

Pile di sabbia, dune, valanghe: modelli matematici per la materia granulare

Stefano Finzi Vita

Dipartimento di Matematica

Università di Roma La Sapienza

www.mat.uniroma1.it/people/finzi

Progetto Lauree Scientifiche

Perugia, 27 Agosto 2007

Modelli matematici per la materia granulare (**sabbia**)

- Studio di modelli differenziali per la simulazione del comportamento dei materiali granulari
- Analisi di proprietà qualitative delle soluzioni (ad es. caratterizzazione degli stati di equilibrio)
- Derivazione e implementazione di schemi numerici di approssimazione

Partecipanti alle ricerche:

G. Crasta, M. Falcone, S. Finzi Vita, A. Malusa (Univ. Roma La Sapienza)
P. Cannarsa, C. Sinestrari (Univ. Roma Tor Vergata)
E. Giorgieri (INDAM)

Outline

- 1 La materia granulare (caratteristiche, interesse e applicazioni)
 - Caratteristiche
 - La sabbia

Outline

- 1 La materia granulare (caratteristiche, interesse e applicazioni)
 - Caratteristiche
 - La sabbia
- 2 Pile di sabbia su di una tavola aperta
 - Descrizione del problema (configurazioni d'equilibrio e crinali)
 - Modelli differenziali, comportamento asintotico, simulazioni

Outline

- 1 La materia granulare (caratteristiche, interesse e applicazioni)
 - Caratteristiche
 - La sabbia
- 2 Pile di sabbia su di una tavola aperta
 - Descrizione del problema (configurazioni d'equilibrio e crinali)
 - Modelli differenziali, comportamento asintotico, simulazioni
- 3 La tavola con pareti (effetti delle pareti al bordo, difficoltà teoriche e numeriche)

Outline

- 1 La materia granulare (caratteristiche, interesse e applicazioni)
 - Caratteristiche
 - La sabbia
- 2 Pile di sabbia su di una tavola aperta
 - Descrizione del problema (configurazioni d'equilibrio e crinali)
 - Modelli differenziali, comportamento asintotico, simulazioni
- 3 La tavola con pareti (effetti delle pareti al bordo, difficoltà teoriche e numeriche)
- 4 Le dune (formazione ed evoluzione)
 - Caratteristiche
 - Un modello 1D per il moto di una duna

Outline

- 1 La materia granulare (caratteristiche, interesse e applicazioni)
 - Caratteristiche
 - La sabbia
- 2 Pile di sabbia su di una tavola aperta
 - Descrizione del problema (configurazioni d'equilibrio e crinali)
 - Modelli differenziali, comportamento asintotico, simulazioni
- 3 La tavola con pareti (effetti delle pareti al bordo, difficoltà teoriche e numeriche)
- 4 Le dune (formazione ed evoluzione)
 - Caratteristiche
 - Un modello 1D per il moto di una duna
- 5 Conclusioni

La materia granulare e i suoi fenomeni

Definizione (da Wikipedia)

La **materia granulare** (m.g.) è un insieme di particelle solide, di discrete dimensioni sufficienti a non renderle soggette a fluttuazioni o moti termici. Il limite inferiore di dimensioni è di circa $1 \mu\text{m}$, al di sotto del quale le particelle avrebbero caratteristiche colloidali. Il limite superiore non è ben definito (anche i blocchi di ghiaccio degli iceberg possono considerarsi m.g., dato che le leggi che ne governano il moto sono simili).

ESEMPI:

sabbia, polvere, zucchero, ghiaia, carbone, riso, caffè, fertilizzanti, cuscinetti a sfera, neve fresca.

Interesse e applicazioni

Le ricerche nel campo risalgono a Charles-Augustin de Coulomb, che formulò nel 1779 la sua legge sull'attrito sulla base di studi su particelle solide granulari.

- Conoscere a fondo le proprietà fondamentali dei materiali granulari può dare sviluppo a molte ricerche di frontiera della fisica moderna, e ha un notevole interesse per diverse applicazioni (nell'industria chimica, farmaceutica, alimentare, metallurgica, nell'agricoltura, nell'edilizia, nella produzione di energia)

Interesse e applicazioni

Le ricerche nel campo risalgono a Charles-Augustin de Coulomb, che formulò nel 1779 la sua legge sull'attrito sulla base di studi su particelle solide granulari.

- Conoscere a fondo le proprietà fondamentali dei materiali granulari può dare sviluppo a molte ricerche di frontiera della fisica moderna, e ha un notevole interesse per diverse applicazioni ([nell'industria chimica](#), [farmaceutica](#), [alimentare](#), [metallurgica](#), [nell'agricoltura](#), [nell'edilizia](#), [nella produzione di energia](#))
- Questi materiali sono molto diffusi in natura: la migliore comprensione di fenomeni naturali come [la migrazione delle dune](#), [i processi di erosione o deposizione](#), [le frane e le valanghe](#), può essere anche di grande utilità per programmi di salvaguardia ambientale

Comportamento (1)

- Il comportamento che un materiale ha quando è suddiviso in granelli più o meno fini è assai diverso da quello di un solido, un liquido o un gas.
- I m.g. mostrano cioè caratteristiche simili ai fluidi newtoniani ma dissipano la loro energia molto rapidamente, e mostrano, a seconda della loro energia, caratteristiche di solidi, liquidi o gas.
- Ad esempio quando l'energia di un insieme di granuli è bassa questi sono immobili e il loro insieme si comporta come un solido. Acquisendo energia (ad esempio agitando il contenitore) i granuli cominceranno a scorrere fra di loro come un liquido; ma questo moto cesserà immediatamente se si cessa di fornire energia.

Comportamento (2)

- Un liquido tende a non avere una forma propria, ma acquisisce la forma del contenitore in cui si trova e tenderà ad assumere una conformazione superficiale uniforme e orizzontale.
- Se un recipiente viene invece riempito con un m.g., inclinato di un certo angolo e riportato alla posizione di equilibrio, questo potrà assumere alla superficie una forma che dipenderà strettamente dall'angolo di inclinazione e dalla velocità con cui il recipiente viene riportato allo stato iniziale.
- Inoltre, contrariamente a un liquido, in un contenitore la pressione esercitata a varie profondità da un m.g. non segue un andamento lineare, perché parte della spinta si scarica sulle pareti stesse del contenitore. Ignorare questo fenomeno può per esempio determinare cedimenti strutturali nei silos.

Comportamento (3)

Diverso è anche il comportamento di un m.g. ad una azione di miscelamento.

- Una polvere può demiscelarsi col procedere dell'agitazione (**segregazione**), processo assai temuto in campo alimentare, farmaceutico, chimico.
- Particolare è l'effetto noto come **Brazil Nut Effect**: particelle in un contenitore posto in agitazione segregano in modo che le particelle più grandi si concentrano verso l'alto quando il contenitore è di forma cilindrica, verso il basso quando la forma è conica.

Diverse scale

- A livello **microscopico** (interazioni tra i singoli granelli) la meccanica classica basta a descriverne il comportamento

Diverse scale

- A livello **microscopico** (interazioni tra i singoli granelli) la meccanica classica basta a descriverne il comportamento
- A livello **mesoscopico e macroscopico** compaiono nuovi e interessanti fenomeni (*metastabilità, valanghe, segregazione, formazione di patterns*) difficili da descrivere e comprendere pienamente

Diverse scale

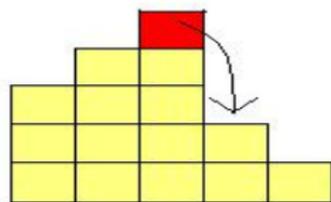
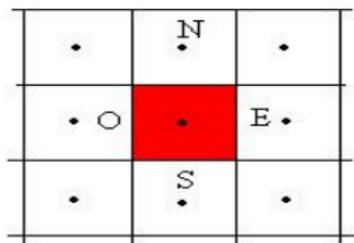
- A livello **microscopico** (interazioni tra i singoli granelli) la meccanica classica basta a descriverne il comportamento
- A livello **mesoscopico e macroscopico** compaiono nuovi e interessanti fenomeni (*metastabilità, valanghe, segregazione, formazione di patterns*) difficili da descrivere e comprendere pienamente
- La materia granulare è un esempio dei cosiddetti **Sistemi Critici Auto-Organizzati**, definiti come
Grandi sistemi dinamici interattivi che evolvono naturalmente verso uno stato critico in cui un piccolo evento può condurre a una catastrofe ([Bak-Tang-Wiesenfeld '88](#))

Self Organized Criticality

- Aiuta a spiegare la dinamica di *terremoti*, *mercati economici*, *ecosistemi*, *fenomeni di traffico*.
- Il comportamento del sistema dipende dalla totalità organizzata dei suoi componenti piuttosto che dalla somma dei comportamenti di ciascuno di essi (*teoria olistica*).
- In genere il sistema evolve naturalmente verso uno stato critico che è un attrattore della dinamica (e quindi la configurazione iniziale non è essenziale), ma che risulta *metastabile*.

Self Organized Criticality

- Aiuta a spiegare la dinamica di *terremoti*, *mercati economici*, *ecosistemi*, *fenomeni di traffico*.
- Il comportamento del sistema dipende dalla totalità organizzata dei suoi componenti piuttosto che dalla somma dei comportamenti di ciascuno di essi (*teoria olistica*).
- In genere il sistema evolve naturalmente verso uno stato critico che è un attrattore della dinamica (e quindi la configurazione iniziale non è essenziale), ma che risulta *metastabile*.
- **Pile di sabbia**: è possibile derivare un modello di **automa cellulare** giocattolo per simularne la dinamica [v. Puhl, '92]



La sabbia

- La sabbia è il classico esempio di materiale granulare. In geologia il termine indica una precisa classe granulometrica: è sabbia quella formata da granuli di dimensioni comprese tra **0,06 mm** e **2 mm**. Particelle più piccole rientrano nella categoria della polvere, particelle più grandi sono definite ciottoli o blocchi.

La sabbia

- La sabbia è il classico esempio di materiale granulare. In geologia il termine indica una precisa classe granulometrica: è sabbia quella formata da granuli di dimensioni comprese tra **0,06 mm** e **2 mm**. Particelle più piccole rientrano nella categoria della polvere, particelle più grandi sono definite ciottoli o blocchi.
- Nel trasporto i granelli sono soggetti ad abrasione nell'impatto tra loro e tendono ad arrotondare gli spigoli del loro bordo. Quindi un granello ben arrotondato ha probabilmente viaggiato molto, mentre un granello angoloso si è mosso solo localmente.

La sabbia

- La sabbia è il classico esempio di materiale granulare. In geologia il termine indica una precisa classe granulometrica: è sabbia quella formata da granuli di dimensioni comprese tra **0,06 mm** e **2 mm**. Particelle più piccole rientrano nella categoria della polvere, particelle più grandi sono definite ciottoli o blocchi.
- Nel trasporto i granelli sono soggetti ad abrasione nell'impatto tra loro e tendono ad arrotondare gli spigoli del loro bordo. Quindi un granello ben arrotondato ha probabilmente viaggiato molto, mentre un granello angoloso si è mosso solo localmente.
- I granelli di un campione possono avere tutti circa la stessa dimensione, oppure avere taglie anche molto diverse tra loro. Questa composizione spesso dipende dal fluido da cui sono trasportati: vento, acqua o ghiaccio.

Composizione (ovvero: la sabbia non è tutta uguale ...)

La sabbia può formarsi attraverso tre principali meccanismi:

- 1 **Per erosione di rocce sedimentarie preesistenti**: la composizione dipende dalle rocce che l'hanno generata ed è quindi legata al bacino idrografico di provenienza. I minerali più comuni sono: **quarzo** e **feldspati** in sabbie chiare, **magnetite**, **ematite** e **granato** in sabbie scure.

Composizione (ovvero: la sabbia non è tutta uguale ...)

La sabbia può formarsi attraverso tre principali meccanismi:

- 1 **Per erosione di rocce sedimentarie preesistenti**: la composizione dipende dalle rocce che l'hanno generata ed è quindi legata al bacino idrografico di provenienza. I minerali più comuni sono: **quarzo** e **feldspati** in sabbie chiare, **magnetite**, **ematite** e **granato** in sabbie scure.
- 2 **Per precipitazione chimica da acque sovrassature in ioni**: in precise condizioni chimico-fisiche (forte evaporazione, scarsa circolazione, elevata quantità di ioni in soluzione), particolari grani possono precipitare direttamente dall'acqua.

Composizione (ovvero: la sabbia non è tutta uguale ...)

La sabbia può formarsi attraverso tre principali meccanismi:

- 1 **Per erosione di rocce sedimentarie preesistenti**: la composizione dipende dalle rocce che l'hanno generata ed è quindi legata al bacino idrografico di provenienza. I minerali più comuni sono: **quarzo** e **feldspati** in sabbie chiare, **magnetite**, **ematite** e **granato** in sabbie scure.
- 2 **Per precipitazione chimica da acque sovrassature in ioni**: in precise condizioni chimico-fisiche (forte evaporazione, scarsa circolazione, elevata quantità di ioni in soluzione), particolari grani possono precipitare direttamente dall'acqua.
- 3 **Per accumulo di scheletri e gusci di organismi**, come ad es. le conchiglie: molti organismi intrappolano il carbonato di calcio o la silice presenti in soluzione nell'acqua per sviluppare organi di sostegno e di protezione, specialmente gli invertebrati. Alla loro morte lo scheletro può conservarsi ed essere trasportato sulla spiaggia, spesso in accumuli di notevole importanza.





Un fenomeno apparentemente semplice:
la crescita di una pila di sabbia
su di una tavola

La crescita di una pila di sabbia su di una tavola

Ipotesi:

- sorgente verticale f di piccola intensità
(i granelli non formano crateri né rimbalzano)
- sabbia uniforme, assenza di vento
- supporto piano Ω (la tavola) limitato e inizialmente vuoto

Fenomeno:

i granelli si accumulano formando pile sostanzialmente coniche, la cui pendenza caratteristica a (tangente dell' **angolo di riposo** α) dipende dal materiale (sabbia più o meno asciutta, taglia media dei granelli, ecc.)

La tavola aperta: crescita della pila

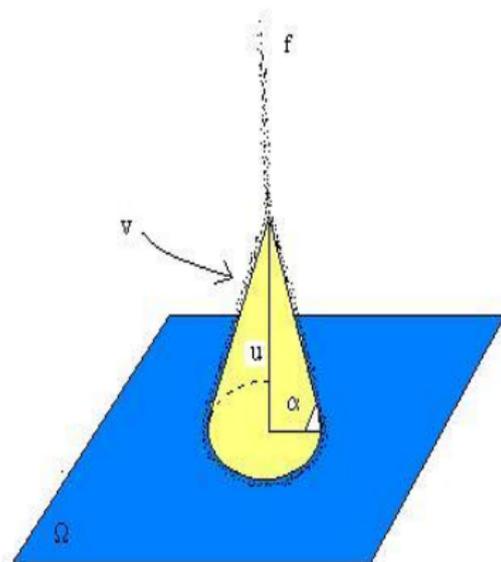
Si possono distinguere due strati:

- i granelli vengono incorporati nella pila dove cadono

(**strato a riposo** u)

se in quel punto la pendenza non ha raggiunto il valore critico a ,

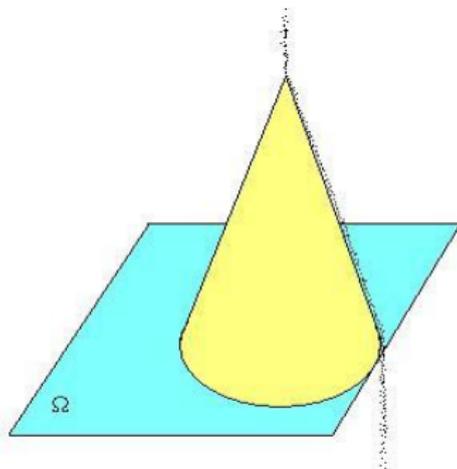
- altrimenti rotolano lungo il pendio (**strato rotolante** v)



La tavola aperta: l'effetto del bordo

La pila cresce e si allarga fino a raggiungere il bordo in qualche punto. La crescita allora sostanzialmente si ferma (**stato di equilibrio**): tutta la sabbia proveniente in seguito dalla sorgente rotola lungo il pendio nella direzione del punto di contatto e da lì cade dalla tavola.

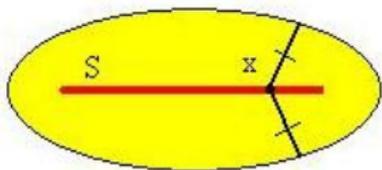
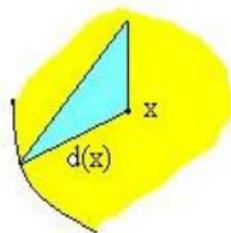
(Solo ad una scala temporale molto più lunga si può immaginare che la sabbia continui ad accumularsi anche nelle altre direzioni)



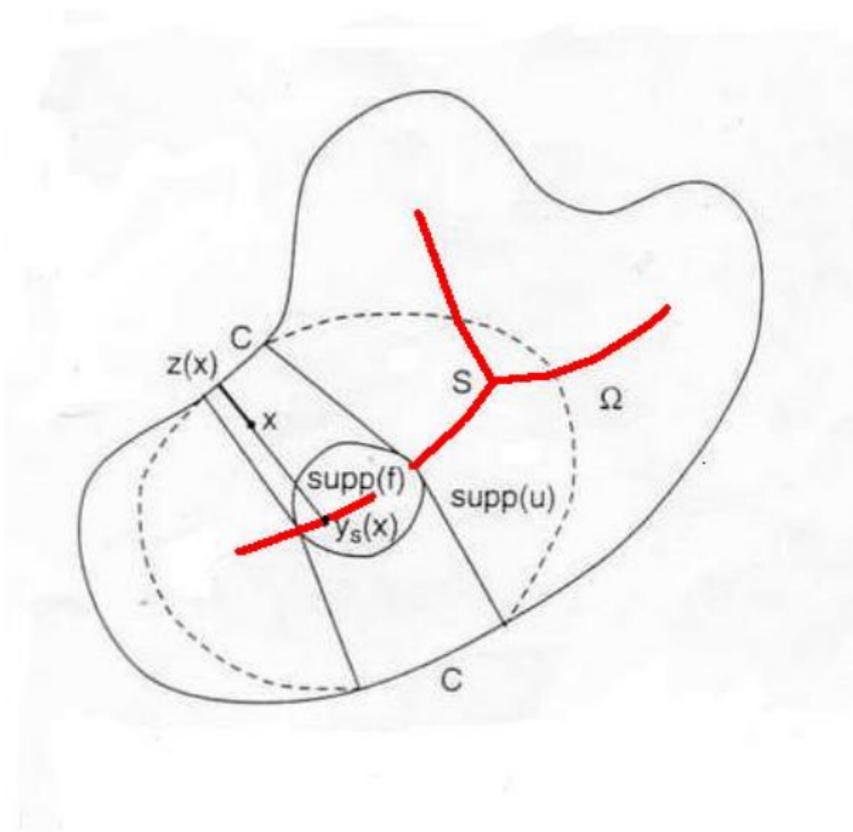
Equilibri massimali e crinali

Qual'è il profilo della più grande pila possibile su di una tavola assegnata ?
 E' la funzione $u^*(x) = a \cdot d(x)$,
 dove $d(x)$ indica la distanza del punto x
 dal bordo della tavola. E' chiaramente un
 equilibrio, quello massimale.

Tale funzione avrà un insieme singolare S
 formato dai punti dove si verifica un salto
 di pendenza, cioè l'insieme dei punti
 equidistanti da due o più punti del bordo.
 In genere indicato come *ridge*, o "crinale"
 della pila, è una caratteristica geometrica
 della forma della tavola.



Supporto della sorgente, ridge e forma della pila



Esempi di crinali (in rosso) per diverse forme di tavola

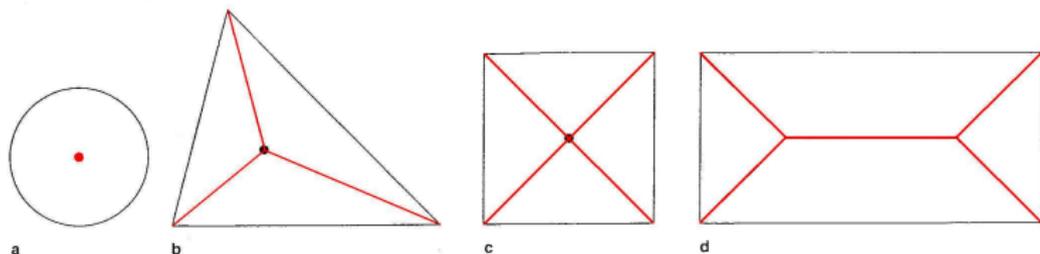


Fig. 2a–d. The singular set for some simple geometries

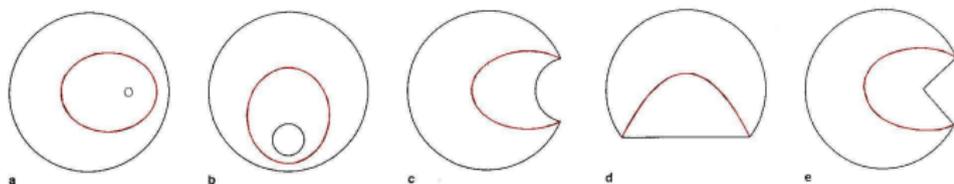
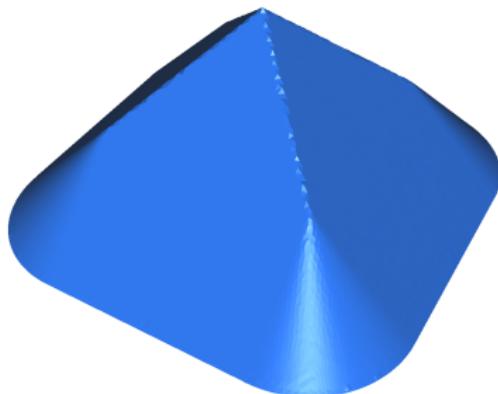
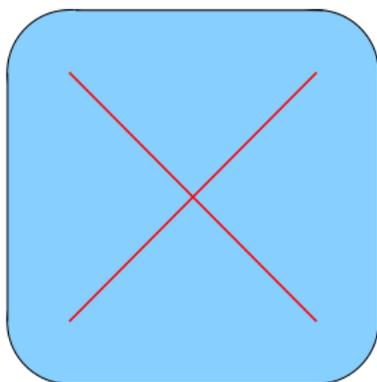
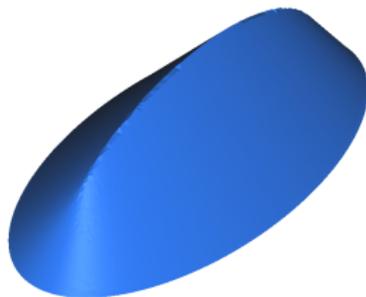
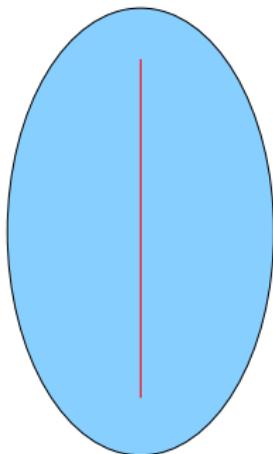


Fig. 3a–e. Singular set for geometries with circular and straight boundaries

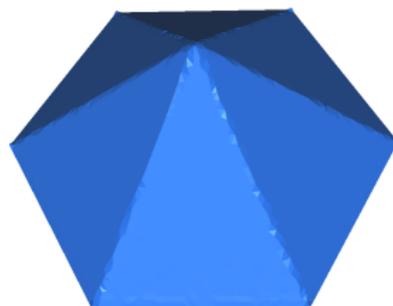
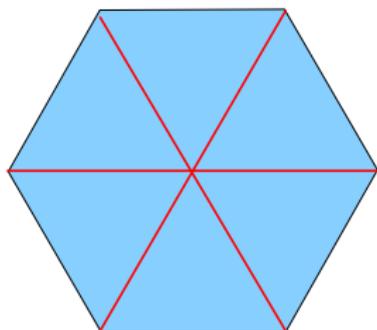
Esempi di crinali per diverse forme di tavola



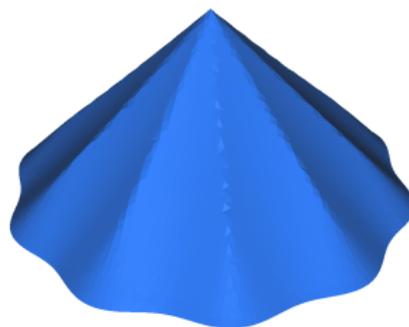
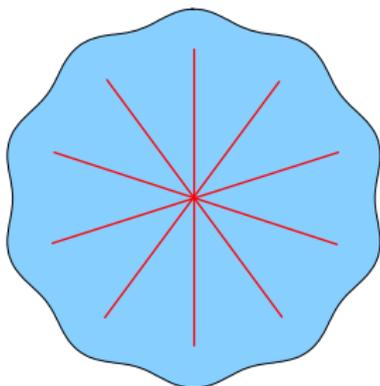
Esempi di crinali per diverse forme di tavola



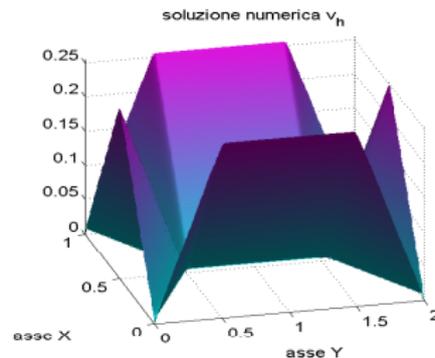
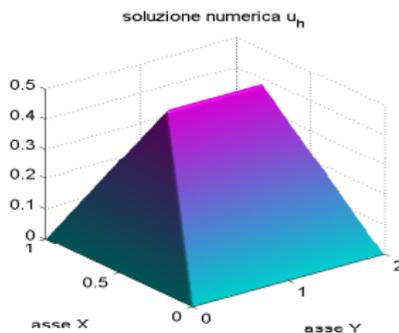
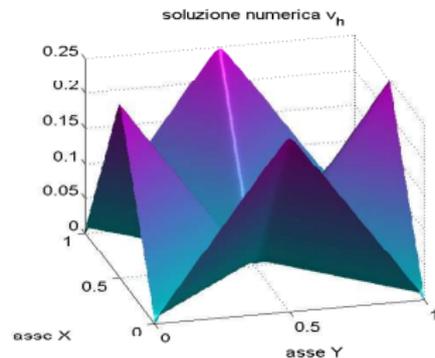
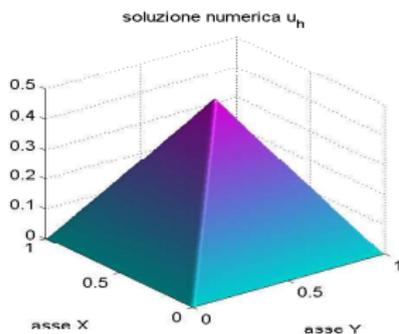
Esempi di crinali per diverse forme di tavola



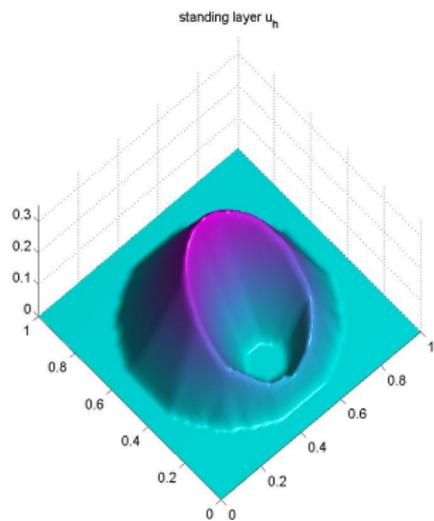
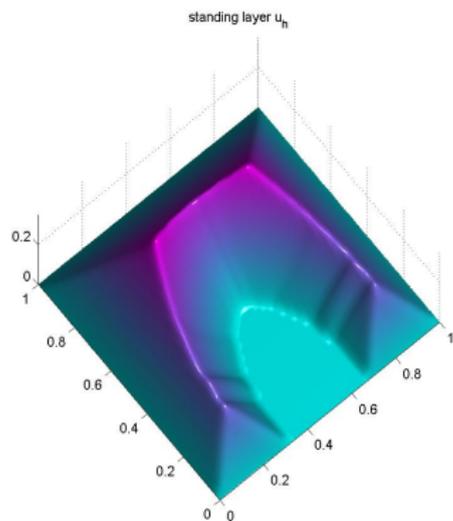
Esempi di crinali per diverse forme di tavola



Equilibri massimali [Tavola quadrata (sopra) e rettangolare (sotto)]



Equilibri massimali [Una tavola non convessa e una non connessa]



Un po' di matematica

I modelli matematici

Per questo come per altri fenomeni particolari legati ai materiali granulari e di interesse nelle applicazioni è importante costruire modelli matematici in grado di produrre simulazioni "fedeli" agli eventi reali. Non esistono modelli universalmente accettati, anche se nella letteratura fisica sono stati proposti numerosi approcci che utilizzano diversi strumenti matematici:

- **Modelli discreti** (*automi cellulari*)
- **Modelli di meccanica statistica** (*metodi alle particelle*)
- **Modelli continui** (*equazioni differenziali alle derivate parziali*)

I modelli differenziali

Nel 1972 [Aronsson](#) propose un sistema di equazioni differenziali ordinarie per modellizzare la crescita e l'interazione di coni di sabbia prodotti da una sorgente pluripuntiforme su di una tavola illimitata.

Dopo di allora sono passati più di 20 anni prima che i matematici facessero degli importanti passi in avanti nella descrizione del problema.

Tra i modelli differenziali più utilizzati per la crescita delle pile di sabbia, possiamo distinguere due famiglie principali:

- **Modelli variazionali** ([Aronsson](#), [Evans](#), [Prigozhin](#)): ammettono rotolamento solo a pendenza critica.
- **Modelli a doppio strato** ([BCRE](#), [deGennes](#), [Hadeler](#)): descrivono lo scambio nel tempo tra i due strati, anche a pendenza sottocritica.

Due modelli a confronto. 1) Un modello variazionale

[Prigozhin, '96]

$$(P) \begin{cases} \partial_t u - \nabla \cdot (v \nabla u) = f & \text{in } \Omega_T = \Omega \times (0, T) \\ |\nabla u| \leq 1, \quad |\nabla u| < 1 \Rightarrow v = 0 & \text{in } \Omega_T \\ u = 0 \text{ su } \partial\Omega, \quad u(\cdot, 0) = 0 & \text{in } \Omega \end{cases}$$

$v(x, t) \geq 0$ è un'incognita ausiliaria che controlla il flusso superficiale, attivo solo se $|\nabla u| = a$ ($= 1$ in questo caso)

Due modelli a confronto. 2) Un modello a doppio strato

[Haderer-Kuttler, '99]

$$(H) \begin{cases} \partial_t v = \nabla \cdot (v \nabla u) - (1 - |\nabla u|)v + f & \text{in } \Omega_T \\ \partial_t u = (1 - |\nabla u|)v & \text{in } \Omega_T \\ u = 0 \quad \text{su } \partial\Omega, \quad u(\cdot, 0) = 0 & \text{in } \Omega \end{cases}$$

dove u : *strato a riposo*, v : *strato rotolante*.

Estensione del modello **BCRE** [Bouchaud-Cates-Ravi Prakash-Edwards, '94-95], con velocità di trasporto proporzionale alla pendenza della pila.

Confronto

Entrambi i modelli descrivono un flusso superficiale granulare e la crescita delle pile di sabbia, ignorando fenomeni come rimbalzi o valanghe (realistico per sorgenti di piccola intensità).

Tuttavia le due dinamiche sono molto differenti:

- (P) Flusso superficiale attivo solo a pendenza critica. Adatto a descrivere grandi pile o fenomeni visti da una certa distanza (dove i particolari sono trascurabili)
[scala spaziotemporale lunga]
- (H) Flusso superficiale attivo anche a pendenze sottocritiche. Adatto a descrivere processi veloci e piccoli dettagli (*formazione di "ripples", angolo di contatto delle pile, ecc.*)
[scala spaziotemporale breve]

Comportamento asintotico ed equilibri

I due modelli hanno differenti dinamiche, ma formalmente le stesse configurazioni di equilibrio, soluzioni del sistema

$$(E) \left\{ \begin{array}{ll} -\nabla \cdot (v \nabla u) = f & \text{in } \Omega \\ |\nabla u| = 1 & \text{in } \{v > 0\} \\ |\nabla u| \leq 1, \quad u, v \geq 0 & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{array} \right.$$

Caratterizzazione degli equilibri

E' possibile caratterizzare matematicamente le possibili soluzioni di (E):

Teorema [Cannarsa-Cardaliaguet '04]

Se il bordo è regolare, allora :

- **Esistenza**: una soluzione di equilibrio è data dalla coppia (u^*, v^*) , dove $u^* = d$ (la distanza dal bordo), mentre v^* è esprimibile attraverso una formula integrale e si annulla sul ridge S .
- **Quasi unicità**: per ogni altra soluzione (u, v) si dovrà avere $v = v^*$, mentre u coinciderà con u^* nei punti dove v è positiva e potrà avere un qualunque profilo sottocritico altrove.

Confronto asintotico dei due modelli. Due casi possibili

- 1 Se il supporto della sorgente contiene il ridge S il sistema (E) ha una sola soluzione (quella massimale) data da (u^*, v^*) , equilibrio per entrambi i modelli dinamici.

Confronto asintotico dei due modelli. Due casi possibili

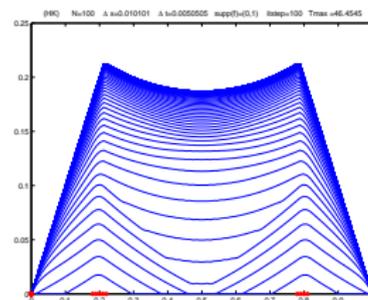
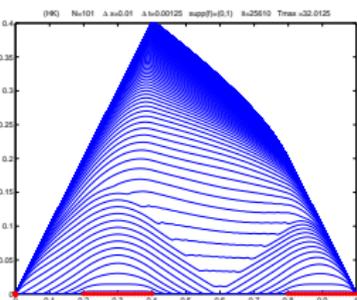
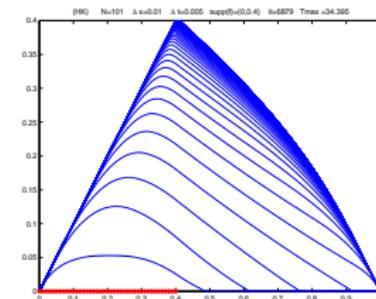
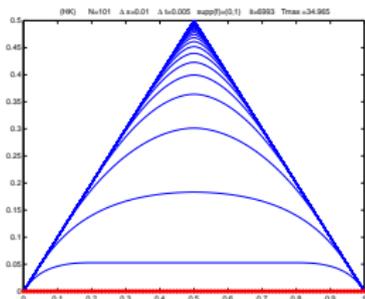
- 1 Se il supporto della sorgente contiene il ridge S il sistema (E) ha una sola soluzione (quella massimale) data da (u^*, v^*) , equilibrio per entrambi i modelli dinamici.
- 2 Se il supporto della sorgente non copre interamente S non c'è unicità di \bar{u} in (E) e i due modelli avranno equilibri differenti (con lo stesso strato rotolante $v!$). Per (P) si ha:

$$\bar{u} = u_*(x) = \max_{y \in D_f} \{d(y) - |x - y|\}^+,$$

equilibrio minimo rispetto al supporto della sorgente. Per (H) $\bar{u} \geq u_*$, caratterizzabile numericamente [Falcone-FV, '06] ma non esplicitamente.

Crescita in base al supporto della sorgente (in rosso)

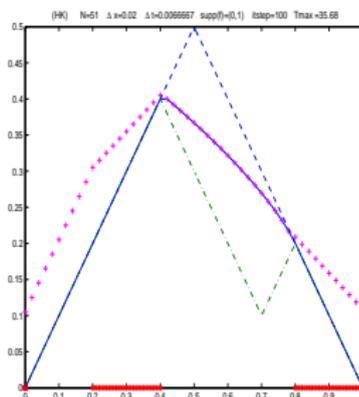
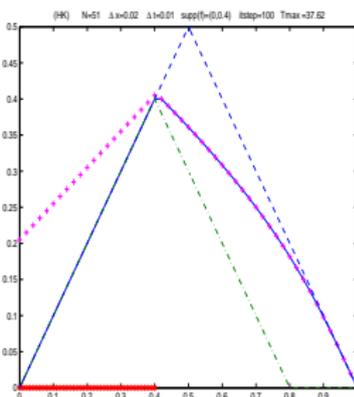
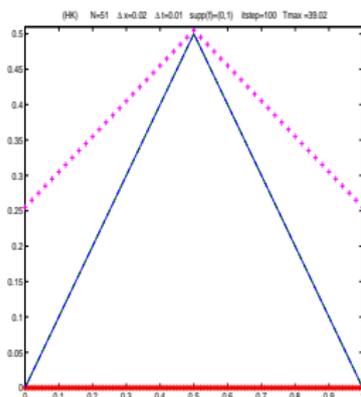
[simulazioni numeriche eseguite con il modello (H) in 1D]



Profili tracciati a intervalli di tempo regolari fino all'equilibrio.

Confronto degli equilibri per differenti sorgenti

\bar{u} versus u_*



$f \equiv 0.5$, \bar{u} [—] e $(\bar{u} + \bar{v})$ [++], la funzione distanza d [- -] e la soluzione u_* [---] quando D_f è rispettivamente $[0, 1]$, $[0, 0.4]$ e $].2, 0.4] \cup [0.8, 1]$.

Una sorgente uniforme sulla tavola quadrata (animazione): evoluzione dello strato a riposo e di quello rotolante

(clicca su ciascuna figura per lanciare le animazioni)

Una sorgente variabile sulla tavola quadrata (animazione): evoluzione dello strato a riposo e di quello rotolante

(clicca su ciascuna figura per lanciare le animazioni)

Profili asintotici diversi (ma stesso strato rotolante)

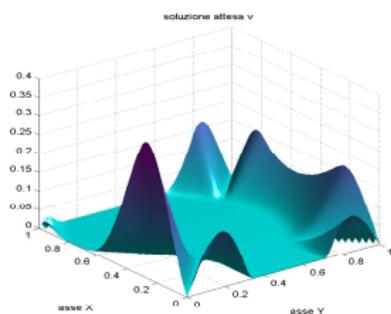
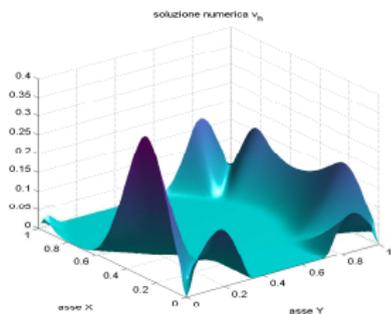
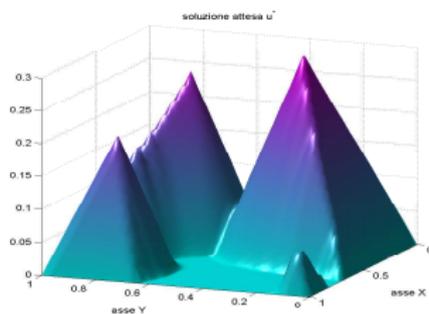
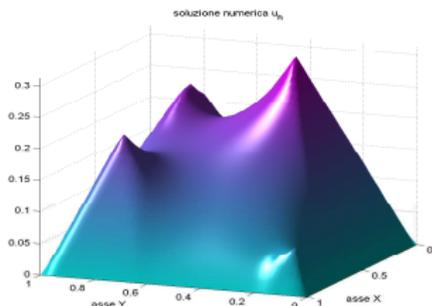


Tavola quadrata, sorgente che non copre il ridge, modello (H) versus modello (P).

Il caso della tavola parzialmente delimitata da pareti

Il problema della tavola parzialmente aperta

Supponiamo ora che il bordo della tavola sia unione di due insiemi Γ_0 (bordo aperto) e Γ_w (pareti verticali), entrambi non vuoti.

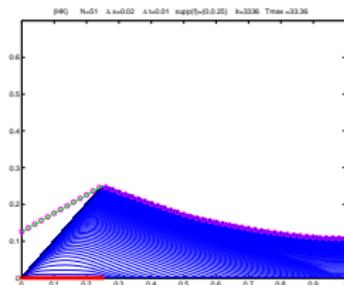
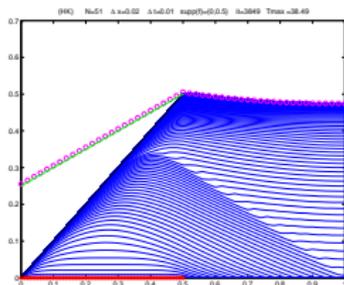
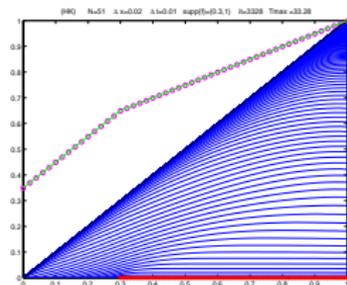
Il modello a due strati per la crescita delle pile diviene:

$$(H_w) \left\{ \begin{array}{ll} \partial_t v = \nabla \cdot (v \nabla u) - (1 - |\nabla u|)v + f & \text{in } \Omega_T \\ \partial_t u = (1 - |\nabla u|)v & \text{in } \Omega_T \\ u(\cdot, 0) = 0 & \text{in } \Omega \\ u = 0 \text{ su } \Gamma_0, \quad v \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \text{ su } \Gamma_w & \end{array} \right.$$

La tavola aperta con pareti. Cosa cambia ??

In teoria nulla di speciale. La pila si accumulerà lungo le pareti Γ_w e scaricherà sabbia attraverso Γ_0 . Il profilo massimale coinciderà con la funzione distanza dal bordo aperto.

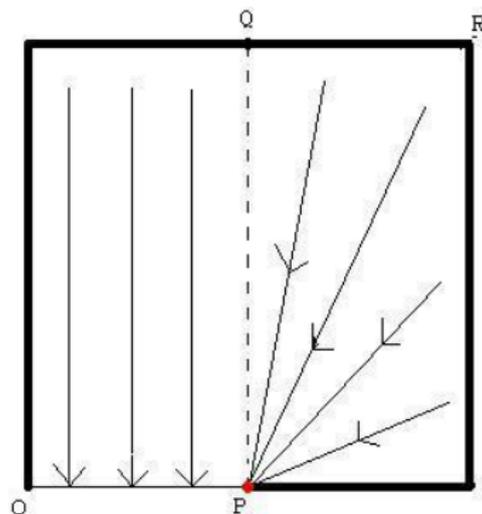
Esempi di crescita in una dimensione per diversi supporti della sorgente (in rosso) con muro a destra: si raggiunge l'equilibrio massimale solo se il supporto arriva fino alla parete.



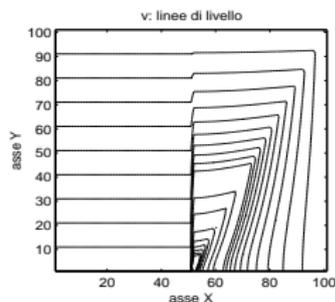
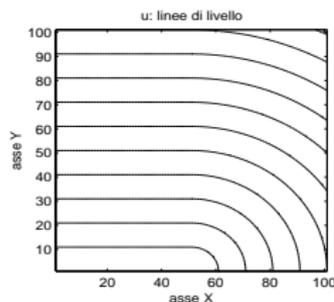
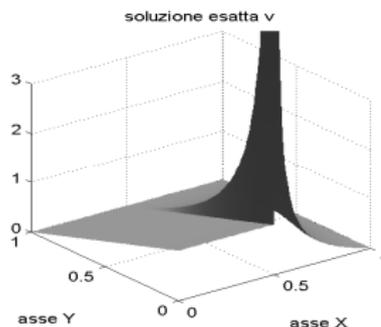
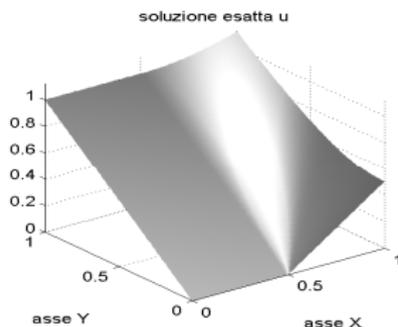
Un esempio di punto singolare sul bordo

In due dimensioni però la situazione è decisamente più complicata: i punti di estremo delle pareti possono creare discontinuità nello strato rotolante, perché vi si incontrano infiniti raggi di trasporto convergenti.

Esempio Nella tavola quadrata in figura, con $\Gamma_0 = \overline{OP}$, P è un punto singolare.



Soluzioni d'equilibrio in presenza di un punto singolare

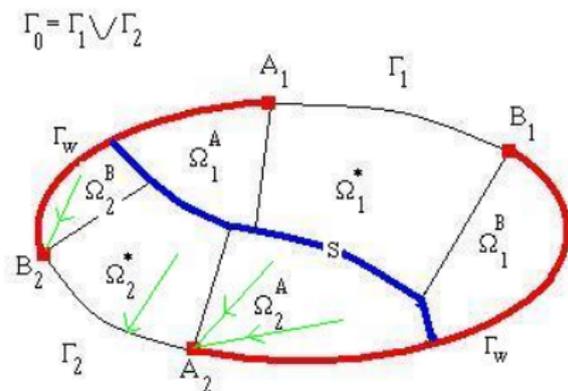


Strato a riposo continuo (sinistra), strato rotolante discontinuo che esplose in P (destra)

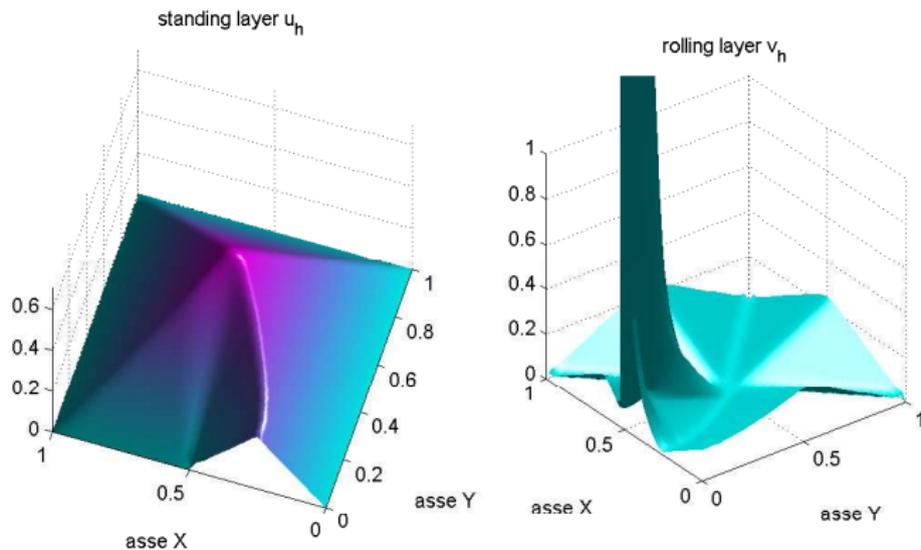
Profilo e strato rotolante singolare (animazione)

(clicca su ciascuna figura per lanciare le animazioni)

E' ancora possibile caratterizzare le soluzioni di equilibrio per **decomposizione** (Crasta-FV '06): ogni punto della tavola apparterrà ad una **regione regolare** (raggi di trasporto paralleli) o ad una **regione singolare** (raggi convergenti in un punto singolare), per ognuna delle quali la soluzione stazionaria è ricostruibile.

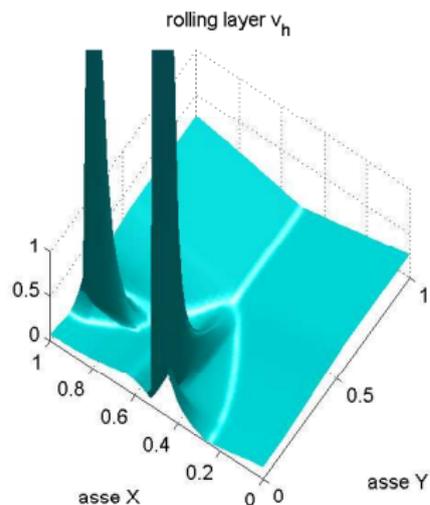
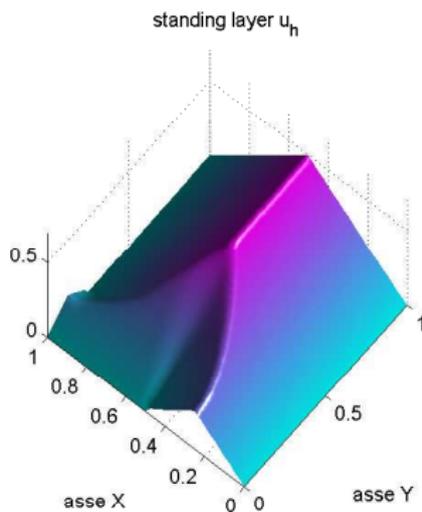


Altri esempi: una parete



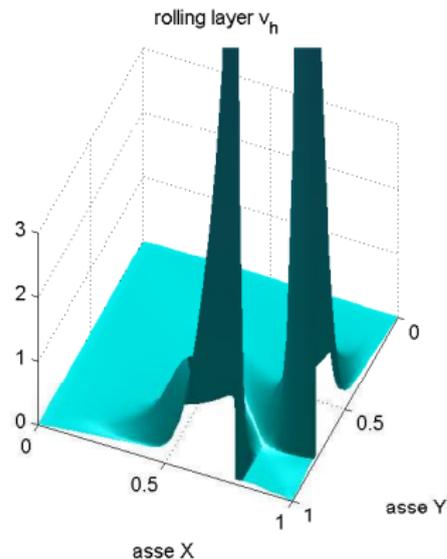
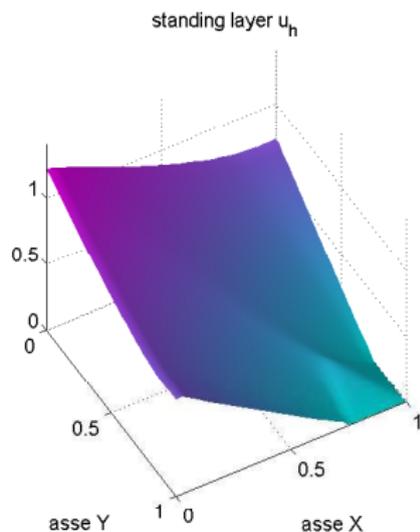
$$\Gamma_w = \{0 < x < 0.5, y = 0\}.$$

Altri esempi: tre pareti disgiunte



$$\Gamma_w = \{0 < x < 0.5, y = 0\} \cup \{x = 0, 0 < y < 0.25\} \cup \{0 < x < 1, y = 1\}.$$

Altri esempi: tre pareti contigue



$$\Gamma_0 = \{0.75 < x < 1, y = 1\} \cup \{x = 1, 0.75 < y < 1\}.$$

Vento + sabbia = il fascino delle dune





Ralph Alger BAGNOLD (1896-1990)

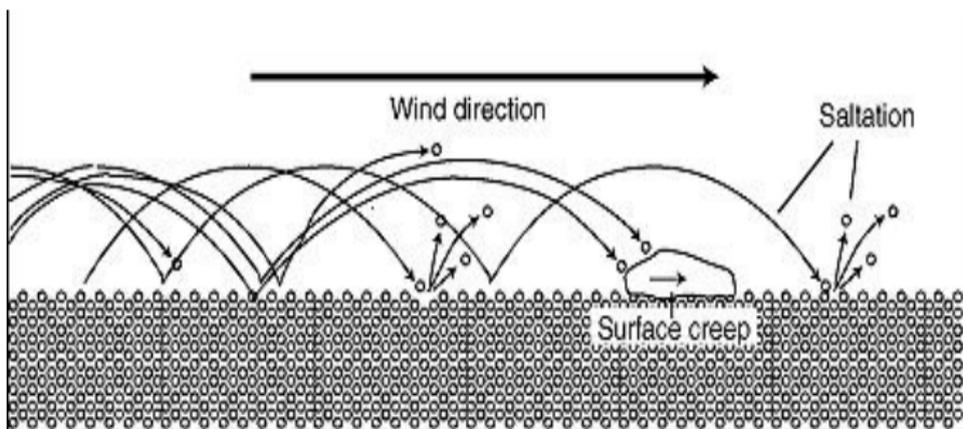
- Ingegnere dell'esercito britannico, tra le due guerre esplorò a fondo i deserti della Libia, del Sinai e dell'India
- Tornato in patria, condusse esperimenti nella galleria del vento e pubblicò il libro *The Physics of Blown Sand and Desert Dunes* (1941, ripubblicato nel 1954), tuttora considerato un testo fondamentale, usato dalla Nasa per le esplorazioni di Marte
- Nella II Guerra Mondiale organizzò un reparto mobile (*Long Range Desert Group*) che con veicoli in grado di muoversi velocemente nel deserto condusse azioni di spionaggio e pirateria nei confronti delle truppe italiane e tedesche.



Il moto della sabbia sotto l'azione del vento

Nel libro di Bagnold si studia come la sabbia è raccolta, trasportata e accumulata dal vento su di una superficie piana in mucchi organizzati che possono mantenere la propria identità e spostarsi.

I granelli trasportati dal vento cadendo urtano altri granelli provocandone il sollevamento ([saltation](#)). L'angolo di incidenza sarà in genere sempre lo stesso. Se il vento è intenso e la sabbia disomogenea, gli urti possono anche provocare un movimento superficiale dei granelli più grossi non in grado di sollevarsi ([surface creep](#) o [reptation](#)).



Il moto della sabbia sotto l'azione del vento (2)

- vento debole: i granelli rimbalzano per pochi centimetri (il fenomeno si esaurisce)
- vento sostenuto (intensità superiore ad una soglia critica): l'energia ricevuta dal vento dopo l'impatto supera quella persa nell'impatto (il movimento si autoalimenta)

La fisica è la stessa anche se cambia il fluido:

- **sabbia in aria**: granelli **2000** volte più pesanti dell'aria. Un granello che salta ad alta velocità può muovere per impatto granelli di diametro **6** volte superiore o di peso **200** volte superiore al proprio.
- **sabbia nell'acqua**: granelli **1,5** volte più pesanti dell'acqua (saltation trascurabile)

Ripples

Nei materiali granulari disomogenei il movimento superficiale può esibire un'alternanza di accumulo ed erosione (come nei fenomeni di traffico) che tende ad organizzarsi in modo regolare (**ripples**, "ondulazioni").

La distanza tra due creste successive cresce coll'intensità del moto (tra 2 e 12 cm), ma oltre una certa soglia il fenomeno sparisce (la superficie torna piana).



La forma delle dune

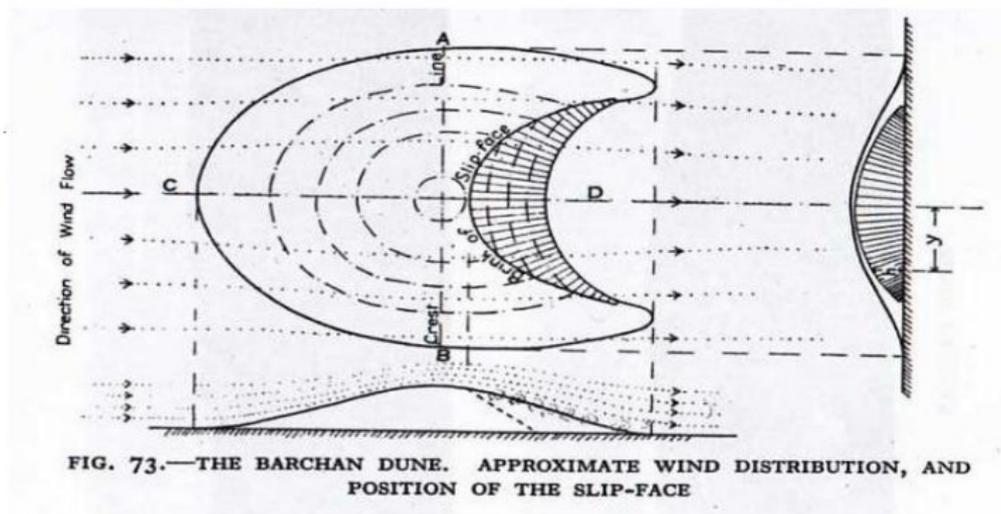
- Salire su di una duna può essere molto difficile: il trucco è sapere da che lato salire. Sul lato controvento la sabbia è compatta, i granelli sono ben compressi e quindi si può camminare. Invece sul lato opposto, sottovento, i granelli vengono accumulati caoticamente con molti spazi tra gli uni e gli altri e quindi si affonda inesorabilmente.

La forma delle dune

- Salire su di una duna può essere molto difficile: il trucco è sapere da che lato salire. Sul lato controvento la sabbia è compatta, i granelli sono ben compressi e quindi si può camminare. Invece sul lato opposto, sottovento, i granelli vengono accumulati caoticamente con molti spazi tra gli uni e gli altri e quindi si affonda inesorabilmente.
- Non tutte le dune sono uguali, ne esistono tipi molto diversi. A volte sono isolate, altre volte riunite in veri mari di dune, grandi centinaia di chilometri quadrati. Molte dune sono immobili e di altezza fissa, altre si muovono sotto l'azione del vento, dal cui carattere (periodi di variazione in intensità e direzione) dipende la forma. Si parla ad esempio di dune **barcane**, **longitudinali** (seif dune), **transverse**, **lineari**, ...

Dune barcane

Bizzarre dune a forma di mezzaluna, si muovono sotto l'azione del vento. Dove batte, deposita sabbia e le fa crescere verso la cima, mentre sottovento la duna frana. Le barcane più piccole, di pochi decimetri, corrono anche alcuni metri al giorno. Quelle grandi si spostano visibilmente solo nel corso di anni o decenni.



Dune barcane



Dune longitudinali (seif dune)

Sono in genere prodotte dall'azione periodica di un vento bi-direzionale sulla tradizionale forma a barcana.

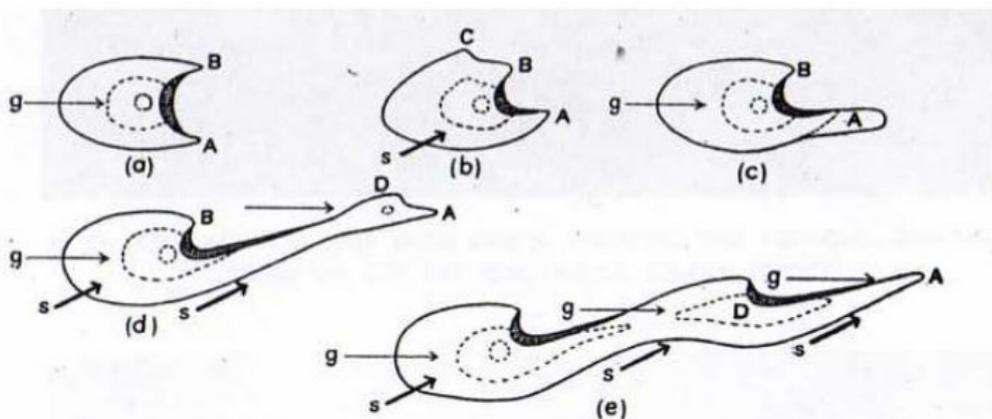
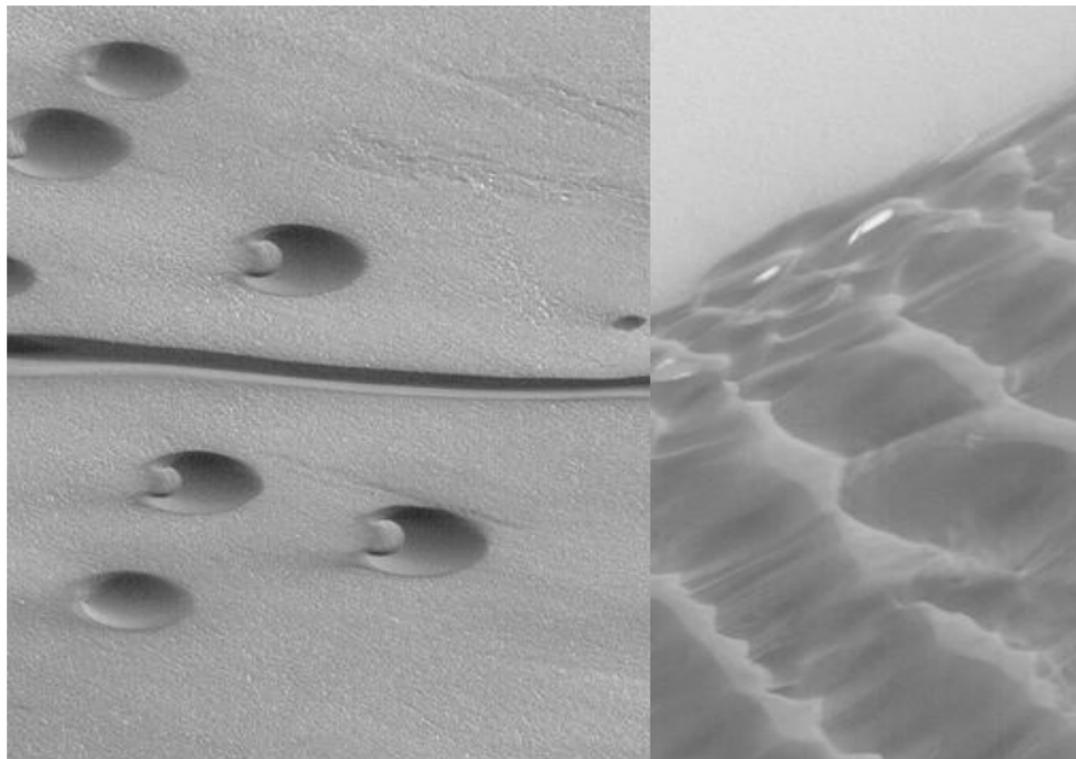


FIG. 78.—TRANSITION FROM BARCHAN TO SEIF DUNE FORM DUE TO A BI-DIRECTIONAL WIND

Dune longitudinali (seif dune)



Dune di Marte: foto NASA, dal Mars Global Surveyor



Le dune "cantano"

"Quando l'uomo cavalca di notte per quel deserto [...] molte volte ode istormenti in aria e propriamente tamburi"

(Marco Polo, Il Milione, 1300 ca)

Su di una grande duna, nel silenzio del deserto, può capitare di sentire la montagna di sabbia gemere, o persino produrre un rumore simile a quello di un'orchestra di tamburi o di un autotreno in corsa. Le dune riescono a produrre suoni che raggiungono i 100-105 db e si propagano anche a chilometri di distanza. In passato si pensava che il suono dipendesse dal forte vento del deserto. Ora si ritiene causato dalle vibrazioni del letto di sabbia provocate dalle collisioni sincronizzate dei granelli di una stessa duna causate ad es. da una valanga. Si è anche scoperto che lo strato di silicio, ferro e manganese che ricopre i granelli dopo circa un mese di "canto" si deteriora e scompare, e i granelli restano muti.

[B. Andreotti, Laboratorio di Fisica e Meccanica degli ambienti eterogenei, CNRS, Parigi, <http://www.pmmh.espci.fr/~andreotti>]

Booming dunes



The massive white dunes of Sand Mountain, southeast of Fallon, Nevada. This is one of the few "booming dunes" in the United States.

La dinamica delle dune: modelli matematici



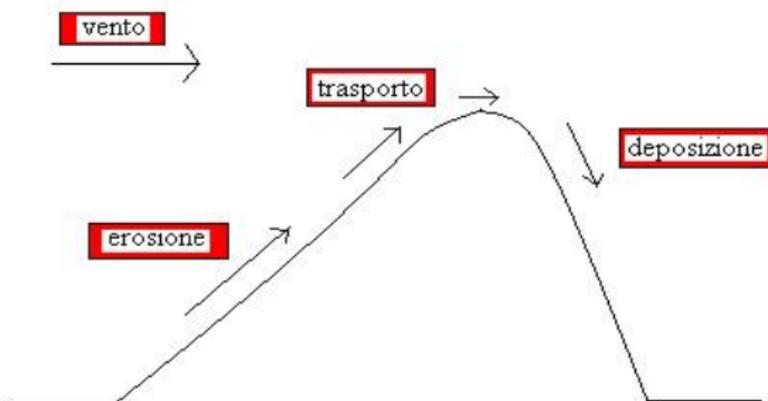
Dinamica delle dune

E' importante comprendere il comportamento delle dune. Esse non sono in genere immobili, ma è molto difficile ottenere modelli matematici in grado di predirne il movimento.

Possibili applicazioni:

- previsione delle tempeste di sabbia
- studio dei fondali sabbiosi di fiumi e coste
- ricerca spaziale (sulla superficie di Marte ci sono moltissime dune, e anche se l'atmosfera è diversa, la fisica che regola i granelli è la stessa)

Come avanza una duna



Un semplice modello 1D per le dune viaggianti

Consideriamo anche in questo caso il profilo della duna costituito dalla sovrapposizione di uno strato a riposo u e di uno strato mobile w trasportato dal vento. Ipotesi:

- vento orizzontale (da sinistra a destra) a velocità costante v
- una singola cresta viaggia a velocità c dipendente da v e da:
 - ▶ γ : velocità di trasporto dello strato mobile
 - ▶ ε : spessore di w rispetto a u
 - ▶ σ : tasso di erosione del versante controvento
 - ▶ δ : tasso di deposizione del versante protetto dal vento

Il sistema di equazioni è allora dato da [Haderer-Kuttler, 2003]:

$$(D) \begin{cases} u_t = \begin{cases} -\sigma u & \text{if } u_x > 0, \\ \delta w & \text{if } u_x < 0, \end{cases} \\ w_t + \gamma w_x = \begin{cases} \sigma u & \text{if } u_x > 0, \\ -\delta w & \text{if } u_x < 0. \end{cases} \end{cases}$$

Una soluzione autosimilare per (D)

Il modello (D) possiede una soluzione autosimilare rappresentante la duna che viaggia a velocità costante c senza cambiare forma, cioè tale che $u(x, t) = U(x - ct)$, $w(x, t) = W(x - ct)$. Se u_0 , w_0 indicano gli spessori degli strati in cresta ($x = 0$), allora queste soluzioni sono date dalle seguenti formule:

$$\begin{cases} U(x) = \begin{cases} u_0 \exp(\lambda x) & \text{if } x < 0, \\ u_0 \exp(-\mu x) & \text{if } x > 0, \end{cases} \\ W(x) = \varepsilon U(x), \end{cases}$$

dove $\lambda = \frac{\sigma(1+\varepsilon)}{\varepsilon\gamma}$, $\mu = \frac{\delta(1+\varepsilon)}{\gamma}$, $c = \frac{\varepsilon\gamma}{1+\varepsilon}$, in accordo con i valori trovati da Bagnold.

I parametri vivono a scale diverse

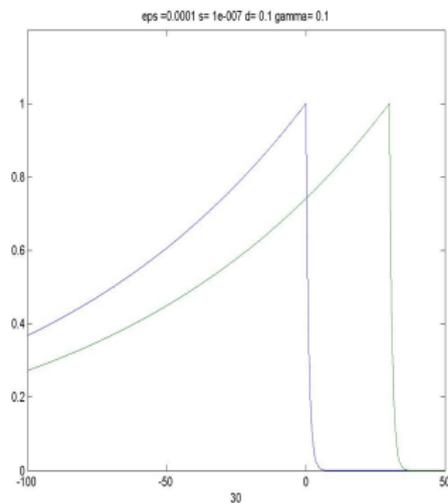
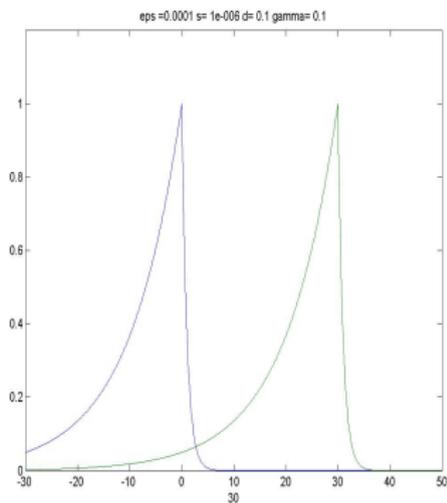
La taglia dei parametri è essenziale !

Per una simulazione realistica, ad esempio:

- $v = 1 \text{ m/sec}$
- $\gamma = 0.1 \text{ cm/sec}$
- $\varepsilon = 10^{-4} \text{ cm}$
- $c \cong \varepsilon\gamma = 10^{-5} \text{ cm/sec}$

Ne segue che per una duna alta **10 metri** ci vogliono circa **55 ore** per uno spostamento di **2 cm.**, più di **11 giorni** per uno spostamento di **10 cm.** (sempre che il vento non smetta mai di soffiare, e nella stessa direzione !).

Esempi di dune viaggianti autosimilari per (D)



$$\varepsilon = 10^{-4}, \quad \gamma = 0.1, \quad \delta = 0.1, \quad \sigma = 10^{-6}(\text{sx}), \quad \sigma = 10^{-7}(\text{dx}), \quad T = 3 \times 10^6.$$

Modelli più realistici

- Si sta studiando un'estensione del modello (D) che tenga conto anche dell'angolo di contatto nello spirito dei modelli BCRE, e dia quindi un'evoluzione più simile a quella reale.
- Molto più complessa la derivazione di un modello 2D (come ricreare ad esempio l'effetto barcana ?)

Ricerche in corso con [M. Falcone](#) e [N. Igbida](#) (Univ. di Amiens).

Conclusioni

- Esiste una sterminata letteratura su questi e altri fenomeni e problemi legati ai materiali granulari, per lo più in ambito fisico.

Conclusioni

- Esiste una sterminata letteratura su questi e altri fenomeni e problemi legati ai materiali granulari, per lo più in ambito fisico.
- Sono relativamente pochi invece i lavori di taglio matematico al riguardo, e c'è quindi molto spazio per problemi interessanti da studiare, anche perché legati ad altri campi d'attualità nella ricerca matematica, come [il problema del trasporto ottimo di massa](#), [l'infinito Laplaciano](#) e l'estensione ottimale di dati Lipschitz assegnati sul bordo di un aperto, [l'evoluzione di fronti](#) per curvatura geometrica nonlocale, [le equazioni di Hamilton-Jacobi](#), ecc.

Conclusioni

- Esiste una sterminata letteratura su questi e altri fenomeni e problemi legati ai materiali granulari, per lo più in ambito fisico.
- Sono relativamente pochi invece i lavori di taglio matematico al riguardo, e c'è quindi molto spazio per problemi interessanti da studiare, anche perché legati ad altri campi d'attualità nella ricerca matematica, come [il problema del trasporto ottimo di massa](#), [l'infinito Laplaciano](#) e l'estensione ottimale di dati Lipschitz assegnati sul bordo di un aperto, [l'evoluzione di fronti](#) per curvatura geometrica nonlocale, [le equazioni di Hamilton-Jacobi](#), ecc.
- Modelli molto simili a quelli dei m.g. trovano applicazione in altri ambiti: [river networks](#), [magnetizzazione di semiconduttori](#), [deformazione elastoplastica](#), ecc.

FINE