

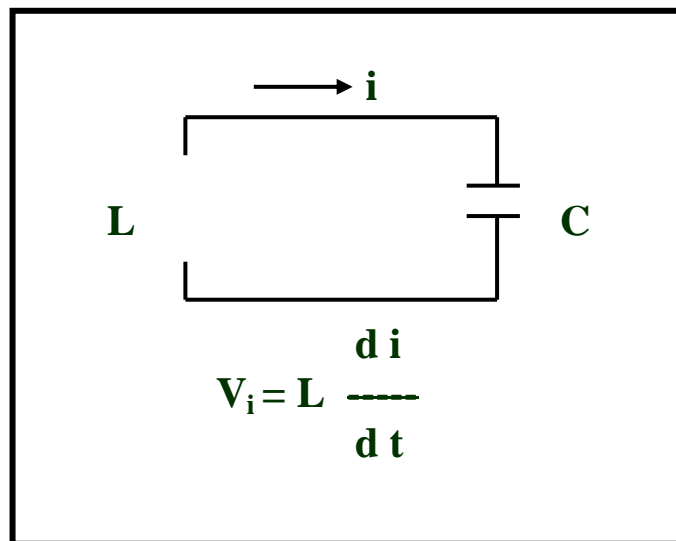
Kode Modul

MTL. OTO 207- 02



Fakultas Teknik UNY  
Jurusan Pendidikan Teknik Otomotif

## PERSAMAAN DIFERENSIAL ORDE SATU



Penyusun :

*Martubi, M.Pd., M.T.*

Sistem Perencanaan Penyusunan Program dan Penganggaran (SP 4)  
Jurusan Pendidikan Teknik Otomotif  
2004

## KATA PENGANTAR

---

Modul dengan judul **Persamaan Diferensial Orde Satu** ini digunakan sebagai panduan dalam kegiatan kuliah untuk membentuk salah satu sub-kompetensi, yaitu: “ Memahami dan dapat menggunakan konsep, sifat dan manipulasi aljabar dalam penyelesaian persamaan diferensial orde satu“. Modul ini dapat digunakan untuk semua peserta kuliah Matematika Lanjut di semester II pada Program Studi Teknik Otomotif Fakultas Teknik Universitas Negeri Yogyakarta.

Pada modul ini disajikan konsep dasar persamaan diferensial, dan beberapa metode penyelesaiannya. Modul ini terdiri atas dua kegiatan belajar. Kegiatan belajar 1 membahas tentang: Konsep dan macam-macam persamaan diferensial, Penyelesaian persamaan diferensial orde satu dengan Metode Integral Langsung, Metode Pemisahan Variabel dan Metode Substitusi. Kegiatan belajar 2 membahas tentang: Penyelesaian persamaan diferensial orde satu dengan Metode Faktor Integral dan Metode Bernoulli. Untuk dapat mempelajari modul ini dengan mudah mahasiswa diharapkan telah mempunyai pengetahuan dan pemahaman tentang konsep-konsep dasar yang menunjangnya, dalam hal ini terutama konsep tentang :*Diferensiasi* dan *Integrasi Fungsi*.

Yogyakarta, Nopember 2004

Penyusun

Martubi, M.Pd., M.T.

# DAFTAR ISI MODUL

---

	Halaman
<b>HALAMAN SAMPUL</b> .....	i
<b>KATA PENGANTAR</b> .....	ii
<b>DAFTAR ISI</b> .....	iii
<b>PERISTILAHAN / GLOSSARY</b> .....	v
<b>I . PENDAHULUAN</b> .....	1
A. Deskripsi .....	1
B. Prasyarat .....	2
C. Petunjuk Penggunaan Modul .....	2
1. Petunjuk bagi mahasiswa .....	2
2. Petunjuk bagi dosen .....	3
D. Tujuan Akhir .....	3
E. Kompetensi .....	3
F. Cek Kemampuan .....	5
<b>II. PEMBELAJARAN</b> .....	6
A. Rencana Belajar Mahasiswa .....	6
B. Kegiatan Belajar .....	6
1. Kegiatan Belajar 1 .....	6
a. Tujuan kegiatan belajar 1 .....	6
b. Uraian materi 1 .....	7
c. Rangkuman 1 .....	14
d. Tugas 1 .....	16
e. Tes formatif 1 .....	16
f. Kunci jawab tes formatif 1 ... ..	17

2. Kegiatan Belajar 2 .....	18
a. Tujuan kegiatan belajar 2 .....	18
b. Uraian materi 2 .....	19
c. Rangkuman 2 .....	22
d. Tugas 2 .....	22
e. Tes formatif 2 .....	23
f. Kunci jawab tes formatif 2 .....	23
<b>III. EVALUASI</b> .....	<b>24</b>
A. Pertanyaan .....	24
B. Kunci Jawaban .....	25
C. Kriteria Kelulusan .....	26
<b>IV. PENUTUP</b> .....	<b>27</b>
<b>DAFTAR PUSTAKA</b> .....	<b>28</b>

## PERISTILAHAN / GLOSSARY

---

**Metode Pemisahan Variabel** : salah satu metode untuk menyelesaikan sebuah persamaan diferensial orde satu dengan cara menulis variabel yang sejenis pada ruas persamaan yang berbeda.

**Metode Substitusi** : salah satu metode untuk menyelesaikan sebuah persamaan diferensial orde satu homogen yang tidak dapat dipisahkan variabelnya dengan cara mengganti salah satu variabelnya dengan pengganti tertentu sehingga menjadi persamaan yang dapat dipisahkan variabelnya.

**Metode Faktor Integral** : salah satu metode untuk menyelesaikan sebuah persamaan diferensial orde satu linier dengan cara menghitung faktor integralnya dan dengan rumus penyelesaian tertentu.

**Metode Bernoulli** : salah satu metode untuk menyelesaikan sebuah persamaan diferensial orde satu yang tidak linier dengan cara mengubahnya menjadi persamaan diferensial orde satu yang linier dan akhirnya diselesaikan dengan metode faktor integral.

**Orde** : adalah pangkat tertinggi dari sebuah koefisien diferensial.

**Persamaan Diferensial** : adalah suatu persamaan hubungan antara variabel bebas, variabel terikat, dan satu (lebih) koefisien diferensial antara keduanya.



# BAB I

## PENDAHULUAN

---

### A. Deskripsi

Modul dengan judul **Persamaan Diferensial Orde Satu** ini membahas tentang konsep dasar Persamaan Diferensial (PD) Orde Satu dan cara-cara penyelesaiannya yang banyak dijumpai dalam penerapannya di bidang teknik, baik secara teoritis maupun praktis. Materi yang dipelajari mencakup : Pengertian / Konsep dasar persamaan diferensial, Macam-macam persamaan diferensial, dan Beberapa metode penyelesaian persamaan diferensial orde satu.

Modul ini terdiri atas dua kegiatan belajar. Kegiatan belajar 1 membahas tentang: Konsep dasar dan macam-macam persamaan diferensial, Penyelesaian persamaan diferensial orde dengan Metode Integral Langsung, Metode Pemisahan Variabel dan Metode Substitusi. Kegiatan belajar 2 membahas tentang: Penyelesaian persamaan diferensial orde satu dengan Metode Faktor Integral dan Metode Bernoulli. Pada setiap kegiatan belajar selalu dilengkapi dengan contoh soal dan pembahasannya beserta tugas/latihan serta tes formatif seperlunya untuk membantu mahasiswa dalam mencapai kompetensi yang diharapkan.

Setelah selesai mempelajari modul ini secara keseluruhan mahasiswa diharapkan mempunyai sub kompetensi “Memahami dan dapat menggunakan konsep, sifat dan manipulasi aljabar dalam penyelesaian persamaan diferensial order satu “.

## **B. Prasyarat**

Modul ini berisi materi-materi lanjutan dari yang semestinya telah dipelajari sebelumnya. Adapun materi-materi dasar yang seharusnya telah difahami oleh peserta kuliah di Jurusan Pendidikan Teknik Otomotif terutama adalah konsep dasar tentang : Diferensiasi dan Integrasi Fungsi.

## **C. Petunjuk Penggunaan Modul**

### **1. Petunjuk bagi Mahasiswa**

Agar diperoleh hasil belajar yang maksimal, maka dalam menggunakan modul ini ada beberapa prosedur yang perlu diperhatikan, dan dilaksanakan antara lain :

- a. Bacalah dan fahami dengan seksama uraian konsep-konsep teoritis yang disajikan pada modul ini, kemudian fahami pula penerapan konsep-konsep tersebut dalam contoh-contoh soal beserta cara penyelesaiannya. Bila terpaksa masih ada materi yang kurang jelas dan belum bisa difahami dengan baik para mahasiswa dapat menanyakan kepada dosen yang mengampu kegiatan perkuliahan.
- b. Coba kerjakan setiap tugas formatif (soal latihan) secara mandiri, hal ini dimaksudkan untuk mengetahui seberapa besar pemahaman yang telah dimiliki setiap mahasiswa terhadap materi-materi yang dibahas pada setiap kegiatan belajar.
- c. Apabila dalam kenyataannya mahasiswa belum menguasai materi pada level yang diharapkan, coba ulangi lagi membaca dan mengerjakan lagi latihan-latihannya dan kalau perlu bertanyalah kepada dosen yang mengampu kegiatan perkuliahan yang bersangkutan. Kalau materi yang bersangkutan memerlukan pemahaman awal (prasyarat) maka yakinkan bahwa prasyarat yang dimaksud benar-benar sudah dipenuhi.



## 2. Petunjuk Bagi Dosen

Dalam setiap kegiatan perkuliahan, dosen mempunyai tugas dan peran untuk :

- a. Membantu mahasiswa dalam merencanakan proses belajar.
- b. Membimbing mahasiswa melalui tugas-tugas atau latihan-latihan yang dijelaskan dalam tahap belajar.
- c. Membantu mahasiswa dalam memahami konsep baru dan menjawab pertanyaan mahasiswa apabila diperlukan.
- d. Membantu mahasiswa untuk mengakses sumber belajar lain yang diperlukan.
- e. Mengorganisir kegiatan belajar kelompok jika diperlukan.
- f. Merencanakan seorang ahli/dosen pendamping jika diperlukan.
- g. Mengadakan evaluasi terhadap pencapaian kompetensi mahasiswa yang telah ditentukan. Evaluasi tersebut pelaksanaannya pada setiap akhir kegiatan belajar.

### D. Tujuan Akhir

Setelah mempelajari seluruh materi kegiatan belajar dalam modul ini mahasiswa diharapkan : “ Memahami dan dapat menggunakan konsep, sifat dan manipulasi aljabar dalam penyelesaian persamaan diferensial order satu ”.

### E. Kompetensi

Modul MTL.OTO 207-02 dengan judul **Persamaan Diferensial Orde Satu** ini disusun dalam rangka membentuk sub-kompetensi “ Memahami dan dapat menggunakan konsep, sifat dan manipulasi aljabar dalam penyelesaian persamaan diferensial order satu ”.

Untuk mencapai sub-kompetensi tersebut, terlebih dahulu harus dapat dicapai sub-sub kompetensi beserta kriteria unjuk kerjanya melalui lingkup belajar dengan materi pokok pembelajaran sebagai berikut :

Sub Kompetensi	Kriteria Unjuk Kerja	Lingkup Belajar	Materi Pokok Pembelajaran		
			Sikap	Pengetahuan	Ketrampilan
Memahami dan dapat menggunakan konsep, sifat dan manipulasi aljabar dalam penyelesaian persamaan diferensial order satu	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Pengertian/konsep persamaan diferensial difahami dengan benar sesuai teori.</li> <li>2. Macam-macam persamaan diferensial disebut dengan benar sesuai teori.</li> <li>3. Penyelesaian persamaan diferensial dengan metode integral langsung difahami dengan benar sesuai teori.</li> <li>4. Penyelesaian persamaan diferensial dengan metode pemisahan variabel difahami dengan benar sesuai teori.</li> <li>5. Penyelesaian persamaan diferensial dengan metode substitusi difahami dengan benar sesuai teori.</li> <li>6. Penyelesaian persamaan diferensial dengan metode faktor integral difahami dengan benar sesuai teori.</li> <li>7. Penyelesaian persamaan diferensial dengan metode Bernoulli difahami dengan benar sesuai teori.</li> </ol>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Pengertian/konsep persamaan diferensial</li> <li>2. Macam-macam persamaan diferensial.</li> <li>3. Penyelesaian persamaan diferensial dengan metode integral langsung.</li> <li>4. Penyelesaian persamaan diferensial dengan metode pemisahan variabel.</li> <li>5. Penyelesaian persamaan diferensial dengan metode substitusi.</li> <li>6. Penyelesaian persamaan diferensial dengan metode faktor integral.</li> <li>7. Penyelesaian persamaan diferensial dengan metode Bernoulli.</li> </ol>	Teliti dan cermat dalam menulis simbol dan melakukan perhitungan	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Pengertian/konsep persamaan diferensial.</li> <li>2. Macam-macam persamaan diferensial.</li> <li>3. Penyelesaian persamaan diferensial dengan metode integral langsung</li> <li>4. Penyelesaian persamaan diferensial dengan metode pemisahan variabel.</li> <li>5. Penyelesaian persamaan diferensial dengan metode substitusi.</li> <li>6. Penyelesaian persamaan diferensial dengan metode faktor integral.</li> <li>7. Penyelesaian persamaan diferensial dengan metode Bernoulli.</li> </ol>	Menghitung dengan prosedur dan hasil yang benar

## F. Cek Kemampuan

Sebelum mempelajari Modul MTL.OTO 207 – 02 ini, isilah dengan tanda cek (  $\checkmark$  ) pertanyaan yang menunjukkan kompetensi yang telah dimiliki mahasiswa dengan jujur dan dapat dipertanggungjawabkan :

Sub Kompetensi	Pertanyaan	Jawaban		Bila Jawaban “Ya” Kerjakan
		Ya	Tidak	
Memahami dan dapat Menggunakan konsep, sifat dan manipulasi aljabar dalam penyelesaian persamaan diferensial order satu	1. Saya mampu menjelaskan: Pengertian/ konsep persamaan diferensial ( PD ).			Tes Formatif 2 Nomor 1 a).
	2. Saya dapat menyebutkan macam-macam persamaan diferensial.			Tes Formatif 2 Nomor 1 b).
	3. Saya memahami cara penyelesaian PD orde satu dengan metode integral langsung.			Tes Formatif 2 Nomor 2 dan 3
	4. Saya memahami cara penyelesaian PD orde satu dengan metode pemisahan variabel.			Tes Formatif 2 Nomor 4 dan 5
	5. Saya memahami cara penyelesaian PD orde satu dengan metode substitusi.			Tes Formatif 2 Nomor 6
	6. Saya memahami cara penyelesaian PD orde satu dengan metode faktor integral.			Tes Formatif 2 Nomor 7 dan 8
	7. Saya memahami cara penyelesaian PD orde satu dengan metode Bernoulli.			Tes Formatif 2 Nomor 9 dan 10

Apabila mahasiswa menjawab **Tidak** maka pelajari modul ini sesuai materi yang dijawab **Tidak** tersebut.

## BAB II

# PEMBELAJARAN

---

### A. Rencana Belajar Mahasiswa

Buatlah rencana kegiatan belajar dengan mengisi tabel di bawah ini dan mintalah bukti belajar kepada dosen setelah selesai.

Jenis Kegiatan	Tanggal	Waktu	Tempat Belajar	Alasan Perubahan	Paraf Dosen
1. Pengertian, dan macam-macam persamaan diferensial.					
2. Penyelesaian persamaan diferensial dengan metode integral langsung.					
3. Penyelesaian persamaan diferensial dengan metode pemisahan variabel.					
4. Penyelesaian persamaan diferensial dengan metode substitusi.					

### B. Kegiatan Belajar.

#### 1. Kegiatan Belajar 1: Konsep dan Macam-macam Persamaan Diferensial (PD), Penyelesaian PD Orde Satu dengan Metode : Integral Langsung, Pemisahan Variabel, dan Substitusi.

##### a. Tujuan Kegiatan Belajar 1 :

- 1). Menjelaskan pengertian / konsep persamaan diferensial .
- 2). Menyebutkan macam-macam persamaan diferensial.
- 3). Menggunakan metode integral langsung untuk menyelesaikan persamaan diferensial orde satu.
- 4). Menggunakan metode pemisahan variabel untuk menyelesaikan persamaan diferensial orde satu.
- 5). Menggunakan metode substitusi untuk menyelesaikan persamaan diferensial orde satu.

## b. Uraian Materi 1:

### 1). Pengertian dan Macam-macam Persamaan Diferensial.

*Persamaan Diferensial ( PD )* adalah suatu persamaan hubungan antara variabel bebas (misal  $x$ ), variabel terikat ( $y$ ), dan satu (lebih) koefisien diferensial antara keduanya ( $dy/dx$ ).

Contoh :  $x^2 \frac{dy}{dx} - 4xy + 5y = 0$

### Macam Persamaan Diferensial dibedakan menjadi :

a). Menurut Banyaknya Variabel Bebas :

(1). **PD Biasa** : jika hanya memiliki satu variabel bebas.

Contoh : (a).  $3x^2 \frac{dy}{dx} + 6xy = 0$

(b).  $4e^x \frac{dy}{dx} = 2e^{3x} + 3$

(2). **PD Parsial** : jika memiliki lebih dari satu variabel bebas.

Contoh :  $\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$  ( Persamaan Difusi )

b). Menurut Turunan Tertinggi yang Terlibat :

(1). **PD Orde Satu** : hanya melibatkan turunan kesatu.

Contoh :  $\frac{dy}{dx} = \frac{8x}{6y + 2}$

(2). **PD Orde Dua** : melibatkan turunan kedua.

Contoh :  $V_i = L \frac{di}{dt} = L \frac{d^2Q}{dt^2}$  ( Induktansi )

(3). **PD Orde Tinggi**: melibatkan turunan tingkat tinggi/ lebih dari dua ( tidak dibahas pada matakuliah ini ).

Permasalahan pokok yang pada setiap pembahasan tentang persamaan adalah mencari penyelesaiannya. Mencari penyelesaian persamaan diferensial yaitu mencari sebuah fungsi yang memenuhi persamaan tersebut, artinya yang membuat persamaan tersebut menjadi benar.

Ada beberapa metode penyelesaian persamaan diferensial orde satu, yaitu: *Metode Integral Langsung, Metode Pemisahan Variabel, Metode Substitusi, Metode Faktor Integral, dan Metode Bernoulli*. Pada kegiatan belajar 1 ini hanya akan dibahas: *Metode Integral Langsung, Metode Pemisahan Variabel, dan Metode Substitusi*.

## 2). Penyelesaian PD Orde Satu Metode Integral Langsung :

Metode ini tepat digunakan jika persamaan diferensial

dapat dinyatakan dalam bentuk :  $\frac{dy}{dx} = f(x)$  artinya

persamaannya dapat diintegrasikan secara langsung.

**Urutan penyelesaiannya adalah :**

a). Tulis soal ke dalam bentuk :  $\frac{dy}{dx} = f(x)$

b). Nyatakan dalam bentuk  $dy = f(x) dx$

c). Integrasikan persamaan itu sehingga di dapat bentuk :

$y = F(x) + C$  yang merupakan penyelesaian persamaan diferensial tersebut.

**Contoh** : Selesaikanlah persamaan diferensial berikut :

$$(1). x \frac{dy}{dx} = 5x^3 - 6x^2 + 7x - 8$$

$$(2). e^x \frac{dy}{dx} = 2e^{3x} + 4$$

$$\text{Jawab : (1). } x \frac{dy}{dx} = 15x^3 - 6x^2 + 7x - 8$$

$$\frac{dy}{dx} = 15x^2 - 6x + 7 - 8x^{-1}$$

$$dy = (15x^2 - 6x + 7 - 8x^{-1}) dx$$

$$\int dy = \int (15x^2 - 6x + 7 - 8x^{-1}) dx$$

$$\underline{\underline{y = 5x^2 - 3x^2 + 7x - 8 \ln x + C}}$$

$$(2). e^x \frac{dy}{dx} = 10e^{3x} + 4$$

$$\frac{dy}{dx} = 10e^{2x} + 4e^{-x}$$

$$dy = (10e^{2x} + 4e^{-x}) dx$$

$$\int dy = \int (10e^{2x} + 4e^{-x}) dx$$

$$\underline{\underline{y = 5e^{2x} - 4e^{-x} + C}}$$

### 3). Penyelesaian PD Orde Satu Metode Pemisahan Variabel

Metode ini dapat digunakan jika persamaan diferensial mempunyai dua variabel dan dapat dipisahkan pada ruas yang berbeda .

Persamaannya dapat ditulis dalam bentuk :  $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$

Adapun urutan penyelesaiannya adalah :

a). Tulis soal dalam bentuk :  $\frac{dy}{dx} = f(x) \cdot g(y)$

$$\text{atau } \frac{dy}{dx} = \frac{f(x)}{g(y)} \quad \text{atau sebaliknya} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{g(y)}{f(x)}$$

- b). Pisahkan  $g(y)$  bersama  $dy$  dengan  $f(x)$  bersama  $dx$  pada ruas yang berbeda (  $dy$  di kiri dan  $dx$  di kanan )
- c). Integralkan kedua ruas persamaan itu sehingga di dapat  $G(y) = F(x) + C$  yang merupakan penyelesaian dari persamaan diferensial.

Contoh : Selesaikanlah persamaan diferensial berikut :

$$(1). \frac{dy}{dx} = \frac{8x}{6y + 2}$$

$$(2). \frac{dy}{dx} = \frac{xy^2 + y^2}{x^2y - x^2}$$

Jawab: (1).  $\frac{dy}{dx} = \frac{8x}{6y + 2}$

$$(6y + 2) dy = 8x dx$$

$$\int (6y + 2) dy = \int 8x dx$$

$$\underline{\underline{3y^2 + 2y = 4x^2 + C}}$$

$$(2). \frac{dy}{dx} = \frac{xy^2 + 4y^2}{3x^2y - x^2} = \frac{y^2(x + 4)}{x^2(3y - 1)}$$

$$\frac{3y - 1}{y^2} dy = \frac{x + 4}{x^2} dx$$

$$\int \frac{3y - 1}{y^2} dy = \int \frac{x + 4}{x^2} dx$$

$$\int \left( \frac{3}{y} - y^{-2} \right) dy = \int \left( \frac{1}{x} + 4x^{-2} \right) dx$$

$$\underline{\underline{3 \ln y + y^{-1} = \ln x - 4x^{-1} + C}}$$



#### 4). Penyelesaian PD Orde Satu Metode Substitusi

Metode biasanya digunakan jika persamaan diferensial mempunyai dua variabel tetapi tidak dapat dipisah secara langsung pada ruas yang berbeda.

Persamaannya dapat ditulis dalam bentuk :  $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$

##### Adapun urutan penyelesaiannya adalah :

- a). Ambillah substitusi yang cocok, artinya yang bisa mengubah bentuk persamaan menjadi dapat dipisahkan variabelnya pada ruas yang berbeda, biasanya substitusi itu adalah  $y = v.x$

( dalam hal ini  $v = \frac{y}{x}$  ) dan diperoleh :

$$\frac{dy}{dx} = v + x \frac{dv}{dx}$$

- b). Substitusikan  $y = v.x$  ke dalam soalnya sehingga

diperoleh :  $\frac{dy}{dx} = f(v)$

- c). Samakan  $\frac{dy}{dx}$  substitusi dengan  $\frac{dy}{dx}$  soal sampai

diperoleh :  $f(v) dv = g(x) dx$

- d). Integralkan  $f(v) dv = g(x) dx$  sehingga didapat :

$$F(v) = G(x) + C$$

- e). Substitusikan kembali  $v = \frac{y}{x}$  ke persamaan ini

sehingga diperoleh penyelesaiannya dalam bentuk :

$$\mathbf{F(y) = G(x) + C}$$

Contoh : Selesaikanlah persamaan diferensial berikut :

$$(1). \frac{dy}{dx} = \frac{2x + 3y}{4x}$$

$$(2). (x^2 + 2xy) \frac{dy}{dx} = 2xy + 3y^2$$

Jawab : (1).  $\frac{dy}{dx} = \frac{2x + 3y}{4x}$

Substitusi  $y = v.x$  atau  $v = \frac{y}{x}$ , sehingga:

$$\frac{dy}{dx} = v + x \frac{dv}{dx} \quad \text{dan soal menjadi :}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x + 3vx}{4x} = \frac{2 + 3v}{4}$$

$$v + x \frac{dv}{dx} = \frac{2 + 3v}{4}$$

$$x \frac{dv}{dx} = \frac{2 + 3v}{4} - v$$

$$x \frac{dv}{dx} = \frac{2 - v}{4}$$

$$\frac{4}{2 - v} dv = \frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{4}{2 - v} dv = \int \frac{dx}{x}$$

$$4 \ln(2 - v) = \ln x + C$$

$$\rightarrow 4 \ln(2 - v) = \ln x + \ln A$$

$$\ln(2 - v)^4 = \ln A.x \rightarrow (2 - v)^4 = A.x$$

$$v = \frac{y}{x} \text{ di masukkan kembali sehingga :}$$

$$(2 - y/x)^4 = A.x$$

$$\left( \frac{2x - y}{x} \right)^4 = A.x$$

$$\rightarrow \text{Jadi: } \underline{(2x - y)^4 = A.x^5}$$

$$(2). (x^2 + 2xy) \frac{dy}{dx} = 2xy + 3y^2$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2xy + 3y^2}{x^2 + 2xy}$$

Substitusi  $y = v.x$  atau  $v = \frac{y}{x}$ , sehingga:

$$\frac{dy}{dx} = v + x \frac{dv}{dx} \text{ dan soal menjadi :}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x.v.x + 3(v.x)^2}{x^2 + 2x.v.xy} = \frac{2v.x^2 + 3v^2.x^2}{x^2 + 2v.x^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2v + 3v^2}{1 + 2v}$$

$$v + x \frac{dv}{dx} = \frac{2v + 3v^2}{1 + 2v}$$

$$x \frac{dv}{dx} = \frac{2v + 3v^2}{1 + 2v} - v$$

$$x \frac{dv}{dx} = \frac{2v + 3v^2}{1 + 2v} - \frac{v + 2v^2}{1 + 2v} = \frac{v + v^2}{1 + 2v}$$

$$\frac{1 + 2v}{v + v^2} dv = \frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{1 + 2v}{v + v^2} dv = \int \frac{dx}{x}$$

$$\ln (v + v^2) = \ln x + C$$

$$\ln (v + v^2) = \ln x + \ln A$$

$$\ln (v + v^2) = \ln A.x \rightarrow v + v^2 = A.x$$

$$v = \frac{y}{x} \rightarrow \frac{y}{x} + \left(\frac{y}{x}\right)^2 = A.x$$

$$\frac{xy + y^2}{x^2} = A.x \rightarrow \underline{\underline{xy + y^2 = A.x^3}}$$

### c. Rangkuman 1 :

1). *Persamaan Diferensial ( PD )* adalah suatu persamaan hubungan antara variabel bebas (misal x), variabel terikat (y), dan satu (lebih) koefisien diferensial antara keduanya ( dy/dx ).

2). Macam persamaan diferensial adalah:

a). Menurut Banyaknya Variabel Terikat :

(1). PD Biasa : jika hanya memiliki satu variabel bebas.

(2). PD Parsial : jika memiliki lebih dari satu variabel terikat

b). Menurut Turunan Tertinggi yang Terlibat :

(1). PD Orde Satu : hanya melibatkan turunan kesatu.

(2). PD Orde Dua : melibatkan turunan kedua.

(3). PD Orde Tinggi: melibatkan turunan tingkat tinggi/ lebih dari dua ( tidak dibahas pada matakuliah ini ).

3). Ada beberapa metode penyelesaian persamaan diferensial orde satu, yaitu: *Metode Integral Langsung, Metode Pemisahan Variabel, Metode Substitusi, Metode Faktor Integral, dan Metode Bernoulli.*

4). Metode Integrasi Langsung digunakan jika persamaan diferensial dapat dinyatakan dalam bentuk :

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \text{ artinya}$$

bentuk persamaannya dapat diintegrasikan secara langsung

$$\text{sehingga diperoleh } \int dy = \int f(x) dx \rightarrow y = F(x) + C$$

5). Metode Pemisahan Variabel: digunakan jika persamaan diferensial mempunyai dua variabel dan dapat dipisahkan pada ruas yang berbeda . Persamaannya dapat ditulis dalam bentuk :

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \rightarrow \text{dengan catatan } f(x, y) \text{ dapat dipisahkan menjadi } f(x) \text{ dan } g(y).$$

$$\text{Sehingga diperoleh : } \int g(y) dy = \int f(x) dx \rightarrow y = F(x) + C$$

6). Metode Substitusi biasanya digunakan pada persamaan diferensial homogen yang mempunyai dua variabel tetapi tidak dapat dipisah secara langsung pada ruas yang berbeda. Untuk menyelesaikan perlu diubah agar variabelnya dapat dipisahkan, biasanya diambil substitusi

$$y = v.x \rightarrow \frac{dy}{dx} = v + x \frac{dv}{dx}$$

Penyelesaian selanjutnya sama dengan Metode Pemisahan Variabel.

#### d. Tugas 1:

Selesaikanlah persamaan berikut dengan metode yang sesuai !

$$1). x \frac{dy}{dx} = x^2 + 2x - 3$$

$$2). (1+x)^2 \frac{dy}{dx} = 1+y^2$$

$$3). x^2 \frac{dy}{dx} = x^3 \sin 3x + 4$$

$$4). x \cos y \frac{dy}{dx} - \sin y = 0$$

$$5). (x^3 + xy^2) \frac{dy}{dx} = 2y^3$$

**e. Tes formatif 1 :**

- 1). (a).Jelaskan apakah yang dimaksud persamaan diferensial ?
- (b). Apa sajakah macam-macam persamaan diferensial, masing-masing berikan sebuah contohnya !

Selesaikanlah persamaan diferensial berikut ini ( nomor 2 sd. 6)!

$$2). 3x \frac{dy}{dx} = x^3 + 2x^2 - 3x + 5$$

$$3). (x^3 + 2x) \frac{dy}{dx} = 6x^2 + 4$$

$$4). x^3 + (y + 1)^2 \frac{dy}{dx} = 0$$

$$5). x(y - 3) \frac{dy}{dx} = 4y$$

$$6). (xy + y^2) + (x^2 - xy) \frac{dy}{dx} = 0$$

**f. Kunci Jawab Tes Formatif 1 :**

1). (a). Persamaan Diferensial ( PD) adalah : suatu persamaan hubungan antara variabel bebas (misal x), variabel terikat (misalnya y), dan satu atau lebih koefisien diferensial antara keduanya ( dy/dx).

a). Menurut Banyaknya Variabel bebas :

(1). **PD Biasa** : jika hanya memiliki satu variabel bebas.

$$\text{Contoh : (a). } (x + 2) \frac{dy}{dx} + 6xy = 0$$

$$\text{(b). } 5 e^{2x} \frac{dy}{dx} + 4 e^{5x} = 6$$

(2). **PD Parsial** : jika memiliki lebih dari satu variabel bebas.

$$\text{Contoh : } \frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad (\text{Persamaan Difusi})$$

b). Menurut Turunan Tertinggi yang Terlibat :

(1). **PD Orde Satu** : hanya melibatkan turunan kesatu.

$$\text{Contoh : } 5x \frac{dy}{dx} = \frac{2x^2 - 8x + 4}{3y - 1}$$

(2). **PD Orde Dua** : melibatkan turunan kedua.

$$\text{Contoh : } 3 \frac{d^2y}{dx^2} - 6 \frac{dy}{dx} + 5y = 0$$

(3). **PD Orde Tinggi**: melibatkan turunan tingkat tinggi/ lebih dari dua ( tidak dibahas pada matakuliah ini ).

$$\text{Contoh : } 5 \frac{d^3y}{dx^3} - 6 \frac{d^2y}{dx^2} + 7 \frac{dy}{dx} = 0$$

2). Dengan metode integral langsung diperoleh penyelesaian :

$$y = \frac{1}{9} x^3 + \frac{1}{3} x^2 - x + \frac{5}{3} \ln x + C$$

3). Dengan metode integral langsung diperoleh penyelesaian :

$$y = 2 \ln ( x^3 + 2x ) + C$$

4). Dengan metode pemisahan variabel diperoleh penyelesaian :

$$3 x^4 + 4 ( y + 1 )^3 = A$$

5). Dengan metode pemisahan variabel diperoleh penyelesaian :

$$x^4 y^3 = A e^y$$

6). Dengan metode substitusi diperoleh penyelesaian :

$$xy = A e^{y/x}$$

## 2. Kegiatan Belajar 2: Penyelesaian PD Orde Satu dengan Metode : Faktor Integral dan Metode Bernoulli.

### a. Tujuan Kegiatan Belajar 2 :

- 1). Menggunakan metode faktor integral untuk menyelesaikan persamaan diferensial orde satu.
- 2). Menggunakan metode Bernoulli untuk menyelesaikan persamaan diferensial orde satu.

### b. Uraian Materi 2:

#### 1). Penyelesaian PD Orde Satu Metode Faktor Integral



**A. Pertanyaan**

**Selesaikanlah persamaan diferensial berikut !**

1.  $8x + \frac{dy}{dx} = 5x^2 + 7$

2.  $\frac{2}{3x} \frac{dy}{dx} = e^{4x}$

3.  $2x^4 - (3y - 1)^2 \frac{dy}{dx} = 0$

4.  $(y + 1) \frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + 1}{xy}$

5.  $2x^2 \frac{dy}{dx} - y^2 = x^2$

6.  $x^3 + y^3 - 3xy^2 \frac{dy}{dx} = 0$

7.  $x \frac{dy}{dx} - y = x^3 \cos x$

8.  $(1 + x^2) \frac{dy}{dx} + 4xy = 8x$

9.  $\frac{dy}{dx} + y = y^3 e^{2x}$

10.  $2 \frac{dy}{dx} + 4y = 3xy^2$

## B. Kunci Jawaban

1. Dengan metode Integral Langsung didapat :

$$y = \frac{5}{3} x^3 - 4 x^2 + 7 x + C$$

2. Dengan metode Integral Langsung didapat :

$$y = \frac{3}{8} x \cdot e^{4x} - \frac{3}{32} e^{4x} + C$$

3. Dengan metode Pemisahan Variabel didapat :

$$\frac{1}{9} (3y - 1)^3 = \frac{2}{5} x^5 + C$$

4. Dengan metode Pemisahan Variabel didapat :

$$\frac{y^3}{3} + \frac{y^2}{2} = \frac{x^2}{2} + \ln x + C$$

5. Dengan metode Substitusi didapat :  $\frac{2x}{x-y} = \ln x + C$

6. Dengan metode Substitusi didapat :  $x^3 - 2y^3 = Ax^3$

7. Dengan metode Faktor Integral didapat :

$$y = x^2 \sin x + x \cos x + C x$$

8. Dengan metode Faktor Integral didapat :

$$y = (4x^2 + 2x^4 + C)(1 + x^2)^{-2}$$

9. Dengan metode Bernoulli didapat :  $y^{-2} = -2x \cdot e^{2x} + C e^{2x}$

10. Dengan metode Bernoulli didapat :  $y^{-1} = \frac{3}{4} x + \frac{3}{8} + C e^{2x}$

**C. Kriteria Kelulusan**

<b>Kriteria</b>	<b>Skor (1 – 10)</b>	<b>Bobot</b>	<b>Nilai</b>	<b>Keterangan</b>
Kognitif ( soal no. 1 sd. 10 )		5		Syarat lulus nilai minimal 56
Ketelitian menulis notasi		1		
Ketepatan prosedur		2		
Ketepatan formula jawaban		1		
Ketepatan waktu		1		
<b>NILAI AKHIR</b>				

## BAB IV

### PENUTUP

---

Demikianlah modul MTL.OTO 207 – 02 dengan judul **Persamaan Diferensial Orde Satu** ini telah selesai disusun dengan dilengkapi beberapa latihan/tugas, tes formatif maupun evaluasi akhir beserta kunci jawabannya. Dengan bantuan modul ini diharapkan para mahasiswa dapat memantau sendiri perkembangan kompetensinya, apakah mereka telah benar-benar memiliki kompetensi sebagaimana tercermin pada tujuan yang diharapkan pada setiap kegiatan belajar atau belum.

Bagi para mahasiswa yang telah mencapai syarat kelulusan minimal maka mereka dapat menghentikan kegiatan belajarnya pada modul ini dan melanjutkan ke modul berikutnya. Sebaliknya jika belum dapat memenuhi kelulusan minimal, maka mereka harus mengulang kembali belajarnya terutama pada bagian materi-materi yang belum dikuasainya ( belum lulus ) dan sebaiknya mereka harus lebih sungguh-sungguh dalam belajar dengan memanfaatkan fasilitas yang ada termasuk bantuan dari dosen sebagai fasilitator matakuliah ini.

## DAFTAR PUSTAKA

---

- Kreyszig, E. 1993. *Matematika Teknik Lanjutan* Buku 1 & 2 (Terjemahan). Jakarta: PT. Gramedia.
- Spiegel, M.R. 1984. *Matematika Lanjutan* (Terjemahan). Jakarta: Erlangga
- Stroud, K.A. 1986. *Matematika untuk Teknik* (Terjemahan). Jakarta: Erlangga.
- Sutrisno. 1996. *Matematika* ( Diktat Kuliah ). Yogyakarta: FT UGM
- Wardiman., 1981. *Persamaan Differensial*. Yogyakarta: Citra Offset.