OLIMPIADE NASIONAL MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM PERGURUAN TINGGI 2017 (ONMIPA-PT) Tingkat Nasional

Bidang Fisika: FISIKA MODERN & MEKANIKA KUANTUM (Tes 4)

16 Mei 2017

Waktu: 120 menit

Petunjuk Pengerjaan :

1. Tes **Fisika Modern dan Mekanika Kuantum** ini hanya terdiri dari soal esay. Jumlah soal semuanya 4 nomor. Masing-masing soal memiliki bobot nilai seperti tertulis di awal soal.
2. Untuk setiap soal telah disediakan ruang kosong yang cukup banyak karena Anda diharapkan mengerjakannya dengan langkah-langkah yang cukup elaboratif atau lebih panjang tapi tetap padat dan tepat.
3. Jika tempat jawaban yang disediakan tidak mencukupi, Anda boleh menggunakan halaman di belakangnya.
4. Waktu tes adalah 2 jam dan Anda boleh menyelesaikan soal-soal manapun terlebih dahulu sesuka Anda.
5. Tuliskan jawaban Anda dengan menggunakan **pena** atau **pulpen**. Pensil hanya boleh digunakan untuk membuat gambar atau sketsa.
6. Anda diperbolehkan menggunakan (saintifik) kalkulator.
7. Di akhir tes, kumpulkan berkas soal ini secara utuh. Jangan lupa mencantumkan identitas Anda dengan menuliskan nomor peserta disetiap halaman.

Korektor 1.

No.	1	2	3	4	Σ
Nilai					

Korektor 2.

No.	1	2	3	4	Σ
Nilai					

1. Konstanta Fundamental

Speed of light in free space	$c = 2.99792458 \times 10^{8}$ m s^{-1}
Planck's constant	$\hbar = 6.58211889(26) \times 10^{-16}$ eV s
	$\hbar = 1.054571596(82) \times 10^{-34}$ J s
Electron charge	$e = 1.602176462(63) \times 10^{-19}$ C
Electron mass	$m_0 = 9.10938188(72) \times 10^{-31}$ kg
Neutron mass	$m_n = 1.67492716(13) \times 10^{-27}$ kg
Proton mass	$m_p = 1.67262158(13) \times 10^{-27}$ kg
Boltzmann constant	$k_B = 1.3806503(24) \times 10^{-23}$ J K^{-1}
	$k_B = 8.617342(15) \times 10^{-5}$ eV K^{-1}
Permittivity of free space	$\varepsilon_0 = 8.8541878 \times 10^{-12}$ F m^{-1}
Permeability of free space	$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ H m^{-1}
Speed of light in free space	$c = 1/\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}$
Avagadro's number	$N_A = 6.02214199(79) \times 10^{23}$ mol^{-1}
Bohr radius	$a_B = 0.52917721(19) \times 10^{-10}$ m

2. Beberapa bentuk khusus fungsi harmonik bola $Y_\ell^m(\theta,\phi) \equiv Y_\ell^m$:

$$Y_0^0 = \sqrt{\tfrac{1}{4\pi}}, \qquad Y_1^0 = \sqrt{\tfrac{3}{4\pi}}\cos\theta,$$

$$Y_1^{\pm 1} = \mp\sqrt{\tfrac{3}{8\pi}}\sin\theta\exp(\pm i\phi), \qquad Y_2^0 = \sqrt{\tfrac{5}{16\pi}}(3\cos^2\theta - 1),$$

$$Y_2^{\pm 1} = \mp\sqrt{\tfrac{15}{8\pi}}\sin\theta\cos\theta\exp(\pm i\phi), \qquad Y_2^{\pm 2} = \sqrt{\tfrac{15}{32\pi}}\sin^2\theta\exp(\pm 2i\phi).$$

$$E_n = -\left[\frac{\mu}{2\hbar^2}\left(\frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2\right]\frac{1}{n^2} = -13.6\frac{Z}{n^2}\text{ eV} \qquad a_0 = \frac{4\pi\varepsilon_0\hbar^2}{\mu e^2} \qquad \frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_e} + \frac{1}{M_{nucleus}}$$

$$R_{10}(r) = 2\left(\frac{Z}{a_0}\right)^{\frac{3}{2}}\exp\left[-\frac{Zr}{a_0}\right] \qquad R_{20}(r) = 2\left(\frac{Z}{2a_0}\right)^{\frac{3}{2}}\left(1 - \frac{Zr}{2a_0}\right)\exp\left[-\frac{Zr}{2a_0}\right]$$

$$R_{21}(r) = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{Z}{2a_0}\right)^{\frac{3}{2}}\frac{Zr}{a_0}\exp\left[-\frac{Zr}{2a_0}\right]$$

$$\int_0^\infty dx\, x^m \exp\left(-ax^2\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)}{2a^{(m+1)/2}} \quad ; \quad \Gamma(n+1) = n\Gamma(n)\,, \Gamma(n+1) = n!\,, \Gamma\left(\tfrac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

so that $\displaystyle\int_0^\infty dx\, x^{2n} \exp\left(-\lambda^2 x^2\right) = \frac{1.3.5\ldots(2n+1)\sqrt{\pi}}{2^n \lambda^{2n+1}}$

$$\int_0^\infty dx\, x^n e^{-\lambda x} = \frac{n!}{\lambda^{n+1}}$$

$$\int dx \sqrt{A+Bx} = \frac{2}{3B}\left(A+Bx\right)^{\frac{3}{2}} \qquad \int dx\, x\sqrt{A+Bx} = -\frac{2(2A-3Bx)\left(A+Bx\right)^{3/2}}{15B^2}$$

OLIMPIADE NASIONAL MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM PERGURUAN TINGGI 2017 (ONMIPA-PT)

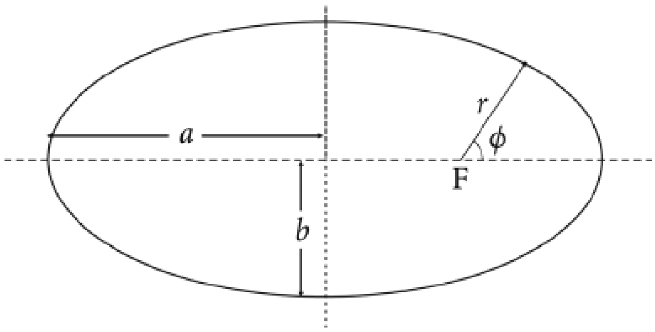
Bidang Fisika: Fisika Modern & Mekanika Kuantum (Tes 4)

16 Mei 2017

Waktu: 120 menit

Soal Uraian/Essay:

1. **[20 poin]** Tinjau sebuah model atom H dimana elektron mengelilingi proton dengan lintasan berbentuk elips seperti yang ditunjukkan pada gambar di bawah ini.



Proton sebagai inti atom terletak di titik fokus dengan $Z = 1$, sedangkan a dan b masing-masing adalah sumbu semi-mayor dan sumbu semi-minor. Sekitar tahun 1915 W. Wilson, J. Ishiwara, dan A. Sommerfeld secara terpisah mengusulkan untuk model ini berlaku hubungan:

$$\oint p_r \, dr = n_r h \qquad (1)$$

$$\oint p_\phi \, d\phi = n_\phi h \qquad (2)$$

dimana p_r dan p_ϕ masing-masing adalah momentum radial dan momentum angular, sedangkan n_r dan n_ϕ masing-masing adalah bilangan kuantum radial dan bilangan kuantum angular. Kuantitas h adalah konstanta Planck. Dengan menggunakan mekanika Newton dapat diketahui hubungan antara koordinat radial r dan koordinat angular ϕ yang menggambarkan lintasan elips adalah

$$r(\phi) = \frac{a(1-\varepsilon^2)}{1+\varepsilon\cos\phi} \tag{3}$$

dimana ε adalah eksentrisitas elips, maka tentukanlah:

(a) **[7 poin]** hubungan antara bilangan kuantum n_r dan n_ϕ,

(b) **[4 poin]** perbandingan antara b dan a dinyatakan dengan bilangan kuantum n_r dan n_ϕ,

(c) **[9 poin]** energi total sistem dinyatakan dengan bilangan kuantum n_r dan n_ϕ.

Jawab:

2. **[20 poin]** Tinjau sebuah partikel bebas yang bergerak di satu dimensi. Pada saat $t=0$, diketahui bahwa fungsi gelombangnya dapat dinyatakan dalam

$$\psi(x,0)=\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{1/4} e^{ik_0x-\alpha x^2/2}$$

dengan α dan k_0 adalah parameter real. Tentukan:

(a). **[4 poin]** fungsi gelombang dalam ruang momentum $\tilde{\psi}(k,t)$ untuk semua $t>0$,

(b). **[4 poin]** rapat probabilitas momentum $\Pi(k)$ dan tentukan pula besar momentum dengan peluang terbesar,

(c). **[4 poin]** fungsi gelombang dalam ruang posisi $\psi(x,t)$ untuk semua $t>0$,

(d). **[4 poin]** rapat probabilitas $P(x,t)$, dan

(e). **[4 poin]** nilai harap (*expectation value*) untuk posisi $\langle x\rangle_t$ dan untuk momentum $\langle p\rangle_t$.

Jawab:

3. **[30 poin]** Sebuah sistem kuantum diketahui dapat digambarkan dengan operator Hamilton berikut

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(x,y,z)$$

dimana $\hat{\vec{p}} = -i\hbar\vec{\nabla}$ adalah operator momentum dan $V(x,y,z)$ adalah potensial skalar. Diketahui ada sebuah operator lain, yaitu $\hat{A}$.

(a) **[11 poin]** Tentukan syarat dan sifatnya agar operator $\hat{A}$ menjadi fungsi pembangkit simetri bagi $\hat{H}$.

Kemudian, bila diketahui bahwa potensial skalar $V(x,y,z)$ bersimetri bola, yaitu $V(x,y,z) = V(r)$ dimana r adalah koordinat radial $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

(b) **[19 poin]** Tentukan semua operator yang merupakan fungsi pembangkit dari simetri ini .

Jawab:

4. **[30 poin]** Sebuah partikel bermassa *m* dan bermuatan listrik *q* hanya dapat bergerak pada satu dimensi (sumbu *x*). Partikel berada pada daerah bermedan elektrostatik yang seragam $\mathcal{E}$ dan dipengaruhi juga oleh potensial osilator harmonik sehingga operator Hamiltonian untuk sistem tersebut dapat dinyatakan oleh:

$$\begin{aligned} H &= H_{\mathrm{OH}} - q\mathcal{E}x \\ &= \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}x^2 - q\mathcal{E}x \end{aligned}$$

Misalkan $|n\rangle$ menyatakan eigenstate energi untuk operator Hamiltonian H_{OH} dan $|\bar{n}\rangle$ menyatakan eigenstate energi untuk Hamiltonian total H.

Diketahui, fungsi gelombang untuk osilator harmonik adalah:

$$(\psi_{\mathrm{OH}})_n(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} H_n\left(x\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\right)$$

dengan $H_n(\xi)$ adalah polinom Hermite. Tentukan:

(a). **[10 poin]** energi eigen dan fungsi gelombang bebas waktu untuk sistem tersebut,

(b). **[5 poin]** energi eigenstate $|\bar{n}\rangle$ dinyatakan dalam energi eigenstate dari H_{OH}, $|n\rangle$,

(c). **[15 poin]** probabilitas keadaan $|0\rangle$ di keadaan dasar Hamiltonian total (keadaan dasar Hamiltonian total adalah $|\bar{0}\rangle$), jika pada saat $t=0$ sistem memenuhi $|\psi(0)\rangle = |0\rangle$.

Jawab: