PERSAMAAN FUNGSI KUADRAT-1

Mata Pelajaran : Matematika
K e l a s : X (Sepuluh)
Nomor Modul : MAT.X.02

Penulis : Drs. Suyanto
Pengkaji Materi : Dra.Wardani Rahayu, M.Si.
Pengkaji Media : Drs. Soekiman

DAFTAR ISI

PENDAHULUAN 3

Kegiatan Belajar 1: **AKAR-AKAR PERSAMAN KUADRAT** 5
- Petunjuk 5
- Uraian Materi 5
- TUGAS 1 24

Kegiatan Belajar 2: **PERSAMAAN KUADRAT YANG AKAR-AKARNYA DIKETAHUI** 25
- Petunjuk 25
- Uraian Materi 25
- TUGAS 2 42

Kegiatan Belajar 3: **FUNGSI KUADRAT** 45
- Petunjuk 45
- Uraian Materi 45
- TUGAS 3 78

PENUTUP 80

KUNCI TUGAS 83

DAFTAR PUSTAKA 94

PENDAHULUAN

Hallo, apa kabar? Baik-baik saja bukan? Anda tentu sudah siap untuk mempelajari modul ini. Kali ini Anda akan mempelajari modul berjudul “Persamaan dan Fungsi Kuadrat -1”.

Sebelum mempelajari modul ini Anda harus mengingat kembali beberapa materi penting yang pernah Anda palajari waktu di SMP Terbuka/Reguler. Sebagai contoh materi tentang relasi, fungsi atau pemetaan, menyelesaikan persamaan kuadrat dengan cara memfaktorkan, menggambar sketsa grafik fungsi linier maupun grafik fungsi kuadrat, dan bilangan-bilangan bentuk kuadrat sempurna. Hal ini akan sangat membantu keberhasilan Anda dalam mempelajari modul ini.

Cakupan materi modul ini meliputi pengertian, pemahaman, dan keterampilan. Oleh karena itu, selain dijelaskan tentang pengertian, juga diberikan contoh soal, soal latihan uji kompetensi, dan uji kompetensi. Keseriusan Anda dalam mempelajari modul ini menjadi kunci keberhasilan Anda. Pemahaman Anda terhadap materi modul ini akan sangat bermanfaat untuk mempelajari materi pada modul selanjutnya yaitu “Persamaan dan Fungsi Kuadrat -2”. Selain itu, juga bermanfaat untuk mempelajari materi yang berkaitan dengan penerapan matematika dalam bidang ekonomi, misalnya fungsi penawaran dan fungsi permintaan.

Kompetensi dasar dari materi modul ini adalah dapat menggunakan sifat dan aturan tentang akar persamaan kuadrat, diskriminan, sumbu simetri, dan titik puncak grafik fungsi kuadrat dalam pemecahan masalah.

Agar mudah dipelajari, modul ini dibagi menjadi tiga kegiatan belajar, yaitu:

Kegiatan 1: Akar-akar Persamaan Kuadrat.
Materi yang akan dibahas dalam kegiatan ini adalah tentang penentuan akar-akar persamaan kuadrat (cara memfaktorkan dan rumus kuadrat) dan penggunaan diskriminan.

Kegiatan 2: Persamaan Kuadrat yang Akar-akarnya Diketahui
Materi yang akan dibahas dalam kegiatan ini adalah jumlah dan hasil kali akar-akar persamaan kuadrat dan persamaan kuadrat yang akar-akarnya diketahui (memenuhi kondisi tertentu).

Kegiatan 3: Fungsi Kuadrat
Materi yang akan dibahas dalam kegiatan ini adalah grafik fungsi kuadrat, definit positif dan definit negatif, serta kaitan persamaan kuadrat dan fungsi kuadrat.
Pelajari model ini setahap demi setahap sampai Anda benar-benar paham. Demikian juga dengan soal-soal latihan uji kompetensi dan uji kompetensi yang ada Anda harus mengerjakannya dan hasilnya harus benar. Apabila mengalami kesulitan, cobalah

diskusikan dengan teman-teman Anda atau tanyakan langsung kepada guru bina saat tatap muka.

Anda memerlukan waktu minimal 18 jam untuk mempelajari modul ini termasuk menyelesaikan soal-soal uji kompetensi yang tersedia di dalam modul. Untuk menghitung skor yang Anda peroleh gunakan rumus sebagai berikut:

$$\boxed{\text{Skor akhir} = \frac{\text{Jumlah Skor Benar}}{\text{Jumlah Skor Total}} \times 100\%}$$

Apabila skor Anda > 65%, bagus! Berarti Anda dapat melanjutkan mempelajari materi selanjutnya. Tetapi apabila , 65%, Anda harus mempelajari lagi modul ini sampai benar-benar paham.

Selamat belajar semoga berhasil. Yakinlah diri Anda insya Allah pasti akan berhasil, apabila Anda memiliki semangat belajar yang tinggi. Jangan lupa berdoalah kepada Allah SWT agar senantiasa diberikan pikiran yang jernih dan kemudahan dalam belajar.

AKAR-AKAR PERSAMAAN KUADRAT

Untuk mendukung tercapainya kompetensi dasar dalam materi pokok ini, indikator pencapaian hasil belajarnya adalah Anda dapat;

1. Menentukan akar-akar persamaan kuadrat dengan pemfaktoran dan rumus abc.
2. Menggunakan diskriminam dalam menyelesaikan masalah persamaan kuadrat.

1. Penentuan Akar-Akar Persamaan Kuadrat

Anda tentu telah mempelajari tentang persamaan kuadrat pada waktu di SMP Terbuka/Reguler. Oleh karena itu, sebelum membahas cara-cara untuk menentukan akar-akar dari suatu persamaan kuadrat, sebaiknya anda ingat kembali bentuk umum persamaan kuadrat yaitu $ax^2 + bx + c = 0$ dimana a, b, c $\in$ R

$\notin$ dan a   0. persamaan yang berbentuk $ax^2 + bx + c = 0$ dimana a. b, c,   0 dan a0 dinamakan persamaan kuadrat dalam peubah x. dalam persamaan kuadrat $ax^2 + bx + c = 0$, a adalah koefisien x^2, b adalah koefisien x, dan c adalah suku tetapan (konstanta).

Untuk menentukan nilai-nilai a, b, dan c dari suatu persamaan kuadrat, Anda perhatikan beberapa contoh di bawah ini.

1. $x^2 + bx + 5 = 0$, nilai a = 1, b = b, dan c = 5.
2. $x^2 – 4x = 0$, nilai a = 1, b = -4, dan c = 0.
3. $3x^2 + 4x + 1 = 0$, nilai a = 3, b = 4, dan c = 1.
4. $x^2 – 16 = 0$, nilai a = 1, b = 0, dan c = -16.

Berkaitan dengan nilai-nilai a, b, dan c, dikenal beberapa persamaan kuadrat, diantaranya adalah:

(i) Jika a = 1, maka persamaan menjadi $x^2 + bx + c = 0$ dan persamaan seperti ini disebut persamaan kuadrat biasa.

(ii) Jika b = 0, maka persaman menjadi $x^2 + c = 0$ dan persaman seperti ini disebut persamaan kuadrat sempurna.

(iii) Jika c = 0, maka persamaan menjadi $ax^2 + bx = 0$ dan persamaan seperti ini disebut peramaan kuadrat tak lengkap.

(iv) Jika a, b, dan c bilangan-bilangan rasional maka $ax^2 + bx + c = 0$ disebut persamaan kuadrat rasional.

Setelah Anda memahami beberapa bentuk persamaan kuadrat, selanjutnya marilah kita pelajari cara-cara menentukan akar-akar persamaan kuadrat. Kita masih ingat bahwa untuk menetukan akar-akar persamaan kuadrat dapat dilakukan dengan beberapa cara yaitu:

a. Memfaktorkan (Pemfaktoran)
b. Menggunakan rumus kuadrat (rumus abc).
c. Melengkapkan bentuk kuadrat sempurna.
d. Menggambar grafik fungsi kuadrat.

Kali ini, kita akan mempelajari cara menentukan akar-akar persamaan kuadrat dengan cara memfaktorkan dan menggunakan rumus kuadrat. Untuk itu, Anda pelajari baik-baik materi berikut ini.

a. Menentukan Akar-Akar Persamaan Kuadrat dengan Memfaktorkan

Jika suatu persamaan kuadrat $ax^2 + bx + c = 0$ dapat difaktorkan menjadi berbentuk P x Q = 0, maka akar-akar persamaan kuadrat tersebut dapat ditentukan dengan cara memfaktorkan (pemfaktoran).

Contoh persamaan kuadrat yang dapat difaktorkan antara lain:

- $x^2 + 3x + 2$

- $2x^2 - x - 1 = 0$

Lalu bagaimana menentukan akar-akar persamaan kuadrat dengan cara pemfaktoran?
Baiklah, untuk lebih jelasnya Anda pelajari beberapa contoh soal di bawah ini.

Contoh 1:
Tentukan akar-akar persamaan kuadrat $x^2 + 5x + 6 = 0$ dengan cara pemfaktoran!
Jawab:

$x^2 + 5x + 6 = 0$

$\Leftrightarrow$ $x\,\underline{(x+3)} + 2\underline{(x+3)}$

Penyelesaian:
disini 5x kita ubah menjadi 3x + 2x

karena: $3x \,.\, 2x = x^2 \,.\, 6$
$6x^2 = 6x^2$

$(x + 3)\ (x + 2)$

$x + 3$ atau $x + 2$

$x = 0 - 3$ atau $x = 0 - 2$

$x = -3$ atau $x = -2$

secara skema dapat ditunjukkan sebagai berikut

$x^2 + 3x + 2x + 6 = 0$

hasil kalinya = $6x^2$

sama

hasil kalinya = $6x^2$

- $x^2 + 3x$ difaktorkan menjadi $x (x + 30$
- $2x + 6$ difaktorkan menjadi $2(x + 3)$

jadi akar-akar persamaan kuadrat $x^2 + 5x + 6 = 0$ adalah $x_1 = -3$ atau $x_2 = -2$. atau dalam bentuk himpunan penyelesaian dituliskan sebagai HP = {-3, -2}.

Bagaimana, tidak sulit bukan? Apakah Anda paham? Baiklah, untuk lebih jelasnya Anda perhatikan contoh-contoh berikut ini.

Contoh 2:

Tentukan akar-akar persamaan kuadrat: $x^2 - x - 12 = 0$ dengan cara pemfaktoran!

Jawab:

$x^2 - x - 12 = 0$

$x^2 + 3x + (-4x) -12 = 0$

$\Leftrightarrow 0 \quad \underbrace{x^2 + 3x} - \underbrace{4x - 12} = 0$

$\Leftrightarrow \quad x\underline{(x+3)} -4\underline{(x+3)} = 0$

$(x + 3)\ (x - 4) = 0$

$x + 3 = 0$ atau $x - 4 = 0$

$x = 0 - 3$ atau $x = 0 + 4$

$x = -3$ atau $x = 4$

Penyelesaian:

disini $-x$ kita ubah menjadi $3x + (-4x)$

karena $3x \,.\, (-4x) = x^2 \,.(-12)$

$-12x^2 = -12x^2$

Secara skema dapat ditunjukkan sebagai berikut:

$x^2 + 3x + (-4x) - 12 = 0$

hasil kalinya = $-12x^2$

sama

hasil kalinya = $-12x^2$

- $x^2 + 3x$ difaktorkan menjadi $x(x+3)$.
- $-4x - 12$ difaktorkan menjadi $-4(x + 3)$.

Jadi akar-akar persamaan kuadrat $x^2 - x - 12 = 0$ adalah $x_1 = -3$ atau $x_2 = 4$. atau dalam bentuk himpunan penyelesaian dituliskan sebagai HP = {-3, 4}

Bagaimana, mudah bukan? Sudah pahamkah Anda? Baiklah, untuk lebih jelasnya perhatikanlah contoh 3.

Contoh 3:

Tentukan akar-akar persamaan kuadrat $2x^2 + 3x + 1 = 0$ dengan cara pemfaktoran!

Jawab:

$2x^2 + 3x + 1 = 0$

$\Leftrightarrow \quad 2x\,\underline{(x + 1)} + \underline{x + 1} = 0$

$2x\,(x + 1) + 1\,.\,(x + 1) = 0$

$(x + 1)\,(\,2x + 1) = 0$

$x = 1 = 0$ atau $2x + 1 = 0$

$x = 0 - 1$ atau $2x = 0 - 1$

$x = -1$ atau $2x = -1$

Penyelesaian:

di sini 3x kita ubah menjadi $2x + x = 0$

karena $2x\,.\,x = 2x^2\,.\,1$

$2x^2 = 2x^2$

Secara skema dapat ditunjukkan sebagai berikut:

$2x^2 = 2x + x + 1 = 0$

hasil kalinya = $2x^2$

sama

hasil kalinya = $2x^2$

- $2x^2 + 2x$ difaktorkan menjadi $2x\,(x + 1)$.
- $x + 1$ difaktorkan menjadi $1\,(x + 1)$.

Jadi akar-akar persamaan kuadrat $2x^2 + 3x + 1 = 0$ adalah $x_1 = -1$ atau $x_2 = -\frac{1}{2}$

atau dalam bentuk himpunan penyelesaiaan dituliskan sebagai Hp = $\left\{-1, -\frac{1}{2}\right\}$

Apakah Anda sudah paham? Bagus! Apabila masih mengalami kesulitan, perhatikan contoh 4 berikut ini.

Contoh 4:

F. Tentukan akar-akar persamaan kuadrat $3x^2 - 2x = 0$ dengan cara pemfaktoran!

Jawab:

$3x^2 - 2x = 0$

Karena persamaan kuadrat ini hanya terdiri dari dua suku dan masing-masing suku mempunyai faktor yang sama yaitu x, maka difaktorkan menjadi:

$\Leftrightarrow x\,(3x - 2) = 0$

$x = 0$ atau $3x - 2 = 0$

$3x = 0 + 2$

$3x = 2$

jadi akar-akar persamaan kuadrat $3x^2 - 2x = 0$ adalah $x_1 = 0$ atau $x_2 =$ Atau dalam bentuk himpunan penyelesaian dituliskan sebagai Hp = $\left\{0\ ,\ \frac{2}{3}\right\}$

Anda masih belum paham? Baiklah, untuk lebih jelasnya perhatikan contoh 5 di bawah ini.

Contoh 5:
Tentukan akar-akar persamaan kuadrat: $x^2 - 9 = 0$ dengan cara pemfaktoran!
Jawab:
$x^2 - 9 = 0$
Persamaan kuadrat ini mempunyai bentuk istimewa, dapat kita faktorkan dengan menggunakan rumus $x^2 - a = (x + \sqrt{a})\,(x - \sqrt{a})$ sehingga menjadi:

$\Leftrightarrow$ (x +) $(x - \sqrt{9}) = 0$.
$\Leftrightarrow$ $(x + 3)(x - 3) = 0$
$x + 3 = 0$ atau $x - 3 = 0$
$x = 0 - 3$ atau $x = 0 + 3$.
$x = -3$ atau $x = 3$
jadi akar-akar persamaan kuadrat $x^2 - 9 = 0$ adalah $x_1 = -3$ atau $x_2 = 3$. atau dalam bentuk himpunan penyelesaian dituliskan sebagai Hp = {-3, 3}.

Setelah memperhatikan beberapa contoh di atas apakah Anda sudah paham? Untuk mengetahui sejauh mana pemahaman Anda terhadap materi di atas, kerjakan soal-soal latihan uji kompetensi di bawah ini.

$\Leftrightarrow \sqrt{9}$

Tentukan akar-akar tiap persamaan kuadrat di bawah ini dengan cara pemfaktoran.

1. $x^2 + 8x + 12 = 0$
2. $x^2 + x - 20 = 0$
3. $2x^2 + 7x + 3 = 0$
4. $4x^2 - 5x = 0$
5. $x^2 - 4 = 0$
6. $x^2 - 8 = 0$

Sebelum Anda selesai mengerjakan soal-soal di atas, jangan membaca jawabannya terlebih dulu. Apabila sudah selesai mengerjakannya, samakanlah pekerjaan Anda dengan jawaban di bawah ini.

1. $x^2 + 8x + 12 = 0$
$x^2 + 6x + 2x + 12 = 0$, di sini 8x kita ubah menjadi 6x + 2x,
$x(x + 6) + 2(x + 6) = 0$ karena $6x \cdot 2x = x^2 \cdot 12$
$(x + 6)(x + 2) = 0$ $12x^2 = 12x^2$

$x + 6 = 0$ atau $x + 2 = 0$
$x = 0 - 6$ atau $x = 0 - 2$
$x = -6$ atau $x = -2$
Jadi akar-akarnya adalah $x_1 = -6$ atau $x_2 = -2$.
Atau Hp = {-6, -2}

2. $x^2 - x - 20 = 0$

$$\begin{aligned} x^2 + 4x + (-5x)\ 20 &= 0., \\ x^2 + 4x - 5x - 20 &= 0 \\ x(x+4) - 5(x+4) &= 0 \\ (x+4)(x-5) &= 0 \end{aligned}$$

di sini $-x$ kita ubah menjadi $4x + (-5x)$, karena $4x \cdot (-5x) = x^2 \cdot (-20)$

$20x^2 = -20x^2$

$x + 4 = 0$ atau $x - 5 = 0$

$x = 0 - 4$ atau $x = 0 + 5$

$x = -4$ atau $x = 5$

jadi akar-akarnya adalah $x_1 = -4$ atau $x_2 = 5$.

Atau Hp = {-4, 5}.

3. $$\begin{aligned} 2x^2 = 7x + 3 &= 0 \\ 2x^2 + 6x + x + 3 &= 0., \\ 2x(x+3) + x + 3 &= 0 \\ 2x(x+3) + 1.(x+3) &= 0 \\ (x+3)(2x+1) &= 0 \end{aligned}$$

di sini $7x$ kita ubah menjadi $6x + x$, karena $6x \cdot x = 2x^2 \cdot 3$

$6x^2 = 6x^2$

$x + 3$ atau $2x + 1 = 0$

$x = 0 - 3$ atau $2x = 0 - 1$

$x = -3$ atau $2x = -1$

$x =$

Jadi akar-akarnya adalah $x_1 = -3$ atau $x_2 = -\frac{1}{2}$

Atau Hp = $\left\{-3,\ -\frac{1}{2}\right\}$

4. $4x^2 - 5x = 0$

karena persamaan kuadrat ini hanya terdiri dari dua suku dan masing-masing suku mempunyai faktor yang sama yaitu x, maka difaktorkan menjadi:

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \quad x(4x-5) &= 0 \\ x = 0 \text{ atau } 4x - 5 &= 0 \\ 4x &= 0 + 5 \\ 4x &= 5 \end{aligned}$$

$x =$

Jadi akar-akarnya adalah $x_1 = 0$ atau $x_2 = \frac{5}{4}$.

Atau Hp = $\left\{0,\ \frac{5}{4}\right\}$

5. $x^2 - 4 = 0$
   Persamaan kuadrat ini mempunyai bentuk istimewa, dapat difaktorkan dengan menggunakan rumus $x^2 - a = (x + \sqrt{5})(x - \sqrt{a})$
   Sehingga menjadi:
   $\Leftrightarrow \quad (x + \quad)(x - \sqrt{4}) \quad = 0$
   $\Leftrightarrow \quad (x + 2 (x - 2) \quad = 0$
   $x + 2 = 0$ atau $x - 2 = 0$
   $x = 0 - 2$ atau $x = 0 + 2$
   $x = -2$ atau $x = 2$
   Jadi akar-akarnya adalah $x_1 = -2$ atau $x_2 = 2$.
   Atau Hp = {-2, 2}

6. $x^2 - 8 = 0$
   Persamaan kuadrat ini mempunyai bentuk istimewa, dapat kita faktorkan dengan menggunakan rumus $x^2 - a = (x + \quad)(x - \sqrt{a})$ seingga menjadi:
   $\Leftrightarrow \quad (x + \quad)(x - \sqrt{8}) = 0$
   $\Leftrightarrow \quad x + \quad = 0$ atau $x - \sqrt{8} = 0$
   $\Leftrightarrow \quad x = 0 - \quad$ atau $x = 0 + \sqrt{8}$
   $\Leftrightarrow \quad x = - \quad$ atau $x = \sqrt{8}$
   karena $= \sqrt{8} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$ maka menjadi
   $x = -2\sqrt{2}$ atau $x = 2\sqrt{2}$
   jadi akar-akarnya adalah $x_1 = -2\sqrt{2}$ atau $x_2 = 2\sqrt{2}$
   atau Hp = $\{-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}\}$

Bagaimana, mudah bukan? Apakah pekerjaan Anda sama seperti jawaban di atas?Apabila ya, bagus! Berarti Anda benar. Apabila pekerjaan Anda belum benar, Segeralah koreksi dan samakan dengan jawaban di atas. Bagi Anda yang menjawab benar, selanjutnya dapat mempelajari materi di bawah ini.

b. Menentukan Akar-Akar Persamaan Kuadrat dengan Menggunakan Rumus Kuadrat.

Selain menggunakan cara pemfaktoran, untuk menentukan akar-akar persamaan kuadrat $ax^2 + bx + c = 0$ adalah dengan menggunakan rumus kuadrat atau sering disebut rumus abc. Rumus kuadrat dapat diturunkan dengan cara melengkapkan kuadrat sempurna sebagai berikut:
$ax^2 + bx + c = 0$

- Kedua ruas ditambah –c, maka menjadi:
  $ax^2 + bx = -c$

- Kedua ruas dibagi dengan a dimana a,

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$$

- Lengkapkan kuadrat pada ruas kiri, dengan cara menambah $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$ pada kedua ruas, maka diperoleh:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = \sqrt{\frac{c}{a}} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2$$

Nyatakan ruas kiri dalam bentuk kuadrat sempurna yaitu:

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{4ac}{4a^2} + \frac{b^2}{4a^2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

$$\Leftrightarrow \quad x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

$$\Leftrightarrow \quad x + \frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{\sqrt{4a^2}}$$

$$\Leftrightarrow \quad x + \frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\Leftrightarrow \quad x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\Leftrightarrow \quad x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\Leftrightarrow \quad x = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{atau} \quad x = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

jadi rumus akar-akar persamaan kuadrat $ax^2 + bx + c = 0$

adalah $$\boxed{x_{1.2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

Bagaimana menggunakan rumus kuadrat di atas? Baiklah, untuk itu marilah pelajari beberapa contoh berikut.

Contoh 1:

Tentukan akar-akar persamaan kuadrat $x^2 + 5x + 6 = 0$ dengan cara menggunakan rumus kuadrat!

Jawab:

$x^2 + 5x + 6 = 0$, berarti a = 1, b = 5, dan c = 6.

Dengan menggunakan rumus kuadrat maka diperoleh:

$$
\begin{aligned}
x_{1.2} &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\
&= \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4.1.6}}{2.1} \\
&= \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} = \frac{-5 \pm \sqrt{1}}{2} = \frac{-5 \pm 1}{2}
\end{aligned}
$$

$$x_1 = \frac{-5+1}{2} = \frac{-4}{2} = 2 \quad \text{atau} \quad x_2 = \frac{-5-1}{2} = \frac{-6}{2} = -3$$

Jadi akar-akarnya adalah x_1=-2 atau x_2 = -3.

Atau Hp = {-2, -3}. Apabila diurutkan dari nilai x yang kecil, maka dapat juga ditulis Hp = {-3, -2}.

Bagaimana, mudah bukan? Anda sudah paham? Bagus!

Apabila Anda belum paham perhatikanlah contoh 2 di bawah ini!

Contoh 2:

Tentukan akar-akar persamaan kuadrat: $x^2 - 4x + 4 = 0$ dengan cara menggunakan rumus kuadrat!

Jawab:

$x^2 - 4x + 4 = 0$, berarti a = 1, b = -4, dan c = 4

Dengan menggunakan rumus kuadrat maka diperoleh:

$$
\begin{aligned}
x_{1.2} &= \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4.1.4}}{2.1} \\
&= \frac{4 \pm \sqrt{16 - 16}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{0}}{2} = \frac{4 \pm 0}{2}
\end{aligned}
$$

$$x_1 = \frac{4+0}{2} = \frac{4}{2} = 2 \quad \text{atau} \quad x_2 = \frac{4-0}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

Jadi akar-akarnya $x_1 = x_2 = 2$. Atau Hp = {2}

Karena akar-akar persamaan kuadrat di atas adalah $x_1 = x_2 = 2$, maka persamaan kuadrat itu mempunyai akar-akar sama (kembar)

Setelah memperhatikan contoh-contoh di atas, apakah Anda paham? Baiklah, untuk menambah pemahaman Anda perhatikan contoh 3.

Contoh 3:

Tentukan akar-akar persamaan kuadrat: $2x^2 - 4x + 1 = 0$ dengan cara menggunakan rumus kuadrat!

Jawab:

$2x^2 - 4x + 1 = 0$, berarti a = 2, b = -4, dan c = 1.

Dengan menggunakan rumus kuadrat maka diperoleh:

$$
\begin{aligned}
{}_{1.2} &= \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4.2.1}}{2.2} \\
&= \frac{4 \pm \sqrt{16-8}}{4} \\
&= \frac{4 \pm \sqrt{8}}{4} \quad (\text{catatan}: \sqrt{8} = \sqrt{4}.\sqrt{2} = 2\sqrt{4} \\
&= \frac{4 \pm 2\sqrt{4}}{2} \\
&= \frac{2(2 \pm \sqrt{2}}{4} \\
&= \frac{2 \pm \sqrt{2}}{2}
\end{aligned}
$$

$$x_1 = \frac{2+\sqrt{2}}{2} \quad \text{atau} \quad x_2 = \frac{2-\sqrt{2}}{2}$$

Jadi akar-akarnya adalah $x_1 = \dfrac{2+\sqrt{2}}{2}$ atau $x_2 = \dfrac{2-\sqrt{2}}{2}$

Atau Hp = $\left\{ \dfrac{2+\sqrt{2}}{2}, \dfrac{2-\sqrt{2}}{2} \right\}$

Bagaimana, mudah bukan? Baiklah, untuk lebih jelasnya perhatikan contoh 4 di bawah ini!

Contoh 4:

Tentukan akar-akar persamaan kuadrat: $3x^2 + 2x + 1 = 0$ dengan menggunakan rumus kuadrat!

Jawab:

$3x^2 + 2x + 1 = 0$, berarti a = 3, b = 2, dan c = 1.

Dengan menggunakan rumus kuadrat maka diperoleh:

$$x_{1.2} = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4.3.1}}{2.3} = \frac{-2 \pm \sqrt{4-12}}{6} = \frac{-2 \pm \sqrt{4-12}}{6}$$

Karena adalah khayal (imajiner), berarti akar-akar persamaan kuadrat di atas adalah khayal (imajiner). Atau persamaan kuadrat $3x^2 + 2x + 1=0$ \dikatakan tidak mempunyai penyelesaian. Himpunan penyelesaiannya adalah himpunan kosong, dilambangkan dengan .

Setelah mempelajari beberapa contoh di atas, apakah Anda sudah paham? Untuk mengetahui sejauh mana pemahaman Anda terhadap materi di atas, kerjakan soal-soal latihan uji kompetensi berikut ini.

Tentukan akar-akar tiap persamaan kuadrat di bawah ini dengan cara menggunakan rumus kuadrat:

1. $6x^2 – 5x + 1 = 0$
2. $x^2 + 6x – 9 = 0$
3. $x^2 – 4x -1 = 0$
4. $x^2 – x + 2 = 0$

Kerjakanlah soal-soal di atas tanpa membaca jawabannya terlebih dahulu. Apabila Anda sudah selesai mengerjakannya, cocokkanlah pekerjaan Anda dengan jawaban di bawah ini.

1. $6x^2 – 5x + 1= 0$, berarti: a = 6, b = -5, dan c = 1.
   Maka:

$$x_{1.2} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4.6.1}}{2.6}$$

$$= \frac{5 \pm \sqrt{25-24}}{12}$$

$$= \frac{5 \pm \sqrt{1}}{12}$$

$$= \frac{5 \pm 1}{12}$$

$$x_1 = \frac{5+1}{12} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2} \quad \text{atau} \quad x_2 = \frac{5-1}{12} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

Jadi akar-akarnya adalah $x_1 = \frac{1}{2}$ atau $x_2 = \frac{1}{3}$

Atau Hp = $\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right\}$

2. $x^2 + 6x + 9 = 0$, berarti a = 1, b = 6, dan c = 9.
Maka:

$$x_{1.2} = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4.1.9}}{2.1}$$
$$= \frac{-6 \pm \sqrt{36-36}}{2}$$
$$= \frac{-6 \pm \sqrt{0}}{2}$$
$$= \frac{-6 \pm 0}{2}$$
$$x_1 = \frac{-6+0}{2} = \frac{-6}{2} = -3 \quad \text{atau} \quad x_2 = \frac{-6-0}{2} = \frac{-6}{2} = -3$$

Jadi akar-akarnya adalah $x_1 = x_2 = -3$.
Atau Hp = {-3}.

3. $x^2 - 4x - 1 = 0$, berarti a = 1, b = -4, dan c = -1.
Maka:

$$x_{1.2} = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4.1.(-1)}}{2.1}$$
$$= \frac{4 \pm \sqrt{16-4}}{2}$$
$$= \frac{4 \pm \sqrt{20}}{2} \quad \text{catatan}: \sqrt{20} = \sqrt{4}.\sqrt{5} = 2\sqrt{5}$$
$$= \frac{2(2 \pm \sqrt{5}}{2}$$
$$= 2 \pm \sqrt{5}$$
$$x_1 = 2 + \sqrt{5} \quad \text{atau} \quad x_2 = 2 - \sqrt{5}$$

Jadi akar-akarnya adalah $x_1 = 2 + \sqrt{5}$ atau $x_2 = 2 - \sqrt{5}$

Atau Hp = $\{2 + \sqrt{5}\ ,\ 2 - \sqrt{5}\}$

4. $x^2 - x + 2 = 0$, berarti a = 1, b = -1, dan c = 2.
Maka:

$$x_{1.2} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4.1.2}}{2.1} = \frac{1 \pm \sqrt{1-8}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{-7}}{2}$$

Karena adalah khayal (imajiner), berarti akar-akar persamaan kuadrat di atas adalah khayal (imajiner). Atau persamaan kuadrat $x^2 - x + 2 = 0$ dikatakan tidak mempunyai penyelesaian.

Bagaimana, tidak sulit bukan? Pekerjaan Anda sama seperti jawaban di atas? Apabila ya bagus, berarti Anda benar. Apabila pekerjaan Anda belum benar, segeralah samakan dengan jawaban di atas. Bagi Anda yang menjawab benar, selanjutnya dapat mempelajari materi di bawah ini.

2. Penggunaan Diskriminan

Dalam kegiatan 1 bagian b, Anda telah mempelajari cara menentukan akar-akar persamaan kuadrat $ax^2 + bx + c = 0$ (a) dengan menggunakan rumus kuadrat atau rumus abc, yaitu:

$$x_{1.2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Dari rumus itu tampak bahwa akar-akar persamaan kuadrat sangat ditentukan oleh nilai $b^2 - 4ac$.

Bentuk $b^2 - 4ac$ disebut **diskriminan (pembeda)** dari persamaan kuadrat $ax^2 + bx + c= 0$ dan dilambangkan dengan huruf D, sehingga $D = b^2 - 4ac$. Pemberian nama/istilah diskriminan $D = b^2 - 4ac$, dikarenakan nilai $D = b^2 - 4ac$ ini yang **mendiskriminasikan (membedakan)** jenis akar-akar persamaan kuadrat.Jadi kegunaan diskriminan adalah untuk menentukan jenis akar-akar persamaan kuadrat.

Untuk lebih jelasnya, mairlah kita perhatikan penjelasan materi di bawah ini.

Untuk memeriksa hubungan antara jenis akar-akar suatu persamaan kuadrat dengan nilai diskriminan $D = b^2 - 4ac$, simaklah kembali akar-akar persamaan kuadrat pada contoh 1 – 4 yang penyelesaiannya dengan menggunakan rumus kuadrat (rumus abc) dan telah Anda pelajari pada materi kegiatan 1 bagian b, yaitu:

- Persamaan kuadrat pada contoh 1 yaitu $x^2 = 5x + 6 = 0$
  mempunyai akar-akar $x_1 = -2$ atau $x_2 = -3$.
  Akar-akar ini merupakan bilangan real yang berlainan dan rasional (terukur).
  Koefisien-koefisien persamaan kuadrat $x^2 + 5x + 6 = 0$ adalah a = 1, b = 5, dan c = 6, sehingga nilai diskriminannya adalah:
  $D = b^2 - 4ac$
  $= 5^2 - 4.1.6$
  $= 25 - 24$
  $= 1$
  $= 1^2$

Ternyata bahwa:
D>0 dan D = 1^2 merupakan bentuk kuadrat sempurna
.

- Persamaan kuadrat pada contoh 2 yaitu $2x^2 - 4x + 1 = 0$ mempunyai akar-akar $x_1 = \frac{2+\sqrt{2}}{2}$ atau $x_2 = \frac{2-\sqrt{2}}{2}$
  Akar-akar ini merupakan bilangan real yang berlainan dan rasional (tak terukur)
  Koefisien-koefisien persamaan kuadrat $2x^2 - 4x + 1 = 0$ adalah a = 2, b = -4, dan c = 1, sehingga nilai diskriminannya adalah:
  D = $b^2 - 4ac$
  = $(-4)^2 - 4.2.1$
  = 16 – 8
  = 8
  Ternyata bahwa D>0 dan D=8 tidak berbentuk kuadrat sempurna.

- Persamaan kuadrat pada contoh 3 yaitu $x^2 - 4x + 4 = 0$ mempunyai akar-akar $x_1 = x_2 = 2$.
  Dikatakan kedua akarnya sama (kembar), real dan rasional. Koefisien-koefisien persamaan kuadrat $x^2 - 4x + 4 = 0$ adalah a = 1, b = -4, dan c = 4, sehingga nilai diskriminannya adalah:
  D = $b^2 - 4ac$
  = $(-4)^2 - 4.1.4$
  = 16 – 16
  = 0
  Ternyata bahwa:
  D = 0

- Persamaan kuadrat pada contoh 4 yaitu $3x^2 + 2x + 1 = 0$ tidak mempunyai akar real atau kedua akarnya tidak real/khayal (imajiner).
  Koefisien-koefisien persamaan kuadrat $3x^2 + 2x + 1 = 0$ adalah a = 3, b = 2, dan c = 1, sehingga nilai diskriminannya adalah:
  D = $b^2 - 4ac$
  = $2^2 - 4.3.2$
  = 4 – 12
  = -8
  Ternyata bahwa:
  D<0

Berdasarkan penjelasan di atas dapat kita ketahui bahwa ada hubungan antara jenis akar-akar persamaan kuadrat dengan nilai diskriminannya yaitu D = $b^2 - 4ac$. Jadi nilai diskriminan D= $b^2 - 4ac$ sangat menentukan jenis akar-akar persamaan kuadrat $ax^2 + bx + c = 0$, yaitu:

1. Jika D>0, maka persamaan kuadrat mempunyai dua akar real yang berlainan.
   a. Jika D berbentuk kuadrat sempurna maka kedua akarnya rasional

   b. Jika D tidak berbentuk kuadrat sempurna maka kedua akarnya irasional.
2. Jika D= 0, maka persamaan kuadrat mempunyai dua akar yang sama (kembar), real dan rasional.
3. Jika D<0, maka persamaan kuadrat tidak mempunyai akar real atau kedua akarnya tidak real/khayal (imajiner)

Selanjutnya, untuk mengetahui jenis-jenis akar persamaan kuadrat (real atau tidak, sama atau tidak, rasional atau irasional) kita tidak perlu menentukan akar-akar persamaan kuadrat tersebut, tetapi cukup menghitung nilai diskriminan $D = b^2 - 4ac$.

Agar Anda memahami dan terampil menggunakan perhitungan nilai diskriminan untuk menentukan jenis-jenis akar persamaan kuadrat, perhatikanlah beberapa contoh di bawah ini!

Contoh 1:
Tanpa harus menyelesaikan persamaan terlebih dulu, tentukan jenis akar-akar tiap persamaan kuadrat berikut!
a. $x^2 - 10x + 16 = 0$
b. $3x^2 - 36 = 0$
c. $x^2 + 6x + 9 = 0$
d. $-2x^2 + 3x - 6 = 0$

Jawab:
a. $x^2 - 10x + 16 = 0$, berarti a = 1, b = -10, dan c = 16.
   Nilai diskriminannya adalah:
   $D = b^2 - 4ac$
   $= (-10)^2 - 4 . 1 .16$
   $= 100 - 64$
   $= 36$
   Karena D = 36>0 dan $D = 36 = 6^2$ berbentuk kuadrat sempurna maka persamaan kuadrat $x^2 - 10x + 16 = 0$ mempunyai dua akar real yang berlainan dan rasional.

b. $3x^2 - 36 = 0$, berarti a = 3, b = 0, dan c = -36.
   Nilai diskriminannya adalah:
   $D = b^2 - 4ac$
   $= 0^2 - 4. 3. (-36)$
   $= 0 + 432$
   $= 432$
   Karena D = 432>0 dan D = 432 tidak berbentuk kuadrat sempurna maka persamaan kuadrat $3x^2 - 36 = 0$ mempunyai dua akar yang berlainan dan irasional.

c. $x^2 + 6x = 9 = 0$, berarti a = 1, b = 6, dan c = 9.
   Nilai diskriminanya adalah:
   $D = b^2 - 4ac$

$= 6^2 - 4 \,.\, 19$
$= 36 - 36$
$= 0$

karena D = 0, maka persamaan kuadrat $x^2 + 6x + 9 = 0$ mempunyai dua akar yang sama (kembar), real dan rasional.

d. $-2x^2 + 3x - 6 = 0$, berarti a = -2, b = 3, dan c = -6
Nilai diskriminannya adalah:

$$
\begin{aligned}
D &= b^2 - 4ac \\
&= 3^2 - 4.\ (-2).(-6) \\
&= 9 - 48 \\
&= -39.
\end{aligned}
$$

Karena D = -39 maka persamaan kuadrat $-2x^2 + 3x - 6 = 0$ tidak mempunyai akar real atau kedua akarnya tidak real/khayal (imajiner).

Bagaimana, mudah bukan? Baiklah, untuk lebih jelasnya perhatikan contoh 2 di bawah ini.

Contoh 2:
Tentukan nilai p agar persamaan kuadrat $2x^2 - 4x + p = 0$ mempunyai dua akar yang sama (kembar)!
Jawab:
$2x^2 - 4x + p = 0$, berarti a = 2, b = -4, dan c = p.
nilai diskriminannya:

$$
\begin{aligned}
D &= b^2 - 4ac \\
&= (-4)^2 - 4.\ 2.\ p \\
&= 16 - 8p
\end{aligned}
$$

Agar persamaan kuadrat $2x^2 - 4c + p = 0$ mempunyai dua akar yang sama (kembar), maka: D = 0.

$$
\begin{aligned}
\Leftrightarrow 16 - 8P &= 0 \\
16 &= 0 + 8P \\
16 &= 8P \\
P &= \\
P &= 2.
\end{aligned}
$$

Jadi persamaan kuadrat $2x^2 - 4x + p = 0$ mempunyai dua akar yang sama (kembar) jika nilai p = 2.

Bagaimana, tidak sulit bukan? Apakah Anda sudah paham? Apabila masih belum jelas, perhatikan contoh 3 di bawah ini.

Contoh 3:
Tunjukkan bahwa persamaan kuadrat $x^2 + (m+2)x+m = 0$, dengan mR selalu mempunyai dua akar real yang berlainan!
Jawab:
$x^2 + (m+2)\,x + m = 0$, berarti a = 1, b = (m + 2), dan c = m.

nilai diskriminannya adalah:

$D = b^2 - 4ac$
$\quad = (m+2)^2 - 4.\ 1.\ m$
$\quad = m^2 + 4m + 4 - 4m$
$\quad = m^2 + 4$

Untuk setiap mR maka m^2 selalu positif atau $m^2 > 0$, sehingga nilai $D = m^2+4$ juga selalu positif atau $D = m^2 + 4 > 0$. oleh karena $D > 0$ untuk setiap mR maka persamaan kuadrat $x^2 + (m + 2)x + m = 0$ selalu mempunyai dua akar real yang berlainan.

Nah, setelah memperhatikan beberapa contoh di atas apakah Anda sudah paham? Untuk mengetahui sampai dimana pemahaman Anda terhadap materi di atas, kerjakanlah soal-soal latihan di bawah ini.

1. Tanpa harus menyelesaikan persamaannya terlebih dulu, tentukan jenis akar-akar tiap persamaan kuadrat berikut!
   a. $x^2 + x - 20 = 0$
   b. $2x^2 - 2x - 1 = 0$
   c. $x^2 - 10x + 25 = 0$
   d. $x^2 - x + 2 = 0$
2. Tunjukkan bahwa persamaan kuadrat $2x^2 + (p + 4)x + p = 0$, dengan p R selalu mempunyai dua akar real yang berlainan!
3. Tentukan nilai n agar persamaan kuadrat $x^2 + nx + 36 = 0$ mempunyai dua akar yang sama (kembar)!

Sebelum Anda selesai mengerjakan soal-soal di atas jangan membaca jawabannya terlebih dahulu. Apabila sudah selesai mengerjakannya, samakanlah pekerjaan Anda dengan jawaban di bawah ini.

1. a. $x^2 + x - 20 = 0$, berarti a = 1, b = 1, dan c = -20.
   Nilai diskriminannya:
   $D = b^2 - 4ac$
   $\quad = 1^2 - 4.1.(-20)$
   $\quad = 1 + 80$
   $\quad = 81$
   Karena $D = 81 > 0$ dan $D = 81 = 9^2$ berbentuk kuadrat sempurna maka persamaan kuadrat $x^2 + x - 20 = 0$ mempunyai dua akar real yang berlainan dan rasional.

   b. $2x^2 - 2x - 1 = 0$, berarti a = 2, b = -2, dan c = -1.
   Nilai diskriminannya:
   $D = b^2 - 4ac$
   $\quad = (-2)^2 - 4.2.(-1)$
   $\quad = 4 + 8$
   $\quad = 12$
   Karena $D = 12 > 0$ dan $D = 12$ tidak berbentuk kuadrat sempurna maka

persamaan kuadrat $2x^2 - 2x - 1 = 0$ mempunyai dua akar yang berlainan dan irasional.

c. $x^2 - 10x + 25 = 0$, berarti a = 1, b = -10, dan c = 25.
Nilai diskriminannya:
$$\begin{aligned} D &= b^2 - 4ac \\ &= (-10)^2 - 4.\ 1.\ 25 \\ &= 100 - 100 \\ &= 0 \end{aligned}$$
Karena D = 0, maka persamaan kuadrat $x^2 - 10x + 25 = 0$ mempunyai dua akar yang sama (kembar) real dan rasional.

d. $x^2 - x + 2 = 0$, berarti a = 1, b = -1, dan c = 2.
Nilai diskriminannya:
$$\begin{aligned} D &= b^2 - 4ac \\ &= (-1)^2 - 4.\ 1.\ 2 \\ &= 1 - 8 \\ &= -7 \end{aligned}$$
Karena D = -7<0 maka persamaan kuadrat $x^2 - x + 2 = 0$ tidak mempunyai akar real atau kedua akarnya tidak real/khayal (imajiner).

2. $2x^2 = (p+4)x + p = 0$, berarti a = 2, b = (p+4), dan c = p
Nilai diskriminannya adalah:
$$\begin{aligned} D &= b^2 - 4ac \\ &= (p+ 4)^2 - 4.\ 2.\ p \\ &= p^2 + 8p + 16 - 8p \\ &= p^2 + 16 \end{aligned}$$
Untuk setiap p R maka p^2 selalu positif atau $p^2 > 0$, sehingga nilai $D = p^2 + 16$ juga selalu positif atau $D = p^2 + 16 > 0$. oleh karena D>0 untuk setiap pR maka persamaan kuadrat $2x^2 + (p + 4)x + p = 0$ selalu mempunyai dua akar real yang berlainan.

3. $x^2 + nx + 3b = 0$, berarti a = 1, b = n, dan c = 36.
Nilai diskriminannya:
$$\begin{aligned} D &= b^2 - 4ac \\ &= n^2 - 4.\ 1.\ 36 \\ &= n^2 - 144 \end{aligned}$$
Agar persamaan kuadrat $x^2 + nx + 36 = 0$ mempunyai dua akar yang sama (kembar), maka: D = 0
$$\begin{aligned} n^2 - 144 &= 0 \\ n^2 &= 0 + 144 \\ n^2 &= 144 \\ n^2 &= \pm\sqrt{144} \\ n &= \pm 12 \end{aligned}$$
n = 12 atau n = -12.

Jadi persamaan kuadrat $x^2 + nx + 36 = 0$ mempunyai dua akar yang sama (kembar) jika nilai $n = 12$ atau $n = -12$.

Bagaimana, tidak sulit bukan? Apakah pekerjaan Anda sama seperti jawaban di atas? Apabila ya, bagus berarti Anda benar. Apabila jawaban Anda belum benar, segeralah periksa dan samakan dengan jawaban di atas. Bagi Anda yang menjawab benar selanjutnya kerjakanlah soal-soal uji kompetensi 1.

Jujurlah Anda dalam mengerjakan soal-soal uji kompetensi 1 yang berguna untuk mengetahui tingkat penguasaan Anda terhadap materi kegiatan 1. Nah, selamat mengerjakan!

Kompetensi 1

Kerjakanlah soal-soal di bawah ini dengan singkat, jelas, dan benar!

1. Tentukan akar-akar tiap persamaan kuadrat di bawah ini dengan cara pemfaktoran!
   a. $x^2 + 10x + 16 = 0$
   b. $2x^2 - 5x - 3 = 0$

2. Tentukan akar-akar tiap persamaan kuadrat di bawah ini dengan menggunakan rumus kuadrat atau rumus abc!
   a. $x^2 - 4x + 1 = 0$
   b. $3x^2 + 6x + 1 = 0$
   c. $x^2 - x + 3 = 0$

3. Tanpa harus menyelesaikan persamaan terlebih dulu, tentukan jenis akar-akar tiap persamaan kuadrat di bawah ini!
   a. $x^2 + 8x - 1 = 0$
   b. $x^2 - 12x + 36 = 0$
   c. $3x^2 + x + 2 = 0$

4. Tentukan nilai p agar persamaan kuadrat $x^2 + px + 9 = 0$ mempunyai dua akar yang sama (kembar)!

5. Tunjukkan bahwa persamaan kuadrat $-x^2 = (p - 2)x + p = 0$ dengan p R selau mempunyai dua akar real yang berkaitan!

Pekerjaan Anda sudah selesai? Bagaimana, tidak sulit bukan? Untuk mengetahui hasil pekerjaan Anda, selanjutnya cocokkanlah jawaban Anda dengan kunci uji kompetensi 1 yang tersedia di bagian akhir modul ini. Kemudian hitunglah skor Anda dengan menggunakan aturan sebagai berikut:

Untuk: nomor 1, jawaban benar skor = 8
nomor 2, jawaban benar skor = 12
nomor 3, jawaban benar skor = 12
nomor 4, jawaban benar skor = 4
nomor 5, jawaban benar skor = 4

Apabila semua jawaban benar, maka skor total = 8= 12 + 12 + 4 = 4 = 40.

Selanjutnya untuk menghitung skor akhir yang Anda peroleh, gunakan rumus yang terdapat pada halaman pendahuluan modul ini.

Jika Anda memperoleh skor > 65%, berarti Anda telah berhasil menguasai materi dalam kegiatan 1. selanjutnya Anda dapat mempelajari materi kegiatan 2. Tetapi, bagi Anda yang memperoleh skor < 65%, Anda harus mempelajari kembali materi pada kegiatan 1, bila perlu diskusikan dengan teman-teman atau tanyakan langsung kepada guru bina pada saat tatap muka. Jangan malu untuk bertanya. Keberhasilan Anda ada pada diri Anda dan selalu berdoalah kepada Allah agar diberi kemudahan dalam belajar.

PERSAMAAN KUADRAT YANG AKAR-AKARNYA DIKETAHUI

Untuk mendukung tercapainya kompetensi dasar dalam materi pokok ini, indikator pencapaian hasil belajarnya adalah Anda dapat:

1. Menentukan jumlah dan hasil kali akar-akar persamaan kuadrat.
2. Menyusun persamaan kuadrat yang akar-akarnya memenuhi kondisi tertentu.

1. Jumlah dan Hasil Akar-Akar Persamaan Kuadrat

Pada kegiatan 1 Anda telah mempelajari bahwa akar-akar persamaan kuadrat $ax^2 + bx + c = 0$, dimana a, b, c $\in$ R dan a $\neq$ 0 dapat ditentukan dengan menggunakan rumus kuadrat atau rumus abc sebagai berikut:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \text{ atau } x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Dari rumus di atas, kita dapat menentukan rumus jumlah dan hasil kali akar-akar persamaan kuadrat $ax^2 + bx + c = 0$ yang dinyatakan dalam koefisien-koefisien a, b, dan c.

Bagaimana menentukan rumus jumlah dan hasil kali akar-akar persamaan kuadrat tersebut? Baiklah, untuk lebih jelasnya Anda simak penjelasan berikut ini.

a). Jumlah akar-akar persamaan kuadrat.

$$x_1 + x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_1 + x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac} - b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_1 + x_2 = \frac{-2b}{2a}$$

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

b). Hasil kali akar-akar persamaan kuadrat.

$$x_1.x_2 = \left[\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right] + \left[\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right]$$

$$x_1.x_2 = \frac{(-b)^2 + \cancel{b}\sqrt{b^2-4ac} - \cancel{b}\sqrt{b^2-4ac} - \left(b^2-4ac\right)}{2a}$$

$$x_1.x_2 = \frac{b^2 - b^2 + 4ac}{4a^2}$$

$$x_1.x_2 = \frac{4ac}{4a^2}$$

$$x_1.x_2 = \frac{c}{a}$$

Dari hasil perhitungan di atas, maka diperoleh sifat sebagai berikut:
Jika x_1 dan x_2 adalah akar-akar persamaan kuadrat $ax^2 + bx + c = 0$ maka jumlah dan hasil kali akar-akar persamaan kuadrat dapat ditentukan dengan rumus:

$$\boxed{x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad \text{dan} \quad x_1.x_2 = \frac{c}{a}}$$

Agar Anda memahami dan terampil menggunakan rumus di atas, perhatikanlah beberapa contoh di bawah ini!

Contoh 1:

Jika x_1 dan x_2 adalah akar-akar persamaan kuadrat $x^2 - 3x + 2 = 0$, maka tanpa harus menyelesaikan persamaannya terlebih dulu, hitunglah:

a. $x_1 + x_2$
b. $x_1 . x_2$
c. $x_1^2 + x_2^2$
d. $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$

Jawab:

$x^2 - 3x + 2 = 0$, berarti a = 1, b = -3, dan c = 2.

a. $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -\frac{(-3)}{1} = \frac{3}{1} = 3$

b. $x_1 + x_2 = \frac{c}{a} = \frac{2}{1} = 2$

c. Untuk menghitung nilai $x_1^2 + x_2^2$ kita harus mencarinya terlebih dulu sebagai berikut:

$$(x_1 + x_2)^2 = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2$$

$(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = x_1^2 + x_2^2$

Atau $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2$

$$= \left(-\frac{b}{a}\right)^2 - 2\left(\frac{c}{a}\right)$$

$$= \left(-\frac{(-3)}{1}\right)^2 - 2\left(\frac{2}{1}\right)$$

$$= 3^2 - 4$$

$$= 9 - 4$$

$$= 5$$

d. Untuk menghitung nilai kita harus menyamakan penyebutnya terlebih dulu sebagai berikut.

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_2}{x_1.x_2} + \frac{x_1}{x_1.x_2}$$

$$= \frac{x_2 + x_1}{x_1.x_2}$$

$$= \frac{x_1 + x_2}{x_1.x_2}$$

$$= \frac{-\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}}$$

$$= \frac{-\left(-\frac{3}{1}\right)}{\frac{2}{1}}$$

$$= \frac{3}{\frac{2}{1}}$$

$$= \frac{3}{2}$$

Bagaimana, mudah bukan? Sudah pahamkah Anda? Nah, apabila masih kurang paham, perhatikan contoh 2 berikut

Contoh 2:

Akar-akar persamaan kuadrat $2x^2 + 5x - 6 = 0$ adalah p dan q. tanpa harus menyelesaikan persamaanya terlebih dulu, hitunglah nilai:

a. $p + q$

b. $p \cdot q$

c. $p^2 + q^2$

d. $\frac{1}{p} + \frac{1}{q}$

e. $(p - q)^2$

Jawab:

$2x^2 = 5x - 6 = 0$, berarti a = 2, b = 5, dan c = -6.

a. $p + q = -\frac{5}{2} = 2\frac{1}{2}$

b. $p \cdot q = \frac{c}{a} = \frac{-(-6)}{2} = -3$

c. Dari jawaban soal nomer 1 bagian c telah Anda ketahui bahwa:

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x)^2 - 2x_1x_2$$

Maka $p^2 + q^2 = (p + q)^2 - 2pq$

$$= \left(-\frac{b}{a}\right)^2 - 2\left(\frac{c}{a}\right)$$

$$= \left(-\frac{5}{2}\right)^2 - 2\left(\frac{-6}{2}\right)$$

$$= \frac{25}{4} + 6$$

$$= \frac{25}{4} + \frac{24}{4}$$

$$= \frac{49}{4}$$

$$= 12\frac{1}{4}$$

d. $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{q + p}{pq}$ (disamakan penyebutnya)

$$= \frac{p + q}{pq}$$

$$= \frac{-\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}}$$

$$= \frac{-\frac{5}{2}}{\frac{-6}{2}}$$

$$= -\frac{5}{2}.\left(-\frac{2}{6}\right)$$

$$= \frac{10}{12}$$

$$= \frac{5}{6}$$

e. $(p\text{-}q)^2 = p^2 - 2pq + q^2$

$= p^2 + q^2 - 2pq$

karena: $p^2 + q^2 = (p + q)^2 - 2pq$, maka:

$(p - q)^2 = (p + q)^2 - 2pq - 2pq$

$= (p + q)^2 - 4pq$

$$= \left(-\frac{b}{a}\right)^2 - 4\left(\frac{c}{a}\right)$$

$$= \left(-\frac{5}{2}\right)^2 - 4\left(\frac{-6}{2}\right)$$

$$= \frac{25}{4} + 12$$

$$= 6\frac{1}{4} + 12$$

$$= 18\frac{1}{4}$$

Setelah memperhatikan dua contoh tadi apakah Anda sudah paham? Baiklah, selanjutnya untuk mengetahui sejauh mana pemahaman Anda terhadap materi di atas kerjakanlah soal-soal latihan di bawah ini! Perhatikan, Anda jangan membaca jawabannya terlebih dahulu.

1. Jika x_1 dan x_2 adalah akar-akar persamaan kuadrat $x^2 + 6x + 5 = 0$ maka tanpa harus menyelesaikan persamaannya terlebih dulu hitunglah nilai:
   a. $x_1 + x_2$
   b. $x_1 . x_2$
   c. $x_1^2 + x_2^2$
   d. $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$
2. Akar-akar persamaan kuadrat $3x^2 - 7x + 2 = 0$ adalah . Tanpa harus menyelesaikan persamaanya terlebih dulu, hitunglah nilai;
   a. $\alpha + \beta$
   b.
   c. $\alpha^2 + \beta^2$
   d. $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}$
   e. $(\alpha - \beta)^2$

Tidak sulit bukan? Sudah selesaikah Anda mengerjakannya? Apabila sudah selesai, seperti inikah pekerjaan Anda?

1. $x^2 + 6x + 5 = 0$, berarti a = 1, b = 6, dan c = 5.
   a. $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -\frac{6}{1} = -6$
   b. $x_1 . x_2 = \frac{c}{a} = \frac{5}{1} = 5$
   c. $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2$

$$= \left(-\frac{b}{a}\right) - 2\left(\frac{c}{a}\right)$$

$$= \left(-\frac{6}{1}\right) - 2\left(\frac{5}{1}\right)$$

$$= (-6)^2 - 10$$

$$= 36 - 10$$

$$= 26$$

d. $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{x_2+x_1}{x_1.x_2}$

$$=\frac{x_1+x_2}{x_1.x_2}$$

$$=\frac{-\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}}$$

$$=\frac{-\frac{6}{1}}{\frac{5}{1}}$$

$$=\frac{-6}{5}$$

$$=-1\frac{1}{5}$$

2. $3x^2 - 7x + 2 = 0$, berarti a = 3, b = -7, dan c = 2

a. $\alpha+\beta=-\frac{b}{a}=-\frac{(-7)}{3}=\frac{7}{3}=2\frac{1}{3}$

b. $\alpha.\beta \ =\frac{c}{a}=\frac{2}{3}$

c. $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\alpha$

$$=\left(-\frac{b}{a}\right)^2-2\left(\frac{c}{a}\right)$$

$$=\left(-\frac{(-7)}{3}\right)^2-2\left(\frac{2}{3}\right)$$

$$=\left(\frac{7}{3}\right)^2-\frac{4}{3}$$

$$=\frac{49}{9}-\frac{4}{3}$$

$$=\frac{49}{9}-\frac{12}{9} \quad \Rightarrow \quad \frac{37}{9} \quad \Rightarrow \quad 4\frac{1}{9}$$

d. $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{\beta+\alpha}{\alpha.\beta}$

$$=\frac{\alpha+\beta}{\alpha.\beta}$$
$$=\frac{-\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}}$$
$$=\frac{-\left(-\frac{7}{3}\right)}{\frac{2}{3}}$$
$$=\frac{\frac{7}{3}}{\frac{2}{3}}$$
$$=\frac{7}{3}\text{x}\frac{3}{2}$$
$$=\frac{7}{2}$$
$$=3\frac{1}{2}$$

e. $(\alpha-\beta)^2=\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2$

$$=\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta$$
$$=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta-2\alpha\beta$$
$$=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$$
$$=\left(-\frac{b}{a}\right)^2-4\left(\frac{c}{a}\right)$$
$$=\left(-\frac{(-7)}{3}\right)^2-4\left(\frac{2}{3}\right)$$
$$=\left(\frac{7}{3}\right)^2-\frac{8}{3}\quad\Rightarrow\ =\frac{49}{9}-\frac{8}{3}\quad\Rightarrow\ =\frac{49}{9}-\frac{8}{3}\quad\Rightarrow\ =2\frac{7}{9}$$

Apakah pekerjaan Anda sama seperti jawaban di atas? Jika ya, bagus! Berarti Anda benar. Apabila pekerjaan Anda belum benar, segera samakanlah dengan jawaban di atas. Apabila mengalami kesulitan diskusikanlah dengan teman-teman atau tanyakan langsung kepada guru bina pada saat tatap muka. Bagi Anda yang menjawab benar, selanjutnya marilah kita pelajari materi di bawah ini.

2. Persamaan Kuadrat yang Akar-Akarnya Diketahui (Memenuhi Kondisi Tertentu)

Apabila akar-akar suatu persamaan kuadrat diketahui, maka kita dapat menyusun persamaan kuadrat itu dengan dua cara, yaitu: menggunakan faktor dan menggunakan rumus jumlah dan hasil kali akar-akar. Untuk jelasnya, marilah kita pelajari materi di bawah ini.

a. Menggunakan Faktor

Apabila suatu persamaan kuadrat dapat difaktorkan menjadi $(x - x_1)(x - x_2) = 0$, maka x_1 dan x_2 merupakan penyelesaian atau akar-akar persamaan kuadrat tersebut. Sebaliknya, apabila x_1 dan x_2 merupakan prnyelesaian atau akar-akar persamaan kuadrat, maka persamaan kuadrat itu dapat ditentukan dengan rumus:

$$\boxed{(x - x_1)(x - x_2) = 0}$$

Bagaimana menggunakan rumus di atas? Baiklah, untuk lebih jelasnya perhatikanlah beberapa contoh di bawah ini.

Contoh 1:

Susunlah persamaan kuadrat yang akar-akarnya 3 dan 4!

Jawab:

Di sini berarti $x_1 = 3$ dan $x_2 = 4$.

Dengan menggunakan rumus: $(x - x_1)(x-x_2) = 0$

Maka diperoleh : $(x - 3)(x - 4) = 0$

$x^2 - 4x - 3x + 12 = 0$

$x^2 - 7x + 12 = 0$

Jadi persamaan kuadrat yang diminta adalah $x^2 - 7x + 12 = 0$.

Mudah bukan? Anda masih belum paham? Baiklah, untuk itu simaklah contoh 2 di bawah ini.

Contoh 2:

Tentukan persamaan kuadrat yang akar-akarnya dan -5!

Jawab:

Di sini berarti $x_1 =$ dan $x_2 = -5$.

Dengan menggunakan rumus: $(x - x_1)(x - x_2) = 0$

Maka diperoleh: $\left(x - \frac{1}{2}\right)(x - (-5)) = 0$

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-5)=0$$

$$x^2+5x-\frac{1}{2}x-\frac{5}{2}=0 \text{ (kedua ruas dikalikan 2)}$$

$$2x^2+10x-x-5=0$$

$$2x^2+9x-5=0$$

Jadi persamaan kuadrat yang diminta adalah $2x^2 + 9x - 5 = 0$.
Bagaimana, tidak sulit bukan? Sudah pahamkah Anda? Untuk menambah pemahaman Anda, perhatikanlah contoh 3 berikut.

Contoh 3:
Susunlah persamaan kuadrat yang akar-akarnya -!
Jawab:

Di sini berarti $x_1 = -\frac{1}{3}$ dan $x_2 = -\frac{3}{2}$

Dengan menggunakan rumus: $(x - x_1)\ (x - x_2) = 0$

Maka diperoleh: $$\left(x-\left(-\frac{1}{3}\right)\right)\left(x-\left(-\frac{3}{2}\right)\right)=0$$

$$\left(x+\frac{1}{3}\right)\left(x+\frac{3}{2}\right)=0$$

$$x^2+\frac{3}{2}x+\frac{1}{3}x+\frac{1}{2}=0 \text{ (kedua ruas dikalikan 6)}$$

$$6x^2+9x+2x+3=0$$

$$6x^2+11x+3=0$$

Jadi persamaan kuadrat yang diminta adalah $6x^2 + 11x + 3 = 0$.

Setelah memperhatikan beberapa contoh di atas, sudah pahamkah Anda? Untuk mengetahui sejauh mana pemahaman Anda terhadap materi di atas, kerjakan soal-soal latihan uji kompetensi berikut.

1. Susunlah persamaan kuadrat yang akar-akarnya 1 dan 3!
2. Tentukan persamaan kuadrat yang akar-akarnya -2 dan -7!
3. Susunlah persamaan kuadrat yang akar-akarnya $-\frac{1}{4}$ dan $\frac{5}{2}$!

Perhatikan, sebelum selesai mengerjakan soal-soal tersebut Anda jangan membaca jawabannya Terlebih dulu. Bagaimana, sudah selesaikah Anda mengerjakannya? Apabila sudah selesai, samakanlah pekerjaan Anda dengan jawaban di bawah ini.

1. Akar-akarnya $x_1 = 1$ dan $x_2 = 3$.
   Maka: $(x - x_1)(x-x_2) = 0$
   $(x - 1)(x - 3) = 0$
   $x^2 - 3x - x + 3 = 0$
   $x^2 - 4x + 3 = 0$
   Jadi persamaan kuadrat yang diminta adalah $x^2 - 4x + 3 = 0$.

2. Akar-akarnya $x_1 = -2$ dan $x_2 = -7$
   maka: $(x-x_1)(x-x_2) = 0$
   $(x -(-2))\ (x - (-7)) = 0$
   $(x + 2)\ (x + 7) = 0$
   $x^2 + 7x + 2x + 14 = 0$
   $x^2 + 9x + 14 = 0$
   Jadi persamaan kuadrat yang di minta adalah $x^2 + 9x + 14 = 0$.

3. Akar-akarnya $x_1 = -\frac{1}{4}$ dan $x_2 = \frac{5}{2}$
   maka: $(x - x_1)(x - x_2) = 0$
   $(x - (-$
   $(x +$
   x^2 -
   $8x^2 - 20x + 2x - 5 = 0$
   $8x^2 - 18x - 5 = 0$

Tidak sulit bukan? Apakah pekerjaan Anda sama seperti jawaban di atas? Apabila ya, bagus! Berarti Anda benar. Apabila pekerjaan Anda belum benar, segeralah samakan dengan jawaban di atas. Jika mengalami kesulitan, diskusikanlah dengan teman-teman atau tanyakan langsung kepada guru bina pada saat tatap muka.

Bagi Anda yang menjawab benar, selanjutnya dapat mempelajari materi berikut ini.

Kali ini kita akan mempelajari cara menyusun persamaan kuadrat yang akar-akarnya diketahui dengan cara yang kedua yaitu:

b. Menggunakan Rumus Jumlah dan Hasil Kali Akar-Akar

Persamaan kuadrat $ax^2 + bx + c = 0$ (aapabila kedua ruas dibagi dengan a, maka dapat dinyatakan dalam bentuk $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$

Dari rumus jumlah dan hasil kali akar-akar kita peroleh hubungan:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \Leftrightarrow \frac{b}{a} = -(x_1 + x_2)$$

$$x_1 - x_2 = \frac{c}{a} \Leftrightarrow \frac{c}{a} = x_1 . x_2$$

Jadi persamaan kuadrat $x^2 +$ dapat dinyatakan dalam bentuk:

$$\boxed{x^2 - (x_1+x_2)x + x_1 . x_2 = 0}$$

Agar Anda memahami dan terampil menggunakan rumus tersebut, marilah kita simak beberapa contoh di bawah ini.

Contoh 1:
Susunlah persamaan kuadrat yang akar-akarnya 3 dan 4!
Jawab:
Disini $x_1 = 3$ dan $x_2 = 4$
Dengan menggunakan rumus: $x^2 - (x_1+x_2)x + x_1.x_2 = 0$
Maka diperoleh: $x^2 - (3 + 4)x + 3.4 = 0$
$x^2 - 7x + 12 = 0$
Jadi persamaan kuadrat yang diminta adalah $x^2 - 7x + 12 = 0$.

Mudah bukan? Selanjutnya perhatikan contoh 2 di bawah ini.

Contoh 2:
Tentukan persamaan kuadrat yang akar-akarnya $\frac{1}{2}$ dan -2!
Jawab:

Di sini berarti $x_1 = \frac{1}{2}$ dan $x_2 = -2$.

Dengan menggunakan rumus: $x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1.x_2 = 0$

$$x^2 - \left(\frac{1}{2} + (-2)\right)x + \frac{1}{2}.(-2) = 0$$

$$x^2 - \left(\frac{1}{2} - 2\right)x - 1 = 0$$

$$x^2 - \left(\frac{1}{2} - \frac{4}{2}\right)x - 1 = 0$$

$$x^2 - \left(-\frac{3}{2}\right)x - 1 = 0$$

$$x^2 + \frac{3}{2}x - 1 = 0 \quad \text{(kedua ruas dikalikan 2)}$$

$$2x^2 + 3x - 2 = 0$$

Jadi persamaan kuadrat yang diminta adalah $2x^2 + 3x - 2 = 0$

Sudah pahamkah Anda? Apabila sudah paham, bagus! Nah, untuk menambah pemahaman Anda perhatikan contoh 3 berikut!

Contoh 3:

Akar-akar persamaan kuadrat $3x^2 + 2x - 1 = 0$ adalah α dan . Susunlah persamaan kuadrat yang akar-akarnya $\frac{1}{\alpha}$ dan $\frac{1}{\beta}$

Jawab:

Persamaan kuadrat $3x^2 + 2x - 1 = 0$, berarti a = 3, b = 2, dan c = -1.

Maka: $\alpha + \quad = -\frac{b}{a} = -\frac{2}{3}$

Dan: $\alpha . \quad = \frac{c}{a} = \frac{-1}{3} = -\frac{1}{3}$

Misalkan persamaan kuadrat yang diminta mempunyai akar-akar x_1 dan x_2, maka:

$x_1 = \frac{1}{\alpha}$ dan $x_2 = \frac{1}{\beta}$

Ini berarti: $x_1 + x_2 = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}$

$= \frac{\beta + \alpha}{\alpha\beta}$ (disamakan penyebutnya)

$= \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta}$

$= \frac{2}{-\frac{1}{3}}$

$= -\frac{2}{3} . \left(-\frac{3}{1}\right)$

$= 2$

$x_1 . x_2 = \frac{1}{\alpha} . \frac{1}{\beta}$

$= \frac{1}{\alpha\beta}$

$= \frac{1}{-\frac{1}{3}}$

$= 1 . \left(-\frac{3}{1}\right) \Leftrightarrow \; = -3$

Subtitusi $(x_1 + x_2) = 2$ dan $(x_1 . x_2) = -3$ ke persamaan:

$x^2 - (x_1+x_2)\, x + x_1 . x_2 = 0$

$x^2 - 2x + (-3) = 0$

$x^2 - 2x - 3 = 0$

Jadi persamaan kuadrat yang diminta adalah $x^2 - 2x - 3 = 0$.

Setelah memperhatikan contoh-contoh di atas, sudah pahamkah Anda? Untuk mengetahui sampai dimana pemahaman Anda terhadap materi di atas, kerjakanlah soal-soal latihan uji kompetensi berikut.

1. Susunlah persamaan kuadrat yang akar-akarnya 2 dan 4 dengan menggunakan rumus jumlah dan hasil kali akar-akar!

2. Tentukan persamaan kuadrat yang akar-akarnya -5 dan 6 dengan menggunakan rumus jumlah dan hasil kali akar-akar!

3. Susunlah persamaan kuadrat yang akar-akarnya $-\frac{1}{2}$ dan $-\frac{1}{4}$ dengan menggunakan rumus jumlah dan hasil kali akar-akar!

4. Akar-akar persamaan kuadrat $x^2 - 3x - 10 = 0$ adalah $\frac{1}{\alpha}$ dan $\frac{1}{\beta}$.

   Susunlah persamaan kuadrat yang akar-akarnya dengan menggunakan rumus jumlah dan hasil kali akar-akar!

5. Akar-akar persamaan kuadrat $x^2+3x+2 = 0$ adalah 2α dan . Susunlah persamaan kuadrat yang akar-akarnya 2α dan dengan menggunakan rumus jumlah dan hasil kali akar-akar!

Sebelum selesai mengerjakan soal-soal di atas, Anda jangan membaca jawabannya terrlebih dahulu. Apabila sudah selesai mengerjakannya cocokkanlah pekerjaan Anda dengan jawaban di bawah ini.

1. Akar-akarnya $x_1=2$ dan $x_2 = 4$.
   Dengan menggunakan rumus: $x^2-(x_1+x_2)x + x_1x_2=0$
   Maka diperoleh: $x^2-(2+4)x + 2.4 = 0$
   $x^2- 6x + 8 = 0$
   Jadi persamaan kuadrat yang diminta adalah $x^2-6x+8 = 0$

2. Akar-akarnya $x_1=-5$ dan $x_2= 6$
   Dengan menggunakan rumus: $x^2-(x_1+x_2)x + x_1x_2=0$
   Maka diperoleh: $x^2-((-5)+6)x + (-5).6 = 0$
   $x^2-(1)x - 30 = 0$

Jadi persamaan kuadrat yang diminta adalah x^2-x-30 = 0

3. Akar-akarnya $x_1 = -\frac{1}{2}$ dan $x_2 = -\frac{1}{4}$

   Dengan menggunakan rumus: $x^2-(x_1+x_2)x + x_1.x_2=0$
   Maka diperoleh:

$$x^2 - \left(-\frac{1}{2} + \left(-\frac{1}{4}\right)\right)x + \left(-\frac{1}{2}\right).\left(-\frac{1}{4}\right) = 0$$

$$x^2 - \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right)x + \frac{1}{8} = 0$$

$$x^2 - \left(-\frac{2}{4} - \frac{1}{4}\right)x + \frac{1}{8} = 0$$

$$x^2 - \left(-\frac{3}{4}\right)x + \frac{1}{8} = 0$$

$$x^2 + \frac{3}{4}x + \frac{1}{8} = 0 \text{ (kedua ruas dikalikan 8)}$$

$$8x^2 + 6x + 1 = 0$$

   Jadi persamaan kuadrat yang diminta adalah $8x^2+6x+1 = 0$

$\frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta}$

4. Persamaan kuadrat x^2-3x-10 = 0, berarti a = 1, b = -3, dan c = -10.

   Maka: $\alpha + \beta = -\frac{b}{a} = -\frac{(-3)}{1} = 3$

   Dan: $\alpha.\beta = \frac{c}{a} = \frac{-10}{1} = -10$

   Misalkan persamaan kuadrat yang diminta mempunyai akar-akar x_1 dan x_2, maka: $x_1=.\frac{1}{\alpha}$ dan $x_2=.\frac{1}{\beta}$

   Ini berarti: $x_1+x_2 = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}$

$$= \frac{\beta + \alpha}{\alpha\beta}$$

$$=$$

x^2-x-30 = 0

=

$= -\frac{3}{10}$

$x_1.x_2 = \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{1}{\beta}$

$= \frac{1}{\alpha\beta}$

$= \frac{1}{-10}$

$= -\frac{1}{10}$

Subtitusi $(x_1+x_2) = -\frac{3}{10}$ dan $x_1.x_2 = -\frac{1}{10}$ ke persamaan

$x^2 - (x_1+x_2)x + x_1.x_2 = 0$

$$x^2 - \left(-\frac{3}{10}\right)x + \left(-\frac{1}{10}\right) = 0$$

$$x^2 + \frac{3}{10}x - \frac{1}{10} = 0$$

$$10x^2+3x - 1 = 0$$

jadi persamaan kuadrat yang diminta adalah $10x^2+3x - 1 = 0$.

5. Persamaan kuadrat $x^2+3x + 2 = 0$, berarti a=1, b= 3, dan c = 2.

Maka: $\alpha + \beta = -\frac{b}{a} = -\frac{3}{1} = 3$

Dan: $\alpha.\beta = \frac{c}{a} = \frac{2}{1} = 2$

Misalkan persamaan kuadrat yang diminta mempunyai akar-akar x_1 dan x_2 maka: $x_1 = 2\alpha$ dan x_2=

Ini berarti: $x_1+x_2 = 2\alpha+2$

= 2(α+)

= 2(-3)

= -6

$x_1+x_2 = 2\alpha.2$

$= 4\alpha.$

$= 4(2)$

$= 8$

Subtitusikan $(x_1+x_2)=-6$ dan $x_1.x_2= 8$ ke persamaan:

$x^2 - (x_1+x_2)x + x_1.x_2 = 0$

$x^2 - (-6)x + 8 = 0$

$x^2 + 6x + 8 = 0.$

Jadi persamaan kuadrat yang diminta adalah $x^2 + 6x + 8 = 0$.

Tidak sulit bukan? Pekerjaan Anda sama seperti jawaban di atas? Apabila ya, bagus! berarti Anda benar. Apabila pekerjaan Anda belum benar, segeralah samakan dengan jawaban di atas. Jika mengalami kesulitan diskusikanlah dengan teteman-teman atau tanyakan langsung kepada guru bina pada saat tatap muka. Bagi Anda yang menjawab benar selanjutnya kerjakanlah soal-soal uji kompetensi 2. untuk mengukur tingkat penguasaan Anda terhadap materi kegiatan 2 kerjakan soal-soal uji kompetensi 2 dengan jujur.

Nah, selamat mengerjakan!

β

Uji Kompetensi 2

Kerjakan soal-soal di bawah ini dengan singkat, jelas, dan benar!

1. Jika x_1 dan x_2 adalah akar-akar persamaan kuadrat $x^2 + 4x + 3 = 0$, maka tanpa harus menyelesaikan persamaannya terlebih dulu, hitunglah:
   a. x_1+x_2
   b. $x_1.x_2$
   c. $x_1^2+x_2^2$
   d. $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}$

2. Jika adalah akar-akar persamaan kuadrat $2x^2-3x + 1= 0$, maka tanpa harus menyelesaikan persamaannya terlebih dulu, hitunglah:
   a. $\alpha+\beta$
   b.
   c. $\alpha^2+\beta^2$
   d. $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}$
   e. $(\alpha - \beta)^2$

3. Susunlah persamaan kuadrat yang akar-akarnya 2 dan 7 dengan menggunakan faktor!

4. Susunlah persamaan kuadrat yang akar-akarnya $\frac{1}{2}$ dan -3 dengan menggunakan rumus jumlah dan hasil kali akar-akar!

5. Akar-akar persamaan kuadrat $x^2 - x - 12 = 0$ adalah . Susunlah persamaan kuadrat yang akar-akarnya $\frac{1}{\alpha}$ dan $\frac{1}{\beta}$

Bagaimana, mudah bukan? Apakah pekerjaan Anda sudah selesai? Untuk mengetahui hasil pekerjaan Anda, cocokkanlah jawaban Anda dengan kunci uji kompetensi 2 yang tersedia di bagian akhir modul ini. Kemudian hitunglah skor Anda dengan menggunakan aturan sebagai berikut:

untuk nomor 1, jawaban benar skor = 6
nomor 2, jawaban benar skor = 8
nomor 3, jawaban benar skor = 2
nomor 4, jawaban benar skor = 3
nomor 5, jawaban benar skor = 6

Apabila semua jawaban benar, maka skor total = 6 + 8 + 2 + 3 + 6 = 25. Selanjutnya untuk menghitung skor akhir yang Anda peroleh, gunakan rumus yang terdapat pada halaman pendahuluan modul ini.

Jika Anda memperoleh skor > 65%, berarti Anda telah berhasil menguasai materi dalam kegiatan 2. selanjutnya Anda dapat mempelajari materi kegiatan 3. tetapi, apabila Anda memperoleh skor < 65%, Anda harus mempelajari kembali materi kegiatan 2 terutama bagian-bagian yang belum dikuasai. Apabila Anda mengalami kesulitan diskusikan dengan teman-teman atau tanyakan langsung kepada guru bina pada sasat tatap muka. Belajarlah yang rajin dan penuh semangat agar selalu berhasil meraih cita-cita. Jangan lupa berdoalah kepada Allah SWT agar diberi kemudahan belajar.

FUNGSI KUADRAT

Untuk mendukung tercapainya kompetensi dasar dalam materi pokok ini, indikator pencapaian hasil belajarnya adalah Anda dapat:

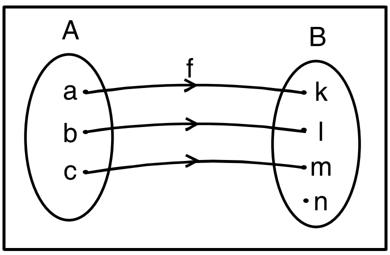
1. Menentukan sumbu simetri dan titik puncak fungsi kuadrat menggunakan grafik fungsi kuadrat.
2. Menentukan syarat fungsi kuadrat definit positif atau negatif.
3. Menjelaskan kaitan persamaan kuadrat dan fungsi kuadrat.

1. Grafik Fungsi Kuadrat

Sebelum kita membahas lebih lanjut tentang grafik fungsi kuadrat, sebaiknya Anda ingat kembali mengenai pengertian fungsi atau pemetaan. Pada Gambar 3-1 dapat kita lihat diagram panah suatu relasi himpunan A ke himpunan B, dengan A = {c, d, e } dan B = {k, l, m, n }. Tampak bahwa setiap anggota himpunan A dihubungkan dengan tepat pada satu anggota himpunan B. relasi yang bersifat demikian disebut fungsi atau pemetaan.

∈

Jadi, dapat dikatakan bahwa:
Fungsi atau Pemetaan adalah relasi himpunan A ke himpunan B yang memasangkan setiap anggota himpunan A dengan tepat satu anggota pada himpunan B.



Gambar 3-1

Apabila fungsi itu diberi nama f, maka fungsi tersebut dituliskan dengan lambang f: $A \rightarrow B$ (dibaca: f memetakan A ke B).

Pada Gambar 3-1 di atas, fungsi atau pemetaan dari himpunan A ke himpunan B dapat dibaca sebagai berikut:

(i). f memetakan c A ke k, dikatakan bahwa: k adalah peta c oleh f dan ditulis f (c) =k.

(ii). f memetakan d A ke l B, dikatakan bahwa: l adalah peta d oleh f dan ditulis $f(d) = l$.
(iii) f memetakan e A ke m B, dikatakan bahwa: m adalah peta e oleh f dan ditulis $f(e) = m$

Apabila fungsi f memetakan setiap x A dengan tepat ke satu anggota y B, maka: f:x y (dibaca: y adalah peta dari x oleh f). Peta dari x A oleh fungsi f sering dinyatakan sebagai f(x) dan bentuk f(x) disebut rumus bagi fungsi f.

Sebagai contoh, fungsi f: x 3x+1 dengan xR maka dapat dinyatakan:
(i). Rumus untuk fungsi f adalah $f(x) = 3x + 1$
(ii). Peta dari 0 adalah $f(0) = 3(0) + 1 = 0 + 1 = 1$.
Peta dari 1 adalah $f(1) = 3(1) + 1 = 3 + 1 = 4$
Peta dari 2 adalah $f(2) = 3(2) + 1 = 6 + 1 = 7$, … dan seterusnya.
Ingat bahwa f(0) adalah nilai f(x) untuk $x = 0$.
Jadi, secara umum yang dimaksud $f(a) = 3a + 1$ adalah nilai fungsi f untuk $x = a$.
(iii). Grafik fungsi f digambarkan dengan persamaan $y = 3x + 1$.
Pada fungsi atau pemetaan dikenal beberapa istilah yaitu daerah asal, daerah kawan, dan daerah hasil. Untuk itu perhatikan penjelasan berikut ini.

Misalkan f suatu fungsi yang memetakan setiap anggota himpunan A dengan tepat ke satu anggota himpunan B (f: AB), maka:
(i). Himpunan A disebut daerah asal (domain) fungsi f.
(ii). Himpunan B disebut daerah kawan (kodomain) fungsi f.
(iii). Himpunan semua anggota B yang dipasangkan dengan setiap anggota himpunan A disebut daerah hasil (range) fungsi f.

Sebagai contoh, fungsi f pada Gambar 3-1 dapat disebutkan bahwa:
(i). daerah asalnya adalah A= {c, d, e }
(ii). daerah kawannya adalah B = {k, l, m, n }.
(iii). Daerah hasilnya adalah {k, l, m }

Untuk menentukan daerah asal dan daerah hasil suatu fungsi perhatikan contoh 1 dan contoh 2 di bawah ini.

Contoh 1:

Diketahui fungsi f:x x+1 dengan daerah asal

a. Tentukan nilai fungsi f untuk $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$, dan $x = 4$.
b. Gambarlah grafik fungsi f pada bidang cartesius
c. Tentukan daerah hasil fungsi f.

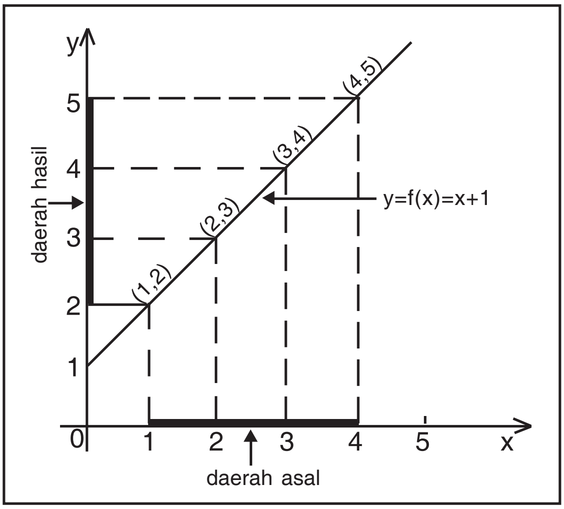
Jawab:

f: $x \rightarrow x+1$, rumus untuk fungsi f adalah $f(x) = x + 1$.

a. Nilai fungsi f:
untuk $x = 1$ adalah $f(1) = 1+1 = 2$.

untuk x = 2 adalah f (2) = 2+1 = 3
untuk x = 3 adalah f(3) = 3+1 = 4
untuk x = 4 adalah f(4) = 4 + 1 = 5

b. Grafik fungsi f dinyatakan oleh persamaan y = x + 1 yaitu suatu persamaan garis lurus. Beberapa anggota dari f adalah titik-titik dengan koordinat (1,2)(2,3)(3,4), dan (4,5). Titik-titik itu dugambarkan pada bidang cartecius,, kemudian dihubungkan dengan ruas garis lurus seperti pada Gambar 3-2 di bawah ini.



$D = \{x / 1 \le x \le 3, x \in R\}$ $\{y / 2 \le y \le 5, y \in R\}$

Gambar 3-2

c. Berdasarkan grafik fungsi f pada Gambar 3-2, daerah hasilnya adalah

contoh 2:

Diketahui fungsi f: x $x^2 - 2x + 1$ dengan daerah asal

Tentukan daerah hasilnya!

Jawab:

f: $x \rightarrow x^2 - 2x + 1$, rumus untuk fungsi f adalah $f(x) = x^2 - 2x + 1$.

Nilai fungsi f:

untuk x = -1 adalah $f(-1) = (-1)^2 - 2(-1) + 1 = 1 + 2 + 1 = 4$.
untuk x = 0 adalah $f(0) = (0)^2 - 2(0) + 1 = 0 - 0 = 1$.
untuk x = 1 adalah $f(1) = (1)^2 - 2(1) + 1 = 1 - 2 + 1 = 0$
untuk x = 2 adalah $f(2) = (2)^2 - 2(2) + 1 = 4 - 4 + 1 = 1$
untuk x = 3 adalah $f(3) = (3)^2 - 2(3) + 1 = 9 - 6 + 1 = 4$.

Grafik fungsi f dinyatakan oleh persamaan $y = x^2 - 2x + 1$ yaitu suatu parabola. Beberapa anggota dari f adalah titik-titik dengan koordinat (-1, 4), (0,1), (1,0), (2,1) dan (3,4).

Titik-titik itu digambar pada bidang Cartecius, kemudian dihubungkan dengan kurva mulus seperti Gambar 3-3 di bawah ini.

Gambar 3-3

Setelah kita ingat kembali dan memahami tentang pengertian fungsi atau pemetaan termasuk istilah-istilahnya, marilah kita pelajari materi tentang menggambar sketsa grafik fungsi kuadrat dan istilah-istilahnya.

a. Menggambar Sketsa Grafik Fungsi Kuadrat yang Sederhana

Sebelum kita membahas cara-cara menggambar sketsa grafik fungsi kuadrat, marilah kita ingat kembali mengenai bentuk umum fungsi kuadrat yaitu: $f(x) = ax^2+bx+c$ $(a \neq 0)$, a, b, c R.

Fungsi kuadrat tersebut merupakan fungsi kuadrat dalam peubah x. Grafik fungsi kuadrat ditulis dengan notasi $y = f(x) = ax^2 + bx + c$, dan grafik fungsi kuadrat disebut parabola.

Langkah-langkah menggambar sketsa grafik fungsi kuadrat yang sederhana.

Langkah 1:

Tentukan beberapa anggota fungsi f, yaitu koordinat titik-titik yang terletak pada grafik fungsi f. Titik-titik ini dapat kita tentukan dengan memilih beberapa nilai x bilangan bulat yang terletak dalam daerah asalnya kemudian kita hitung nilai fungsi f. Titik-titik pada fungsi f itu biasanya akan lebih mudah jika kita sajikan dengan menggunakan tabel atau daftar.

Langkah 2:

Gambarkan koordinat titik-titik yang telah kita peroleh pada Langkah 1 pada sebuah bidang Cartecius.

Langkah 3:
Hubungkan titik-titik yang telah digambarkan pada bidang Cartecius pada Langkah 2 dengan menggunakan kurva mulus.
Agar Anda lebih memahami dan terampil menggambar sketsa grafik fungsi kuadrat yang sederhana dengan menggunakan langkah-langkah di atas, perhatikanlah beberapa contoh di bawah ini.

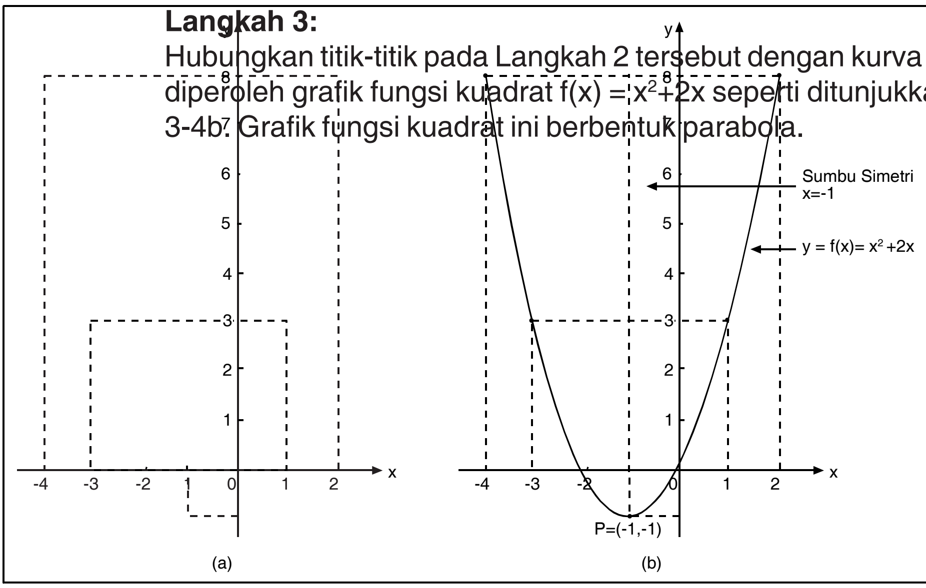
Contoh 1:
Gambarkan grafik fungsi kuadrat yang ditentukan dengan persamaan f(x) = x^2+2x, jika aderah asalnya adalah $D = \{x / -4 \le x \le 2, x \in R\}$
Jawab:
Grafik fungsi kuadrat $f(x) = x^2 + 2x$ adalah sebuah parabola dengan persamaan $y = x^2 + 2x$.

Langkah 1:
Kita buat tabel atau daftar untuk menentukan titik-titik yang terletak pada fungsi f.

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2
$Y=x^2+2x$	8	3	0	-1	0	3	8

Langkah 2:
Gambarkan titik-titik (-4,8), (-3,3), (-2,0), (-1,-1), (0,0), (1,3), dan (2,8) pada bidang Cartecius seperti Gambar 3-4a.

Langkah 3:
Hubungkan titik-titik pada Langkah 2 tersebut dengan kurva mulus, sehingga diperoleh grafik fungsi kuadrat $f(x) = x^2+2x$ seperti ditunjukkan pada Gambar 3-4b. Grafik fungsi kuadrat ini berbentuk parabola.



Gambar 3-4

Dari grafik fungsi pada Gambar 3-4b, dapat kita ketahui beberapa istilah sebagai berikut:

1). Daerah Asal

Daerah asal fungsi f adalah $\{x / -4 \le x \le 2, x \in R\}$

2). Daerah Hasil

Daerah hasil fungsi f adalah $\{y / -1 \le y \le 8, y \in R\}$

3). Pembuat Nol

Untuk nilai x = 0 diperoleh f(0) = 0 dan x = -2 diperoleh f(-2) = 0. dalam hal ini x = 0 dan x = -2 disebut pembuat nol fungsi f, dan pembuat nol itu merupakan akar-akar persamaan f(x) = 0. Perhatikan bahwa grafik fungsi f memotong sumbu x di (-2,0) dan (0,0) sehingga pembuat nol sebuah fungsi dapat ditafsirkan sebagai absis titik potong grafik fungsi f dengan sumbu x.

4). Persamaan Sumbu Simetri.

Parabola dengan persamaan $y = x^2 + 2x$ mempunyai sumbu simetri yang persamaannya adalah x = -1.

5). Koordinat Titik Balik atau Titik Puncak.

Dari Gambar 3-4b, koordinat titik balik atau ttik pusat parabola adalah P(-1, -1). Pada titik P(-1, -1), nilai ordinat y= -1 merupakan nilai terkecil (minimum) dari fungsi f, maka titik P (-1, -1) disebut titik balik minimum.

6). Nilai Maksimum atau Minimum Fungsi.

Untuk x= -1 diperoleh f(-1) = -1. Nilai f(-1) = -1 ini disebut nilai minimum fungsi karena nilai itu adalah nilai yang terkecil dari fungsi f.

Setelah mempelajari materi di atas, apakah Anda sudah paham! Baiklah, untuk lebih jelasnya, perhatikanlah contoh 2 di bawah ini.

Contoh 2:

Gambarkan grafik fungsi kuadrat yang ditentukan dengan persamaan $f(x) = -x^2 + 4x + 5$, jika daerah asalnya adalah .

Jawab:

Grafik fungsi kuadrat $f(x) = -x^2 + 4x + 5$ adalah sebuah parabola dengan persamaan $y = x^2 + 4x + 5$.

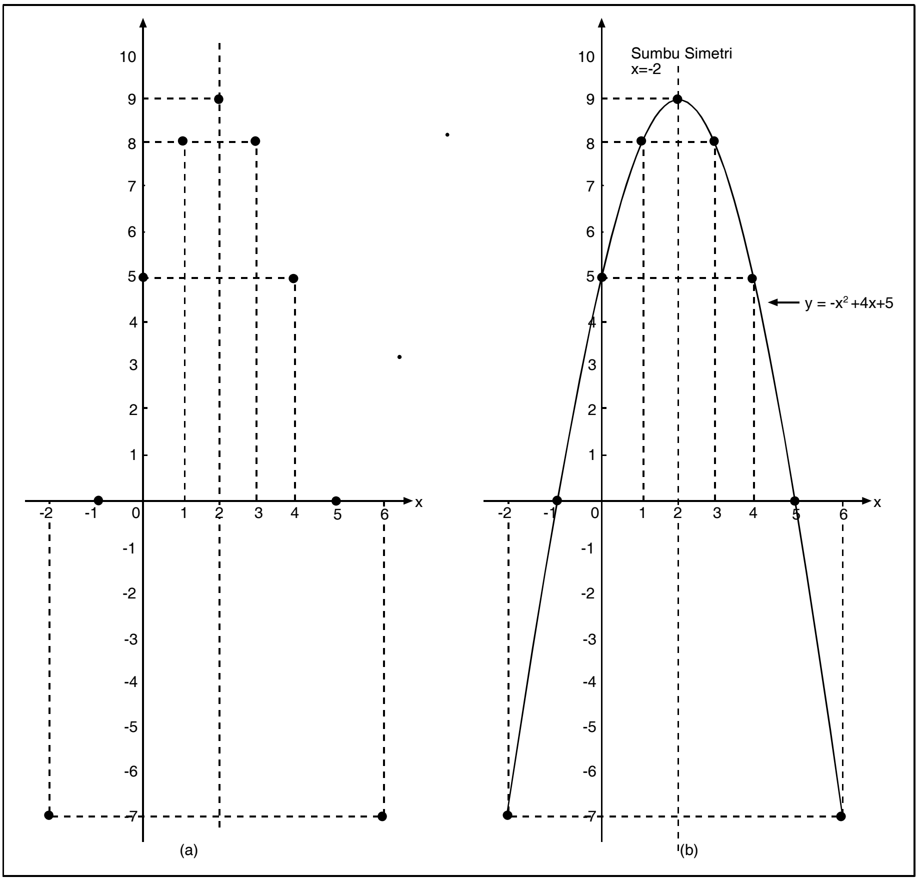
Langkah 1:

Kita buat tabel atau daftar untuk menentukan titik-titik yang terletak pada fungsi f

x	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
$Y = -x^2+4x + 5$	-7	0	5	8	9	8	5	0	-7

Langkah 2:
Gambarkan titik=titik (-2,-7), (-1,0), (0,5),(1,8), (2,9), (3,8), (4,5), (5,0), dan (6,-7) pada bidang Cartecius seperti Gambar 3-5a.

Langkah 3:
Hubungkan titik-titik pada langkah 2 tersebut dengan kurva mulus, sehingga diperoleh grafik fungsi kuadrat f(x) = $-x^2 + 4x + 5$ seperti ditunjukkan pada Gambar 3-5b. grafik fungsi kuadrat ini berbentuk parabola.



Gambar 3-5

Dari grafik fungsi pada Gambar 3-5b, dapat kita tentukan hal-hal sebagai berikut:

1). Daerah asal fungsi f adalah $D = \{x / -2 \leq x \leq 6, x \in R\}$.
2). Daerah hasil fungsi f adalah $D = \{y / -7 \leq y \leq 9, y \in R\}$.
3). Pembuat nol fungsi f adalah x = -1 dan x = 5, karena f(-1) = 0 dan f(5) = 0.
4). Persamaan sumbu simetri adalah garis x = 2.
5). Koordinat titik-titik maksimum adalah (2, 9).
6). Nilai maksimum fungsi f adalah 9, karena nilai itu adalah nilai yang terbesar dari fungsi f.

Nah, setelah memperhatikan contoh-contoh di atas, apakah Anda sudah paham? Untuk mengetahui sejauh mana pemahaman Anda terhadap materi di atas, kerjakan soal-soal latihan uji kompetensi di bawah ini.

1. Diketahui fungsi kuadrat f ditentukan dengan rumus $f(x) = x^2 - 2x$ dalam daerah asal adalah D = {x   -2 }.

   a). Salin dan lengkapilah daftar ini untuk fungsi f tersebut.

x	-2	-1	0	1	2	3	4
$Y = x^2 - 2x$	…	…	…	…	…	…	…

   b). Dengan menggunakan daftar yang Anda peroleh pada soal a), gambarlah sketsa grafik fungsi f.

   c). Berdasarkan grafik yang Anda peroleh pada soal B), tentukan:
   (i). daerah hasil fungsi f.
   (ii). pembuat nol fungsi f.
   (iii). persamaan sumbu simetri grafik fungsi f.
   (iv). titik balik grafik fungsi f.
   (v) nilai minimum fungsi f.

2. Diketahui fungsi kuadrat f ditentukan dengan rumus $f(x) = -x^2 + 4$ dalam daerah asal D = {x   -3}.

   a). Salin dan lengkapilah daftar ini untuk fungsi f tersebut.

x	-3	-2	-2	0	1	2	3
$y = -x^2 + 4$	…	…	…	…	…	….	…

   b). Dengan menggunakan daftar yang Anda peroleh pada soal a), gambarkan sketsa grafik fungsi f.

   c). Berdasarkan grafik yang Anda peroleh pada soal b), tentukan:
   (i). daerah hasil fungsi f.
   (ii) pembuat nol fungsi f
   (iii) persamaan sumbu simetri parabola
   (iv) titik balik parabola
   (v) nilai maksimum fungsi f.

Sebelum selesai mengerjakan soal-soal di atas, Anda jangan membaca jawabannya terlebih dahulu. Apabila sudah selesai mengerjakannya, samakanlah pekerjaan Anda dengan jawaban di bawah ini.

1. $f(x) = x^2-2x$ maka $y = x^2-2x$ dalam daerah asal $D = \{x / -2 \le x \le 4, x \in R\}$

   a).

x	-2	-1	0	1	2	3	4
$Y = x^2 - 2x$	8	3	0	-1	0	3	8

b). Sketsa grafik fungsi f

Gambar 3-6

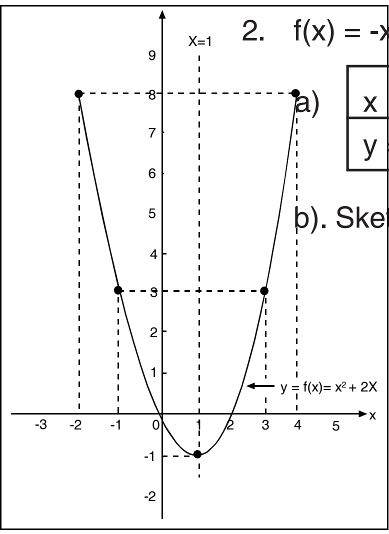
c). (i). daerah hasil fungsi f adalah $\{y / -1 \leq y \leq 8, x \in R\}$

(ii) pembuat nol fungsi f adalah x = 0 dan x = 2.

(iii) persamaan sumbu simetri grafik fungsi f adalah x = 1.

(iv). titik balik grafik fungsi f adalah (1, -1), jenisnya titik balik minimum.

(v) nilai minimum fungsi f adalah -1.

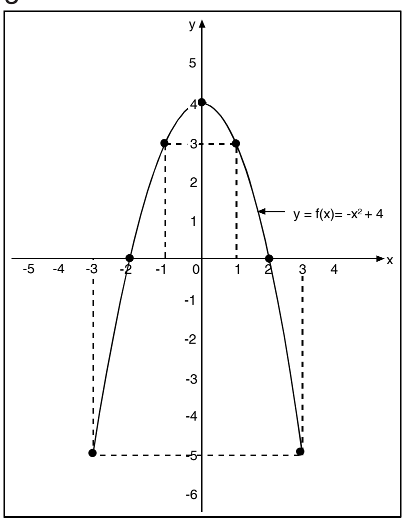


2. $f(x) = -x^2+4$ maka $y = -x^2 + 4$ dalam daerah asal $D = \{x / -3 \leq x \leq 3, x \in R\}$

a)

x	-3	-2	-2	0	1	2	3
$y = -x^2 + 4$	-5	0	3	4	3	0	-5

b). Sketsa grafik fungsi f



Gambra 3-7

c). (i). daerah hasil fungis f adalah $D = \{y/ -5 \leq y \leq 4, y \in R\}$
(ii). pembuat nol fungsi f adalah x = -2 dan x = 2.
(iii). Persamaan sumbu simetri parabola adalah x = 0 atau sumbu y
(iv). Titik balik parabola adalah (0,4).
(v). nilai maksimum fungsi adalah 4.

Bagaimana, tidak sulit bukan? Apakah pekerjaan Anda sama seperti jawaban di atas? Apabila ya, bagus! Berarti Anda benar. Apabila pekerjaan Anda belum benar, segera samakanlah dengan jawaban di atas. Jika mengalami kesulitan diskusikanlah dengan teman-teman atau tanyakan langsung kepada guru bina pada saat tatap muka. Bagi Anda yang menjawab benar, selanjutnya marilah kita pelajari materi di bawah ini.

b. Menggambar Sketsa Grafik Fungsi Kuadrat Secara Umum

Pada bagian a, Anda telah mempelajari cara menggambar sketsa grafik fungsi kuadrat yang sederhana. Kali ini Anda akan mempelajari materi tentang menggambar sketsa grafik fungsi kuadrat secara umum. Untuk lebih jelasnya, marilah kita perhatikan penjelasan berikut.

Misalkan suatu fungsi kuadrat ditentukan dengan persamaan $f(x)= ax^2 +bx + c$ $(a \neq 0)$, a, b, c, R. Grafik fungsi kuadrat itu adalah sebuah parabola dengan persamaan $y = ax^2 + bx + c$.

Untuk menggambar sketsa grafik fungsi kuadrat secara umum, dapat Anda gunakan langkah-langkah sebagai berikut:
(i). titik potong grafik dengan sumbu x dan sumbu y.
(ii). titik balik atau titik puncak parabola.
(iii). Persamaan sumbu simetri.

Untuk lebih jelasnya, marilah kita pelajari materi di bawah ini

1. Titik potong Grafik dengan Sumbu X dan Sumbu y

a. Titik Potong Grafik dengan Sumbu X

Titik potong grafik dengan sumbu X diperoleh jika y= 0, sehingga $ax^2+bx + c = 0$ merupakan kuadrat dalam x.

Akar-akar persamaan kuadrat itu merupakan absis titik-titik potongnya dengan sumbu x. nilai diskriminan persamaan kuadrat $ax^2+bx+c= 0$, yaitu $D = b^2- 4ac$ menentukan banyak titik potong grafik dengan sumbu x.

1. jika D>0, maka grafik fungsi f memotong sumbu x di dua titik yang berlainan.
2. Jika D=0, maka grafik fungsi f memotong sumbu X di dua titik yang berimpit. Dalam hal ini, grafik fungsi f dikatakan menyinggung sumbu X.

3. Jika D<0, maka grafik fungsi f tidak memotong maupun menyinggung sumbu x.

b. Titik Potong Grafik dengan sumbu y

F. Yitik potong grafik dengan sumbu y diperoleh jika x = 0, sehingga $y = a(0)^2 + b(0) + c = c$- Jadi, titik potong grafik dengan sumbu y adalah (0,c)

2. titik balik atau titik puncak dan Persamaan sumbu simetri

Titik balik atau titik puncak suatu parabola dapat ditentukan dengan mengubah bentuk kuadrat pada ruas kanan persamaan parabola menjadi bentuk kuadrat sempurna. Dari bentuk kuadrat itu selanjutnya dapat pula ditentukan sumbu simetrinya. Sebagai contoh, perhatikan kembali parabola-parabola pada contoh 1 (Gambar 3-4b) dan contoh 2 (Gambar 3-5b).

Untuk parabola pada contoh 1 (Gambar 3-4b)

$y = x^2 + 2x$

$y = x^2+1-1$

$y = (x+1)^2-1$

⇔

Oleh karena itu bentuk $(x+1)^2$ selalu bernilai positif atau sama dengan nol untuk x R, maka nilai terkecil (minimum) dari (x +1) adalah 0.Dengan demikian, $y=(x+1)^2 -1$ mempunyai nilai minimum -1, dan nilai itu dicapai jika (x +1) = 0 atau x = -1.

Jadi, titik balik atau titik puncak minimum parabola $y = (x +1)^2 -1$ adalah (-1,-1) dan persamaan sumbu simetrinya adalah x = -1.
Untuk parabola pada contoh 2 (Gambar 3-5b).

$Y = -x^2 + 4x +5$

$y = -(x^2 - 4x) +5$

$y = -(x^2 - 4x+4)+4 +5$

$y = -(x+2)^2-9$

Oleh karena bentuk $–(x-2)^2$ selalu bernilai negatif atau sama dengan nol untuk x R, maka nilai terbesar (maksimum) dari $–(x-2)^2$ adalah 0. Dengan demikian, $y = -(x-2)^2+9$ mempunyai nilai maksimum 9, dan nilai itu dicapai jika -(x-2) = 0 atau x-2 = 0 atau x = 2.

Jadi, titik balik atau titik puncak maksimum parabola $y = -(x-2)^2 =9$ adalah (2,9) dan persamaan sumbu simetrinya adalah x = 2.

Selanjutnya, marilah kita tinjau persamaan parabola dalam bentuk umum $y = ax^2 +bx +c$ sebagai berikut:

Untuk a>0:

Maka bentuk $a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$ selalu bernilai positif atau sama dengan nol untuk

semua x $\in$ R, sehingga nilai terkecil (minimum) dari adalah 0.

Dengan demikian, $y=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}$ mempunyai nilai minimum

$-\frac{b^2-4ac}{4a}$ dan nilai itu dicapai jika:

$$a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=0 \text{ atau } x+\frac{b}{2a}=0 \text{ atau } x=-\frac{b}{2a}$$

Jadi, titik balik minimum parabola $y=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}$

adalah $\left(-\frac{b}{2a},-\frac{b^2-4ac}{4a}\right)$

Untuk a<0:

Maka bentuk $a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$ selalu bernilai negatif atau sama dengan nol untuk

semua x $\in$ R, sehingga nilai terbesar (maksimum) dari adalah 0.

Dengan demikian, $y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$ mempunyai nilai maksimum $-\frac{b^2 - 4ac}{4a}$ dan nilai itu dicapai jika $a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = 0$

Jadi, titik balik maksimum parabola $y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$ adalah $\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2 - 4ac}{4a}\right)$.

Persamaan sumbu simetri parabola $y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$ adalah garis $x = -\frac{b}{2a}$

Dari penjelasan di atas, maka dapat kita ambil kesimpulan sebagai berikut:

1. Parabola $y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$, a, b, c, R mempunyai titik balik

   .

$\in$ $\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2 - 4ac}{4a}\right)$

   (i). Jika a>0, maka titik baliknya adalah titik balik minimum atau parabola terbuka ke atas.
   (ii). Jika a<0, maka titik baliknya adalah titik balik maksimum atau parabola terbuka ke bawah.

2. Persamaan sumbu simetri parabola $y = ax^2 + bx + c$ adalah garis

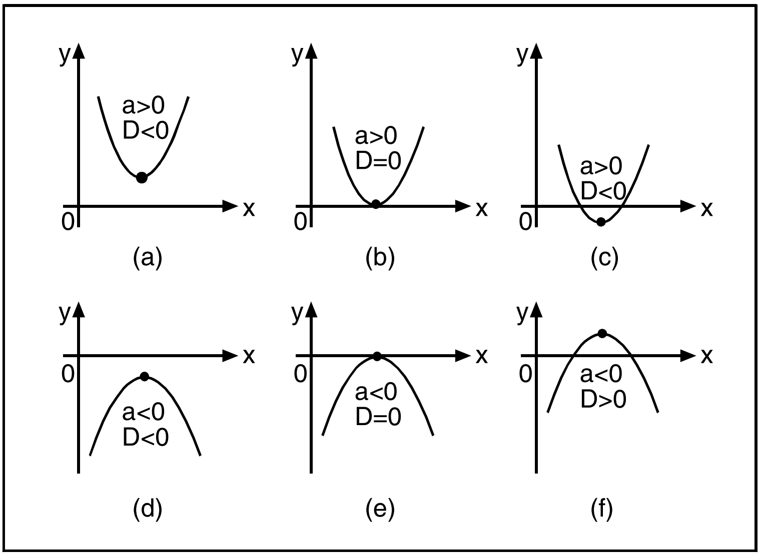
   $x = -\frac{b}{2a}$

Selanjutnya, berdasarkan penjelasan di atas ada beberapa kemungkinan sketsa grafik fungsi kuadrat $f(x) = ax^2 + bx + c$ jika ditinjau dari nilai a dan nilai diskriminan $D = b^2 - 4ac$ yaitu:

jika: a>0 maka parabola terbuka ke atas atau mempunyai titik balik minimum.
a<0maka parabola terbuka ke bawah atau mempunyai titik balik maksimum.

jika: D> 0 maka parabola memotong sumbu x di dua titik yang berlainan.
D= 0 maka parabola memotong sumbu x di dua titik yang berimpit atau parabola menyinggung sumbu x.
D<0 maka parabola tidak memotong dan tidak menyinggung sumbu x.

Secara geometris seperti diperlihatkan pada gambar 3-8 di bawah ini



Gambar 3-8

Untuk lebih memahami dan terampil menggambar sketsa grafik fungsi kuadrat secara umum, marilah kita simak beberapa contoh di bawah ini.

Contoh 1:
Gambarkan sketsa grafik fungsi kuadrat $f(x) = x^2-4x-5$.

Jawab:
Grafik fungsi kuadrat $f(x)=x^2-4x-5$ adalah sebuah parabola dengan persamaan $y = x^2-4x-5$, berarti a=1, b= -4, dan c= -5.

(i) Titik potong grafik dengan sumbu x, dan sumbu y.

a). Titik potong grafik dengan sumbu x, diperoleh jika y = 0.

ini berarti: $x^2-4x-5 = 0$

$\Leftrightarrow \quad (x+1)(x-5) = 0$

$x+1 = 0$ atau $x-5 = 0$

$x = 0 -1$ atau $x = 0 + 5$

$x = -1$ atau $x = 5$

jadi, titik potongnya dengan sumbu x adalah (-1,0) dan (5,0).

b). Titik potong grafik dengan sumbu y, diperoleh jika x = 0.

Ini berarti: $y = (0)^2 - 4(0) -5$

$y = 0-0-5$

$y = -5$

Jadi, titik potongnya dengan sumbu y adalah (0,-5) (ii). Koordinat titik balik

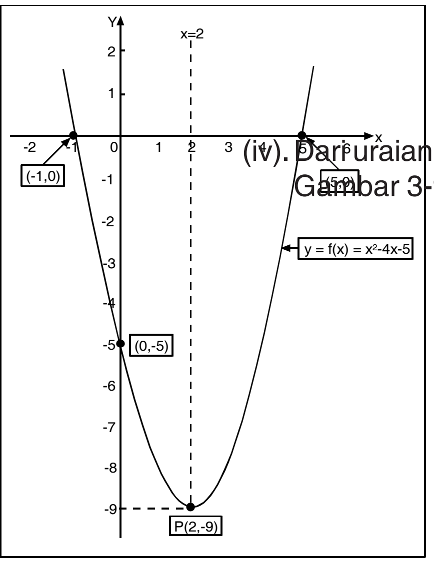
$$p\left(-\frac{b}{2a},-\frac{b^2-4ac}{4a}\right)$$
$$p\left(-\frac{(-4)}{2(1)},-\frac{(-4)^2-4(1)(-5)}{4(1)}\right)$$
$$p\left(\frac{4}{2},-\frac{16+20}{4}\right)$$
$$p\left(2,-\frac{36}{4}\right)$$
$$p(2,-9)$$

Oleh karena a = 1>0, maka p merupakan titik balik minimum sehingga parabolanya terbuka ke atas.

(iii). Persamaan sumbu simetri adalah $x=-\dfrac{b}{2a}$

$$x=-\frac{(-4)}{2(1)}$$
$$x=\frac{4}{2}$$
$$x=2$$

(iv). Dari uraian di atas, maka sketsa grafik fungsi kuadrat f(x) = x^2-4x-5 seperti Gambar 3-9 di bawah ini.



Gambar 3-9

Setelah mempelajari contoh 1 di atas, apakah Anda sudah paham? Baiklah, agar Anda lebih paham simaklah contoh 2 di bawah ini.

Contoh 2:
Gambarkan sketsa grafik fungsi kuadrat $f(x) = -x^2+2x-1$

Jawab:
Grafik fungsi kuadrat $f(x) = x^2+2x - 1$ adalah sebuah parabola dengan persamaan $y = x^2+2x -1$, berarti a= -1, b =2, dan c = -1.

(i). Titik potong grafik dengan sumbu x dan sumbu y.

a). Titik potong grafik dengan sumbu x diperoleh jika y = 0.

ini berarti: $-x^2-2x-1 = 0$ (kedua ruas dikalikan -1)

$$\Leftrightarrow \quad x^2-2x+1 = 0$$
$$(x-1)(x-1) = 0$$
$$x-1 = 0 \quad \text{atau} \quad x-1 = 0$$
$$x = 0+1 \quad \text{atau} \quad x = 0+1$$
$$x = 1 \quad \text{atau} \quad x = 1$$

Jadi, titik potongnya dengan sumbu x adalah (1,0) atau grafik menyinggung sumbu x di titik (1,0).

b). Titik potong grafik dengan sumbu y diperoleh jika x=0.

Ini berarti: $y = -(0)^2+2(0)-1$

$$y = 0 + 0-1$$
$$y = -1$$

Jadi, titik potongnya dengan sumbu y adalah (0,-1).

(ii). Koordinat titik balik.

Oleh Karena a = -1<0, maka p merupakan titik balik maksimum, sehingga parabolanya terbuka ke bawah.

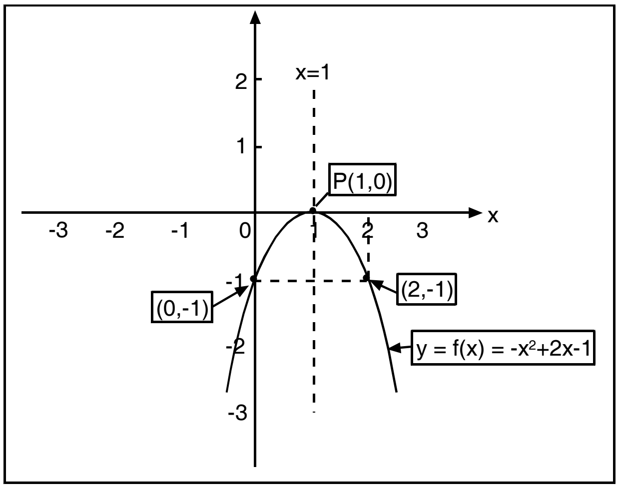
(iii). Persamaan sumbu simetri adalah $x = -\frac{b}{2a}$

$$x = -\frac{2}{2(-1)}$$

$$x = -\frac{2}{(-2)}$$

$$x = 1$$

(iv). Dari uraian di atas, maka sketsa grafik fungsi kuadrat $f(x) = -x^2 + 2x - 1$ seperti Gambar 3-10 di bawah ini.



Gambar 3-10

Bagaimana, apakah Anda sudah paham? Baiklah, untuk lebih jelasnya, perhatikanlah contoh 3 di bawah ini.

Contoh 3:
Gambarkan sketsa grafik fungsi kuadrat $f(x) = x^2-4x+5$.

Jawab:
Grafik fungsi kuadrat $f(x) = x^2 -4x + 5$ adalah sebuah parabola dengan persamaan $y = x^2-4x=5$, berarti a=1, b= -4, dan c = 5.

(i). Titik potong grafik dengan sumbu x dan sumbu y.
   a). Titik potong grafik dengan sumbu x diperoleh jika y = 0.
       Karena $D= b^2-4ac = (-4)^2-4(1)(5) = 16-20= -4<0$
       Berarti grafik tidak memotong sumbu x

b). Titik potong grafik dengan sumbu y diperoleh jika x= 0
ini berarti: $y = (0)^2-4(0)+5$
$y = 0-0+5$
$y = 5$
Jadi, titik potongnya dengan sumbu y adalah (0,5).

(ii). Koordinat titik balik

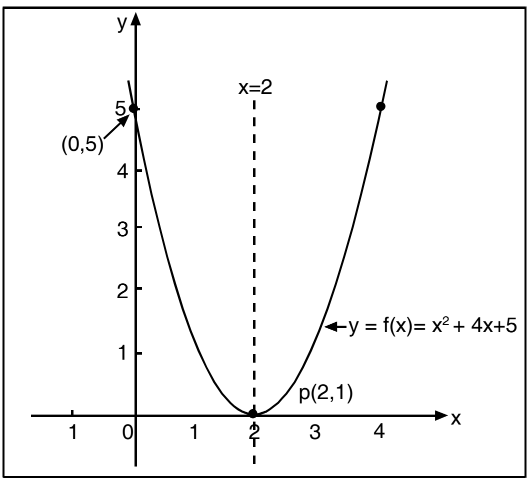
$$p\left(-\frac{b}{2a},-\frac{b^2-4ac}{4a}\right)$$
$$p\left(-\frac{(-4)}{2(1)},-\frac{(-4)^2-4(1)(5)}{4(1)}\right)$$
$$p\left(\frac{4}{2},-\frac{16-20}{4}\right)$$
$$p\left(2,-\frac{(-4)}{4}\right)$$
$$p(2,1)$$

Oleh karena a= 1>0, maka p merupakan titik balik minimum, sehingga parabolanya terbuka ke atas.

Persamaan sumbu simetri adalah $x = -\frac{b}{2a}$

$$x = -\frac{(-4)}{2(1)}$$
$$x = 2$$

(iii). Dari uraian di atas, maka sketsa grafik fungsi kuadrat $f(x) = x^2-4x+5$ seperti Gambar 3-11 di bawah ini.



Gambar 3-11

Setelah menyimak beberapa contoh di atas, apakah Anda sudah paham? Untuk mengetahui sejauh mana pemahaman Anda terhadap materi di atas, kerjakanlah soal-soal latihan uji kompetensi di bawah ini. Perhatikan, Anda jangan membaca jawabannya terlebih dulu.

1. Gunakan sketsa grafik fungsi kuadrat $f(x) = -x^2+5x$.
2. Gambarkan sketsa grafik fungsi kuadrat $f(x) = x^2+4x + 4$.
3. Gambarkan sketsa grafik fungsi kuadrat $f(x) = 2x^2+4x - 6$.
4. Gambarkan sketsa grafik fungsi kuadrat $f(x) = 2x^2-3x+5$.

Sudah selesaikah Anda mengerjakannya? Biklah, untuk mengetahui apakah pekerjaan Anda benar atau tidak, cocokkanlah pekerjaan Anda dengan jawaban di bawah ini.

1. Grafik fungsi kuadrat $f(x) = -x^2+5x$ adalah sebuah parabola dengan persamaan $y = -x^2+5x$, berarti $a=-1$, $b = 5$, dan $c = 0$.

   (i). Titik potong grafik dengan sumbu x dan sumbu y.

   a). Titik potong grafik dengan sumbu x diperoleh jika $y = 0$.

   Ini berarti:
$$\begin{aligned} -x^2+5x &= 0. \\ x(-x+5) &= 0. \\ x = 0 \text{ atau } -x+5 &= 0 \\ -x &= 0-5 \\ -x &= -5 \\ x &= 5 \end{aligned}$$
   Jadi, titik potongnya dengan sumbu x adalah (0,0) dan (5,0)

   b). Titik potong grafik dengan sumbu y diperoleh jika $x=0$.

   Ini berarti:
$$\begin{aligned} y &= -(0)^2+5(0) \\ y &= 0+0 \\ y &= 0 \end{aligned}$$
   Jadi, titik potongnya dengan sumbu y adalah (0, 0)

   (ii). Koordinat titik balik

$$p\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2-4ac}{4a}\right)$$
$$p\left(-\frac{5}{2(-1)}, -\frac{(5)^2-4(-1)(0)}{4(-1)}\right)$$
$$p\left(\frac{5}{2}, -\frac{25-0}{(-4)}\right)$$
$$p\left(\frac{5}{2}, -\frac{25}{(-4)}\right)$$
$$p\left(2\frac{1}{2}, 6\frac{1}{4}\right)$$

Oleh karena a = -1<0, maka p merupakan titik balik maksimum, sehingga parabolanya terbuka ke bawah.

Persamaan sumbu simetri adalah $x = -\frac{b}{2a}$

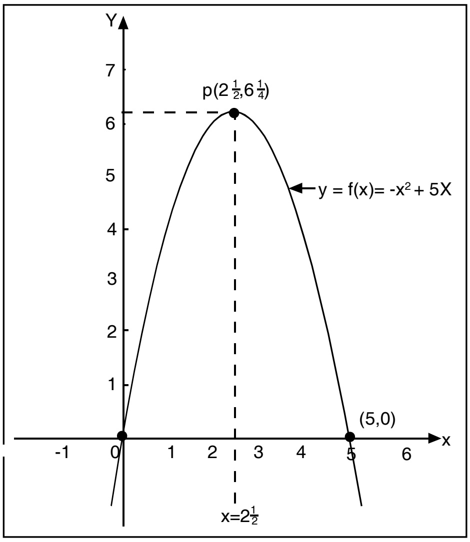
$$x = -\frac{5}{2(-1)}$$

$$x = -\frac{5}{(-2)}$$

$$x = \frac{5}{2}$$

$$x = 2\frac{1}{2}$$

(iii). Dari uraian di atas, maka sketsa grafik fungsi kuadrat $f(x) = -x^2+5x$ seperti Gambar 3-12 di bawah ini.



Gambar 3-12

2. Grafik fungsi kuadrat $f(x) = x^2 + 4x+4$ adalah sebuah parabola dengan persamaan $y = x^2 + 4x +4$, berarti a=1, b = 4, dan c = 4.

   (i). Titik potong grafik dengan sumbu x dan sumbu y.

   a). Titik potong grafik dengan sumbu x diperoleh jika y = o.

   ini berarti: $x^2 + 4x + 4 = 0$

   $(x + 2)(x + 2) = 0$

   $x + 2 = 0$ atau $x + 2 = 0$

$x = 0-2$ atau $x = 0-2$

$x = -2$ atau $x = -2$

Jadi, titik potongnya dengan sumbu x adalah (-2, 0) atau grafik menyinggung sumbu x di titik (-2, 0).

b). Titik potong grafik dengan sumbu y diperoleh jika x= 0.

Ini berarti: $y = (0)^2+4(0) + 4$

$y = 0+0+4$

$y = 4$

Jadi, titik potongnya dengan sumbu y adalah (0,4).

(ii) Koordinat titik balik

$$p\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2-4ac}{4a}\right)$$

$$p\left(-\frac{4}{2(1)}, -\frac{(4)^2-4(1)(4)}{4(1)}\right)$$

$$p\left(-\frac{4}{2}, -\frac{16-16}{4}\right)$$

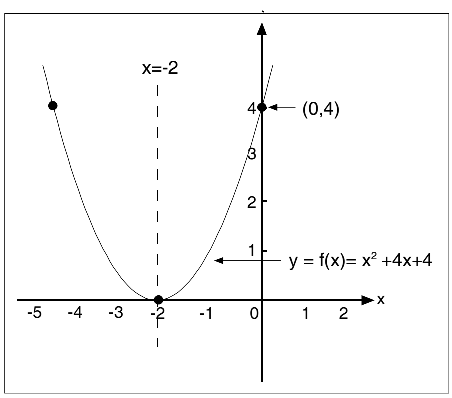
$$p\left(-2, -\frac{0}{4}\right)$$

$$p(-2,0)$$

Oleh karena a=1>0, maka p merupakan titik balik minimum, sehingga parabola terbuka ke atas.

Persamaan sumbu simetri adalah $x = -\dfrac{b}{2a}$

(iii). Dari uraian di atas, maka sketsa grafik fungsi kuadrat $f(x) = x^2+4x + 4$ seperti Gambar 3-13 di bawah ini.



Gambar 3-13

3. Grafik fungsi kuadrat $f(x) = 2x^2+4x - 6$ adalah sebuah parabola dengan persaman $y = 2x^2+4x-6$, berarti a= 2, b = 4, dan c = -6.

(i). Titik potong grafik dengan sumbu x dan sumbu y.

a). Titik potong grafik dengan sumbu x diperoleh jika y = 0,

berarti: $2x^2+4x-6 = 0$ (kedua ruas dibagi 2).

$$x^2+2x - 3 = 0$$
$$(x+3)(x-1) = 0$$
$$x+3 = 0 \quad \text{atau } x -1 = 0$$
$$x = 0-3 \quad \text{atau } x = 0+ 1$$
$$x = -3 \quad \text{atau } x = 1$$

Jadi, titik potongnya dengan sumbu x adalah (-3, 0) dan (1, 0).

b). Titik potong grafik dengan sumbu y diperoleh jika x = 0,

berarti $y = 2(0)^2+4(0)-6$

$$y = 0+0 -6$$
$$y = -6$$

Jadi, titik potongnya dengan sumbu y adalah (0,-6)

(ii). Koordinat titik balik

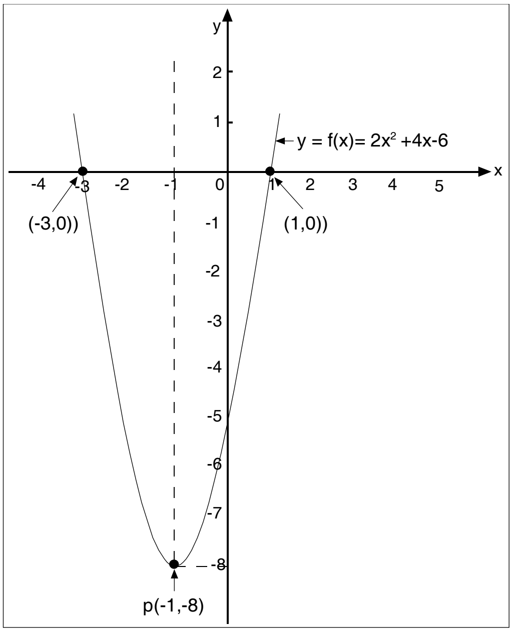
$$p\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2-4ac}{4a}\right)$$
$$p\left(-\frac{4}{2(2)}, -\frac{(4)^2-4(2)(-6)}{4(2)}\right)$$
$$p\left(-\frac{4}{4}, -\frac{16-48}{8}\right)$$
$$p\left(-1, -\frac{64}{8}\right)$$
$$p(-2,-8)$$

Oleh karena a= 2>0, maka p merupakan titik balik minimum, sehingga parabola terbuka ke atas.

Persamaan sumbu simetri adalah $x = -\frac{b}{2a}$

$$x = -\frac{4}{2.2}$$
$$x = -\frac{4}{4}$$
$$x = 1$$

(iii). Dari uraian di atas, maka sketsa grafik fungsi kuadrat $f(x) = 2x^2+4x -6$ seperti Gambar 3-14 di bawah ini.



Gambar 3-14

Anda sudah paham? Bagus! Apabila masih kurang paham, cermati contoh 4 di bawah ini.

4. Grafik fungsi $f(x) = 2x^2-3x + 5$ adalah sebuah parabola dengan persaman $y = 2x^2-3x + 5$, berarti a = 2, b = -3, dan c = 5.

   (i). Titik potong grafik dengan sumbu x dan y

   a). Titik potong grafik dengan sumbu x diperoleh jika y = 0.
   Karena $D = b^2-4ac = (-3)^2-4(2)(5) = 9-40 = 31<0$ berarti grafik tidak memotong sumbu x.

   b). Titik potong grafik dengan sumbu y diperoleh jika x = 0. ini berarti:
   $y = 2(0)^2-3(0)+5$
   $= 0 – 0+5$
   $= 5$
   Jadi, titik potongnya dengan sumbu y adalah (0, 5).

   (ii). Koordinat titik balik

   $$p\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2-4ac}{4a}\right)$$

$$p\left(-\frac{(-3)}{2(2)},-\frac{(-3)^2-4(1)(5)}{4(2)}\right)$$

$$p\left(\frac{3}{4},-\frac{9-40}{8}\right)$$

$$p\left(\frac{3}{4},-\frac{(-31)}{8}\right)$$

$$p\left(\frac{3}{4},\frac{31}{8}\right)$$

$$p\left(\frac{3}{4},3\frac{7}{8}\right)$$

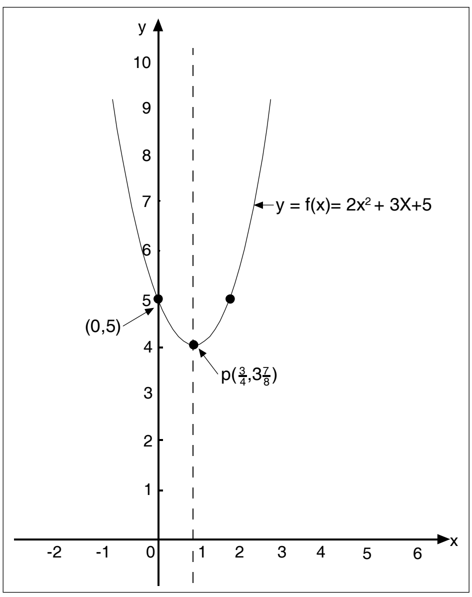
Oleh karena a = 2>0, maka P merupakan titik balik minimum, sehingga parabola terbuka ke atas.

Persamaan sumbu simetri adalah $x=-\dfrac{b}{2a}$

$$x=-\frac{(-3)}{2(2)}$$

x =

(iii) Dari uraian di atas, maka sketsa grafik fungsi kuadrat f(x) = $2x^2$-3x+5 seperti gambar 3-15 di bawah ini.



Gambar 3-15

Apakah pekerjaan Anda sama seperti jawaban di atas? Apabila ya, bagus! Berarti Anda benar. Apabila pekerjaan Anda belum sama seperti jawaban di atas, segeralah perbaiki dan samakan dengan jawaban tadi. Jika mengalami kesulitan, diskusikanlah dengan teman-teman atau tanyakan langsung kepada guru bina pada saat tatap muka. Bagi Anda yang menjawab benar, selanjutnya marilah kita pelajari materi berikut

2. Definit Positif dan Definit Negatif

Pada kegiatan 3 bagian 1 Anda telah mempelajari cara menggambar sketsa grafik fungsi kuadrat $f(x) = ax^2+bx + c$.

Grafik fungsi kuadrat $f(x) = ax^2 + bx + c$. beberapa sketsa grafik fungsi kuadrat yang mungkin jika ditinjau dari nilai a dan diskriminan $D = b^2-4ac$ telah Anda ketahui pada Gambar 3-8. Simaklah kembali Gambar 3-8a dan Gambar 3-8d. Selanjutnya perhatikanlah penjelasan di bawah ini.

- Untuk Gambar 3-8a
  Pada Gambar 3-8a, parabola terbuka ke atas dan tidak memotong maupun menyinggung sumbu x. dikatakan parabola selalu berada di atas sumbu x untuk setiap nilai $x \in R$. Hal ini terjadi apabila nilai $a>0$ dan $D<0$.
  Secara aljabar dapat dikatakan:
  Bentuk ax^2+bx+c disebut <u>definit positif.</u>
  Dengan demikian, syarat definit positif adalah $a>0$ dan $D<0$.

- Untuk Gambar 3-8d
  Pada Gambar 3-8d, parabola terbuka ke bawah dan tidak memotong maupun menyinggung sumbu x. dikatakan parabola selalu berada di bawah sumbu x untuk setiap nilai xR. Hal ini terjadi apabila nilai $a<0$ dan $D<0$.
  Secara aljabar dapat dikatakan:
  Bentuk $ax^2+bx+c <0$ untuk setiap xR, atau bentuk $ax^2 +bx+c$ disebut <u>definit negatif.</u>
  Dengan demikian, syarat definit negatif adalah $a<0$ dan $D<0$.

Agar Anda memahami dan terampil menyelesaikan soal-soal yang berkaitan dengan definit positif dan definit negatif, perhatikanlah beberapa contoh di bawah ini.

Contoh 1:
Selidiki apakah fungsi kuadrat dengan persamaan $f(x) = x^2+x + 5$ termasuk definit positif atau definit negatif atau tidah kedua-duanya?

Jawab:
Fungsi kuadrat $f(x) = x^2+x+5$, berarti a= 1, b = 1, dan c = 5.
Maka diskriminan $D = b^2-4ac = (1)^2-4(1)(5) = 1-20 = -19$.

termasuk definit positif.

Mudah bukan? Baiklah, selanjutnya perhatikan contoh 2 di bawah ini.

Contoh 2:
Periksa apakah fungsi kuadrat dengan persamaam $f(x) = -x^2-4x - 6$ termasuk definit positif atau definit negatif atau tidak kedua-duanya?

Jawab:
Fungsi kuadrat $f(x) = -x^2-4x-6$, berarti $a = -1$, $b= -4$, dan $c = -6$.
Maka diskriminan $D = b^2-4ac = (-4)^2-4(-1)(-6)= 16-24 = -8$.

$$\left.\begin{aligned}\text{Karena }\ a &= -1\\ D &= -8\end{aligned}\right\}$$ ini berarti a< 0 dan D<0, sehingga fungsi kuadrat $f(x) = -x^2- 4x\ 6$

termasuk definit negatif.

Sudah pahamkah Anda setelah memcermati contoh 1 dan 2 di atas? Baiklah, untuk lebih pahamnya perhatikan contoh 3 berikut.

Contoh 3:
Selidiki apakah fungsi kuadrat dengan persamaan $f(x)= -2x^2+4x$ termasuk definit positif atau definit negatif atau tidak kedua-duanya!

Jawab:
Fungsi kuadrat $f(x)= -2x^2+4x$, berarti $a= -2$, $b = 4$, dan $c = 0$.
Maka diskriminan $D = b^2-4ac = (4)^2-4(-2)(0) = 16 + 0 = 16$

$$\left.\begin{aligned}\text{Karena}\, a &= -2\\ D &= 16\end{aligned}\right\}$$ Ini berarti a<0 dan D>0, sehingga fungsi kuadrat $f(x) = -2x^2+ 4x$

tidak definit positif dan tidak definit negatif.

Bagaimana, tidak sulit bukan? Anda sudah paham? Bagus! Apabila belum paham, perhatikan contoh 4 di bawah ini.

Contoh 4:
Tentukan batas-batas nilai p, agar fungsi $f(x) = x^2-4x +m$ definit positif!

Jawab:
Fungsi kuadrat $f(x) = x^2-4x +m$, berarti $a= 1$, $b= -4$, $c = m$
Syarat agar fungsi kuadrat f definit adalah $a>0$ dan $D<0$.

(i). $a>0$, syarat ini sudah dipenuhi karena $a = 1$

(ii). $D<0$, maka:

$$\begin{aligned} b^2-4ac &< 0 \\ (-4)^2-4(1)(m) &< 0 \\ 16 - 4m &< 0 \\ 16 &< 0+4m \\ 16 &< 4m \\ \frac{16}{4} &< m \\ 4 &< m \\ m &> 4 \end{aligned}$$

Karena syarat (i) sudah dipenuhi, maka berdasarkan syarat (ii) batas-batas nilai m adalah $m>4$.

Setelah mempelajari contoh-contoh di atas, apakah Anda sudah paham? Untuk menambah pemahaman Anda, cermati contoh 5 di bawah ini.

Contoh 5:
Tentukan batas nilai k, agar fungsi $f(x) = (k-1)x^2-2kx + (k-2)$ definit negatif!

Jawab:
Fungsi kuadrat $f(x) = (k-1)x^2-2kx + (k-2)$, berarti $a = (k-1)$, $b= -2k$, dan $c = (k-2)$. Syarat agar fungsi kuadrat f definit negatif adalah $a<0$ dan $D<0$.

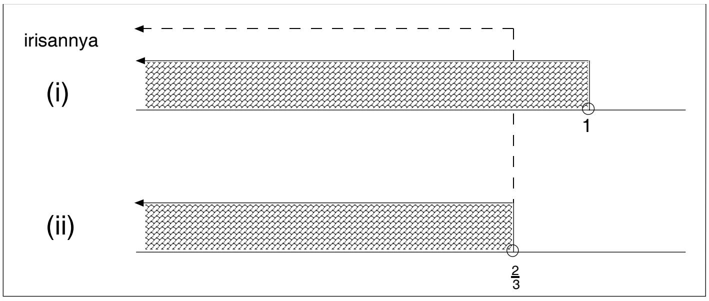
(i). $a<0$, maka

$$\begin{aligned} (k-1) &< 0 \\ k-1 &< 0 \\ k &< 0+1 \\ k &< 1 \end{aligned}$$

(ii). $D<0$, maka $b^2-4ac < 0$

$$\begin{aligned} (-2k)^2-4(k-1)(k-2) &< 0 \\ 4k^2-4(k^2-2k-k+2) &< 0 \\ 4k^2-4(k^2-3k+2) &< 0 \\ 4k^2-4k^2+12k-8 &< 0 \\ 12k - 8 &< 0 \\ 12k &< 0+8 \\ 12k &< 8 \\ k &< \frac{8}{12} \\ k &< \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Dengan menyatukan syarat (i) dan (ii) atau mencari irisannya, maka batas nilai k seperti diperlihatkan pada Gambar 3-16 di bawah ini.



Gambar 3-16

Berdasarkan Gambar 3-16 batas nilai k yang memenuhi adalah $k<\frac{2}{3}$

Jadi, agar fungsi kuadrat $f(x) = (k-1)x^2-2kx + (k-2)$ definit negatif adalah $k<\frac{2}{3}$

Setelah menyimak beberapa contoh di atas, apakah Anda paham? Untuk mengetahui sejauh mana pemahaman Anda terhadap materi di atas, kerjakan soal-soal latihan uji kompetensi di bawah ini.

1. Selidiki masing-masing fungsi kuadrat di bawah ini, apakah definitif positif, definitif negatif atau tidak kedua-duanya.
   a). $f(x) = 2x^2+3x +4$.
   b). $f(x) = -x^2+ 2x – 5$.
   c). $f(x) = x^2-x – 2$.

2. Tentukan batas-batas nilai m, agar fungsi kuadrat ($f(x) = -x^2-8x + m$ definit negatif!

3. Tentukan batas-batas nilai k, agar fungsi kuadrat:
   $f(x)= (k + 1)x^2+(2k+1)x+(k+2)$ definit positif.

Sebelum Anda selesai mengerjakan soal-soal di atas, jangan membaca jawabannya terlebih dulu. Apabila sudah selesai mengerjakannya, seperti inikah jawaban Anda?

1. a). Fungsi kuadrat $f(x) = 2x^2+ 3x + 4$, berarti a=2, b= 3, dan c = 4.
   Maka diskriminan $D = b^2-4ac = (3)^2-4(2)(4) = 9-32 = -23$.

   Karena $\left.\begin{aligned} a &= 2 \\ D &= -23 \end{aligned}\right\}$ Ini berarti a>0 dan D<0, sehingga fungsi kuadrat

   $f(x) = 2x^2 + 3x +4$ termasuk definit positif.

b). Fungsi kuadrat $f(x) = -x^2+2x - 5$, berarti a= -1, b= 2, dan c = -5.
Maka diskriminan $D = b^2-4ac=(2)^2-4(-1)(-5) = 4-20 = -16$.

$$\left.\begin{aligned} \text{Karena } a &= -1 \\ D &= -16 \end{aligned}\right\}$$ Ini berarti a<0 dan D<0, sehingga fungsi kuadrat

$f(x) = -x^2+2x-5$ termasuk definit negatif.

c). Fungsi kuadrat $f(x) = x^2-x-2$, berarti a=1, b= -1, dan c = -2.
Maka diskriminan $D = b^2-4ac = (-1)^2-4(1)(-2) = 1+8 = 9$.

$$\left.\begin{aligned} \text{Karena } a &= 1 \\ D &= 9 \end{aligned}\right\}$$ ini berarti a>0 dan D>0, sehingga fungsi kuadrat

$f(x) = x^2-x-2$ tidak termasuk definit positif maupun negatif.

2. Fungsi kuadrat $f(x) = -x^2-8x + m$, berarti a = -1, b = -8, dan c = m.
Syarat agar fungsi kuadrat f definit adalah a<0 dan D<0.

(i). a<0, syarat ini sudah dipenuhi karena a = -1

(ii). D<0, maka
$$\begin{aligned} b^2-4ac &< 0 \\ (-8)^2-4(-1)(m) &< 0 \\ 64 + 4m &< 0 \\ 4m &< 0-64 \\ m &< -64 \\ m &< -\frac{64}{4} \\ m &< -16 \end{aligned}$$

Karena syarat (i) sudah dipenuhi, maka berdasarkan syarat (ii) batas-batas nilai m adalah m <-16.

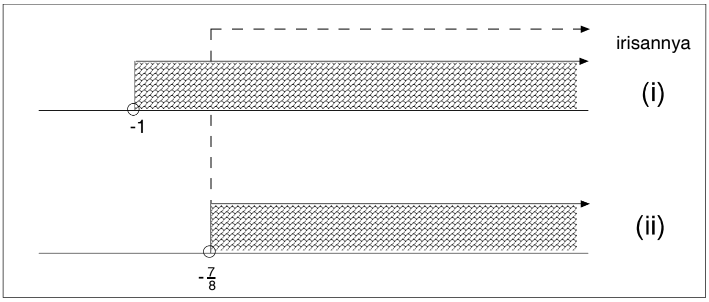
3. Fungsi kuadrat $f(x) = (k+1)x^2+ (2k+1)x + (k+2)$, berarti a= (k+1), b = (ak+1), dan c = (k+2).
Syarat agar fungsi f definit positif adalah a>0 dan D<0.

(i). a>0, maka
$$\begin{aligned} (k+1) &> 0 \\ k+1 &> 0 \\ k &> 0-1 \\ k &> -1 \end{aligned}$$

(ii). D<0, maka
$$\begin{aligned} b^2-4ac &< 0 \\ (2k+1)^2-4(k+1)(k+2) &< 0 \\ 4k^2+4k+1-4(k^2+2k+k+2) &< 0 \\ 4k^2+4k+1-4(k^2+3k+2) &< 0 \\ 4k^2+4k+1-4k^2-12k-8 &< 0 \\ -8-7 &< 0 \end{aligned}$$

$$-7 < 0+8k$$
$$-7 < 8k$$
$$8k > -7$$
$$k > -\frac{7}{8}$$

Dengan menyatukan syarat (i) dan (ii) atau mencari irisanya, maka batas nilai k seperti diperlihatkan pada Gambar 3-17 di bawah ini.



Gambar 3-17

Berdasarkan Gambar 3-16 batas nilai k yang memenuhi adalah $k > -\frac{7}{8}$

Jadi, agar fungsi kuadrat $f(x) = (k+1)x^2+(2k+1)x+(k+2)$ definit positif adalah

$k > -\frac{7}{8}$

Bagaimana, tidak sulit bukan? Apakah pekerjaan Anda sama seperti jawaban di atas? Apabila ya, bagus! Berarti Anda benar. Jika Anda mengalami kesulitan diskusikan dengan teman-teman atau tanyakan kepada guru bina pada saat tatap muka. Bagi Anda yang menjawab belum benar segeralah samakan pekerjaan Anda dengan jawaban di atas. Selanjutnya bagi Anda yang menjawab benar, pelajarilah materi berikut.

3. Kaitan Persamaan Kuadrat dan Fungsi Kuadrat

Pada kegiatan 3 bagian 1b, telah Anda pelajari cara menggambar sketsa grafik fungsi kuadrat secara umum. Salah satu langkahnya adalah menentukan titik potong grafik fungsi kuadrat $y = f(x) = ax^2+bx+c$ dengan sumbu x. Pada prinsipnya, titik potong grafik fungsi kuadrat $y = f(x) = ax^2+bx+c$ dapat diperoleh dengan cara menentukan nilai-nilai x yang mengakibatkan nilai y = 0. Hal ini berarti proses menentukan akar-akar persamaan kuadrat $ax^2+bx+c=0$. Dengan demikian, kondisi grafik dan titik potong grafik fungsi kuadrat dengan sumbu x dapat dipelajari dengan mengkaji dan menentukan sifat-sifat dari persamaan kuadrat. Sifat inilah yang menunjukkan kaitan antara persamaan kuadrat dan fungsi kuadrat.

Apabila ditinjau berdasarkan kedudukan grafik fungsi kuadrat $y= f(x) = ax^2+bx+c$ terhadap sumbu x secara keseluruhan ada enam kemungkinan. Keenam kemungkinan kedudukan itu ditentukan oleh tanda-tanda dari nilai a dan tanda-tanda dari nilai diskriminan $D = b^2-4ac$. Keenam kemungkinan kedudukan grafik fungsi kuadrat $y= f(x) = ax^2+bx+c$ terhadap sumbu x dapat Anda lihat kembali pada Gambar 3-8.

Berdasarkan Gambar 3-8 dapat Anda ketahui hal-hal yang merupakan keterkaitan antara persamaan kuadrat dan fungsi kuadrat sebagai berikut:

Gambar 3-8a
Apabila nilai $a>0$ dan $D<0$ maka persamaan kuadrat $ax^2+bx+c = 0$ tidak mempunyai akar-akar real, sehingga grafik fungsi kuadrat $y = f(x) = ax^2+bx+c$ terbuka ke atas (mempunyai titik balik minimum) dan tidak memotong maupun menyinggung sumbu x.

Gambar 3-8b
Apabila nilai $a>0$ dan $D= 0$ maka persamaan kuadrat $ax^2+bx+c = 0$ mempunyai akar-akar real dan, sehingga grafik fungsi kuadrat $y = f(x) = ax^2+bx+c$ terbuka ke atas (mempunyai titik balik minimum) dan menyinggung sumbu x.

Gambar 3-8c
Apabila nilai $a>0$ dan $D>0$ maka persamaan kuadrat $ax^2+bx+c = 0$ mempunyai akar-akar real dan berlainan, sehingga grafik fungsi kuadrat $y = f(x) = ax^2+bx+c$ terbuka ke atas (mempunyai titik balik minimum) dan memotong sumbu x di dua titik yang berlainan.

Gambar 3-8d
Apabila nilai $a<0$ dan $D<0$ maka persamaan kuadrat $ax^2+bx+c = 0$ tidak mempunyai akar-akar real, sehingga grafik fungsi kuadrat $y = f(x) = ax^2+bx+c$ terbuka ke bawah (mempunyai titik balik maksimum0 dan tidak memotong maupun menyinggung sumbu x.

Gambar 3-8e
Apabila nilai $a<0$ dan $D = 0$ maka persamaan kuadrat $ax^2+bx+c = 0$ mempunyai akar-akar real dan sama (kembar), sehingga grafik fungsi kuadrat $y = f(x) = ax^2+bx+c$ terbuka ke bawah (mempunyai titik balik maksimum) dan menyinggung sumbu x.

Gambar 3-8f
Apabila nilai $a<0$ dan $D>0$ maka persamaan kuadrat $ax^2+bx+c = 0$ mempunyai akar-akar real dan berlainan, sehingga grafik fungsi kuadrat $y = f(x) = ax^2+ bx+c$ terbuka ke bawah (mempunyai titik balik maksimum) dan memotong sumbu x di dua titik yang berlainan.

Berdasarkan uraian di atas, maka dapat Anda ketahui bahwa terdapat keterkaitan antara persamaan kuadrat dan fungsi kuadrat. Untuk lebih jelasnya, marilah kita perhatikan beberapa contoh di bawah ini.

Contoh 1:
Tentukan kedudukan grafik fungsi kuadrat f(x)= x^2+2x+5 terhadap sumbu x, tanpa harus menggambar sketsa grafiknya terlebih dulu!

Jawab:
Fungsi kuadrat f(x) = x^2+2x+5, berarti a= 1, b= 2, dan c = 5.
Maka D= $b^2-4ac = (2)^2-4(1)(5) = 4-20 = -16$.

$$\text{Karena } \left.\begin{aligned} a &= 1 \\ D &= -16 \end{aligned}\right\}$$ ini berarti a>0 dan D<0, sehingga grafik fungsi kuadrat tersebut terbuka ke atas dan tidak memotong maupun menyinggung sumbu x.

Bagaimana, mudah bukan? Sudah pahamkah Anda? Baiklah, untuk lebih jelasnya, perhatikanlah contoh 2 di bawah ini.

Contoh 2:
Tentukan kedudukan grafik fungsi kuadrat f(x)= $-x^2+4x$ terhadap sumbu x, tanpa harus menggambar sketsa grafiknya terlebih dulu!

Jawab:
Fungsi kuadrat f(x) = $-x^2+4x$, berarti a= -1, b = 4, dan c= 0.
Maka D = $b^2-4ac = (4)^2-4(-1)(0) = 16-0 = 16$

$$\text{Karena } \left.\begin{aligned} a &= -1 \\ D &= 16 \end{aligned}\right\}$$ ini berarti a<0 dan D>0, sehingga grafik fungsi kuadrat tersebut terbuka ke bawah dan memotong sumbu x di dua titik yang berlainan.

Tidak sulit bukan? Apakah Anda paham? Baiklah, agar lebih paham lagi, perhatikan contoh 3 di bawah ini.

Contoh 3:
Tentukan kedudukan grafik fungsi kuadrat f(x) = $x^2-8x+16$ terhadap sumbu x, tanpa harus menggambar sketsa grafiknya terlebih dulu!

Jawab:
Fungsi kuadrat f(x) = $x^2-8x+16$, berarti a=1, b= -8, dan c= 16.
Maka D = $b^2-4ac= (-8)^2-4(1)(16)= 64 - 64 = 0$

$$\text{Karena } \left.\begin{aligned} a &= 1 \\ D &= 0 \end{aligned}\right\}$$ ini berarti a>0 dan D= 0, sehingga grafik fungsi kuadrat tersebut terbuka ke atas dan menyinggung sumbu x.

Nah, setelah memperhatikan beberapa contoh di atas, apakah Anda sudah paham? Untuk mengetahui sejauh mana pemahaman Anda terhadap materi di atas, kerjakan soal-soal latihan uji kompetensi di bawah ini.

1. Tentukan kedudukan grafik fungsi kuadrat $f(x) = 2x^2-x-1$ terhadap sumbu x, tanpa harus menggambar sketsa grafiknya terlebih dulu!

2. Tentukan kedudukan grafik fungsi kuadrat $f(x) = -x^2+6x-9$ terhadap sumbu x, tanpa harus menggambar sketsa grafiknya terlebih dulu!

3. Tentukan kedudukan grafik fungsi kuadrat $f(x) = -3x^2-1$ terhadap sumbu x, tanpa harus menggambar sketsa grafiknya terlebih dulu!

Bagaimana, tidak sulit bukan? Sebelum selesai mengerjakan soal-soal di atas, Anda jangan membaca jawabannya terlebih dulu. Apabila sudah selesai mengerjakannya, cocokkanlah pekerjaan Anda dengan jawaban di bawah ini.

1. Fungsi kuadrat $f(x) = 2x^2-x-1$, berarti a=2, b= -1, dan c= -1.
   Maka $D= b^2-4ac= (-1)^2-4(2)(-1)= 1+8= 9$.

   $$\text{Karena } \left.\begin{array}{r} a = 2 \\ D = 9 \end{array}\right\}$$
   ini berarti a>0 dan D>0, sehingga grafik fungsi kuadrat tersebut terbuka ke atas dan memotong sumbu x di dua titik yang berlainan.

2. Fungsi kuadrat $f(x)= -x^2+bx-9$, berarti a= -1, b= 6, dan c= -9.
   Maka $D = b^2-4ac= (6)^2-4(-1)(-9)= 36 – 36 = 0$

   $$\text{Karena } \left.\begin{array}{r} a = -1 \\ D = 0 \end{array}\right\}$$
   ini berarti a<0 dan D= 0, sehingga grafik fungsi kuadrat tersebut terbuka ke bawah dan menyinggung sumbu x.

3. Fungsi kuadrat $f(x) = -3x^2-1$, berarti a= -3, b=0, dan c= -1.
   Maka $D = b^2-4ac = (0)^2-4(-3)(-1)= 0-12= -12$.

   $$\text{Karena } \left.\begin{array}{r} a = -3 \\ D = 12 \end{array}\right\}$$
   Ini berarti a<0 dan D<0, sehingga grafik fungsi kuadrat tersebut terbuka ke bawah dan tidak memotong maupun menyinggung sumbu x.

Mudah bukan? Apakah pekerjaan Anda sama seperti jawaban di atas? Apabila ya, bagus! Berarti Anda benar. Apabila pekerjaan Anda belum benar, segera koreksi dan samakanlah dengan jawaban di atas. Jika mengalami kesulitan diskusikan dengan teman-teman atau tanyakan langsung kepada guru bina pada saat tatap muka. Selanjutnya bagi Anda yang menjawab benar, kerjakanlah soal-soal uji kompetensi 3. Jujurlah Anda dalam mengerjakan soal-soal uji kompetensi 3. untuk mengukur tingkat penguasaan Anda terhadap materi kegiatan 3 kerjakan sosol-soal uji kompetensi 3 berikut.

Nah, selamat mengerjakan!

Uji kompetensi 3
Kerjakan soal-soal di bawah ini dengan singkat, jelas, dan benar!

1. Diketahui fungsi kuadrat f ditentukan dengan rumus f(x) = x^2+bx dalam daerah asal $D = \{x / -7 \le x \le 1, x \in R\}$
   a). Salin dan lengkapilah daftar ini untuk fungsi f tersebut.

x	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1
y	…	…	…	…	…	…	…	…	….

   b). Dengan menggunakan daftar yang Anda peroleh pada soal a), gambarkan sketsa grafik fungsi f

   c). Berdasarkan grafik yang Anda peroleh pada soal b), tentuka:
   (i). daerah hasil fungsi f.
   (ii). pembuat nol fungsi f.
   (iii). Persamaan sumbu simetri grafik fungsi f.
   (iv). Titik balik grafik fungsi f.
   (v). nilai minimum fungsi f.

2. Diketahui fungsi kuadrat f ditentukan dengan rumus f(x) = -x^2+ 6x -8.
   a). Tentukan titik potong grafik dengan sumbu x dan sumbu y.
   b). Tentukan koordinat titik balik dan persamaan sumbu simetri.
   c). Berdasarkan jawaban pada soal (i) dan (ii), gambarkan sketsa grafik fungsi kuadrat tersebut.

3. Selidiki apakah fungsi kuadrat dengan persamaan f(x) = 2x^2-2x +1 termasuk definit positif atau definit negatif atau tidak kedua-duanya!

4. Tentukan kedudukan grafik fungsi kuadrat f(x) = x^2-14x+49 terhadap sumbu x, tanpa harus menggambar sketsa grafiknya terlebih dulu!

Sudah selesaiakah Anda mengerjakan soal-soal di atas? Tidak sulit bukan? Untuk mengetahui hasil pekerjaan Anda, cocokkanlah jawaban Anda dengan uji kompetensi 3 yang tersedia di bagian akhir modul ini. Kemudian hitunglah skor Anda dengan menggunakan aturan sebagai berikut:

Untuk: nomor 1 a) jawaban benar skor = 1
b) jawaban benar skor = 2
c) jawaban benar skor = 5
nomor2 a) jawaban benar skor = 2
b) jawaban benar skor = 2
c) jawaban benar skor = 2

nomor 3 jawaban benar skor = 3
nomor 4 jawaban benar skor = 3

Apabila semua jawaban benar, maka skor total = 1+2+5+2+2+2+3+3= 20. selanjutnya untuk menghitung skor akhir yang Anda peroleh, gunakan rumus yang terdapat pada halaman pendahuluan modul ini.

Jika Anda memperoleh skor 65%, berarti Anda telah berhasil menguasai materi dalam kegiatan 3. Selanjutnya Anda dapat mengikuti uji kompetensi akhir modul. Tetapi, bagi Anda yang memperoleh skor <65%, Anda harus mempelajari kembali materi pada kegiatan 3 sampai benar-benar paham. Jika mengalami kesulitan diskusikan dengan teman-teman atau tanyakan langsung kepada guru bina pada saat tatap muka. Jangan lupa, persiapkan diri Anda sebaik mungkin dalam menghadapi uji kompetensi akhir modul.

PENUTUP

Anda telah mempelajari materi modul ini dengan baik. Semoga Anda dalam keadaan sehat wal afiat, sehingga dapat mengikuti uji kompetensi akhir modul ini dengan hasil yang memuaskan.

Dari uraian materi modul ini rangkumannya dapat Anda pelajari kembali untuk membantu Anda dalam mengerjakan atau menjawab soal-soal uji kompetensi akhir modul.

1. Rangkuman

Kegiatan 1

1. Akar-akar persamaan kuadrat $ax^2+bx + c =$ dapat ditentukan dengan cara pemfaktoran dan menggunakan rumus kuadrat atau rumus abc.
   Rumus kuadrat atau rumus abc yaitu:

2. Nilai diskriminan $D= b^2-4ac$ dari persamaan kuadrat $ax^2+bx = c = 0$ sangat menentukan jenis akar-akar persamaan kuadrat tersebut.

   - Jika D>0, maka persamaan kuadrat mempunyai dua akar real yang berlainan.
     a. Jika D berbentuk kuadrat sempurna maka kedua akarnya rasional.
     b. Jika D tidak berbentuk kuadrat sempurna maka kedua akarnya irasional.
   - Jika D= 0, maka persamaan kuadrat mempunyai dua akar yang sama (kembar), real dan rasional.
   - Jika D<0, maka persamaan kuadrat tidak mempunyai akar real atau kedua akarnya tidak real/khayal (imajiner).

Kegiatan 2

1. Jika x_1 dan x_2 adalah akar-akar persamaan kuadrat $ax^2+bx +c = 0$ (a) maka jumlah dan hasil kali akar-akar persamaan kuadrat dapat ditentukan dengan rumus:

$$\boxed{x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \text{ dan } x_1.x_2 = \frac{c}{a}}$$

2. Jika x_1 dan x_2 adalah akar-akar persamaan kuadrat, maka persamaan kuadrat itu dapat ditentukan dengan cara sebagai berikut:
   a. Menggunaka faktor, rumusnya adalah:

   $$\boxed{(x-x_1)\ (x-x_2) = 0}$$

   b. Menggunakan rumus jumlah dan hasil kali akar-akar adalah:

   $$\boxed{x^2-(x_1+x_2)x + x_1x_2 = 0}$$

Kegiatan 3

1. a. Langkah-langkah menggambar sketsa grafik fungsi kuadrat yang sederhana
   yaitu:

   Langkah 1:
   Tentukan beberapa anggota fungsi f, yaitu koordinat titik-titik yang terletak pada grafik fungsi f. Titik-titik ini dapat kita tentukan dengan memilih beberapa nilai x bilangan bulat yang terletak dalam daerah asalnya kemudian kita hitung nilai fungsi f. Titik-titik pada fungsi f itu biasanya akan lebih mudah jika kita sajikan dengan menggunakan tabel atau daftar.

   Langkah 2:
   Gambarkan koordinat titik-titik yang telah kita peroleh pada Langkah 1 pada sebuah bidang cartecius.

   Langkah 3.
   Hubungkan titik-titik yang telah digambarkan pada bidang Cartecius pada Langkah 2 dengan menggunakan kurva mulus.

   b. Langkah-langkah menggambar sketsa grafik fungsi kuadrat secara umum yaitu dengan menentukan terlebih dulu:
   (i). titik potong grafik dengan sumbu x dan sumbu y.
   (ii).titik balik atau titik puncak parabola.
   (iii).persamaan sumbu simetri.

2. Bentuk $ax^2+bx+c >0$ untuk setiap x disebut definit positif. Syarat definit positif adalah $a>0$ dan $D<0$. Sedangkan bentuk $ax^2+bx+c<0$ untuk setiap x disebut definit negatif. Syarat definit negatif adalah $a<0$ dan $D<0$.

3. Keterkaitan antara persamaan kuadrat dan fungsi kuadrat adalah sebagai berikut:
   1). Apabila nilai $a>0$ dan $d<0$ maka persamaan kuadrat $ax^2+bx+c = 0$ tidak mempunyai akar-akar real, sehingga grafik fungsi kuadrat $y= f(x) = ax^2+bx+c$ terbuka ke atas (mempunyai titik balik minimum) dan tidak memotong maupun menyinggung sumbu x.

2). Apabila nilai $a>0$ dan $D= 0$ maka persamaan kuadrat $ax^2+bx+c = 0$ mempunyai akar-akar real dan sama (kembar), sehingga grafik fungsi kuadrat $y= f(x) = ax^2+bx+c$ terbuka ke atas (mempunyai titik balik minimum) dan menyinggung sumbu x.

3). Apabila nilai $a>0$ dan $D>0$ maka persamaan kuadrat $ax^2+bx+c = 0$ mempunyai akar-akar real dan berlainan, sehingga grafik fungsi kuadrat $y = f(x) = ax^2+bx+c$ terbuka ke atas (mempunyai titik balik minimum) dan memotong sumbu x di dua titik yang berlainan.

4). Apabila nilai $a<0$ dan $D<0$ maka persamaan kuadrat $ax^2+bx+c = 0$ tidak mempunyai akar-akar real, sehingga grafik fungsi kuadrat $y= f(x) = ax^2+bx+c$ terbuka ke bawah (mempunyai titik balik maksimum) dan tidak memotong maupun menyinggung sumbu x.

5). Apabila nilai $a<0$ dan $D= 0$ maka persamaan kuadrat $ax^2+bx +c = 0$ mempunyai akar-akar real dan sama (kembar), sehingga grafik fungsi kuadrat $y = f(x) = ax^2+bx+c$ terbuka ke bawah (mempunyai titik balik maksimum) dan menyinggung sumbu x.

6). Apabila nilai $a<0$ dan $D>0$ maka persamaan kuadrat $ax^2+bx+c = 0$ mempunyai akar-akar real dan berlainan, sehingga grafik fungsi kuadrat $y= f(x) = ax^2+bx+x$ terbuka ke bawah (mempunyai titik balik maksimum) dan memotong sumbu x di dua titik yang berlainan.

KUNCI TUGAS UJI KOMPETENSI

Tugas Uji Kompetensi 1

1. a.
$$\begin{aligned}
x^2+10x+16 &= 0\\
x^2+8x+2x+16 &= 0\\
x(x+8)+2(x+8) &= 0\\
(x+8)(x+2) &= 0\\
x+8 = 0 \text{ atau } x+2 &= 0\\
x = 0-8 \text{ atau } x &= 0-2\\
x_1 = -8 \text{ atau } x &= -2.
\end{aligned}$$
Jadi akar-akar persamaan kuadrat $x^2+10x+16 = 0$ adalah -8 atau -2. atau Hp = {-8, -2}.

   b.
$$\begin{aligned}
2x^2-5x-3 &= 0\\
2x^2+x+(-6x)-3 &= 0\\
2x^2+x-6x-3 &= 0\\
x(2x+1)-3(2x+1) &= 0\\
(2x+1)(x-3) &= 0\\
2x+1 = 0 \text{ atau } x-3 &= 0\\
2x = 0-1 \text{ atau } x &= 0+3\\
2x = -1 \text{ atau } x &= 3
\end{aligned}$$
$$x = -\frac{1}{2}$$
Jadi akar-akar persamaan kuadrat $2x^2-5x-3 = 0$ adalah -atau 3. atau Hp = $\left\{-\frac{1}{2}, 3\right\}$

2. a. $x^2-4x+1 = 0$, berarti a=1, b= -4, dan c= 1.

$$\begin{aligned}
x_{1.2} &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}\\
&= \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2-4(1)(1)}}{2.(1)}\\
&= \frac{4 \pm \sqrt{16-4}}{2}\\
&= \frac{4 \pm \sqrt{12}}{2}\\
&= \frac{2(2 \pm \sqrt{3}}{2}\\
&= 2 \pm \sqrt{3}
\end{aligned}$$
$$x_1 = 2+\sqrt{3} \quad \text{atau} \quad x_2 = 2-\sqrt{3}$$

Jadi akar-akar persamaan kuadrat x^2-4x+1 = 0 adalah $x_1 = 2 + \sqrt{3}$ atau $x_2 = 2 - \sqrt{3}$ Hp $\{2 + \sqrt{3}, 2 - \sqrt{3}\}$

b. $3x^2+6x+1 = 0$, berarti a= 3, b= 6, dan c = 1.

$$
\begin{aligned}
x_{1.2} &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\
&= \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4(3)(1)}}{2.(3)} \\
&= \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 24}}{6} \\
&= \frac{-6 \pm \sqrt{24}}{6} \quad (\text{catatan}: \sqrt{24} = \sqrt{4}.\sqrt{6} = 2\sqrt{6} \\
&= \frac{-6 \pm 2\sqrt{6}}{6} \\
&= \frac{2(-3) \pm \sqrt{6}}{6} \\
&= \frac{-3 \pm \sqrt{6}}{3}
\end{aligned}
$$

$$x_1 = \frac{-3 + \sqrt{6}}{3} \quad \text{atau} \quad x_2 = \frac{-3 - \sqrt{6}}{3}$$

jadi akar-akar persamaan kuadrat $3x^2+6x+1 = 0$ adalah $x_1 = \frac{-3 + \sqrt{6}}{3}$ atau

$x_2 = \frac{-3 - \sqrt{6}}{3}$ atau HP = $\left\{\frac{-3 + \sqrt{6}}{3}, \frac{-3 - \sqrt{6}}{3}\right\}$

c. $x^2-x+3 = 0$, berarti a= 1, b= -1, dan c = 3.
Maka:

$$
\begin{aligned}
x_{1.2} &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\
&= \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(1)(3)}}{2.(1)}
\end{aligned}
$$

$$= \frac{1 \pm \sqrt{1-12}}{2}$$

$$= \frac{1 \pm \sqrt{-11}}{2}$$

$$= \frac{1 \pm \sqrt{1-11}}{2}$$

Karena $\sqrt{-11}$ adalah khayal (imajiner), berarti akar-akar persamaan kuadrat $x^2-x+3 = 0$ adalah khayal (imajiner). Atau persamaan kuadrat $x^2-x + 3 = 0$ dikatakan tidak mempunyai penyelesaian.

3. a. $x^2 + 8x – 1 = 0$, berarti a=1, b= 8, dan c= -1.
   Nilai diskriminannya adalah $D = b^2-4ac$
   $= (8)^2-4(1)(-1)$
   $= 64 + 4$
   $= 68.$
   Karena D= 68>0 dan D= 68 tidak berbentuk kuadrat sempurna maka persamaan kuadrat $x^2+8x – 1= 0$ mempunyai dua akar yang berlainan dan irasional.

   b. $x^2-12x+36 = 0$, berarti a = 1, b = -12, dan c = 36.
   Nilai diskriminannya adalah $D = b^2-4ac$
   $= (-12)^2 - 4(1)(36)$
   $= 144 – 144$
   $= 0$
   Karena D= 0, maka persamaan kuadrat $x^2-12x +36 = 0$ mempunyai dua akar yang sama (kembar), real dan rasional.

   c. $3x^2+x=2= 0$, berarti a = 3, b = 1, dan c = 2.
   Nilai diskriminannya adalah $D = b^2-4ac$
   $= (1)^2 - 4(3)(2)$
   $= 1-24$
   $= -23$
   Karena D = -23<0 maka persamaan kuadrat $3x^2 +x+2= 0$ tidak mempunyai akar real atau kedua akarnya tidak real/khayal (imajiner).

4. Persamaan kuadrat $x^2+px+9 = 0$, berarti a=1, b= p, dan c=9.
   Nilai diskriminannya: $D = b^2-4ac$
   $= p^2-4(1)(9)$
   $= p^2-36.$
   Agar persamaan kuadrat $x^2+px + 9 = 0$ mempunyai dua akar yang sama (kembar), maka $D = 0$
   $P^2-36 = 0$
   $P^2 = 0+ 36$

$P^2 = 36$

$P = \pm\sqrt{36}$

$P = \pm 6$

Jadi persamaan kuadrat $x^2+px+9 = 0$ mempunyai dua akar yang sama (kembar), jika nilai p = 6 atau p = -6.

5. Persaman kuadrat $-x^2+(p-2)x-p=0$ berarti a=-1, b= p-2, dan c = p.
   Nilai diskriminannya adalah:
   $D = b^2-4ac$
   $= (p-2)^2-4(-1)(p)$
   $= p^2-4p+4+4p$
   $= p^2+4$
   Untuk setiap p R maka p^2 selalu positif atau $p^2>0$, sehingga nilai $D = p^2+4$ juga selalu positif atau $D = p^2+4 > 0$. Oleh karena D>0 untuk setiap p R maka persamaan kuadrat $-x^2+(p-2)x + p = 0$ selau mempunyai dua akar real yang berlainan.

Tugas Uji Kompetensi 2

1. $x^2+4x + 3 = 0$, berarti a=1, b= 4, dan c = 3.

   a. x_1+x_3

   b. $x_1.x_2 = \frac{c}{a} = \frac{3}{1} = 3$

   c. $x_1{}^2+x_2{}^2 = (x_1+x_2)^2-2x_1x_2$

   d. $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_2 + x_1}{x_1.x_2}$

   $= \frac{x_1 + x_2}{x_1.x_2}$

$$= \frac{-\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}}$$

$$= \frac{-\frac{4}{1}}{\frac{3}{1}}$$

$$= \frac{-4}{3}$$

2. $2x^2$-3x+1 = 0, berarti a= 2, b = -3, dan c= 1.

   a. $\alpha + \beta = -\frac{b}{a} = -\frac{(-3)}{2} = \frac{3}{2}$

   b. $\alpha.\beta = \frac{c}{a} = \frac{1}{2}$

   c. $\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta$

$$= \left(-\frac{b}{a}\right)^2 - 2\left(\frac{c}{a}\right)$$

$$= \left(-\frac{(-3)}{2}\right)^2 - 2\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$= \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 1$$

$$= \frac{9}{4} - 1$$

$$= \frac{9}{4} - \frac{4}{4}$$

$$= \frac{5}{4}$$

$$= 1\frac{1}{4}$$

   d $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{\beta + \alpha}{\alpha.\beta}$

$$= \frac{\alpha + \beta}{\alpha . \beta}$$

$$= \frac{-\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}}$$

$$= \frac{-\left(-\frac{3}{2}\right)}{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{\frac{3}{2}}{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{3}{2} x \frac{2}{1}$$

$$= 3$$

(F) e. $(\alpha - \beta)^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha$

$$= \left(-\frac{b}{a}\right)^2 - 4\left(\frac{c}{a}\right)$$

$$= \left(-\frac{(-3)}{2}\right)^2 - 4\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$= \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 2$$

$$= \frac{9}{4} - 2$$

$$= \frac{9}{4} - \frac{8}{4} \quad \Rightarrow = \frac{1}{4}$$

3. Akar-akarnya x_1= 2 dan x_2= 7, dengan menggunakan faktor maka persamaan kuadratnya adalah: $(x-x_1)(x-x_2) = 0$

$$(x-2)(x-7) = 0$$

$$x^2-7x-2x+14 = 0$$

$$x^2-9x+14 = 0$$

4. Akar-akar x_1= dan x_2= -3, dengan menggunakan rumus jumlah dan hasil kali akar-akar maka persamaan kuadratnya adalah:

$$x^2 - (x_1.x_2)x + x_1.x_2 = 0$$

$$x^2 - \left(\frac{1}{2} + (-3)\right)x + \frac{1}{2}(-3) = 0$$

$$x^2 - \left(\frac{1}{2} - 3\right)x + \frac{3}{2} = 0$$

$$x^2 - \left(\frac{1}{2} - \frac{6}{2}\right)x + \frac{3}{2} = 0$$

$$x^2 - \left(-\frac{5}{2}\right)x + \frac{3}{2} = 0$$

$$x^2 - \frac{5}{2}x + \frac{3}{2} = 0 \text{ (kedua ruas dikalikan 2)}$$

$$2x^2 - 5x + 3 = 0$$

5. Persamaan kuadrat x^2-x-12 = 0, berarti a=1, b= -1, dan c = -12.

maka: $\alpha + \beta = -\frac{b}{a} = -\frac{(-1)}{1} = \frac{1}{1} = 1$

dan $\alpha.\beta = \frac{c}{a} = \frac{-12}{1} = -12$

Misalkan persamaan kuadrat yang diminta mempunyai akar-akar x_1 dan x_2, maka:

x_1=.$\frac{1}{\alpha}$ dan $x_2 = \frac{1}{\beta}$

ini berarti : $x_1 + x_2 = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}$

$$= \frac{\beta + \alpha}{\alpha.\beta}$$

$$= \frac{\alpha + \beta}{\alpha.\beta}$$

$$= \frac{1}{-12}$$

$$= -\frac{1}{12}$$

$$x_1.x_2 = \frac{1}{\alpha}.\frac{1}{\beta}$$

$$= \frac{1}{\alpha\beta}$$

$$= \frac{1}{-12}$$

$$= -\frac{1}{12}$$

Subtitusikan $(x_1+x_2) = -\frac{1}{12}$ dan $x_1.x_2 = -\frac{1}{12}$ kepersamaan:

$$x^2-(x_1+x_2)x+x_1.x_2 = 0$$

$$x^2-(-\frac{1}{12})x + (-\frac{1}{12}) = 0$$

$$x^2 + \frac{1}{12}x - \frac{1}{12} = 0 \text{ (kedua ruas dikalikan 12)}$$

$$12x^2+x-1 = 0$$

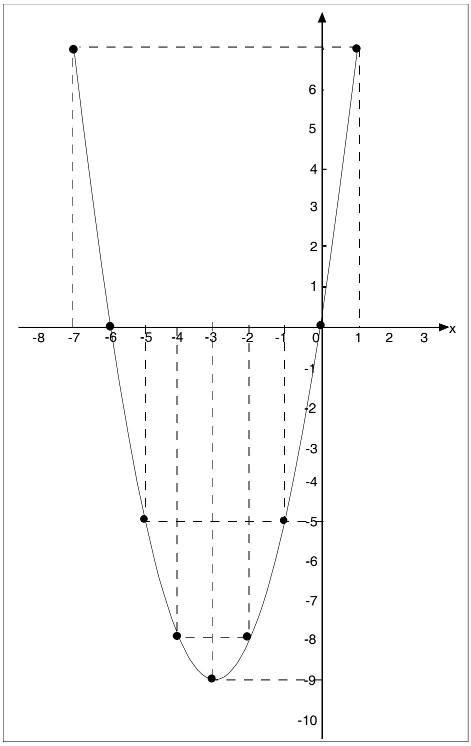
Jadi persamaan kuadrat yang diminta adalah $12x^2+x-1 = 0$.

Latihan Tugas uji Kompetensi 3

1. Fungsi kuadrat $f(x) = x^2+6$ dalam daerah asal
   a. Persamaan grafik fungsi kuadrat: $y= x^2+6x$

x	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1
y	7	0	-5	-8	-9	-8	-5	0	7

   b.



$D = \{y / -9 \le y \le 7, x \in R\}$

   c. (i). Daerah hasil fungsi f adalah
      (ii) Pembuat nol fungsi adalah x = -6 dan x = 0.
      (iii) Persamaan sumbu simetri grafik fungsi f adalah x = -3.
      (iv). Titik balik minimum grafik fungsi f adalah p(-3, -9).
      (v). Nilai minimum fungsi f adalah -9.

2. Fungsi kuadrat $f(x) = -x^2+6x - 8$, berarti a= -1, b = 6, dan c = -8.
   a). Titik potong grafik dengan sumbu x diperoleh jika y = 0,
   maka $-x^2+6x - 8 = 0$ (kedua ruas dikalikan -1)
   $x^2+6x +8 = 0$
   $(x-2)(x-4) = 0$
   $x - 2 = 0$ atau $x-4 = 0$
   $x = 0+2$ atau $x = 0+4$
   $x = 2$ atau $x = 4$

Jadi titik potong grafik dengan sumbu x adalah (2,0) dan (4,0).

- Titik potong grafik dengan sumbu y diperoleh jika x = 0,

  maka: $y = -(0)^2+6(0) - 8$

  $y = 0+0-8$

  $y = -8$

  Jadi titik potong grafik dengan sumbu y adalah (0,-8).

b). Koordinat titik balik:

$$p\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2-4ac}{4a}\right)$$

$$p\left(-\frac{6}{2(-1)}, -\frac{6^2-4(-1)(-8)}{4(-1)}\right)$$

$$p\left(-\frac{6}{(-2)}, -\frac{36-32}{(-4)}\right)$$

$$p\left(3, -\frac{4}{(-4)}\right)$$

$$p(3,1)$$

Karena a = -1<0 maka titik baliknya adalah titik balik maksimum.

- Persamaan sumbu simetri adalah $x = -\frac{b}{2a}$

$$= -\frac{6}{2(-1)}$$

$$= -\frac{6}{-2}$$

$$= 3$$

c). Sketsa grafik fungsi kuadrat adalah sebagai berikut.

3. Fungsi kuadrat $f(x) = 2x^2-2x+1$, berarti $a = 2$, $b= -2$, dan $c= 1$.
   Nilai diskriminan $D = b^2-4ac = (-2)^2-4(2)(1) = 4-8 = -4$.

   $\left.\begin{aligned}\text{karena}: a &= 2\\ D &= -4\end{aligned}\right\}$ ini berarti $a>0$ dan $D<0$, sehingga fungsi kuadrat

   $f(x) = 2x^2-2x+1$ adalah definit positif.

4. Fungsi kuadrat $f(x) = x^2 - 14x + 49$, berarti $a=1$, $b= -14$, dan $c = 49$.
   Nilai diskriminan $D = b^2-4ac = (-14)^2-4(1)(49) = 196-196 = 0$.

   $\left.\begin{aligned}\text{karena}: a &= 1\\ D &= 0\end{aligned}\right\}$ ini berarti $a>0$ dan $D= 0$, sehingga grafik fungsi kuadrat

   $f(x) = x^2-14x+49$ terbuka ke atas (mempunyai titik balik minimum) dan menyinggung sumbu x.

DAFTAR PUSTAKA

B.K.Noormandiri, Endar Sucipto, **Buku Pelajaran MATEMATIKA untuk SMU Jilid 1 Kelas 1**, Kurikulum 1994, Penerbit Erlangga, 1995.

M.Oetjoep Ilham, H.Gunawan, Tosin, Zaenuddin, **ALDJABAR & ILMU UKUR ANALITIKA IV**, Penerbit Widjaya Djakarta, 1968.

Sartono Wirodikromo, **MATEMATIKA untuk SMA Kelas X semester 1, Kurikulum 2004 Berbasis Kompetensi**, Penerbit Erlangga, 2004.

Pelatihan Guru Adaftif SMK Matematika, **Persiapan Materi Ebtanas Matematika (1)**, Depdikbud, Dirjen dikdasmen, Pusat Pengembangan Penataan Guru Teknologi Bandung.