

PERSAMAAN DAN FUNGSI KUADRAT

Oleh Shahibul Ahyan

A. Bentuk Umum Persamaan Kuadrat

Definisi : Misalkan $a, b, c \in \mathbb{R}$ dan $a \neq 0$, maka persamaan yang berbentuk

$$ax^2 + bx + c = 0 \text{ dinamakan persamaan kuadrat dalam peubah } x.$$

Berkaitan dengan nilai-nilai dari a, b, c dikenal beberapa persamaan kuadrat diantaranya adalah :

1. Jika $a = 1$, maka persamaan menjadi $x^2 + bx + c = 0$ dan persamaan seperti ini disebut Persamaan Kuadrat Biasa.
2. Jika $b = 0$, maka persamaan menjadi $x^2 + c = 0$ dan persamaan seperti ini disebut Persamaan Kuadrat Sempurna.
3. Jika $c = 0$, maka persamaan menjadi $x^2 + bx = 0$ dan persamaan seperti ini disebut Persamaan Kuadrat Tak Lengkap.
4. Jika a, b, c bilangan-bilangan real, maka $ax^2 + bx + c = 0$ disebut Persamaan Kuadrat Real.
5. Jika a, b, c bilangan-bilangan rasional, maka $ax^2 + bx + c = 0$ disebut Persamaan Kuadrat Rasional.

B. Akar – Akar Persamaan Kuadrat

Ada beberapa cara untuk menentukan akar persamaan kuadrat, diantaranya :

1. Dengan Pemfaktoran

Menentukan akar-akar persamaan kuadrat dengan cara pemfaktoran menggunakan sebuah sifat yang berlaku pada sistem bilangan real. Sifat itu dapat dinyatakan sebagai berikut :

Jika $a, b \in \mathbb{R}$ dan berlaku $a - b = 0$, maka $a = 0$ atau $b = 0$.

Catatan : Pengertian $a = 0$ atau $b = 0$ dapat ditafsirkan sebagai berikut :

- a). $a = 0$ dan $b \neq 0$ b). $a \neq 0$ dan $b = 0$ c). $a = 0$ dan $b = 0$

Menentukan akar-akar persamaan kuadrat dengan pemfaktoran artinya menyelesaikan persamaan kuadrat dengan mengubahnya menjadi bentuk perkalian.

a. Untuk $a = 1$

$$x^2 + bx + c = 0$$

$$(x + x_1)(x + x_2) = 0 \text{ dengan } x_1 + x_2 = b \text{ dan } x_1 \cdot x_2 = c$$

$$x + x_1 = 0 \text{ atau } x + x_2 = 0$$

$$x = -x_1 \text{ atau } x = -x_2$$

Jadi, akar-akar dari $x^2 + bx + c = 0$ adalah $-x_1$ dan $-x_2$

Contoh : $x^2 - 2x - 8 = 0$

$$(x - 4)(x + 2) = 0$$

$$x = 4 \text{ atau } x = -2$$

Jadi, akar-akar dari $x^2 - 2x - 8 = 0$ adalah -2 dan 4 .

b. Untuk $a \neq 1$

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$\frac{(ax + x_1)(ax + x_2)}{a} = 0, \text{ dengan } x_1 + x_2 = b \text{ dan } x_1 \cdot x_2 = ac$$

$$ax + x_1 = 0 \text{ atau } ax + x_2 = 0$$

$$x = \frac{-x_1}{a} \text{ atau } x = \frac{-x_2}{a}$$

Jadi, akar-akar dari $ax^2 + bx + c = 0$ adalah $\frac{-x_1}{a}$ atau $\frac{-x_2}{a}$.

Contoh : $3x^2 - 2x - 5 = 0$

$$\frac{(3x + 3_1)(3x - 5)}{3} = 0$$

$$\frac{3(x + 1_1)(3x - 5)}{3} = 0$$

$$(x + 1)(3x - 5) = 0$$

$$x = -1 \text{ atau } x = \frac{5}{3}$$

Jadi, akar-akar dari $3x^2 - 2x - 5 = 0$ adalah -1 dan $\frac{5}{3}$.

2. Dengan Melengkapkan Bentuk Kuadrat Sempurna

Untuk Menyelesaikan $ax^2 + bx + c = 0$ dengan melengkapkan kuadrat sempurna, maka :

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

Contoh : $2x^2 + 2x - 3 = 0$

$$x^2 + x - \frac{3}{2} = 0$$

$$x^2 + x + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{2} + \frac{1}{4}$$

$$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{7}{4}$$

$$x + \frac{1}{2} = \pm \sqrt{\frac{7}{4}}$$

$$x_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{7}$$

$$x_1 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{7} \text{ atau } x_2 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{7}$$

3. Dengan Rumus

Misalkan $a, b, c \in R$ dan $a \neq 0$, maka akar-akar persamaan kuadrat

$ax^2 + bx + c = 0$ ditentukan oleh :

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \text{ atau } x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Bukti :

$$\begin{aligned}
\text{a. } & ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0 \\
& 4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 0 \\
& 4a^2x^2 + 4abx + b^2 - b^2 + 4ac = 0 \\
& (2ax + b)^2 - (b^2 - 4ac) = 0 \\
& (2ax + b)^2 = b^2 - 4ac \\
& 2ax + b = \pm \sqrt{b^2 - 4ac} \\
& 2ax = -b \pm \sqrt{b^2 - 4ac} \\
& x_{12} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{b. } & ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0 \\
& x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 \\
& x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a} \\
& x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 \\
& \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2} \\
& \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \\
& x + \frac{b}{2a} = \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} \\
& x_{12} = -\frac{b}{2a} \pm \frac{1}{2a} \sqrt{b^2 - 4ac} \\
& x_{12} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{c. } & ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0, \text{ misal } b = b_1 + b_2, b_1 \neq 0 \text{ dan } b_2 \neq 0 \\
& ax^2 + b_1x + b_2x + c = 0, \text{ misal } b_1x = u + v \Rightarrow x = \frac{u + v}{b_1}, \text{ maka :}
\end{aligned}$$

$$a\left(\frac{u+v}{b_1}\right)^2 + b_1\left(\frac{u+v}{b_1}\right) + b_2\left(\frac{u+v}{b_1}\right) + c = 0$$

$$a\left(\frac{u^2 + 2uv + v^2}{b_1^2}\right) + u + v + \frac{b_2u + b_2v}{b_1} + c = 0$$

$$au^2 + 2auv + av^2 + b_1^2u + b_1^2v + b_1b_2u + b_1b_2v + b_1^2c = 0$$

$$au^2 + (2av + b_1^2 + b_1b_2)u + av^2 + (b_1^2 + b_1b_2)v + b_1^2c = 0$$

Misal : $2av + b_1^2 + b_1b_2 = 0$

$$b_1^2 + b_1b_2 = -2av$$

$$b_1(b_1 + b_2) = -2av$$

$$b_1b = -2av$$

$$v = \frac{-b_1b}{2a}$$

$$au^2 + 0.u + av^2 - 2av.v + b_1^2c = 0$$

$$au^2 + av^2 - 2av^2 + b_1^2c = 0$$

$$au^2 - av^2 + b_1^2c = 0$$

$$au^2 = av^2 - b_1^2c$$

$$au^2 = a\left(\frac{-b_1b}{2a}\right)^2 - b_1^2c$$

$$au^2 = \frac{b_1^2b^2}{4a} - b_1^2c$$

$$au^2 = \frac{b_1^2b^2 - 4ab_1^2c}{4a}$$

$$au^2 = \frac{b_1^2(b^2 - 4ac)}{4a}$$

$$u^2 = \frac{b_1^2(b^2 - 4ac)}{4a^2}$$

$$u = \frac{\pm b_1\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

dimana $x = \frac{u+v}{b_1} = \frac{v+u}{b}$, maka:

$$x = \frac{\frac{-b_1b}{2a} \pm \frac{b_1\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}{b_1}$$

$$x = \frac{b_1\left(\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)}{b_1}$$

$$x_{12} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Contoh : Tentukan HP dari $y^2 + 7y - 30 = 0$

Jawab : $y^2 + 7y - 30 = 0$, $a = 1$, $b = 7$ dan $c = -30$

$$y_{12} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-7 \pm \sqrt{7^2 - 4.1.(-30)}}{2.1}$$

$$y_{12} = \frac{-7 \pm \sqrt{49 + 120}}{2} = \frac{-7 \pm \sqrt{169}}{2} = \frac{-7 \pm 13}{2}$$

$$y_1 = 3 \text{ atau } y_2 = -10$$

C. Diskriminan Persamaan Kuadrat

Dari rumus tampak bahwa penyelesaian atau akar-akar suatu persamaan kuadrat sangat ditentukan oleh nilai-nilai $b^2 - 4ac$. Bentuk $b^2 - 4ac$ disebut *diskriminan* dari persamaan kuadrat $ax^2 + bx + c = D$ dan dikembangkan

dengan huruf D , sehingga $D = b^2 - 4ac$. Pemberian nama diskriminan $D = b^2 - 4ac$ masuk akal, sebab nilai $D = b^2 - 4ac$ inilah yang membedakan (mendiskriminasikan) jenis akar-akar suatu persamaan kuadrat.

Dengan melihat nilai D , akar-akar suatu persamaan kuadrat dapat dibedakan menjadi 3 jenis yakni sbb:

a. Bila $D > 0$, maka ada dan bernilai positif.

Akar-akar persamaan itu $x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}$ dan $x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}$ terlihat bahwa

$$x_1 \neq x_2$$

Jadi, persamaan itu mempunyai dua akar nyata yang berlainan.

b. Bila $D = 0$, maka $\sqrt{D} = 0$

Akar-akar persamaan itu $x_1 = \frac{-b + 0}{2a}$ dan $x_2 = \frac{-b - 0}{2a}$ terlihat bahwa

$$x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}.$$

Jadi persamaan itu mempunyai dua akar nyata yang sama.

c. Bila $D < 0$ maka \sqrt{D} bukan merupakan bilangan nyata, melainkan bilangan khayal. Jadi, persamaan itu tidak mempunyai akar nyata.

D. Jumlah Dan Hasil Kali Akar-Akar Persamaan Kuadrat

Jika x_1 dan x_2 adalah akar-akar persamaan kuadrat $ax^2 + bx + c = 0$, dengan $a \neq 0$, jumlah dan hasil kali akar-akar persamaan kuadrat itu ditentukan

dengan rumus : $x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$ dan $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$

Dimana $x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$ dan $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$ diperoleh dari

$$\begin{aligned} \blacksquare \quad x_1 + x_2 &= \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} \\ &= \frac{-2a}{2a} = \frac{-b}{a} \end{aligned}$$

$$\blacksquare \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} \cdot \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{b^2 - D}{4a^2} \\
&= \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} \\
&= \frac{4ac}{4a^2} \\
&= \frac{c}{a}
\end{aligned}$$

Sifat jumlah dan hasil kali akar-akar persamaan kuadrat

1. Akar-akarnya berlawanan ($x_1 = x_2$) $\Leftrightarrow b = D$
2. Akar-akarnya berkebalikan $\left(x_1 = \frac{1}{x_2}\right) \Leftrightarrow a = c$
3. Sebuah akarnya sama dengan nol ($x_1 = 0$) $\Leftrightarrow c = 0$ dan $x_2 = \frac{-b}{a}$
4. Kedua akarnya bertanda sama $\Leftrightarrow \frac{c}{a} < 0$
5. Kedua akarnya berlainan tanda $\Leftrightarrow \frac{c}{a} > 0$

E. Menyusun Persamaan Kuadrat

1. Menyusun persamaan kuadrat jika diketahui akar-akarnya

a. Dengan perkalian faktor

Jika akar-akar persamaan kuadrat $ax^2 + bx + c = 0$

$$\begin{aligned}
ax^2 + bx + c = 0 &\Leftrightarrow x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 \\
&\Leftrightarrow (x - x_1)(x - x_2) = 0
\end{aligned}$$

dengan $x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$ dan $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$

b. Dengan rumus jumlah dan hasil kali

Persamaan kuadrat yang akar-akarnya x_1 dan x_2 adalah

$$\begin{aligned}
(x - x_1)(x - x_2) = 0 &\Leftrightarrow x^2 - x_2x - x_1x + x_1x_2 = 0 \\
&\Leftrightarrow x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2 = 0
\end{aligned}$$

2. Menyusun persamaan kuadrat jika akar-akarnya mempunyai hubungan dengan akar-akar persamaan kuadrat lainnya.

Jika akar-akar suatu persamaan kuadrat mempunyai hubungan dengan akar-akar persamaan kuadrat lainnya, maka persamaan kuadrat itu ditentukan dengan 2 cara, yaitu :

- Memakai rumus jumlah dan hasil kali akar-akar
- Penghapusan indeks, jika akar-akarnya simetri

Contoh :

Akar-akar persamaan kuadrat $3x^2 + 6x - 8 = 0$ adalah α dan β . Susunlah persamaan kuadrat yang akar-akarnya $\frac{1}{\alpha}$ dan $\frac{1}{\beta}$

Jawab

- Memakai rumus jumlah dan hasil kali akar-akar

$$3x^2 + 6x - 8 = 0 ; \alpha + \beta = -2 ; \alpha \cdot \beta = -\frac{8}{3}$$

Misalkan persamaan kuadrat yang diminta mempunyai akar-akar x_1 dan x_2 , maka :

$$x_1 = \frac{1}{\alpha} \text{ dan } x_2 = \frac{1}{\beta}$$

$$x_1 + x_2 = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} = \frac{-2}{-8/3} = \frac{3}{4}$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{1}{\beta} = \frac{1}{\alpha\beta} = \frac{1}{-8/3} = -\frac{3}{8}$$

Substitusikan $(x_1 + x_2) = \frac{3}{4}$ dan $x_1 \cdot x_2 = -3/8$ ke persamaan

$$x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 \cdot x_2 = 0 \text{ diperoleh :}$$

$$x^2 - \left(\frac{3}{4}\right)x - \frac{3}{8} = 0$$

$$8x^2 - 6x - 3 = 0$$

Jadi, persamaan kuadrat yang diminta adalah $8x^2 - 6x - 3 = 0$

- Dengan penghapusan indeks

Akar-akar $x_1 = \frac{1}{\alpha}$ dan $x_2 = \frac{1}{\beta}$ dikatakan simetri, sebab jika indeks

1 dan 2 dihapuskan akan memberikan bentuk yang sama. $x_1 = \frac{1}{\alpha}$,

jika indeks dihapus didapat $x = \frac{1}{\alpha}$ atau $\alpha = \frac{1}{x}$ $x_2 = \frac{1}{\beta}$, jika indeks

dihapus didapat $x = \frac{1}{\beta}$ atau $\beta = \frac{1}{x}$ dengan demikian $\alpha = \beta = \frac{1}{x}$.

Oleh karena α merupakan akar dari persamaan kuadrat $3x^2 + 6x - 8 = 0$, maka berlaku

$$3\alpha^2 + 6\alpha - 8 = 0$$

$$3\left(\frac{1}{x}\right)^2 + 6\left(\frac{1}{x}\right) - 8 = 0$$

$$\frac{3}{x^2} + \frac{6}{x} - 8 = 0$$

$$3 + 6x - 8x^2 = 0$$

$$8x^2 - 6x - 3 = 0$$

Jadi, persamaan kuadrat yang diminta adalah $8x^2 - 6x - 3 = 0$

F. Menggambar Grafik Fungsi Kuadrat

Definisi : misalkan a, b, dan c bilangan real dan $a \neq 0$, maka fungsi yang dirumuskan oleh $f(x) = ax^2 + bx + c$ dinamakan fungsi kuadrat dalam peubah x.

Grafik fungsi kuadrat ditulis dengan notasi $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ dan grafik kuadrat disebut sebagai parabola.

Untuk melukis grafik fungsi $y = ax^2 + bx + c$ diperlukan hal-hal berikut :

1. Titik potong dengan sumbu x

Titik potong dengan sumbu x, maka $y = 0$

Jika akar-akarnya x_1 dan x_2 , maka titik potong dengan sumbu x adalah $(x_1, 0)$ dan $(x_2, 0)$

Ada atau tidaknya akar-akar tergantung dari diskriminan persamaan itu

a. Kalau $D > 0$, grafik memotong sumbu x, di dua buah titik $(x_1, 0)$ dan $(x_2, 0)$.

b. Kalau $D = 0$, grafik menyinggung di sebuah titik pada sumbu x di $(x_1, 0)$

atau $\left(\frac{-b}{2a}, 0\right)$.

c. Kalau $D < 0$, grafik tidak memotong sumbu x

2. Titik potong dengan sumbu y

Hal ini didapat apabila $x = 0$, jadi $y = c$, maka titik potong dengan sumbu y adalah $(0, c)$

- Jika $c > 0$, maka grafik memotong sumbu y di atas titik asal.
- Jika $c = 0$, maka grafik memotong sumbu y tepat di titik asal.
- Jika $c < 0$, maka grafik memotong sumbu y di bawah titik asal.

3. Titik Puncak atau Titik Balik

Fungsi $y = ax^2 + bx + c$, dengan $a, b, c \in R$ dan $a \neq 0$, mempunyai titik

puncak atau titik balik $\left(\frac{-b}{2a}, \frac{-b^2 - 4ac}{4a} \right)$.

Jika $a > 0$, titik baliknya adalah titik balik minimum dan jika $a < 0$, titik baliknya adalah titik balik maksimum.

4. Sumbu simetri

Persamaan sumbu simetri fungsi kuadrat $y = ax^2 + bx + c$ adalah $x = -\frac{b}{2a}$

5. Menggambar grafik

Contoh : Gambarlah grafik fungsi kuadrat dari $y = x^2 - 4x + 4$

Jawab : $a = 1, b = -4, c = 4$

- Titik potong dengan sumbu x, maka $y = 0$

$$x^2 - 4x + 4 = 0 \Leftrightarrow (x - 2)(x - 2) = 0 \Leftrightarrow x_1 = x_2 = 2$$

Jadi, titik potongnya dengan sumbu x adalah $(2, 0)$

- Titik potong dengan sumbu y, maka $x = 0$

$$y = 0^2 - 4 \cdot 0 + 4 = 4$$

Jadi, titik potongnya dengan sumbu y adalah $(0, 4)$.

- Koordinat titik puncak atau titik balik

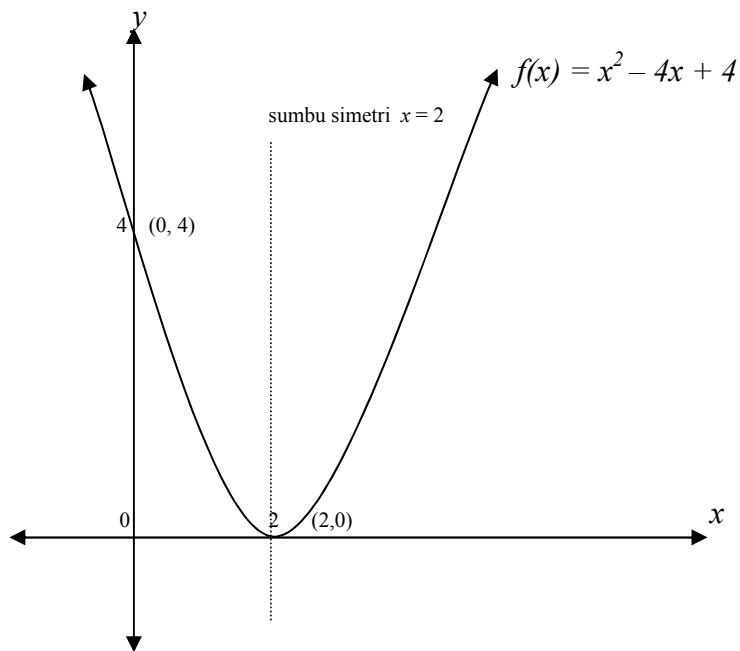
$$P = \left(\frac{-b}{2a}, \frac{-b^2 - 4ac}{4a} \right) = \left(\frac{-(-4)}{2 \cdot 1}, \frac{-(4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}{4 \cdot 1} \right) = (2, 0)$$

Oleh karena $a = 1$, maka P merupakan titik ballik minimum

- Persamaan Sumbu simetri

$$x = -\frac{b}{2a} = \frac{-(-4)}{2 \cdot 1} = 2$$

- Menggambar grafik



G. Membentuk Fungsi Kuadrat

Jika sketsa grafik suatu fungsi kuadrat diketahui, maka kita dapat menentukan rumus fungsi kuadratnya. Keterangan-keterangan yang diketahui pada sketsa grafik fungsi kuadrat seringkali mempunyai ciri-ciri tertentu. Ciri-cirinya adalah :

1. Grafik fungsi kuadrat memotong sumbu x di $A(x_1, 0)$ dan $B(x_2, 0)$, serta melalui sebuah titik tertentu. Persamaan fungsi kuadratnya dapat dinyatakan sebagai :

$$y = f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$$

Dengan nilai a ditentukan kemudian

2. Grafik fungsi kuadrat menyinggung sumbu x di $A(x_1, 0)$ dan melalui sebuah titik tertentu. Persamaan fungsi kuadratnya dapat dinyatakan sebagai :

$$y = f(x) = a(x - x_1)^2$$

Dengan nilai a ditentukan kemudian

3. Grafik fungsi kuadrat melalui titik puncak atau titik balik $P(x_p, y_p)$ dan melalui sebuah titik tertentu. Persamaan fungsi kuadratnya dapat dinyatakan sebagai :

$$y = f(x) = a(x - x_p)^2 + y_p$$

Dengan nilai a ditentukan kemudian

4. Grafik fungsi kuadrat melalui titik – titik $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, dan (x_3, y_3) .

Persamaan fungsi kuadratnya dapat dinyatakan sebagai :

$$y = f(x) = ax^2 + bx + c$$

Dengan nilai a, b, dan c ditentukan kemudian

Referensi:

Aldres, C.J. 1987. Aljabar Untuk SMTA Dan Yang Setingkat Jilid 2. Jakarta : Pradnya Paramita.

Joko S., Tri. 1997. Aljabar. Pancor : STKIP Hamzanwadi Selong.

Kartini, dkk.. 2004. Matematika Untuk Kelas X. Klaten : Intan Pariwara.

Kurnianingsih Sri, dkk..1996. Matematika SMU. Jakarta : Yudhistira.

Wirodikromo, Sartono. 2004. Matematika SMA. Jakarta : Erlangga.