} = \frac{\hbar^2\left({k_r}^2\right)}{2m}$$

$$E = \frac{\hbar^2\left(\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2\right)}{2m} = \frac{\hbar^2 n^2 \pi^2}{2m}\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right)$$

Bentuk fungsi gelombang secara umum adalah

$$\psi(x,y,z,t) = B\sin(k_1 x)\, D\sin(k_2 y)\, F\sin(k_3 z) exp(-i\omega t)$$

$$\psi(x,y,z,t) = \sqrt{\frac{2}{a}}\sin(k_1 x)\sqrt{\frac{2}{b}}\sin(k_2 y)\sqrt{\frac{2}{c}}\sin(k_3 z) exp(-i\omega t)$$

3. Bedakan bentuk fungsi gelombang antara mekanika klasik dengan mekanika kuantum pada osilator harmonik

Jawab

Pandangan Mekanika Klasik dalam osilator harmonik

$$T = \frac{1}{2}mx^2 = \frac{p^2}{2m}$$

$$V = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}m\omega^2x^2$$

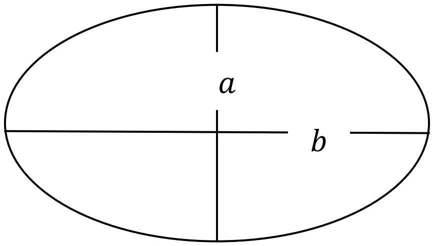
$$H = T + V$$

$$H(x,p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2x^2 = E$$

peramaan ini dapat dibawa ke bentuk

$$\frac{p^2}{2mE} + \frac{x^2}{2E/m\omega^2} = 1$$

persamaan ini adalah bentuk persamaan elips




$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{p^2}{b^2} = 1$$

jika $a > b$ maka sumbu panjangnya terletak sepanjang sumbu x sehingga sumbu panjangnya adalah $a = \sqrt{2E/m\omega^2}$

jika $a < b$ maka sumbu panjangnya terletak sepanjang sumbu p sehingga sumbu panjangnya adalah b= $\sqrt{2mE}$

berdasarkan hukum Newton

$$F = -\nabla E = -\nabla \mathrm{H}$$

$$\boldsymbol{\frac{dp}{dt} = -\frac{dH}{dx}} \ldots (\mathbf{1})$$

$$\frac{dp}{dt} = -m\omega^2 x$$

berdasarkan rumusan Bohr

$$E = pv = p\frac{dx}{dt}$$

$$\boldsymbol{\frac{dx}{dt} = \frac{dH}{dp}} \ldots (\mathbf{2})$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{p}{m}$$

$$p = m\frac{dx}{dt}$$

substitusikan ke persamaan

$$\frac{dp}{dt} = -m\omega^2 x$$

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -m\omega^2 x$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0 \ldots (3)$$

kemudian untuk mencari p(t)

$$\frac{dp}{dt} = -m\omega^2 x$$

$$x = \frac{dp}{-m\omega^2 dt}$$

substitusikan ke persamaan

$$\frac{dx}{dt} = \frac{p}{m}$$

$$\frac{d\left(\frac{dp}{-m\omega^2 dt}\right)}{dt} = \frac{p}{m}$$

$$\frac{d^2p}{dt^2} = -\omega^2 p$$

$$\frac{d^2p}{dt^2} + \omega^2 p = 0$$

penyelesaian persamaan tersebut berturut-turut adalah

$$x(t) = A\ sin\omega t + B\ cos\omega t$$

$$p(t) = C\ sin\omega t + D\ \ cos\omega t$$

Gunakan kaitan

$$\frac{p^2}{2mE} + \frac{x^2}{2E/m\omega^2} = 1$$

persamaan ini adalah bentuk persamaan elips

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{p^2}{b^2}=1$$

jika $a > b$ maka sumbu panjangnya terletak sepanjang sumbu x sehingga sumbu panjangnya adalah $a = \sqrt{2E/m\omega^2}$, dari kaitan ini kita bisa mendapatkan amplitudo maksimal

$$x(0) = 0, maka\ p_{max}\ (t) = \sqrt{2mE}$$

$$p(0) = 0, maka\ x_{max}\ (t) = \sqrt{2E/m\omega^2}$$

$$x(t) = A\ sin\omega t + B\ cos\omega t$$

$$x(0) = A\ sin\omega.0 + B\ cos\omega.0 = 0$$

$$x(0) = 0 + B\ = 0$$

maka akan mengharuskan bahwa nilai $B = 0$

sehingga

$$x(t) = \sqrt{2E/m\omega^2}\ sin\omega t$$

untuk mencari momentum

$$p(t) = C\ sin\omega t + D\ \ cos\omega t$$

$$p_{max}\ (t) = C\ sin\omega t + D\ \ cos\omega t = C sin\ 90^0 + D\ cos 90^o\ = C + 0$$

maka akan mengharuskan nilai $C = 0$

sehingga

$$p(t) = \sqrt{2mE}\, cos\omega t$$

dengan mudah dapat dibuktikan bahwa $c(t) = \big(x(t), p(t)\big) = \left(\sqrt{\frac{2E}{m\,\omega^2}}\ sin\omega t, \sqrt{2mE}\, cos\omega t\right)$ dengan bentuk hubungan antara posisi dan momentum adalah elips

jika A($x^i$,$p_i$), dengan $x_i = x_1, x_{2,\dots}$ dan $p_i = p_1, p_{2,\dots}$, adalah suatu observabel klasik dan seiring dengan perkembangan (evolusi) sistem mekanik terhadap waktu, maka besaran H pun berubah terhadap waktu, sehingga

$$\frac{dA}{dt} = \frac{dA(x,p)}{dt} = \frac{\partial A}{\partial t} + \sum \frac{\partial A}{\partial x^i}\frac{\partial x^i}{\partial t} + \frac{\partial A}{\partial p_i}\frac{\partial p_i}{\partial t}$$

$$\frac{dA}{dt} = \frac{\partial A}{\partial t} + \sum \frac{\partial A}{\partial x^i}\frac{\partial H}{\partial p_i} + \frac{\partial A}{\partial p_i}\frac{-\partial H}{\partial x^i}$$

$$\frac{dA}{dt} = \frac{\partial A}{\partial t} + \sum \frac{\partial A}{\partial x^i}\frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial A}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial x^i}$$

$$\frac{dA}{dt} = \frac{\partial A}{\partial t} + \{A, H\}$$

$\{A, H\}$ adalah kurung poisson, tentu saja besaran A tidak gayut pada waktu secara eksplisit, maka laju perubahan A terhadap waktu diberikan oleh

$$\frac{dA}{dt} = \{A, H\}$$

besaran tenaga total H adalah lestari/ kekal, sejauh besaran yang lestari tersebut tidak ada ketergantungan terhadap waktu

Mekanika kuantum : osilator harmonik

$$\hat{H} = \hat{T} + \hat{V}$$

$$\hat{H}\psi(x,t) = \hat{T}\psi(x,t) + \hat{V}\psi(x,t)$$

$$\hat{H}\psi(x,t) = \frac{\hat{P}^2}{2m}\psi(x,t) + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2\psi(x,t)$$

$$\hat{H}\psi(x,t) = \frac{(-i\hbar\nabla)^2}{2m}\psi(x,t) + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2\psi(x,t)$$

$$i\hbar\frac{d\psi(x,t)}{dt} = \frac{\left(-i\hbar d/_{dx}\right)^2}{2m}\psi(x,t) + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2\psi(x,t)$$

$$i\hbar\frac{d\psi(x,t)}{dt} = \frac{\left(-i\hbar d/_{dx}\right)^2}{2m}\psi(x,t) + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2\psi(x,t)$$

$$i\hbar\frac{dXT}{dt} = \frac{\left(-\hbar d/_{dx}\right)^2}{2m}XT + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2XT$$

$$Xi\hbar\frac{dT}{dt} = -\frac{T\hbar d^2X}{2mdx^2} + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2XT$$

$$i\hbar\frac{dT}{Tdt} = -\frac{\hbar d^2X}{2mXdx^2} + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2 = E$$

Penyelesaian terhadap waktu adalah

$$i\hbar\frac{d(T)}{T\ dt} = E$$

$$\frac{d(T)}{dt} = -iET/\hbar$$

$$\left(D+\frac{iE}{\hbar}\right)T=0$$

$$T=exp(-iEt/\hbar)$$

Sehingga penyelesaian umumnya adalah

$$\psi(x,t)=X(x)exp\left(-\frac{iEt}{\hbar}\right)$$

Penyelesaian terhadap posisi adalah

$$-\frac{\hbar^2 d^2X}{2mXdx^2}+\frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2=E$$

$$-\frac{d^2X}{dx^2}+\frac{2mX}{\hbar^2}\left(\frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2-E\right)=0$$

$$\frac{d^2X}{dx^2}+\frac{2mX}{\hbar^2}\left(E-\frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2\right)=0$$

$$\frac{d^2\psi}{dx^2}+\frac{2m}{\hbar^2}\left(E-\frac{1}{2}m\omega^2x^2\right)\psi=0$$

☺ Karena fungsi gelombang mengandung fungsi posisi x, yaitu $\psi(x)$, maka harus diubah bentuk tersebut dengan cara rekursi Pengubahan fungsi posisi akan di jabarkan secara rekursi sebagai berikut

Jika dimisalkan

$$x=\zeta xo$$

Dengan $\zeta$ (zeta) adalah besaran tak berdimensi, dan xo adalah suatu konstanta dengan dimensi yang sama dengan x, maka

$$\frac{d\psi}{dx} = \frac{d\bar{\psi}}{d(xo\zeta)}$$

$$\frac{d\psi}{dx} = \frac{1}{xo}\frac{d\bar{\psi}}{d\zeta}$$

$\bar{\psi}$ adalah Ansatz yaitu fungsi yang mengandung $\bar{\psi}(\zeta)$

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} = \frac{1}{xo^2}\frac{d^2\bar{\psi}}{d\zeta^2}$$

Substitusikan persamaan ini ke dalam persamaan

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2}\left(E - \frac{1}{2}m\omega^2 x^2\right)\psi = 0$$

$$\frac{1}{xo^2}\frac{d^2\bar{\psi}}{d\zeta^2} + \frac{2m}{\hbar^2}\left(E - \frac{1}{2}m\omega^2\zeta^2 xo^2\right)\bar{\psi} = 0$$

$$\frac{d^2\bar{\psi}}{d\zeta^2} + \frac{2m}{\hbar^2}\left(Exo^2 - \frac{1}{2}m\omega^2\zeta^2 xo^4\right)\bar{\psi} = 0$$

$$\frac{d^2\bar{\psi}}{d\zeta^2} + \left(\frac{2mExo^2}{\hbar^2} - \frac{m^2\omega^2 xo^4}{\hbar^2}\zeta^2\right)\bar{\psi} = 0 \ldots (1)$$

$m, \omega, \hbar, xo$ adalah suatu konstanta, Jika dimisalkan

$$\frac{m^2\omega^2 xo^4}{\hbar^2} = 1$$

$$\frac{\hbar^2}{m^2\omega^2} = xo^4$$

$$xo = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$$

Dengan memasukkan persamaan diatas ke Persamaan (1), maka

$$\frac{d^2\bar{\psi}}{d\zeta^2} + \left(\frac{2E}{\hbar\omega} - \zeta^2\right)\bar{\psi} = 0 \ldots (2)$$

Dapat dikondisikan energy $E$ sangat kecil, maka dapat dipandang

$$\frac{d^2\bar{\psi}}{d\zeta^2} - (\zeta^2)\bar{\psi} = 0$$

$$(D^2 - \zeta^2)\bar{\psi} = 0$$

$$D = \pm\zeta$$

Hasil penyelesaian dari persamaan ini adalah

$$\bar{\psi} = Aexp\ \zeta^2 + Bexp(-\zeta^2)$$

Agar memenuhi nilai kekonvergenan, maka

$$\bar{\psi}(\infty) = 0 = Aexp\ \infty^2 + Bexp - \infty^2 = \infty + 0$$

Maka mengharuskan

$$\bar{\psi} = Bexp(-\zeta^2) \ldots (3)$$

Hasil tersebut adalah nilai untuk $E$ yang sangat kecil, jika niali $E$ muncul sebagai nilai yang cukup besar, maka persamaan diatas dapat diseting seperti berikut

$$\bar{\psi} = Bexp(-\zeta^2)C\,\exp(\alpha) = g(\zeta)exp(-\alpha\zeta^2) \ldots (4)$$

☺ Jika dimisalkan

$$e = \frac{2E}{\hbar\omega}$$

Maka persamaan (2) akan berubah menjadi

$$\frac{d^2\bar{\psi}}{d\zeta^2} + (e - \zeta^2)\bar{\psi} = 0$$

Substitusikan persamaan (4) ke $\frac{d^2\bar{\psi}}{d\zeta^2}$, maka

Karena

$$\frac{d}{d\zeta}\left(exp(-\alpha\zeta^2)\right) = -2\alpha\zeta exp(-\alpha\zeta^2)$$

Persamaan posisi fungsi gelombang

$$\bar{\psi} = g(\zeta)exp(-\alpha\zeta^2)$$

$$\frac{d\bar{\psi}}{d\zeta} = exp(-\alpha\zeta^2)\frac{dg}{d\zeta} - g2\alpha\zeta exp(-\alpha\zeta^2)$$

$$\frac{d^2\bar{\psi}}{d\zeta^2} = \frac{d}{d\zeta}\left(exp(-\alpha\zeta^2)\frac{dg}{d\zeta} - g(\zeta)2\alpha\zeta exp(-\alpha\zeta^2)\right)$$

$$= \left(\frac{d^2g}{d\zeta^2} - 2\alpha\zeta\frac{dg}{d\zeta} - 2\alpha\zeta\frac{dg}{d\zeta} - 2\alpha g\right.$$

$$\left. + g4\alpha^2\zeta^2\right)exp(-\alpha\zeta^2)$$

$$\frac{d^2\bar{\psi}}{d\zeta^2} + (e - \zeta^2)\bar{\psi} = 0$$

$$\left(\frac{d^2 g}{d\zeta^2} - 2\alpha\zeta\frac{dg}{d\zeta} - 2\alpha\zeta\frac{dg}{d\zeta} - 2\alpha g + g4\alpha^2\zeta^2\right) + eg - \zeta^2 g = 0$$

$$\frac{d^2 g}{d\zeta^2} - 4\alpha\zeta\frac{dg}{d\zeta} + (e - 2\alpha)g + (4\alpha^2 - 1)g\zeta^2 = 0 \ldots (5)$$

Jika dikondisikan bahwa

$$4\alpha^2 - 1 = 0$$

Maka

$$\alpha = \frac{1}{2}$$

Sehingga persamaan (5) berubah menjadi

$$\frac{d^2 g}{d\zeta^2} - 2\zeta\frac{dg}{d\zeta} + (e - 1)g = 0$$

Persamaan diatas hendak diselesaikan dengan rekursi

$$g(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\zeta^n = a_0\zeta^0 + a_1\zeta^1 + a_2\zeta^2 + \ldots$$

$$\frac{d}{d\zeta}g(\zeta) = \frac{d}{d\zeta}\sum_{n=0}^{\infty} a_n\zeta^n = n\sum_{n=0}^{\infty} a_n\zeta^{n-1} = 0 + a_1\zeta^0$$

Jika $n - 1 = l, maka\ n = l + 1$, sehingga

$$\frac{dg}{d\zeta} = \frac{d}{d\zeta}g(\zeta) = (l + 1)\sum_{l=0}^{\infty} a_{l+1}\zeta^l$$

Dan jika dideferensialkan kembali, maka

$$\frac{d^2g}{d\zeta^2} = n(n-1)\sum_{n=0}^{\infty} a_n\zeta^{n-2} = 0 + 0 + 2a_2\zeta^0$$

$$\frac{d}{d\zeta}\left(\frac{d}{d\zeta}g(\zeta)\right) = \frac{d}{d\zeta}(l+1)\sum_{l=0}^{\infty} a_{l+1}\zeta^l$$

$$\frac{d}{d\zeta}\left(\frac{d}{d\zeta}g(\zeta)\right) = l(l+1)\sum_{l=0}^{\infty} a_{l+1}\zeta^{l-1}$$

Jika $m = l - 1$, maka$l = m + 1$, sehingga

$$\frac{d^2g}{d\zeta^2} = \frac{d}{d\zeta}\left(\frac{d}{d\zeta}g(\zeta)\right) = (m+1)(m+2)\sum_{m=0}^{\infty} a_{m+2}\zeta^m$$

Kemudian substitusikan persamaan tersebut ke dalam

$$\frac{d^2g}{d\zeta^2} - 2\zeta\frac{dg}{d\zeta} + (e-1)g = 0$$

$$(m+1)(m+2)\sum_{m=0}^{\infty} a_{m+2}\zeta^m - 2\zeta(l+1)\sum_{l=0}^{\infty} a_{l+1}\zeta^l$$

$$+ (e-1)\sum_{n=0}^{\infty} a_n\zeta^n = 0$$

Hubungan-hubungan $m, l, dan\ n$

Sehingga

$$\frac{d^2g}{d\zeta^2} - 2\zeta\frac{dg}{d\zeta} + (e-1)g = 0$$

$$m = l - 1 = n - 2$$

$$m + 2 = n - 2 + 2 = n$$

$$(m+1)(m+2)\sum_{m=0}^{\infty} a_{m+2}\zeta^{m} - 2\zeta(l+1)\sum_{l=0}^{\infty} a_{l+1}\zeta^{l}$$

$$+ (e-1)\sum_{n=0}^{\infty} a_n\zeta^n = 0$$

$$(m+1)(m+2)\sum_{m=0}^{\infty} a_{m+2}\zeta^{m} - 2(l+1)\sum_{l=0}^{\infty} a_{l+1}\zeta^{l+1}$$

$$+ (e-1)\sum_{n=0}^{\infty} a_n\zeta^n = 0$$

$$(n-1)(n)\sum_{n-2=0}^{\infty} a_n\zeta^{n-2} - 2(n)\sum_{n-1=0}^{\infty} a_n\zeta^n + (e-1)\sum_{n=0}^{\infty} a_n\zeta^n$$
$$= 0$$

$$(n-1)(n)\sum_{n=2}^{\infty} a_n\zeta^{n-2} - 2(n)\sum_{n=1}^{\infty} a_n\zeta^n + (e-1)\sum_{n=0}^{\infty} a_n\zeta^n = 0$$

Karena variable $\zeta^n$ belum sama, maka harus dibuat sedemikia hingga variablenya menjadi $\zeta^n$, yaitu dengan cara

$$(n-1)(n)\sum_{n=2}^{\infty} a_n\zeta^{n-2} \to (n+1)(n+2)\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2}\zeta^n$$

Sehingga

$$(n+1)(n+2)\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2}\zeta^n - 2(n)\sum_{n=1}^{\infty} a_n\zeta^n + (e-1)\sum_{n=0}^{\infty} a_n\zeta^n = 0$$

$$(n+1)(n+2)\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2}\zeta^n - 2(n)\sum_{n=0}^{\infty} a_n\zeta^n + (e-1)\sum_{n=0}^{\infty} a_n\zeta^n = 0$$

Timbul pertanyaan ☺, mengapa

$$2(n)\sum_{n=1}^{\infty} a_n\zeta^n = 2(n)\sum_{n=0}^{\infty} a_n\zeta^n$$

$$2(n)\sum_{n=1}^{\infty} a_n\zeta^n = 2a_1\zeta^1$$

$$2(n)\sum_{n=0}^{\infty} a_n\zeta^n = 0 + 2a_1\zeta^1$$

Mudahkan ☺

Karena saat n=0, pada nilai awalnya adalah nol, sehingga dianggap sama

$$(n+1)(n+2)a_{n+2} + (-2n-1+e)a_n = 0$$

$$(n+1)(n+2)a_{n+2} = (2n+1-e)a_n$$

$$a_{n+2} = \frac{(2n+1-e)a_n}{(n+1)(n+2)}$$

$$\frac{a_{n+2}}{a_n} = \frac{(2n+1-e)}{(n+1)(n+2)}$$

Agar memenuhi nilai kekonvergensian, maka mengharuskan saat n=∞, maka

$$\sum a_{n+2} = \sum \frac{(2n+1-e)a_n}{(n+1)(n+2)} = 0$$

Maka mengharuskan bahwa

$$(2n+1-e) = 0$$

$$e = 2n+1$$

Substitusikan ke Persamaan

$$\frac{d^2 g}{d\zeta^2} - 2\zeta \frac{dg}{d\zeta} + 2ng = 0$$

Fungsi di atas adalah fungsi Hermite

$$\bar{\psi} = g(\zeta)exp(-\alpha\zeta^2)$$

$$\bar{\psi} = g(\zeta)exp\left(-\frac{1}{2}\zeta^2\right)$$

$$\bar{\psi} = NH_n(\zeta)exp\left(-\frac{1}{2}\zeta^2\right)$$

Fungsi gelombang perlu di normalisasikan, sehingga menjadi

$$\langle\bar{\psi}|\bar{\psi}\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} N^2 H_n(\zeta)exp\left(-\frac{1}{2}\zeta^2\right) H_n(\zeta)exp\left(-\frac{1}{2}\zeta^2\right) d\zeta$$

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} N^2 H_n(\zeta) H_n(\zeta) exp(-\zeta^2) d\zeta$$

Dengan sedikit perhitungan, maka akan didapatkan bahwa

$$\bar{\psi} = 1/\sqrt{2^n n!\sqrt{\pi}}H_n(\zeta)exp\left(-\frac{1}{2}\zeta^2\right)$$

Bentuk diatas adalah bentuk fungsi gelombang terhadap $\zeta$, maka agar dapat diubah ke bentuk x, dapat dilakukan dnegan cara

$$x = xo\zeta$$

$$\bar{\psi}(\zeta) = \frac{1}{\sqrt{2^n n!\sqrt{\pi}}}H_n(\zeta)exp\left(-\frac{1}{2}\zeta^2\right)$$

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{xo}}\bar{\psi}(\zeta)$$

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2^n n!\sqrt{xo}\sqrt{\pi}}}H_n\left(\frac{x}{xo}\right)exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{xo}\right)^2\right)$$

Sehingga penyelesaian umumnya adalah

$$\psi(x,t) = X(x)exp\left(-\frac{iEt}{\hbar}\right)$$

$$\psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2^n n!\sqrt{xo}\sqrt{\pi}}}H_n\left(\frac{x}{xo}\right)exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{xo}\right)^2\right)exp\left(-\frac{iEt}{\hbar}\right)$$

$$\psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2^n n!\sqrt{xo}\sqrt{\pi}}}H_n\left(\frac{x}{xo}\right)exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{xo}\right)^2\right)\sin(-\omega t)$$

Charles Augustin de **Coulomb** (1736-1806) adalah ahli fisika Prancis. Penemu Hukum Coulomb (1785), penemu neraca punter (torsi,1777), insinyur militer, inspektur jenderal pendidikan, dan pengarang. Ia lahir di Augouleme, Prancis, pada tanggal 14 Juni 1736 dan meninggal di Paris pada tanggal 23 Agustus 1806.

Ia sangat masyhur karena dapat mengukur gaya listrik dan gaya magnetic dengan teliti. Untuk menghormatinya namanya diabadikan sebagai satuan muatan listrik, ialah couloumb (disingkat C). Satu couloumb = banyaknya muatan listrik yang mengalir lewat suatu penghantar selama satu detik, bila besar arus satu ampere.

**A.** HUKUM COULOMB

Hukum Coloumb adalah hukum yang menjelaskan hubungan antara gaya yang timbul antara dua titik muatan, yang terpisahkan jarak tertentu, dengan nilai muatan dan jarak pisah keduanya.

$$F = \sum \frac{1}{4\pi\varepsilon o} \frac{Q_1 Q_2}{R^2} \hat{R} = \sum F_i$$

$$F = \int \frac{1}{4\pi\varepsilon o} \frac{Q_1 dQ_2}{R^2} \hat{R} = \int \frac{1}{4\pi\varepsilon o} \frac{Q_1 dQ_2}{R^{3/2}} \bar{R} = Q_1 E$$

Hukum ini menyatakan apabila terdapat dua buah titik muatan maka akan timbul gaya di antara keduanya, yang besarnya sebanding dengan perkalian nilai kedua muatan dan berbanding terbalik dengan kuadrat jarak antar keduanya. Interaksi antara benda-benda bermuatan (tidak hanya titik muatan) terjadi melalui gaya tak-kontak yang bekerja melampaui jarak separasi. Adapun hal lain yang perlu diperhatikan adalah bahwa arah gaya pada masing-masing muatan terletak selalu sepanjang garis yang menghubungkan kedua muatan tersebut. Gaya yang timbul dapat membuat kedua titik muatan saling tarik-menarik atau saling tolak-menolak, tergantung nilai dari masing-masing muatan. Muatan sejenis (bertanda sama) akan saling tolak-menolak, sedangkan muatan berbeda jenis akan saling tarik-menarik

B. HUKUM GAUSS

Garis gaya medan listrik bukanlah besaran nyata melainkan suatu abstraksi atau angan–angan atau gambaran yang menyatakan arah medan listrik di berbagai tempat di dalam ruang bermedan listrik, yakni yang polanya menyatakan distribusi arah medan listrik .Arah medan listrik setempat, yaitu pada arah garis gaya di tempat itu, sudah tentu menyinggung garis gaya ditempat tersebut.

$$\int D\, ds = q$$

$$\int D\, ds = \int \rho\, dV$$

C. SOAL DAN PEMBAHASAN

1. Dua buah muatan q dan -q terletak pada sumbu x, dengan koordinat a dan -a tentukan besar gaya coloumb yang dialami muatan Q yang diletakkan di bidang x-y

Jawab

$$F = \sum \frac{1}{4\pi\varepsilon o}\frac{Q_1Q_2}{R^2}\hat{R}$$

$$F(Q,q) = \frac{1}{4\pi\varepsilon o}\left(\frac{Qq\{y\hat{y} + (x-a)\hat{x}\}}{((x-a)^2 + y^2)\sqrt{(x-a)^2 + y^2}}\right)$$

$$F(Q,-q) = \frac{1}{4\pi\varepsilon o}\left(\frac{-Qq\{y\hat{y} + (x-(-a))\hat{x}\}}{((x-(-a))^2 + y^2)\sqrt{(x-(-a))^2 + y^2}}\right)$$

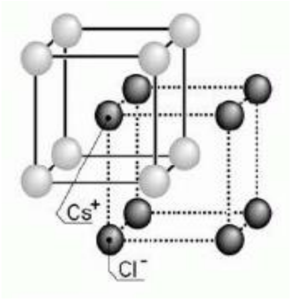
$$F(Q,-q) = \frac{1}{4\pi\varepsilon o}\left(\frac{-Qq\{y\hat{y} + (x+a)\hat{x}\}}{((x+a)^2 + y^2)\sqrt{(x+a)^2 + y^2}}\right)$$

Maka

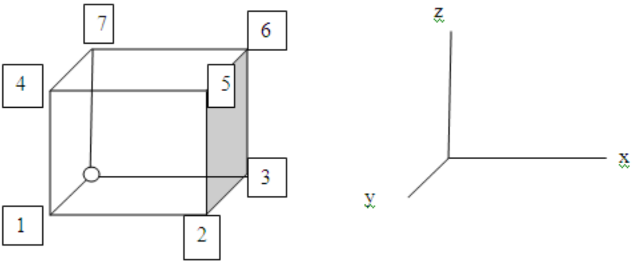
$$F = \sum \frac{1}{4\pi\varepsilon o}\frac{Q_1Q_2}{R^2}\hat{R}$$

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon o}\left(\frac{Qq\{y\hat{y} + (x-a)\hat{x}\}}{((x-a)^2 + y^2)\sqrt{(x-a)^2 + y^2}}\right) - \frac{1}{4\pi\varepsilon o}\left(\frac{Qq\{y\hat{y} + (x+a)\hat{x}\}}{((x+a)^2 + y^2)\sqrt{(x+a)^2 + y^2}}\right)$$

2. Delapan buah muatan diletakkan pada suatu daerah berbentuk kubus dengan panjang masing-masing adalah a, seperti pada gambar. Tentukan besar gaya pada masing-masing muatan Cl, abaikan muatan-muatan Cs




Jawab




$$F = \sum \frac{1}{4\pi\varepsilon o}\frac{Q_1Q_2}{R^2}\hat{R}$$

$$F(1) = \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon o}\frac{a\hat{y}}{a^2\sqrt{a^2}}$$

Besar $F(1) = F(3) = F(7)$ hanya berbeda posisi koordinatnya saja, sehingga

$$F(3) = \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon o}\frac{a\hat{x}}{a^2\sqrt{a^2}}$$

$$F(7) = \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon o}\frac{a\hat{z}}{a^2\sqrt{a^2}}$$

$$F(2) = \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon o}\frac{a\hat{y} + a\hat{x}}{2a^2\sqrt{2a^2}} = \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon o}\frac{a\hat{y} + a\hat{x}}{a^2\sqrt{8a^2}}$$

Besar $F(2) = F(4) = F(6)$ hanya berbeda posisi koordinatnya saja, sehingga

$$F(4) = \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon o}\frac{a\hat{y} + a\hat{z}}{a^2\sqrt{8a^2}}$$

$$F(2) = \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon o}\frac{a\hat{z} + a\hat{x}}{a^2\sqrt{8a^2}}$$

$$F(5) = \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon o}\frac{a\hat{y} + a\hat{x}}{3a^2\sqrt{3a^2}} = \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon o}\frac{a\hat{z} + a\hat{y} + a\hat{x}}{a^2\sqrt{27a^2}}$$

Sehingga besar gaya pada masing-masing muatan adalah

$$F = \sum \frac{1}{4\pi\varepsilon o}\frac{Q_1 Q_2}{R^2}\hat{R}$$

$$F = \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon o}\left(\frac{a\hat{x}}{a^2\sqrt{a^2}} + \frac{a\hat{x}}{a^2\sqrt{8a^2}} + \frac{a\hat{x}}{a^2\sqrt{8a^2}} + \frac{a\hat{x}}{a^2\sqrt{27a^2}}\right)$$
$$= 1{,}9\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon o}\frac{a\hat{x}}{a^2\sqrt{a^2}}$$

$$F = \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon o}\left(\frac{a\hat{y}}{a^2\sqrt{a^2}} + \frac{a\hat{y}}{a^2\sqrt{8a^2}} + \frac{a\hat{y}}{a^2\sqrt{8a^2}} + \frac{a\hat{y}}{a^2\sqrt{27a^2}}\right)$$
$$= 1{,}9\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon o}\frac{a\hat{y}}{a^2\sqrt{a^2}}$$

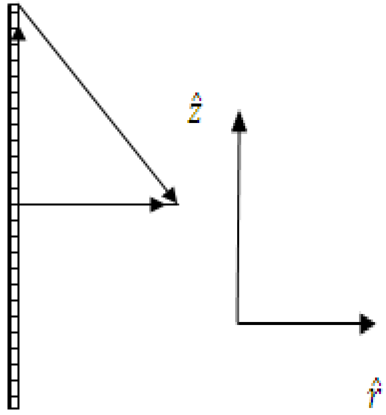
$$F = \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon o}\left(\frac{a\hat{z}}{a^2\sqrt{a^2}} + \frac{a\hat{z}}{a^2\sqrt{8a^2}} + \frac{a\hat{z}}{a^2\sqrt{8a^2}} + \frac{a\hat{z}}{a^2\sqrt{27a^2}}\right)$$
$$= 1{,}9\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon o}\frac{a\hat{z}}{a^2\sqrt{a^2}}$$

$$F = 1{,}9 \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon o} \frac{a\hat{x} + a\hat{z} + a\hat{y}}{a^2\sqrt{a^2}}$$

3. Sebuah kawat panjang tak hingga bermuatan homogen terbentang pada sumbu z, tentukan besar gaya pada suatu muatan Q yang terletak sejauh r dari kawat

Jawab

$$F = \int \frac{1}{4\pi\varepsilon o} \frac{QdQ_{kawat}}{R^2} \hat{R} = QE$$




$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon o} \int \frac{dQ_{kawat}}{R^2} \hat{R} = \int \frac{1}{4\pi\varepsilon o} \frac{Q_1 dQ_2}{R^{3/2}} \bar{R}$$

$$\bar{R} = r\hat{r} - z\hat{z}$$

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon o} \int \frac{\lambda\, dl}{R^2} \hat{R}$$

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon o} \int \frac{\lambda\, dz}{(r^2 + z^2)^{3/2}} (r\hat{r} - z\hat{z})$$

$$E=\frac{1}{4\pi\varepsilon o}\int\frac{\lambda\, dz}{(r^2+z^2)^{3/2}}(r\hat{r})$$

$$E=\frac{r\lambda}{4\pi\varepsilon o}\int\frac{dz}{(r^2+z^2)^{3/2}}(\hat{r})$$

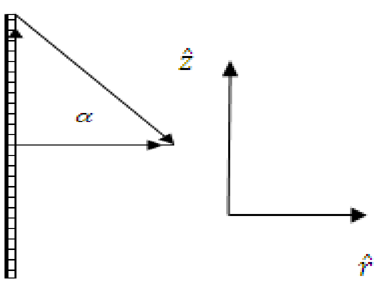
$$E=\frac{r\lambda\hat{r}}{4\pi\varepsilon o}\left[\frac{z}{r^2\sqrt{r^2+z^2}}\right]=\frac{\lambda\hat{r}}{2\pi\varepsilon or}=\frac{\lambda\bar{r}}{2\pi\varepsilon or^2}$$

$$F=Q\frac{\lambda\bar{r}}{2\pi\varepsilon or^2}$$

4. Sebuah kawat panjang 2L bermuatan homogen terbentang pada sumbu z, tentukan besar gaya pada suatu muatan Q yang terletak sejauh r dari kawat

Jawab

$$F=\int\frac{1}{4\pi\varepsilon o}\frac{QdQ_{kawat}}{R^2}\hat{R}=QE$$




$$E=\frac{1}{4\pi\varepsilon o}\int\frac{dQ_{kawat}}{R^2}\hat{R}=\int\frac{1}{4\pi\varepsilon o}\frac{Q_1dQ_2}{R^{3/2}}\bar{R}$$

$$\bar{R}=r\hat{r}-z\hat{z}$$

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon o}\int \frac{\lambda\, dl}{R^2}\hat{R}$$

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon o}\int \frac{\lambda\, dz}{(r^2+z^2)^{3/2}}(r\hat{r} - z\hat{z})$$

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon o}\int \frac{\lambda\, dz}{(r^2+z^2)^{3/2}}(r\hat{r})$$

$$E = \frac{r\lambda}{4\pi\varepsilon o}\int \frac{dz}{(r^2+z^2)^{3/2}}(\hat{r})$$

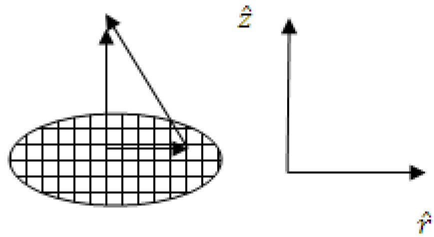
$$E = \frac{r\lambda\hat{r}}{4\pi\varepsilon o}\left[\frac{z}{r^2\sqrt{r^2+z^2}}\right] = \frac{\lambda\hat{r}}{4\pi\varepsilon or}\left[\frac{L}{\sqrt{r^2+L^2}} - \frac{-L}{\sqrt{r^2+L^2}}\right]$$

$$E = \frac{\lambda\hat{r}}{4\pi\varepsilon or}\left[\frac{L}{\sqrt{r^2+L^2}} + \frac{L}{\sqrt{r^2+L^2}}\right]$$

$$E = \frac{\lambda\hat{r}}{4\pi\varepsilon or}(sin\alpha_1 + sin\alpha_2)$$

$$F = Q\frac{\lambda\hat{r}}{4\pi\varepsilon or}(sin\alpha_1 + sin\alpha_2)$$

5. Sebuah lempengan pejal bermuatan homogen terletak pada bidang x dan y, suatu muatan Q diletakkan di sumbu z, tentukan besar gaya yang dialami muatan tersebut jika lempengan pejal tersebut memiliki panjnag yang tak berhingga




Jawab

$$F = \int \frac{1}{4\pi\varepsilon o} \frac{QdQ_{lempengan}}{R^2} \hat{R} = QE$$

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon o} \int \frac{\sigma dS}{R^2} \hat{R}$$

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon o} \int \frac{\sigma dS}{(r^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} (z\hat{z} - r\hat{r})$$

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon o} \int \frac{\sigma\ r\ dr\ d\varphi}{(r^2 + z^2)^{3/2}} (z\hat{z})$$

$$E = \frac{\sigma z\hat{z}}{2\varepsilon o} \int \frac{r\ dr}{(r^2 + z^2)^{3/2}}$$

$$E = \frac{\sigma z\hat{z}}{2\varepsilon o} \left[ -\frac{1}{\sqrt{r^2 + z^2}} \right]$$

$$E = \frac{\sigma z\hat{z}}{2\varepsilon o} \left[ -\frac{1}{\sqrt{r^2 + z^2}} \right]_0^\infty = \frac{\sigma \hat{z}}{2\varepsilon o} = \frac{\sigma \bar{z}}{2\varepsilon o z}$$

$$F = QE = Q\frac{\sigma \bar{z}}{2\varepsilon o z}$$

6. Sebuah kawat panjang tak hingga bermuatan homogen terbentang pada sumbu z, tentukan besar gaya pada suatu muatan Q yang terletak sejauh r dari kawat dengan menggunakan hukum Gauss

Jawab

$$\int D\,ds = \int \rho\,dV$$

$$D\ \ r d\varphi dz = Q$$

$$\epsilon_o E\ 2\pi r L = \lambda\ L$$

$$E = \frac{\lambda}{2\pi \epsilon_o r}$$

7. Sebuah bola pejal dengan jari-jari a. Tentukan medan listrik di titik r< a dan r>a

Jawab

$$r < a$$

$$\int D\,ds = \int \rho\,dV$$

$$\int D\,r^2 sin\theta\ d\varphi d\theta = \int \rho\,r^2 sin\theta\ dr d\varphi d\theta$$

$$\epsilon_o E\ 4\pi r^2 = \rho \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$E = \frac{\rho r}{3\epsilon_o}$$

$$r > a$$

$$\int D\, ds = \int \rho\, dV$$

$$\int D\, r^2 sin\theta\ d\varphi d\theta = \int \rho\, r^2 sin\theta\ dr d\varphi d\theta$$

$$\epsilon_o E\ 4\pi r^2 = \rho \frac{4}{3} \pi a^3$$

$$E = \frac{\rho a^3}{3\epsilon_o r^2}$$

8. Sebuah bola berongga dengan jari-jari a. Tentukan medan listrik di titik r<a dan r>a

$$r < a$$

$$\int D\, ds = \int \rho\, dV$$

$$E = 0$$

$$r > a$$

$$\int D\, r^2 sin\theta\ d\varphi d\theta = \int \rho\, r^2 sin\theta\ dr d\varphi d\theta$$

$$\epsilon_o E\ 4\pi r^2 = \sigma 4\pi a^2$$

$$E = \frac{\sigma a^2}{\epsilon_o r^2}$$

9. Dua buah muatan identik Q diletakkan pada bidang x dengan jarak L, jika terdapat muatan q yang ingin diletakkan pada jarak $a$ dari salah satumuatan Q, maka tentukan letak kedua muatan dari q, agar hasil gaya resultannya di muatan q adalah nol

Jawab

Agar gaya resultan muatan q nol, maka harus terjadi kesetimbangan gaya yang besarnya

$F = F$

$$\frac{Qq}{4\pi\varepsilon_o a^2}\frac{a\hat{x}}{a} = \frac{Qq}{4\pi\varepsilon_o (L-a)^2}\frac{(L-a)\hat{x}}{(L-a)}$$

$$a^2 = L^2 - 2aL + a^2$$

$$L = 2a$$

$$a = \frac{L}{2}$$

Besar impact/ pengaruh kuat –lemahnya tendangan yang dirasakan oleh lawan dari seorang petarung taekwondo yang menendang lawannya dapat dihitung dari besar momentum petarung tersebut, banyak kecelakaan yang terjadi di jalan raya sebagiannya disebabkan karena tabrakan (tumbukan) antara dua kendaraan, baik antara sepeda motor dengan sepeda motor, mobil dengan mobil maupun antara sepeda motor dengan mobil. Demikian juga dengan kereta api atau kendaraan lainnya. Hidup kita tidak terlepas dari adanya tumbukan. Ketika bola sepak ditendang seorang pemain sepak bola, pada saat itu juga terjadi tumbukan antara bola sepak dengan kaki , sehngga bola dapat melesat dengan pesat. Peristiwa tumbukan juga dapat anda temui saat anda bermain permainan billiard. Demikian juga dengan permainan kelereng yang sering dilakukan anak-anak ketika masih kecil. Masih banyak contoh lainnya yang dapat anda temui dalam kehidupan sehari-hari. Permasalahan Impuls dan Momentum sering kali tidak dapat dipisahkan dalam pelajaran dinamika, terutama jika masalah tersebut menyangkut pergerakan benda yang mengalami tumbukan dalam pergerakannya, sehingga ada baiknya pembaca juga memahaminya secara baik.

## A. IMPULS DAN MOMENTUM

### Pengertian Momentum

Dalam ilmu fisika terdapat dua jenis momentum yakni *momentum linear* dan *momentum sudut*. M*omentum linear* merupakan momentum yang dimiliki benda-benda yang bergerak pada lintasan lurus, Momentum linear atau momentum dilambangkan dengan p,sedangkan m adalah massa benda dan **v** adalah kecepatan benda. Momentum merupakan besaran vektor, jadi selain mempunyai magnitude / nilai, momentum juga mempunyai arah. Besar momentum $p = mv$. dan arah momentum sama dengan arah kecepatan. Misalnya sebuah mobil bergerak ke timur, maka arah momentum adalah timur. Satuan momentum adalah adalah kg m/s. Sedangkan momentum sudut dimiliki benda-benda yang bergerak pada lintasan melingkar. Momentum terjadi karena adanya gaya pada benda dalam selang waktu tertentu.

### Hubungan antara Momentum dan Tumbukan

Apakah akibat yang ditimbulkan dari tabrakan antara dua sepeda motor yang berjalan dengan keceptan yang sangat tinggi atau bayangkan apakah akibat tabrakan antara sepeda motor dengan mobil dengan kecepatan yang sama?, pastinya terdapat efek yang dihasilkan pada kedua kasus tersebut, contoh kita tinjau kasus tumbukan antara sepeda motor dengan mobil, karena massa mobil jauh lebih besar dari sepeda motor, maka akan dimungkinkan bahwa sepeda motor akan terpental setelah bertabrakan/ bertumbukan dengan mobil tersebut, sehingga dapat disimpulkan bahwa semakin besar momentum benda maka semakin besar pula efek tumbukan yang dihasilkan.

$$F = \frac{dp}{dt} \qquad \text{Pers-11.1}$$

$$dp = Fdt \qquad \text{Pers-11.2}$$

$$dp = m\,a\,dt \qquad \text{Pers-11.3}$$

$$\int p = m \int a\,dt = m \int dv = mv \qquad \text{Pers-11.4}$$

$$p = mv \qquad \text{Pers-11.5}$$

Hubungan Impuls ($I$) dan Momentum ($p$)

$$F = \frac{dp}{dt} \qquad \text{Pers-11.6}$$

$$dp = Fdt \qquad \text{Pers-11.7}$$

$$\int dp = \int Fdt \qquad \text{Pers-11.8}$$

$$m(v' - v) = F(t' - to) = I \qquad \text{Pers-11.9}$$

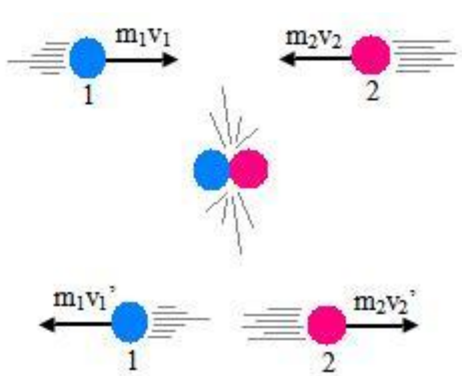
Persamaan yang telah kita turunkan di atas menunjukkan bahwa laju perubahan momentum suatu benda sama dengan gaya total yang bekerja pada benda tersebut selama selang waktu tertentu.

## B. TUMBUKAN

### Hukum Kekekalan Momentum

Hukum kekekalan momentum didapatkan dari hukum Newton III, yang menyatakan bahwa gaya aksi reaksi antara benda-benda yang saling mempengaruhi adalah sama besar, berlawanan arah dan segaris.

*Hukum Kekekalan Momentum* menyatakan bahwa tidak peduli berapapun massa dan kecepatan benda yang saling bertumbukan, ternyata momentum total sebelum tumbukan = momentum total setelah tumbukan. Hal ini berlaku apabila tidak ada gaya luar atau gaya eksternal total yang bekerja pada benda yang bertumbukan. Jadi analisis kita hanya terbatas pada dua benda yang bertumbukan, tanpa ada pengaruh dari gaya luar. Sekarang perhatikan gambar di bawah ini.



Untuk Tumbukan pusat langsung berlaku hubungan Pers-11.10

$$p = p'$$

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_1' + m_2 v_2'$$ Pers-11.11(a)

$$L\ awal = L\ akhir$$ Pers-11.11(b)

$$I\omega_1 + mR^2\omega_2 = I\omega_1' + mR^2\omega_2'$$ Pers-11.11(c)

L adalah momentum sudut, sedangkan p adalah momentum linear

$$e(v_1 - v_2) = (v_2' - v_1')$$ Pers-11.12

$$e = \frac{(v_2' - v_1')}{(v_1 - v_2)} = \frac{v\ saling\ menjauh}{v\ saling\ mendekat}$$

Tumbukan pada pusat miring, berlaku hubungan hukum kekekalan momentum, yaitu

$$m_1 v_{1t} + m_2 v_{2t} = m_1 v_{1t}' + m_2 v_{2t}'$$ Pers-11.13

Hukum kekekalan ini bermakna $v_{1t}, v_{2t}$ adalah kecepatan proyeksi benda ke bidang (sumbu-x)

$$e(v_{1n} - v_{2n}) = (v_{2n}' - v_{1n}')$$ Pers-11.14

Koefisien restitusi ini bermakna bahwa $v_{1n}, v_{2n}$ adalah kecepatan proyeksi benda ke garis normal (sumbu-y)

Besar kecepatan resultan setelah tumbukan adalah

$$v' = \sqrt{{v'_{1t}}^2 + (v_{1n}')^2} \; sehingga \; p = \sqrt{{p'_{1t}}^2 + (p_{1n}')^2}$$ Pers-11.15

Besar sudut pantul adalah

$$\theta = arctgn\left(\frac{p_{1n}'}{p'_{1t}}\right) = arctgn\left(\frac{v_{1n}'}{v'_{1t}}\right)$$ Pers-11.16

Tumbukan Lenting sebagian pada benda jatuh bebas

$$e = \sqrt{\frac{2gh'}{2gh}} = \sqrt{\frac{h'}{h}} = \frac{v'}{v} = \frac{t'}{t}$$ Pers-11.17

Rumus pers-11.17 **digunakan dengan syarat bentuk lintasannya sama**

Momentum pada roket

$$F = \frac{\Delta p}{\Delta t}$$ Pers-11.18

C. SOAL DAN PEMBAHASAN IMPULS DAN MOMENTUM

1. Seorang pria yang massanya 70 kg dan seorang anak laki-laki yang massanya 35 kg berdiri bersama-sama diatas permukaan es yang licin dan gesekannya dapat diabaikan. Jika mereka saling mendorong dan si pria bergerak saling menjauh dengan kelajuan 0,3 m/s relative terhadap es, berapakah jarak pisah mereka setelah 5 sekon

Jawab

Karena anak dan laki-laki tersebut hanya berdiri saja ( diam), maka momentum total system dalam keadaan awal adalah nol, sebab tidak ada kecepatan awal pada kedua system. Sehingga

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_1' + m_2 v_2'$$

$$0 = m_1 v_1' + m_2 v_2'$$

$$0 = 70 v_1' - 35 v_2'$$

$$70.0{,}3 = 35 v_2'$$

$$v_2' = \frac{21}{35} = 0{,}6\ m/s$$

Jarak yang ditempuh laki-laki setelah 5 sekon adalah

$$s = v_1'.t = 0{,}3.5 = 1{,}5\ meter$$

Jarak yang ditempuh anak setelah 5 sekon adalah

$$s = v_2'.t = 0{,}6.5 = 3\ meter$$

Sehingga jarak pisah mereka adalah

$$s(total) = 3 + 1{,}5 = 4{,}5\ m$$

2. Sebuah mobil dengan massa 4 kg bergerak ke kanan dengan kelajuan 6 m/s mengalami tumbukan elastic sempurna dengan mobil bermassa 2 kg yang bergerak ke kanan dengan kelajuan 3 m/, carilah kecepatan kedua mobil setelah bertumbukan

Jawab

Untuk menyelesaikan kasus-kasus tumbukan elastic/ lenting sempurna dengan e=1 dan semi-elastik/ lenting sebaagian dengan e<1, maka dapat digunakan rumus koefisien restitusi. Penting pada kasus tumbukan elestis sempurna dan sebagian, yaitu penjumlahan/ pengurangan arah vektor benda yang satu dengan benda yang lain sesudah tumbukan mengharuskan memiliki bentuk penjumlahan / pengurangan arah vector yang sama dengan sebelum tumbukan

Arah kedua benda mula-mula berarah posistif ke kanan (dengan arah yang sama), dan kemudian arah setelah tumbukan juga berarah yang sama

Hukum kekekalan momentum

$$m_1v_1 + m_2v_2 = m_1v_1' + m_2v_2'$$

$$4.6 + 2.3 = 4v_1' + 2v_2'$$

$$30 = 4v_1' + 2v_2'$$

Dengan menggunakan nilai koefisien restitusi e=1, maka

Koefisien restitusi

$$e(v_1 - v_2) = (v_2{}' - v_1{}')$$

$$6 - 3 = e(v_2{}' - v_1{}')$$

$$3 = (v_2{}' - v_1{}')$$

dengan menggunakan matrix dan metode Crammer

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1' \\ v_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$v_1' = \frac{\text{determinan}\begin{pmatrix} 30 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}}{\text{determinan}\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}} = \frac{\mathbf{(30.1) - (2.3)}}{\mathbf{(4.1) - (-1.2)}} = \frac{\mathbf{24}}{\mathbf{6}} = 4$$

$$v_2' = \frac{\text{determinan}\begin{pmatrix} 4 & 30 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}}{\text{determinan}\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}} = \frac{\mathbf{42}}{\mathbf{6}} = \mathbf{7}$$

Sehingga besar

$$v_1' = 4\ m/s$$

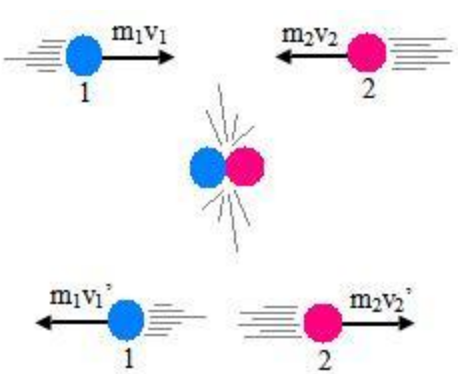
$$v_2' = 7m/s$$

Hasil ini cocok dengan penggambaran arah kedua benda setelah terjadi tumbukan

3. Dua buah benda bermassa 2 kg dan 4 kg bergerak berlawanan arah dengan kecepatan masing-masing 6 m/s dan 4 m/s. Tentukan kecepatan kedua benda setelah tumbukan terjadi jika terjadi tumbukan lenting sempurna

Jawab

Untuk menyelesaikan kasus-kasus tumbukan elastic/ lenting sempurna dengan e=1 dan semi-elastik/ lenting sebaagian dengan e<1, maka dapat digunakan rumus koefisien restitusi. Penting pada kasus tumbukan elestis sempurna dan sebagian, yaitu penjumlahan/ pengurangan arah vektor benda yang satu dengan benda yang lain sesudah tumbukan mengharuskan memiliki bentuk penjumlahan / pengurangan arah vector yang sama dengan sebelum tumbukan



Hukum kekekalan momentum

$$m_1v_1 + m_2v_2 = m_1v_1' + m_2v_2'$$

$$2.6 - 4.4 = 2v_1' + 4v_2'$$

$$-2 = v_1' + 2v_2'$$

Koefisien restitusi

$$e(v_1 - v_2) = (v_2' - v_1')$$

$$6 - (-4) = 1(v_2' - v_1')$$

$$v_2' - v_1' = 10$$

Sehingga didapatkan dua persamaan yaitu

$$v_1' + 2v_2' = -2$$

$$-v_1' + v_2' = 10$$

dengan menggunakan matrix dan metode Crammer

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1' \\ v_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 10 \end{pmatrix}$$

$$v_1' = \frac{\text{determinan}\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 10 & 1 \end{pmatrix}}{\text{determinan}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}} = \frac{(-2.1) - (10.2)}{(1.1) - (-1.2)} = \frac{-22}{3} = -7\frac{1}{3}m/s$$

$$v_2' = \frac{\text{determinan}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 10 \end{pmatrix}}{\text{determinan}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}} = \frac{8}{3} m/s$$

Sehingga besar

$$v_1' = -7\frac{1}{3} m/s$$

$$v_2' = \frac{8}{3} m/s$$

Hasil ini sesuai dengan teori yang bahwa pada tumbukan elastik sempurna penjumlahan/ pengurangan arah vektor benda yang satu dengan benda yang lain sesudah tumbukan mengharuskan memiliki bentuk penjumlahan / pengurangan arah vector yang sama dengan sebelum tumbukan, atau dengan kata lain setelah tumbukan arah vector kedua benda juga akan berlawanan

4. Pada bandul balistik, balok kayu besar bermassa M tergantung pada tali. Ketika peluru bermassa m berkeceptan v ditembakkan dan bersarang pada balok, maka tinggi maksimum balok adalah y. Tentukan kecepatan peluru sesaat sebelum mengenai balok, jika balok mula-mula diam

Jawab

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_1' + m_2 v_2'$$

Peluru bersarang di dalam balok, sehingga setelah peluru mengenai balok, maka keduanya bergerak bersamaan

$$Mv_1 + mv_2 = Mv_1' + mv_1'$$

$$0 + mv = Mv_1' + mv_1'$$

$$\frac{mv}{M+m} = v_1'$$

Penggunaan rumus cepat ☺

Untuk kasus setelah tumbukan kedua benda menjadi suatu kesatuan dalam satu materi

$$v' = \frac{\sum P(sebelum)}{\sum m(benda\ gabungan)} = \frac{mv}{M+m}$$

Mudahkan ☺

Setelah peluru mengenai balok, maka tinggi maksimum balok (juga peluru yang berada didalam balok) adalah y, sehingga pada komponen y

$$2as = {v_t}^2 - {v_o}^2$$

$$-2gh = {v_t}^2 - {v_o}^2$$

$$-2gy = 0 - {v_1'}^2$$

$$v_1' = \sqrt{2gy}$$

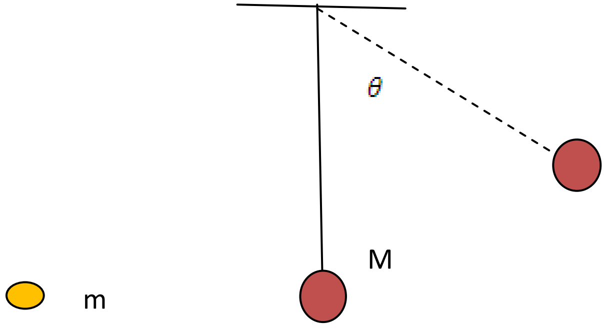
Maka keceptan peluru sebelum menumbuk balok adalah

$$\frac{mv}{M+m} = v_1'$$

$$\frac{mv}{M+m} = \sqrt{2gy}$$

$$v = \frac{(M+m)}{m}\sqrt{2gy}$$

5. Sebuah bola lilin bermassa m menumbuk secara mendatar bola besi bermassa M yang tergantung pada tali yang panjangnya d. Setelah tumbukan bola lilin menempel pada bola besi dan berayun bersama-sama. Tentukan kecepatan minimum bola lilin agar setelah tumbukan keduanya akan mencapai titik tertinggi (TOFI 1999)




Jawab

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_1' + m_2 v_2'$$

Peluru bersarang di dalam balok, sehingga setelah peluru mengenai balok, maka keduanya bergerak bersamaan

$$M v_1 + m v_2 = M v_1' + m v_1'$$

$$0 + mv = M v_1' + m v_1'$$

$$\frac{mv}{M+m} = v_1'$$

Penggunaan rumus cepat ☺

Untuk kasus setelah tumbukan kedua benda menjadi suatu kesatuan dalam satu materi

$$v' = \frac{\sum P(sebelum)}{\sum m(benda\ gabungan)} = \frac{mv}{M+m}$$

Mudahkan ☺

Hubungan $y$ dan $d$ adalah

$$(m+M)gd + \frac{1}{2}(M+m)\left(v_1'^2\right) = (m+M)g y_{maks} + 0$$

$$d + \frac{v_1'^2}{2g} = y_{maks}$$

$$v_1'^2 = 2g(y_{maks} - d)$$

$$v_1' = \sqrt{2g(y_{maks} - d)}$$

Sehingga

$$\frac{mv}{M+m} = \sqrt{2g(y_{maks} - d)}$$

$$v = \frac{M+m}{m}\sqrt{2g(y_{maks} - d)}$$

6. Seorang anak bermassa $m_1$ berada dalam perahu yang sedang bergerak. Massa perahu M dan anak di dalamnya bergerak dengan kecepatan $v_2$, tentukan kecepatan perahu ketika anak tersebut melompat berlawanan arah dengan arah semula dan dengan kecepatan A

Jawab

$$m_1v_1 + m_2v_2 = m_1v_1' + m_2v_2'$$

$$m_1v_1 + Mv_2 = m_1v_1' + Mv_2'$$

$$m_1v_2 + Mv_2 = m_1v_1' + Mv_2'$$

$$(m_1 + M)v_2 = m_1(-A) + Mv_2'$$

$$v_2' = \frac{(m_1 + M)v_2 + m_1 A}{M}$$

Penggunaan rumus cepat ☺

Untuk kasus dua benda setelah tumbukan bergerak dengan kecepatan yang berbeda satu dengan lainnya, maka

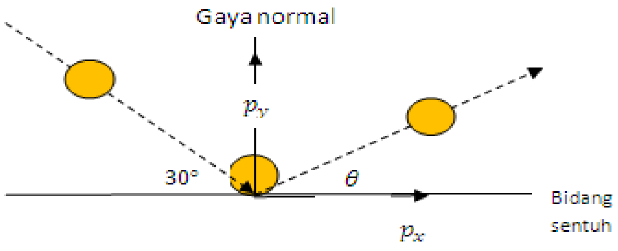
$$v' = \frac{\sum P(sebelum) \pm \sum P_{benda\ lain}(sesudah)}{\sum m(benda\ yang\ ditanyakan)} = \frac{(m_1 + M)v_2 + m_1 A}{M}$$

Akan bernilai positif jika berlawanan arah setelah terjadi tumbukan

Akan bernilai negative jika searah setelah terjadi tumbukan

Mudahkan ☺

7. Sebuah bola dilempar ke atas pelat dengan kecepatan 16 m/s pada sudut 30° seperti terlihat pada gambar. Bila koefisien restitusi adalah 0,5 hitunglah keceptan pantulnya dan tentukan pula sudut pantulnya



Tumbukan pada pusat miring, berlaku hubungan hukum kekekalan momentum dengan arah kecepatan adalah kecepatan proyeksi ke bidang

Hukum kekekalan momentum

$$m_1 v_{1t} + m_2 v_{2t} = m_1 v'_{1t} + m_2 v'_{2t}$$

$$m_1 v_{1t} + 0 = m_1 v'_{1t} + 0$$

$$m_1 v_{1t} = m_1 v'_{1t}$$

$$v_{1t} = v'_{1t} = 16 \cos 30^o = 13{,}87$$

Koefisien restitusi

$$e(v_{1n} - v_{2n}) = (v_{2n}' - v_{1n}')$$

$$0{,}5(16\, sin 30^o - 0) = 0 - (v_{1n}')$$

$$(v_{1n}') = 4$$

Maka kecepatan pantul v' adalah

$$v' = \sqrt{{v'_{1t}}^2 + (v_{1n}')^2} = \sqrt{4^2 + 13{,}87^2} = 14{,}42 m/s$$

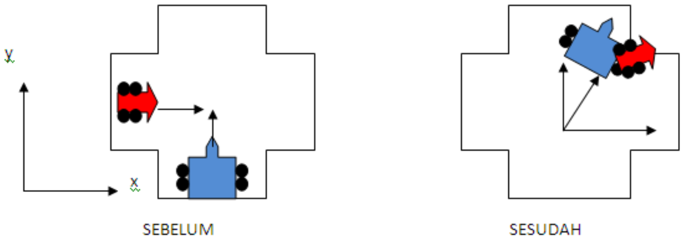
Besar sudut pantul adalah

$$\theta = arctgn\left(\frac{v_{1n}'}{v'_{1t}}\right) = 16,1^o$$

8. Sebuah mobil kecil bermassa m bergerak dengan keceptan v m/s kearah timur. Bertumbukan dengan sebuah truk bermassa M bergerak ke utara dengan kecepatan A m/s. setelah bertabrakan, mobil dan truk menjadi satu. Carilah

kecepatan rongsokan setalah tumbukan dan berapakah arah sudut yang dibentuk

Jawab




$$V_{centar mass} = \frac{P}{m_{total}}$$

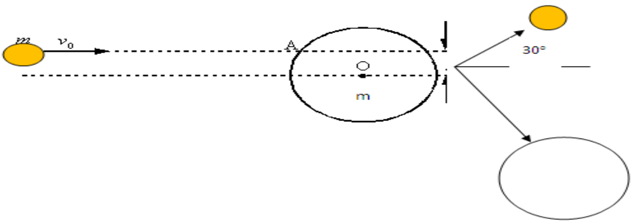
$$V_{centar mass} = \frac{MA\hat{\imath} + mv\hat{\jmath}}{M+m}$$

$$V_{centar mass} = \sqrt{A^2 + v^2}$$

$$\theta = arctgn\left(\frac{p_{1n}{'}}{p_{1t}'}\right) = arctgn\left(\frac{p_y}{p_x}\right) = arctgn\left(\frac{A}{v}\right)$$

9. Sebuah bola bermassa *m* bergerak dengan kecepatan $v_0 = 10$ m/s di atas lantai licin dan menabrak bola lain yang bermassa sama. Pada saat tumbukan terjadi di titik A bola yang datang dibelokkan dan membentuk sudut 30° (lihat gambar). Tentukan vektor kecepatan akhir kedua benda kedua massa! ***Catatan :*** Anggap tidak ada gesekan antara

kedua massa dan tumbukan terjadi secara elastik.




Jawab

Hukum kekekalan momentum

$$m_1 v_{1t} + m_2 v_{2t} = m_1 v_{1t}' + m_2 v_{2t}'$$

$$v_o + 0 = v_{1t}' + v_{2t}'$$

$$v_o + 0 = v_1' \cos 30^o + v_2' \cos 60^o$$

$$10 = \sqrt{\frac{3}{2}} v_1' + \frac{1}{2} v_2'$$

Koefisien restitusi

$$e(v_{1n} - v_{2n}) = (v_{2n}{}' - v_{1n}{}')$$

$$(v_1 \sin 0^o - 0) = (v_2' \sin(90 - \theta) - v_1' \sin\theta)$$

$$(v_1 \sin 0^o - 0) = (v_2' sin 60^o - v_1' \sin 30^o)$$

$$0 = \left(-v_1{}' \frac{1}{2} + v_2' \sqrt{\frac{3}{2}}\right)$$

$$v_1' = v_2' \sqrt{3}$$

Substitusikan persamaan ini kedalam

$$10 = \sqrt{\frac{3}{2}} v_1' + \frac{1}{2} v_2'$$

$$10 = \sqrt{\frac{3}{2}} v_2' \sqrt{3} + \frac{1}{2} v_2'$$

$$10 = 4\ \frac{1}{2} v_2'$$

$$v_2' = 5\ m/s$$

$$v_1' = v_2' \sqrt{3} = 5\sqrt{3} = 8{,}66\ m/s$$

10. Tunjukkan bahwa untuk tumbukan elastic sempurna antara dua partikel bermassa sama jika salah satu partikel mula-mula diam, energy yang dipindahkan ke partikel yang diam adalah $= sin^2\theta\ Eo$, dengan $Eo$ adalah energy awal partikel dan $\theta$ adalah sudut pembelokannya

Jawab

Dari soal no. 9 kita mendapatkan rumus bahwa

Pada koefisien restitusi

$$e(v_{1n} - v_{2n}) = (v_{2n}' - v_{1n}')$$

$$(v_1 \sin 0^o - 0) = (v_2' \sin(90 - \theta) - v_1' \sin\theta)$$

$$(v_2' \sin(90 - \theta)) = (v_1' \sin\theta)$$

$$v_2' \, cos\theta = v_1' \sin\theta$$

$$v_1' = v_2' \frac{cos\theta}{\sin\theta}$$

Pada hukum kekekalan momentum

$$m_1 v_{1t} + m_2 v_{2t} = m_1 v_{1t}' + m_2 v_{2t}'$$

$$v_o + 0 = v_{1t}' + v_{2t}'$$

$$v_o + 0 = v_1' \cos\theta + v_2' \cos(90 - \theta)$$

$$v_o = v_1' \cos\theta + v_2' sin\theta$$

$$v_o = v_2' \frac{cos\theta}{\sin\theta} \cos\theta + v_2' sin\theta$$

$$v_o = v_2' \frac{cos^2\theta}{\sin\theta} + \frac{v_2' sin^2\theta}{\sin\theta}$$

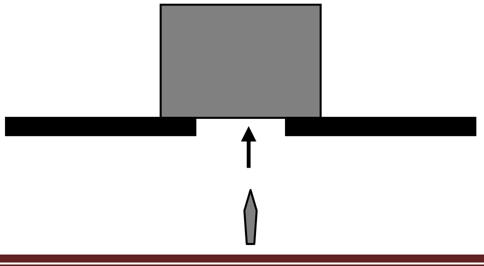
$$v_2' = v_o \sin\theta$$

Maka besar energy kinetic pada benda yang diam setelah bertumbukan adalah

$$T = \frac{1}{2} m v_2'^2 = \frac{1}{2} m (v_o \sin\theta)^2 = \frac{1}{2} m v_o{}^2 sin^2\theta = Eo^2 sin^2\theta$$

11. Sebuah peluru bermassa 10 gram bergerak ke atas dengan keceptan 1000m/s menumbuk lalu menembus sebuah balok melalui titik pusat massa balok itu. Balok yang bermassa 5 kg ini mula-mula diam, anggap proses tumbukan sangat singkat. Tentukan keceptan balok itu jika kecepatan peluru setelah menembus balok adalah 400m/s. Tentukan tinggi maksimum yang dapat dicapai balok dan berapa energy yang hilang dalam proses tumbukan (Seleksi OSN tingkat kabupaten 2008)

Jawab



$$m_1v_1 + m_2v_2 = m_1v_1' + m_2v_2'$$

$$10.10^{-3}10^3 + 0 = 10.10^{-3}400 + 5v_2'$$

$$10 = 4 + 5v_2'$$

$$v_2' = \frac{6}{5}m/s$$

Tinggi maksimum

$$2as = v_t^2 - v_o^2$$

$$-2gh_{max} = 0 - (v_2')^2$$

$$h_{max} = \frac{\left(\frac{6}{5}\right)^2}{2g} = 0{,}072\, m$$

Energi yang hilang dalam proses tumbukan adalah

Energi kinetic peluru dan balok awal

$$T_{peluru} = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}10.10^{-3}.(1000)^2 = \frac{1}{2}10^{-2}.10^6 = \frac{10^4}{2}$$
$$= 5000\ joule$$

$$T_{balok} = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m0^2 = 0\ joule$$

Energi kinetic peluru dan balok sesudah tumbukan

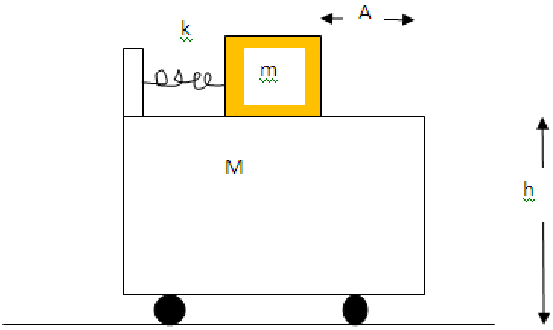
$$T_{peluru} = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}10.10^{-3}.(400)^2 = 800\ joule$$

$$T_{balok} = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}5.\left(\frac{6}{5}\right)^2 = 3{,}6\ joule$$

Energi kinetic yang hilang adalah

$$T_{sebelum} - T_{sesudah} = 5000 + 0 - 800 - 3{,}6 = 4196{,}4\ joule$$

12. Suatu system seperti pada gambar, massa kereta M dan massa balok di atasnya m. Sebuah pegas dengan konstanta pegas k berada dalam keadaan tertekan dengan simpangan A. Mula-mula system dalam keadaan diam. Saat t=0, massa m dan M dilepas sehingga massa m dan M memiliki kecepatan relative terhadap bumi masing-masing $v_m$ dan $v_M$ saat pegas kendur. Tuliskan persamaan kekekalan energy system ; tuliskan persamaan kekekalan momentum linear; hitunglah $v_m$ dan $v_M$ (Seleksi OSN Tingkat Kabupaten 2008)




Jawab

Hukum kekekalan energy

$$T + V = T' + V'$$

$$0 + 0 + \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}m{v_m}^2 + \frac{1}{2}M{v_M}^2 + 0$$

Hukum kekekalan momentum

$$m_1v_1 + m_2v_2 = m_1v_1' + m_2{v_2}'$$

$$m.0 + M.0 = mv_m + Mv_M$$

$$mv_m = -Mv_M$$

$$v_m = -\frac{M}{m}v_M$$

Substitusikan persamaan ini ke dalam persamaan hukum kekekalan energy mekanik, maka akan didapatkan

$$\frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}mv_m{}^2 + \frac{1}{2}Mv_M{}^2$$

$$\frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}m\left(\frac{-M}{m}v_M\right)^2 + \frac{1}{2}Mv_M{}^2$$

$$\frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}m\left(\frac{M}{m}v_M\right)^2 + \frac{1}{2}Mv_M{}^2$$

$$\frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2m}(Mv_M)^2 + \frac{1}{2}Mv_M{}^2$$

$$v_M{}^2\left(\frac{1}{m}M^2 + M^2\right) = kA^2$$

$$v_M{}^2\left(\frac{1}{m}M^2 + \frac{mM^2}{m}\right) = kA^2$$

$$v_M{}^2 = \frac{mkA^2}{M^2 + mM^2}$$

$$v_M = \sqrt{\frac{mkA^2}{M^2 + mM^2}} = A\sqrt{\frac{mk}{M^2 + mM^2}}$$

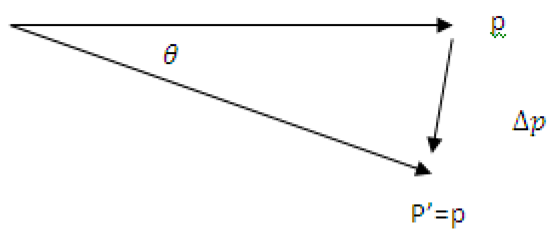
Sedangkan

$$v_m = -\frac{M}{m} v_M = -\frac{MA}{m}\sqrt{\frac{mk}{M^2 + mM^2}}$$

13. Pesawat ruang angkasa dengan momentum p akan mengubah arahnya. Arah yang baru membentuk sudut $\theta$ terhadap arah mula-mula dan kelajuannya dipertahankan tetap. Jika gaya konstan yang dihasilkan mesin F, tentukan waktu minimum mesin untuk mengubah arah tersebut (Seleksi Tingkat Provinsi OSN 2006)

Jawab

Untuk perubahan momentum dengan perubahan sudut yang kecil, maka besar momentum dapat dicari berdasarkan persamaan matematis




$$a^2 + b^2 - 2ab\ cos\theta = c^2$$

$$p^2 + p'^2 - 2pp' \cos\theta = (\Delta p)^2$$

$$2p^2 - 2p^2 \cos\theta = (\Delta p)^2$$

$$\Delta p = p\sqrt{2(1 - \cos\theta)}$$

$$F = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{p\sqrt{2(1 - \cos\theta)}}{t}$$

Sehingga

$$t = \frac{p\sqrt{2(1 - \cos\theta)}}{F}$$

A. DERET TAYLOR

$$f(x+xo)=f(x)+\frac{f'(x)}{1!}x_o+\frac{f''(x)}{2!}{x_o}^2$$

B. DERET MACLAURIN (x=0)

$$\sin x = x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots \qquad \text{Pers-1}$$

$$\cos x = 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots \qquad \text{Pers-2}$$

$$e^x = 1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots \qquad \text{Pers-3}$$

$$\ln(1+x) = x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\cdots \qquad \text{Pers-4}$$

$$(1+x)^n = 1+xn+\frac{n(n-1)}{2!}x^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3+\cdots \qquad \text{Pers-5}$$

C. INTEGRAL KHUSUS

$$\int\frac{rdr}{(z^2+r^2)^{3/2}}=-\frac{1}{\sqrt{z^2+r^2}}$$

$$\int\frac{dz}{(z^2+r^2)^{3/2}}=\frac{z}{r^2\sqrt{z^2+r^2}} \qquad \text{Pers}-6$$

D. FUNGSI GAMMA

$$\Gamma(n)=\int_0^\infty x^{n-1}e^{-x}dx=(n-1)!=\frac{\Gamma(n+1)}{n} \qquad \text{Pers-7}$$

$$\Gamma(n+1) = \int_0^\infty x^n e^{-x}\,dx = (n)! = n\Gamma(n)$$ Pers-8

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$ Pers-9

$$\int_0^\infty x^n e^{-\alpha x^m}\,dx = \frac{1}{m\alpha^{\frac{n+1}{m}}}\Gamma\left(\frac{n+1}{m}\right)$$ Pers-10

## E. FUNGSI LAPLANCE

$$\int_0^\infty F(x)e^{-\alpha x}\,dx = L$$

| $F(x)$ | $L$ |
|---|---|
| $b$ | $\frac{b}{\alpha}$ |
| $\sin bx$ | $\frac{b^2}{a^2+b^2}$ |
| $\cos bx$ | $\frac{\alpha^2}{a^2+b^2}$ |
| $e^{\pm bx}$ | $\frac{1}{\alpha \mp b}$ |
| $x^n$ | $\frac{n!}{\alpha^{n+1}}$ |

## F. BILANGAN KOMPLEKS

| | |
|---|---|
| $R = x + iy = r(cos\theta + isin\theta) = re^{i\theta}$<br>$R = \sqrt{y^2 + x^2}\, \exp\left(iarctgn\frac{y}{x}\right) = r\angle\theta$ | Fungsi dasar bilangan Kompleks |
| $e^{-i\theta} + e^{i\theta} = (cos\theta - isin\theta) + (cos\theta + isin\theta)$<br>$e^{-i\theta} + e^{i\theta} = 2cos\theta$<br>$cos\theta = \frac{(e^{-i\theta} + e^{i\theta})}{2}$<br>$e^{-i\theta} - e^{i\theta} = (cos\theta - isin\theta) - (cos\theta + isin\theta)$<br>$e^{-i\theta} - e^{i\theta} = -2isin\theta$<br>$sin\theta = \frac{(e^{i\theta} - e^{-i\theta})}{2i}$ | Fungsi eksponensial dan trigonometri |
| $\cos i\theta = \frac{(e^{\theta} + e^{-\theta})}{2} = \cosh\theta$<br>$\sin i\theta = \frac{(e^{-\theta} - e^{\theta})}{2i} = i\frac{(e^{\theta} - e^{-\theta})}{2} = i\, sinh\,\theta$ | Fungsi hiperbolikus |
| $\ln\big(rexp(i\theta)\big) = \ln r + \ln(expi\theta) = \ln r + i\theta$ | Fungsi logaritma |
| $a^b = e^{\ln a^b}$<br>$a^b = e^{blna}$ | Fungsi perpangkatan |

G. MATRIKS

| | |
|---|---|
| $\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$ | Menghitung Determinan Intinya $M_{ij,}$ i dan j = + |

| | |
|---|---|
| $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ \mathbf{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{vmatrix} = -1 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - 0 + 1 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$ <br> $= 0$ <br> $\begin{vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + 0 = 0$ <br> $\begin{vmatrix} 1 & 1 & \mathbf{0} \\ 1 & 1 & \mathbf{0} \\ -1 & 0 & \mathbf{1} \end{vmatrix} = 0 + 0 + 1 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$ | + jika genap, tetapi i dan j = - jika ganjil |
| $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V \\ G \end{pmatrix}$ <br> $x = \frac{\begin{vmatrix} V & b \\ G & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}; y = \frac{\begin{vmatrix} a & V \\ c & G \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}$ | Metode Crammer |
| $O = \lvert G \quad A \quad L \quad I \quad H \rvert$; maka $O^T = \begin{pmatrix} G \\ A \\ L \\ I \\ H \end{pmatrix}$ | Transpose Matriks |
| $(L\, V) \begin{pmatrix} O & ike \\ E & oi \end{pmatrix} = (LO + VE \quad Like + Voi)$ | Perkalian Matriks |
| $\det(AB) = \det(A) . \det(B)$ | Operasi matriks dengan determinan |
| $A^{-1} = \frac{(kofaktor\, A)^T}{\det A}$ <br> $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$ <br> $kofaktor\, A = \begin{pmatrix} 1 & -(-3) \\ -2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$ | Invers matriks |

| | |
|---|---|
| $A^{-1}=\frac{\begin{pmatrix}1 & -2\\ 3 & 5\end{pmatrix}}{11}$ | |

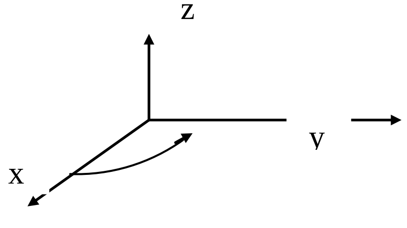
## H. DERET FOURIER

| | |
|---|---|
| $f(x)=\frac{a_o}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{n\pi x}{l}$ <br> $T=periode=2l$ <br> $a_n=\frac{1}{l}\int_{b.bawah\ gambar}^{b.atas\ gambar}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx$ <br> $b_n=\frac{1}{l}\int_{b.bawah\ gambar}^{b.atas\ gambar}f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx$ | Deret Fourier |
| $\frac{1}{l}\int_{bts.bawah}^{bts.atas}f(x)^2dx=\frac{{a_o}^2}{2}+\sum{a_n}^2+\sum{b_n}^2$ | Teorema Parseval |

\

## I. PERKALIAN CROSS

| | | | |
|---|---|---|---|
| $\hat{x}$ | $\times$ | $\hat{y}$ | $=\hat{z}$ |
| $\hat{y}$ | $\times$ | $\hat{z}$ | $=\hat{x}$ |
| $\hat{z}$ | $\times$ | $\hat{x}$ | $=\hat{y}$ |



Jika arah putar sekrup keluar, maka positif, dari hasil ini didapatkan bahwa

| | | | |
|---|---|---|---|
| $\hat{x}$ | $\times$ | $\hat{y}$ | $= \hat{z}$ |

Untuk koordinat silinder

| | | | |
|---|---|---|---|
| $\hat{r}$ | $\times$ | $\hat{\varphi}$ | $= \hat{z}$ |
| $\hat{\varphi}$ | $\times$ | $\hat{z}$ | $= \hat{r}$ |
| $\hat{z}$ | $\times$ | $\hat{r}$ | $= \hat{\varphi}$ |

## J. VECTOR DERIVATIVES

| | |
|---|---|
| $\nabla U = \frac{\partial U}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial U}{\partial y}\hat{\jmath} + \frac{\partial U}{\partial z}\hat{z}$ | Gradient |
| $\nabla \cdot U = \frac{\partial U_x}{\partial x} + \frac{\partial U_y}{\partial y} + \frac{\partial U_z}{\partial z}$ | Divergence |
| $\nabla \times U = \left(\frac{\partial U_y}{\partial x} - \frac{\partial U_x}{\partial y}\right)\hat{z} + \left(\frac{\partial U_z}{\partial y} - \frac{\partial U_y}{\partial z}\right)\hat{x} + \left(\frac{\partial U_x}{\partial z} - \frac{\partial U_z}{\partial x}\right)\hat{y}$ | Curl |
| $\nabla^2 \mathrm{U} = \frac{\mathrm{d}^2\mathrm{U}}{\mathrm{dx}^2} + \frac{\mathrm{d}^2\mathrm{U}}{\mathrm{dy}^2} + \frac{\mathrm{d}^2\mathrm{U}}{\mathrm{dz}^2}$ | Laplance |

K. PERSAMAAN DIFERENSIAL BIASA

| | |
|---|---|
| $\int xdx = \int ydy$ | Bentuk $y' + py = 0$ |
| $y' + py = Q \ldots (1)$<br>$(D + p)y = 0$<br>$y_c = \mathrm{A(x)exp}\ (-\int p\ dx)$<br>$= A(x)exp(-I)\ \ldots (2)$<br>$subst\,pers.(2)ke\ pers.(1)$<br>$\frac{d}{dx}(Aexp(-px) + pAexp(-px) = Q$<br>$\left(\frac{dA}{dx} - pA + pA\right) exp(-px) = Q$<br>$dA/dx = Qexp(px)$<br>$A = \int Qexp(I)\,dx$<br>$y = \left(\int Qexp(I)\,dx\right) \exp(-I)$ | Bentuk $y' + py = Q$ |
| $y'' + by + c = 0$<br>$(D - a)(D - b)y_c = 0$<br>$y_c = Aexp(ax) + Bexp(bx)$<br>Jika<br>$(D - a)(D - a)y_c = 0$<br>$y_c = (Ax + B)\exp(ax)$ | Persamaan deferensial orde 2 homogen |

| | |
|---|---|
| Jika<br>$(D-a)(D-a)(D-a)y_c = 0$<br>$y_c = (Ax^2 + Bx + c)\exp(ax)$ | |
| $y'' + by + c = Q(x)\exp(cx)$<br>$(D-a)(D-b)y_c = 0$<br>$y_c = A exp(ax) + B exp(bx)$<br>$y_p$<br>$a \neq b \neq c \rightarrow Q(x)\exp(cx)$<br>$= a \neq b\ but\ a, b = c \rightarrow Q(x)x\exp(cx)$<br>$a = b = c \rightarrow Q(x)x^2\exp(cx)$ | Persamaan deferensial orde 2 non homogen<br>Catatan penting nilai sinusoidal diambil yang bernilai positif<br>$\exp(ix)$<br>$= (cosx + isinx) = \sin x$<br>$\exp(-ix)$<br>$= (cosx - isinx) = \cos x$<br>$iexp(ix) = i(cosx + isinx)$<br>$= (\mathrm{i}\cos \mathrm{x}$<br>$- \sin \mathrm{x})$<br>$= \cos \mathrm{x}$ |

L. KALKULUS INTEGRAL

| | |
|---|---|
| $\int sinx\, dx =$ | $-\cos x$ |
| $\int \cos x\, dx =$ | $\sin x$ |

| | |
|---|---|
| $\int \frac{dx}{x} =$ | $\ln x$ |
| $\int e^{f(x)} dx =$ | $\frac{e^{f(x)}}{f'(x)}$ |
| $\int a^{f(x)} dx =$ | $\frac{a^{f(x)}}{f'(x) \ln a}$ |
| $\int tgn\, x\, dx =$ | $\ln \sec x$ |
| $\int cotgn\, x\, dx =$ | $-\ln cossec\, x$ |
| $\int \sec x\, dx =$ | $\ln(\sec x + tgn\, x)$ |
| $\int cossec\, x\, dx =$ | $\ln(cossec\, x - ctgnx)$ |
| $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} =$ | $\frac{1}{a} \arcsin\left(\frac{x}{a}\right)$ |
| $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} =$ | $\frac{1}{a} arctgn\left(\frac{x}{a}\right)$ |
| $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - a^2}} =$ | $\frac{1}{a} \operatorname{arcsec}\left(\frac{x}{a}\right)$ |
| $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} =$ | $\frac{1}{a} \operatorname{arcsinh}\left(\frac{x}{a}\right)$ |
| $\int \frac{dx}{\sqrt{-a^2 + x^2}} =$ | $\frac{1}{a} \operatorname{arccosh}\left(\frac{x}{a}\right)$ |
| $\int \frac{dx}{a^2 - x^2} =$ | $\frac{1}{a} arctgnh\left(\frac{x}{a}\right)$ |

| | |
|---|---|
| $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} =$ | $\frac{1}{a} arcctgnh\left(\frac{x}{a}\right)$ |
| $\int \frac{dx}{x\sqrt{a^2 - x^2}} =$ | $-\frac{1}{a}\arccos\left(\frac{a}{x}\right)$ |

Integral parsial ( diambil yang kuat sebagai u)

$$Trigono < e^x < x^n < \ln x < arctrigono$$

$$\int u\, dv = uv - \int v\, du$$

Contoh

Berapakah nilai

$$\int xe^x\, dx$$

Jawab

$u = x$, sehingga $du = dx$

$dv = e^x\, dx$, sehingga $v = e^x$

$$\int xe^x\, dx = xe^x - \int e^x\, dx$$

$$\int xe^x\, dx = xe^x - e^x$$

| | |
|---|---|
| Real, beda<br>$x - a\ dan\ x - b$ | $\int \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b}$ |
| Real, sama<br>$x - a\ dan (x-b)^2$ | $\int \frac{A}{x-a} + \frac{B}{(x-b)^2} + \frac{C}{x-b}$ |

| | |
|---|---|
| Tidak real , beda | $\int \frac{A}{x-a} + \frac{Bx+C}{x^2+bx+c}$ |
| Tidak real, sama | $\int \frac{A}{x-a} + \frac{Bx+C}{(x^2+bx+c)^2} + \frac{Dx+E}{x^2+bx+c}$ |

# *DAFTAR PUSTAKA*

[1] Anugraha.Rinto,Persiapan Total Menghadapi Olimpiade Internasional Mekanika, Penerbit Gaya Media, Yogyakarta,2005.

[2] Fowles, *Analytical Mechanics,* CBS College Publishing, USA, 1986.

[3] Halliday, D., Resnick, R., Walker, *Fundamenthal of Physics-Extended, 5th,* John Wiley & Sons, New York 1997.

[4] Mary L. Boas, *Mathematical Methods in The Physical Sciences*, *John Wiley and Sons Inc*, Canada, 1983.

[5] Suarga, Fisika Komputasi Solusi Problema Fisika dengan Matlab, Penerbit Andi, Yogyakarta, 2005.

[6] Surya. Y, Soal dan Penyelesaian Olimpiade Fisika Internasional Mekanika, Bina Sumber Daya MIPA, Jakarta, 2001.

[7] www. tofi.or.id

# *BIOGRAFI PENULIS*

**Dr. Valentinus Galih Vidia Putra, S.Si., M.Sc.** lahir di desa Wedi, Kabupaten Klaten, Jawa Tengah. Pendidikan dasar sampai menengah diselesaikan di kota kecil Bekasi, Jawa Barat.

Penulis menamatkan pendidikan starta satu (S-1) dan Master (S-2) Fisika di Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam FMIPA UGM dengan predikat cumlaude. Pendidikan Doktor diselesaikan dengan predikat cumlaude dengan waktu tiga tahun 10 bulan di universitas yang sama saat berusia genap 30 tahun.

Kegiatan Organisasi dan Riwayat pekerjaan penulis:

1. Asisten Tugas Lab I, II dan III di Laboratorium Fisika UGM (2007-2009).
2. Tim panitia Lomba Fisika Nasional (TOP COP UGM), UGM, Yogyakarta( 2007).
3. Tim Koordinator Lomba cerdas cermat KKN-PPM UGM, Yogyakarta di Purworejo (2008).
4. Anggota keluarga mahasiswa Katolik (KMKath), UGM, Yogyakarta (2005-2010).
5. Pengajar Fisika dan Matematika SMA, LBB SSC, Yogyakarta (2010-2012).

6. Pengajar Olimpiade Sains Nasional Fisika SMA De Britto,Yogyakarta dan SMP IPH School, Surabaya (2011-2013).
7. Asisten dosen Mata Kuliah Fisika Matematika, Prodi Geofisika, Jurusan Fisika UGM, Yogyakarta (2012).
8. Dosen Fakultas Teknik Informatika Universitas Dian Nuswantoro, Semarang, Mata kuliah: Fisika dasar I dan 2, Pengantar Elektronika Dasar, (2012-2013).
9. Kepala Lab Fisika dan Mekatronika dan dosen di Politeknik STTT Bandung (2014-sekarang)