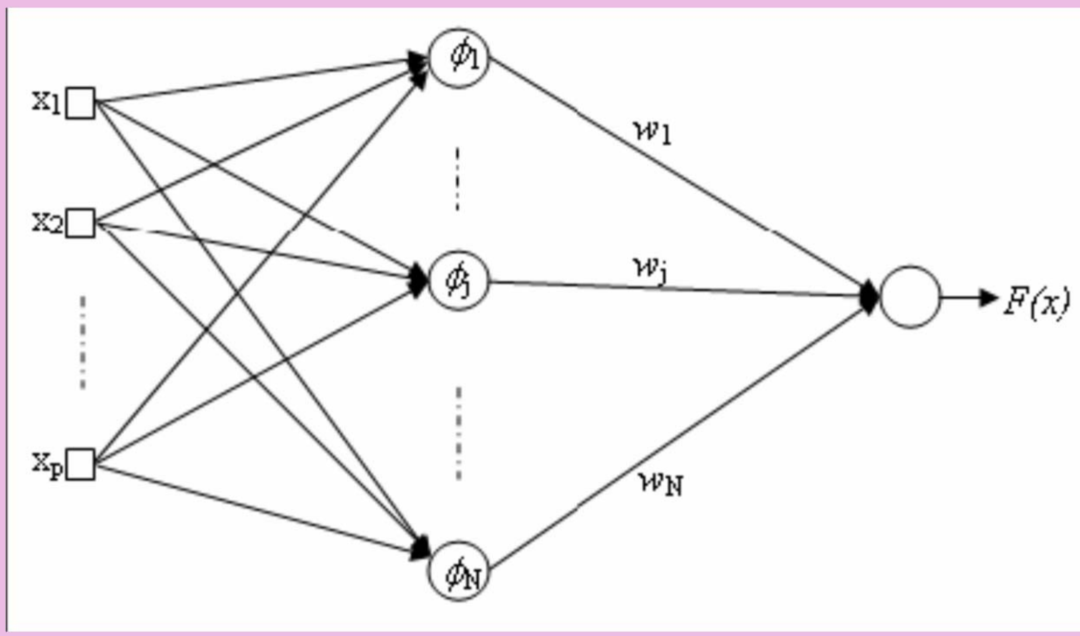
JARINGAN SYARAF FUNGSI RADIAL BASIS

Zeta Dharma Prakasa
1212100097

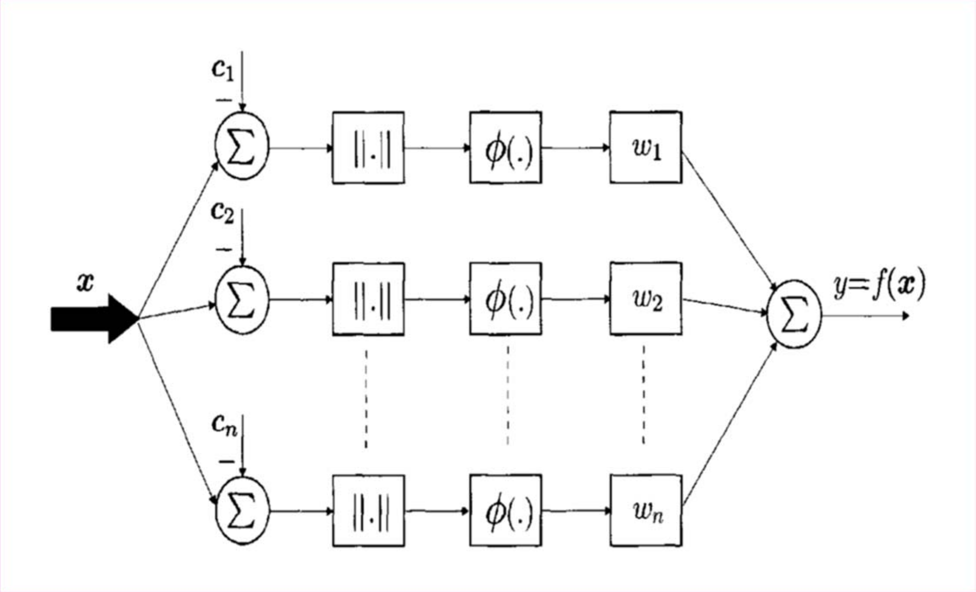
JARINGAN SYARAF FUNGSI RADIAL BASIS

- model jaringan syaraf dengan satu unit pada hidden layer, dimana fungsi aktivasinya adalah fungsi basis dan fungsi linear pada lapisan output.
- model ini mentransformasi input secara nonlinear pada hidden layer sebelum diproses secara linear pada lapisan output



x_1
x_2
x_p
ϕ_1
ϕ_j
ϕ_N
w_1
w_j
w_N
$F(x)$

- RBFNs dengan input berdimensi n, $x \in \Re^n$ dan output tunggal, $y \in \Re$ dengan jumlahan bobot dari berhingga banyak Fungsi Radial Basis



Secara matematis output y dapat dinyatakan,

$$y = f(x) = \sum_{i=1}^{n} w_i \phi_i (\|x - c_i\|)$$

Dimana

$\phi(\|x - c_i\|)$ adalah Fungsi Basis, fungsi nonlinear

$\|\cdot\|$ norm Euclid

$c_i \in \Re^n$ center dari Fungsi Radial Basis

w_i parameter bobot

$$y = f(x) = \sum_{i=1}^{n} w_i \phi(\|x - c_i\|)$$

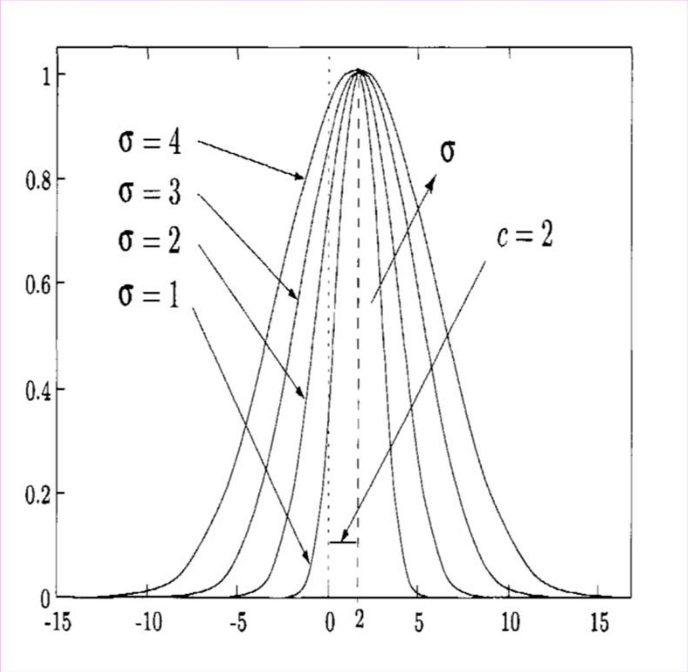
FUNGSI RADIAL BASIS

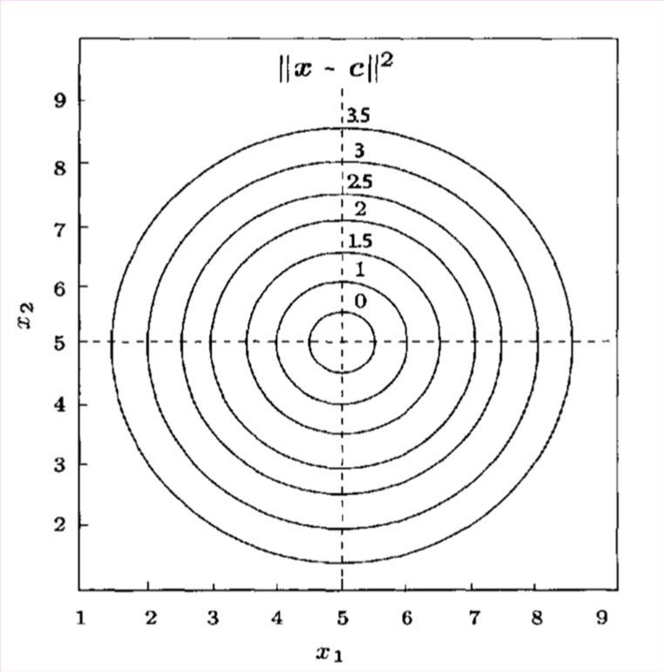
Pada persamaan $y = f(x) = \sum_{i=1}^{n} w_i \phi(\|x - c_i\|)$

$\phi(.)$ merupakan Fungsi Radial Basis

Fungsi Radial Basis mempunyai nilai maksimum pada saat $x = c_i$ dan turun secara monoton menuju 0 untuk $\|x - c_i\|$ mendekati tak hingga

Masing-masing node menghasilkan output yang sama untuk input yang mempunyai jarak radial yang tetap dari input





$$f(x) = \exp(-\tfrac{1}{2}[(x-c)/\sigma]^2)$$

- Untuk kasus multiple output dituliskan menjadi

$$y_j = f_j(x) = \sum_{i=1}^{n} w_{ij}\phi(\|x - c_i\|); \quad j = 1, 2, \ldots, m$$

atau

$$y = f(x) = W\phi$$

dimana

$$W = \begin{bmatrix} w_{11} & w_{12} & . & . & . & w_{1n} \\ w_{21} & w_{22} & . & . & . & w_{2n} \\ . & . & . & & & . \\ . & . & & . & & . \\ . & . & & & . & . \\ w_{n1} & w_{n2} & . & . & . & w_{nn} \end{bmatrix} \qquad \phi = \begin{bmatrix} \phi(\|x - c_1\|) \\ \phi(\|x - c_2\|) \\ . \\ . \\ . \\ \phi(\|x - c_n\|) \end{bmatrix}$$

Interpolasi dengan Menggunakan Fungsi Radial Basis

- *Jika diberikan n buah titik yang berbeda* $[x_i \in \Re^p, i = 1,2,\ldots,n]$ *dan n bilangan real* $[y_i \in \Re, i = 1,2,\ldots,n]$

Akan ditentukan fungsi $f : \Re^n \to \Re$ *sedemikian hingga memenuhi*

$$f(x_i) = y_i \qquad i = 1,2,\ldots,n$$

$$y = f(x) = \sum_{i=1}^{n} w_i \phi(\|x - x_i\|)$$

atau dapat dituliskan menjadi

$$\Phi w = y$$

$$\begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} & . & . & . & \phi_{1N} \\ \phi_{21} & \phi_{22} & . & . & . & \phi_{2N} \\ . & & . & & & . \\ . & & & . & & . \\ . & & & & . & . \\ \phi_{n1} & \phi_{n2} & . & . & . & \phi_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ . \\ . \\ . \\ w_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ . \\ . \\ . \\ y_N \end{bmatrix}$$

- Pada persamaan $\Phi w = y$

  Kondisi perlu dan cukup untuk menyelesaikan permasalahan interpolasi ini adalah keinvertibilitasan dari matrik Interpolasi Φ

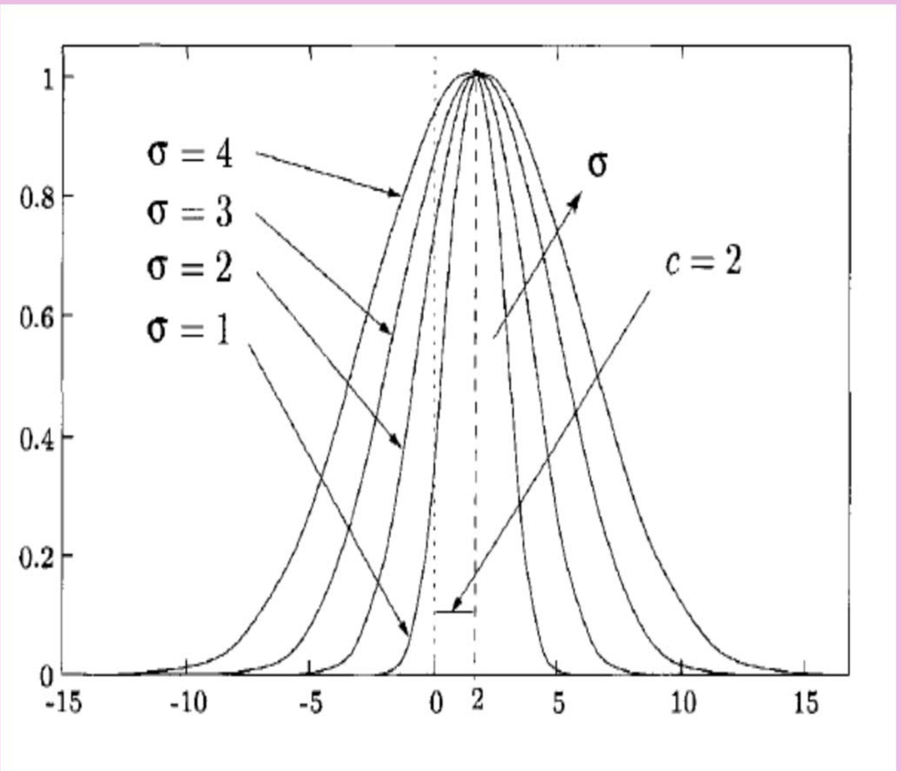
  Oleh karena itu, dipilih Fungsi Radial Basis sedemikian hingga $\phi(.)$ nonsingular, maka penyelesaian dari bobot vektor w didapatkan

$$w = \Phi^{-1} y$$

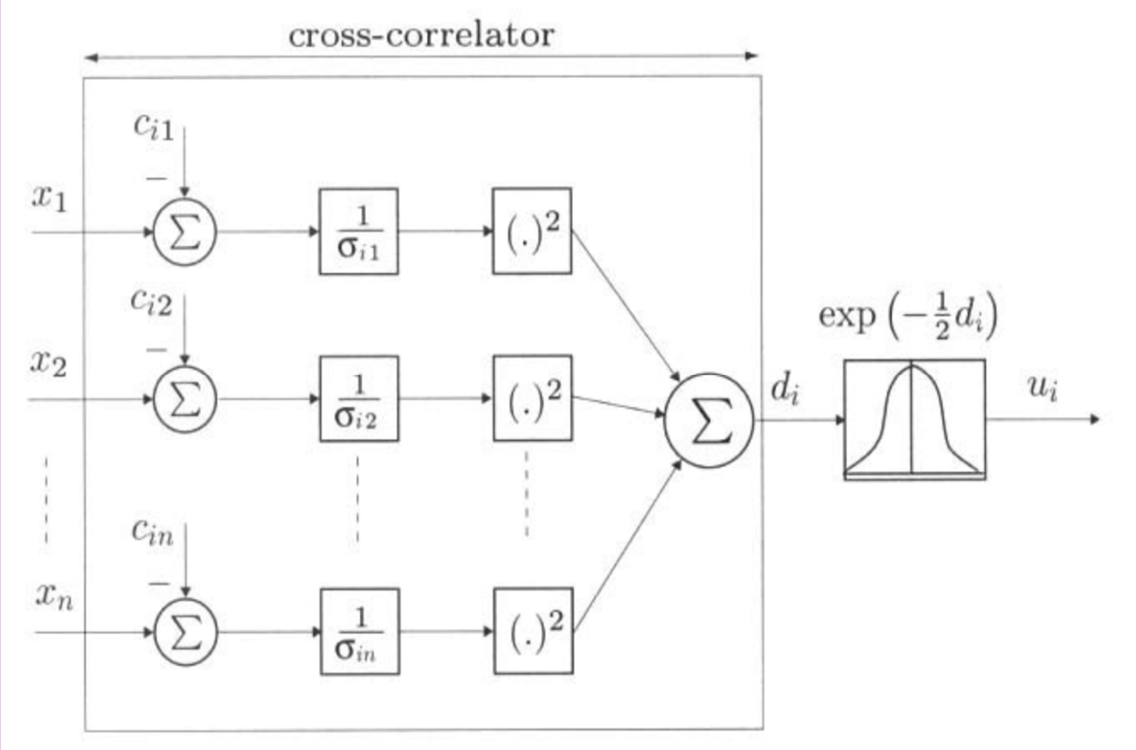
Beberapa Fungsi Radial Basis :

- Fungsi Radial Basis Gaussian $\phi(r) = e^{-(r/c)^2}$
- Fungsi Radial Basis Multikuadratik $\phi(r) = (c^2 + r^2)^\beta, \quad (0 < \beta < 1)$
-
- Fungsi Radial Basis Invers Multikuadratik $\phi(r) = \dfrac{1}{(c^2 + r^2)^\alpha}, \quad (\alpha > 0)$
- Fungsi Radial Basis Plate Spline $\phi(r) = r^2 \log(r)$
- Fungsi Radial Basis Kubik Spline $\phi(r) = r^3$
- Fungsi Radial Basis Linear Spline $\phi(r) = r$

Jaringan Syaraf Fungsi Radial Basis Gaussian



$$f(x) \; = \; \exp(-\tfrac{1}{2}[(x-c)/\sigma]^2)$$



$$d_i = \sum_{k=1}^{\ell}[(x_i - c_{ik})/\sigma_{ik}]^2$$

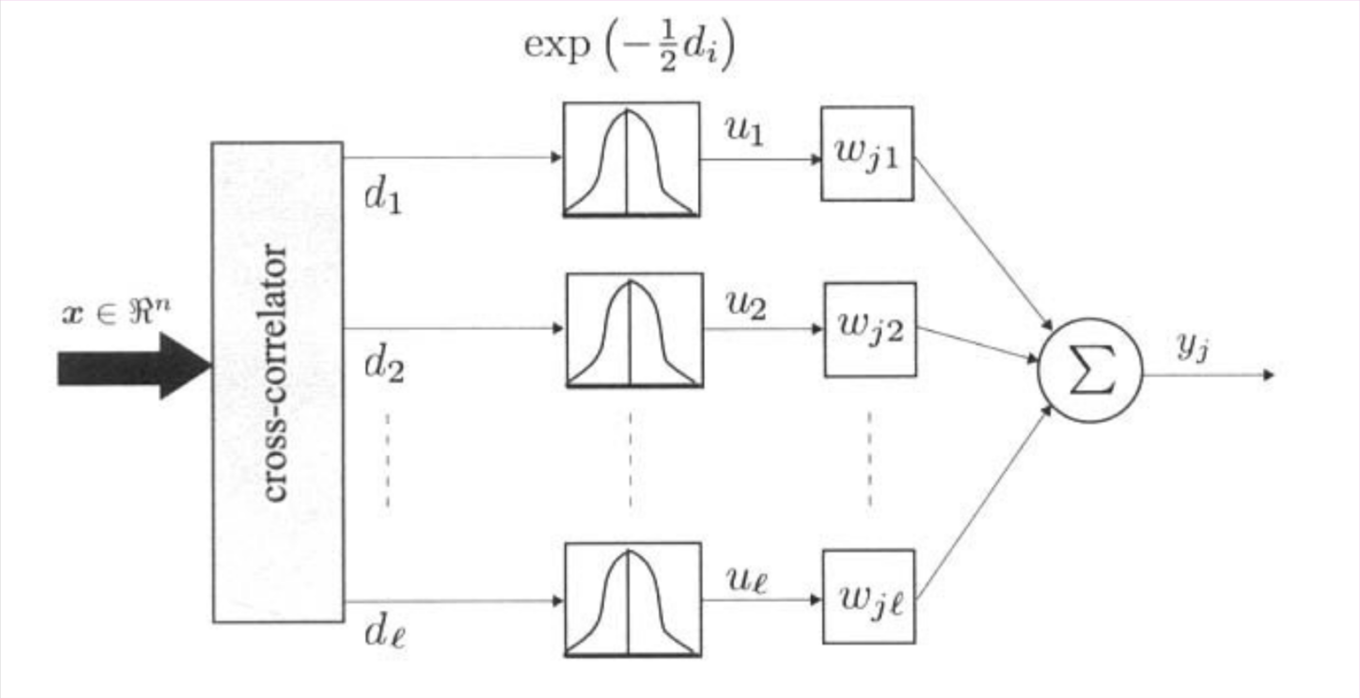
$$u_i = -\frac{1}{2}\exp(d_i)$$

$$u_i = \exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{x_k - c_{ik}}{\sigma_{ik}}\right]^2\right), \quad 1 \le i \le \ell$$

$$u_i = \exp\left(-\frac{1}{2}(x - c_i)^T \Sigma_i^{-1}(x - c_i)\right), \quad 1 \le i \le \ell$$

$$\Sigma_i \triangleq diag[\sigma_{i1}^2, \sigma_{i2}^2, \ldots, \sigma_{in}^2]$$

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{m_j}\sum_{k \in C_j}(x_{kj} - c_{ij})^2, \quad 1 \le i \le \ell; \ 1 \le j \le n$$



exp $\left(-\frac{1}{2}d_i\right)$
$x \in \Re^n$
cross-correlator
d_1
d_2
d_ℓ
u_1
u_2
u_ℓ
w_{j1}
w_{j2}
$w_{j\ell}$
Σ
y_j

$$
\begin{aligned}
y_j &= \sum_{i=1}^{\ell} w_{ji} u_i \\
&= \sum_{i=1}^{\ell} w_{ij} \exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{x_k - c_{ik}}{\sigma_{ik}}\right]^2\right),\ 1 \le j \le m
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
y_j &= \sum_{i=1}^{\ell} w_{ji} u_i \\
&= \sum_{i=1}^{\ell} w_{ij} \exp\left(-\tfrac{1}{2}(\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{c}_i)^T \Sigma_i^{-1} (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{c}_i)\right) \\
& \qquad 1 \le j \le m
\end{aligned}
$$

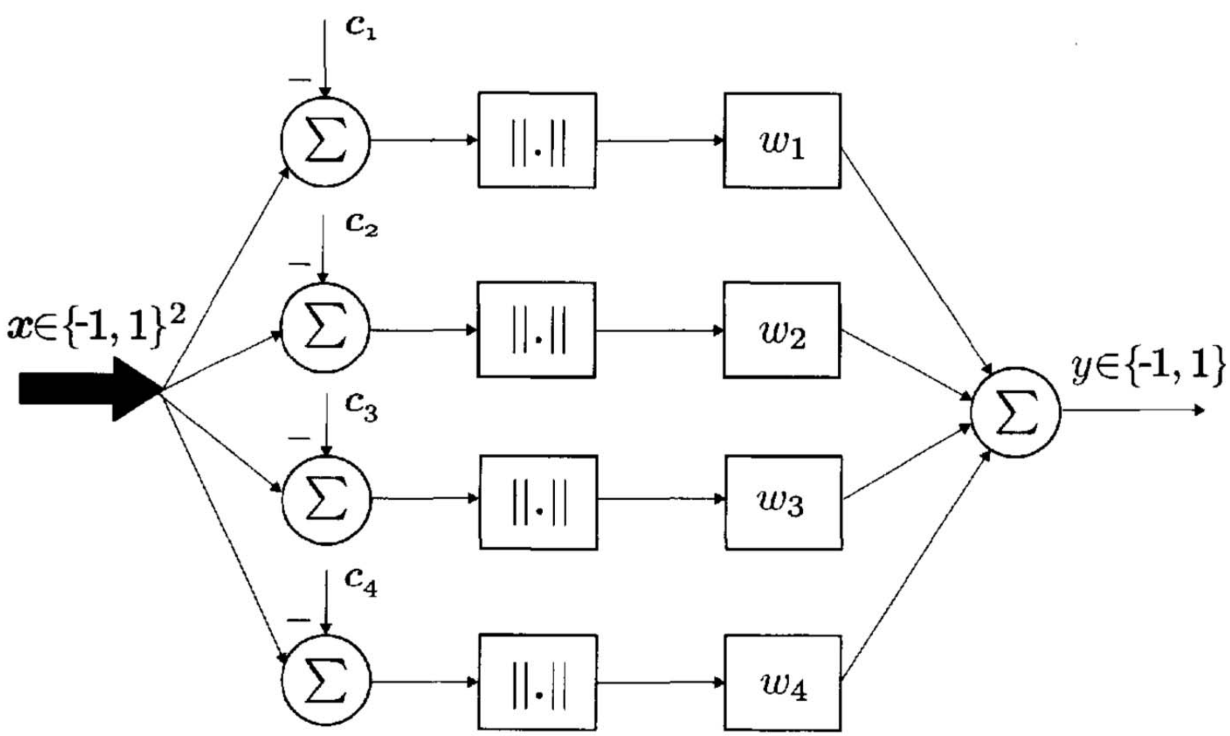
Contoh 1

- Empat vektor input dengan vektor output yang bersesuaian adalah

$$x_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad x_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad x_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad x_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad y = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

- Vektor parameter center pada Fungsi Radial Basis Linear dipilih sebagai

$$c_1 = x_1 \qquad c_3 = x_3$$
$$c_2 = x_2 \qquad c_4 = x_4$$


c_1
c_2
c_3
c_4
$x \in \{-1, 1\}^2$
w_1
w_2
w_3
w_4
$y \in \{-1, 1\}$

- Dengan menggunakan Fungsi Radial Basis Linear $\phi(r) = r$,matriks Interpolasinya :

$$\Phi = \begin{bmatrix} \|x_1 - c_1\| & \|x_1 - c_2\| & \|x_1 - c_3\| & \|x_1 - c_4\| \\ \|x_2 - c_1\| & \|x_2 - c_2\| & \|x_2 - c_3\| & \|x_2 - c_4\| \\ \|x_3 - c_1\| & \|x_3 - c_2\| & \|x_3 - c_3\| & \|x_3 - c_4\| \\ \|x_4 - c_1\| & \|x_4 - c_2\| & \|x_4 - c_3\| & \|x_4 - c_4\| \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 & 2\sqrt{2} \\ 2 & 0 & 2\sqrt{2} & 2 \\ 2 & 2\sqrt{2} & 0 & 2 \\ 2\sqrt{2} & 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

- bobot vektor dapat diselesaikan dengan persamaan matriks $\Phi w = y$

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 & 2\sqrt{2} \\ 2 & 0 & 2\sqrt{2} & 2 \\ 2 & 2\sqrt{2} & 0 & 2 \\ 2\sqrt{2} & 2 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Sehingga diperoleh

$$w_1 = w_4 = \frac{2+\sqrt{2}}{4} \qquad w_2 = w_3 = -\frac{2+\sqrt{2}}{4}$$

Contoh 2

- Empat vektor input biner dengan vektor output yang bersesuaian adalah

$$x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad x_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad x_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad x_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad y = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- Ditentukan Vektor parameter center pada Fungsi Radial Basis Linear

$$c_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad c_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Untuk output yang mengandung bias b=1, maka

$$y = \sum_{i=1}^{2} w_i \phi(\|x - c_i\|) + b$$

- Dengan menggunakan Fungsi Radial Basis Gaussian $\phi(\|x - c_i\| = \exp(-\|x - c_i\|^2) \quad i = 1,2$ matriks Interpolasinya :

$$\Phi = \begin{bmatrix} \|x_1 - c_1\| & \|x_1 - c_2\| & 1 \\ \|x_2 - c_1\| & \|x_2 - c_2\| & 1 \\ \|x_3 - c_1\| & \|x_3 - c_2\| & 1 \\ \|x_4 - c_1\| & \|x_4 - c_2\| & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0.1353 & 1 \\ 0.3678 & 0.3678 & 1 \\ 0.1353 & 1 & 1 \\ 0.3678 & 0.3678 & 1 \end{bmatrix}$$

Terlihat bahwa matrik interpolasi bukan merupakan matrik bujur sangkar (overdetermined equation)

Sehingga untuk menyelesaikannya, digunakan pseudoinvers dari matrik Φ :

$$\begin{aligned} w &= \Phi^{+} y \\ &= (\Phi^{T}\Phi)^{-1}\Phi^{T} y \end{aligned}$$

$\Phi^{T}\Phi$ adalah matrik interpolasi bujur sangkar yang mempunyai invers

Selanjutnya diperoleh

$$\Phi^{+} = \begin{bmatrix} 1.656 & -1.158 & 0.628 & -1.158 \\ 0.628 & -1.158 & 1.656 & -1.158 \\ -0.846 & 1.301 & -0.846 & 1.301 \end{bmatrix}$$

Maka diperoleh

$$w = \begin{bmatrix} 2.284 \\ 2.284 \\ -1.692 \end{bmatrix}$$

Contoh 3

Peramalan rata-rata curah hujan di wilayah Kabupaten Klaten Propinsi Jawa Tengah

Data yang digunakan adalah data rata-rata-rata curah hujan bulanan Kabupaten Klaten Prop Jawa Tengah selama 14 thn dari Jan ’91 s.d Des ’04. Terdapat 168 data, 156 data digunakan untuk pelatihan dan 12 data untuk testing

Hasil peramalan dengan RBFNs dibandingkan dengan ARIMA, diperoleh bahwa peramalan dengan RBFNs diperoleh hasil yang lebih baik daripada model ARIMA untuk data sampai dengan 10 langkah ke depan. Tetapi untuk 11 dan 12 langkah ke depan, ARIMA lebih baik

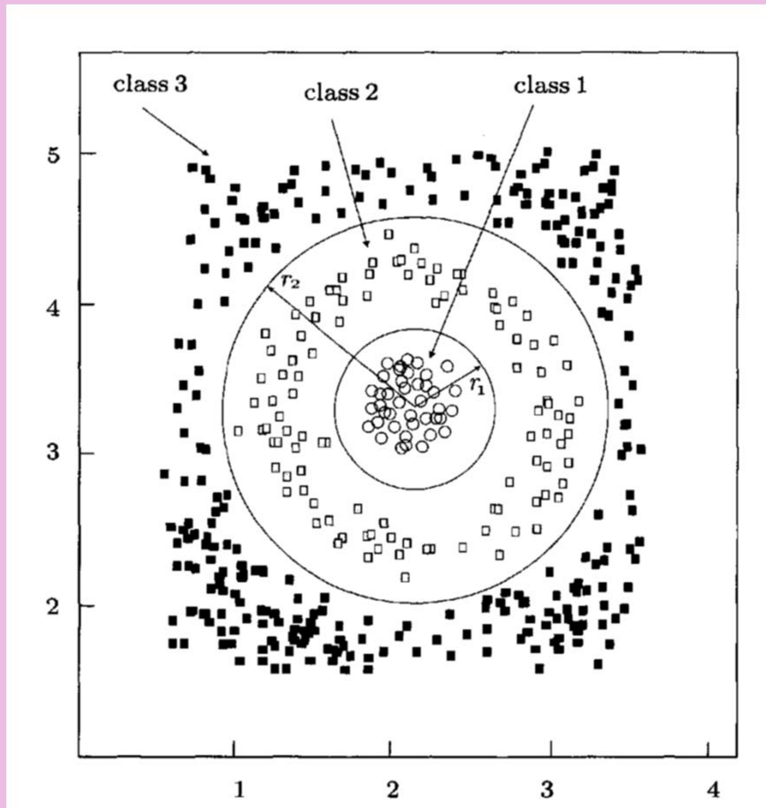
Contoh 4

Contoh pengklasifikasian sederhana dimana tiga kelas dapat diklasifikasikan secara efektif menggunakan Fungsi Radial Basis Linier

$$\phi(\|x-c\|) = \|x-c\|$$

diperoleh,

- $\phi(\|x-c\|) < r_1$: kelas 1
- $r_1 < \phi(\|x-c\|) < r_2$: kelas 2
- $\phi(\|x-c\|) > r_2$: kelas 3


class 3
class 2
class 1
r_2
r_1
5
4
3
2
1
2
3
4

TERIMA KASIH

DEPARTEMEN MATEMATIKA
INSTITUT TEKNOLOGI SEPULUH NOPEMBER

Sistem Dinamik Kontinu, Tak Stabil

Kelompok 2

Fitri Ayuningtyas	06111540000012
Putri Afiani W.	06111540000015
Tommy Ferdinand S.	06111540000019
Desynta N. F.	06111540000022

Sistem Dinamik

SISTEM KONTINU

Persamaan Diferensial :

$$\frac{dx}{dt} = f(x,t), t\epsilon R$$

SISTEM DISKRIT

Persamaannya di definisikan :

$$x_{t+1} = f(x_t), t\epsilon Z \ atau \ N$$

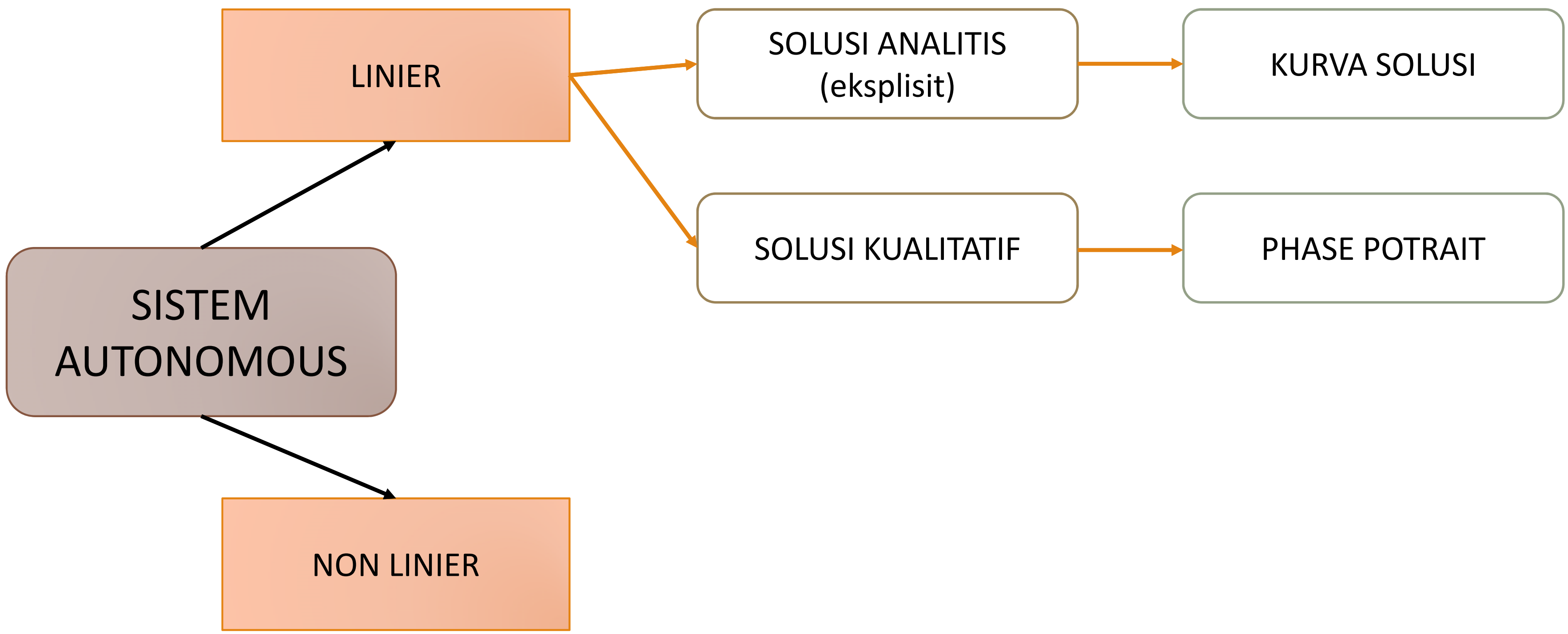
Sistem Dinamik Kontinu

$$\frac{dx}{dt} = f(x)$$

DISEBUT

SISTEM AUTONOMOUS

Karena x adalah fungsi dari t, sedangkan f merupakan fungsi dari x yang tidak tergantung pada t.


LINIER
SOLUSI ANALITIS (eksplisit)
KURVA SOLUSI
SISTEM AUTONOMOUS
SOLUSI KUALITATIF
PHASE POTRAIT
NON LINIER

Solusi Analitis pada Sistem Autonomous

- Penentuan Titik Kesetimbangan

$$\frac{dx}{dt} = f(x) = 0$$

Atau $$\frac{dx}{dt} = f_1(x, y) = 0; \ \frac{dy}{dt} = f_2(x, y) = 0$$

- Mencari Matriks Jacobian di sekitar titik setimbang

$$J(x^*, y^*) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{bmatrix}$$

- Mencari Nilai Eigen dan Vektor Eigen

$$|J - \lambda I| = 0 \text{ dan } |J - \lambda I|\mathrm{v} = 0$$

Kestabilan

Jika matriks Jacobian $J_{(x,y)}$ dari Sistem nonlinear $\dot{x} = f(x)$ dengan nilai eigen

(1) Stabil asimtotik lokal, jika semua nilai eigen dari matriks $J_{(x,y)}$ bernilai negatif.
(2) Tidak stabil, jika terdapat paling sedikit satu nilai eigen matriks $J_{(x,y)}$ bernilai positif.

Sistem Autonomus Linear 2 Dimensi

- Bentuk umum sistem autonomus linear 2 dimensi sebagai berikut :

$$\frac{dx}{dt} = px + qy$$

$$\frac{dy}{dt} = rx + sy$$

$$A = \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix}, \det(A) \neq 0$$

$$\begin{bmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \text{ atau } \frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x}$$

Solusi Analitik

$$|A - \lambda I| = 0$$
$$\left|\begin{bmatrix} p & r \\ q & s \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right| = 0$$
$$\begin{vmatrix} p-\lambda & q \\ r & s-\lambda \end{vmatrix} = 0$$
$$(p-\lambda)(s-\lambda) - qr = 0$$
$$\lambda^2 - (p+s)\lambda + ps - qr = 0$$
$$\lambda^2 - trace(A)\lambda + \det(A) = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{trace(A) \pm \sqrt{(trace(A))^2 - 4\det(A)}}{2}$$

- Akar Real kembar $\lambda_1 = \lambda_2$
- Akar Real Berbeda $\lambda_1 \neq \lambda_2$
- Akar Kompleks $\lambda = \alpha \pm i\beta$

$$\lambda_1 + \lambda_2 = trace(A)$$
$$\lambda_1\lambda_2 = \det(A)$$

Oleh karena itu:

$\lambda_1\lambda_2 = \det(A) < 0$ *maka* λ_1 *dan* λ_2 *berbeda tanda*

$\lambda_1\lambda_2 = \det(A) > 0$ *maka* λ_1 *dan* λ_2 *bertanda sama*

solusi analitik jika $\lambda_1 \neq \lambda_2$:

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = C_1 e^{\lambda_1 t}\vec{v}_1 + C_2 e^{\lambda_2 t}\vec{v}_2$$

solusi analitik jika $\lambda_1 = \lambda_2$:

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = C_1 e^{\lambda t}\vec{v}_1 + C_2 e^{\lambda t}\vec{v}_2$$

Contoh :

1. $\frac{dx}{dt} = 2x + y; \frac{dy}{dt} = 2x + 3y$

Jawab:

- **Titik Kesetimbangan**

Saat $\frac{dx}{dt} = 0\ dan\ \frac{dy}{dt} = 0$, sehingga diperoleh :

$y^* = -2x$

$x^* = -\frac{3}{2}y$

Maka titik setimbangnya yaitu $\left(-\frac{3}{2}y, -2x\right)$

- **Matriks Jacobian**

  Jika :

$$f_1 = 2x + y$$

$$f_2 = 2x + 3y$$

$$Maka, \quad \frac{\partial f_1}{\partial x} = 2 \quad ; \frac{\partial f_1}{\partial y} = 1$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x} = 2 \quad ; \frac{\partial f_2}{\partial y} = 3$$

  Dapat ditulis dalam matriks jacobian

$$\mathrm{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathrm{f}_1}{\partial \mathrm{x}} & \frac{\partial \mathrm{f}_1}{\partial \mathrm{y}} \\ \frac{\partial \mathrm{f}_2}{\partial \mathrm{x}} & \frac{\partial \mathrm{f}_2}{\partial \mathrm{y}} \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \mathrm{J} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow J_{\left(-\frac{3}{2}y, -2x\right)} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

- **Mencari Nilai Eigen**

$$|J - \lambda I| = 0$$

$$\begin{vmatrix} 2 - \lambda & 1 \\ 2 & 3 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(2 - \lambda)(3 - \lambda) - 2 = 0$$

$$\lambda^2 - 5\lambda + 6 - 2 = 0$$

$$\lambda^2 - 5\lambda + 4 = 0$$

$$\lambda_1 = 1; \ \lambda_2 = 4$$

- **Mencari Vektor Eigen**

$$(J - \lambda I)(v_1) = 0$$

$$\begin{bmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 2 & 3-\lambda \end{bmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

✓ Saat $\lambda_1 = 1$, subtitusi

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Misal $v_1 = s$

$$v_1 + v_2 = 0$$

$$v_2 = -v_1$$

Sehingga :

$$v_1 = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ -v_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} s$$

✓ Saat $\lambda_2 = 4$, subtitusi

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$2v_1 - v_2 = 0$$

$$2v_1 = v_2$$

Sehingga :

$$v_2 = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ 2v_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} s$$

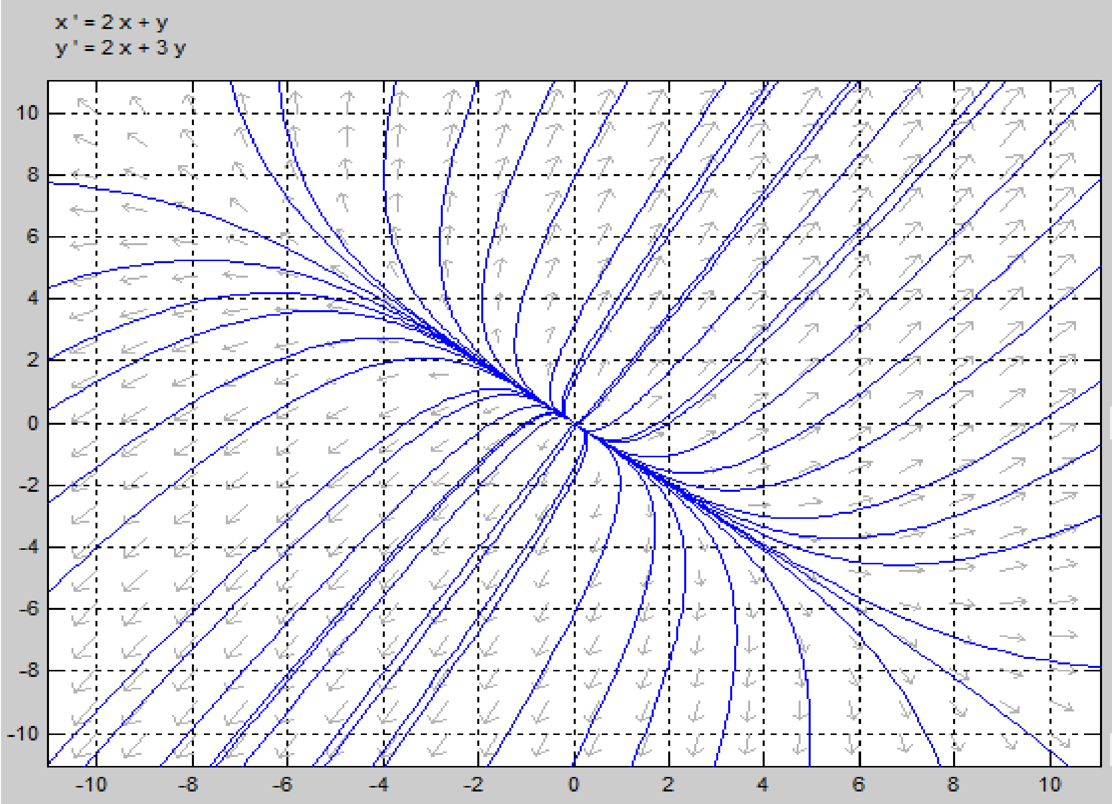
- **PUPD :**

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = c_1 e^{-t}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2 e^{-4t}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

- **Phase Potrait**

  Karena λ bernilai positif semua maka sitem tidak stabil.

  Sehingga gambar phase potrait nya :



Contoh :

2. $\frac{dx}{dt} = x + 2y$; $\frac{dy}{dt} = 2x - 2y$

Jawab :

- **Titik Kesetimbangan**

Saat $\frac{dx}{dt} = 0\ dan\ \frac{dy}{dt} = 0$, sehingga diperoleh :

$x^* = -2y$

$y^* = x$

Maka titik setimbangnya yaitu $(-2y, x)$

Matriks Jacobian

Jika :

$$f_1 = x + 2y$$
$$f_2 = 2x - 2y$$

$$Maka, \quad \frac{\partial f_1}{\partial x} = 1 \quad ; \frac{\partial f_1}{\partial y} = 2$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x} = 2 \quad ; \frac{\partial f_2}{\partial y} = -2$$

Dapat ditulis dalam matriks jacobian

$$\mathrm{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathrm{f}_1}{\partial \mathrm{x}} & \frac{\partial \mathrm{f}_1}{\partial \mathrm{y}} \\ \frac{\partial \mathrm{f}_2}{\partial \mathrm{x}} & \frac{\partial \mathrm{f}_2}{\partial \mathrm{y}} \end{bmatrix} \rightarrow \quad \mathrm{J} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow J_{(-2y,x)} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$$

- **Mencari Nilai Eigen**

$$|J - \lambda I| = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 - \lambda & 2 \\ 2 & -2 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(1 - \lambda)(-2 - \lambda) - 4 = 0$$

$$\lambda^2 + \lambda - 2 - 4 = 0$$

$$\lambda^2 + \lambda - 6 = 0$$

$$(\lambda + 3)(\lambda - 2)$$

$$\lambda_1 = -3; \ \lambda_2 = 2$$

- **Mencari Vektor Eigen**

$$(J - \lambda I)(v_1) = 0$$

$$\begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & -2-\lambda \end{bmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

✓ Saat $\lambda_1 = -3$, subtitusi

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Misal $v_1 = s$

$$2v_1 + v_2 = 0$$

$$v_2 = -2v_1$$

Sehingga :

$$v_1 = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ -2v_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} s$$

✓ Saat $\lambda_2 = 2$, subtitusi

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$-v_1 + 2v_2 = 0$$

$$v_1 = 2v_2$$

Sehingga :

misal $v_2 = r$

$$v_2 = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2v_2 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} r$$

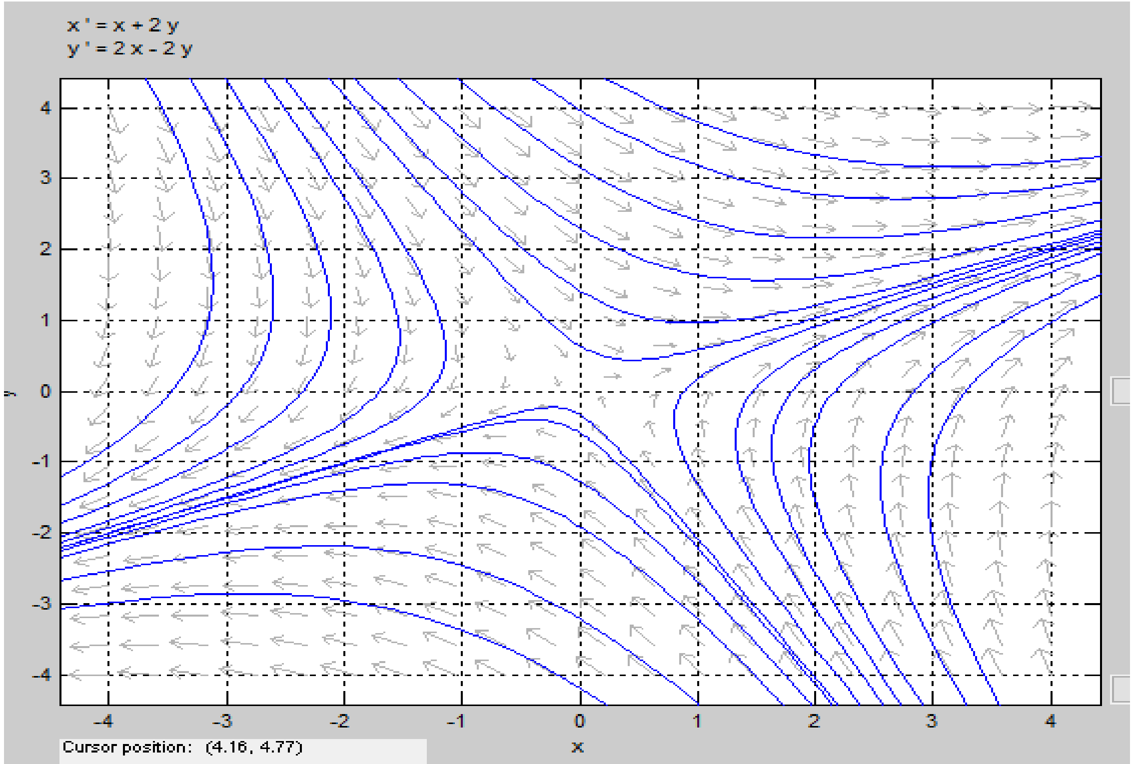
- **PUPD :**

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = c_1 e^{3t}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + c_2 e^{-2t}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- **Phase Potrait**

Karena λ ada yag bernilai positif maka sitem tidak stabil.

Sehingga gambar phase potraitnya :



Terima Kasih

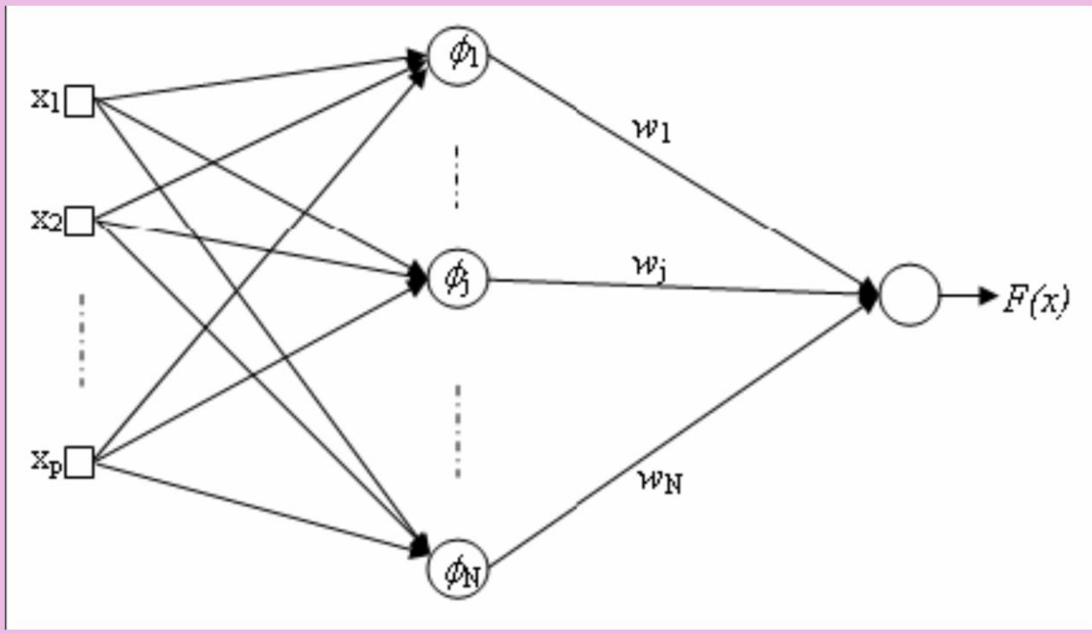
PENGANTAR
JARINGAN SYARAF TIRUAN

JARINGAN SYARAF FUNGSI RADIAL BASIS

Zeta Dharma Prakasa
1212100097

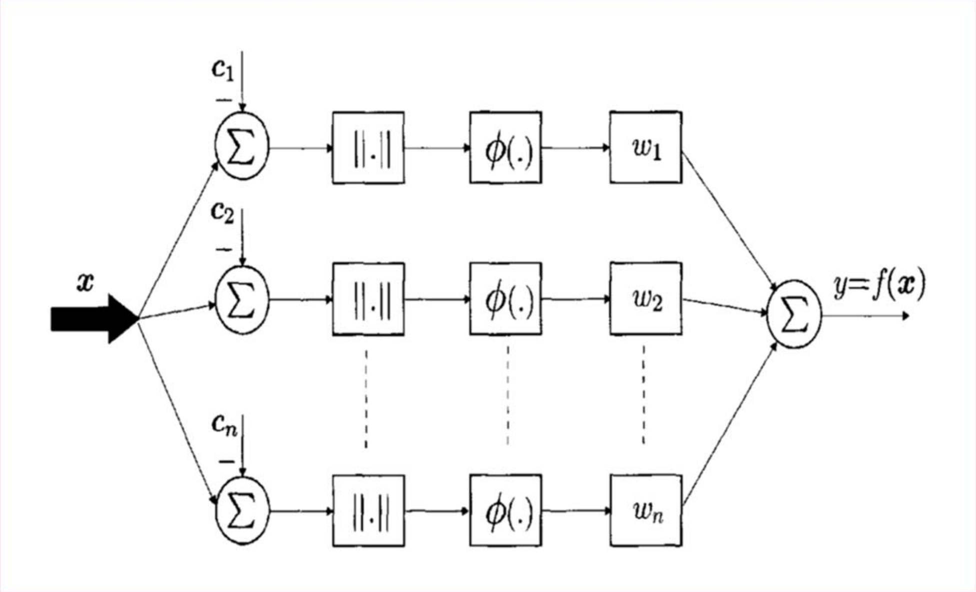
JARINGAN SYARAF FUNGSI RADIAL BASIS

- model jaringan syaraf dengan satu unit pada hidden layer, dimana fungsi aktivasinya adalah fungsi basis dan fungsi linear pada lapisan output.
- model ini mentransformasi input secara nonlinear pada hidden layer sebelum diproses secara linear pada lapisan output



x_1
x_2
x_p
ϕ_1
ϕ_j
ϕ_N
w_1
w_j
w_N
$F(x)$

- RBFNs dengan input berdimensi n, $x \in \Re^n$ dan output tunggal, $y \in \Re$ dengan jumlahan bobot dari berhingga banyak Fungsi Radial Basis



Secara matematis output y dapat dinyatakan,

$$y = f(x) = \sum_{i=1}^{n} w_i \phi_i (\|x - c_i\|)$$

Dimana

$\phi(\|x - c_i\|)$ adalah Fungsi Basis, fungsi nonlinear

$\|\cdot\|$ norm Euclid

$c_i \in \Re^n$ center dari Fungsi Radial Basis

w_i parameter bobot

$$y = f(x) = \sum_{i=1}^{n} w_i \phi(\|x - c_i\|)$$

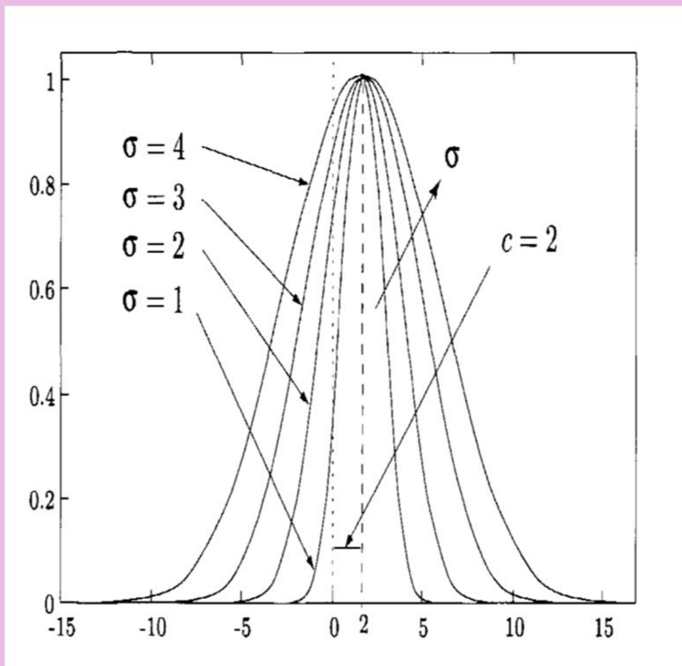
FUNGSI RADIAL BASIS

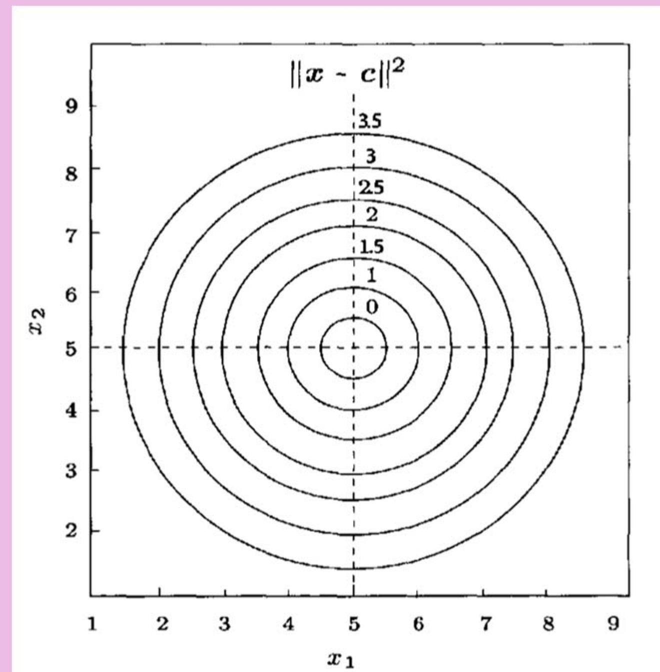
Pada persamaan $y = f(x) = \sum_{i=1}^{n} w_i \phi(\|x - c_i\|)$

$\phi(.)$ merupakan Fungsi Radial Basis

Fungsi Radial Basis mempunyai nilai maksimum pada saat $x = c_i$ dan turun secara monoton menuju 0 untuk $\|x - c_i\|$ mendekati tak hingga

Masing-masing node menghasilkan output yang sama untuk input yang mempunyai jarak radial yang tetap dari input





$$f(x) = \exp(-\tfrac{1}{2}[(x-c)/\sigma]^2)$$

- Untuk kasus multiple output dituliskan menjadi

$$y_j = f_j(x) = \sum_{i=1}^{n} w_{ij}\phi(\|x - c_i\|); \quad j = 1, 2, \ldots, m$$

atau

$$y = f(x) = W\phi$$

dimana

$$W = \begin{bmatrix} w_{11} & w_{12} & . & . & . & w_{1n} \\ w_{21} & w_{22} & . & . & . & w_{2n} \\ . & . & . & & & . \\ . & . & & . & & . \\ . & . & & & . & . \\ w_{n1} & w_{n2} & . & . & . & w_{nn} \end{bmatrix} \qquad \phi = \begin{bmatrix} \phi(\|x - c_1\|) \\ \phi(\|x - c_2\|) \\ . \\ . \\ . \\ \phi(\|x - c_n\|) \end{bmatrix}$$

Interpolasi dengan Menggunakan Fungsi Radial Basis

- *Jika diberikan n buah titik yang berbeda* $[x_i \in \Re^p, i = 1,2,\ldots,n]$ *dan n bilangan real* $[y_i \in \Re, i = 1,2,\ldots,n]$

Akan ditentukan fungsi $f : \Re^n \rightarrow \Re$ *sedemikian hingga memenuhi*

$$f(x_i) = y_i \qquad i = 1,2,\ldots,n$$

$$y = f(x) = \sum_{i=1}^{n} w_i \phi(\|x - x_i\|)$$

atau dapat dituliskan menjadi

$$\Phi w = y$$

$$\begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} & . & . & . & \phi_{1N} \\ \phi_{21} & \phi_{22} & . & . & . & \phi_{2N} \\ . & & . & & & . \\ . & & & . & & . \\ . & & & & . & . \\ \phi_{n1} & \phi_{n2} & . & . & . & \phi_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ . \\ . \\ . \\ w_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ . \\ . \\ . \\ y_N \end{bmatrix}$$

- Pada persamaan $\Phi w = y$

  Kondisi perlu dan cukup untuk menyelesaikan permasalahan interpolasi ini adalah keinvertibilitasan dari matrik Interpolasi Φ

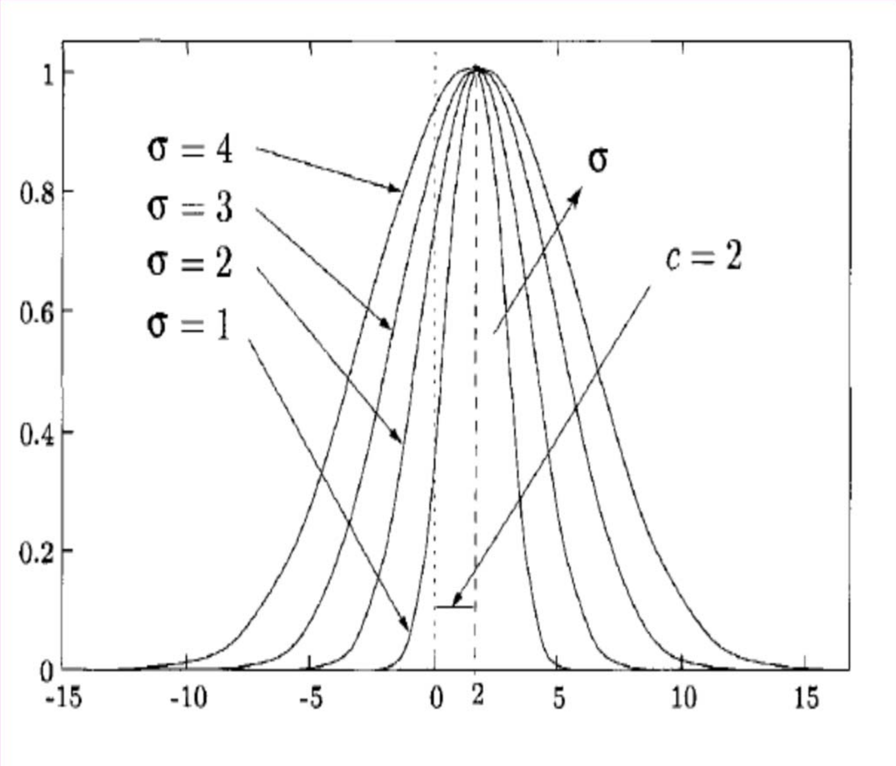
  Oleh karena itu, dipilih Fungsi Radial Basis sedemikian hingga $\phi(.)$ nonsingular, maka penyelesaian dari bobot vektor w didapatkan

$$w = \Phi^{-1} y$$

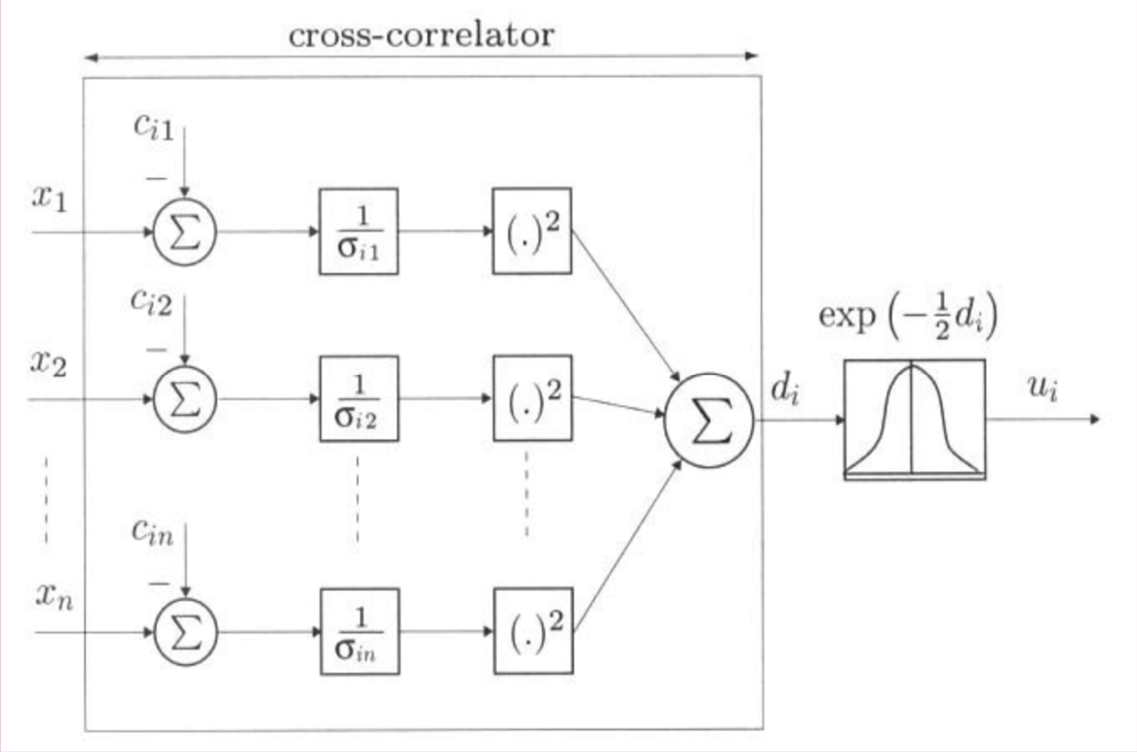
Beberapa Fungsi Radial Basis :

- Fungsi Radial Basis Gaussian $\phi(r) = e^{-(r/c)^2}$
- Fungsi Radial Basis Multikuadratik $\phi(r) = (c^2 + r^2)^{\beta}, \quad (0 < \beta < 1)$
-
- Fungsi Radial Basis Invers Multikuadratik $\phi(r) = \dfrac{1}{(c^2 + r^2)^{\alpha}}, \quad (\alpha > 0)$
- Fungsi Radial Basis Plate Spline $\phi(r) = r^2 \log(r)$
- Fungsi Radial Basis Kubik Spline $\phi(r) = r^3$
- Fungsi Radial Basis Linear Spline $\phi(r) = r$

Jaringan Syaraf Fungsi Radial Basis Gaussian



$$f(x) = \exp(-\frac{1}{2}[(x-c)/\sigma]^2)$$



$$d_i = \sum_{k=1}^{\ell}[(x_i - c_{ik})/\sigma_{ik}]^2$$

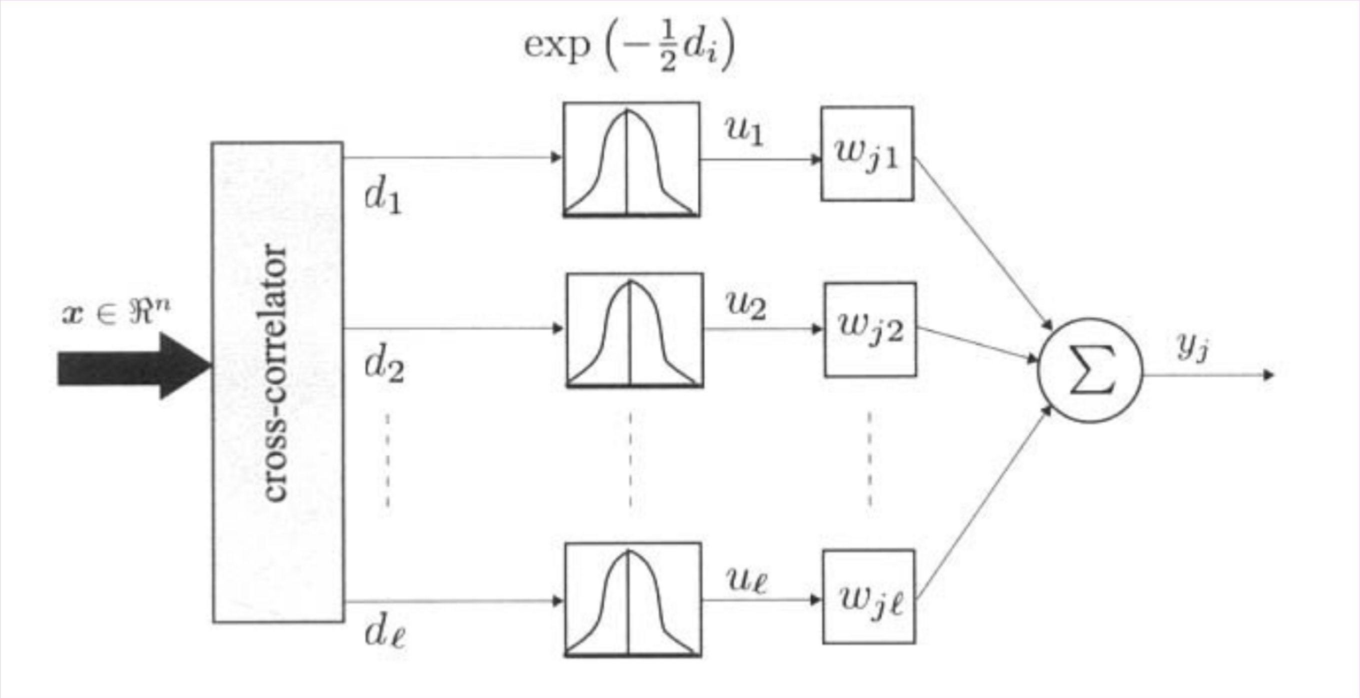
$$u_i = -\frac{1}{2}\exp(d_i)$$

$$u_i = \exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{x_k - c_{ik}}{\sigma_{ik}}\right]^2\right), \quad 1 \le i \le \ell$$

$$u_i = \exp\left(-\frac{1}{2}(x - c_i)^T \Sigma_i^{-1}(x - c_i)\right), \quad 1 \le i \le \ell$$

$$\Sigma_i \triangleq diag[\sigma_{i1}^2, \sigma_{i2}^2, \ldots, \sigma_{in}^2]$$

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{m_j}\sum_{k \in C_j}(x_{kj} - c_{ij})^2, \quad 1 \le i \le \ell; \; 1 \le j \le n$$



$\exp\left(-\frac{1}{2}d_i\right)$
$x \in \Re^n$
cross-correlator
d_1
d_2
d_ℓ
u_1
u_2
u_ℓ
w_{j1}
w_{j2}
$w_{j\ell}$
Σ
y_j

$$
\begin{aligned}
y_j &= \sum_{i=1}^{\ell} w_{ji} u_i \\
&= \sum_{i=1}^{\ell} w_{ij} \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{x_k - c_{ik}}{\sigma_{ik}} \right]^2 \right), \; 1 \le j \le m
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
y_j &= \sum_{i=1}^{\ell} w_{ji} u_i \\
&= \sum_{i=1}^{\ell} w_{ij} \exp\left(-\tfrac{1}{2} (\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{c}_i)^T \Sigma_i^{-1} (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{c}_i) \right) \\
&\qquad\qquad 1 \le j \le m
\end{aligned}
$$

Contoh 1

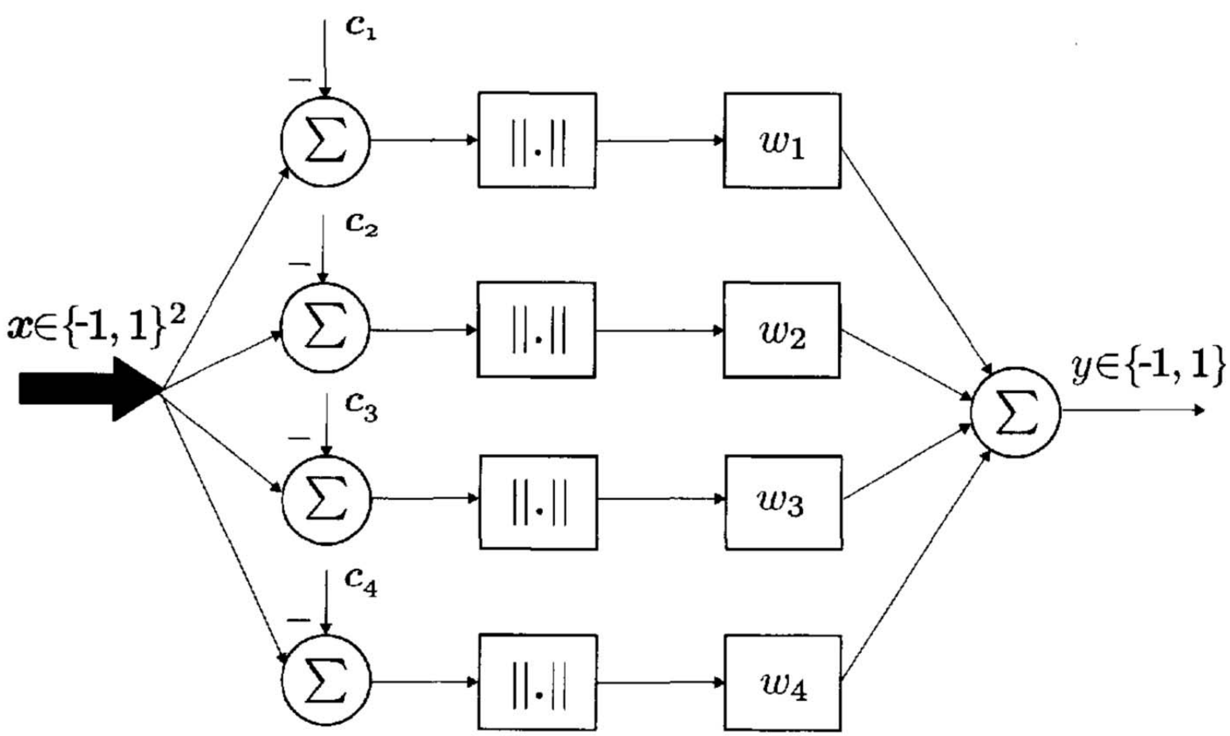
- Empat vektor input dengan vektor output yang bersesuaian adalah

$$x_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad x_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad x_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad x_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad y = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

- Vektor parameter center pada Fungsi Radial Basis Linear dipilih sebagai

$$c_1 = x_1 \qquad c_3 = x_3$$

$$c_2 = x_2 \qquad c_4 = x_4$$



c_1
c_2
c_3
c_4
$x \in \{-1, 1\}^2$
$\sum$
$\|.\|$
w_1
w_2
w_3
w_4
$y \in \{-1, 1\}$

- Dengan menggunakan Fungsi Radial Basis Linear $\phi(r) = r$,matriks Interpolasinya :

$$\Phi = \begin{bmatrix} \|x_1 - c_1\| & \|x_1 - c_2\| & \|x_1 - c_3\| & \|x_1 - c_4\| \\ \|x_2 - c_1\| & \|x_2 - c_2\| & \|x_2 - c_3\| & \|x_2 - c_4\| \\ \|x_3 - c_1\| & \|x_3 - c_2\| & \|x_3 - c_3\| & \|x_3 - c_4\| \\ \|x_4 - c_1\| & \|x_4 - c_2\| & \|x_4 - c_3\| & \|x_4 - c_4\| \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 & 2\sqrt{2} \\ 2 & 0 & 2\sqrt{2} & 2 \\ 2 & 2\sqrt{2} & 0 & 2 \\ 2\sqrt{2} & 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

- bobot vektor dapat diselesaikan dengan persamaan matriks $\Phi w = y$

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 & 2\sqrt{2} \\ 2 & 0 & 2\sqrt{2} & 2 \\ 2 & 2\sqrt{2} & 0 & 2 \\ 2\sqrt{2} & 2 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Sehingga diperoleh

$$w_1 = w_4 = \frac{2+\sqrt{2}}{4} \qquad w_2 = w_3 = -\frac{2+\sqrt{2}}{4}$$

Contoh 2

- Empat vektor input biner dengan vektor output yang bersesuaian adalah

$$x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad x_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad x_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad x_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad y = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- Ditentukan Vektor parameter center pada Fungsi Radial Basis Linear

$$c_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad c_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Untuk output yang mengandung bias b=1, maka

$$y = \sum_{i=1}^{2} w_i \phi(\|x - c_i\|) + b$$

- Dengan menggunakan Fungsi Radial Basis Gaussian $\phi(\|x - c_i\| = \exp(-\|x - c_i\|^2) \quad i = 1,2$ matriks Interpolasinya :

$$\Phi = \begin{bmatrix} \|x_1 - c_1\| & \|x_1 - c_2\| & 1 \\ \|x_2 - c_1\| & \|x_2 - c_2\| & 1 \\ \|x_3 - c_1\| & \|x_3 - c_2\| & 1 \\ \|x_4 - c_1\| & \|x_4 - c_2\| & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0.1353 & 1 \\ 0.3678 & 0.3678 & 1 \\ 0.1353 & 1 & 1 \\ 0.3678 & 0.3678 & 1 \end{bmatrix}$$

- Terlihat bahwa matrik interpolasi bukan merupakan matrik bujur sangkar (overdetermined equation)
- Sehingga untuk menyelesaikannya, digunakan pseudoinvers dari matrik Φ :

$$
\begin{aligned}
w &= \Phi^{+} y \\
&= (\Phi^{T}\Phi)^{-1}\Phi^{T} y
\end{aligned}
$$

- $\Phi^{T}\Phi$ adalah matrik interpolasi bujur sangkar yang mempunyai invers

Selanjutnya diperoleh

$$\Phi^{+} = \begin{bmatrix} 1.656 & -1.158 & 0.628 & -1.158 \\ 0.628 & -1.158 & 1.656 & -1.158 \\ -0.846 & 1.301 & -0.846 & 1.301 \end{bmatrix}$$

Maka diperoleh

$$w = \begin{bmatrix} 2.284 \\ 2.284 \\ -1.692 \end{bmatrix}$$

Contoh 3

Peramalan rata-rata curah hujan di wilayah Kabupaten Klaten Propinsi Jawa Tengah

Data yang digunakan adalah data rata-rata-rata curah hujan bulanan Kabupaten Klaten Prop Jawa Tengah selama 14 thn dari Jan ’91 s.d Des ’04. Terdapat 168 data, 156 data digunakan untuk pelatihan dan 12 data untuk testing

Hasil peramalan dengan RBFNs dibandingkan dengan ARIMA, diperoleh bahwa peramalan dengan RBFNs diperoleh hasil yang lebih baik daripada model ARIMA untuk data sampai dengan 10 langkah ke depan. Tetapi untuk 11 dan 12 langkah ke depan, ARIMA lebih baik

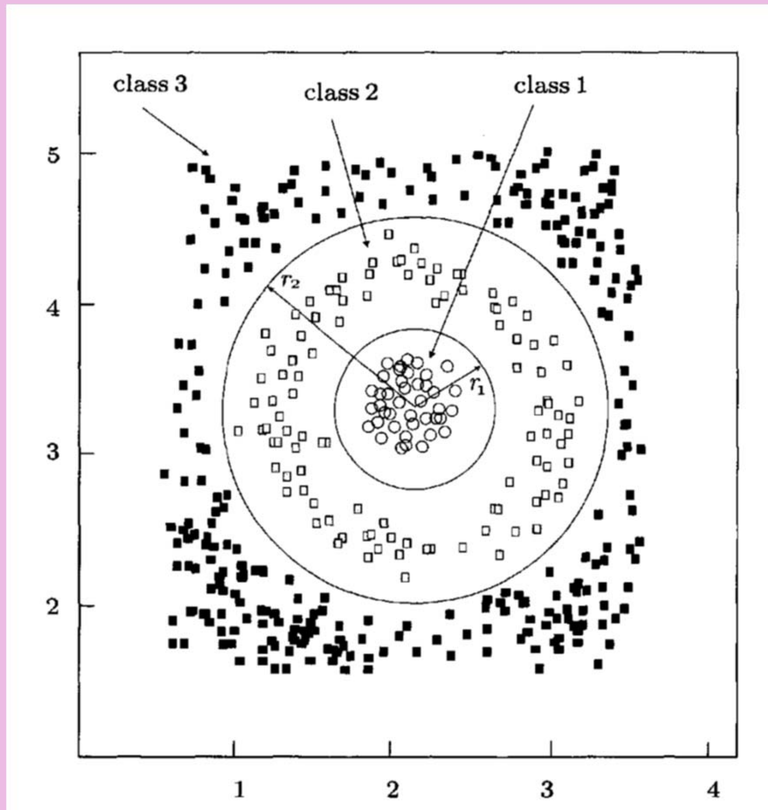
Contoh 4

Contoh pengklasifikasian sederhana dimana tiga kelas dapat diklasifikasikan secara efektif menggunakan Fungsi Radial Basis Linier

$$\phi(\|x-c\|) = \|x-c\|$$

diperoleh,

- $\phi(\|x-c\|) < r_1$: kelas 1
- $r_1 < \phi(\|x-c\|) < r_2$: kelas 2
- $\phi(\|x-c\|) > r_2$: kelas 3


class 3
class 2
class 1
r_2
r_1
5
4
3
2
1
2
3
4

TERIMA KASIH

TUGAS BESAR

PENGANTAR OPTIMASI DINAMIS

JUDUL JURNAL: **"ANALISIS STABILITAS DAN OPTIMAL KONTROL PADA MODEL EPIDEMI TIPE SIR DENGAN VAKSINASI"**

(oleh : Ikhtisholiyah 1207 100 702)

Departemen Matematika

Institut Teknologi Sepuluh Nopember

Surabaya

NAMA KELOMPOK :

DIAN EKA WARDHANI	1214100008
HANA KARIMAH	1214100079

Departemen Matematika

Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Institut Teknologi Sepuluh Nopember

Surabaya

2017

ABSTRAK Pemodelan matematika dan teori banyak digunakan dalam kehidupan sehari-hari, salah satunya teori kontrol optimal diterapkan pada pengendalian berbagai jenis penyakit. Pada tugas akhir ini pengendalian optimal tidak diterapkan pada penyakit yang khusus, akan tetapi digunakan untuk pola penyebaran penyakit yang mempunyai model epidemi tipe SIR (Susceptible-Infected-Recovery). Untuk menegendalikan pola penyebaran penyakit ini, diperlukan suatu vaksin. Vaksin adalah bahan antigenik yang digunakan untuk menghasilkan kekebalan aktif terhadap suatu penyakit sehingga dapat mencegah atau mengurangi pengaruh infeksi. Pada tugas akhir ini pengendalian penyakit yang mempunyai model epidemi tipe SIR dilakukan dengan vaksinasi untuk meminimalkan individu rentan (S) dan terinfeksi (I) serta memaksimalkan individu yang sembuh (R) secara bersamaan. Kontrol optimal diperoleh dengan menerapkan Prinsip Minimum Pontryagin.

Kata Kunci : Model SIR, vaksinasi, kendali optimal, Prinsip Minimum Pontryagin.

1. Model Endemi Tipe SIR

Model epidemi klasik adalah model SIR dengan dinamika penting (kelahiran dan kematian) yang diberikan oleh :

$$\frac{dS(t)}{dt} = vN - vS(t) - \frac{\beta I(t)S(t)}{N}, \qquad S(0) = S_0 \geq 0 \tag{1.1}$$

$$\frac{dI(t)}{dt} = \frac{\beta I(t)S(t)}{N} - (\gamma + v)I(t), \qquad I(0) = I_0 \geq 0 \tag{1.2}$$

$$\frac{dR(t)}{dt} = \gamma I(t) - vR(t), \qquad R(0) = R_0 \geq 0 \tag{1.3}$$

Untuk masalah kontrol optimal digunakan variabel kontrol $u(t) \in U_{ad}$ yang merepresentasikan proporsi jumlah individu rentan yang diberikan vaksin pada saat t, disini $U_{ad} = \{u | 0 \leq u(t) \leq 0.9; t \in [0, t_a]\}$. Dengan adanya pengontrol $u(t)$, maka konstrain sistem dinamik dari persamaan diferensial pada (1.1)-(1.3) menjadi :

$$\frac{dS(t)}{dt} = vN - (v + u(t))S(t) - \frac{\beta I(t)S(t)}{N}, \qquad S(0) = S_0 \geq 0 \tag{1.4}$$

$$\frac{dI(t)}{dt} = \frac{\beta I(t)S(t)}{N} - (\gamma + v)I(t), \qquad I(0) = I_0 \geq 0 \tag{1.5}$$

$$\frac{dR(t)}{dt} = \gamma I(t) - vR(t) + u(t)S(t), \qquad R(0) = R_0 \geq 0 \tag{1.6}$$

Tujuan akhr dari masalah kontrol optimal dari model epidemi tipe SIR adalah untuk mendapatkan bentuk yang optimal sehingga **meminimalkan** fungsi objektif dengan kontrol $u(t)$:

$$J(u) = \int_0^{t_a} \left(A_1 S(t) + A_2 I(t) + \frac{1}{2}\tau u^2 \right) dt \tag{1.7}$$

dengan

$S(t)$	:	populasi *susceptible* (yang rentan terhadap penyakit) pada saat t.
$I(t)$	:	populasi *infectious* (yang terjangkit penyakit dan dapat menularkan penyakit) pada saat t.
$R(t)$	:	populasi *recovery* (yang telah sembuh/bebas penyakit) pada saat t.
A_1, A_2	:	konstanta positif untuk menjaga keseimbangan ukuran $S(t)$ dan $I(t)$.

τ	:	bobot parameter positif
$u(t)$	:	presentase jumlah individu rentan yang diberikan vaksin pada saat t.
N	:	jumlah populasi keseluruhan
v	:	laju kelahiran dan kematian yang dianggap sama tiap satuan waktu
β	:	koefisien transmisi
γ	:	laju kesembuhan dan individu terinveksi

2. Masalah kontrol optimal

Pada umumnya, masalah kontrol optimal dalam bentuk matematik dapat diformulasikan sebagai berikut. Dengan tujuan mencari kontrol $u(t)$ yang mengoptimalkan (memaksimalkan atau meminimumkan) *performance index*:

$$J = S\left(x\left(t_f\right), t_f\right) + \int_{t_0}^{t_f} f\left(x(t), u(t), t\right) dt \tag{2.1}$$

Dengan kendala

$$\dot{x} = g(x(t), u(t), t)$$
$$x(t_0) = X_0 \tag{2.2}$$

Performance index merupakan ukuran kuantitas dari performa suatu sistem. Kontrol $u^*(t)$ merupakan kontrol optimal, jika didistribusikan kedalam sistem dinamik (2.2) akan memperoleh daerah(*state*) yang optimal $x^*(t)$ dan pada saat yang sama juga mengoptimalkan *performance index* (2.1).

3. Analisis dan Pembahasan

3.1 Deskripsi Model dan Asumsi

Model epidemi tipe SIR yang aka dibahas mempunyai asumsi-asumsi sebagai berikut:

a. Populasi dibagi menjadi 3 kelompok, yaitu :
   $S(t)$ adalah populasi *susceptible* (individu-individu yang rentan terhadap penyakit) pada saat t.
   $I(t)$ adalah populasi *infectious* (individu-individu yang terjangkit penyakit dan dapat menularkan penyakit, tapi belum menunjukkan adanya gejala penyakit diawal) pada saat t.
   $R(t)$ adalah populasi *recovery* (individu-individu yang telah sembuh/bebas peyakit) pada saat t.
b. Diasumsikan *v* adalah laju kelahiran yang sama dengan laju kematian. Sedangkan *N* adalah jumlah populasi keseluruhan dari populasi *S*,*I*,dan *R*, jumlah populasi yang lahir dalam tiap satuan waktu selalu konstan. Jumlah populasi yang lahir proporsional dengan jumlah populasi *N*. Oleh karena itu jumlah populasi yang lahir dalam populasi adalh *vN* . Populasi yang lahir akan masuk kelompok *S(t).*

c. Berdasarkan asumsi laju kelahiran sama dengan laju kematian, maka jumlah populasi yang mati pada setiap kelompok proposional dengan jumlah populasi pada masing-masing kelompok *S(t), I(t), R(t)*. Oleh karena itu, jumlah kematian pada kelompok masing masing sebesar *vS(t), vI(t), vR(t)* .
d. $\beta I(t)S(t)$ adalah laju besarnya populasi yang terinfeksi dimana β adalah koefisien transmisi yang merupakan konstanta yang menunjukkan tingat kontak sehngga terjadi penularan penyakit, individu rentan memperoleh infeksi pada per kapita $\beta I(t)$ dan laju kejadian timbulnya penyakit standar pada populasi yang terinfeksi $\frac{\beta S(t)I(t)}{N}$.
e. γ adalah laju kesembuhan dari individu yang telah terinfeksi.
f. $u(t)$ yang merepresentasikan prosentase populasi rentan yang divaksinasi per unit waktu

Sehingga persamaan untuk :

a. Populasi *Susceptible*
$$\frac{dS(t)}{dt} = vN - vS(t) - \frac{\beta I(t)S(t)}{N}$$
Yakni, besarnya laju populasi yang rentan dipengaruhi oleh jumlah populasi yang lahir dalam populasi *vN* dan akan menurun dengan adanya laju kematian alami *vS(t)* serta laju populasi yang terinfeksi $\frac{\beta S(t)I(t)}{N}$
b. Populasi *Infected*
$$\frac{dI(t)}{dt} = \frac{\beta I(t)S(t)}{N} - (\gamma + v)I(t)$$

yakni, besarnya laju populasi yang terinfeksi dipengaruhi oleh laju populasi yang terinfeksi $\frac{\beta I(t)S(t)}{N}$ dan akan menurun dengan adanya populasi yang sembuh $\gamma I(t)$ serta laju kematian alami $vI(t)$.

c. Populasi *Recovery*
$$\frac{dR(t)}{dt} = \gamma I(t) - vR(t) + u(t)S(t)$$
yakni, besarnya laju populasi yang sembuh dipengaruhi oleh laju kesembuhan dari populasi yang terinfeksi $\gamma I(t)$ dan akan menurun dengan adanya laju kematian alami $vR(t)$.

3.2 Titik Setimbang Model

3.2.1 Titik Setimbang Bebas Penyakit(*disease-free equilibrium*)

Suatu keadaan dimana tidak terjadi infeksi/penularan pada populasi $(I(t) = 0)$, sehingga didapatkan titik setimbang bebas penyakit yaitu $E_0 = (S_0, I_0, R_0) = (N, 0,0)$.

3.2.2 Titik Setimbang Endemi(*endemic equilibrium*)

Suatu keadaan terjadi penyebaran penyakit menular didalam populasi, didapatkan dari $\frac{dS}{dt} = 0, \frac{dI}{dt} = 0, \frac{dR}{dt} = 0$, sehingga didapatkan titik setimbang endemi yaitu $E_1 = (S_1, I_1, R_1) = \left(\frac{(\gamma+v)N}{\beta}, vN\left(\frac{1}{(\gamma+v)} - \frac{1}{\beta}\right), \gamma N\left(\frac{1}{(\gamma+v)} - \frac{1}{\beta}\right)\right)$.

3.3 Kestabilan Lokal

3.3.1 Kestabilan Lokal Titik Setimbang Bebas Penyakit

untuk titik setimbang $E_0 = (S_0, I_0, R_0) = (N, 0,0)$ matrik jacobiannya adalah

$$j = \begin{bmatrix} -v & -\beta & 0 \\ 0 & \beta - (\gamma + v) & 0 \\ 0 & \gamma & -v \end{bmatrix}$$

Nilai eigen diperoleh dari : $\det(\lambda I - j) = 0$

$$\leftrightarrow \left| \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -v & -\beta & 0 \\ 0 & \beta - (\gamma + v) & 0 \\ 0 & \gamma & -v \end{bmatrix} \right| = 0$$

$$\leftrightarrow \left| \begin{bmatrix} \lambda + v & \beta & 0 \\ 0 & \lambda - \beta(\gamma + v) & 0 \\ 0 & -\gamma & \lambda + v \end{bmatrix} \right| = 0$$

$$\leftrightarrow (\lambda + v)\big(\lambda - \beta + (\gamma + v)\big)(\lambda + v) = 0$$

Sehingga didapatkan nilai eigen

$$\lambda_{1,2} = -v, \lambda_3 = \beta - (\gamma + v)$$

Karena laju kematian alami untuk nilai $v > 0$ maka $\lambda_{1,2} = -v < 0$, sedangkan untuk $\lambda_3 = \beta - (\gamma + v)$ belum dapat ditentukan tandanya(dapat bernilai positif atau negatif). Oleh karena itu, akan dicari bilangan Reproduksi Dasar R_o terlebih dahulu.

Dari persamaan (1.1)-(1.3) dapat dicari *basic Reproductive* (R_o), dimana R_o bertujuan untuk mengetahui dinamik penyebaran penyakit, artinya apakah penyakit tersebut akan terjadi wabah atau tidak. Berdaarkan nilai eigen λ_3 dapat dianalisa sebagai berikut:

$$\lambda_3 = \beta - (\gamma + v)$$

$$\lambda_3 = (\gamma + v)\left(\frac{\beta - (\gamma + v)}{(\gamma + v)}\right)$$

$$\lambda_3 = (\gamma + v)\left(\frac{\beta}{(\gamma + v)} - 1\right)$$

Dengan $(\gamma + v) > 0$, sedangan $\frac{\beta}{(\gamma+v)} - 1$ akan bernilai positif jika $\frac{\beta}{(\gamma+v)} > 1$ dan bernilai negatif jika $\frac{\beta}{(\gamma+v)} < 1$

Oleh karen itu, *basic Reproductive* R_o adalah :

$$R_o = \frac{\beta}{(\gamma + v)}$$

Dari nilai R_o maka akan didapatkan nilai $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ sebagai berikut :

a. Jika $R_o > 1\ atau\ \frac{\beta}{(\gamma+v)} > 1$

Akan didapatkan bahwa nilai eigen dari $\lambda_1, \lambda_2 < 0$ dan $\lambda_3 > 0$, maka berdasarkan sifat stabilitas titik setimbang dilihat dari akar-akar karakteristiknya (nilai eigen λ) maka titik setimbang $E_0 = (N, 0,0)$ tidak stabil.

b. Jika $R_o \leq 1$ atau $\frac{\beta}{(\gamma+v)} \leq 1$

Akan didapatkan bahwa nilai eigen dari $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 < 0$, maka berdasarkan sifat stabilitas titik setimbang dilihat dari akar-akar karakteristiknya (nilai eigen λ) maka titik setimbang $E_0 = (N, 0,0)$ stabil asimtotis.

3.3.2 Kestabilan Lokal Titik Setimbang Endemi

Pada titik setimbang $E_1 = (S_1, I_1, R_1)$ dengan :

$$S_1 = \frac{(\gamma + v)N}{\beta}$$

$$I_1 = vN\left(\frac{1}{(\gamma + v)} - \frac{1}{\beta}\right)$$

$$R_1 = \gamma N\left(\frac{1}{(\gamma + v)} - \frac{1}{\beta}\right) \qquad (3.1)$$

Nilai eigen diperoleh dari : $\det\big(\lambda I - j(E_1)\big) = 0$ maka

$$\left|\lambda\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}-v - \frac{\beta I(t)}{N} & \frac{-\beta I(t)}{N} & 0\\ \frac{\beta I(t)}{N} & \frac{\beta S(t)}{N} - (\gamma + v) & 0\\ 0 & \gamma & -v\end{bmatrix}\right| = 0$$

$$\left\|\begin{matrix}\lambda + v + \frac{\beta I(t)}{N} & \frac{\beta I(t)}{N} & 0\\ -\frac{\beta I(t)}{N} & \lambda - \frac{\beta S(t)}{N} + (\gamma + v) & 0\\ 0 & -\gamma & \lambda + v\end{matrix}\right\| = 0$$

Persamaan karakteristiknya adalah :

$$\lambda^3 + \lambda^2\left(-\frac{\beta S(t)}{N} + 3v + \gamma + \frac{\beta I(t)}{N}\right) + \lambda\left(2v\gamma - \frac{2vS(t)\beta}{N} + 3v^2 + \frac{\beta I(t)\gamma}{N} + \frac{2I(t)\beta v}{N}\right) + \left(-\frac{S(t)\beta v^2}{N} + \gamma v^2 + v^2 + \frac{\beta v\gamma I(t)}{N} + \frac{\beta I(t)v^2}{N}\right)$$

Misalkan :

$$a_2 = -\frac{\beta I(t)}{N} + 3v + \gamma + \frac{\beta I(t)}{N}$$

$$a_1 = 2v\gamma - \frac{2vS(t)\beta}{N} + 3v^2 + \frac{\beta I(t)\gamma}{N} + \frac{2\beta I(t)v}{N}$$

$$a_0 = -\frac{\beta S(t)v^2}{N} + \gamma v^2 + v^2 + \frac{\beta v\gamma I(t)}{N} + \frac{\beta I(t)v^2}{N}$$

dengan mensubtitusikan nilai-nilai *S,I,R* pada persamaan (3.1) sehingga diperoleh :

$$a_2 = -v + \frac{\beta v}{(\gamma + v)}$$

$$a_1 = -\gamma v - 2v^2 + \frac{\beta v\gamma}{(\gamma + v)} + \frac{2\beta v^2}{(\gamma + v)}$$

$$a_0 = -\gamma v^2 - v^2 + \frac{\beta v^2\gamma}{(\gamma + v)} + \frac{\beta v^2}{(\gamma + v)}$$

Persamaan diatas jika ditulis dalam bentuk polinomial orde 3 menjadi:

$$\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0$$

Selanjutnya untuk mendapatkan akar-akar karakteristik (nilai eigen λ) dari polinomial derajat 3 digunakan kriteria kestabilan Routh-Hurwitz untuk menentukan kestabilannya

$$\begin{array}{l|cc} \lambda^3 & 1 & a_1 \\ \lambda^2 & a_2 & a_0 \\ \lambda^1 & b_1 & 0 \\ \lambda^0 & c_1 & 0 \end{array}$$

$$b_1 = \frac{a_1 a_2 - a_0}{a_2}, \quad c_1 = a_0$$

Polinomial orde 3 mempunyai akar negatif pada bagian realnya jika dan hanya jika elemen-konstrainnya adalahelemen dari kolom pertama pada tabel Routh-Hurwitz memiliki tanda yang sama. Sehingga didapatkan ketika $R_0 > 1$ berakibat $a_2 > 0, b_1 > 0$ dan $c_1 > 0$. Maka titik setimbang endemi yaitu :

$E_1 = (S_1, I_1, R_1) = \left(\frac{(\gamma+v)N}{\beta}, vN\left(\frac{1}{(\gamma+v)} - \frac{1}{\beta}\right), \gamma N\left(\frac{1}{(\gamma+v)} - \frac{1}{\beta}\right)\right)$. adalah stabil asimtotik.

3.4 Penyelesaian Kontrol Optimal

Pada penyelesaian kontrol optimal ini akan dibahas tentang penyelesaian menggunakan kontrol optimal untuk mendapatkan vaksinasi yang optimal dengan fungsi tujuan sebagai berikut :

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_0^{t_a} \left(A_1 S(t) + A_2 I(t) + \frac{1}{2}\tau u^2\right) dt$$

Model tersebut dapat diselesaikan dengan menguunakan optimal kontrol dimana variabel kontrolnya adalah u dan variabel keadaannya $x(t) = \begin{bmatrix} S(t) \\ I(t) \\ R(t) \end{bmatrix}$. Sedangkan konstrainnya adalah :

$$\frac{dS(t)}{dt} = vN - (v + u(t))S(t) - \frac{\beta I(t)S(t)}{N}$$
$$\frac{dI(t)}{dt} = \frac{\beta I(t)S(t)}{N} - (\gamma + v)I(t)$$
$$\frac{dR(t)}{dt} = \gamma I(t) - vR(t) + u(t)S(t)$$

Dengan kondisi batas

$0 < t < t_f \qquad 0 \leq u \leq 0.9$

$S(0) = S_0 \geq 0, \qquad I(0) = I_0 \geq 0, \qquad R(0) = R_0 \geq 0$

Hal pertama yang harus dilakukan adalah menentukan fungsi Hamiltonian

$$H = f(x, u, t) + \lambda' g(x, u, t)$$

$$H = A_1 S(t) + A_2 I(t) + \tfrac{1}{2}\tau u^2 + \lambda_1 \left[vN - \big(v + u(t)\big)S(t) - \tfrac{\beta I(t)S(t)}{N}\right] + \lambda_2 \left[\tfrac{\beta I(t)S(t)}{N} - (\gamma + v)I(t)\right] + \lambda_3[\gamma I(t) - vR(t) + u(t)S(t)]$$

Berdasarkan Prinsip Minimum Pontryagin, maka harus memenuhi persamaan state $\dot{x(t)} = \begin{bmatrix} \dot{S(t)} \\ \dot{I(t)} \\ \dot{R}(t) \end{bmatrix}$, co-state $\dot{\lambda(t)} = \begin{bmatrix} \dot{\lambda_1(t)} \\ \dot{\lambda_2(t)} \\ \dot{\lambda_3(t)} \end{bmatrix}$ dan kondisi stasioner.

1. Persamaan State

$$\dot{S} = \frac{\partial H}{\partial \lambda_1} = vN - \big(v + u(t)\big)S(t) - \frac{\beta I(t)S(t)}{N}$$

$$\dot{I} \ = \frac{\partial H}{\partial \lambda_2} = \frac{\beta I(t)S(t)}{N} - (\gamma + v)I(t)$$

$$\dot{R} = \frac{\partial H}{\partial \lambda_3} = \ \gamma I(t) - vR(t) + u(t)S(t)$$

Dengan kondisi batas sebagai berikut :

$$S(0) = S_0 \geq 0, \qquad I(0) = I_0 \geq 0, \qquad R(0) = R_0 \geq 0$$

2. Persamaan Co-State

$$\dot{\lambda_1} = -\frac{\partial H}{\partial S} = \frac{\big(\beta\lambda_1(t) - \beta\lambda_2(t)\big)S(t)}{N} + \lambda_1(t)(v + u(t)) - \lambda_3(t)u(t) - A_1$$

$$\dot{\lambda_2} = -\frac{\partial H}{\partial I} = \frac{\big(\beta\lambda_1(t) - \beta\lambda_2(t)\big)S(t)}{N} + \lambda_2(t)(\gamma + v) - \lambda_3(t)\gamma - A_2$$

$$\dot{\lambda_3} = -\frac{\partial H}{\partial R} = \lambda_3(t)v$$

Dengan kondisi batas sebagai berikut :

$\lambda_i(t_a) = 0, i = 1,2,3$

3. Kondisi Stasioner

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0$$

$$\tau u(t) - \lambda_1(t)S(t) + \lambda_3(t)S(t) = 0$$

$$\tau u(t) = \lambda_1(t)S(t) - \lambda_3(t)S(t)$$

$$u(t) = \frac{(\lambda_1(t) - \lambda_3(t))S(t)}{\tau}$$

Karena $0 \leq u(t) \leq 0.9$, diperoleh kontrol :

$$u(t) = maks\ \left\{\min\left[\frac{\big(\lambda_1(t) - \lambda_3(t)\big)S(t)}{\tau}, 0.9\right], 0\right\} \qquad 3.11$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (3.11) mka didapatkan sistem yang optimal :

$$\dot{S} = vN - \big(v + u(t)\big)S(t) - \frac{\beta I(t)S(t)}{N}$$

$$= vN - \left(v + maks\left\{\min\left[\frac{\big(\lambda_1(t) - \lambda_3(t)\big)S(t)}{\tau}, 0.9\right], 0\right\}\right)S(t) - \frac{\beta I(t)S(t)}{N}$$

$$\dot{I} = \frac{\beta I(t)S(t)}{N} - (\gamma + v)I(t)$$

$$\dot{R} = \gamma I(t) - vR(t) + u(t)S(t)$$

$$= \gamma I(t) - vR(t) + \left(maks \left\{ \min \left[\frac{(\lambda_1(t) - \lambda_3(t))S(t)}{\tau}, 0.9 \right], 0 \right\} \right) S(t)$$

3.5 Simulasi

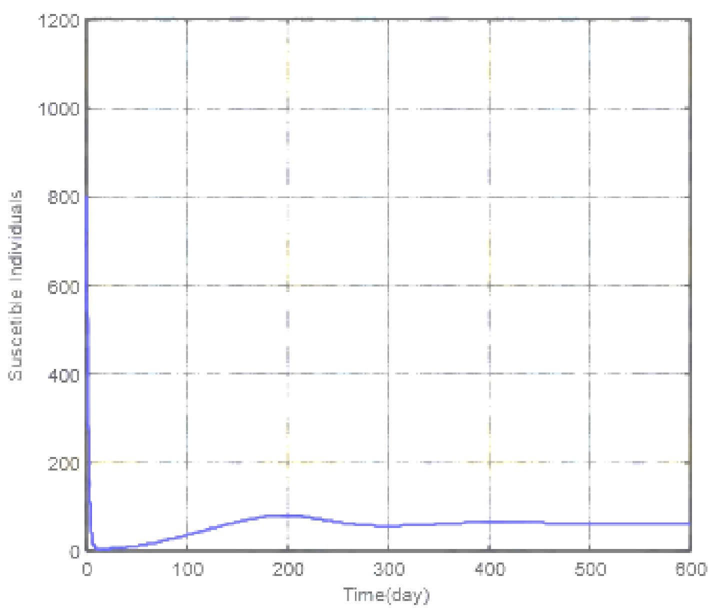
Table 4.1 Parameter dan Nilainya

Parameter	Nilai
β	0.95
γ	0.053
v	0.001
N	1075
A_1, A_2	1
τ	20

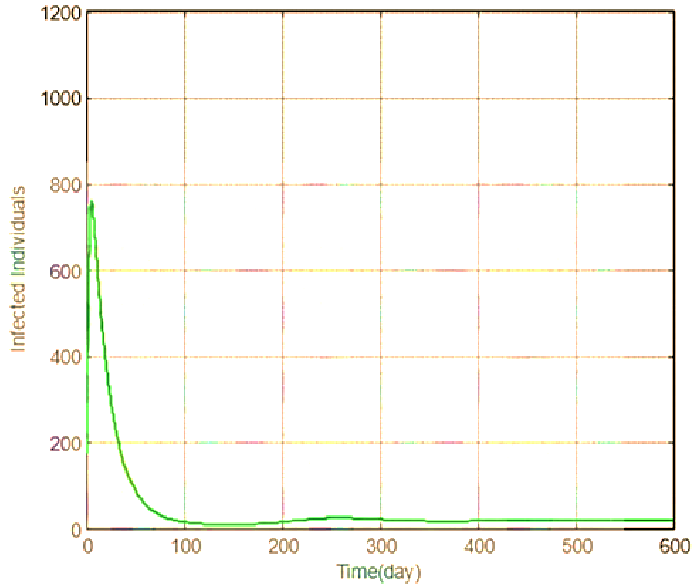
4. HASIL SIMULASI

A. Tanpa Kontrol

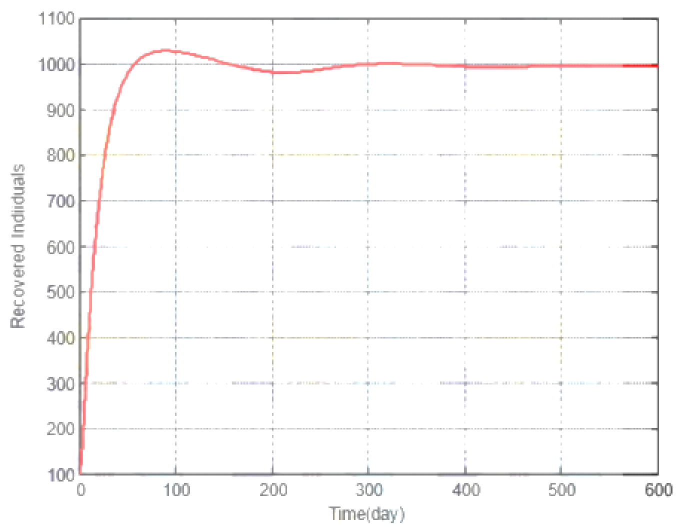
Dalam Hal ini, kondisi *Susceptible*, *Infected*, dan *Recovered* mengalami kenaikan, dan penurunan secara berulang-ulang dan tidak teratur.



Gambar 4.1 Populasi *Susceptible* (rentan) Tanpa Kontrol



Gambar 4.2 Populasi *Infected* (yang terinfeksi) Tanpa Kontrol

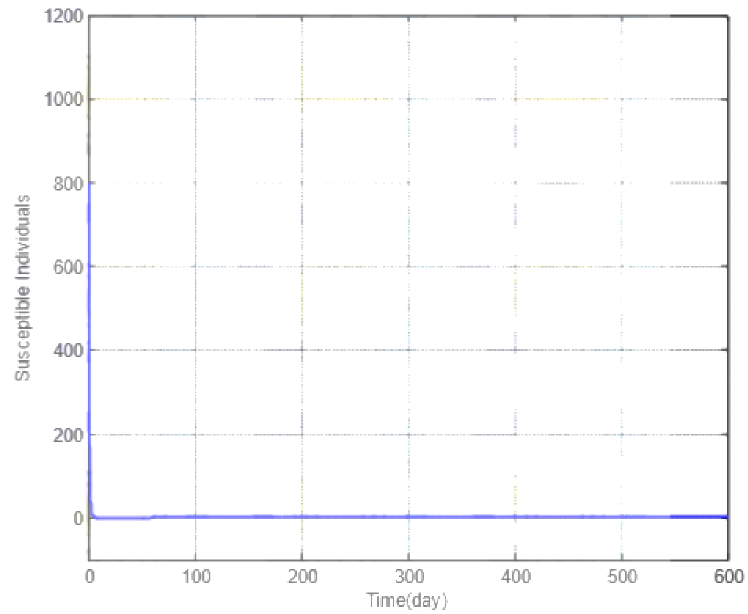


Gambar 4.3 Populasi *Recovered* (sembuh) Tanpa Kontrol

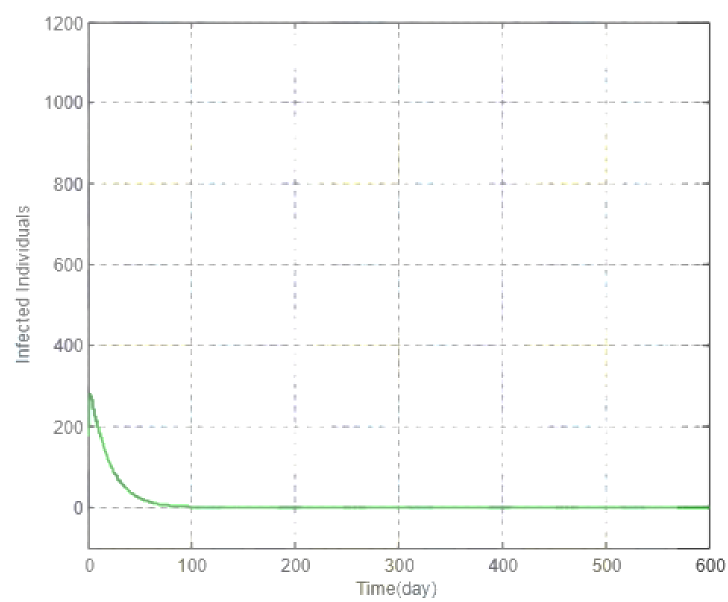
B. Dengan Kontrol Vaksin

Dalam hal ini kondisi *Susceptible*, *Infected* dan *Recovered*:

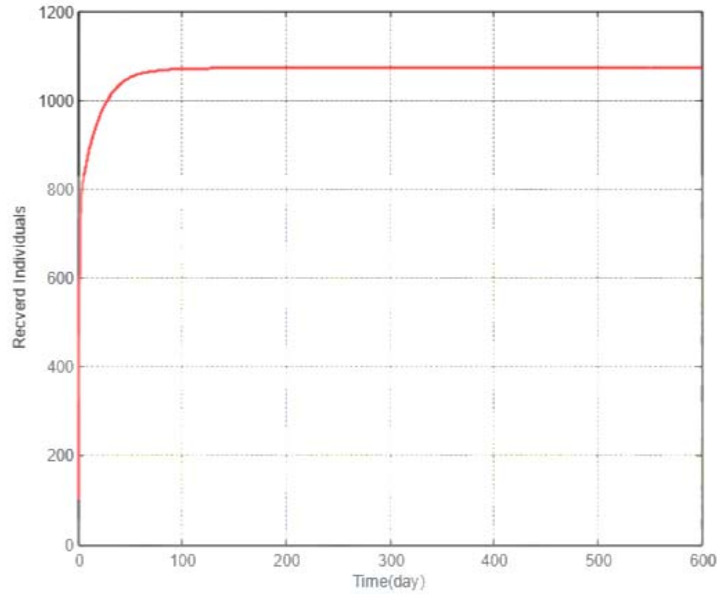
1. Mengalami penurunan pada *susceptible*, *infected*, dan
2. Mengalami peningkatan pada *recovered*.



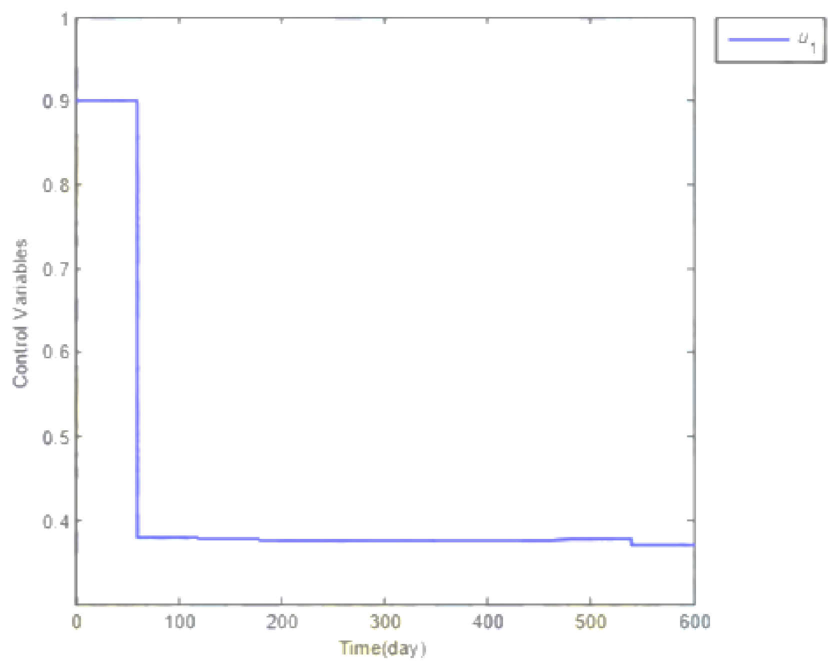
Gambar 4.4 Populasi *Susceptible* (rentan) Dengan Kontrol



Gambar 4.5 Populasi *Infected* (yang terinfeksi) Dengan Kontrol



Gambar 4.6 Populasi *Recovered* (sembuh) Dengan Kontrol



Gambar 4.7 Kontrol $u(t)$

DAFTAR PUSTAKA

Anggraeni, E. (2010), Penyelesaian Numerik dan Analisis Perilaku Model Epidemi Tipe SIR dengan Vaksinasi Untuk Pencegahan Penularan Penyakit. Tugas Akhir S1 Jurusan Matematika ITS Surabaya.

Ikhtisoliyah (2011), Analisis Stabilitas dan Optimal Kontrol Pada Model Epidemi Tipe SIR dengan Vaksinasi. Tugas Akhir S1 Jurusan Matematika ITS Surabaya.

TUGAS

MATEMATIKA SISTEM

Disusun Oleh :

Kelompok 2

Fitri Ayuningtyas	06111540000012
Putri Afiani W.	06111540000015
Tommy Ferdinand S.	06111540000019
Desynta Nurrahmawati F.	06111540000022

DEPARTEMEN MATEMATIKA

INSTITUT TEKNOLOGI SEPULUH NOPEMBER

SURABAYA

2017

PENDAHULUAN

Teori Sistem dinamik adalah sebuat teori dari matematika terapan yang digunakan untuk memeriksa kelakuan system dinamik kompleks, biasanya dengan menggunakan persamaan diferensial atau persamaan beda. Bila digunakan persamaan diferensial, teori tersebut dinamakan *sistem dinamik kontinu*. Bila digunakan persamaan beda, teori tersebut dinamakan *sistem dinamik diskret*.

Sistem Dinamik Kontinu $\frac{dx}{dt} = f(x,t),\ t\epsilon R$ Karena x adalah fungsi dari t, sedangkan f merupakan fungsi dari x yang tidak tergantung pada t disebut Sistem Autonomous. Sistem ini terdiri dari dua yaitu bentuk linear dan non linear.

Sistem dinamik kontinu seperti disebutkan diatas, sangat membantu untuk menyelesaikan persamaan-persamaan dengan variabel parameter yang saling berhubungan dan sering digunakan sebagai solusi penyelesaian dari beberapa model matematika, khusunya bidang fisika, kimia, dan juga biologi. Dalam sistem dinamik, akan diketahui perilaku sistem yang diberikan. Beberapa metode yang dapat digunakan untuk menganalisa kestabilan sistem yaitu melalui nilai eigen, metode Lyapunov, limit cycle dan bifurkasi. Melalui nilai eigen akan diperoleh informasi kestabilan sistem, baik menggunakan sistem persamaan diferensial linier maupun sistem hampir linier.

LANDASAN TEORI

1.1 Sistem Persamaan Diferensial

Suatu sistem yang berukuran n buah persamaan diferensial dan n buah fungsi yang nilainya tidak diketahui. Fungsi tersebut jika sama dengan nol maka sistem dapat dikatan sebagai sitem persamaan diferensial homogen. Begitu juga sebaliknya, dapat dikatakan sebagai sitem persamaan diferensial nonhomogen.

Sistem peramaan diferensial nonlinier dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$\frac{dy_1}{dt} = f(y_1, y_2, \dots \dots \dots, y_n)$$
$$\frac{dy_2}{dt} = f(y_1, y_2, \dots \dots \dots, y_n)$$
$$\dots \dots \dots$$
$$\frac{dy_n}{dt} = f(y_1, y_2, \dots \dots \dots, y_n)$$

Dengan kondisi awal $y_i(t_0) = \sigma_i, i = 1,2,3 \dots \dots \dots n$ atau dapat ditulis dalam bentuk persamaan ini

$$\frac{dy}{dt} = f(t)$$

f adalah fungsi nonlinier dan kontinu.

1.2 Titik Kesetimbangan

Diberikan sistem persamaan differensial sebagai berikut :

$$\dot{x} = f(x_1, x_2, \dots \dots \dots x_n) \quad ; dengan \ (x_1, x_2, \dots \dots \dots x_n) \in R^n$$

Suatu titik x^* yang memenuhi $f(x^*) = 0$ disebut titik kesetimbangan atau titik tetap dari sistem.

1.3 Nilai Eigen

Jika A adalah sebuah matrik $n \times n$, maka sebuah vektor taknol $x \ pada \ R^n$ disebut vektor eigen *(eigenvector)* dari A jika Ax adalah sebuah kelipatan skalar dari x, yaitu:

$$Ax = \lambda x$$
$$Ax - \lambda x = 0$$
$$(A - \lambda)x = 0$$

untuk skalar sembarang λ, skalar λ disebut nilai eigen *(eigenvalue)* dari A , dan disebut sebagai vektor eigen dari A yang terkait dengan λ.

1.4 Kestabilan

Diberikan matriks Jacobian $J_{(x,y)}$ dari Sistem nonlinear $\dot{x} = f(x)$ dengan nilai eigen

(1) Stabil asimtotik lokal, jika semua nilai eigen dari matriks $J_{(x,y)}$ bernilai negatif.
(2) Tidak stabil, jika terdapat paling sedikit satu nilai eigen matriks $J_{(x,y)}$ bernilai positif.

PEMBAHASAN

Solusi Analitis pada Sistem Autonomous

- Penentuan Titik Kesetimbangan

$$\frac{dx}{dt} = f(x) = 0$$

Atau $\frac{dx}{dt} = f_1(x,y) = 0;\ \frac{dy}{dt} = f_2(x,y) = 0$

- Mencari Matriks Jacobian di sekitar titik setimbang

$$J(x^*, y^*) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{bmatrix}$$

- Mencari Nilai Eigen dan Vektor Eigen

$|J - \lambda I| = 0$ dan $|J - \lambda I|\mathrm{v} = 0$

Sistem Otonomus Linear 2 Dimensi

Bentuk umum sistem otonomus linear 2 dimensi sebagai berikut :

$$\frac{dx}{dt} = px + qy$$

$$\frac{dy}{dt} = rx + sy$$

$$A = \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix}, \det(A) \neq 0$$

$$\begin{bmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \text{ atau } \frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x}$$

Sehingga diperolah solusi Analitik

$$|A - \lambda I| = 0$$

$$\left| \begin{bmatrix} p & r \\ q & s \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right| = 0$$

$$\begin{vmatrix} p - \lambda & q \\ r & s - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(p - \lambda)(s - \lambda) - qr = 0$$

$$\lambda^2 - (p + s)\lambda + ps - qr = 0$$

$$\lambda^2 - trace(A)\lambda + \det(A) = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{trace(A) \pm \sqrt{\left(trace(A)\right)^2 - 4\det(A)}}{2}$$

$$\text{Akar Real Berbeda } \lambda_1 \neq \lambda_2$$

$$\text{Akar Real kembar } \lambda_1 = \lambda_2$$

$$\text{Akar Kompleks } \lambda = \alpha \pm i\beta$$

Oleh karena itu:

1. $\lambda_1 \lambda_2 = \det(A) < 0 \; maka \lambda_1 \; dan \; \lambda_2 \; berbeda \; tanda$
2. $\lambda_1 \lambda_2 = \det(A) > 0 \; maka \; \lambda_1 \; dan \; \lambda_2 \; bertanda \; sama$

$$\lambda_1 + \lambda_2 = trace(A)$$

$$\lambda_1 \lambda_2 = \det(A)$$

Sehingga diperoleh solusi analitik :

1. $solusi \; analitik \; jika \; \lambda_1 \neq \lambda_2$:

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = C_1 e^{\lambda_1 t} \vec{v}_1 + C_2 e^{\lambda_2 t} \vec{v}_2$$

2. $solusi \; analitik \; jika \; \lambda_1 = \lambda_2$:

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = C_1 e^{\lambda t} \vec{v}_1 + C_2 e^{\lambda t} \vec{v}_2$$

Contoh Soal

1. $\frac{dx}{dt} = 2x + y; \; \frac{dy}{dt} = 2x + 3y$

   Jawab:

   - **Titik Kesetimbangan**

     Saat $\frac{dx}{dt} = 0 \; dan \; \frac{dy}{dt} = 0$, sehingga diperoleh :

     - $2x + y = 0$

       $y^* = -2x$

     - $2x + 3y = 0$

       $x^* = -\frac{3}{2} y$

       Maka titik setimbangnya yaitu $\left(-\frac{3}{2} y, -2x\right)$

   - **Matriks Jacobian**

Jika :

$f_1 = 2x + y$

$f_2 = 2x + 3y$

$Maka, \quad \frac{\partial f_1}{\partial x} = 2 \quad ; \frac{\partial f_1}{\partial y} = 1$

$\frac{\partial f_2}{\partial x} = 2 \quad ; \frac{\partial f_2}{\partial y} = 3$

Dapat ditulis dalam matriks jacobian

$$\mathrm{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathrm{f}_1}{\partial \mathrm{x}} & \frac{\partial \mathrm{f}_1}{\partial \mathrm{y}} \\ \frac{\partial \mathrm{f}_2}{\partial \mathrm{x}} & \frac{\partial \mathrm{f}_2}{\partial \mathrm{y}} \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \mathrm{J} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \quad \rightarrow J_{\left(-\frac{3}{2}y, -2x\right)} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

- **Mencari Nilai Eigen**

$|J - \lambda I| = 0$

$\begin{vmatrix} 2 - \lambda & 1 \\ 2 & 3 - \lambda \end{vmatrix} = 0$

$(2 - \lambda)(3 - \lambda) - 2 = 0$

$\lambda^2 - 5\lambda + 6 - 2 = 0$

$\lambda^2 - 5\lambda + 4 = 0$

$\lambda_1 = 1; \ \lambda_2 = 4$

- **Mencari Vektor Eigen**

$(J - \lambda I)(v_1) = 0$

$\begin{bmatrix} 2 - \lambda & 1 \\ 2 & 3 - \lambda \end{bmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

✓ Saat $\lambda_1 = 1$, subtitusi

$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Misal $v_1 = s$

$v_1 + v_2 = 0$

$v_2 = -v_1$

Sehingga :

$$v_1 = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ -v_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} s$$

✓ Saat $\lambda_2 = 4$, subtitusi

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$2v_1 - v_2 = 0$

$2v_1 = v_2$

Sehingga :

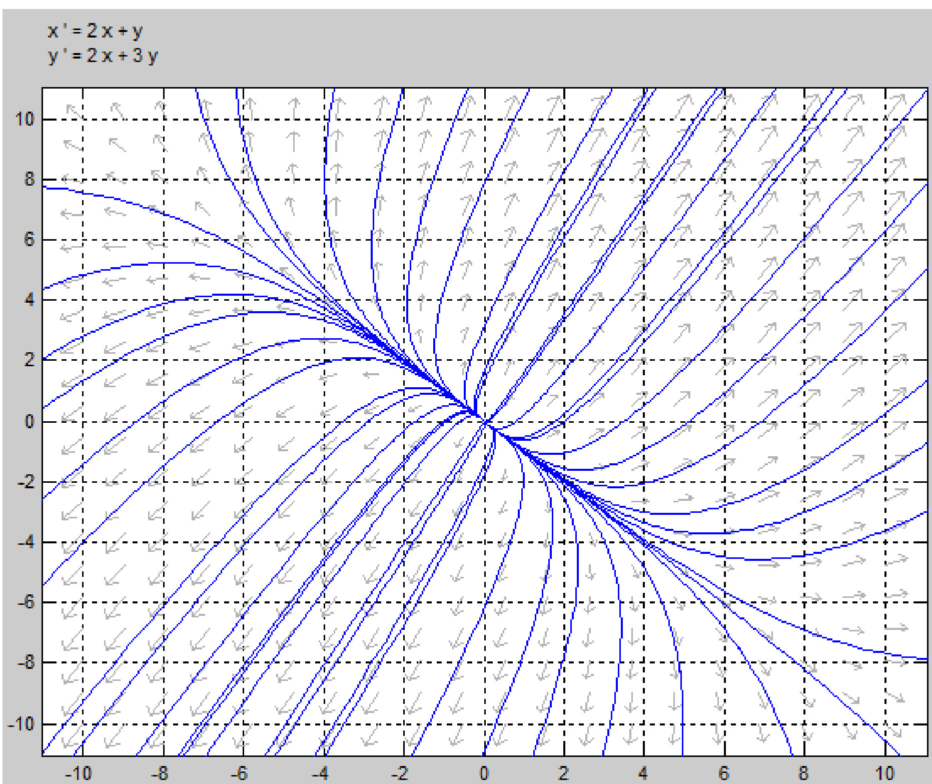
$$v_2 = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ 2v_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} s$$

- **PUPD :**

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = c_1 e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2 e^{-4t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

- **Phase Potrait**

Karena λ bernilai positif semuamaka sitem tidak stabil. Sehingga gambar phase potraitnya :



2. $\frac{dx}{dt} = x + 2y;\ \frac{dy}{dt} = 2x - 2y$

Jawab:

- **Titik Kesetimbangan**

  Saat $\frac{dx}{dt} = 0\ dan\ \frac{dy}{dt} = 0$, sehingga diperoleh :

  - $x + 2y = 0$

    $x^* = -2y$

  - $2x - 2y = 0$

    $y^* = x$

    Maka titik setimbangnya yaitu $(-2y, x)$

- **Matriks Jacobian**

  Jika :

  $f_1 = x + 2y$

  $f_2 = 2x - 2y$

  $Maka,\qquad \frac{\partial f_1}{\partial x} = 1\quad ;\ \frac{\partial f_1}{\partial y} = 2$

  $\frac{\partial f_2}{\partial x} = 2\quad ;\ \frac{\partial f_2}{\partial y} = -2$

  Dapat ditulis dalam matriks jacobian

  $$\mathrm{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathrm{f}_1}{\partial \mathrm{x}} & \frac{\partial \mathrm{f}_1}{\partial \mathrm{y}} \\ \frac{\partial \mathrm{f}_2}{\partial \mathrm{x}} & \frac{\partial \mathrm{f}_2}{\partial \mathrm{y}} \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \mathrm{J} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \quad \rightarrow J_{(-2y,x)} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$$

- **Mencari Nilai Eigen**

  $|J - \lambda I| = 0$

  $\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0$

  $(1-\lambda)(-2-\lambda) - 4 = 0$

  $\lambda^2 + \lambda - 2 - 4 = 0$

  $\lambda^2 + \lambda - 6 = 0$

  $(\lambda + 3)(\lambda - 2)$

  $\lambda_1 = -3;\ \lambda_2 = 2$

- **Mencari Vektor Eigen**

$(J-\lambda I)(v_1)=0$

$\begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & -2-\lambda \end{bmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

- ✓ Saat $\lambda_1=-3$, subtitusi

$\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Misal $v_1=s$

$2v_1+v_2=0$

$v_2=-2v_1$

Sehingga :

$$v_1=\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} v_1 \\ -2v_1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}s$$

- ✓ Saat $\lambda_2=2$, subtitusi

$\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$-v_1+2v_2=0$

$v_1=2v_2$

Sehingga :

misal $v_2=r$

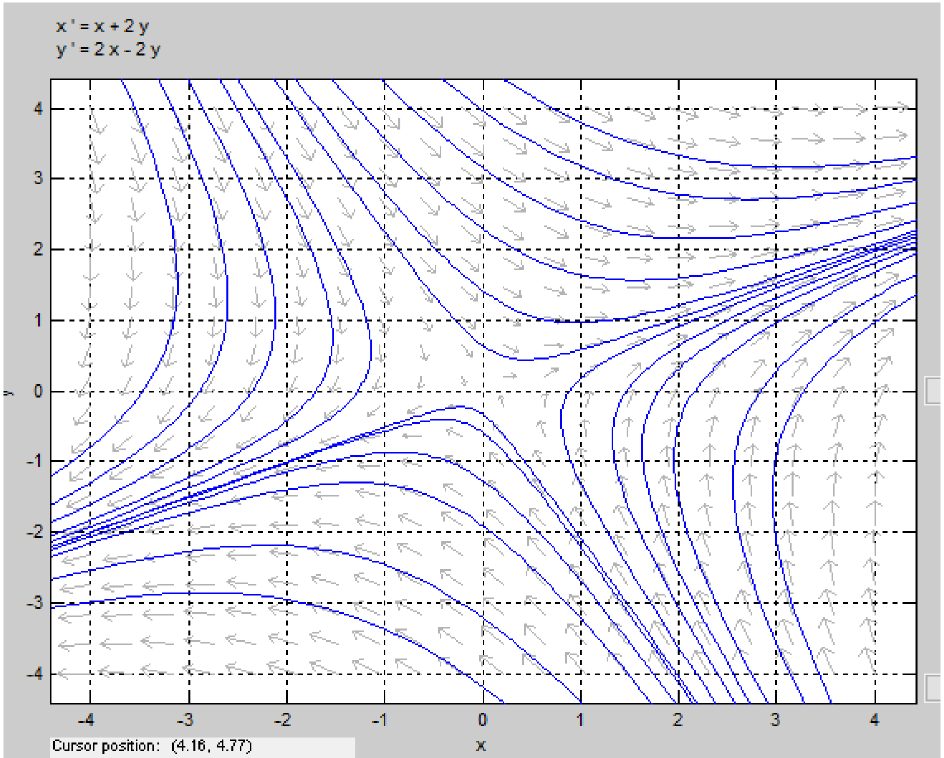
$$v_2=\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2v_2 \\ v_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}r$$

- **PUPD :**

$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}=c_1e^{3t}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}+c_2e^{-2t}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

- **Phase Potrait**

Karena λ ada yag bernilai positif maka sitem tidak stabil. Sehingga gambar phase potraitnya :


x ' = x + 2 y
y ' = 2 x - 2 y
Cursor position: (4.16, 4.77)
x
y