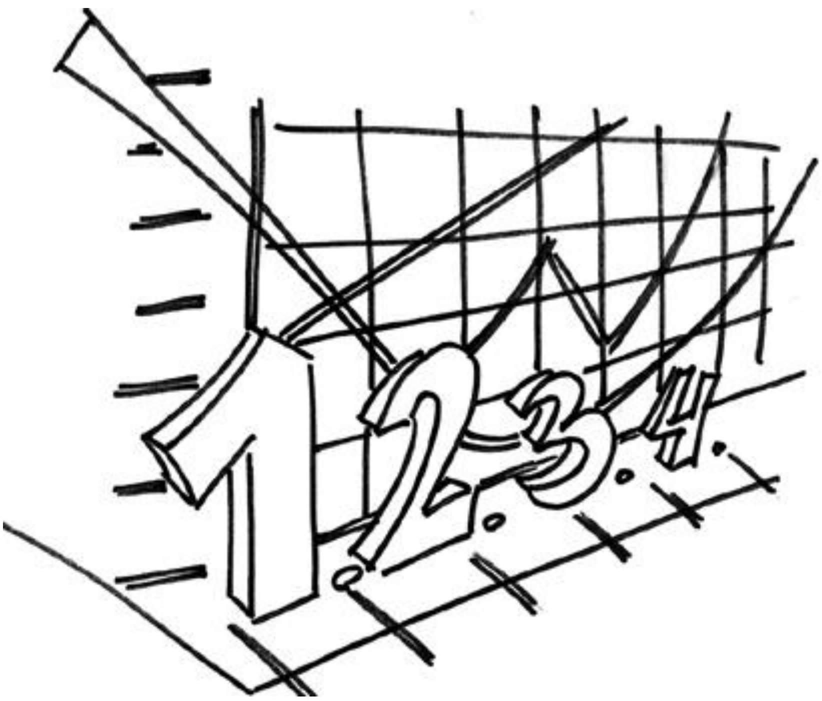
Pengujian Hipotesis

EDISI KETIGA

Pusat Pendidikan dan Pelatihan
Badan Pusat Statistik



MODUL
PENGUJIAN HIPOTESIS

Penyusun

Novi Hidayat Pusponegoro, S.Si, M.Stat

Editor

Dr. Erni Tri Astuti, M.Math.

Edisi Ketiga

Desember, 2013

Badan Pusat Statistik

Jakarta

KATA PENGANTAR

Sejalan dengan upaya mewujudkan Pegawai Negeri Sipil yang profesional melalui jalur pendidikan dan pelatihan (Diklat), pembinaan diklat khususnya Diklat Fungsional Statistisi Tingkat Ahli berbasis kompetensi terus dilakukan sesuai dengan ketentuan-ketentuan yang diatur dalam Peraturan Pemerintah Nomor 101 Tahun 2000 Tentang Pendidikan dan Pelatihan Jabatan Pegawai Negeri Sipil; Keputusan Menteri Pendayagunaan Aparatur Negara Nomor 37/KEP/M.PAN/4/2003 Tentang Jabatan Fungsional Statistisi Dan Angka Kreditnya; serta Keputusan Bersama Kepala Badan Pusat Statistik dan Kepala Badan Kepegawaian Negara Nomor 003/KS/2003 Nomor 25 Tahun 2003 Tentang Petunjuk Pelaksanaan Jabatan Fungsional Statistisi Dan Angka Kreditnya. Salah satu upaya pembinaan yang ditempuh adalah melalui penerbitan modul Diklat**.**

Kehadiran modul Pengujian Hipotesis untuk Diklat Fungsional Statistisi Tingkat Ahli ini memiliki nilai strategis karena menjadi acuan dalam proses pembelajaran, sehingga kebijakan standarisasi penyelenggaraan Diklat dapat terlaksana dengan baik. Modul ini dapat membantu widyaiswara atau fasilitator Diklat dalam mendisain pengajaran yang akan disampaikan pada peserta Diklat; membantu pengelola dan penyelenggara Diklat dalam Penyelenggaraan Diklat; dan membantu peserta Diklat dalam mengikuti proses pembelajaran.

Seiring dengan perkembangan lingkungan strategis yang berlangsung dengan cepat khususnya terhadap dinamika kompetensi pegawai dalam tugasnya melaksanakan tugas-tugas perstatistikan, maka kualitas modul utamanya kesesuaian isi dengan persyaratan kompetensi pegawai yang mengalami perkembangan perlu terus dipantau dan dilakukan penyempurnaan jika ditemukan hal-hal yang tidak relevan lagi atau dianggap perlu untuk menambahkan isi dari modul.

Untuk maksud tersebut diatas serta sebagai tindak lanjut dari Peraturan Kepala Lembaga Administrasi Negara RI Nomor 5 Tahun 2009 Tentang Pedoman Penulisan Modul Pendidikan dan Pelatihan, maka dilakukan penyempurnaan terhadap keseluruhan modul Pengujian Hipotesis untuk Diklat Fungsional Statistisi Tingkat Ahli yang meliputi substansi dan format.

Selamat menggunakan modul ini, semoga melalui modul ini, kompetensi statistik bagi peserta Diklat Fungsional Statistisi Tingkat Ahli dapat tercapai.

Jakarta, Desember 2013

KEPALA PUSAT PENDIDIKAN DAN PELATIHAN

BADAN PUSAT STATISTIK

Dr. HERU MARGONO, M.Sc
NIP. 19610214 198312 1 001

DAFTAR ISI

Bab I Pendahuluan

1.1 Latar Belakang

Modul Pengujian Hipotesis merupakan salah satu media pembelajaran yang disediakan khusus untuk Diklat Fungsional Statistisi Tingkat Ahli. Modul ini telah disesuaikan dengan butir-butir penilaian dari tugas/pekerjaan seorang pejabat fungsional statistisi ahli khususnya yang berkaitan dengan pengujian hipotesis. Kompetensi yang ingin dicapai setelah mempelajari modul ini adalah peserta dapat memahami tentang cara-cara penaksiran dan pengujian nilai parameter untuk satu populasi maupun lebih dari satu populasi yang terbaik sesuai dengan kaidah ilmu statistik, sehingga dapat menunjang tugasnya sebagai pejabat fungsional statistisi tingkat ahli.

Modul ini mengantarkan para peserta untuk memahami cara penaksiran dan pengujian nilai parameter dari satu populasi maupun lebih dari satu populasi. Disamping itu, modul ini juga sebagai *guidance* bagi fasilitator dalam mendesain pempelajaran mata diklat pengujian hipotesis.

1.2 Deskripsi Singkat

Mata diklat pengujian hipotesis merupakan mata diklat yang mempelajari metode inferensia parametrik. Metode tersebut meliputi pendugaan parameter dan pengujian hipotesis nilai parameter distribusi normal dan binomial.

1.3 Hasil Belajar (Tujuan Pembelajaran)

Setelah mempelajari materi ini, peserta dapat memahami konsep pendugaan parameter dan pengujian hipotesis serta mampu mengaplikasikannya untuk menarik kesimpulan tentang karakteristik populasi dalam kasus-kasus real.

1.4 Indikator Hasil pembelajaran (Tujuan Pembelajaran Khusus)

Setelah mempelajari materi ini secara khusus, peserta dapat:

1. Melakukan pendugaan titik dan interval terhadap parameter populasi.
2 Menguji hipotesis rata-rata populasi, untuk data besar dan kecil.
3. Menguji hipotesis proporsi populasi.
4. Menguji hipotesis varian populasi.

1.5 Materi Pokok

1. Klasifikasi Statistika
2. Distribusi Statistik dan Distribusi Sampling
3. Pendugaan Titik dan Pendugaan Interval (rata-rata, proporsi, dan ragam)

4. Uji-uji Hipotesis (Rata-rata, Proporsi, Ragam, uji Bartlett, ANOVA, Uji Berganda).

1.6 Manfaat

Manfaat pemberian mata diklat pengujian hipotesis adalah memberikan tambahan pengetahuan khususnya untuk metode untuk penarikan kesimpulan tentang karakteristik populasi dalam kasus-kasus real berdasarkan karateristik sampel.

Bab II Distribusi Sampling

2.1 Klasifikasi Statistika

Statistika berasal dari kata *statistics,* yang berarti adalah ilmu yang mempelajari cara pengumpulan data, pengolahan data, penyajian serta analisis data sehingga menjadi suatu informasi yang berguna bagi pengambilan keputusan. Sedangkan metode, tekhnik, atau cara untuk mengumpulkan, mengolah, menyajikan, menganalisa dan menginterpretasikan atau menarik kesimpulan mengenai yang diperlukan disebut dengan metode statistika.

Secara umum ada beberapa tahapan kegiatan dalam statistka, yaitu:

1. Pengumpulan data

Kegiatan pengumpulan data bertujuan mendapatkan data yang baik, sehingga dalam kegiatan ini harus diketahui terlebih dahulu mengenai jenis objek yang akan diteliti. Berdasarkan objek yang diamati tersebut cara pengumpulan data secara umum dibagi menjadi 2, yaitu sensus dan survey.

a. Sensus adalah cara mengumpulkan data dari seluruh obyek pengamatan yang sesuai (populasi). Rangkuman data yang diperoleh dari sensus merupakan karakteristik dari populasi atau yang biasa disebut dengan parameter.

b. Survei adalah cara mengumpulkan data dari sebagian obyek pengamatan/sebagian dari populasi (sampel). Rangkuman data yang diperoleh dari survei merupakan karakteristik dari sampel atau yang biasa disebut dengan statistik. Dalam survei yang perlu diperhatikan adalah cara yang tepat untuk memilih sampel sehingga dapat dianggap mewakili karakteristik dari populasi. Dengan demikian statistik yang dihasilkan mampu mendapatkan taksiran yang mendekati nilai parameter atau statistik yang tidak bias terhadap parameternya. Dalam metode statistika inferensia, sampel yang dapat mewakili populasi merupakan sampel yang dihasilkan dari metode penarikan secara random (acak).

Sedangkan alat yang digunakan untuk mengumpulkan data dari objek yang diteliti antara lain berupa kuesioner (baik yang pengisiannya dengan wawancara langsung atau dengan *self enumeration*) atau observasi/pengamatan langsung.

2. Pengolahan dan penyajian data

Apabila data sudah dikumpulkan, agar lebih berguna maka data mentah tersebut perlu diolah atau diringkas. Metode pengolahan data dapat dilakukan secara manual ataupun elektronik, tergantung pada seberapa besar ukuran data. Setelah diolah dan diringkas maka data perlu disajikan dalam bentuk yang mudah dimengerti atau dibaca oleh para pengguna data.

3. Analisis Data

Kegiatan selanjutnya adalah menganalisa sajian data untuk dapat mengetahui karakteristik data yang dimiliki sehingga dapat mengambil keputusan yang diperlukan. Metode statistika membedakan metode analisis data dibedakan menjadi 2, yaitu:

a. Metode statistika deskriptif adalah metode atau cara menganalisa data yang ada, baik dari populasi atau sampel (tanpa menarik kesimpulan dari data tersebut)

b. Metode statistika inferensia adalah metode statistika yang digunakan untuk membuat taksiran, ramalan dan atau menarik kesimpulan mengenai karakteristik populasi dari data sampel. Dalam statistika inferensia, intinya ada 2 tekhnik yang digunakan untuk menarik kesimpulan mengenai populasi yaitu: penaksira parameter populasi dan pengujian hipotesis mengenai parameter.

Berdasarkan pengetahuan mengenai distribusi nilai populasi data dan jenis data, metode statistika inferensia, dibagi menjadi 2 yaitu:

a. Metode statistika parametrik; adalah tekhnik yang digunakan untuk menduga atau menguji hipotesis nilai parameter jika sebaran/distribusi data ketahui.

b. Metode statistika *non*-parametrik; adalah tekhnik yang digunakan untuk menduga atau menguji hipotesis nilai parameter jika sebaran/distribusi populasi data tidak ketahui atau jika data yang digunakan merupakan data dengan tingkat pengukuran nominal atau ordinal.

2.2 Distribusi Teoritis

Dalam distribusi teoritis sampling dikenal adanya peubah acak *(random variable)*. Ada dua jenis peubah acak yaitu peubah acak diskrit dan kontinyu. Distribusi normal merupakan salah satu distribusi teoritis dari peubah acak kontinyu. Jika digambarkan, fungsi distribusi ini akan berbentuk suatu lonceng (genta), dimana fungsi distribusinya adalah :

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

Distribusi normal bergantung pada dua parameter yaitu rata-rata (μ) dan varian (σ^2). Dari fungsi $f(x)$ di atas dapat disimpulkan bahwa x mengikuti distribusi normal dengan rata-rata μ dan varian σ^2 atau di tulis dengan:

$$X \sim N(\mu;\sigma^2)$$

Dalam distribusi kontinyu, cara menghitung probabilitanya adalah dengan jalan mencari luas daerah di bawah kurvanya, dimana caranya adalah dengan menghitung integral dari fungsi peubah acaknya ($f(x)$) dengan batas yang ada. Sayangnya distribusi normal mempunyai fungsi peubah acak yang tidak memiliki integral yang sederhana. Untuk memudahkan dalam penghitungan dilakukan suatu metode transformasi variabel, dengan cara membentuk variabel baru yaitu variabel Z dimana nilainya adalah :

$$Z = \frac{x-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$$

Dari transformasi ini didapat rata-rata nilai Z adalah *0* dan variannya 1. Maka *Z* dikatakan mengikuti distribusi normal standar. Dalam distribusi ini nilai rata-rata dan variannya sudah baku sehingga fungsi peluang dari variabel z adalah :

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-(1/2)z^2} ; -\infty < z < \infty$$

Nilai peluang dari *z* yang telah dihitung dan dibuatkan tabelnya, selanjutnya dikatakan tabel Z atau tabel normal standar.

2.3 Distribusi Sampling

Pengambilan sampel yang berulang kali terhadap amatan dalam populasinya akan menghasilkan nilai statistik yang beragam dengan distribusi tertentu. Pembahasan pada bab ini terbatas pada nilai statistik sampel yang diambil dari populasi yang berdistribusi Normal dan Binomial baik untuk satu populasi maupun dua populasi.

2.3.1 Distribusi rata-rata sampel

Untuk peubah acak yang diketahui berdistribusi normal maka dapat diketahui distribusi dari rata-rata adalah sbb:

1. Distribusi rata-rata sampel satu populasi

Bila terdapat sampel yang berukuran *n* yang diambil **dengan pengembalian** dari populasi data yang berukuran *N* yang memiliki rata-rata μ dan standard deviasi σ. Maka distribusi rata-rata sampelnya akan mengikuti distribusi normal dengan nilai tengah $\mu_{\bar{x}} = \mu$ dan standard deviasi $\sigma_{\bar{x}} = \sigma/\sqrt{n}$ sehingga transformasi nilai $\bar{x}$ pada nilai baku Z menjadi

$$z = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim \mathrm{N}(0,1).$$

Bila terdapat sejumlah sampel berukuran *n* yang diambil **tanpa pengembalian** dari populasi *N* terbatas, yang mempunyai rata-rata μ dan standard deviasi σ. Maka distribusi rata-rata sampelnya akan mengikuti distribusi normal dengan nilai tengah $\mu_{\bar{x}} = \mu$ dan standard deviasi

$$\sigma_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{\sigma^2 (N - n)}{n(N-1)}}$$

Sehingga transformasi nilai $\bar{x}$ pada nilai baku/standart Z menjadi

$$z = \frac{\bar{x} - \mu}{\sqrt{\sigma^2 (N-n)/n(N-1)}} \sim N(0,1)$$

Distribusi rata-rata sampel ($\bar{x}$) yang diambil dari sebuah populasi data,dan varians populasi (σ^2) **tidak diketahui**, maka distribusi nilai $\bar{x}$ akan mengikuti disribusi *t-student* dengan tranformasi nilainya adalah sebagai berikut:

1. Distribusi sampling rata-rata ($\bar{x}$) untuk satu populasi jika sampel diambil dengan pengembalian (WR)

$$t = \frac{\bar{x} - \mu}{s/\sqrt{n}} \sim t_{(n-1)}$$

2. Distribusi sampling rata-rata ($\bar{x}$) untuk satu populasi jika sampel diambil tanpa pengembalian (WOR)

$$t = \frac{\bar{x} - \mu}{\sqrt{s^2 (N-n)/n(N-1)}} \sim t_{(n-1)}$$

Namun apabila sampel yang diambil dalam ukuran yang besar (n>30), maka distribusi *t-student* mendekati distribusi nilai peluang *normal standart*

2. Distribusi rata-rata sampel dua populasi saling bebas

Jika diketahui dua populasi data, masing-masing $X_1 \sim N(\mu_1,\sigma_1)$ dan $X_2 \sim N(\mu_2,\sigma_2)$, yang saling bebas, dan diambil sampel berukuran n_1 dan n_2, maka distribusi dari $\bar{x}_1 - \bar{x}_2$ akan mengikuti distribusi normal dengan $\mu_{\bar{x}_1-\bar{x}_2} = \mu_{\bar{x}1} - \mu_{\bar{x}2}$ dan $\sigma^2_{\bar{x}1-\bar{x}2} = \sigma^2_{\bar{x}1} + \sigma^2_{\bar{x}2} = \frac{\sigma_1^{\ 2}}{n_1} + \frac{\sigma_2^{\ 2}}{n_2}$ dengan transformasi $\bar{x}_1 - \bar{x}_2$ pada nilai standart menjadi:

$$Z = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^{\ 2}}{n_1} + \frac{\sigma_2^{\ 2}}{n_2}}} \sim N(0,1)$$

.

Namun apabila varians populasi tidak diketahui dan sampel berukuran besar, maka ragam $\bar{x}_1 - \bar{x}_2$ ditaksir dengan $\frac{s_1^{\ 2}}{n_1} + \frac{s_2^{\ 2}}{n_2}$ sehingga transformasi pada nilai standart menjadi

$$Z = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{s_1^{\ 2}}{n_1} + \frac{s_2^{\ 2}}{n_2}}} \sim \mathrm{N}(0,1).$$

Sedangkan bila varians populasi tidak diketahui dan sampel berukuran kecil, maka distribusi nilai $\bar{x}_1 - \bar{x}_2$ mengikuti distribusi *t-student* dengan nilai varians masing-masing populasi yang diasumsikan.

Ragam $\bar{x}_1 - \bar{x}_2$ untuk varians 2 populasi yang diasumsikan sama adalah

$$S_p^{\ 2} = \frac{(n_1 - 1)s_1^{\ 2} + (n_2 - 1)s_2^{\ 2}}{n_1 + n_2 - 2},$$

sehingga nilai

$$t = \frac{\left(\bar{x}_1 - \bar{x}_2\right) - \left(\mu_1 - \mu_2\right)}{S_p^{\,2}\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \sim t_{(v=n_1\text{-}1,n_2\text{-}1)}$$

.

Ragam $\bar{x}_1 - \bar{x}_2$ untuk varians 2 populasi yang diasumsikan berbeda adalah $\frac{s_1^{\,2}}{n_1} + \frac{s_2^{\,2}}{n_2}$, dengan nilai

$$t = \frac{\left(\bar{x}_1 - \bar{x}_2\right) - \left(\mu_1 - \mu_2\right)}{\sqrt{\frac{s_1^{\,2}}{n_1} + \frac{s_2^{\,2}}{n_2}}} \sim t_{(v)}$$

,

dengan:

$$v = \frac{\left(\frac{s_1^{\,2}}{n_1} + \frac{s_2^{\,2}}{n_2}\right)^2}{\frac{\left(\frac{s_1^{\,2}}{n_1}\right)^2}{n_1 - 1} + \frac{\left(\frac{s_2^{\,2}}{n2}\right)^2}{n_2 - 1}}$$

.

3. Distribusi rata-rata sampel data berpasangan

Diketahui dua populasi data, jika masing-masing $X_1 \sim N(\mu_1,\sigma_1)$ dan $X_2 \sim N(\mu_2,\sigma_2)$, yang tidak saling bebas (berpasangan) dan diambil sampel berukuran n_1 dan n_2. Untuk pendugaan dan pengujian hipotesis $\mu_1 - \mu_2$, didasarkan pada selisih nilai amatan setiap populasi. Ilustrasi nilai amatan dan selisih dari dua populasi *dependent* adalah sebagai berikut;

Sampel acak 1 (x_{1i})	Sampel acak 2 (x_{2i})	d(selisih)
X_{11}	X_{21}	$d_1=X_{11}- X_{21}$
X_{12}	X_{12}	$d_2=X_{12}- X_{22}$
X_{13}	X_{23}	$d_3=X_{13}- X_{23}$
…	….	…
X_{1n}	X_{2n}	d_n

Maka distribusi nilai selisih tersebut akan mengikuti distribusi *t-student*

$$t = \frac{\bar{d} - \mu_d}{s_d / \sqrt{n}} \sim \mathrm{t}_{(v=n-1)}$$

dengan

$$\bar{d} = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_{1i} - x_{2i})}{n}$$

$$s_d^{\,2} = \frac{n\left(\sum_i d_i^{\,2}\right) - \left(\sum_i d_i\right)^2}{n(n-1)}$$

dan n adalah banyaknya pasangan data amatan.

2.3.2 Distribusi Ragam Sampel

1. Distribusi ragan sampel satu populasi

Jika dari populasi data yang diketahui berdistribusi normal, diambil contoh sebanyak n maka distribusi dari s^2 akan mengikuti distribusi *Chi-Square* (Khi-Kuadrat) dengan padanan

$$\chi^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{(v=n-1)}$$

2. Distribusi ragan sampel dua populasi

Jika diketahui dua populasi data, masing-masing $X_1 \sim N(\mu_1,\sigma_1)$ dan $X_2 \sim N(\mu_2,\sigma_2)$ yang saling bebas, dan diambil sampel berukuran n_1 dan n_2, maka distribusi dari rasio $s_1^{\,2}$ dengan $s_2^{\,2}$ akan mengikuti distribusi *Fisher* dengan padanan: $F = \frac{s_1^{\,2}\sigma_2^{\,2}}{s_2^{\,2}\sigma_1^{\,2}} \sim f_{(v1,v2)} \sim$ dengan $v_1 = n_1 - 1$ dan $v_2 = n_2 - 1$.
Nilai peubah acak F,

$$f_{1-\alpha;(v_1,v_2)} = \frac{1}{f_{\alpha;(v_2,v_1)}}$$

2.3.3 Distribusi Proporsi Sampel

Untuk beberapa pernyataaan berikut:

- Sebuah survey menunjukkan bahwa 35% anak-anak jalanan tidak mendapatkan pendidikan dasar.

- Kementrian Kelautan dan Perikanan menyatakan bahwa 65% nelayan masih menggunakan cara-cara tradisional untuk menangkap ikan.

Mengggambarkan bahwa data yang dianalisa adalah data dengan tingkat pengukuran nominal. Misalnya untuk pernyataan pertama, data yang diamati adalah status pemenuhan pendidikan dasar anak jalanan yang dibedakan menjadi mendapatkan atau tidak mendapatkan. Untuk analisa data dengan hanya 2 kemungkinan nilai, maka digunakan analisa dari nilai proporsi. Proporsi merupakan rasio yang menyatakan bagian dari sampel atau populasi yang termasuk dalam kategori tertentu. Proporsi dari populasi disimbolkan dengan notasi “P” yaitu $P = \frac{X}{N}$, dengan

X = banyaknya pengamatan dengan kategori tertentu dalam populasi

N = ukuran populasi.

Sedangkan proporsi sampel dilambangkan dengan “p” yaitu $p = \frac{x}{n}$, dimana

x = banyaknya pengamatan dengan kategori tertentu dalam sampel

n = ukuran sampel.

dengan distribusi dari X~Binomial(P). Jika n merupakan ukuran sampel besar maka X mendekati distribusi normal dengan $\mu = np$ dan dan standard deviasi $\sigma = npq$ atau $p \sim normal\ (p,pq/n)$ dengan transformasi pada nilai standart menjadi bentuk normal baku z menjadi;

$$z = \frac{p - P}{\sqrt{PQ/n}} \sim N(0,1).$$

Namun dalam bentuk tersebut masih terdapat P yang nilainya tidak diketahui, untuk itu karena *n* merupakan ukuran sampel yang relatif besar maka nilai P bisa didekati dengan nilai *p* (dengan galat yang tidak berarti).

Jika diketahui dari 2 populasi data yang masing-masing berdistribusi binomial, diambil sampel yang berukuran besar masing-masing n1 dan n2. Maka distribusi dari selisih proporsi dua populasiya adalah:

$$p_1 - p_2 \sim N\left(\mu_{p_1-p_2} = p_1 - p_2, \sigma^2{}_{p_1-p_2} = \frac{p_1q_1}{n_1} + \frac{p_2q_2}{n_2}\right).$$

Dengan tranformasi terhadap nilai Z adalah:

$$Z = \frac{(p_1 - p_2) - (P_1 - P_2)}{\sqrt{\frac{p_1q_1}{n_1} + \frac{p_2q_2}{n_2}}} \sim N(0,1)$$

2.4 Rangkuman

Metode statistika inferensia adalah metode statistika yang digunakan untuk membuat taksiran, ramalan dan atau menarik kesimpulan mengenai karakteristik populasi dari data sampel.

Dalam metode statistika inferensia, sampel yang diperlukan dan mewakili populasi merupakan sampel yang dihasilkan dari metode penarikan contoh acak.

Pembahasan pada bab ini terbatas pada nilai statistik sampel yang diambil dari populasi yang berdistribusi Normal dan Binomial baik untuk satu populasi maupun dua populasi.

2.5 Soal-soal

1. Pabrik A memproduksi makanan kaleng, rata–rata 250 gr dalam simpangan baku 2 gr. Dengan anggapan bahwa berat makanan normal, hitung peluang berat makanan kaleng tersebut kurang dari 240 gr.

2. Suatu sampel random dengan 75 elemen akan diambil dari suatu populasi yang mempunyai mean = 112 dan deviasi standar = 25. Hitung probabilitas bahwa mean sampel itu terletak antara 108,5 dan 113,5.

3. Dari 14.000 mahasiswa Fakultas Teknik “Universitas Kita”: ternyata ada 8 % mahasiswa yang sedang menyusun skripsi. Jika Fakultas Teknik “Universitas Kita” mengambil *sample* sebanyak 50 mahasiswa, berapa probabilita terdapat 5 mahasiswa yang sedang menyusun skripsi.

4. Dua kelompok anak usia 4 tahun, diteliti untuk mengetahui kemampuan mereka dalam mengingat kata-kata yang pernah didengar. Dari kelompok 1 (kelompok anak yang tidak diberi instruksi apapun) diambil sampel 10 anak, dan diketahui rata-rata kata yang diingat adalah 3,5 dengan standart deviasi 0,8. Kelompok kedua, diberi instruksi untuk mengingat kata-kata yang didengar dan diambil sampel acak 12 dengan rata-rata 2,4 dengan standart deviasi 0,9. Berapa peluang beda rata-rata kata yang diingat oleh kelompok 1 dan 2 lebih besar dari 1,6.

5. Dari sebuah sampel acak berukuran 25, yang berasal dari populasi data normal dengan ragam 6. Tentukan peluang keragaman sampelnya berada diantara 3,42 dan 10,745.

Bab III Pendugaan Parameter

Untuk menarik kesimpulan tentang populasi dari hasil sampel maka dilakukan pendugaan terhadap parameter populasi atau mungkin juga berhubungan dengan persoalan menerima atau menolak hipotesis yang memberi spesifikasi tentang nilai dari satu atau beberapa parameter distribusi. Kuantitas sampel yang digunakan untuk menduga parameter populasi disebut sebagai penduga (*estimator*). Penduga parameter terdiri dari 2 yaitu penduga titik (*point estimation*) dan penduga interval (*interval estimation*).

3.1 Ciri-ciri Penduga yang Baik

Misalkan θ adalah parameter populasi dan θ adalah penduga parameter, maka seyogyanya peubah acak θ bervariasi tidak terlalu jauh sekitar θ yang konstan. Statistik penduga sedemikian itu umumnya dinilai sebagai "penduga yang baik". Ciri-ciri peduga yang baik, antara lain:

1. Tidak bias (*Unbiased*)

   Penduga $\hat{\theta}$ dikatakan penduga tak bias dari θ jika $E(\hat{\theta}) = \theta$

2. Efisien

   Sebuah penduga $\hat{\theta}$ tak bias, sebaiknya memiliki varian yang terkecil diantara pednduaga tak bias lainnya. Hal itu dapat terlihat dengan menggunakan diagram atau membandingkan variannya.

Efisien relatif θ_1 jika dibandingkan dengan θ_2 adalah $\dfrac{Var(\hat{\theta}_1)}{Var(\hat{\theta}_2)}$

Jika ada beberapa nilai θ_i, i=1,2,3,…n, dimana $v(\hat{\theta}_1) < v(\hat{\theta}_2) < v(\hat{\theta}_3)$ maka $\hat{\theta}_1$ merupakan penduga dengan varian minimum atau palig efisien

3. Konsisten

   Penduga parameter yang konsisten merupakan penduga yang berkonsentrasi secara sempurna pada parameter jika sampel bertambah secara tidak terhingga. Secara matematis ditulis

$$\lim_{n\to\infty} E\ \theta - \theta\ ^2 = 0$$

4. Cukup (Sufficience)

Jika ada X_1, X_2, X_3, ….X_n, sehingga fungsi densitas bersyarat dari (X_1, X_2, X_3, ….X_n) diberi simbol T, tidak bergantung pada θ. θ merupakan penduga yang cukup (*sufficient estimator*) bagi θ apabila θ mencakup seluruh informasi tentang θ yang terkandung di dalam sampel.

Terdapat dua jenis pendugaan nilai parameter yaitu pendugaan titik (*point estimation*) dan pendugaan interval (*interval estimation*), yaitu

1. Pendugaan titik adalah pendugaan parameter dengan sebuah nilai tunggal dari suatu sampel acak. Merupakan cara yang paling mudah digunakan, namun peluang nilai dugaan bernilai 0 atau 1 (peluang dugaan untuk level tertentu tidak diketahui).

2. Pendugaan interval adalah pendugaan parameter dengan menggunakan interval (selang) nilai yang diperoleh dari sampel

Notasi penduga selang parameter adalah speperti di bawah ini:

$$P(\hat{\theta}_1 \leq \theta \leq \hat{\theta}_2) = 1 - \alpha \;,$$

Dengan:

θ adalah parameter dari populasi

θ_1 dan $\theta_2$adalah penduga parameter populasi, dengan θ_1, merupakan batas bawah dugaan nilai θ dan θ_2, merupakan batas atas dugaan nilai θ.

1 - α adalah Tingkat Kepercayaan (*Level of significant*), merupakan persentase dugaan interval yang memenuhi parameter yang diduga, bila dilakukan pengambilan sampel berulang dari populasi yang sama.

Sehingga notasi penduga selang parameter diatas dibaca sebagai peluang nilai θ yang diduga dari suatu sampel acak berada diantara nilai $\theta_1$dan $\theta_2$adalah 1 - α.

3.2 Penduga Titik

Dalam bagian ini akan dibahas pendugaan titik untuk distribusi yang sering dipakai yaitu distribusi normal dan binomial.

3.2.1 Penduga Parameter Distribusi Normal

Misalkan X_1, X_2, …, X_n adalah sampel acak dari suatu populasi berdistribusi normal dengan rata-rata dan varian tidak diketahui. Maka rata-rata sampelnya adalah $\overline{X}$ dan standar deviasinya adalah s

1. Penduga Rata-Rata (μ_X)

   Karena $E(\overline{X}) = \mu_X = \mu_{\overline{X}}$, maka penduga rata-ratanya adalah

   $\hat{\mu}_X = \overline{X}$ dan $\hat{\mu}_{\overline{X}} = \overline{X}$

2. Penduga Varian (σ_X^2)

   Karena $E(s^2) = \sigma^2{}_X$ dan $\sigma^2{}_{\overline{X}} = \dfrac{\sigma^2{}_X}{n}$, maka penduga variannya adalah:

   $\hat{\sigma}^2{}_X = s^2$ dan $\hat{\sigma}^2{}_{\overline{X}} = \dfrac{s^2}{n}$

Contoh 3.1:

Permintaan akan minyak (liter/bulan) di Kabupaten X diasumsikan berdistribusi normal. Untuk menduga rata-rata dan variannya diambil sampel sebanyak sepuluh rumahtangga dengan data sebagai berikut:

Rumah tangga	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Permintaan Minyak	3	4	5	6	6	7	8	9	10	10

Dari data di atas didapatkan rata-rata sampel = 6,8, standar deviasinya = 2,44, maka penduga rata-rata populasinya = 6,8 dan penduga varian populasinya = 5,96.

3.2.2 Penduga Paramater Distribusi Binomial

Telah diketahui dari modul Teori Probabilita bahwa apabila X berdistribusi Binomial dengan parameter sukses adalah p, maka rata-rata dan varian populasinya adalah:

$$\mu_X = np \text{ dan } \sigma_x^2 = np(1-p)$$

Pada umumnya, proporsi p di atas dapat diduga secara tidak bias dengan proporsi sampel $\hat{p} = X/n$ dimana X menyatakan jumlah sukses yang diobservasi dan n menyatakan banyaknya sampel. Distribusi proporsi sampel sedemikian itu memiliki rata-rata $E(\hat{p}) = \mu_{\hat{p}} = p$ dan varian $\sigma^2_{\hat{p}} = \dfrac{p(1-p)}{n}$

sehingga penduga proporsi populasi adalah

$$\hat{p} = X/n$$

penduga varian populasi adalah

$$\sigma^2_{\hat{p}} = \frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n} = \frac{\frac{X}{n}(1-\frac{X}{n})}{n}$$

Contoh 3.2:

Jika sebuah sampel yang terdiri dari 900 unit barang-barang dipilih dari populasi yang terdiri dari semua barang-barang yang diproduksi oleh perusahaan Z, dan dianggap mengikuti distribusi binomial. Dari sampel tersebut 576 unit produksi rusak, berapa penduga proporsi kerusakan ?

$$\hat{p} = \frac{576}{900} = 0{,}64$$

3.3 Penduga Selang

Kelemahan nilai penduga titik adalah sukar sekali identik dengan parameter populasi dan tidak dapat mengukur derajat kepercayaan terhadap kepastian dugaan yang dilakukan. Oleh karena itu, pengukuran yang obyektif terhadap kepercayaan kepastian dugaan adalah dengan menggunakan pendugaan interval (*interval estimation*).

3.3.1 Penduga Selang Untuk μ

Berdasarkan uraian distribusi sampling rata-rata diatas dan rumus penduga selang parameter, maka kita dapat mendefinisikan penduga selang untuk rata-rata populasi μ

1. Penduga Selang (*Confidence Interval)* untuk μ dari satu populasi

Berdasarkan distribusi sampling nilai $\bar{x}$ yang mengikuti distribusi normal, maka penghitungan peluang nilai-nilai $\bar{x}$ didasarkan pada kurva ataupun tabel normal standart. Dan diketahui peluang semua nilai Z yang kurang dari nilai $z_\alpha = \alpha$ maka peluang nilai Z yang berada diantara $-z_{\alpha/2}$ dan $z_{\alpha/2}$ adalah $1-\alpha$

$$P\left(-z_{\alpha/2} \le Z \le z_{\alpha/2}\right) = 1-\alpha$$

$$P\left(-z_{\alpha/2} \le \frac{\bar{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \le z_{\alpha/2}\right) = 1-\alpha$$

$$P\left(\bar{x} - z_{\alpha/2}\,\sigma/\sqrt{n} \le \mu \le \bar{x} + z_{\alpha/2}\,\sigma/\sqrt{n}\right) = 1-\alpha$$

Penduga selang tersebut merupakan penduga selang untuk μ dengan varians populasi diketahui dan pengambilan sampel dengan pengembalian.

Dan peluang nilai $\bar{x}$ yang mempunyai selisih dengan μ sebesar $z_{\alpha/2}\,\sigma/\sqrt{n}$ atau kurang adalah 1-α

Dari penduga selang diatas juga bisa diketahui error maksimum $\bar{x}$ nilai dari suatu sampel acak untuk menduga μ sebesar

$$e = z_{\alpha/2}\,\sigma/\sqrt{n}$$

sehingga ukuran sampel yang digunakan untuk menduga nilai μ adalah

$$n = \frac{\left(z_{\alpha/2}\sigma\right)^2}{e^2}.$$

Karena simpangan baku populasi (σ) sering tidak diketahui, maka besaran tersebut dapat diprediksi dengan tiga pendekatan berikut :

1. Dari penelitian terdahulu.
2. Diambil beberapa sampel untuk menduga simpangan baku populasi
3. Bila mungkin untuk mengetahui nilai pengamatan terkecil dan terbesar, sehingga simpangan baku populasi dapat didekati dengan : $\sigma = \frac{Range}{4}$

Contoh 3.3:

Dari data pada contoh 3.1, diketahui bahwa varian populasinya adalah 6 liter/bulan. Pada tingkat keyakinan 95 persen, tentukan penduga selang untuk menduga rata-rata populasi permintaan minyak?

Diketahui: n = 10, $\bar{X}$ = 6,8

σ^2 = 6 maka σ = $\sqrt{6}$ = 2,45

α = 0,05 , 1-α = 0,95, $Z_{0,025}$ = 1,96

$$P(6.8 - 1.96 \times \frac{2,45}{\sqrt{10}} < \mu < 6.8 + 1.96 \times \frac{2,45}{\sqrt{10}}) = 0.95$$

$$P(5,28 < \mu < 8,32) = 0.95$$

Artinya dengan tingkat keyakinan 95 persen rata-rata populasi permintaan minyak di Kabupaten X antara 5,28 dan 8,32 liter/bulan

Selain bentuk penduga selang μ diatas, berikut disajikan penduga selang untuk μ yang disesuaikan dengan distribusi x:

a. Penduga selang untuk μ dengan varians populasi diketahui dan pengambilan sampel tanpa pengembalian

$$P\left(\bar{x} - z_{\alpha/2} \, \sigma/\sqrt{n} \left(\sqrt{\frac{(N-n)}{(N-1)}} \right) \leq \mu \leq \bar{x} + z_{\alpha/2} \, \sigma/\sqrt{n} \left(\sqrt{\frac{(N-n)}{(N-1)}} \right) \right) = 1 - \alpha$$

Contoh 3.4

Andaikan sampel acak sebesar n = 64 dan $\bar{X}$ = 0.1165 dipilih dari populasi yang terbatas sebesar N = 300 dan σ = 0.0120 maka pendugaan parameter μ dengan tingkat keyakinan 90 persen adalah:
$Z_{0,05}$=1,645

$$P\left(0.11650 - 1.645 \times \frac{0.0120}{\sqrt{64}} \times \sqrt{\frac{300-64}{300-1}} < \mu < 0.11650 + 1.645 \times \frac{0.0120}{\sqrt{64}} \times \sqrt{\frac{300-64}{300-1}} \right) = 0.90$$

$$P(0.11382 < \mu < 0.11918) = 0.90$$

b. Penduga selang untuk μ jika varian populasi tidak diketahui dan sampel kecil dengan pengembalian;

$$P\left(\bar{x} - t_{\alpha/2(v=n-1)} \, s/\sqrt{n} \leq \mu \leq \bar{x} + t_{\alpha/2(v=n-1)} \, s/\sqrt{n} \right) = 1 - \alpha$$

Contoh 3.5

Tujuh kantong besar diambil secara acak dari suatu penyalur beras dimana masing-masing beratnya (kg) : 9,8 10,2 10,4 9,8 10,0 10,2 9,6. Berapakah 95% selang kepercayaan untuk rata-rata berat kantong beras di penyalur tersebut, jika dianggap kantong-kantong beras tersebut distribusinya mendekati normal.

Banyaknya sampel = 7, Rata-rata = 10 kg, Simpangan Baku = 0.283. Nilai tabel $t_{0.025\,;\,(7-1)}$ (tabel student-t untuk α = 0.025 dan $n-1=6$) adalah 2.447 μ adalah

$$P\left(10 - 2{,}447 \times \frac{0{,}283}{\sqrt{7}} < \mu < 10 + 2{,}447 \times \frac{0{,}283}{\sqrt{7}}\right) = 0{,}95$$

$$P(9{,}74 < \mu < 10{,}26) = 0{,}95$$

Artinya dengan tingkat keyakinan 95 persen, rata-rata populasi berat kantong adalah antara 9.74 dan 10.26 kg.

c. Penduga selang untuk μ jika varian populasi tidak diketahui dan sampel kecil tanpa pengembalian;

$$P\left(\overline{X} - t_{(\alpha/2;n-1)} \frac{s}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{N-n}{N-1}} < \mu < \overline{X} + t_{(\alpha/2;n-1)} \frac{s}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{N-n}{N-1}}\right) = 1 - \alpha$$

Contoh 3.6:

Pihak akademik fakultas ekonomi suatu universitas ingin mengetahui bahwa rata-rata angka hasil ujian bahasa Inggris mahasiswa persiapan. Suatu sampel yang terdiri dari 14 nilai hasil ujian mahasiswa persiapan telah terpilih dari nilai hasil ujian sebanyak 90 mahasiswa. Rata-rata sampelnya 75.6 dan standar deviasi 2.65. Interval keyakinan sebesar 95 persen untuk rata-rata seluruh mahasiswa adalah:
$t_{0,025;13} = 2.160$

$$P\left(75{,}6 - 2{,}16 \times \frac{2{,}65}{\sqrt{14}} \times \sqrt{\frac{90-14}{30-1}} < \mu < 75{,}6 + 2{,}16 \times \frac{2{,}65}{\sqrt{14}} \times \sqrt{\frac{90-14}{30-1}}\right) = 0{,}95$$

$$P(74{,}2 < \mu < 77{,}0) = 0{,}95$$

Artinya dengan tingkat keyakinan 95 persen nilai rata-rata ujian mahasiswa berada pada interval 74,2 dan 77,0.

d. Penduga selang untuk μ jika varian populasi tidak diketahui dan sampel besar

$$P\left(\overline{X} - Z_{\alpha/2} \frac{s}{\sqrt{n}} < \mu < \overline{X} + Z_{\alpha/2} \frac{s}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha$$

Contoh 3.7:

Sebuah sampel acak yang terdiri dari 100 mahasiswa telah diambil dari sebuah universitas. Mereka diberi tes kecerdasan guna menentukan angka IQ-nya. Angka rata-rata IQ-nya 112 dengan standar deviasinya 11. Maka interval keyakinan 95 persen rata-rata IQ mahasiswa di universitas tersebut adalah:

$$P\left(112-1.96\times\frac{11}{\sqrt{100}}<\mu<112+1.96\times\frac{11}{\sqrt{100}}\right)=0.95$$

$$P(109.844<\mu<114.156)=0.95$$

2. Penduga Selang (*Confidence Interval)* untuk menduga selisih rata-rata dua populasi saling bebas

Berdasarkan distribusi sampling ($\bar{x}_1-\bar{x}_2$), maka dapat dirumuskan penduga selang untuk selisih rata-rata 2 populasi adalah sebagai berikut:

a. Penduga selang untuk $\mu_1-\mu_2$ jika varians populasi diketahui:

$$P\left((\bar{x}_1-\bar{x}_2)-z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^{\,2}}{n_1}+\frac{\sigma_2^{\,2}}{n_2}}\le\mu_1-\mu_2\le(\bar{x}_1-\bar{x}_2)+z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^{\,2}}{n_1}+\frac{\sigma_2^{\,2}}{n_2}}\right)=1-\alpha$$

b. Penduga selang untuk $\mu_1-\mu_2$ jika varians populasi tidak diketahui namun ukuran sampel yang digunakan besar:

$$P\left((\bar{x}_1-\bar{x}_2)-z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{s_1^{\,2}}{n_1}+\frac{s_2^{\,2}}{n_2}}\le\mu_1-\mu_2\le(\bar{x}_1-\bar{x}_2)+z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{s_1^{\,2}}{n_1}+\frac{s_2^{\,2}}{n_2}}\right)=1-\alpha$$

c. Penduga selang untuk $\mu_1-\mu_2$ jika varians populasi tidak diketahui ukuran sampel kecil dan varians populasi diasumsikan sama:

$$P\left((\bar{x}_1-\bar{x}_2)-t_{\alpha/2(v=n_1+n_2-2)}S_p\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}\le\mu_1-\mu_2\le(\bar{x}_1-\bar{x}_2)+t_{\alpha/2(v=n_1+n_2-2)}S_p\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}\right)=1-\alpha$$

d. Penduga selang untuk $\mu_1-\mu_2$ jika varians populasi tidak diketahui ukuran sampel kecil dan varians populasi diasumsikan tidak sama:

$$P\left((\bar{x}_1-\bar{x}_2)-t_{\alpha/2}\sqrt{\frac{s_1^{\,2}+s_2^{\,2}}{n_1+n_2}}\le\mu_1-\mu_2\le(\bar{x}_1-\bar{x}_2)+t_{\alpha/2}\sqrt{\frac{s_1^{\,2}+s_2^{\,2}}{n_1+n_2}}\right)=1-\alpha$$

Contoh 3.8

Sebuah sampel acak sebesar n_1=7 dipiih dari populasi normal dengan 6μ_1 sedangkan sampel acak sebesar n2=6 dipilih dari populasi normal dengan μ_2. Hasil observasinya diketahui sebagai berikut:

$$n_1 = 7;\ x_1 = 56{,}21;\ s_1^2 = 9{,}02$$

$$n_2 = 6;\ x_2 = 61{,}25;\ s_2^2 = 5{,}296$$

$$s_p = \sqrt{\frac{6(9{,}02) + 5(5{,}296)}{7 + 6 - 2}} = 2{,}7069$$

Maka interval keyakinannya adalah :

$t_{0,025;7+6-2} = 2{,}201$

$$P\left(5{,}04 - 2{,}201(2{,}7069) \times \sqrt{\frac{1}{7} + \frac{1}{6}} < \mu_1 - \mu_2 < 5{,}04 + 2{,}201(2{,}7069) \times \sqrt{\frac{1}{7} + \frac{1}{6}}\right) = 0{,}95$$

$$P(1{,}7386 < \mu_1 - \mu_2 < 8{,}354) = 0{,}95$$

Artinya dengan tingkat keyakinan 95 persen perbedaan rata-rata antara dua populasi berkisar antara 1,7386 sampai 8,354, hal ini bisa diartikan pula bahwa ada perbedaan rata-rata antara dua populasi.

Contoh 3.9:

Catatan selama 15 tahun terakhir menunjukkan bahwa curah hujan rata-rata di kota A selama bulan Mei adalah 4,93 sentimeter, dengan simpangan baku 1,14 sentimeter. Di kota B, catatan serupa selama 10 tahun terakhir menunjukkan bahwa curah hujan rata-rata di bulan Mei adalah 2,64 sentimeter dengan simpangan baku 0,66 sentimeter. Tentukan selang kepercayaan 95% bagi selisih curah hujan rata-rata yang sebenarnya selama bulan Mei di kedua daerah tersebut, bila diasumsikan bahwa pengamatan-pengamatan itu berasal dari dua populasi normal dengan ragam yang berbeda.

Diketahui : $x_A = 4{,}93$; $s_A = 1{,}14$; $n_A = 15$

$$x_B = 2{,}64\ ;\ s_B = 0{,}66\ ;\ n_2 = 10$$

$$v = \frac{\left(\frac{1{,}14^2}{15} + \frac{0{,}66^2}{10}\right)^2}{\frac{\left(\frac{1{,}14^2}{15}\right)^2}{14} + \frac{\left(\frac{0{,}66^2}{10}\right)^2}{9}} = 22{,}7 \approx 23$$

$t_{0,025;23} = 2{,}069$

Maka, selang intervalnya adalah :

$$P\left((4{,}93 - 2{,}64) - 2{,}069\sqrt{\frac{1{,}14}{14} + \frac{0{,}66}{9}} < \mu_A - \mu_B < (4{,}93 - 2{,}64) + 2{,}069\sqrt{\frac{1{,}14}{14} + \frac{0{,}66}{9}} \right) = 0{,}95$$

$$P(1{,}54 < \mu_A - \mu_B < 3{,}04) = 0{,}95$$

Jadi, dengan tingkat keyakinan 95% dapat disimpulkan bahwa selisih rata-rata curah hujan antara kota A dan kota B selama bulan Mei antara 1,54 sampai 3,04 sentimeter. Rata-rata curah hujan di kota A selama bulan Mei lebih tinggi daripada di kota B.

3. Penduga Selang (*Confidence Interval)* untuk untuk menduga selisih rata-rata data berpasangan

Penduga selang untuk $\mu_1 - \mu_2$ (μ_d) untuk dua populasi yang tidak saling bebas:

$$P\left(\bar{d} - t_{\alpha/2}\frac{s_d}{\sqrt{n}} < \mu_d < \bar{d} + t_{\alpha/2}\frac{s_d}{\sqrt{n}} \right) = 1 - \alpha$$,

Contoh 3.10:

1 Untuk menemukan susunan tombol dalam sebuah kontrol panel dalam kapal, 2 susunan yang berbeda diuji dengan simulasi kondisi darurat dan dihitung waktu reaksi yang dibutuhkan agar keadaan kapal kembali stabil. Waktu reaksi (detik) simulasi dengan 12 nahkoda yang dipilih secara acak adalah sbb;

Susunan 1	8	15	10	11	14	16
Susunan 2	16	11	14	19	13	17

Dengan α=0,01, tunjukkan susunan tombol mana yang memiliki rata-rata waktu reaksi yang lebih baik, jika diasumsikan ragam waktu reaksi kedua susunan tombol tersebut sama?

2. Suatu penelitian dilakukan untuk mengetahui apakah ada perbedaan ukuran yang signifikan antara dua alat pengukur tinggi gelombang, dengan tingkat signifikansi 0.01. Berikut adalah data 10 gelombang yang diukur (dlm meter) dengan alat tersebut:

Gelombang	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
Ukuran Alat 1	12,13	17,56	9,33	11,4	28,62	10,25	23,37	16,27	12,4	24,78
Ukuran Alat 1	12,17	17,61	9,35	11,42	28,61	10,27	23,42	16,26	12,45	24,75

Jawab:

Diketahui:

X= Tinggi gelombang

X_1= Tinggi gelombang yang diukur dengan alat 1

X_2= Tinggi gelombang yang diukur dengan alat 2

n = 10; $d = X_{1i} - X_{2i}; \bar{d} = -0{,}020; s_d = 0{,}02867$

Penduga selang 99% untuk menduga rata-rata selisih ukuran tinggi gelombang alat ukur 1 dan 2 yang sebenarnya:

$$P\left(\bar{d} - t_{\alpha/2}\frac{s_d}{\sqrt{n}} < \mu_d < \bar{d} + t_{\alpha/2}\frac{s_d}{\sqrt{n}}\right) = 1-\alpha$$

$$P\left(-0{,}020 - (3{,}250)\frac{0{,}02867}{\sqrt{10}} < \mu_d < -0{,}020 + (3{,}250)\frac{0{,}02867}{\sqrt{10}}\right) = 0{,}99$$

$$P\left(-0{,}020 - (0{,}029) < \mu_d < -0{,}020 + (0{,}029)\right) = 0{,}99$$

$$P\left(-0{,}049 < \mu_d < 0{,}009\right) = 0{,}99$$

Hal ini berarti pada tingkat kepercayaan 99%, rata-rata selisih tinggi gelombang alat ukur 1 dan 2 yang sebenarnya adalah antara -0,049 sampai dengan 0,009 atau belum bisa diambil kesimpulan apakah kedua alat memberikan perbedaan ukuran tinggi gelombang.

3.3.2 Penduga Selang Untuk σ_x^2

1. Penduga Selang Ragam (σ^2) untuk 1 populasi

Berdasarkan distribusi sampling ragam dari populasi data yang berdistribusi normal, maka dapat dibentuk penduga selang $\boldsymbol{\sigma}^2$ sebagai berikut:

$$P\left(\hat{\theta}_1 < \theta < \hat{\theta}_2\right) = 1-\alpha$$

$$P\left(\chi^2_{1-\alpha/2\,(v)} < \chi^2 < \chi^2_{\alpha/2\,(v)}\right) = 1-\alpha$$

$$P\left(\chi^2_{1-\alpha/2\,(v)} < \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} < \chi^2_{\alpha/2\,(v)}\right) = 1-\alpha$$

$$P\left(\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\alpha/2\,(v)}} < \sigma^2 < \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\alpha/2\,(v)}}\right) = 1-\alpha$$

Contoh 3.11:

Sebuah tempat pelelangan ikan di Jakarta menyatakan bahwa rata-rata volume ikan lelang mencapai 3 kwintal perhari dengan ragam 1 kwintal. Bila dalam 5 hari, volume ikan lelang yang dihasilkan adalah 1,9;2,4;3,0;3,5 dan 4,2 kwintal, maka berdasarkan data itu buatlah selang kepercayaan 95% bagi σ^2, dan simpulkan apakah pernyataan pengelola TPI bahwa σ^2=1 dapat diterima atau tidak. Asumsikan bahwa populasi volume ikan lelang tersebut menyebar normal.
Jawab:
Diketahui:

$$\mu = 3; \sigma^2 = 1$$
$$n = 5; \bar{x} = 3; s = 0{,}903$$

Penduga selang 95% untuk menduga ragam volume ikan lelang yang sebenarnya di TPI tersebut adalah:

$$P\left(\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\alpha/2}} < \sigma^2 < \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}}\right) = 1-\alpha$$
$$P\left(\frac{(4)0{,}903^2}{\chi^2_{0{,}025(4)}} < \sigma^2 < \frac{(4)0{,}903^2}{\chi^2_{0{,}975(4)}}\right) = 0{,}95$$
$$P\left(\frac{(4)0{,}903^2}{11{,}143} < \sigma^2 < \frac{(4)0{,}903^2}{0{,}484}\right) = 0{,}95$$
$$P(0{,}293 < \sigma^2 < 6{,}736) = 0{,}95$$

Pada tingkat kepercayaan 95% ragam volume ikan lelang yang sebenarnya adalah 0,293 sampai dengan 6,736 sehingga kita dapat menerima pernyataan pengelola TPI bahwa ragam volume ikan lelang adalah 1.

2. Penduga Selang Rasio Ragam untuk 2 populasi

Berdasarkan distribusi sampling rasio ragam dari 2 populasi data yang berdistribusi normal dan saling bebas, maka dapat dibentuk penduga selang $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ sebagai berikut:

$$P\left(f_{1-\alpha/2}(v_1,v_2) < F < f_{\alpha/2}(v_1,v_2) \right) = 1-\alpha$$

$$P\left(f_{1-\alpha/2}(v_1,v_2) < \frac{s_1^2\sigma_2^2}{s_2^2\sigma_1^2} < f_{\alpha/2}(v_1,v_2) \right) = 1-\alpha$$

$$P\left(\frac{s_1^2}{s_2^2}\frac{1}{f_{\alpha/2}(v_1,v_2)} < \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < \frac{s_1^2}{s_2^2}\frac{1}{f_{1-\alpha/2}(v_1,v_2)} \right) = 1-\alpha$$

$$P\left(\frac{s_1^2}{s_2^2}\frac{1}{f_{\alpha/2}(v_1,v_2)} < \frac{\tau_1^2}{\tau_2^2} < \frac{s_1^2}{s_2^2} f_{\alpha/2}(v_2,v_1) \right) = 1-\alpha$$

3.3.3. Penduga Selang Proporsi

Penduga selang untuk proporsi satu populasi

Dari X suatu peubah acak binom dengan n besar, maka selang penduga P menjadi

$$P\left(\mathrm{p} - \mathrm{z}_{\alpha/2}\sqrt{PQ/n} \le P \le \mathrm{p} + \mathrm{z}_{\alpha/2}\sqrt{PQ/n} \right) = 1-\alpha ,$$

yang masih mengandung nilai P yang dapat diganti dengan nilai p. Dan selang penduga untuk proporsi populasi menjadi $P\left(\mathrm{p} - \mathrm{z}_{\alpha/2}\sqrt{pq/n} \le P \le \mathrm{p} + \mathrm{z}_{\alpha/2}\sqrt{pq/n} \right) = 1-\alpha$.

Peluang proporsi yang diduga dari suatu sampel acak akan berada diantara $-\mathrm{z}_{\alpha/2}\sqrt{pq/n}$ dan $\mathrm{z}_{\alpha/2}\sqrt{pq/n}$ adalah 1-α

Dari penduga selang diatas, kita dapat merumuskan besar ukuran sampel untuk menduga proporsi dengan formula berikut :

$$n = \left(\frac{Z_{\alpha/2}}{e} \right)^2 PQ$$

P = perkiraan proporsi populasi , dapat diketahui dari penelitian terdahulu atau melakukan penelitian pendahuluan atau P = $\frac{1}{2}$

Contoh 3.12:

Seorang peternak membudidayakan jenis ikan arwana sebanyak 1250 ekor, ingin mengetahui besarnya proporsi ikan yang dirasa kurang layak untuk diekspor . Maka diambil secara random 100 ekor dan ternyata dari hasil penilaian terdapat 8 ekor yang dinyatakan kurang layak ekspor. Bila peternak tersebut dalam memperkirakan menggunakan tingkat keyakinan 95%, maka berapakah besarnya proporsi keseluruhan ikan dinyatakan kurang layak untuk diekspor.

Jawab:

N = 1250 n = 100

X = 8 p = x/n = 8/100 = 0,08

q = 1- 0,08 = 0,92 α = 1 – 95% = 0,05 $Z_{\alpha/2} = Z_{0,025} = 1,96$

Penduga selang 95% untun menduga proporsi ikan (sebenarnya) yang kurang layak untuk diekspor:

$$P\left(\mathrm{p} - \mathrm{z}_{\alpha/2}\sqrt{pq/n} \le P \le \mathrm{p} + \mathrm{z}_{\alpha/2}\sqrt{pq/n}\right) = 1-\alpha$$

$$P\left(0{,}08 - 1{,}96\sqrt{(0{,}08)(0{,}92)/100} \le \mu \le 0{,}08 + 1{,}96\sqrt{(0{,}08)(0{,}92)/100}\right) = 0{,}95$$

$$P\left(0{,}08 - 0{,}051 \le \mu \le 0{,}08 + 0{,}051\right) = 0{,}95$$

$$P\left(0{,}029 \le \mu \le 0{,}131\right) = 0{,}95$$

Jadi besarnya proporsi ikan yang kurang layak ekspor adalah 0,029 (2,9%), sedangkan proporsi paling besar adalah 0,131 (13,1%).

Penduga Selang Beda 2 Proporsi

Berdasarkan distribusi sampling beda proporsi 2 populasi data yang berdistribusi binomial dengan ukuran masing-masing sampel besar, maka diperoleh bentuk penduga selang beda 2 proporsi adalah:

$$P\left((p_1 - p_2) - \mathrm{z}_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p_1q_1}{n_1} + \frac{p_2q_2}{n_2}} \le P_1 - P_2 \le (p_1 - p_2) + \mathrm{z}_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p_1q_1}{n_1} + \frac{p_2q_2}{n_2}}\right) = 1-\alpha$$

Contoh 3.13:

Suatu pengumpulan pendapat umum dilakukan terhadap penduduk kota dan penduduk di sekitar kota tersebut untuk menyelidiki kemungkinan diajukannya rencana pembangunan suatu kompleks gedung serba guna. Bila 2400 di antara 5000 penduduk kota dan 1200 di antara 2000 penduduk di sekitar kota tersebut yang diwawancarai menyetujui rencana tersebut, buat selang kepercayaan 90% bagi selisih proporsi sebenarnya yang menyetujui rencana tersebut.

Diketahui :

$$p_1 = \frac{2400}{5000} = 0{,}48$$

$$p_2 = \frac{1200}{2000} = 0{,}60$$

$$Z_{0,10/2} = Z_{0,05} = 1{,}645$$

Maka selang kepercayaannya adalah :

$$P\left((0{,}48 - 0{,}60) - 1{,}645\sqrt{\frac{0{,}48\ (0{,}52)}{5000} + \frac{0{,}60\ (0{,}40)}{2000}} < p_1 - p_2 < (0{,}48 - 0{,}60) + 1{,}645\sqrt{\frac{0{,}48\ (0{,}52)}{5000} + \frac{0{,}60\ (0{,}40)}{2000}} \right) = 0{,}90$$

$$P(-0{,}1414 < p_1 - p_2 < -0{,}0986) = 0{,}90$$

Karena kedua titik ujung selangnya negative, maka kita juga dapat menyimpulkan bahwa proporsi penduduk sekitar kota yang menyetujui rencana tersebut lebih besar daripada proporsi penduduk kota yang menyetujui rencana tersebut, dengan tingkat keyakinan 90%.

3.4 Rangkuman

Terdapat dua jenis pendugaan nilai parameter yaitu pendugaan titik (*point estimation*) dan pendugaan interval (*interval estimation*), yaitu

1. Pendugaan titik adalah pendugaan parameter dengan sebuah nilai tunggal dari suatu sampel acak. Merupakan cara yang paling mudah digunakan

2. Pendugaan interval adalah pendugaan parameter dengan menggunakan interval (selang) nilai yang diperoleh dari sampel

Notasi penduga selang parameter adalah speperti di bawah ini:

$$P(\hat{\theta}_1 \le \theta \le \hat{\theta}_2) = 1-\alpha \quad ,$$

Diiterpretasikan sebagai peluang nilai θ yang diduga dari suatu sampel acak berada diantara nilai θ_1 dan θ_2 adalah 1 - α.

3.5 Soal

1. Seseorang melakukan pengamatan mengenai lamanya usia pakai sebuah *speed boat*. Untuk itu diamati 64 *speed boat* dan ternyata mempunyai masa pakai rata-rata selama 5 tahun dengan standar deviasi selama 0,4 tahun. Dengan menggunakan interval keyakinan 98%, tentukan rata-rata usia pakai yang sebenarnya dari *speed boat* tersebut!

2.. Seorang instruktur senam ingin mengetahui perbedaan waktu latihan dari anggota klub “Hip” dan “Hop”. Klub “Hip”mempunyai anggota 80 orang dan diambil sampel sebanyak 20 secara random dan ternyata mempunyai rata-rata waktu latihan seminggu 8 jam. Dari klub “Hop” yang memiliki anggota sebanyak 75 orang anggota dipilih 23 orang secara acak yang rata-rata waktu latihan seminggu 9,5 jam. Jika diketahui simpangan baku dari klub “Hip” 1,5 jam dan klub “Hop” 1,8 jam, buatlah perkiraan interval beda rata-rata kedua waktu latihan perminggu dari kedua klub tersebut dengan α = 5%

3. Seorang analis pasar memilih sebuah sampel yang terdiri dari 20 buah pasar dalam suatu kota besar guna menentukan berapa besar variasi harga daging. Dari sampel diperoleh rata-rata = \$92 dan standar deviasi = \$8. Tentukan penduga keragaman harga daging dari keseluruhan pasar di kota tersebut dengan tingkat kepercayaan 95%.

4. Dinas Kesehatan Kota ingin meneliti persentase penduduk kota dewasa yang merokok paling tidak satu bungkus per hari. Sebuah sampel acak sebesar n = 250 telah dipilih dari populasi yang terdiri dari penduduk kota yang telah dewasa dan ternyata 50 orang merokok paling sedikit satu bungkus perhari. Tentukan *confidence interval* 95 persen utuk menduga proporsi orang yang merokok satu bungkus per hari.

5. Sebuah universitas tekhnik, mencatat 80 dari250 mahasiswa pada JurursanTekhnik elektro adalah perempuan. Dan jumlah mahasiswi pada jurusa tekhnik Kimia adalah 40 dari 175 mahasiswa, tentukan peduga selang untuk selisih proporsi perempuanpada kedua jurursan tersebut. (Gunakan alpha:5%).

Bab IV Pengujian Hipotesis

Data yang diamati dari suatu survei, selain diperlukan untuk menduga suatu parameter, juga diperlukan untuk menguji berlakunya suatu anggapan tertentu mengenai parameter itu. Sebagai contoh, berdasarkan hasil kunjungan ke beberapa Sekolah Dasar, seorang penilik sekolah berpendapat bahwa tinggi badan murid laki-laki kelas enam sekarang ini lebih dari 120 cm. Pendapat penilik sekolah ini mungkin saja benar, tetapi mungkin saja salah. Untuk itu perlu dilakukan pengujian terhadap pendapat/anggapan tersebut berdasarkan data sampel murid kelas enam yang telah terpilih secara acak (acak).

Pengujian dimulai dengan menerima suatu anggapan tertentu sebagai hal yang benar. Anggapan inilah yang digunakan sebagai landasan kerja selanjutnya dan dinamakan ***Hipotesis Nol*** ***(H_0)***. Jika anggapan ini berdasarkan data-data pengamatan dapat diterima kebenarannya, maka dianggap sebagai suatu kenyataan. Kalau data yang diperoleh tidak menyokong pendapat ini, maka diterimalah suatu anggapan lain yang merupakan tandingan dari H_0 sebagai kenyataan. Anggapan tandingan ini dinamakan ***Hipotesis Satu*** ***(H_1).*** Hipotesis satu seringkali disebut juga dengan ***Hipotesis Tandingan*** atau ***Hipotesis Alternatif.***

Dalam pengujian hipotesis secara statistik dikenal dua jenis hipotesis yaitu hipotesis nol dan hipotesis alternatif.

Hipotesis Nol (H_0) merupakan pernyataan mengenai karakteristik populasi, yang diinginkan untuk ditolak atau pernyataan mengenai nilai parameter pada tanda persamaan

Contoh hipotesis nol :

✓ Rata rata bahan bakar yang digunakan nelayan untuk melaut dalam sebulan adalah 500 liter

✓ Proporsi nelayan yang berstatus menganggur pada musim badai adalah 80 persen.

✓ Tidak ada perbedaan prestasi belajar mahasiswa S1 dan mahasiswa D3

Namun untuk menyatakan apakah hipotesa nol diterima atau ditolak, harus dilakukan pengujian hipotesis.

Hipotesis Alternatif (Ha) merupakan hipotesis lawan atau hipotesis tandingan dari H0. Ha sering disebut sebagai " hipotesis yang ingin diterima " dan biasanya merupakan pernyataan mengenai nilai parameter dalam tanda pertidaksamaan.

Contoh hipotesis alternatif:

✓ Rata rata bahan bakar yang digunakan nelayan untuk melaut dalam sebulan tidak sama dengan 500 liter

✓ Proporsi nelayan yang berstatus menganggur pada musim badai kurang dari 80 persen.

Terdapat perbedaan prestasi belajar mahasiswa S1 dan mahasiswa D3

Penentuan hipotesis mana yang akan diterima, ditentukan dalam bentuk sokongan yang diwujudkan oleh data yang terkumpul. Dalam pemilihan salah satu hipotesis sebagai anggapan yang berlaku, hanyalah dapat dilakukan dengan pernyataan berapa besarnya peluang bahwa hipotesis itu benar.

4.1 Jenis Kesalahan (*Type of Error*)

Ada dua macam jenis kesalahan yang mungkin timbul dari pengujian hipotesis secara statistik.

1. Kesalahan Jenis Pertama, ialah kesalahan yang mungkin timbul karena H_o yang ditolak sesungguhnya benar. Peluang timbulnya salah jenis pertama ini dilambangkan dengan α atau **P(tolak H_0|H_0benar) = α**.

2. Kesalahan Jenis Kedua, ialah kesalahan yang mungkin dibuat, karena kita telah menerima berlakunya suatu H_0 yang sesungguhnya tidak benar. Peluang untuk membuat salah jenis kedua ini dilambangkan dengan β atau **P(terima H_0| H_0 salah) = β**.

Antara keadaan kebenaran berbagai hipotesis yang disusun dan tindakan-tindakan yang mungkin diambil berdasarkan perbandingan data yang terkumpul terhadap kriteria pengujian, serta akibat dan peluang terjadinya, dapat disimpulkan adanya hubungan sebagai berikut:

Tabel 1. Jenis Kesalahan berdasarkan Hipotesis dan Keputusan

Keputusan	**Hipotesis**	
	H_0 benar	**H_0 salah**
Terima H_0	Tindakan yang benar (1 -α)	Kesalahan jenis kedua (β)
Tolak H_0	Kesalahan jenis pertama (α)	Tindakan yang benar (1 -β)

Usaha untuk mengecilkan peluang timbulnya salah satu jenis kesalahan ini, selalu diiringi dengan pembesaran nilai peluang kesalahan jenis yang lain. Kedua jenis kesalahan ini bisa diperkecil kalau ukuran sampel (n) diperbesar.

Dalam praktek penetapan peluang timbulnya kesalahan jenis pertama, biasanya ditentukan disekitar nilai α=0,05 atau α=0,01. Apabila α=0,05 maka dikatakan bahwa taraf nyata pengujiannya 5% dan seterusnya.

Nilai β biasanya sangat sulit ditentukan karena penyebaran hipotesis tandingan tidak diketahui. Jika kesalahan jenis kedua tidak diketahui, maka penerimaan H_0 sebagai suatu kebenaran, mengandung kesalahan yang tidak diketahui berapa besar peluangnya. Oleh karena itu, orang enggan mengatakan menerima kebenaran H_0, dan lebih menyukai mengatakan data tidak mendukung untuk menolak H_0.

Ada 2 Jenis Pengujian Hipotesis, yaitu:

1. Pengujian hipotesis tunggal/1 arah

Adalah pengujian hipotesis dengan wilayah kritis atau daerah penolakan terhadap H_0 pada 1 daerah/bagian kurva (bagian kanan/kiri)

$H_0 : \theta = \theta_0$

$H_a : \theta < \theta_0$ atau $\theta > \theta_0$;

Ini berarti hipotesis nol juga mencakup semua nilai yang tidak dicakup oleh hipotetis alternatif. Untuk pengujian hipotesis ini, penolakan terhadap H_0 jika diperoleh statistik yang nilainya kurang dari atau lebih besar dari nilai parameter yang ada dalam hipotesis.

2. Pengujian hipotesis majemuk/2 arah

Adalah pengujian hipotesis dengan 2 wilayah kritis atau 2daerah penolakan pada kedua bagian kurva (kanan dan kiri)

$H_0 : \theta = \theta_0$

$H_a : \theta \neq \theta_0$

Untuk pengujian hipotesis ini, penolakan terhadap H_0 jika diperoleh statistik yang nilainya tidak sama dengan nilai parameter yang ada dalam hipotesis.

Contoh:

Sebuah perusahaan pengemasan ikan laut menyatakan bahwa rata-rata berat produknya tidak melebihi 250 gram. Nyatakan hipotesis nol dan alternatifnya untuk menguji pernyataan perusahaan rokok tersebut, dan tentukan pula lokasi wilayah kritiknya.

Jawab:

Berdasarkan pernyataan perusahaan, hal yang akan ditolak adalah rata-rata berat produk tidak lebih besar dari 250 gram. Sehingga hipotesis didefinisikan sebagai:

$$H_0 = \mu = 250$$
$$H_a = \mu > 250$$

Sehingga penolakan terhadap H_0 dilakukan jika diperoleh $\bar{x}$ lebih besar dari 250, dan ini menunjukkan wialyah kritik terletak di ekor kanan distribusi statistik $\bar{x}$.

4.2 Langkah -langkah Pengujian Hipotesis:

1. Menentukan bentuk uji hipotesis (H_0 dan H_a) berdasarkan anggapan yang akan diuji. H_1 adalah hipotesis yang kita harapkan berlaku kebenarannya; H_0 adalah hipotesis yang menolkan apa yang sesungguhnya kita harapkan berlaku kebenarannya;
2. Menentukan taraf nyata (α) atau tingkat keyakinan (1-α) yang akan digunakan
3. Menentukan uji statistik yang akan digunakan
4. Menentukan daerah kritis atau daerah penolakan terhadap H_0
5. Menghitung statistik uji
6. Membandingkan statistik uji dengan daerah kritis.
7. Menarik kesimpulan berdasarkan langkah 6 diatas.

4.3 Rangkuman

1 Terdapat 2 jenis hipotesis, yaitu hipotesis nol dan hipotesis alternatif

2. Jenis kesalahana dalam pengujian hipotesis, yaitu kesalahan jenis I dan kesalahan jenis II.

3. Terdapat 2 jenis pengujian hipotesis, yaitu pengujian satu arah dan pengujian dua arah.

4.4 Soal

Nyatakan hipotesis nol dan alternatifnya dalam pengujian pernyataan-pernyataan di bawah ini, dan secara umum nyatakan letak wilayah kritiknya:

1. Sebuah perusaahaan menyatakan bahwa jenis batang pancing baru mempunyai kekuatan dengan nilai tengah 15 kilogram

2. Dalam pemilu mendatang proporsi yang memilih calon lama adalah 0,58

3. Secara rata-rata laju perahu yang digunakan untuk penyeberangan jalur Merak-Bakahueni tidak melebihi 15 knot.

Bab V Pengujian Hipotesis Rata-rata

5.1 Pengujian Hipotesis Rata-rata Satu Populasi

Jika peubah acak $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, maka hipotesis yang perlu diuji biasanya mengambil salah satu dari ketiga bentuk berikut:

1. $H_0 : \mu = \mu_0$ lawan $H_1 : \mu > \mu_0$
2. $H_0 : \mu = \mu_0$ lawan $H_1 : \mu < \mu_0$
3. $H_0 : \mu = \mu_0$ lawan $H_1 : \mu \neq \mu_0$

μ_0 adalah suatu nilai yang telah ditetapkan terlebih dahulu. Misalkan, untuk menguji apakah rata-rata produksi padi per Ha di suatu desa melebihi 5 ton, maka hipotesis yang akan di uji adalah:

$H_0 : \mu = 5$ lawan $H_1 : \mu > 5$

Dua hipotesis yang pertama (1 dan 2) di atas, menunjukkan harus diadakan uji satu arah (*one tail test*), karena hipotesis tandingan menempatkan nilai μ pada satu arah saja dari μ_0.

Bentuk yang ketiga (3) sebenarnya memiliki hipotesis tandingan yang merupakan kombinasi hipotesis tandingan bentuk pertama (1) dan kedua (2). Pengujian terhadap bentuk ketiga (3) ini dengan demikian bersifat dua arah *(two tail test).*

Pengujian suatu hipotesis harus didukung oleh adanya data yang dikumpulkan dari populasi berdasarkan suatu sampel acak yang berukuran sebesar n. Misalkan bahwa nilai-nilai yang diamati adalah: $\{X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n\}$. Telah diketahui bahwa:

$$\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} \infty N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

Maka statistik uji yang dapat digunakan,yaitu:

1. Varian Populasi (σ^2) Diketahui:

$$Z_{\text{observasi}} = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} \infty N(0,1)$$

2. Varian Populasi Tidak Diketahui, Jumlah Sampel Besar

Yang dimaksud jumlah sampel cukup besar adalah apabila $n \geq 30$. Maka statistik ujinya adalah

$$Z_{\text{observasi}} = \frac{\overline{X} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} \infty N(0,1)$$

3. Varian Populasi Tidak Diketahui, Jumlah Sampel Kecil

Yang dimaksud jumlah sampel kecil adalah apabila n < 30. Maka statistik ujinya adalah

$$t_{\text{observasi}} = \frac{\overline{X} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} \rightarrow t_{n-1}$$

n adalah ukuran sampel
s adalah nilai simpangan baku yang dihitung berdasarkan sampel berukuran n;
t_{n-1} adalah distribusi student-t, dengan derajat bebas (*degrees of freedom*) sebesar n – 1.

Kaidah pengambilan keputusan bagi ketiga bentuk kriteria pengujian adalah:

1. $H_0 : \mu = \mu_0$ lawan $H_1 : \mu > \mu_0$
   - Jika $Z_{\text{observasi}} \leq Z_{\alpha}$, maka H_0 tidak ditolak
   - Jika $Z_{\text{observasi}} > Z_{\alpha}$, maka H_0 ditolak, H_1 diterima
2. $H_0 : \mu = \mu_0$ lawan $H_1 : \mu < \mu_0$
   - Jika $Z_{\text{observasi}} \geq Z_{\alpha}$, maka H_0 tidak ditolak
   - Jika $Z_{\text{observasi}} < Z_{\alpha}$, maka H_0 ditolak, H_1 diterima
3. $H_0 : \mu = \mu_0$ lawan $H_1 : \mu \neq \mu_0$
   - Jika $| Z_{\text{observasi}} | \leq Z_{\alpha/2}$, maka H_0 tidak ditolak
   - Jika $| Z_{\text{observasi}} | > Z_{\alpha/2}$, maka H_0 ditolak, H_1 diterima

Untuk sampel kecil, kaidah keputusan di atas ditetapkan dengan menggunakan statistik uji $t_{\text{observasi}}$, yaitu dengan menggantikan nilai Z_{α} atau $Z_{\alpha/2}$ oleh nilai $t_{\alpha;(n-1)}$ atau $t_{\alpha/2;(n-1)}$.

Contoh 5.1

Dari pengalaman diketahui bahwa tinggi murid laki-laki kelas enam SD menyebar secara normal dengan varian σ^2 =25cm. Pendapat umum ialah bahwa tinggi rata-rata murid kelas enam = 120cm. Di suatu SD telah diberikan tambahan minuman susu setiap hari selama 2 tahun. Kepala sekolah ingin mengetahui apakah pemberian susu ini menambah tinggi badan rata-rata kelas enam. Diukur 100 orang murid kelas enam dan mendapatkan nilai rata-rata 121 cm. Apakah data ini menyokong pendapat bahwa pemberian susu selama 2 tahun memberikan pertumbuhan badan yang lebih tinggi dengan taraf nyata 5%.

Jawab:

1. Penentuan hipotesis
   $H_0 : \mu = 120$
   $H_1 : \mu > 120$
2. Taraf Uji α = 5% = 0,05
3. Statistik uji: σ^2 diketahui nilainya yaitu 25 cm

$$Z_{\text{hitung}} = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} = \frac{121 - 120}{5 / \sqrt{100}} = 2$$

4. Daerah kritis: $Z_\alpha = Z_{0,05} = 1,645$
5. Keputusan: Karena $Z_{hitung} > Z_{tabel}$, maka H_0 ditolak
6. Kesimpulan: berdasarkan data tentang tinggi badan murid kelas 6 disimpulkan bahwa pemberian susu selama 2 tahun memberikan efek pertumbuhan badan yang lebih tinggi, bila digunakan taraf nyata 5%.

Contoh 5.2

Dari varietas padi tertentu ingin diketahui mengenai jumlah malai yang dapat dihasilkan oleh satu rumpun apabila ditanam dengan jarak tanam 25 x 25 cm. Untuk keperluan ini telah dipilih secara acak rumpun dari suatu petak sawah tertentu dan dihitung jumlah malai yang dihasilkan yaitu 10, 14, 12, 16, 14, 10. Berdasarkan hasil yang diperoleh tersebut, hendak diuji pendapat-pendapat tersebut dengan menggunakan taraf uji 5%.

1. Varietas padi tersebut menghasilkan kurang dari 14 malai setiap rumpunnya.
2. Varietas padi dalam keadaan seperti itu rata-rata tidak menghasilkan 10 malai setiap rumpunnya.

Jawab:

1. σ^2 tidak diketahui nilainya, maka diduga melalui data contoh, yaitu s^2 = 5,8667. Ukuran contoh n = 6 (kecil); rata-rata = 12,67

1. $H_0 : \mu = 14$ lawan $H_1 : \mu < 14$
2. Taraf uji $\alpha = 0,05$
3. Statistik uji

$$t_{observasi} = \frac{\overline{X} - \mu_0}{s / \sqrt{n}} = \frac{12,67 - 14}{\sqrt{5,8667} / \sqrt{6}} = -1,3571$$

4. Daerah kritis $t_{\alpha;n-1} = t_{0,05;5} = 2,015$

5. Keputusan : $t_{observasi} < t_{tabel}$, maka H_0 ditolak

6. Kesimpulan : berdasarkan data pengamatan dengan taraf uji 5%, cukup bukti untuk mendukung pendapat bahwa varietas padi tersebut rata-rata menghasilkan kurang dari 14 malai setiap rumpunnya.

2. σ^2 tidak diketahui nilainya, maka diduga melalui data contoh, yaitu s^2 = 5,8667. Ukuran contoh n = 6 (kecil); rata-rata = 12,67

1. H_0 : μ = 10 lawan $H_1 \neq 10$

2. Taraf uji α = 0,05

3. Statistik uji

$$|t_{observasi}| = \left| \frac{12,67 - 10}{\sqrt{5,8667} \Big/ \sqrt{6}} \right| = 2,72491$$

4. Daerah kritis $t_{\alpha/2;n-1} = t_{0,025;5} = 2,571$

5. Keputusan: $|t_{observasi}| = 2,7249 > t_{tabel} = 2,571$ maka tolak H_0.

6. Kesimpulan: ternyata memang varietas padi tersebut rata-rata tidak menghasilkan 10 malai dalam setiap rumpunnya, bila digunakan taraf uji 5%.

5.2 Pengujian Hipotesis Rata-rata Dua Populasi

1. Pengujian Hipotesis untuk Selisih Rata-rata $(\mu_1 - \mu_2)$ Dua Populasi yang Saling Bebas

Jika peubah acak $X_1 \sim N(\mu_1,\sigma_1)$ dan $X_2 \sim N(\mu_2,\sigma_2)$ yang saling bebas, maka hipotesis yang perlu diuji biasanya mengambil salah satu dari ketiga bentuk berikut:

1. H_0 : $\mu_1 - \mu_2 = d_0$ lawan H_1 : $\mu_1 - \mu_2 < d_0$

2. H_0 : $\mu_1 - \mu_2 = d_0$ lawan H_1 : $\mu_1 - \mu_2 > d_0$

3. H_0 : $\mu_1 - \mu_2 = d_0$ lawan H_1 : $\mu_1 - \mu_2 \neq d_0$

d0 adalah nilai $\mu_1 - \mu_2$ yang dihipotesiskan atau nilai yang telah ditetapkan terlebih dahulu.

Statistik untuk pengujian hipotesis rata-rata 2 populasi yang saling bebas adalah sebagai berikut:

Tabel 2. Pengujian Hipotesis Rata-rata Dua Populasi

H_0	Nilai Statistik Uji	H_1	Wilayah Kritis
$\mu_1 - \mu_2 = d_0$	$Z = \dfrac{(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) - d_0}{\sqrt{s_1^2/n_1 + s_2^2/n_2}}$ σ_1 dan σ_2 tidak diketahui Sampel besar	$\mu_1 - \mu_2 < d_0$ $\mu_1 - \mu_2 > d_0$ $\mu_1 - \mu_2 \neq d_0$	$Z < -Z_\alpha$ $Z > Z_\alpha$ $Z < -Z_{\alpha/2}$ atau $Z > Z_{\alpha/2}$
$\mu_1 - \mu_2 = d_0$	$t = \dfrac{(\overline{X}_1 - \overline{X}_2 - d_0)}{S_p\sqrt{1/n_1 + 1/n_2}}$ $v = n_1 + n_2 - 2$; $\sigma_1 = \sigma_2$ tetapi tidak diketahui $S_p = \dfrac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$	$\mu_1 - \mu_2 < d_0$ $\mu_1 - \mu_2 > d_0$ $\mu_1 - \mu_2 \neq d_0$	$t < -t_\alpha$ $t > t_\alpha$ $t < -t_{\alpha/2}$ atau $t > t_{\alpha/2}$
$\mu_1 - \mu_2 = d_0$	$t = \dfrac{(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) - d_0}{\sqrt{s_1^2/n_1 + s_2^2/n_2}}$ $v = \dfrac{\left(s_1^2/n_1 + s_2^2/n_2\right)^2}{\dfrac{\left(s_1^2/n_1\right)^2}{n_1 - 1} + \dfrac{\left(s_2^2/n_2\right)^2}{n_2 - 1}}$ $\sigma_1 \neq \sigma_2$ dan tidak diketahui	$\mu_1 - \mu_2 < d_0$ $\mu_1 - \mu_2 > d_0$ $\mu_1 - \mu_2 \neq d_0$	$t < -t_\alpha$ $t > t_\alpha$ $t < -t_{\alpha/2}$ atau $t > t_{\alpha/2}$

Keterangan:
v = derajat bebas dari distribusi t
S_{pooled}^2 = varian gabungan *(pooled)* dari sampel

Contoh 5.3:

Suatu penelitian dilakukan untuk mengetahui apakah ada pengaruh metode kerja terhadap produktivitas kerja. Untuk metode lama dipilih 25 pekerja. Ternyata rata-rata waktu yang dibutuhkan untuk menyelesaikan produksi 1 unit barang adalah 3 jam dan standar deviasi 0,5 jam/ unit. Untuk metode baru dipilih 20 orang, ternyata rata-rata yang dibutuhkan 3,2 jam/ unit dan standar deviasi 0,45 jam/ unit. Uji apakah metode lama lebih baik dari metode baru? Gunakan taraf nyata 1%. (Varians populasi tidak sama)

Jawab:
Diketahui:
X= Waktu produksi 1 unit barang
X_1= Waktu produksi 1 unit barang dengan metode lama
X_2= Waktu produksi 1 unit barang dengan metode baru

$n_1 = 25; \bar{x}_1 = 3; s = 0{,}5$

$n_2 = 20; \bar{x}_2 = 3{,}2; s = 0{,}45$

1. Hipotesis (1 sisi):

H_0 : $\mu_1 = \mu_2$

H_1 : $\mu_1 < \mu_2$

2. Taraf nyata/ signifikansi = 1%
3. Statistik Uji: $t = \dfrac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - \delta}{\sqrt{\dfrac{s_1^{\,2}}{n_1} + \dfrac{s_2^{\,2}}{n_2}}}; \delta = 0$
4. Daerah kritis atau daerah penolakan H_0: Tolak H_0, jika $t_{hitung} < -t_{\alpha,v}$

$$v = \frac{\left(\dfrac{s_1^{\,2}}{n_1} + \dfrac{s_2^{\,2}}{n_2}\right)^2}{\dfrac{\left(\dfrac{s_1^{\,2}}{n_1}\right)^2}{n_1 - 1} + \dfrac{\left(\dfrac{s_2^{\,2}}{n2}\right)^2}{n_2 - 1}} = \frac{\left(\dfrac{0{,}5^2}{25} + \dfrac{0{,}45^2}{20}\right)^2}{\dfrac{\left(\dfrac{0{,}5^2}{25}\right)^2}{24} + \dfrac{\left(\dfrac{0{,}45^2}{20}\right)^2}{19}} = 47{,}99 \approx 48$$

$t_{0,01(48)}$=2,682

5. Statistik hitung: $t = \dfrac{(3 - 3{,}2)}{\sqrt{\dfrac{0{,}5^2}{25} + \dfrac{0{,}45^2}{20}}} = \dfrac{-0.2}{\sqrt{0{,}095}} = -0{,}648$

Keputusan: Karena t_{hitung} = -0,648 < -2,682 ($t_{0,01(48)2}$), maka H_0 diterima. Dengan demikian belum cukup bukti untuk menyatakan bahwa H_0 salah atau metode lama tidak lebih baik dari metode baru.

Contoh 5.4:

Seorang pengamat masalah sosial berpendapat bahwa terdapat perbedaan rata-rata usia perkawinan pertama diantara wanita bekerja dan wanita tidak bekerja. Berdasarkan contoh dari suatu daerah perkotaan yang terpilih secara acak diantara kedua kelompok wanita tersebut diperoleh data sebagai berikut:

Kelompok wanita	Banyaknya contoh	Rata-rata usia Perkawinan Pertama (tahun)	Varian Usia Perkawinan Pertama (tahun)
Bekerja Tidak Bekerja	2500 2400	25 22	4 2

Jika digunakan taraf uji 5% untuk pengujian pendapat tersebut, maka perhitungan statistiknya adalah :

1. Hipotesis, misalkan kelompok wanita bekerja adalah X_i dan kelompok wanita tidak bekerja adalah Y_i, maka hipotesisnya adalah:
   H_0 : $\mu_x - \mu_y = 0$
   H_1 : $\mu_x - \mu_y \neq 0$
2. Taraf uji $\alpha = 0{,}05$
3. Statistik uji

Karena ukuran contoh yang ditarik dari masing-masing populasi berukuran besar, maka walaupun nilai varian populasi usia perkawinan pertama tidak diketahui, dapat dilakukan pendugaan nilai melalui varian contohnya, yaitu 1 dan 2 tahun.

$$Z_{observasi} = \frac{(25-22)-0}{\sqrt{\left(4/2500\right)+\left(2/2400\right)}} = 60{,}82$$

4. Daerah kritis, dari tabel normal baku diperoleh $Z_{0,05/2} = 1{,}96$.
5. Keputusan, karena Z > Ztabel, maka diputuskan tolak H_0.
6. Kesimpulan

Dengan demikian, berdasarkan data sampel tersebut dapat disimpulkan bahwa memang terdapat perbedaan rata-rata usia perkawinan pertama diantara wanita bekerja dan tidak bekerja.

2. Pengujian Hipotesis untuk Selisih Rata-rata ($\mu_1 - \mu_2$) Data Berpasangan

Suatu anggapan tentang rata-rata yang perlu diuji kadangkala diamati dari data sampel yang tidak bebas. Hal ini terjadi, bila pengamatan dalam kedua contoh saling berpasang-pasangan sehingga kedua pengamatan itu berhubungan. Misalkan saja, kita ingin menguji keefektifan suatu diet baru menggunakan sampel individu-individu, dengan mengamati bobot badan sebelum dan sesudah percobaan program diet. Pengamatan dalam kedua contoh yang diambil dari individu yang sama tentu saja berhubungan, dan oleh karena itu membentuk suatu pasangan. Untuk mengetahui apakah diet itu efektif, kita harus memperhatikan selisih bobot badan sebelum dan sesudah (d_i) masing-masing pasangan pengamatan tersebut.

Hipotesis statistik yang dapat disusun untuk data berpasangan adalah:

$H_0 : \mu_D = \mu_0$

H_1 : i) $\mu_D < \mu_0$ atau

ii) $\mu_D > \mu_0$ atau

iii) $\mu_D \neq \mu_0$

dengan statistik uji:

$$t_{ob} = \frac{\bar{d} - D_0}{S_d / \sqrt{n}} \infty t_{n-1}$$

$\bar{d}$ = rata-rata dari selisih pengamatan contoh

S_d = simpangan baku dari selisih pengamatan contoh.

Keputusan tolak H_0, artinya pula terima H_1 untuk masing-masing jenis hipotesis alternatif yaitu jika:

$t_{ob} < -t_{\alpha;n-1}$

$t_{ob} > t_{\alpha;n-1}$

$|t_{ob}| < -t_{\alpha/2;n-1}$

Contoh 5.5:

Untuk menguji pernyataan bahwa suatu program diet baru dapat mengurangi bobot badan seseorang secara rata-rata 4,5 kg per dua minggu, dilakukan pengamatan terhadap 7 orang wanita yang mengikuti program tersebut.
Pengujian pernyataan akan dilakukan dengan taraf uji 5%.

Bobot Badan (kg)	Wanita						
	1	2	3	4	5	6	7
Sebelum program	58,5	60,3	61,7	69,0	64,0	62,6	56,7
Sesudah program	60,0	54,9	58,1	62,1	58,5	59,9	54,4

Jawab:

Bila distribusi bobot badan diasumsikan menghampiri distribusi normal, maka selisih bobot badan sebelum dan sesudah program (d_i) dari ketujuh orang wanita tersebut adalah:

$d = 3{,}56$; $s_d = 2{,}78$

1. Hipotesis

$H_0 : \mu_D = 4{,}5$ lawan $H_1 : \mu_D \neq 4{,}5$

2. $\alpha = 5\%$

3. Statistik uji adalah:

$$t_{observasi} = \frac{3{,}56 - 4{,}5}{2{,}78 / \sqrt{7}} = -0{,}89$$

4. Daerah kritis; $t_{0,05/2;7-1} = t_{0,025;6} = 2{,}447$

5. Keputusan; karena $t_{ob} = 0{,}89 < 2{,}447$ maka H_0 tidak ditolak.

6. Kesimpulan, dengan tingkat kepercayaan 95%, data contoh belum cukup untuk mendukung pernyataan bahwa program diet baru tersebut dapamenurunkan bobot badan seseorang secara rata-rata 4,5 kg per dua minggu.

5.3 Rangkuman

Jika peubah acak $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, maka hipotesis yang dapat digunakan untuk menguji rata-rata adalah salah satu dari ketiga bentuk berikut:

1. $H_0 : \mu = \mu_0$ lawan $H_1 : \mu > \mu_0$
2. $H_0 : \mu = \mu_0$ lawan $H_1 : \mu < \mu_0$
3. $H_0 : \mu = \mu_0$ lawan $H_1 : \mu \neq \mu_0$

μ_0 adalah suatu nilai yang telah ditetapkan terlebih dahulu.

Jika peubah acak $X_1 \sim N(\mu_1,\sigma_1)$ dan $X_2 \sim N(\mu_2,\sigma_2)$ yang saling bebas, maka hipotesis yang dapat digunakan untuk menguji selisih rata-rata adalah salah satu dari ketiga bentuk berikut:

1. $H_0 : \mu_1 - \mu_2 = d_0$ lawan $H_1 : \mu_1 - \mu_2 < d_0$
2. $H_0 : \mu_1 - \mu_2 = d_0$ lawan $H_1 : \mu_1 - \mu_2 > d_0$
3. $H_0 : \mu_1 - \mu_2 = d_0$ lawan $H_1 : \mu_1 - \mu_2 \neq d_0$

d_0 adalah nilai $\mu_1 - \mu_2$ yang dihipotesiskan atau nilai yang telah ditetapkan terlebih dahulu.

Jika peubah acak $X_1 \sim N(\mu_1,\sigma_1)$ dan $X_2 \sim N(\mu_2,\sigma_2)$ yang tidak saling bebas (berpasangan), makah hipotesis statistik yang dapat disusun untuk data berpasangan adalah:

1. $H_0 : \mu_D = \mu_0$ lawan $H_1 : \mu_D < \mu_0$
2. $H_0 : \mu_D = \mu_0$ lawan $H_1 : \mu_D > \mu_0$

$H_0 : \mu_D = \mu_0$ lawan $H_1 : \mu_D \neq \mu_0$

5.4 Soal-soal

1. Sebuah sampel random yang terdiri dari 40 kaleng ikan olahan yang dihasilkan oleh sebuah pabrik, pada kalengnya tertulis bahwa beratnya 400 gram. Setelah ditimbang satu persatu, ternyata menunjukkan berat rata-rata adalah 398 gram dengan standar deviasi 35 gram. Jika digunakan 1% tingkat signifikansinya, benarkah bahwa tulisan yang ada pada setiap kaleng itu menunjukkan berat ikan olahan yang sebenarnya?

2. Pada tahun ajaran baru, akan diberlakukan metode baru yang dianggap lebih efektif untuk meningkatkan kemampuan membaca siswa kelas 1 SD. Untuk mengetahui kebenaran anggapan diatas, siswa kelas 1 dibagi menjadi 2 kelompok. Kelompok 1 adalah kelompok siswa yang diajar menggunakan metode lama, sedangkan kelompok 2 adalah kelompok siswa yang diajarkan dengan menggunakan metode baru. Kemudian dari masing-masing kelompok diambil 8 siswa sebagai sampel acak, dan hasil test kemampuan membaca sampel tersebut adalah sbb:

Metode				Hasil Test				
Lama	65	70	76	63	72	71	68	68
Baru	75	80	72	77	69	81	71	78

Jika diasumsikan ragam kedua nilai sama, apakah metode baru lebih baik daripada metode lama?. Gunakan alpha=5%

3. Untuk mengamati efektifitas dari program penambahan jam belajar di suatu sekolah, 24 orang siswa dipilih secara acak dan dihitung waktu yang dibutuhkan dalam mengerjakan suatu soal. Berikut adalah data selisih waktu setiap siswa dalam mengerjakan soal pada saat 'sebelum program penambahan jam belajar' dan 'sesudah program penambahan jam belajar':
0,28;0,01;0,13;0,03;-0,03;0,07;-0,18;-0,14;-0,33;0,01;0,22;0,29 ;-
0,08;0,23;0,08;0,04;-0,30;-0,08;0,09;0,70;0,33;
-0,34;0,30;0,06

Dengan tingkat kepercayaan 95%,ujilah rata-rata selisih waktu pengerjaan suatu soal sebelum dan sesudah program penambahan jam belajar. Dan berikan kesimpulan mengenai efektifitas program tsb

Bab VI Pengujian Hipotesis Ragam

6.1 Pengujian Hipotesis Ragam Satu Populasi

$X_1, X_2, \ldots, X_n$ adalah sampel acak dari suatu populasi berdistribusi normal dengan rata-rata dan varian tidak diketahui. Maka rata-rata sampelnya adalah $\overline{X}$ dan standar deviasinya adalah s, maka pengujian nilai ragam populasi dengan hipotesis yang digunakan dalam uji tersebut adalah :

1. $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$ lawan $H_1 : \sigma^2 > \sigma_0^2$
2. $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$ lawan $H_1 : \sigma^2 < \sigma_0^2$
3. $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$ lawan $H_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2$

Sedangkan untuk menguji hipotesis tersebut digunakan statistik uji :

$$\chi^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}$$

dengan :

n : jumlah sampel

s^2 : varian sampel

σ_0^2 : nilai varian pada hipotesis nol

Kaidah pengambilan keputusan bagi ketiga bentuk kriteria pengujian adalah:

1. $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$ lawan $H_1 : \sigma^2 > \sigma_0^2$

   H_0 ditolak jika $\chi^2 > \chi^2_{(\alpha,v)}$
2. $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$ lawan $H_1 : \sigma^2 < \sigma_0^2$

   H_0 ditolak jika $\chi^2 < \chi^2_{(\alpha,v)}$
3. $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$ lawan $H_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2$

   H_0 ditolak jika $\chi^2 < \chi^2_{(1-\frac{\alpha}{2},v)}$ dan $\chi^2 > \chi^2_{(\frac{\alpha}{2},v)}$

dengan $v = n$-1

Contoh 6.1:

Sebuah perusahaan aki mobil mengatakan bahwa umur aki yang diproduksinya mempunyai simpangan baku 0,9 tahun. Bila suatu sampel acak 10 aki menghasilkan simpangan baku s = 1,2 tahun, apakah menurut anda σ > 0,9 tahun? Gunakan taraf nyata 5%.

Jawab :

$H_0 : \sigma^2 = 0{,}81$

$H_1 : \sigma^2 > 0{,}81$

1. α = 0,05

2. Daerah kritis: tolak H_0 jika $\chi^2 > 16{,}919$
3. Statistik hitung : $s^2 = 1{,}44$, $n = 10$

$$\chi^2 = \frac{9\ (1{,}44)}{0{,}81} = 16$$

4. Keputusan : tidak tolak H_0

5. Kesimpulan : dengan tingkat kepercayaan 95%, dapat disimpulkan bahwa belum cukup bukti untuk mengatakan bahwa simpangan baku umur aki lebih dari 0,9 tahun.

6.2 Pengujian Hipotesis Ragam Dua Populasi

Dalam pengujian hipotesis selisih rata-rata dua populasi yang salin bebas, dengan menggunakan ukuran sampel kecil, apabila varian populasi σ_1^2 dan σ_2^2 tidak diketahui nilainya maka dibuatkan suatu asumsi untuk kedua nilai varian populasi tersebut. Asumsi yang diajukan adalah bahwa terdapat kesamaan atau ketidaksamaan nilai dari kedua varian populasi berdasarkan informasi dari varian sampelnya.

Pada bagian ini untuk memperkuat asumsi mengenai varian populasi tersebut dapat dilakukan dengan menguji hipotesis mengenai varian dari dua populasi, yaitu membandingan varian suatu populasi dengan varian populasi lainnya. Jadi, mungkin saja kita ingin menguji hipotesis bahwa varian berat anak balita dari para ibu PUS akseptor KB sama dengan para ibu PUS yang non akseptor KB.

Untuk dapat menguji hipotesis tadi, maka perlu disusun suatu hipotesis dalam bentuk pernyataan statistik yaitu:

Hipotesis

H_0 : $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$

H_1 : $\sigma_1^2 < \sigma_2^2$ atau $\sigma_1^2 > \sigma_2^2$ atau $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$

Bila kedua sampel itu bersifat bebas, maka formula statistik ujinya adalah:

$$F_{observasi} = \frac{S_1^2}{S_2^2}$$

Dengan:

S_1^2 adalah varian yang dihitung dari sampel pertama,

S_2^2 adalah varian yang dihitung dari sampel kedua.

Keputusan; tolak H_0 untuk masing-masing hipotesis apabila

i. $\sigma_1^2 < \sigma_2^2$ adalah bila $F_{ob} < F_{1-\alpha;(v1,v2)} = 1/(F_{\alpha;(v1,v2)})$
ii. $\sigma_1^2 > \sigma_2^2$ adalah bila $F_{ob} > F_{\alpha;(v1,v2)}$
iii. $F_{ob} < F_{1-\alpha/2;(v1,v2)} = 1/(F_{\alpha/2;(v2,v1)})$ dan $F_{ob} > F_{\alpha/2;(v1,v2)}$, dengan $v_1 = n_1 - 1$ dan $v_2 = n_2 - 1$ adalah derajat bebas dari tabel distribusi F.

Contoh 6.2:

Dua metode pembibitan ikan koi yang digunakan hendak dibandingkan, untuk mengetahui apakah kedua metode tersebut memberikan keragaman usia yang sama dari ikan koi untuk siap bertelur. Dari kedua metode tersebut diperoleh data mengenai usia ikan koi untuk bertelur:

Metode	Umur ikan koi (minggu)								
A	9,6	8,2	7,5	6,1	8,9	6,4	8,1	6,8	6,5
B	8,7	7,4	6,3	5,5,	7,6	7,0	6,9	5,7	5,3

Bila diasumsikan populasi umur ikan menghampiri distribusi normal. Ujilah hipotesis bahwa $\sigma_A{}^2 = \sigma_B{}^2$ lawan akternatifnya $\sigma_A{}^2 \neq \sigma_B{}^2$. Gunakan taraf nyata 0,02.
Jawab:
H_0 : $\sigma_A{}^2 = \sigma_B{}^2$
H_1 : $\sigma_A{}^2 \neq \sigma_B{}^2$
α=0,02

Statistik uji:

$$f = \frac{s_1{}^2}{s_2{}^2}$$

Nilai kritik: Tolak H_0, jika $f_{hitung} < f_{1-\alpha/2;(v1,v2)}$ atau $f_{hitung} > f_{\alpha/2;(v1,v2)}$

$f_{1-\alpha/2;(v1,v2)=} f_{0,99;(8,8)} = 0{,}166$; $f_{\alpha/2;(v1,v2)} = f_{0,01;(8,8)} = 6{,}03$

Statistik hitung: $f_{ob} = \frac{1{,}217^2}{1{,}117^2} = 1{,}48$

Keputusan: Tidak tolak H_0

Kesimpulan: Pada tingkat kepercayaan 95%, ragam usia ikan koi untuk siap bertelur dari kedua metode tersebut sama.

6.3 Pengujian Hipotesis Ragam Beberapa Populasi

Uji yang digunakan adalah **uji Bartlett.** Uji ini digunakan untuk mengetahui apakah varian dari k populasi tersebut homogen atau tidak. Hipotesis yang digunakan adalah :

$H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \cdots = \sigma_k^2$

H_1 : setidaknya ada satu varian populasi yang berbeda

Prosedur pengujian kesamaan ragan Bartlett:

Pertama-tama, hitung k buah varian sampel $s_1, s_2, \ldots, s_k$ dari sampel-sampel yang berukuran $n_{1,} n_2, \ldots, n_k$ dengan $N = \ {}_{i=1}^{k} n_i$ = N.

Selanjutnya gabungkan semua varian sampel tersebut sehingga menghasilkan nilai dugaan gabungan $s_p^2 = \frac{{}_{i=1}^{k} \ n_i - 1 \ s_i^2}{N-k}$

Sekarang

$$b = \frac{s_1^2 \ ^{n_1 - 1} \ s_2^2 \ ^{n_2 - 1} \ldots \ s_k^2 \ ^{n_k - 1} \ ^{1/(N-k)}}{s_p^2}$$

Merupakan nilai peubah acak B yang mempunyai **distribusi Bartlett**. Untuk kasus $n_1 = n_2 = \cdots = n_k = n$, kita tolak H_0 pada taraf nyata α bila

$$b < b_k(\alpha, n)$$

Dalam hal ini $b_k(\alpha, n)$ adalah nilai kritik yang memberikan luas daerah sebesar α di ekor kiri distribusi Bartlett seperti tercantum dalam .

Bila ukuran sampelnya tidak sama, hipotesis nol ditolak pada taraf nyata α bila

$$b < b_k(\alpha; n_{1,} n_2, \ldots, n_k)$$

Sedangkan dalam hal ini

$$b_k \ \alpha; n_{1,} n_2, \ldots, n_k \ = \frac{n_1 b_k \ \alpha, n_1 \ + n_2 b_k \ \alpha, n_2 \ + \cdots + n_k b_k \ \alpha, k}{N}$$

Contoh 6.3 :

Ada yang mengatakan bahwa mobil mahal dirakit lebih berhati-hati dibandingkan dengan mobil murah. Untuk menyelidiki apakah pendapat ini beralasan, diambil tiga tipe mobil yaitu mobil mewah besar A, sedan berukuran sedang B, dan sedan subkompak hatchback C untuk diselidiki berapa banyaknya bagian yang cacat. Semua mobil itu diproduksi oleh pabrik yang sama. Data banyaknya yang cacat dari beberapa mobil bagi ketiga tipe itu dicantumkan dalam tabel berikut :

No	Model		
	A	B	C
1	4	5	8
2	7	1	6
3	6	3	8
4	6	5	9
5		3	5
6		4	
Total	23	21	36

Gunakan uji Bartlett untuk menguji hipotesis bahwa varian ketiga populasi adalah sama.

Jawab :

1. Menentukan hipotesis

$H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma_3^2$

H_1 : ketiga varian tersebut tidak semuanya sama

α = 0,05

Daerah kritis : tolak H_0 jika $b < b_3(0{,}05; 4{,}6{,}5)$

$b < \quad 4 \quad 0{,}4699 \; + \; 6 \quad 0{,}6483 \; + \; 5 \; (0{,}5762) \; /15$

$b < 0{,}5767$

2. Statistik hitung :

$s_1^2 = 1{,}583$ $\qquad s_2^2 = 2{,}300$ $\qquad s_3^2 = 2{,}700$

$$s_p^2 = \frac{3 \quad 1{,}583 \; + \; 5 \quad 2{,}300 \; + \; 4 \; (2{,}700)}{12} = 2{,}254$$

$$b = \frac{(1{,}583)^3 (2{,}300)^5 (2{,}700)^4 \;\; ^{1/12}}{2{,}254} = 0{,}9804$$

3. Keputusan : tidak tolak H_0.

Kesimpulan : dengan tingkat kepercayaan 95%, dapat disimpulkan bahwa varian ketiga populasi tersebut sama.

6.4 Rangkuman

1. X_1, X_2, …, X_n adalah sampel acak dari suatu populasi berdistribusi normal dengan rata-rata dan varian tidak diketahui. Maka rata-rata sampelnya adalah $\overline{X}$ dan standar deviasinya adalah *s*, maka pengujian nilai ragam populasi dengan hipotesis yang digunakan dalam uji tersebut adalah :
1. $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$ lawan $H_1 : \sigma^2 > \sigma_0^2$
2. $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$ lawan $H_1 : \sigma^2 < \sigma_0^2$
3. $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$ lawan $H_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2$
2. Jika peubah acak $X_1 \sim N(\mu_1,\sigma_1)$ dan $X_2 \sim N(\mu_2,\sigma_2)$ yang saling bebas, maka untuk membandingan varian suatu populasi dengan varian populasi lainnya digunakan hipotesis sebagai berikut:

H_0 : $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$

H_1 : $\sigma_1^2 < \sigma_2^2$ atau $\sigma_1^2 > \sigma_2^2$ atau $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$

3 Jika peubah acak $X_1 \sim N(\mu_1,\sigma_1)$, $X_2 \sim N(\mu_2,\sigma_2)$,..., $X_k \sim N(\mu_k,\sigma_k)$yang saling bebas, maka untuk mengetahui kesamaan varian antar populasi dengan varian populasi lainnya digunakan hipotesis sebagai berikut:

$H_0 :\ \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \cdots = \sigma_k^2$

H_1 : setidaknya ada satu varian yang berbeda

6.5 Soal-soal

1. Untuk mengetahui kemampuan sistem pengaman kapal, seorang ahli mengadakan 15 kali percobaan dengan suatu situasi kecelakaan yang direkayasa. Dari percobaan tersebut diperoleh standart deviasi waktu reaksi sistem pengaman kapal adalah 0,0014 detik. Uji dengan tingkat signifikansi 0,05, pernyataan bahwa std dev waktu reaksi sistem pengaman sebenarnya lebih dari 0,001 detik.

2. Sebuah penelitian bermaksud membandingan waktu yang diperlukan oleh karyawan laki-laki dan perempuan untuk merakit sebuah produk tertentu. Pengalaman lalu menunjukkan bahwa distribusi waktu yang diperlukan bagi karyawan laki-laki dan perempuan menghampiri distribusi normal. Contoh acak dari 11 orang karyawan diperoleh simpangan baku waktu 6,1 menit dan dari 14 orang karyawati menghasilkan simpangan baku waktu 5,3 menit. Apakah cukup alasan untuk menyatakan bahwa varian waktu untuk merakit di antara para karyawan dan karyawati tersebut memang berbeda ? Gunakan taraf uji 10%!

3. Sebuah perusahaan melakukan percobaan awal terhadap suatu mesin A untuk mengetahui variasi hasil mesin A yang dapat mengeluarkan air mineral, dengan studi lebih lanjut diketahui bahwa variasi air mineral yang keluar dari mesin A untuk sekali tekannya dapat memberikan untung maksimum bagi perusahaan Jackie. Perusahaan Jackie hendak menambah mesin air mineral dengan menguji mesin B dan mesin C. Jika mesin A, B , dan C menghasilkan variasi yang sama dengan tingkat signifikansi 0,05 maka mesin B dan C akan digunakan. Dengan mengambil sampel 5 kali tekan tiap mesin dihasilkan(dalam ml):

Mesin A	Mesin B	Mesin C
228	263	200
220	209	233
261	238	258
234	227	230
206	218	222

Bagaimanakah keputusan yang akan diambil perusahaan Jackie jika dilakukan uji kesamaan ragam dengan Uji Bartlet.

Bab VII Pengujian Hipotesis Proporsi

7.1 Pengujian Hipotesis Proporsi Satu Populasi

Dalam banyak hal, populasi yang diselidiki bersifat dwicabang (dikotom), yaitu suatu populasi yang anggota-anggotanya dapat digolongkan dalam dua kelompok; kelompok yang memiliki suatu sifat dan kelompok yang tidak memiliki suatu sifat itu. Misalkan dari sepeti buah jeruk Pontianak, ada 5 diantaranya busuk, yang lainnya tidak busuk. Contoh acak penduduk suatu desa yang ditanyakan tentang pencalonan kembali Kades yang lama, ternyata ada yang menyatakan setuju untuk dipimpin oleh Kades yang lama, disamping itu ada pula yang menginginkan untuk dipimpin oleh Kades yang baru.

Apabila ukuran contoh yang digunakan untuk menguji anggapan tertentu dari populasi yang bersifat dwicabang itu besar, maka pendekatan distribusi normal masih cukup baik untuk digunakan sebagai statistik uji.

Tata cara pengujian hipotesis parameter proporsi ini tidaklah berbeda dengan pengujian hipotesis sebelumnya, hanya notasi μ untuk parameter rata-rata populasi, dalam proporsi dilambangkan dengan **P** dimana nilai statistik ujinya didapat dari rumus

$$Z_{observasi} = \frac{x - nP_0}{\sqrt{nP_0Q_0}}$$

dimana:

x adalah banyaknya kejadian yang sukses;
n adalah banyaknya sampel
P_0 adalah nilai peluang sukses hipotesis
$Q_0 = 1 - P_0$

Contoh 7.1:

Seorang pengusaha di suatu kota besar ingin mendirikan Super Market, sebab dia beranggapan bahwa lebih dari 50% dari para ibu yang berbelanja senang pergi ke Super Market. Untuk itu dia meminta kepada seorang konsultan untuk menguji anggapannya. Ada 600 ibu rumah tangga yang dipilih secara acak dan 400 orang diantaranya menyatakan senang berbelanja di supermarket. Dengan menggunakan taraf uji 1%, ujilah anggapan tersebut.
Jawab:

1. Penentuan Hipotesis

H_0 : $P = P_0$ yaitu H_0 : $P = 50\% = 0,5$

H_1 : $P > P_0$ yaitu H_1 : $P > 50\% = 0,5$

2. Taraf uji: α = 1% = 0,01

3. Statistik uji:

$$Z_{observasi} = \frac{X - nP_0}{\sqrt{nP_0Q_0}} = \frac{400 - 600(0,5)}{\sqrt{600(0,5)(1-0,5)}} = 8,16$$

4. Daerah kritis $Z_\alpha = Z_{0,01} = 2,33$

5. Keputusan Z_{ob} > Z tabel, maka Ho ditolak

6. Kesimpulan: ternyata data yang digunakan untuk menguji anggapan pengusaha itu mendukung keputusan untuk menolak hipotesis-nol; yang berarti anggapan pengusaha bahwa lebih dari 50% dari para ibu yang berbelanja senang pergi ke Super Market dapat diterima kebenarannya pada taraf uji 1 %.

7.2 Pengujian Hipotesis Proporsi Dua Populasi

Seringkali kita berhadapan dengan masalah yang mengharuskan kita menguji bahwa dua proporsi adalah sama. Misalkan saja kita ingin menunjukkan bahwa proporsi dokter anak di suatu daerah sama dengan di daerah lain. Seorang perokok misalkan saja akan memutuskan berhenti merokok hanya bila ia merasa yakin bahwa proporsi perokok yang menderita kanker paru-paru lebih besar daripada proporsi bukan perokok yang menderita kanker paru-paru.

Secara umum, pernyataan hipotesisnya dapat disusun sebagai berikut:

$H_0 : P_1 = P_2 = P$

H_1 : i) $P_1 < P_2$ atau

ii) $P_1 > P_2$ atau

iii) $P_1 \neq P_2$

Parameter P_1 dan P_2 adalah dua proporsi populasi yang diselidiki. Sampel bebas berukuran besar, yaitu n1 dan n2 diambil secara acak dari dua populasi binomial yang diselidiki, dan proporsi dari ciri tertentu dihitung.

Statistik uji bagi pengujian di atas adalah:

$$Z_{observasi} = \frac{P_1 - P_2}{\sqrt{P(1-P)\left[\left(1/n_1\right) + \left(1/n_2\right)\right]}}$$

$$P = \frac{x_1 + x_2}{n_1 + n_2}$$

dimana:

X_1 adalah banyaknya sukses untuk sampel 1

X_2 adalah banyaknya sukses untuk sampel 2

Keputusan penolakan hipotesis nol (H_0) untuk masing-masing hipotesis adalah :

i) $Z_{obs} < -Z_{\alpha}$;

ii) $Z_{obs} > Z_{\alpha}$;

iii) $Z_{ob} > Z_{\alpha/2}$ atau $Z_{ob} < - Z_{\alpha/2}$

Contoh 7.2:

Pejabat dari BKKBN berpendapat bahwa persentase ibu rumah tangga dari daerah pertanian A dan B yang setuju program dua anak, laki-laki atau perempuan sama saja. Dari penelitian diperoleh data bahwa 500 orang ibu rumah tangga dari daerah A, ada 400 orang yang setuju, sedangkan daerah B dari sebanyak 500 orang ibu rumah tangga, ada 350 orang yang setuju program tersebut. Contoh acak dari dua daerah pertanian tadi akan digunakan untuk menguji pendapat pejabat dari BKKBN dengan taraf uji 10%.

Jawab:

X_A: banyaknya ibu rumah tangga yang setuju di daerah A yaitu 400

X_B: banyaknya ibu rumah tangga yang setuju di daerah B yaitu 350

n_A: ukuran contoh dari daerah A = 500

n_B: ukuran contoh dari daerah B = 500

Proporsi contoh yang dapat dihitung dari kedua daerah adalah:

$$P_A = \frac{x_A}{x_A} = \frac{400}{500} = 0{,}8 \quad \text{dan} \quad P_B = \frac{x_B}{x_B} = \frac{350}{500} = 0{,}7$$

$$P = \frac{400 + 350}{500 + 500} = \frac{750}{1000} = 0{,}75$$

1. Hipotesis:

   H_0 : $P_A = P_B = P$

   H_1 : $P_A \neq P_B$

2. Statistik uji:

$$Z_{ob} = \frac{0,8 - 0,7}{\sqrt{0,75(0,25)\left[\left(1/500\right) + \left(1/500\right)\right]}} = 3,65$$

3. Daerah kritis, $Z_{(0,1/2)} = Z_{0,05} = 1,645$

4. Keputusan, karena $|Z_{ob}| = 3,65 > 1,645$ maka H_0 ditolak.

5. Kesimpulan, dengan taraf uji 10%, maka kita setuju dengan pendapat pejabat dari BKKBN tersebut bahwa persentase ibu rumah tangga yang menyetujui program dua anak, laki-laki atau perempuan sama saja di kedua daerah pertanian tidak sama.

7.3 Pengujian Hipotesis Proporsi *k* Populasi

1. Pengujian Hipotesis Proporsi k Populasi Binom

Jika x_1, x_2, x_3,…., x_k adalah banyaknya sukses dari n_1, n_2, n_3,…., n_k percobaan yang diambil dari k populasi binom yang saling bebas, dan apabila masing-masing ukuran sampel besar maka distribusi dari masing-masing sampel akan mendekati normal standart.

Hipotesis yang akan diuji adalah :

$H_0 :\ p_1 = p_2 = \cdots = p_k$

H_1 : tidak semua proporsi populasi sama

Untuk melakukan uji ini, pertama-tama kita mengambil sampel acak bebas yang masing-masing berukuran $n_{1,} n_2, \ldots, n_k$ dan bentuk tabel kontingensi 2 x k sebagai berikut :

	Contoh			
	1	2	…	k
Keberhasilan	x_1	x_2	…	x_k
Kegagalan	$n_1 - x_1$	$n_2 - x_2$	…	$n_k - x_k$

Maka distribusi dari keseluruhan sampel dianggap akan mengahampiri distribusi χ^2 dengan derajat bebas (i-1) (j-1), dengan statistik ujinya menjadi:

$$\chi^2 = \sum_i \frac{(o_i - e_i)^2}{e_i}$$

dengan

o_i : frekuensi yang teramati

e_i : frekuensi harapan

Frekuensi harapan dapat dihitung dengan cara :

$$Frekuensi\ harapan = \frac{total\ kolom\ \times (total\ baris)}{total\ pengamatan}$$

H_0 ditolak jika $\chi^2 > \chi^2_{(v,\alpha)}$ dengan v : k -1 .

Contoh 7.3 :

Dalam suatu penelitian, dikumpulkan data untuk menentukan apakah proporsi produk yang cacat oleh pekerja yang bertugas pagi, sore, dan malam hari sama atau tidak. Data yang diperoleh adalah sebagai berikut :

	Waktu kerja		
	Pagi	Siang	Malam
Cacat	45	55	70
Tidak cacat	905	890	870

Gunakan taraf nyata 0,025 untuk menentukan apakah proporsi produk yang cacat sama untuk ketiga waktu kerja!

Jawab :

X_i merupakan banyaknya produk yang cacat pada waktu kerja ke-i

i = pagi,siang, malam

$H_0 :\ p_1 = p_2 = p_3$

H_1 : tidak semua proporsi populasi sama

α = 0,025

Wilayah kritik : tolak H_0 jika $\chi^2 > 7{,}378$ dengan v = 2

Statistik hitung :

$o_1 = 45$ $\quad\quad\quad$ $o_2 = 55$ $\quad\quad\quad$ $o_3 = 70$

$$e_1 = \frac{950\ (170)}{2835} = 57$$

$$e_2 = \frac{945\ (170)}{2835} = 56{,}7$$

Maka, frekuensi teramati dan harapannya adalah sebagai berikut :

	Waktu kerja			Total
	Pagi	Siang	Malam	
Cacat	45 (57,0)	55 (56,7)	70 (56,3)	170
Tidak cacat	905 (893,0)	890 (888,3)	870 (883,7)	2665
Total	950	945	940	2835

$$\chi^2_{\mathrm{ob}} = \frac{(45-57{,}0)^2}{57{,}0} + \frac{(55-56{,}7)^2}{56{,}7} + \cdots + \frac{(870-883{,}7)^2}{883{,}7} = 6{,}288$$

Keputusan : $\chi^2_{ob} < \chi^2_{\ 2}$

6,288 < 7,378 maka tidak tolak H_0

Kesimpulan : dengan tingkat kepercayaan 95%, dapat disimpulkan bahwa proporsi produk yang cacat sama untuk semua waktu kerja.

2. Pengujian Hipotesis Proporsi *k* Populasi Multinom

Populasi multinom adalah populasi data yang memiliki kemungkinan nilai lebih dari 2 kategori

Distribusi nilai sampel acaknya:

Sampel (j)	**Kategori ke-i**				**Total**
	1	**2**	**….**	**i**	
1	$\mathbf{n_{11}}$	$\mathbf{n_{21}}$	**….**	$\mathbf{n_{i1}}$	$\mathbf{n_{\cdot 1}}$
2	$\mathbf{n_{12}}$	$\mathbf{n_{22}}$	**….**	$\mathbf{n_{i2}}$	$\mathbf{n_{\cdot 2}}$
3	$\mathbf{n_{13}}$	$\mathbf{n_{23}}$	**…**	$\mathbf{n_{i3}}$	$\mathbf{n_{\cdot 3}}$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
j	$\mathbf{n_{1j}}$	$\mathbf{n_{2j}}$	**…..**	$\mathbf{n_{ij}}$	$\mathbf{n_{\cdot j}}$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
k	$\mathbf{n_{1r}}$	$\mathbf{n_{2r}}$	**…..**	$\mathbf{n_{ij}}$	$\mathbf{n_{\cdot k}}$
Total	$\mathbf{n_{1\cdot}}$	$\mathbf{n_{2\cdot}}$	**….**	$\mathbf{n_{i\cdot}}$	**n**

Sehingga bentuk hipotesis yang digunakan untuk menguji proporsi beberapa populasi multinom adalah sebagai beikut:

H_0:p_{11}= p_{12}=…=p_{1k}

p_{21}= p_{22}=…=p_{2k}

.

P_{j1}= p_{j2}=…=p_{jk}

.

.

P_{r1}= p_{r2}=…=p_{rk}

H_1:Minimal ada satu nilai p_{ij} yang tidak sama

Dengan statistik ujinya menjadi:

$$\chi^2 = \sum_{j}\sum_{i}\left(\frac{o_{ij}-e_{ij}}{e_{ij}}\right)^{2}$$

H_0 ditolak jika $\chi^2 > \chi^2_{(v,\alpha)}$ dengan v : (i-1)(j-1).

7.4 Rangkuman

1. Distribusi peluang untuk X yang berdistribusi binom yang diambil dengan ukuran sampel yang besar akan dihampirkan ke distribusi normal. Sehingga statistik uji yang digunakan dalam pengujian hipotesis proporsi satu populasi adalah: $z = \frac{p - P_0}{\sqrt{pq/n}}$ ~N(0,1)

2. Jika diketahui distribusi peluang untuk dua buah peubah acak X_1 dan X_2 yang masing-masing berdistribusi binom yang diambil dengan ukuran sampel yang besar,masing-masing akan dihampirkan ke distribusi normal.

Secara umum, pernyataan hipotesisnya dapat disusun sebagai berikut:
H_0 : $P_1 = P_2 = P$
H_1 : i) $P_1 < P_2$ atau
ii) $P_1 > P_2$ atau

iii) $P_1 \neq P_2$

$$Z = \frac{(p_1 - p_2) - \delta}{\sqrt{\frac{p_1 q_1}{n_1} + \frac{p_2 q_2}{n_2}}}$$

Jika x_1, x_2, x_3,…., x_k adalah banyaknya sukses dari n_1, n_2, n_3,…., n_k percobaan yang diambil dari k populasi binom yang saling bebas, dan apabila masing-masing ukuran sampel besar maka dengan statistik ujinya adalah

$$\chi^2 = \sum_{i} \frac{(o_i - e_i)^2}{e_i}$$

Jika x_1, x_2, x_3,…., x_k adalah banyaknya sukses dari n_1, n_2, n_3,…., n_k percobaan yang diambil dari k populasi multinom yang saling bebas, dan apabila masing-masing ukuran sampel besar maka dengan statistik ujinya adalah

$$\chi^2 = \sum_{j} \sum_{i} \frac{(o_{ij} - e_{ij})^2}{e_{ij}}$$

7.5 Soal-soal

1. Seorang peneliti menyatakan bahwa 30% dari semua wanita takut menyelam. Jika diambil sampel acak, dan 41 dari 150 wanita takut menyelam. Ujilah bahwa persentase wanita yang takut menyelam tidak sama dengan 30%.

2. Berikut adalah data banyaknya pekerja dari 3 daerah yang terambil sebagai sampel acak dalam suatu penelitian. Dalam penelitian tsb, pekerja-pekerja tadi ditanya mengenai masalah mana yang lebih serius yang dihadapi negara, pengangguran atau inflasi.

	Daerah 1	Daerah 2	Daerah 3
Pengangguran	87	73	66
Inflasi	113	77	84
Total	200	150	150

Dengan α = 0,05, ujilah perbedaan proporsi pekerja dari ketiga daerah signifikan?

Bab VIII PENGUJIAN RATA-RATA *k* POPULASI

8.1 Analisis Ragam Satu Arah (*One Way ANOVA*)

Misalkan kita mempunyai k populasi. Dari masing-masing populasi diambil sampel berukuran n. Misalkan pula bahwa k populasi itu bebas dan menyebar normal dengan rata-rata $\mu_{1,} \mu_2, \ldots, \mu_k$ dan varian sama sebesar σ^2. Kita ingin memperoleh cara bagi pengujian hipotesis
$H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \ldots = \mu_k$

H_1 : setidaknya ada satu nilai rata-rata yang berbeda dari yang lain.

Misalkan x_{ij} adalah pengamatan ke-*j* dari populasi ke-*i* dan susunan datanya seperti dalam tabel berikut :

No	Populasi						Total
	1	2	…	i	…	k	
1 2 : : n	x_{11} x_{12} : : x_{1n}	x_{21} x_{22} : : x_{2n}	… … …	x_{i1} x_{i2} : : x_{in}	… … …	x_{k1} x_{k2} : : x_{kn}	
Total Rata-rata	$T_{1.}$ $x_{1.}$	$T_{2.}$ $x_{2.}$	… …	$T_{i.}$ $x_{i.}$	… …	$T_{k.}$ $x_{k.}$	$T_{..}$ $x_{..}$

Di sini $T_{i.}$ adalah total semua pengamatan dalam sampel dari populasi ke-*i*, x_i. adalah rata-rata semua pengamatan dalam sampel dari populasi ke-*i*, *T*.. adalah total semua *nk* pengamatan, dan $x_{..}$ adalah rata-rata semua *nk* pengamatan. Setiap pengamatan dapat dituliskan dalam bentuk

$$x_{ij} = \mu_i + \epsilon_{ij}$$

Yang dalam hal ini ϵ_{ij} adalah simpangan pengamatan ke-*j* dalam sampel ke-*i* dari rata-rata populasi ke-*i*. Bentuk lain yang lebih disukai bagi persamaan ini diperoleh dengan mensubstitusikan $\mu_i = \mu + \sigma_i$, sedangkan μ adalah rata-rata semua μ_i ; artinya

$$\mu = \frac{\sum_{i=1}^{k} \mu_i}{k}$$

Oleh karena itu, kita dapat menuliskan $x_{ij} = \mu + \alpha_i + \epsilon_{ij}$ dengan ketentuan bahwa

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i = \sum_{i=1}^{k} \mu_i - \mu = 0.$$

Sudah menjadi kebiasaan untuk menyebut α_i sebagai pengaruh populasi ke-i.

Hipotesis nol bahwa semua rata-rata populasi itu sama lawan alternatifnya bahwa sekurang-kurangnya dua rata-rata tidak sama juga dapat dinyatakan oleh hipotesis berikut yang setara.
$H_0 : \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_k = 0$

H_1 : sekurang-kurangnya satu α_i tidak sama dengan nol.

Uji kita akan didasarkan pada pembandingan dua nilai dugaan yang bebas bagi varian populasi σ^2. Nilai dugaan itu dapat diperoleh dengan cara menguraikan kevarianan total menjadi dua komponen.

Varian semua pengamatan bila semua pengamatan itu tidak dikelompok-kelompokkan diberikan oleh rumus.

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n} \left(x_{ij} - x_{..}\right)^2}{nk - 1}$$

Penjumlahan ganda itu berarti bahwa kita harus menjumlahkan semua kemungkinan suku, dan ini akan diperoleh dengan mengambil *i* dari 1 sampai *k* untuk setiap nilai *j* dari 1 sampai *n*. Pembilang s^2 itu, yang disebut **jumlah kuadrat total,** mengukur kevarianan total dalam data kita. Kevarianan total ini dapat diuraikan melalui identitas berikut.
Identitas Jumlah-Kuadrat Klasifikasi Satu-Arah

$$\sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n} \left(x_{ij} - x_{..}\right)^2 = n \sum_{i=1}^{k} \left(x_{i.} - x_{..}\right)^2 + \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n} \left(x_{ij} - x_{i.}\right)^2$$

Akan lebih memudahkan bagi uraian selanjutnya bila suku-suku jumlah kuadrat itu diberi notasi berikut :

JKT = $\sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n} \left(x_{ij} - x_{..}\right)^2$ = jumlah kuadrat total

JKK = $\sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n} \left(x_{i.} - x_{..}\right)^2$ = jumlah kuadrat untuk rata-rata kolom

JKG = $\sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n} \left(x_{ij} - x_{i.}\right)^2$ = jumlah kuadrat galat

Dengan demikian, identitas jumlah kuadrat itu dapat dilambangkan melalui persamaan

JKT = JKK + JKG

Salah satu nilai dugaan bagi σ^2, yang didasarkan pada *k*-1 derajat bebas adalah

$$s_1^2 = \frac{JKK}{k - 1}$$

Nilai dugaan bagi σ^2 yang lain, yang didasarkan pada *k(n-1)* derajat bebas, adalah

$$s_2^2 = \frac{JKG}{k(n-1)}$$

Nilai dugaan ini bersifat tak bias, baik hipotesis nol benar atau salah. Kita telah melihat bahwa varian seluruh data itu, tanpa memperhatikan pengelompokkannya, yang mempunyai *nk*-1 derajat bebas adalah

$$s^2 = \frac{JKT}{nk-1}$$

yang merupakan nilai dugaan tak bias bagi σ^2 bila H_0 benar. Penting untuk diperhatikan bahwa dalil identitas jumlah kuadrat tersebut tidak hanya menguraikan jumlah kuadrat total, tetapi juga jumlah total derajat bebasnya ; artinya

$$nk-1 = k-1 + k\; n-1$$

Bila H_0 benar, rasio $f = \frac{s_1^2}{s_2^2}$

Merupakan nilai peubah acak *F* yang berdistribusi *F* dengan *k*-1 dan *k* (n-1) derajat bebas. Karena $s_1$menduga lebih σ^2. Bila H_0 salah, maka kita mempunyai uji satu arah dengan wilayah kritiknya terletak seluruhnya di ujung kanan distribusinya. Hipotesis nol H_0 ditolak pada taraf nyata α bila $f > f_\alpha\; k-1, k(n-1)$.

Tidaklah mudah menghitung JKT, JKK dan JKG dengan menggunakan rumus di atas. Dalam prakteknya, kita menghitung JKT dan JKK terlebih dahulu dan kemudian dengan memanfaatkan dalil identitas jumlah kuadrat, JKG diperoleh melalui pengurangan.
Rumus Hitung Jumlah Kuadrat

$$JKT = \sum_{i-1}^{k}\sum_{j=1}^{n} x_{ij}^2 - \frac{T_{..}^2}{nk}$$

$$JKK = \frac{\sum_{i=1}^{k} T_{i.}^2}{n} - \frac{T_{..}^2}{nk}$$

$$JKG = JKT - JKK$$

Analisis Varian bagi Klasifikasi Satu-Arah

Sumber Kevarianan	Jumlah	Derajat Bebas	Kuadrat Tengah	f Hitung
Rata-rata kolom	JKK	k-1	$s_1^2 = \frac{JKK}{k-1}$	$\frac{s_1^2}{s_2^2}$
Galat	JKG	k(n-1)	$s_2^2 = \frac{JKG}{k(n-1)}$	
Total	JKT	nk-1		

Contoh 8.1 :

Dari 5 tablet sakit kepala yang diberikan kepada 25 orang dicatat berapa lama tablet-tablet itu dapat mengurangi rasa sakit. Ke-25 orang itu dibagi secara acak ke dalam 5 grup dan masing-masing grup diberi satu jenis tablet. Data yang diperoleh sebagai berikut ;

No	Tablet				
	A	B	C	D	E
1	5	9	3	2	7
2	4	7	5	3	6
3	8	8	2	4	9
4	6	6	3	1	4
5	3	9	7	4	7
Total	26	39	20	14	33
Rata-rata	5.2	7.8	4.0	2.8	6.6

Lakukan analisis varian, dan ujilah hipotesis pada taraf nyata 0.05 bahwa rata-rata lamanya tablet itu mengurangi rasa sakit adalah sama untuk kelima tablet sakit kepala itu.
Jawab :

1. $H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4 = \mu_5$

   H_1 : sekurang-kurangnya dua rata-rata tidak sama

2. α = 0,05

3. Wilayah kritik : $f > f_{0,05\,;(4,20)}$

   $f > 2,87$

4. Statistik hitung :

$$JKT = 5^2 + 4^2 + \cdots + 7^2 - \frac{132^2}{25}$$

$$= 834 - 696{,}960 = 137{,}040$$

$$JKK = \frac{26^2 + 39^2 + \cdots + 33^2}{5} - \frac{132^2}{25}$$

$$= 776{,}400 - 696{,}960 = 79{,}440$$

$$JKG = 137{,}040 - 79{,}440 = 57{,}600$$

Sumber Kevarianan	Jumlah Kuadrat	Derajat Bebas	Kuadrat Tengah	f Hitung
Rata-rata kolom	79,440	4	19,860	6,90
Galat	57,600	20	2,880	
Total	137, 040	24		

5. Keputusan : tolak H_0

6. Kesimpulan : dengan tingkat keyakinan 95% dapat disimpulkan bahwa rata-rata lamanya obat tersebut dapat mengurangi rasa sakit tidak sama untuk kelima merk tablet sakit kepala.

8.1.2 Jumlah Sampel Tiap Populasi Tidak Sama

Misalkan k buah sampel acak itu masing-masing berukuran $n_{1,}n_2, \ldots, n_k$ dan

$$N = \sum_{i=1}^{k} n_i$$

Maka rumus hitung bagi JKT, JKK dan JKG menjadi

$$JKT = \sum_{i-1}^{k} \sum_{j=1}^{n_i} x_{ij}^2 - \frac{T_{..}^2}{N}$$

$$JKK = \sum_{i=1}^{k} \frac{T_{i.}^2}{n_i} - \frac{T_{..}^2}{N}$$

$$JKG = JKT - JKK$$

dengan derajat bebas N-1 untuk JKT, k-1 untuk JKK dan N-k untuk JKG.

Contoh 8.2 :

Ada yang mengatakan bahwa mobil mahal dirakit lebih berhati-hati dibandingkan dengan mobil murah. Untuk menyelidiki apakah pendapat ini beralasan, diambil tiga tipe mobil yaitu mobil mewah besar A, sedan berukuran sedang B, dan sedan subkompak hatchback C untuk diselidiki berapa banyaknya bagian yang cacat. Semua mobil itu diproduksi oleh pabrik yang sama. Data banyaknya yang cacat dari beberapa mobil bagi ketiga tipe itu dicantumkan dalam tabel berikut :

No	Model		
	A	B	C
1	4	5	8
2	7	1	6
3	6	3	8
4	6	5	9
5		3	5
6		4	
Total	23	21	36

Ujilah hipotesis pada taraf nyata 0,05 bahwa rata-rata banyaknya bagian yang cacat adalah sama untuk ketiga tipe mobil tersebut.

Jawab :

1. $H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \mu_3$

   H_1 : sekurang-kurangnya dua rata-rata tidak sama

2. α = 0,05

3. Wilayah kritik : $f > f_{0,05\,;(2,12)}$

   $f > 3{,}89$

4. Statistik hitung :

$JKT = 4^2 + 7^2 + \cdots + 5^2 - \frac{80^2}{15}$ = 65,333

$$JKK = \frac{23^2}{4} + \frac{21^2}{6} + \frac{36^2}{5} - \frac{80^2}{15} = 38{,}283$$

$$JKG = 65{,}333 - 38{,}283 = 27{,}050$$

Sumber Kevarianan	Jumlah Kuadrat	Derajat Bebas	Kuadrat Tengah	f Hitung
Rata-rata kolom	38,283	2	19,142	8,49
Galat	27,050	12	2,254	
Total	65,333	14		

5. Keputusan : tolak H_0

$$f_{hitung} = 8{,}49 > f_{tabel} = 3{,}89$$

6. Kesimpulan : dengan tingkat keyakinan 95% dapat disimpulkan bahwa rata-rata banyaknya bagian yang cacat untuk ketiga model mobil tersebut tidak sama.

8.2 Uji Berganda

Uji berganda adalah uji yang digunakan untuk menentukan pasangan rata-rata populasi yang berbeda. Syarat untuk melakukan uji ini adalah **uji Anova yang kita lakukan mempunyai keputusan Tolak Ho.** Uji yang dapat digunakan adalah Uji Tukey dan Uji Duncan.

Uji tukey:

Untuk menentukan apakah rata-rata populasi berbeda, kita menggunakan sebuah angka kritis T. Jika selisih dua rata-rata sampel dari dua populasi yang berbeda lebih dari T, maka dapat disimpulkan bahwa dua rata-rata populasi tersebut adalah berbeda.

Metode Tukey lebih efektif jika diaplikasikan pada jumlah yang sama jika dalam sebuah experimen, maka sebagian kecil observasi akan hilang, tapi keseimbangan diantara ukuran sampel akan tetap dipertahankan. Ini yang menjadi kelebihan metode Tukey.

Langkah-langkah Pengujian Tukey

1) Tentukan H_o dan H_1 –nya
   Ho : $\mu_i = \mu_j$
   H1 : $\mu_i \neq \mu_j$
   Ket : i≠ j
2) Tentukan α
3) Hitung rata-rata sample dari tiap populasi, lalu urutkan dari yang terkecil ke yang terbesar.
4) Hitung nilai T (nilai kritis)

$$T = q_{\alpha,k,v} S_{\bar{x}} = q_{\alpha,k,v} \sqrt{\frac{MSE}{2}\left(\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_j}\right)}$$

jika ukuran sampel sama maka nilai

$$T = q_{\alpha,k,v}\sqrt{\frac{MSE}{n}}$$

Dengan
k = banyaknya populasi
v = derajat bebas MSE yaitu N-k
$q_{\alpha,k,v}$ didapat dari *table studentized range*
5) Statistik Uji:

$$d = \left|\overline{X}_i - \overline{X}_j\right|$$

Tolak Ho jika $d > T$, artinya minimal ada sepasang nilai tengah yang berbeda secara nyata.
6) Lakukan perbandingan pasangan-pasangan nilai tengah tersebut

Uji Duncan

Langkah-langkah Pengujian Duncan
1. Rata – rata perlakuan diurutkan dari yang terkecil hingga yang terbesar
2. Hitung selisih rata – rata terbesar dengan terkecil dan bandingkan dengan R_k
3. Hitung selisih rata – rata terbesar dengan rata – rata kedua terkecil bandingkan dengan R_{k-1}

Daerah Kritis
Tolak H_0 jika $\overline{Y_{i.}} - \overline{Y_{j.}} > R_p$
dimana

R_p : Wilayah nyata terkecil
: $r_\alpha(p, f) S_{\overline{Y_i}}$

p : $2, 3, ..., k$

f : $\sum_{i=1}^{k} n_i - k$

$S_{\overline{Y_i}}$: $\sqrt{\frac{KTE}{n}}$ $n_i = n$

n : Banyaknya observasi tiap perlakuan

$r_\alpha(p, f) S_{\overline{Y_i}}$: Wilayah terstudentkan nyata terkecil (Lihat Tabel DUNCAN)

8.3 Rangkuman

Jika peubah acak X_1~ N(μ_1,σ_1), X_2~ N(μ_2,σ_2),..., X_k~ N(μ_k,σ_k)yang saling bebas, maka untuk mengetahui kesamaan varian antar populasi dengan varian populasi lainnya digunakan hipotesis sebagai berikut:

$H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \ldots = \mu_k$

H_1 : setidaknya ada satu nilai rata-rata yang berbeda dari yang lain.

Dengan stastisti ujinya adalah $f = \frac{s_1^2}{s_2^2}$

Hipotesis nol H_0 ditolak pada taraf nyata α bila

$f > f_\alpha \; k-1, k(n-1)$.

8.4 Soal

Seorang ahli pemasaran berpendapat bahwa tidak ada perbedaan rata-rata harga suatu jenis barang dari tiga pasar, dengan alternatif ada perbedaan. Untuk keperluan pengujian pendapatnya itu dilakukan penelitian terhadap harga barang per minggu, selama 4 minggu dari 3 pasar (k=3,n=4,$\alpha = 0{,}05$) dengan datanya sebagai berikut:

	pasar	
1	2	3
22	22	25
21	25	29
26	24	28
23	25	30

Dan dengan menggunakan Ui Duncan,tentukan pasangan rata-rata yang berbeda.

Bab IX Penutup

9.1 Simpulan

Data dan informasi statistik yang didapatkan dari hasil survei berguna untuk melihat perubahan-perubahan, menganalisa dan akhirnya sebagai dasar menentukan kebijakan-kebijakan.

Sebelum melakukan analisa dan interpretasi terhadap data, perlu dipahami pengetahuan mengenai distribusi teoritis maupun distribusi samplingnya. Berikutnya adalah perlu diketahui ciri-ciri penduga yang baik berikut jenis kesalahannya. Selanjutnya adalah penduga tersebut dilakukan pengujian, baik untuk satu populasi maupun lebih dari satu populasi.

9.2 Soal dan Pembahasan

1. Sebuah sampel yang terdiri dari 9 ubinan memiliki rata-rata hasil sebesar 100 kg bawang merah dengan standar deviasi 15 kg. Tentukan interval keyakinan sebesar 98 persen bagi rata-rata hasil populasinya.
2. Sembilan sampel yang terdiri dari suatu larutan telah dianalisis secara cermat guna menentukan konsentrasi tembaganya dinyatakan dalam satuan gram per liter. Rata-ratanya ternyata sebesar 9.50 dan varian sampelnya 0.0064. Tentukan interval keyakinan sebesar 95 persen guna menduga konsentrasi larutan yang tidak diketahui. Berilah alasan dan komentar Saudara tentang hasil hitungan Saudara.
3. Sebuah sampel yang terdiri dari 100 petani, 64 orang merupakan pemilik tanah. Tentukan interval keyakinan sebesar 95 persen guna menduga proporsi populasi petani yang juga pemilik tanah. Gunakan pendekatan secara normal terhadap distribusi binomialnya.
4. Data hasil survei tentang rata-rata pendapatan keluarga per bulan (dalam ribuan rupiah) dari dua kota A dan B menghasilkan catatan sebagai berikut:
   Sampel Kota A: n=100, rata-rata=5.900, s^2=9.050
   Sampel Kota B: n=120, rata-rata=5.800, s^2=8.700
   Berapa beda rata-rata pendapatan keluarga di kota A dan B, jelaskan makna hitungan tersebut.
5. Suatu populasi normal memiliki varian =100. Sebuah sampel sebesar 25 dan dipilih dari populasi di atas memiliki rata-rata=17 dan standar deviasi=16. Dapatkah ditarik kesimpulan bahwa rata-rata populasi kurang dari 25? Gunakan α=0.05.

6. Suatu sampel sebesar 25 yang dipilih dari populasi normal ternyata memiliki rata-rata sampel sebesar 33 dan variannya 100. Jika α=0.01, apakah yakin bahwa rata-rata populasinya tidak akan lebih besar dari 26? .

7. Sebuah sampel yang terdiri dari 15 cat kaleng memiliki berat kotor (dalam kg per kaleng) seperti diberikan berikut ini: 1.21; 1.21; 1.23; 1.20; 1.21; 1.24; 1.22; 1.24; 1.21; 1.19; 1.19; 1.18; 1.19; 1.23; 1.18. Jika taraf nyata 1 persen, dapatkah diyakini bahwa populasi cat dalam kaleng secara rata-rata memiliki isi berat kotor 1.2 kg per kaleng?

8. Andaikan 2 sampel acak masing-masing sekitar 10 dan 12 dipilih dari 2 populasi normal yang independen dan andaikan hasil sampelnya rata-rata sampel pertama=20, rata-rata sampel kedua=24, standar deviasi sampel pertama=5 dan standar deviasi sampel kedua=6. Apakah rata-rata populasi pertama dan kedua sama? Gunakan α=0.05, hitung dengan asumsi varian kedua populasi sama dan tidak sama.

9. Data di bawah ini menyajikan pertambahan berat 10 ekor tikus di mana tikus-tikus tersebut semula memperoleh proteinnya dari kacang mentah. Penelitian dilakukan dengan mengganti makanan tikus-tikus tersebut dengan kacang rebus. Apakah kacang rebus mempunyai efek terhadap pertambahan berat? Gunakan α=0.01.

Mentah	61	60	56	63	56	63	59	56	44	61
Rebus	55	54	47	59	51	61	57	54	62	58

10. Sebuah sampel sebesar 64 dipilih dari populasi hasil pembuatan dadu. Setelah diadakan penelitian, ternyata 8 butir dadu dinyatakan tidak memenuhi ketentuan kualitas yang diharapkan. Berdasarkan sampel di atas, dapatkah dipercaya bahwa lebih dari 10 persen hasil pembuatan dadu di atas sebetulnya tidak memenuhi kualitas sesuai yang diharapkan? α=0.05.

11. Dalam bulan Januari 40 persen dari 2000 dealer mesin cuci menyatakan bahwa mereka merencanakan pertambahan jumlah pesanan mesin cuci. Dalam bulan Maret, ada kecenderungan guna mempunyai bahwa persentasi di atas akan bertambah. Sebuah sampel yang terdiri dari 400 dealer telah dipilih dari seluruh dealer di atas dan proporsi sampelnya ternyata sebesar 46 persen yang menambah pesanannya. Apakah pertambahan tersebut cukup meyakinkan? α=0.05.

Jawaban

1. Diketahui : n = 9
   x = 100 kg
   s = 15 kg
   α = 0,02
   $t_{(0,01\ ;\ 8)}$ = 2,896

   Maka interval keyakinan 98 persen adalah :

$$P\left(100 - 2{,}896 \times \frac{15}{\sqrt{9}} < \mu < 100 + 2{,}896 \times \frac{15}{\sqrt{9}}\right) = 0{,}98$$

$$P\left(85{,}52 < \mu < 114{,}48\right) = 0{,}98$$

   Jadi, dengan tingkat keyakinan 98 persen rata-rata hasil bawang merah antara 85,52 kg sampai dengan 114,48 kg.

2. Diketahui : n = 9
   x = 9,50
   s = 0,0064
   α = 0,05
   $t_{(0,025\ ;\ 8)}$ = 2,306
   Maka interval keyakinan 95 persen adalah :

$$P\left(9{,}50 - 2{,}306 \times \frac{0{,}0064}{\sqrt{9}} < \mu < 9{,}50 + 2{,}306 \times \frac{0{,}0064}{\sqrt{9}}\right) = 0{,}95$$

$$P\left(9{,}495 < \mu < 9{,}505\right) = 0{,}95$$

   Jadi, dengan tingkat keyakinan 95 persen rata-rata konsentrasi tembaga dalam suatu larutan antara 9,495 gram per liter sampai 9,505 gram per liter.

3. Diketahui : $p = \frac{64}{100} = 0{,}64$
   α = 0,05
   $Z_{0,025}$ = 1,96
   Maka interval keyakinan 95 persen adalah :

$$P\left(0{,}64 - 1{,}96\sqrt{\frac{0{,}64\ 0{,}36}{100}} < p < 0{,}64 + 1{,}96\sqrt{\frac{0{,}64\ 0{,}36}{100}}\right) = 0{,}95$$

$$P\left(0{,}55 < p < 0{,}73\right) = 0{,}95$$

Jadi, dengan tingkat keyakinan 95 persen proporsi populasi petani yang juga pemilik tanah antara 55 sampai 73 persen.

4. Diketahui : $n_1 = 100$; $x_1 = 5.900$; $s_1^2 = 9.050$
   $n_2 = 120;\ x_2 = 5.800$; $s_2^2 = 8.700$

   $Z_{0,025} = 1{,}96$

   Maka interval keyakinan 95 persen adalah :

$$P\left(100 - 1{,}96 \times \sqrt{\frac{9.050}{100} + \frac{8700}{120}} < \mu_1 - \mu_2 100 + 1{,}96 \times \sqrt{\frac{9.050}{100} + \frac{8700}{120}}\right)$$
$$= 0{,}95$$

$$P\left(74{,}98 < \mu_1 - \mu_2 < 125{,}02\right) = 0{,}95$$

   Jadi, dengan tingkat keyakinan 95 persen dapat disimpulkan bahwa terdapat perbedaan antara rata-rata pendapatan keluarga dari kota A dan kota B. Perbedaan tersebut berkisar antara Rp 74.980,00 sampai dengan Rp 125.020,00.

5. Diketahui : $\sigma^2 = 100$; $n = 25$; $x = 17$; $s = 16$
   Jawab :
   1. Penentuan hipotesis

      $H_0: \mu = 25$

      $H_1: \mu < 25$

   2. Taraf uji α = 5% = 0,05
   3. Statistik uji :

$$t_{hitung} = \frac{x - \mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}} = \frac{17 - 25}{\frac{16}{\sqrt{25}}} = -2{,}5$$

   4. Daerah kritis : $t_{\alpha;n-1} = t_{0,05\,;\,24} = 1{,}711$
   5. Keputusan : $t_{hitung} < t_{tabel}$ maka tolak H_0.
   6. Kesimpulan : dengan taraf uji 5% dapat disimpulkan bahwa rata-rata populasi memang kurang dari 25.

6. Diketahui : $n = 25$; $x = 33$; $s^2 = 100$
   Jawab :
   1. Penentuan hipotesis

      $H_0 : \mu = 27$

      $H_1 : \mu < 27$

   2. Taraf uji α = 1% = 0,01
   3. Statistik uji :

      $$t_{hitung} = \frac{x - \mu}{s/\sqrt{n}} = \frac{33 - 27}{10/\sqrt{25}} = 3$$

   4. Daerah kritis : tα;n-1 = t0,01 ; 24 = 2,492
   5. Keputusan : $t_{hitung} > t_{tabel}$ maka tidak tolak H_0.
   6. Kesimpulan : dengan taraf uji 1% dapat disimpulkan data pengamatan belum cukup untuk mendukung pendapat bahwa rata-rata populasinya tidak akan lebih besar dari 26.

7. Diketahui : $n = 15$; $x = 1{,}21$; $s^2 = 0{,}0004$
   Jawab :
   1. Penentuan hipotesis

      $H_0 : \mu = 1{,}2$

      $H_1 : \mu \neq 1{,}2$

   2. Taraf uji α = 1% = 0,01
   3. Statistik uji :

      $$t_{hitung} = \frac{x - \mu}{s/\sqrt{n}} = \frac{1{,}21 - 1{,}2}{0{,}02/\sqrt{15}} = 1{,}94$$

   4. Daerah kritis : $t_{\alpha/2;n-1} = t_{0,005\,;\,14} = 2{,}977$
   5. Keputusan : $t_{hitung} < t_{tabel}$ maka tidak tolak H_0.
   6. Kesimpulan : dengan taraf uji 1% dapat disimpulkan bahwa belum cukup bukti dari data pengamatan untuk mendukung pendapat bahwa rata-rata populasi cat dalam kaleng memiliki isi dengan berat kotor 1,2 kg per kaleng.

8. Diketahui : $n_1 = 10$; $x_1 = 20$; $s_1^2 = 5$
$n_2 = 12$; $x_2 = 24$; $s_2^2 = 6$

a. Varian populasi sama tetapi tidak diketahui

1. Penentuan hipotesis

$H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0$
$H_1: \mu_1 - \mu_2 \neq 0$

2. Taraf uji α = 5% = 0,05

3. Statistik uji :

$$S_p = \frac{n_1 - 1\ s_1^2 + \ n_2 - 1\ s_2^2}{n_1 + n_2 - 2} = \frac{9\ 5 + \ 11\ 6}{5 + 6 - 2} = 12{,}33$$

$$t_{hitung} = \frac{x_1 - x_2\ - d_0}{S_p\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} = \frac{20 - 24\ - 0}{12{,}33\sqrt{\frac{1}{10} + \frac{1}{12}}} = -0{,}76$$

dengan $v = n_1 + n_2 - 2 = 5 + 6 - 2 = 9$

4. Daerah kritis : $t_{\alpha/2;v} = t_{0,025\ ;\ 9} = 2{,}262$
5. Keputusan : $t_{hitung} = -0{,}76 > t_{tabel} = -2{,}262$ maka tidak tolak H_0.
6. Kesimpulan : dengan taraf uji 5% dapat disimpulkan data pengamatan belum cukup untuk mendukung pendapat bahwa terdapat perbedaan rata-rata antara populasi satu dengan populasi dua.

b. Varian populasi tidak sama dan tidak diketahui

1. Penentuan hipotesis

$H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0$

$H_1: \mu_1 - \mu_2 \neq 0$

2. Taraf uji α = 5% = 0,05
3. Statistik uji :

$$t_{hitung} = \frac{x_1 - x_2\ - d_0}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}} = \frac{20 - 24\ - 0}{\sqrt{\frac{5^2}{10} + \frac{6^2}{12}}} = -1{,}71$$

$$\text{dengan} \quad v = \frac{\left(\frac{s_1^2}{n_1}+\frac{s_2^2}{n_2}\right)^2}{\frac{\left(\frac{s_1^2}{n_1}\right)^2}{n_1-1}+\frac{\left(\frac{s_2^2}{n_2}\right)^2}{n_2-1}} = \frac{\left(\frac{5}{10}+\frac{6}{12}\right)^2}{\frac{\left(\frac{5}{10}\right)^2}{10-1}+\frac{\left(\frac{6}{12}\right)^2}{12-1}} = 19{,}8 \approx 20$$

4. Daerah kritis : $t_{\alpha/2;v} = t_{0{,}025\,;\,20} = 2{,}086$
5. Keputusan : $t_{hitung} = -1{,}71 > t_{tabel} = -2{,}086$ maka tidak tolak H_0.
6. Kesimpulan : dengan taraf uji 5% dapat disimpulkan data pengamatan tidak mendukung pendapat bahwa terdapat perbedaan rata-rata antara populasi satu dengan populasi dua.

9.3 Tindak lanjut

Berbekal hasil belajar mata diklat Pengujian Hipotesis dengan mempergunakan modul ini, diharapkan peserta dapat menerapkan pengujian hipotesis yang tepat jika di unit kerjanya atau instansinya melakukan kegiatan analisis data melalui metode statistik.

Daftar Pustaka

Walpole, Ronald E. 1992. *Pengantar Statistika.* Jakarta : PT. Gramedia Pustaka Utama.

Walpole, Ronald E dan Raymond H. Myers. 1995. *Ilmu Peluang dan Statistika untuk Insinyur dan Ilmuwan.* Bandung : Penerbit ITB.