Polycopié de cours sur la Mécanique du point

Présenté par : Dr H. RABOUHI

Table des matières

Introduction générale

Ce polycopié traite le cours de Mécanique du point destiné aux étudiants des premières années de Technologie, Science de la Matière et Maths informatique. Il est composé de quatre chapitres.

Dans le premier chapitre nous avons défini les grandeurs physiques nécessaires pour décrire des phénomènes naturels et d'étudier leurs comportements ainsi qu'un aperçu sur les vecteurs.

Le deuxième chapitre sera consacré à l'étude de la cinématique, qui consiste à décrire la matière dont un corps se déplace dans l'espace en fonction du temps sans s'attacher aux causes qui produisent ce mouvement.

Dans le troisième chapitre nous nous sommes intéressés à la dynamique du point. Celle-ci permet de relier le mouvement à ces causes. Les causes du mouvement sont modélisées en mécanique par des grandeurs vectorielles appelées forces.

Le quatrième chapitre sera consacré à l'étude de la dynamique en faisant appel aux notions d'énergie et de travail.

Chapitre I

Grandeurs physiques et équations aux dimensions

La physique a pour but de décrire les phénomènes naturels et étudier leurs propriétés. Pour décrire ces phénomènes, la physique fait appel à des notions qu'on appelle grandeurs physiques. A chaque grandeur physique correspond une unité et l'ensemble des unités est regroupé dans un système universel, le système international.

I-1. Les grandeurs physiques :

La physique est une science basée sur l'observation des phénomènes physiques. Pour étudier ces phénomènes il est nécessaire de bien définir certaines grandeurs physiques utiles à leur compréhension. On appelle grandeur physique toute propriété physique mesurable. Lorsque leur mesure s'exprime par un simple nombre on parle de grandeurs scalaires. Lorsqu'un ensemble de plusieurs nombres (vecteurs) est nécessaire pour les représenter, on parle de grandeur vectorielle.

Une grandeur physique est mesurable si on sait définir l'égalité, la somme et le rapport de deux grandeurs de son espèce. La plupart des grandeurs physiques découlent les unes des autres ainsi que de quelques grandeurs de base.

I-2. Grandeurs fondamentales

Les grandeurs de base utilisées: en mécanique sont :

La longueur : mesure la distance séparant deux points.

Unité : le mètre (m), Grandeur : [Longueur] = L

La masse :

Unité : le Kilogramme (Kg), Grandeur : [Masse] = M

Le temps :

Unité : la seconde, Grandeur : [temps] = T,

<u>L'intensité électrique</u> :

Unité : l'Ampère (A),   Grandeur [intensité] = I.

I-3. Grandeur dérivées

Les grandeurs dérivées sont obtenues par combinaison des grandeurs fondamentales.

<u>Exemples</u> *:*

- Surface : la surface étant le produit de deux longueurs, sa grandeur physique est : $[S] = L.L=L^2$, unité le mètre carrée.(m^2).
- Vitesse : distance parcourue par unité de temps. On déduit $V=dx/dt$, sa grandeur physique $[v]=L.T^{-1,}$ unité (m/s).
- L'accélération : la définition $a=dv/dt$ sa grandeur physique $[a]=L.T^{-1}$, unité m/s^2
- Force : une force appliquée à une masse la fait accélérer $F=ma$, d'où sa grandeur physique $[F]=M[a]=MLT^{-2}$, unité est le newton
- Pression : force appliquée par unité de surface : $P=F/S$, sa grandeur physique est $[P]=[F]/[S]$ d'où $[P]= M.L^{-1}T^{-2}$, unité est le pascal (Pa).

I-4. Système d'unités

Les quatre unités fondamentales ainsi choisies définissent le système MKSA dont les initiales signifient respectivement mètre, kilogramme, seconde et Ampère. Avant l'adoption de ce système, un autre système dans lequel la longueur se mesurait en centimètre, la masse en gramme et le temps en seconde existait déjà, c'est le système CGS.

Le système international (SI) est constitué par les unités du système MKSA et comporte des définitions complémentaires de l'unité de température et de l'unité de l'intensité lumineuse.

Grandeur physique	**Lettre utilisée**	**Unité de mesure S.I**	**Symbole de l'unité**
Masse	M	Kilogramme	Kg
Longueur	L	Mètre	M
Temps	T	Seconde	S
Intensité électrique	I	Ampère	A
Température	θ	Kelvin	K

Intensité lumineuse	J	Candéla	Cd
Quantité de matière	N	Mole	Mol

Les sept unités de base du système international sont les unités fondamentales à partir desquelles sont obtenues par combinaison toutes les autres unités dites unités dérivées.

I-5. Equation aux dimensions

Une équation aux dimensions est une relation mathématique qui exprime la dimension d'une grandeur physique en fonction des dimensions des grandeurs fondamentales. Soit G une grandeur physique, sa dimension est notée [G].

Par exemple si G est une longueur $\Rightarrow [G]=L$.

Exemple :

- Equations aux dimensions de la vitesse : $V=x/t \Rightarrow [V]=L.T^{-1}$.
- Equations aux dimensions de l'accélération : $x=\frac{1}{2}at^2 \Rightarrow a=2x/t^2 \Rightarrow [a]=L.T^{-2}$
- Equations aux dimensions de la force : $F=ma \Rightarrow [F]= MLT^{-2}$
- Equations aux dimensions de l'énergie : $E=\frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow [E]= ML^2\, T^{-2}$

Remarque :

On ne peut additionner entre elles que des grandeurs ayant la même dimension. Si dans une équation les dimensions des grandeurs dont on fait la somme ne sont pas identiques, cette équation est fausse.

Pour toute grandeur physique G :

$[G]=L^{\alpha}M^{\beta}T^{\gamma}I^{\lambda}$ c'est l'équation aux dimensions de G. α, β, γ et λ sont des nombres rationnels positifs ou négatifs.

I-5-1. Utilité des équations aux dimensions

Les équations aux dimensions permettent de vérifier la cohérence des équations lors de calcul en physique. Une formule est homogène si les deux membres ont les mêmes dimensions. Cependant, il ne suffit pas qu'une équation soit homogène pour qu'elle soit juste. On ne peut additionner ni soustraire que les termes ayant les mêmes dimensions.

I-5-2. Relation entre les unités

Les relations entre les unités des différents systèmes peuvent être facilement établies en utilisant les équations aux dimensions.

Exemple :

Calculer la relation existant entre le Barye (unité de pression dans le système CGS) et le pascal (unité de pression dans le S.I)

La pression $[p]=ML^{-1}T^{-2}$

$$1\ Pa/1Barye\ = (M/M)\ (L^{-1}/\ L^{-1})\ (T^{-2}/T^{-2})=10^3/1.\ 100^{-1}/1^{-1}.\ 1/1$$

$$=10.$$

D'où 1 Pa=10 Barye.

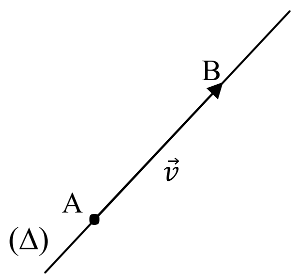
I-6. Grandeurs scalaires et grandeurs vectorielles

En physique, on distingue des grandeurs scalaires et des grandeurs vectorielles. Les grandeurs sans direction sont appelées scalaires et elle, sont représentées par des nombres réels positifs ou négatifs. Exemple longueur, temps, densité, masse, volume, etc…

Les grandeurs vectorielles sont caractérisées par leurs intensités, leurs directions et leurs sens. Exemple, le déplacement, la vitesse, la force,…etc.

I-7. Vecteurs

I-7-1. Définition

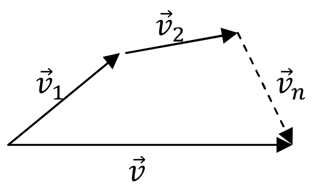


Un vecteur est un segment orienté caractérisé par :

- Son module qui est égal à la longueur du segment [AB]
- Sa direction qui est définie par celle de la droite qui porte le segment
- Son sens qui désigne l'orientation du vecteur ou le sens du mouvement d'un .mobile.

- Deux vecteurs sont égaux s'ils ont le même module, la même direction et le même sens
- Un vecteur est unitaire lorsque son module est égal à l'unité.

Si $\vec{u}$ est un vecteur unitaire porté par un vecteur quelconque $\vec{v}$ alors : $\vec{u} = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$



I-7-2. Opération sur les vecteurs

I-7-2-1. Addition

La somme de n vecteurs : $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$,……. $\vec{v}_n$ est un vecteur $\vec{v}$ tel que : $\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \cdots .. \vec{v}_n$

Propriétés :

Soit $\vec{v}_1, \vec{v}_2 et\ \vec{v}_3$, trois vecteurs, α, β et γ des scalaires

- Commutativité : $\vec{v}_1 + \vec{v}_2 = \vec{v}_2 + \vec{v}_1$
- Associativité : $\vec{v}_1 + (\vec{v}_2 + \vec{v}_3) = (\vec{v}_1 + \vec{v}_2) + \vec{v}_3$

  $\alpha . (\beta . \vec{v}_1) = \beta . (\alpha . \vec{v}_1) = (\alpha . \beta) . \vec{v}_1$.
- Distributivité : $(\alpha + \beta) . \vec{v}_1 = \alpha\vec{v}_1 + \beta\vec{v}_1$

  $\alpha (\vec{v}_1 + \vec{v}_2) = \alpha\, \vec{v}_1 + \alpha\, \vec{v}_2$
- La somme d'un vecteur et de son opposé est nulle : $\vec{v} + (-\vec{v}) = \vec{0}$
- La différence de deux vecteurs $\vec{v}_1 - \vec{v}_2 = \vec{v}_1 + (-\vec{v}_2)$, où $(-\vec{v}_2)$ est le vecteur opposé à $\vec{v}_2$

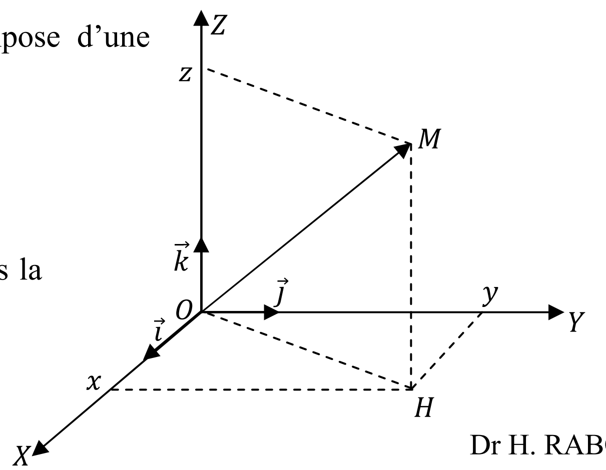
I-7-2-2. Composantes d'un vecteur

Soit $\mathcal{R}(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ un repère orthonormé direct d'origine O et de base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.

Dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$, le vecteur $\overrightarrow{OM}$ se décompose d'une manière unique sous la forme :

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$$

(x, y, z) sont les composantes du vecteur $\overrightarrow{OM}$ dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.



I-7-2-3. Multiplication d'un vecteur par un scalaire

Soit $\vec{v}$ un vecteur et λ un scalaire, le produit λ. $\vec{v}$ est un vecteur de même direction que $\vec{v}$ si λ est positif et de sens contraire si λ est négatif. Si λ=0, λ. $\vec{v}=\vec{0}$.

I-7-2-4. Produit scalaire de deux vecteurs

Le produit scalaire de deux vecteurs $\overrightarrow{v_1}$ et $\overrightarrow{v_2}$ est un scalaire noté ($\overrightarrow{v_1} \cdot \overrightarrow{v_2}$) tel que :

$$\overrightarrow{v_1} \cdot \overrightarrow{v_2} = \|\vec{v}_1\| \|\vec{v}_2\| \cos\left(\widehat{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}}\right)$$

Propriétés :

- Le produit scalaire est commutatif et distributif par rapport à l'addition :

$$\overrightarrow{v_1} \cdot \overrightarrow{v_2} = \overrightarrow{v_2} \cdot \overrightarrow{v_1}$$

$$\overrightarrow{v_1} \cdot (\overrightarrow{v_2} + \overrightarrow{v_3}) = \overrightarrow{v_1} \cdot \overrightarrow{v_2} + \overrightarrow{v_1} \cdot \overrightarrow{v_3}$$

- $\overrightarrow{v_1} \cdot \overrightarrow{v_2} = 0$ si les deux vecteurs sont orthogonaux ou l'un des deux est nul.
- Le produit scalaire d'un vecteur par lui-même est égal à son module carré :

$$\vec{v} \cdot \vec{v} = v^2$$

Soient $\overrightarrow{v_1} = x_1 \vec{\imath} + y_1 \vec{\jmath} + z_1 \vec{k}$ et $\overrightarrow{v_2} = x_2 \vec{\imath} + y_2 \vec{\jmath} + z_2 \vec{k}$ dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.

$$\overrightarrow{v_1} \cdot \overrightarrow{v_2} = \left(x_1 \vec{\imath} + y_1 \vec{\jmath} + z_1 \vec{k}\right) \cdot \left(x_2 \vec{\imath} + y_2 \vec{\jmath} + z_2 \vec{k}\right)$$

$$\overrightarrow{v_1} \cdot \overrightarrow{v_2} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 \ \ (\vec{\imath}^2 = \vec{\jmath}^2 = \vec{k}^2 = 1 \ et \ \vec{\imath}.\vec{\jmath} = \vec{\jmath}.\vec{k} = \vec{\imath}.\vec{k} = 0).$$

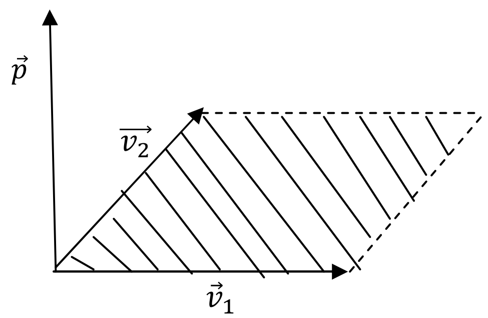
De la même façon :

$$\vec{v}^2 = v^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

I-7-2-5. Produit vectoriel de deux vecteurs

Le produit vectoriel de deux vecteurs $\overrightarrow{v_1}$ et $\overrightarrow{v_2}$ noté $\vec{p} = \overrightarrow{v_1} \wedge \overrightarrow{v_2}$, ou $\vec{p}$ est un vecteur perpendiculaire au plan formé par les deux vecteurs $\overrightarrow{v_1}$ et $\overrightarrow{v_2}$ de sens tel que le trièdre $\overrightarrow{v_1}$, $\overrightarrow{v_2}$ et $\vec{p}$ soit direct et dont la grandeur est donnée par : $\|\vec{p}\| = \|\overrightarrow{v_1} \wedge \overrightarrow{v_2}\| = \|\vec{v}_1\|.\|\vec{v}_2\|.\left|sin(\widehat{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}})\right|$.

Le module de $\vec{p}$ correspond à l'aire du parallélogramme construit sur les deux vecteurs $\overrightarrow{v_1}$ et $\overrightarrow{v_2}$



Propriétés

- Le produit vectoriel est anticommutatif : $\overrightarrow{v_1}\wedge\overrightarrow{v_2} = -\overrightarrow{v_2}\wedge\overrightarrow{v_1}$
- Le produit vectoriel est distributif par rapport à l'addition :
  $\overrightarrow{v_1}\wedge(\overrightarrow{v_2} + \overrightarrow{v_3}) = (\overrightarrow{v_1}\wedge\overrightarrow{v_2}) + (\overrightarrow{v_1}\wedge\overrightarrow{v_3})$
- Si les deux vecteurs sont colinéaires ou nuls $\overrightarrow{v_1}\wedge\overrightarrow{v_2} = \vec{0}$.

Soient $\overrightarrow{v_1} = x_1\,\vec{\imath} + y_1\vec{\jmath} + z_1\vec{k}$ et $\overrightarrow{v_2} = x_2\,\vec{\imath} + y_2\vec{\jmath} + z_2\vec{k}$ dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.

$$\overrightarrow{v_1}\wedge\overrightarrow{v_2} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = (y_1z_2 - z_1y_2)\vec{\imath} - (x_1z_2 - z_1x_2)\vec{\jmath} + (x_1y_2 - y_1x_2)\vec{k}$$

I-7-2-6. Produit mixte

La valeur obtenue, des produits mixte de trois vecteurs $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}\ et\ \overrightarrow{v_3}$ est égal au volume du parallélépipède formé par les trois vecteurs :

$$m= |\vec{v}_1.(\vec{v}_2\wedge\vec{v}_3)| = |\vec{v}_3.(\vec{v}_1\wedge\vec{v}_2)| = |\vec{v}_2.(\vec{v}_3\wedge\vec{v}_1)|.$$

Si les trois vecteurs sont coplanaires, alors m=0.

Soient $\overrightarrow{v_1} = x_1\,\vec{\imath} + y_1\vec{\jmath} + z_1\vec{k}$ et $\overrightarrow{v_2} = x_2\,\vec{\imath} + y_2\vec{\jmath} + z_2\vec{k}$ $\overrightarrow{v_3} = x_3\,\vec{\imath} + y_3\vec{\jmath} + z_3\vec{k}$ dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.

$$\vec{v}_1.(\vec{v}_2\wedge\vec{v}_3) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = x_1\,(y_2z_3 - y_3z_2) - y_1(x_2\,z_3 - x_3\,z_2) + z_1(x_2\,y_3 - x_3\,y_2).$$

I-8. Analyse vectorielle

I-8-1. Opérateur « nabla »

On définit une grandeur vectorielle appelée « opérateur nabla » $\vec{\nabla}$ en coordonnées cartésiennes par :

$$\vec{\nabla}= \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\vec{\imath} + \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)\vec{\jmath} + \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)\vec{k} \ \ , \vec{\nabla}= (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial y})$$

$\vec{\nabla}$ peut agir sur des champs de vecteurs et sur des champs de scalaire

I-8-2. Opérateur « gradient »

Soit f(x, y, z) une fonction scalaire. On appelle gradient de f noté $\vec{\nabla}f$ ou $\overrightarrow{grad}\, f$ le champ de vecteur suivants :

$$\vec{\nabla}f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\vec{\imath} + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\vec{\jmath} + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)\vec{k}$$

I-8-3. Opérateur « divergence »

Soit $\vec{A}(A_x, A_y, A_z)$ un champ de vecteurs. On appelle div$\vec{A}$ le produit scalaire de l'opérateur $\vec{\nabla}$ par le champs de vecteur $\vec{A}$

div $\vec{A}$=$\vec{\nabla}.\vec{A} = \left(\frac{\partial A_x}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial A_y}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial A_z}{\partial z}\right)$

Remarque :

Le gradient (respectivement la divergence) peut être considéré comme un opérateur qui transforme un champs de scalaires (respectivement de vecteurs) en un champs de vecteurs (respectivement un champs de scalaires)

I-8-4. Opérateur « rotationnel »

Le rotationnel d'un champ de vecteur $\vec{A}$ est défini comme le produit vectoriel entre $\vec{\nabla}\ et\ \vec{A}$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{A} = \overrightarrow{rot}\,\vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial}{\partial y}A_z - \frac{\partial}{\partial z}A_y\right)\vec{\imath} - \left(\frac{\partial}{\partial x}A_z - \frac{\partial}{\partial z}A_x\right)\vec{\jmath} + \left(\frac{\partial}{\partial x}A_y - \frac{\partial}{\partial y}A_x\right)\vec{k}$$

I-8-5. Opérateur « Laplacien »

Le produit scalaire $\vec{\nabla}.\vec{\nabla}$ donne un opérateur du second ordre appelé Laplacien. Celui-ci agit sur un champs de vecteur ou sur un champs de scalaire.

$$\vec{\nabla}\,.\,\vec{\nabla} = \Delta = \vec{\nabla}^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

$\Delta\vec{A} = \frac{\partial^2\vec{A}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\vec{A}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\vec{A}}{\partial z^2}$ = champ de vecteurs

$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$ = champ de scalaire

Propriétés

- $\overrightarrow{grad}\,(f+g) = \overrightarrow{grad}\,f + \overrightarrow{grad}\,g$
- $\overrightarrow{grad}\,(f.g) = f\,\overrightarrow{grad}\,g + g\,\overrightarrow{grad}\,f$
- $div\left(\overrightarrow{grad}\ f\right) = \Delta f$
- $div\,(\overrightarrow{r\,ot}\,\vec{A}) = 0$
- $div\,(\Delta\vec{A}) = \Delta(div\,\vec{A})$
- $div\,(f\,\vec{A}) = \vec{A}\ \overrightarrow{grad}\,f + f\ div\,\vec{A}$
- $\overrightarrow{r\,ot}\,\left(\overrightarrow{grad}\,f\right) = 0$

Chapitre II

Cinématique du point

II- 1. Introduction

L'étude de la cinématique consiste à décrire la manière dont un corps se déplace dans l'espace en fonction du temps sans s'attacher aux causes qui produisent ce mouvement.

II-1-1. Système de référence

Pour exprimer les notions de repos et de mouvement par rapport à un référentiel, considérons un repère orthonormé $\mathcal{R}\ (x, y, z)$ dans lequel est repérée la position M(x, y, z) d'un cops. Le corps est au repos par rapport à ce repère si ses coordonnées sont constantes au cours du temps. Cependant, si au moins l'une d'elles varie, le corps est en mouvement par rapport à R.

1- Notion du point matériel

Un point matériel est défini comme étant un objet sans dimension spatiales. En réalité on étudie le mouvement du centre de masse d'un corps, point sur lequel toute la masse est concentré en son centre de gravité.

2- Trajectoire

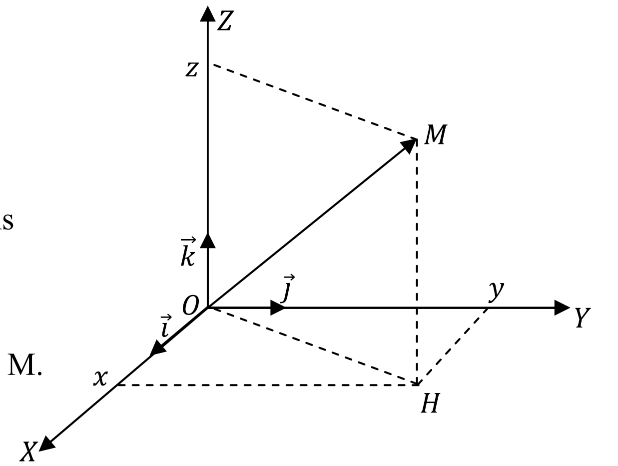
On appelle trajectoire d'un mobile l'ensemble des positions successives qu'il occupe au cours du temps.

II- 2. Repérage d'un point : système de coordonnées.

II-2-1. Coordonnées cartésiennes

Soit $\mathcal{R}(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ un repère orthonormé direct d'origine O et de base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.

Dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, le vecteur $\overrightarrow{OM}$ se décompose d'une manière unique sous la forme :

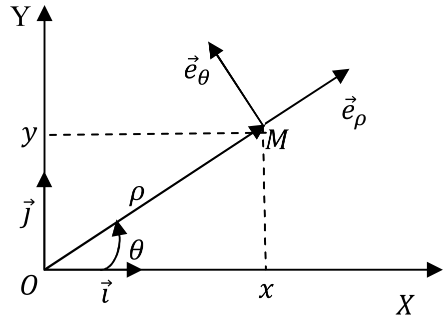


$$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

où (x, y, z) sont les composantes du vecteur $\overrightarrow{OM}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

x = abscisse de M ; y = ordonnée de M ; z = côte de M.

II-2-2. Coordonnées polaires :



Soient $\rho = \|\overrightarrow{OM}\|$, $\theta = (\widehat{\overrightarrow{OX}, \overrightarrow{OM}})$

Un point M dans le plan (OXY) peut être repéré par les données de (ρ, θ), appelées coordonnées polaires.

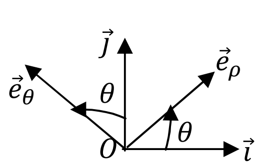
Pour recouvrir tout le plan : $0 \leq \rho < +\infty$; $0 \leq \theta < 2\pi$.

- **Correspondance avec les coordonnées cartésiennes**

$$\begin{pmatrix}\rho\\ \theta\end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} : \begin{cases} x = \rho\, cos\theta \\ y = \rho\, sin\theta \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix}\rho\\ \theta\end{pmatrix} : \begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ tg\theta = \frac{y}{x} \end{cases}$$

Base locale associée aux coordonnées polaires : $(\overrightarrow{e_\rho}, \overrightarrow{e_\theta})$



$$\overrightarrow{e_\rho} = \cos\theta\, \vec{i} + sin\theta\vec{j}$$

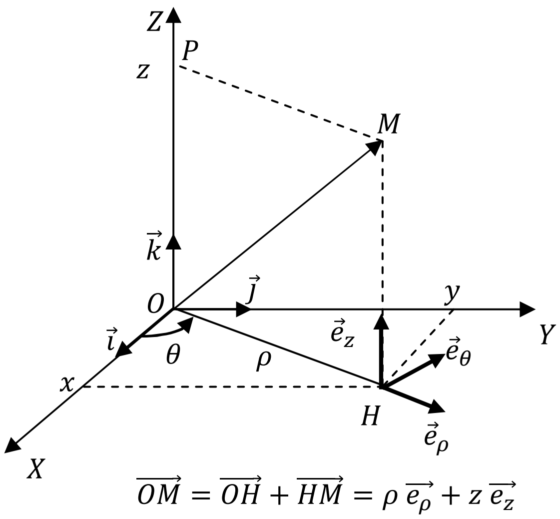
$$\overrightarrow{e_\theta} = -\sin\theta\, \vec{i} + cos\theta\vec{j}$$

$$\rightarrow \qquad \frac{d\overrightarrow{e_\rho}}{d\theta} = \overrightarrow{e_\theta}\ et\ \frac{d\overrightarrow{e_\theta}}{d\theta} = -\overrightarrow{e_\rho}$$

Dans la base $(\overrightarrow{e_\rho}, \overrightarrow{e_\theta})$:

- Le vecteur position $\overrightarrow{OM}$ s'écrit : $\overrightarrow{OM} = \rho\, \overrightarrow{e_\rho}$

II- 2 -3. Coordonnées cylindriques



Soit *H* la projection de *M* sur le plan *(OXY)*.

Le point *M* est repéré par :

- ρ la distance *PM* ou encore *OH*;

$\rho = \|\overrightarrow{OH}\| = \|\overrightarrow{PM}\|$;

- $\theta = (\widehat{\overrightarrow{OX}, \overrightarrow{OH}})$;

- z tel que $z = \overline{OP}$.

(ρ, θ, z) sont les coordonnées cylindriques du point M.

ρ est appelé rayon polaire; θ est l'angle polaire et z la cote.

Pour recouvrir tout l'espace :

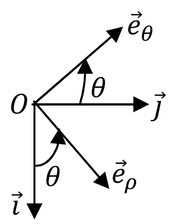
$0 \leq \rho < +\infty$; $0 \leq \theta < 2\pi$; $-\infty < z < +\infty$.

Base locale associée aux coordonnées cylindriques : $(\overrightarrow{e_\rho}, \overrightarrow{e_\theta}, \overrightarrow{e_z})$

$\overrightarrow{e_\rho} = \cos\theta\,\vec{\imath} + sin\theta\vec{\jmath}$

$\overrightarrow{e_\theta} = -\sin\theta\,\vec{\imath} + cos\theta\vec{\jmath}$

$\overrightarrow{e_z} = \vec{k}$



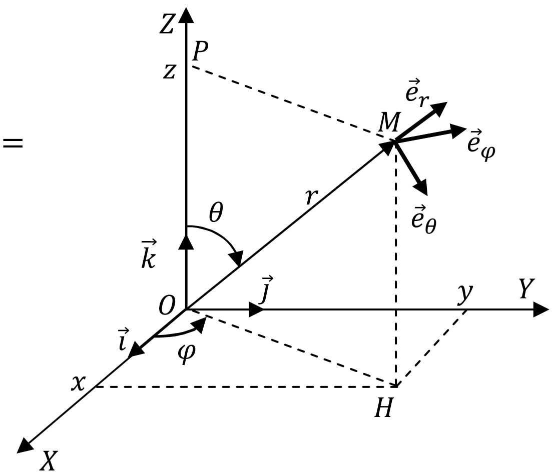
$(\overrightarrow{e_\rho}, \overrightarrow{e_\theta}, \overrightarrow{e_z})$ est la base locale associée aux coordonnées cylindriques, c'est une base orthonormée directe.

Dans la base $(\overrightarrow{e_\rho}, \overrightarrow{e_\theta}, \overrightarrow{e_z})$, le vecteur position $\overrightarrow{OM}$ s'écrit : $\overrightarrow{OM} = \rho\,\overrightarrow{e_\rho} + z\,\overrightarrow{e_z}$

- **Correspondance avec les coordonnées cartésiennes**

$$\begin{pmatrix}\rho\\ \theta\\ z\end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix} : \begin{cases} x = \rho\,cos\theta \\ y = \rho\,sin\theta \\ z = z \end{cases} \qquad \begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix}\rho\\ \theta\\ z\end{pmatrix} : \begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ tg\theta = \frac{y}{x} \\ z = z \end{cases}$$

II-2-4. Coordonnées sphériques



Le point M est repéré par :

- r : la distance de l'origine O au point M ($r = \|\overrightarrow{OM}\|$).

- $\theta = (\widehat{\overrightarrow{OZ}, \overrightarrow{OM}})$;

- $\varphi = (\widehat{\overrightarrow{OX}, \overrightarrow{OH}})$;

$0 \leq r < +\infty$; $0 \leq \theta \leq \pi$; $0 \leq \varphi < 2\pi$

(r, θ, φ) sont appelées coordonnées sphériques.

$r =$ rayon, $\theta =$ latitude, $\varphi =$ longitude

Dans la base $(\overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta}, \overrightarrow{e_\varphi})$, le vecteur position $\overrightarrow{OM}$ s'écrit : $\overrightarrow{OM} = r\,\overrightarrow{e_r}$

- **Correspondance avec les coordonnées cartésiennes**

$$\begin{pmatrix} r \\ \theta \\ \varphi \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : \begin{cases} x = OH\,cos\varphi = r\,sin\theta\,cos\varphi \\ y = OH\,sin\varphi = r\,sin\theta\,sin\varphi \\ z = r\,cos\theta \end{cases}$$

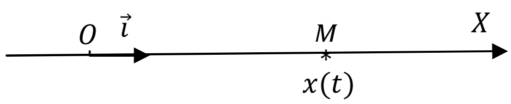
et

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} r \\ \theta \\ \varphi \end{pmatrix} : \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ cos\theta = \frac{z}{r} = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \\ tg\varphi = \frac{y}{x} \end{cases}$$

II-3. Mouvement rectiligne

Un mouvement est dit rectiligne si la trajectoire suivie par le mobile est une droite. La position M du mobile est repérée par le vecteur position :

$$\overrightarrow{OM} = x(t)\vec{\imath}$$



II-3-1. Position

L'abscisse $x(t)$est la position du point M à l'instant t. Si $x(t)$ est positif donc le déplacement est dans le sens de $\vec{\imath}$. Dans le cas contraire $x(t)$ est négatif.

La courbe $x(t)$ qui représente les positions occupées par M à l'instant t est appelée diagramme des espaces.

II-3-2. Vitesse moyenne

Soit deux positions du mobile x_1 et x_2 à deux instants t_1 et t_2 ($t_1 < t_2$). La vitesse moyenne du mobile entre t_1 et t_2 est donnée par :

$$v_{moy} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

II-3-3. Vitesse instantanée

On définit la vitesse instantanée à l'instant t :

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} v_{moy} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}.$$

La position du mobile à chaque instant est donnée par le calcul de l'intégrale :

$$\int_{x_0}^{x} dx = \int_{t_0}^{t} v\, dt \quad \Rightarrow \quad x = x_0 + \int_{t_0}^{t} v\, dt$$

x_0 est la position du mobile à l'instant t_0

II-3-4. Accélération

La vitesse pouvant varier avec le temps, on caractérise ce changement en introduisant la notion de l'accélération. Cette variation peut concerner la direction de la vitesse, son module ou les deux.

On définit l'accélération moyenne par :

$$a_{moy} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}$$

L'accélération instantanée d'un mobile est donnée par :

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} a_{moy} \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2 x}{dt^2}.$$

La vitesse d'un mobile à chaque instant, à partir de son accélération est donnée par :

$$\int_{v_0}^{v} dv = \int_{t_0}^{t} a\, dt \qquad \Rightarrow \qquad v = v_0 + \int_{t_0}^{t} a\, dt$$

Ceci implique la connaissance de la vitesse du mobile v_0 à l'instant initiale t_0

II-3-5. Le mouvement rectiligne uniforme (MRU) et le mouvement rectiligne uniformément varié (MRUA)

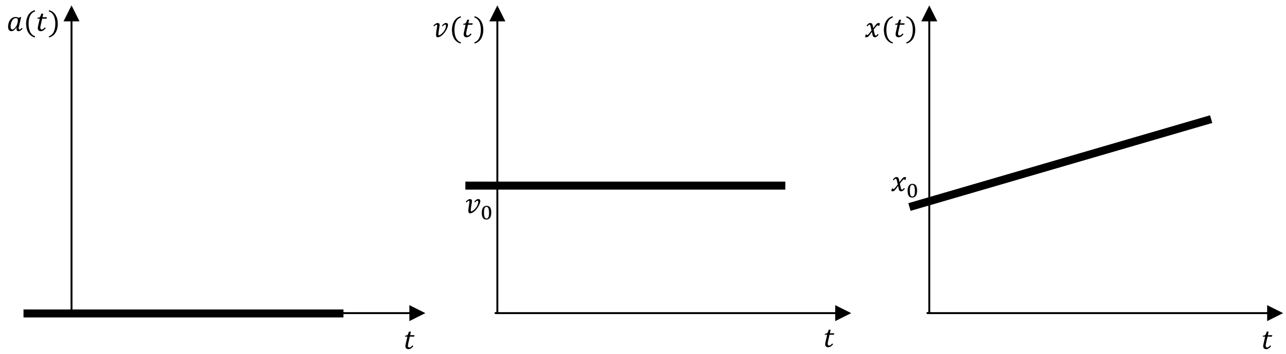
a) Le mouvement rectiligne uniforme (MRU)

Le MRU est un mouvement rectiligne à vitesse constante : $v(t) = v_0$. C'est un mouvement sans accélération en vertu de la relation :

$$a = \frac{dv_0}{dt} = 0$$

$$\frac{dx}{dt} = v_0 \qquad \Rightarrow \qquad x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^{t} v_0 dt$$

D'où $$x(t) = x_0 + v_0(t - t_0)$$



b) Le mouvement rectiligne uniformément varié

Le mouvement rectiligne uniformément varié est caractérisé par une accélération constante : $a = a_0$

Si la vitesse croit, le mouvement est uniformément accéléré ;

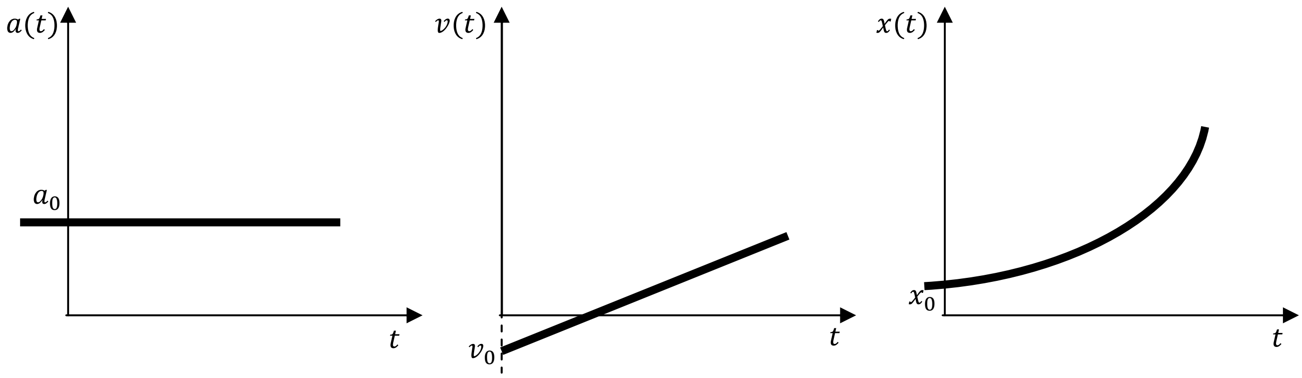
Si la vitesse décroit, le mouvement est uniformément retardé.

$$\frac{dv}{dt} = a_0 \Rightarrow \ v(t) = v(t_0) + \int_{t_0}^{t} a_0 \, dt \Rightarrow \ v(t) = v_0 + a_0(t - t_0)$$

Où $\ v_0 = v(t_0)$

$$\frac{dx(t)}{dt} = v_0 + a_0(t - t_0) \Rightarrow x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} [v_0 + a(t - t_0)] \, dt$$

$$\Rightarrow \ x(t) = x_0 + v_0(t - t_0) + \frac{1}{2} a_0 (t - t_0)^2$$



La variation de la vitesse et du déplacement pour le mouvement rectiligne uniformément accéléré :

$$v - v_0 = a_0(t - t_0) \Rightarrow t - t_0 = \frac{v - v_0}{a_0}$$

$$\Rightarrow x - x_0 = v_0 \left(\frac{v - v_0}{a_0}\right) + \frac{1}{2} a_0 \left(\frac{v - v_0}{a_0}\right)^2$$

$$= \frac{1}{2a_0} (v^2 - v_0^2)$$

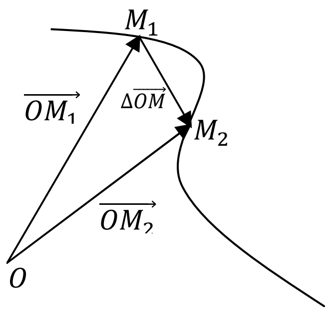
Donc $\qquad v^2 = v_0^2 + 2a_0(x - x_0)$

II-4. Mouvement curviligne

Un mouvement curviligne est un mouvement dont la trajectoire est une courbe quelconque. Pour décrire le mouvement d'un mobile, il faut choisir une origine O. Sa position est repérée à chaque instant par le vecteur position : $\vec{r}(t) = x(t)\vec{\imath} + y(t)\vec{\jmath} + z(t)\vec{k}$

II-4-1. Vecteur déplacement

Soit à l'instant t_1 un mobile M qui se trouve en M_1 et à l'instant t_2 il se trouve en M_2. on définit alors le vecteur déplacement par :



$$\overrightarrow{M_1\,M_2} = \Delta\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{\Delta r} = \overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1}$$

II-4-2. Vecteur vitesse

a)Vecteur vitesse moyenne

On définit le vecteur vitesse moyenne entre les instants t_1 et t_2 :

$$\overrightarrow{v_{moy}} = \frac{\overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1}}{t_2 - t_1} = \frac{\overrightarrow{M_1M_2}}{\Delta t} = \frac{\Delta\overrightarrow{OM}}{\Delta t}$$

b) Vecteur vitesse instantanée

Le vecteur vitesse instantanée est définit comme étant la dérivée du vecteur position par rapport au temps :

$$\overrightarrow{v(t)} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{OM_1} - \overrightarrow{OM_2}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\overrightarrow{OM}}{\Delta t} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}, \qquad \vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}$$

Remarque :

Le vecteur vitesse instantanée $\vec{v}$ est porté par la tangente à la trajectoire au point *M* ; il est toujours orienté dans le sens du mouvement.

II-4-3. Vecteur accélération

a) Vecteur accélération moyenne

Entre les instants t_1 et t_2 le vecteur accélération moyenne est défini par :

$$\vec{a}_{moy} = \frac{\vec{v}(t_2) - \vec{v}(t_1)}{t_2 - t_1}$$

b) Vecteur accélération instantanée

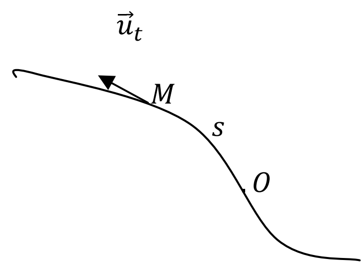
Le vecteur accélération instantanée est définit comme étant la dérivée du vecteur vitesse instantanée par rapport au temps :

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{v}(t + \Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt}, \qquad \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

Remarques **:**

- Le vecteur accélération est toujours dirigé vers la partie concave de la trajectoire.
- Le vecteur accélération décrit les variations de la vitesse en grandeur et en direction.

II- 5. Abscisse, vitesse et accélération curviligne :



Soir O un point fixe de la trajectoire orientée. L'abscisse curviligne à l'instant t, notée $s(t)$, est la longueur de la trajectoire de O à M. $s(t) = \widehat{OM}$.

On définit respectivement la vitesse et l'accélération curviligne par les relations :

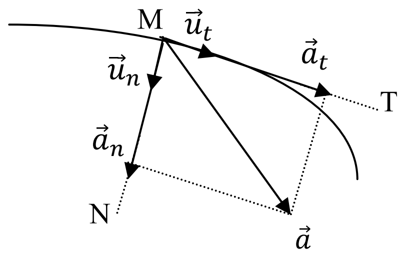
$$v(t) = \frac{ds(t)}{dt}$$

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt}$$

Composantes intrinsèques de l'accélération :

Le vecteur accélération est dirigé vers la concavité de la trajectoire. Il est décomposé en une composante tangentielle $\overrightarrow{a_t}$ parallèle à la tangente MT à la trajectoire est appelée accélération tangentielle, et une composante normale $\overrightarrow{a_n}$ parallèle à la normale MN est appelé accélération normale.

$$\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n$$



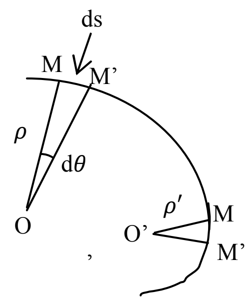
Expression des composantes tangentielle et normale de l'accélération

Comme le vecteur vitesse est tangent il s'écrit :

$$\vec{v} = v\vec{u}_t = \frac{ds}{dt}\vec{u}_t$$

$\vec{u}_t$ est un vecteur unitaire tangent à la trajectoire en M et dirigé dans le sens positif.

La dérivée de $\vec{v}$ par rapport au temps :



$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv}{dt}\overrightarrow{u_t} + v\frac{d\overrightarrow{u_t}}{dt}$$

Avec :

$$\vec{a}_t = \frac{dv}{dt}\overrightarrow{u_t}$$

$$\vec{a}_n = v\frac{d\overrightarrow{u_t}}{dt}$$

Lorsque Δt est très petit, les deux normales en M et M'à la trajectoire convergent au point O et on définit le rayon de courbure en M de la trajectoire par ρ =OM=OM' lorsque M' tend vers M on peut aussi assimiler la trajectoire localement à un cercle de rayon ρ

ρ est appelé rayon de courbure de la trajectoire au point considéré.

Notons que :

$$\frac{d\overrightarrow{u_t}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{u_t}}{d\theta}.\frac{d\theta}{dt}$$

$$= \frac{d\overrightarrow{u_t}}{d\theta}.\frac{d\theta}{ds}.\frac{ds}{dt}$$

Sachant que : $\frac{ds}{dt} = v$ et $ds = \rho d\theta$

$\frac{d\overrightarrow{u_t}}{d\theta} = \overrightarrow{u_n}$ est un vecteur unitaire perpendiculaire à $\overrightarrow{u_t}$

Il en résulte l'expression suivante de l'accélération :

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt}\overrightarrow{u_t} + \frac{v^2}{\rho}\overrightarrow{u_n}$$

$$= a_t\overrightarrow{u_t} + a_n\overrightarrow{u_n}$$

Comme les deux vecteurs $\overrightarrow{u_t}\ et\ \overrightarrow{u_n}$ sont orthogonaux le module de l'accélération est :

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}$$

- $\overrightarrow{a_t}$ vecteur tangent à la trajectoire appelé accélération tangentielle, elle indique la variation dont varie le module de la vitesse au cours du temps.
- $\overrightarrow{a_n}$ vecteur normale à la trajectoire appelé accélération normale, elle indique la variation de la direction du vecteur vitesse au cours du temps

II-6. Etude de mouvement dans différents systèmes de coordonnées:

- **Coordonnées cartésiennes :** $x(t), y(t), z(t)$

Vecteur position : $\overrightarrow{OM} = x(t)\vec{\imath} + y(t)\vec{\jmath} + z(t)\vec{k}$

Vecteur vitesse : $\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{dx(t)}{dt}\vec{\imath} + \frac{dy(t)}{dt}\vec{\jmath} + \frac{dz(t)}{dt}\vec{k}$

Vecteur accélération : $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2x(t)}{dt^2}\vec{\imath} + \frac{d^2y(t)}{dt^2}\vec{\jmath} + \frac{d^2z(t)}{dt^2}\vec{k}$

- **Coordonnées polaires** : $\rho(t), \theta(t)$

Vecteur position : $\overrightarrow{OM} = \rho\,\overrightarrow{e_\rho}$

Vecteur vitesse : $\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d\rho}{dt}\,\overrightarrow{e_\rho} + \rho\,\frac{d\overrightarrow{e_\rho}}{dt}$

$$\frac{d\overrightarrow{e_\rho}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{e_\rho}}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \frac{d\theta}{dt}\overrightarrow{e_\theta}\,, \qquad \frac{d\overrightarrow{e_\theta}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{e_\theta}}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = -\frac{d\theta}{dt}\overrightarrow{e_\rho}$$

D'où :

$$\vec{v} = \frac{d\rho}{dt}\,\overrightarrow{e_\rho} + \rho\,\frac{d\theta}{dt}\overrightarrow{e_\theta}$$

vecteur accélération : $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \left[\frac{d^2\rho}{dt^2} - \rho\,\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right]\overrightarrow{e_\rho} + \left[2\frac{d\rho}{dt}\frac{d\theta}{dt}\overrightarrow{e_\theta} + \rho\,\frac{d^2\theta}{dt^2}\right]\overrightarrow{e_\theta}$

- **Coordonnées cylindriques** : $\rho(t), \theta(t), z(t)$

Vecteur position : $\overrightarrow{OM} = \rho\,\overrightarrow{e_\rho} + z\overrightarrow{e_z}$

Sachant que : $\frac{d\overrightarrow{e_\rho}}{dt} = \frac{d\theta}{dt}\overrightarrow{e_\theta}\,,\ \frac{d\overrightarrow{e_\theta}}{dt} = -\frac{d\theta}{dt}\overrightarrow{e_\rho}$

Vecteur vitesse : $\vec{v} = \frac{d\rho}{dt}\,\overrightarrow{e_\rho} + \rho\,\frac{d\theta}{dt}\overrightarrow{e_\theta} + \frac{dz}{dt}\overrightarrow{e_z}$ ($\overrightarrow{e_z}$ est un vecteur constant)

Vecteur accélération : $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$

$$= \left[\frac{d^2\rho}{dt^2} - \rho\,\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right]\overrightarrow{e_\rho} + \left[2\frac{d\rho}{dt}\frac{d\theta}{dt}\overrightarrow{e_\theta} + \rho\,\frac{d^2\theta}{dt^2}\right]\overrightarrow{e_\theta} + \frac{d^2z}{dt^2}\overrightarrow{e_z}$$

- **Coordonnées sphérique** : $r(t), \theta(t), \varphi(t)$

On a :

$$\overrightarrow{e_r} = sin\theta cos\varphi\vec{\imath} + sin\theta sin\varphi\vec{\jmath} + cos\theta\vec{k}$$
$$\overrightarrow{e_\theta} = cos\theta cos\varphi\vec{\imath} + cos\theta sin\varphi\vec{\jmath} - sin\theta\vec{k}$$
$$\overrightarrow{e_\varphi} = -sin\,\varphi\vec{\imath} + cos\varphi\vec{\jmath}$$

et

$$\frac{d\overrightarrow{e_r}}{dt} = \frac{d\theta}{dt}\overrightarrow{e_\theta} + \frac{d\varphi}{dt}sin\theta\overrightarrow{e_\varphi}$$
$$\frac{d\overrightarrow{e_\theta}}{dt} = -\frac{d\theta}{dt}\overrightarrow{e_r} + \frac{d\varphi}{dt}cos\theta\overrightarrow{e_\varphi}$$

$$\frac{d\overrightarrow{e_\varphi}}{dt} = \frac{d\varphi}{dt}(-sin\theta\overrightarrow{e_r} - cos\theta\overrightarrow{e_\theta})$$

Vecteur position : $\overrightarrow{OM} = r\overrightarrow{e_r}$

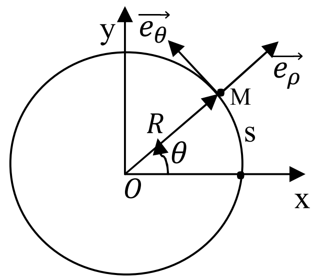
Vecteur vitesse : $\vec{v} = \frac{dr}{dt}\overrightarrow{e_r} + r\frac{d\theta}{dt}\overrightarrow{e_\theta} + r\frac{d\varphi}{dt}sin\theta\overrightarrow{e_\varphi}$

Vecteur accélération : $\vec{a} = \left(\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 - r\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 sin^2\theta\right)\overrightarrow{e_r} + \left(2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} + r\frac{d^2\theta}{dt^2} - r\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 sin\theta cos\theta\right)\overrightarrow{e_\theta} + \left(2\frac{dr}{dt}\frac{d\varphi}{dt}sin\theta + r\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 sin\theta + 2r\frac{d\theta}{dt}\frac{d\varphi}{dt}cos\theta\right)\overrightarrow{e_\varphi}$

II-7. Mouvement circulaire :

La trajectoire étant un cercle, en coordonnées polaire le vecteur position s'écrit :

$\overrightarrow{OM} = R\,\overrightarrow{e_\rho}$



Le vecteur vitesse s'écrit : $\vec{v} = R\frac{d\theta}{dt}\vec{e}_\theta$

La vitesse angulaire ω: $\omega = \frac{d\theta}{dt}$, unité rad/s

D'où $\vec{v} = R\omega\vec{e}_\theta = v\vec{e}_\theta = \frac{ds}{dt}\vec{e}_\theta$

D'où $s = R\theta + cste$

Le Vecteur accélération :

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = R\frac{d^2\theta}{dt^2}\vec{e}_\theta - R\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\overrightarrow{e_\rho}$$

$$= R\frac{d\omega}{dt}\vec{e}_\theta - R\omega^2\overrightarrow{e_\rho}$$

$$\vec{a} = R\alpha\vec{e}_\theta - R\omega^2\overrightarrow{e_\rho}$$

D'où :

$$\vec{a} = R\alpha\vec{u}_t + R\omega^2\overrightarrow{u_n}$$

$\alpha = \frac{d\omega}{dt}$ est l'accélération angulaire, unité rad/s^2

a) Mouvement circulaire uniforme :

On dit que le mouvement circulaire est uniforme lorsque la vitesse angulaire ω (et donc la vitesse v) est constante

L'accélération tangentielle : $\overrightarrow{a_t} = R\alpha\overrightarrow{u_t} = \vec{0}$,

L'accélération normale : $\overrightarrow{a_n} = R\omega^2\overrightarrow{u_n}$ $(a_n = cste)$

b) Mouvement circulaire uniformément varié :

On dit que le mouvement est circulaire uniformément varié lorsque l'accélération angulaire est constante. Si la vitesse angulaire croit, le mouvement est uniformément accéléré et si elle décroit le mouvement est uniformément retardé.

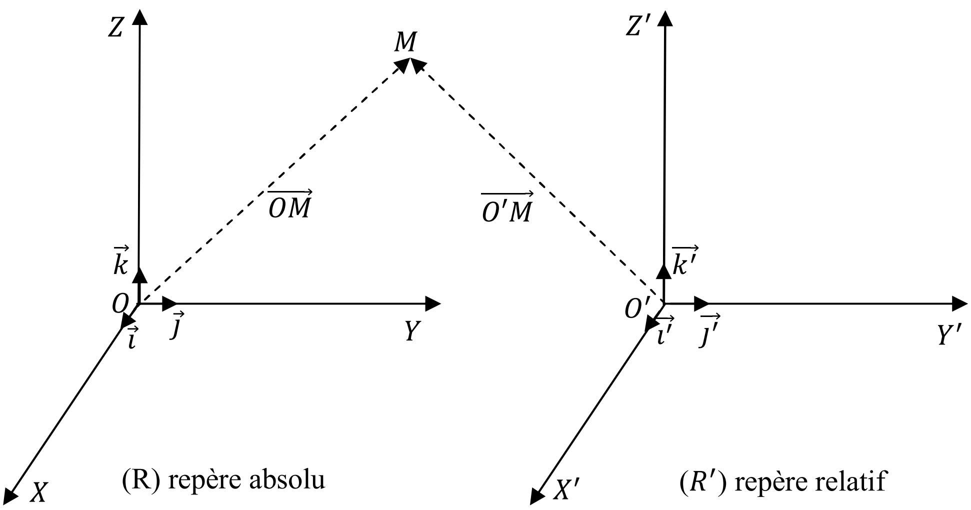
L'accélération tangentielle : $\overrightarrow{a_t} = R\alpha\overrightarrow{u_t}$

L'accélération normale : $\overrightarrow{a_n} = R\omega^2\overrightarrow{u_n} = \frac{v^2}{R}\overrightarrow{u_n}$

II-8. Mouvement relatif et changement de repère :

On peut déterminer les grandeurs cinématiques (la vitesse et l'accélération) d'un point matériel dans un référentiel $R(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ lorsque ces grandeurs sont connues dans un autre référentiel $R'(O', \vec{\imath'}, \vec{\jmath'}, \vec{k'})$ et que le mouvement de celui-ci est connu par rapport à (R).

- $R(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ supposé fixe, qui est appelé repère absolu
- $R'(O', \vec{\imath'}, \vec{\jmath'}, \vec{k'})$ en mouvement quelconque par rapport à R qui est appelé repère relatif.



(R) repère absolu

(R') repère relatif

Le mouvement de M par rapport au repère absolu $R(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ est caractérisé par les grandeurs :

- Le vecteur position : $\overrightarrow{OM} = x\,\vec{\imath} + y\,\vec{\jmath} + z\,\vec{k}$
- La vitesse absolue : $\overrightarrow{v_a} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{dx}{dt}\,\vec{\imath} + \frac{dy}{dt}\,\vec{\jmath} + \frac{dz}{dt}\,\vec{k}$
- L'accélération absolue : $\overrightarrow{a_a} = \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2}\,\vec{\imath} + \frac{d^2y}{dt^2}\,\vec{\jmath} + \frac{d^2z}{dt^2}\,\vec{k}$

Le mouvement de M par rapport au repère Relatif $R'(O', \overrightarrow{\imath'}, \overrightarrow{\jmath'}, \overrightarrow{k'})$ est caractérisé par les grandeurs :

- Le vecteur position : $\overrightarrow{O'M} = x'\,\overrightarrow{\imath'} + y'\,\overrightarrow{\jmath'} + z'\,\overrightarrow{k'}$
- La vitesse relative : $\overrightarrow{v_r} = \frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt} = \frac{dx'}{dt}\,\overrightarrow{\imath'} + \frac{dy'}{dt}\,\overrightarrow{\jmath'} + \frac{dz'}{dt}\,\overrightarrow{k'}$
- L'accélération relative : $\overrightarrow{a_r} = \frac{d^2\overrightarrow{O'M}}{dt^2} = \frac{d^2x'}{dt^2}\overrightarrow{\imath'} + \frac{d^2y'}{dt^2}\,\overrightarrow{\jmath'} + \frac{d^2z'}{dt^2}\,\overrightarrow{k'}$

Composition des vecteurs vitesses :

On a :

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M}$$

$$\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} + \frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt}$$

$$\overrightarrow{v_a} = \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} + \frac{d}{dt}(x'\,\overrightarrow{\imath'} + y'\,\overrightarrow{\jmath'} + z'\,\overrightarrow{k'})$$

Le repère *R'* est mobile, les vecteurs $(\overrightarrow{\imath'}, \overrightarrow{\jmath'}, \overrightarrow{k'})$ ne sont pas constants au cours du temps.

$$\overrightarrow{v_a} = \left[\frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} + \left(x'\frac{d\overrightarrow{\imath'}}{dt} + y'\frac{d\overrightarrow{\jmath'}}{dt} + z'\frac{d\overrightarrow{k'}}{dt}\right)\right] + \left[\frac{dx'}{dt}\,\overrightarrow{\imath'} + \frac{dy'}{dt}\,\overrightarrow{\jmath'} + \frac{dz'}{dt}\,\overrightarrow{k'}\right]$$

Avec $\overrightarrow{v_e} = \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} + \left(x'\frac{d\overrightarrow{\imath'}}{dt} + y'\frac{d\overrightarrow{\jmath'}}{dt} + z'\frac{d\overrightarrow{k'}}{dt}\right)$

$$\overrightarrow{v_a} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \overrightarrow{v_e} + \overrightarrow{v_r}$$

Le terme $\overrightarrow{v_e}$ est appelé vitesse d'entrainement de *R'* par rapport à *R*. Elle décrit le mouvement de *R'* par rapport à *R*.

Cas particuliers :

- Si *M* est fixe dans *R'* : $\overrightarrow{v_r} = \vec{0} \Longrightarrow \overrightarrow{v_a} = \overrightarrow{v_e}$
- Si *R'* est fixe par rapport à *R* : $\overrightarrow{v_e} = \vec{0} \Longrightarrow \overrightarrow{v_a} = \overrightarrow{v_r}$
- Si *R'* est en mouvement de translation par rapport à *R* : $\overrightarrow{v_e} = \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt}$

Composition des vecteurs accélérations

$$\overrightarrow{a_a} = \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2} = \frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2} + \frac{d}{dt}\left(x'\frac{d\vec{i'}}{dt} + y'\frac{d\vec{j'}}{dt} + z'\frac{d\vec{k'}}{dt}\right) + \frac{d}{dt}\left(\frac{dx'}{dt}\vec{i'} + \frac{dy'}{dt}\vec{j'} + \frac{dz'}{dt}\vec{k'}\right)$$

$$\overrightarrow{a_a} = \underbrace{\left(\frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2} + x'\frac{d^2\vec{i'}}{dt^2} + y'\frac{d^2\vec{j'}}{dt^2} + z'\frac{d^2\vec{k'}}{dt^2}\right)}_{\overrightarrow{a_e}} + \underbrace{2\left(\frac{dx'}{dt}\frac{d\vec{i'}}{dt} + \frac{dy'}{dt}\frac{d\vec{j'}}{dt} + \frac{dz'}{dt}\frac{d\vec{k'}}{dt}\right)}_{\overrightarrow{a_c}}$$

$$+ \underbrace{\left(\frac{d^2x'}{dt^2}\vec{i'} + \frac{d^2y'}{dt^2}\vec{j'} + \frac{d^2z'}{dt^2}\vec{k'}\right)}_{\overrightarrow{a_r}}$$

$$\overrightarrow{a_a} = \overrightarrow{a_e} + \overrightarrow{a_c} + \overrightarrow{a_r}$$

$\overrightarrow{a_e}$: Accélération d'entrainement.

$\overrightarrow{a_c}$: Accélération complémentaire ou accélération de coriolis.

$\overrightarrow{a_a}$: Accélération absolue.

$\overrightarrow{a_r}$: Accélération relative.

Cas particuliers :

- Si *M* est fixe dans *R'* : $\overrightarrow{a_r} = \overrightarrow{a_c} = \overrightarrow{v_r} = \vec{0} \Longrightarrow \overrightarrow{a_a} = \overrightarrow{a_e}$
- Si les axes de *R'* ne tournent pas par rapport à *R* (translation) :

  $\vec{\omega} = \vec{0} \Longrightarrow \overrightarrow{a_c} = \vec{0},\ \overrightarrow{a_e} = \frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2}$

  Si de plus *R'* est en translation rectiligne uniforme par rapport à *R* : $\overrightarrow{a_a} = \overrightarrow{a_r}$ donc les accélérations mesurées dans les deux repères sont les mêmes.

Chapitre III

Dynamique du point matériel

III-1. Généralités

La cinématique du point permet de décrire le mouvement d'un point matériel, sans s'intéresser aux causes qui provoquent le mouvement. La dynamique du point permet de relier le mouvement à ses causes. Les causes du mouvement sont modélisées en mécanique par des grandeurs vectorielles appelés forces.

III-2. Principe d'inertie ($1^{ère}$ loi de Newton)

III-2-1. Système isolé

On dit qu'un système est isolé si celui-ci ne subit aucune force extérieure. En réalité un tel système est très difficile à réaliser. On se contente donc de système pseudo isolé dont toutes les actions extérieures se compensent.

III-2-2. $1^{ère}$ loi de Newton

Si un objet n'est soumis à aucune force ou si la résultante de toutes les forces est nulle ; il est :

- Soit en mouvement rectiligne uniforme
- Soit au repos s'il était initialement.

III-2-3. Référentiel Galiléen

Un référentiel Galiléen est un référentiel par rapport auquel un point matériel qui n'est soumis à aucune force suit un mouvement rectiligne uniforme (éventuellement de vitesse constante ou nulle).

Il existe une infinité de référentiels Galiléen : ils sont en translation rectiligne uniforme les uns par rapport aux autres.

Exemples :

- Référentiel de Copernic (qui est presque fixe) c'est-à-dire $\overrightarrow{v_e} = \overrightarrow{cst}$
- Dans beaucoup de cas on peut considérer les laboratoires terrestres comme de bons repères d'inertie lorsque les phénomènes à étudier ne durent pas trop longtemps.

Caractéristique du référentiel Galiléen

- $\overrightarrow{a_c} = \vec{0}$ pas de rotation du référentiel relatif par rapport au repère fixe.
- $\overrightarrow{a_e} = \vec{0}$ référentiel mobile en translation uniforme par rapport au repère fixe
  $\Rightarrow$ Référentiel mobile Galiléen $\overrightarrow{a_r} = \overrightarrow{a_a}$

III-3. Quantité de mouvement :

Le vecteur quantité de mouvement d'un point matériel de masse m et se déplaçant à la vitesse $\vec{v}$ est définit par le vecteur $\vec{p}$ donné par :

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

Le principe d'inertie peut s'énoncer de la façon suivante :

- Une particule libre, se déplace avec une quantité de mouvement constante dans un repère Galiléen.
- La quantité de mouvement totale du système se conserve si le principe d'inertie est vérifié.

III-4. Notion de force : 2ème loi de Newton

La force appliquée à une particule est égale à la variation de sa quantité de mouvement :

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

Principe fondamental de la dynamique (PFD) :

Dans un référentiel Galiléen, la somme des forces extérieures appliquées à un système est égale à la dérivée du vecteur quantité de mouvement :

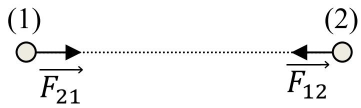
$$\vec{F}=\frac{d\vec{p}}{dt}=\frac{d}{dt}(m\vec{v})=m\frac{d\vec{v}}{dt}+m\frac{d\vec{v}}{dt}$$

Si m=cte (v$\ll c$) $\Rightarrow \vec{F}=m\vec{a}$

III-5. Principe de l'action et de la réaction : 3ème loi de Newton

Soient deux points matériels (1) et (2) interagissant entre eux, l'action exercée par (1) sur (2) $\overrightarrow{F_{12}}$ est égale et opposée à celle exercée par (2) sur (1) $\overrightarrow{F_{21}}$, soit $\overrightarrow{F_{12}}=-\overrightarrow{F_{21}}$ et $\|\overrightarrow{F_{12}}\|=\|\overrightarrow{F_{21}}\|$

Ces deux forces sont de même natures



III-5-1. Conservation de la quantité de mouvement pour un système isolé :

Soient $\vec{p}_1$ la quantité de mouvement d'un corps (1) et $\vec{p}_2$ la quantité de mouvement d'un corps (2).

$$\vec{F}_{12}=\frac{d\vec{p}_2}{dt}$$

$$\vec{F}_{21}=\frac{d\vec{p}_1}{dt}$$

Selon le principe de l'action et de la réaction,

$$\vec{F}_{21}=-\vec{F}_{12}$$

$$\frac{d\vec{p}_2}{dt}=-\frac{d\vec{p}_1}{dt}\rightarrow\frac{d(\vec{p}_1+\vec{p}_2)}{dt}=\vec{0}$$

$$\rightarrow\vec{p}_1+\vec{p}_2=\overrightarrow{cste}$$

La quantité de mouvement totale d'un système isolé est un vecteur constant qui se conserve dans le temps.

III-6. Les forces

III-6-1. Forces de gravitation universelle

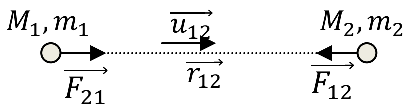
Entre deux points matériel M_1 et M_2 respectivement de masse m_1 et m_2 il existe une interaction appelée interaction gravitationnelle. Si $r_{12} = r_{21}$ est la distance entre les deux points matériels, alors le point matériel M_2 subit de la part du point matériel M_1 une force attractive :

$$\vec{F}_{1\to2} = -G\frac{m_1 m_2}{r^2}\vec{u}_{1\to2}$$

$\vec{u}_{1\to2}$: vecteur unitaire porté par la droite joignant $m_1$etm_2 et dirigé de m_1à m_2.

$$\vec{F}_{1\to2} = -\vec{F}_{2\to1}$$

Gest la constante de gravitation ; $G = 6.67\ 10^{-11} Nm^2kg^{-2}$



Un cas particulier très important est l'attraction d'une masse m d'un objet par la terre de masse M

$$\vec{F}_{M\to m} = -G\frac{mM}{r^2}\vec{u}_{1\to2}$$

- Au voisinage de la surface de la Terre $r = R$; où R est le rayon de la Terre donc

$$F_{M\to m} = G\frac{mM}{R^2} = mg.$$

Avec $M = 5.98\ 10^{24} kg$ et $R = 6.37\ 10^6 m$

$$g = G\frac{M}{R^2} = 9.81\ m/s^2$$

- Si le corps se trouve à une altitude h par rapport à la surface de la Terre :

$$F_{M\to m} = G\frac{mM}{(R+h)^2} = mg$$

D'où $g = g_0 \frac{R^2}{(R+h)^2}$ avec $g_0 = G\frac{M}{R^2}$; champs à la surface de la Terre.

III-6-2. Forces de contact

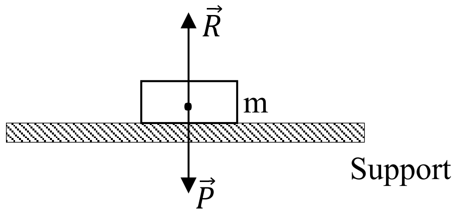
a) Réaction d'un support

Cas d'un objet immobile sur un support horizontal : le support exerce une force sur l'objet, il l'empêche de le traverser. $\vec{R}$ représente la résultante

de toutes les actions exercées sur la surface de contact.

L'objet étant en équilibre :

$\vec{P} + \vec{R} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{P} = -\vec{R}$



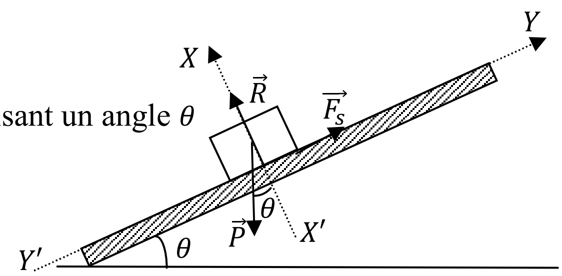
b) Frottement solide

Les forces de frottement sont des forces qui apparaissent soit lors du mouvement d'un objet soit cet objet est soumis à une force qui tend à vouloir le déplacer. Le frottement s'oppose au déplacement des objets en mouvement.

- ***Frottement statique***

Soit un bloc au repos sur un plan incliné faisant un angle θ avec l'horizontale.

Si le bloc est immobile → $\vec{R} + \vec{P} + \vec{F_s} = \vec{0}$



Par projection sur les deux axes OX et OY on obtient:

$$\begin{cases} R = P\cos\theta & \text{(OX)} \\ F_s = P\sin\theta & \text{(OY)} \end{cases}$$

D'où : $\frac{F_s}{R} = tg\theta$

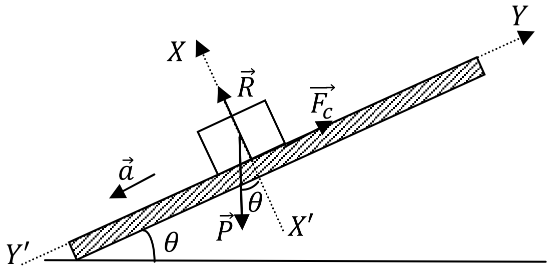
On augmente l'inclinaison jusqu'au moment ou le bloc commence à glisser ($\theta = \theta_{max}$).

$F_s = F_{s\,max} = \mu_s R \Rightarrow \quad tg\theta_{max} = \mu_s$

μ_s appelé coefficient de frottement statique, il dépend de la nature et de l'état des matériaux en contact.

- ***Frottement cinétique (dynamique)***

En faisant croitre θ au-delà de la valeur maximale le bloc se met à glisser avec un mouvement uniformément accéléré :



$\vec{R} + \vec{P} + \vec{F_c} = m\vec{a}$

De la même manière que précédemment, on obtient :

$$\mu_c = \frac{F_c}{R}$$

$\mu_c < \mu_s$ (il est plus facile de maintenir le mouvement d'un objet que de le démarrer).

c) Frottement visqueux

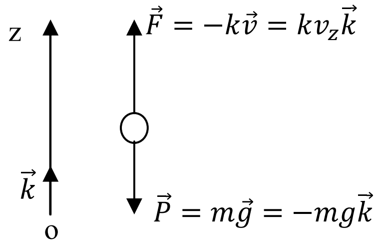
Le frottement visqueux est lié au mouvement de l'objet M dans un milieu fluide. Pour de faible vitesse du point M, $\vec{F} = -k\vec{v}$

$\vec{F}$: force de frottement

$\vec{v}$: vitesse de l'objet

k : constante positive

Exemple : chute d'un parachutiste



le PFD :

$\sum \vec{F} = m\vec{a}$

$m\vec{g} - k\vec{v} = m\vec{a}$

Avec $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \left(\frac{dv_z}{dt}\right)\vec{k}$

$-mg - kv_z = m\frac{dv_z}{dt} \;\Rightarrow\; \frac{dv_z}{dt} + \frac{k}{m}v_z = -g$ (Équation différentielle du 1er ordre)

d) Forces de tension

On considère un ressort fixé à une de ces extrémités et au bout duquel est accroché le point matériel M. Quand le ressort s'allonge, une force de rappel, proportionnelle à cet allongement et appelée tension, s'exerce sur la masse :

$\vec{F} = -k(l - l_0)\vec{u}$

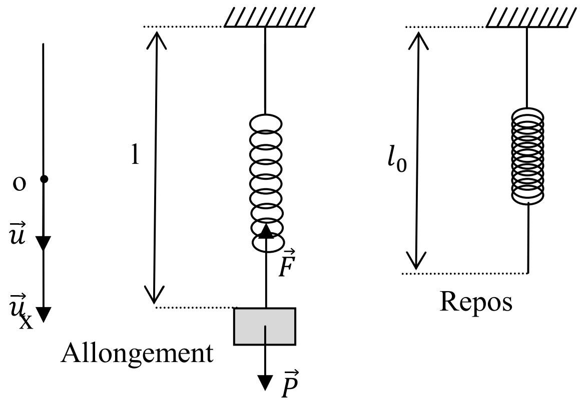
$\vec{F} = -kx\vec{u}$

k : constante de raideur du ressort

l : longueur du ressort à l'instant t

l_0 : longueur du ressort à vide

$\vec{u}$: vecteur unitaire

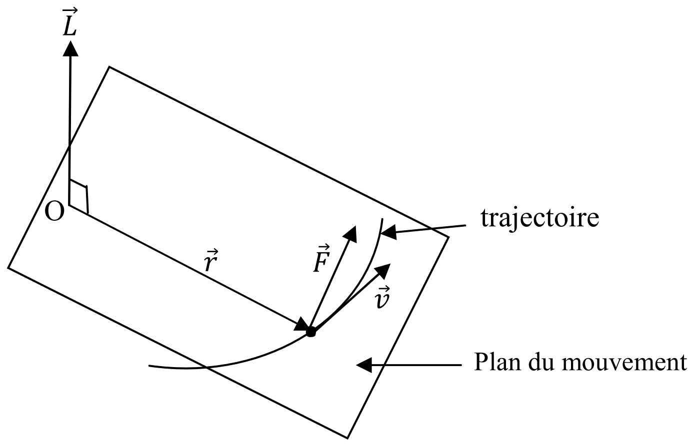


III-7. Moment cinétique d'une particule

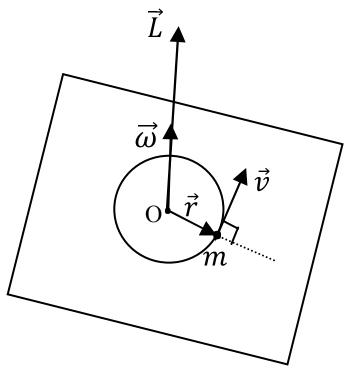
Le moment cinétique par rapport au point O d'une particule de masse m se déplaçant à la vitesse $\vec{v}$, de quantité de mouvement $\vec{p} = m\vec{v}$, est défini par le produit vectoriel

$\overrightarrow{L_O} = \vec{r} \wedge \vec{p} = m\,\vec{r} \wedge \vec{v}$

$\vec{L}$ change de grandeur et de direction quand la particule se déplace. Cependant, il garde la même direction quand la particule se déplace dans un plan et que le point O est dans le plan.



a) Cas d'un mouvement circulaire



Dans le cas d'un mouvement circulaire de centre O :

$v = r\omega \Rightarrow L = mrv = mr^2\omega$

D'où : $\vec{L} = mr^2\vec{\omega}$

b) Cas d'un mouvement curviligne

Si le mouvement est curviligne, on peut décomposer la vitesse suivant ses composantes radiales et transversales :

$$\vec{v} = \overrightarrow{v_r} + \overrightarrow{v_\theta}$$

$$\vec{L} = m\vec{r}\wedge(\overrightarrow{v_r} + \overrightarrow{v_\theta})$$

D'où :

$\vec{L} = m\vec{r}\wedge\overrightarrow{v_\theta}$ ($\vec{r}\wedge\overrightarrow{v_r} = 0$ car les deux vecteurs sont parallèles)

$\vec{L} = mr\overrightarrow{e_r}\wedge v_\theta\overrightarrow{e_\theta} = mrv_\theta(\overrightarrow{e_r}\wedge\overrightarrow{e_\theta})$ comme $v_\theta = r\,\omega$ alors :

$\vec{L} = mrv_\theta\overrightarrow{e_z} = mrv_\theta\vec{\omega}$ (l'axe de rotation est l'axe OZ)

Dans le cas général $\vec{r}$ n'est pas constant :

$$\vec{L} = \vec{r}\wedge\vec{p} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ p_x & p_y & p_z \end{vmatrix} = \left(yp_z - zp_y\right)\vec{i} + \left(zp_x - xp_z\right)\vec{j} + \left(xp_y - yp_x\right)\vec{k}$$

III-7-1. Moment d'une force

Soit un point M soumis à une force $\vec{F}$, on définit le moment de cette force $\overrightarrow{M_O}(\vec{F})$ par rapport au point O par :

$$\overrightarrow{M_O}\left(\vec{F}\right) = \overrightarrow{OM}\wedge\vec{F} = \vec{r}\wedge\vec{F}$$

III-7-2. Théorème du moment cinétique

$$\overrightarrow{L_O} = \vec{r}\wedge\vec{p}$$

$$\frac{d\overrightarrow{L_O}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt}\wedge\vec{p} + \vec{r}\frac{d\vec{p}}{dt}$$

$\frac{d\overrightarrow{L_O}}{dt} = \vec{v}\wedge m\vec{v} + \vec{r}\wedge\overrightarrow{\sum F}$ (car $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ et $\sum\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$)

$\frac{d\overrightarrow{L_O}}{dt} = \vec{r}\wedge\sum\vec{F}$ (car $\vec{v}\wedge m\vec{v} = \vec{0}$)

$$\frac{d\overrightarrow{L_O}}{dt} = \vec{r} \wedge \sum \vec{F} = \sum \overrightarrow{M_O}\,(\vec{F})$$

La dérivée par rapport au temps du moment cinétique d'une particule est égale à la somme des moments de toutes les forces qui lui sont appliquées.

III-7-3. Forces centrales

- Si le moment appliqué à une particule est nul $\Rightarrow \frac{d\overrightarrow{L_O}}{dt} = \sum \overrightarrow{M_O}\left(\vec{F}\right) = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{L_O}$ est constant. Le moment cinétique d'une particule est donc constant si le moment de forces est nul.
- La condition $\vec{r} \wedge \vec{F} = \vec{0}$ est aussi rempli si $\vec{F} = \vec{0}$ c'est-à-dire si la particule est libre.
- La condition $\vec{r} \wedge \vec{F} = \vec{0}$ est aussi rempli si $\vec{F}$ // $\vec{r}$ ou si la direction de $\vec{F}$ passe par le point O. une force dont la direction passe toujours par un point fixe est appelée force centrale.

III-8. Pseudo-forces ou forces d'inertie

L'observateur d'un repère accéléré (R') par rapport à (R) mesure pour un mouvement donné une accélération $\overrightarrow{a_r} \neq \overrightarrow{a_a}$ que mesure l'observateur d'inertie (R).

L'observateur dans (R') ne peut pas écrire $\sum \overrightarrow{F_{ext}} = m\overrightarrow{a_r}$ par contre dans (R) Galiléen on peut écrire $\sum \overrightarrow{F_{ext}} = m\overrightarrow{a_a} \Rightarrow m\overrightarrow{a_r} = \sum \overrightarrow{F_{ext}} + \overrightarrow{F_e} + \overrightarrow{F_c}$ avec :

$$\sum \overrightarrow{F_{ext}} = m\overrightarrow{a_a}$$

$\overrightarrow{F_e} = -m\overrightarrow{a_e}$ → force d'inertie d'entrainement

$\overrightarrow{F_c} = -m\overrightarrow{a_c}$ → force d'inertie complémentaire

Pour exprimer correctement le PFD dans un référentiel non Galiléen il suffit d'ajouter à la somme des forces, des forces naturelles, les termes $(-m\overrightarrow{a_e})$ et $(-m\overrightarrow{a_c})$ qui représentent des forces d'inertie.

- Si (R') est en translation uniforme par rapport à (R) on a $\overrightarrow{a_r}$=$\overrightarrow{a_a}$. Un observateur en translation uniforme par rapport à (R) n'a pas besoin d'introduire les pseudo-forces pour décrire la relation fondamentale.
- Si (R') est en mouvement de translation par rapport à (R) ; $\overrightarrow{F_c} = \vec{0}$ et $\overrightarrow{F_e} = -m\overrightarrow{a_e}$
- Si (R') est en mouvement de rotation par rapport à (R) :

$$\overrightarrow{F_e} = -m\overrightarrow{a_e} = -\mathrm{m}\frac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{dt}}\wedge\vec{r} - m\vec{\omega}\wedge\overrightarrow{v_e}$$

$$\overrightarrow{F_c} = -m\overrightarrow{a_c} = -2m\vec{\omega}\wedge\overrightarrow{v_r}$$

Chapitre IV

Travail et Energie

But : Etude de la dynamique du point en faisant appel aux notions d'énergie et de travail

IV-1. Travail et puissance

IV-1-1. Travail élémentaire d'une force

Le travail élémentaire dw effectué par une force $\vec{F}$ sur une masse ponctuelle m pendant un déplacement élémentaire $d\vec{r}$ est défini par :

$$dw = \vec{F}d\vec{r} = \|\vec{F}\|.\|d\vec{r}\| \cos\left(\widehat{\vec{F}, d\vec{r}}\right)$$

Son unité est le joule = $[N.m]$.

Le travail total w nécessaire pour déplacer m le long d'un chemin C entre deux points A et B est : $w = \int_c \vec{F}d\vec{r} = \int_A^B \vec{F}d\vec{r}$.

- Si $\vec{r}(x, y, z), d\vec{r}(dx, dy, dz)$ et $\vec{F}(F_x, F_y, F_z)$ alors :

$$w = \int_A^B F_x dx + F_y dy + F_z dz$$

Pour calculer w il est nécessaire de connaitre l'expression de $\vec{F}$ et l'équation (c) de la trajectoire.

Remarque 1:

Quand plusieurs forces $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \dots \dots$ agissent sur la particule. Le travail total effectué sur la particule au cours du déplacement $d\vec{r}$ est :

$$dw = dw_1 + dw_2 + dw_3 + \dots\dots\dots$$

$$= \vec{F}_1 d\vec{r} + \vec{F}_2 d\vec{r} + \vec{F}_3 d\vec{r} + \dots\dots\dots$$

$= (\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \cdots)d\vec{r} = \vec{F}d\vec{r}$ où $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \cdots$, est la résultante de toutes les forces.

Remarque 2 :

Lorsque la composante suivant le déplacement d'une force donnée est à chaque instant de même sens que le déplacement, son travail est positif (travail moteur). Lorsqu'elle est de sens opposé, son travail est négatif, on l'appelle travail résistant.

Lorsqu'elle est à chaque instant perpendiculaire au déplacement, son travail est nul.

IV-1-2. Puissance

- La puissance moyenne est par définition le rapport du travail sur la durée de sa réalisation. Par exemple, si entre $t_1$et t_2 un travail w a été réalisé alors :

$$P_{moy} = \frac{w}{t_2 - t_1}$$

- La puissance instantanée est définie par :

$$p = \frac{dw}{dt}$$

$$= \vec{F}\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{F}.\vec{v}$$ ($\vec{v}$ vitesse instantanée du point matériel)

La puissance s'exprime en Watts (w) $=J.s^{-1}=Kg.m^2.s^{-3}$

IV-2. Energie cinétique, potentielle et mécanique

IV-2-1. Energie cinétique

Afin d'accélérer une masse ponctuelle et l'amener à une vitesse définie on doit fournir du travail. Ce travail est alors emmagasiné dans cette masse ponctuelle sous forme d'énergie cinétique.

$$dw = \vec{F}d\vec{r} = m\frac{d\vec{v}}{dt}\,\vec{v}dt$$

$$= m\,d\vec{v}.\vec{v} = \frac{1}{2}md(\vec{v}.\vec{v})$$

$$\Rightarrow dw = d(\frac{1}{2}mv^2)$$

$E_c = \frac{1}{2}mv^2$ est l'énergie cinétique du point matériel.

Quelque soit la forme de la trajectoire suivie on a : $dw = dE_c$

Lorsque le point matériel passe du point A au point B :

$$w_{AB} = \int_A^B dw = \int_A^B dE_c$$

$$= E_c(B) - E_c(A) = \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2$$

Où v_A et v_B sont respectivement les vitesses aux point A et B.

IV-2-2. Théorème de l'énergie cinétique

$$w_{AB} = E_c(B) - E_c(A) = \Delta E_c$$

La variation de l'énergie cinétique d'une masse ponctuelle pendant un temps quelconque est égale au travail fourni à cette masse pendant ce temps.

IV-2-3. Energie potentielle

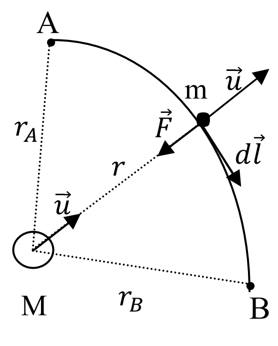
Particule dans un champ gravitationnel :

Soit une particule de masse m soumise à la force gravitationnelle

Terrestre : $\vec{F} = -G\frac{mM}{r^2}\vec{u}.$

Si cette particule passe du point A au point B, elle subit une variation

de l'énergie cinétique mesuré par :



$$\Delta E_c = E_c(B) - E_c(A)$$

$$= \int_A^B \vec{F}d\vec{l} = \int_A^B - G\frac{mM}{r^2}\vec{u}\,d\vec{l}$$

En coordonnées polaires

$$d\vec{l} = d\vec{r} = dr\overrightarrow{e_r} + rd\theta\overrightarrow{e_\theta}$$

$$\vec{u}\, d\vec{l} = \vec{u}(dr\overrightarrow{e_r} + rd\theta\overrightarrow{e_\theta})$$

$$= dr\vec{u}\,\overrightarrow{e_r} + rd\theta\vec{u}\,\overrightarrow{e_\theta} = dr$$

Alors :

$$\Delta E_c = -GmM\int_A^B \frac{dr}{r^2} = \left(\frac{GmM}{r_B} - \frac{GmM}{r_A}\right)$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{1}{2}mv_A^2 - \frac{GmM}{r_A} = \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{GmM}{r_B}$$

La grandeur $\frac{1}{2}mv^2 - \frac{GmM}{r}$ est invariante au cours du mouvement si la seule force appliquée à la particule est la force de gravitation.

La variation de l'énergie cinétique ΔE_c est égale et opposé à la variation de l'énergie potentielle : $\Delta E_c = -\Delta E_p$.

L'énergie potentielle de la masse m dans le champ de gravitation de M est :

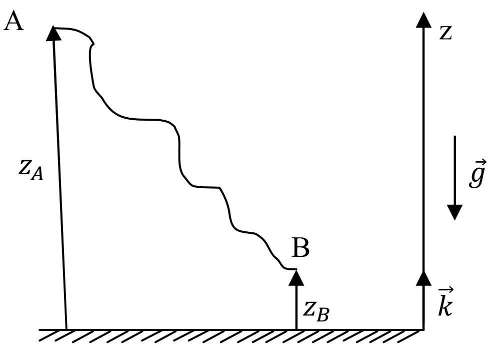
$$E_p = -\frac{GmM}{r}$$

IV-2-4. Energie mécanique

L'énergie mécanique E_M est égale à la somme de l'énergie cinétique E_c et de l'énergie potentielle E_p.

$$E_M = E_c + E_p$$

IV-2-5. Energie potentielle au voisinage de la Terre



Le travail du poids $\vec{p}$:

$$w_{AB} = \int_A^B m\vec{g}\, d\vec{r} = \int_A^B (-mg\vec{k}).\left(dx\vec{\imath} + dy\vec{\jmath} + dz\vec{k}\right)$$

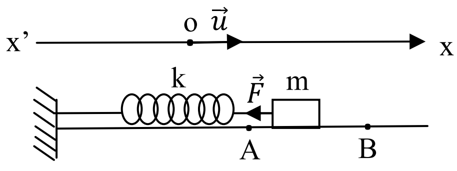
$$w_{AB} = \int_{z_A}^{z_B} -mg\, dz = mgz_A - mgz_B = E_p(A) - E_p(B)$$

L'énergie potentielle de la masse m à une hauteur h est :

$E_p = mgh$

IV-2-6. Energie potentielle élastique

Considérons une particule soumise à une force de type :



$\vec{F} = -kx\vec{u}$

$$\Delta E_c = E_c(B) - E_c(A) = \int_A^B F dx = \int_{x_A}^{x_B} -kx dx$$

$$= \frac{1}{2}kx_A^2 - \frac{1}{2}kx_B^2$$

D'où $\frac{1}{2}mv_A^2 + \frac{1}{2}kx_A^2 = \frac{1}{2}mv_B^2 + \frac{1}{2}kx_B^2 = cste$

On définit l'énergie potentielle du ressort : $E_p = \frac{1}{2}kx^2$

L'énergie mécanique totale :

$E_M = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2$

IV-3. Force dérivant d'un potentiel-Forces conservatives

On dit qu'une force $\vec{F}$ dérive d'un potentiel s'il existe une fonction scalaire $E_p(x, y, z)$ telque : $\vec{F} = -\overrightarrow{grad} E_p$

- Si l'énergie potentielle E_p est connue, cette expression nous permet de déterminer l'expression de la force.
- Si c'est l'expression de la force qui est connue, une énergie potentielle ne peut lui être associée que si la relation : $\overrightarrow{rot}\vec{F} = \vec{0}$
- Lorsqu' une particule n'est soumise qu'à une force dérivant d'un potentiel :

$$w_{A \to B} = \Delta E_c = -\Delta E_p \Rightarrow E_c(A) + E_p(A) = E_c(B) + E_p(B) = E_M$$

$E_c + E_p = E_M = cste$ ou $\frac{d}{dt}(E_c + E_p) = 0$

L'énergie mécanique totale de la particule est conservée.

Remarque :

- Le travail d'une force conservative ne dépend pas du chemin suivi. Il ne dépend que de l'énergie potentielle au point A et B
- Sur un circuit fermé, le travail d'une telle force est nul

IV-4. Forces non conservatives

On dit qu'une force est non conservative si le travail effectué par cette force dépend du chemin suivi.

On considère un point matériel soumis aux forces $\overrightarrow{F_c}$ et $\overrightarrow{F_{nc}}$ ($\overrightarrow{F_c}$: la résultante des forces conservatives, $\overrightarrow{F_{nc}}$: la résultante des forces non conservatives).

Entre deux points de la trajectoire A et B de la trajectoire, le travail de l'ensemble des forces est :

$w_{A\to B} = \int_A^B \left(\overrightarrow{F_c} + \overrightarrow{F_{nc}}\right) d\vec{r} = \int_A^B \overrightarrow{F_c}\, d\vec{r} + \int_A^B \overrightarrow{F_{nc}}\, d\vec{r} = w_c + w_{nc}$ D'autre part la variation de l'énergie cinétique entre les deux points A et B est égale au travail de toutes les forces qui lui sont appliquées :

$$E_c(B) - E_c(A) = w_c + w_{nc} \qquad (1)$$

D'autre part le travail w_c des forces conservatives $\overrightarrow{F_c}$ est :

$$w_c = E_p(A) - E_p(B) \qquad (2)$$

De (1) et (2) on tire : $E_c(B) - E_c(A) = E_p(A) - E_p(B) + w_{nc}$

$\Rightarrow \left[E_c(B) + E_p(B)\right] - [E_c(A) + E_p(A)] = w_{nc}$

$\Rightarrow E_M(B) - E_M(A) = w_{nc}$

$\Rightarrow \Delta E_M = w_{nc}$

La variation de l'énergie mécanique est égale au travail w_{nc} des forces qui ne dérivent pas d'un potentiel.

IV-5. Théorème de l'énergie mécanique

- Si le système est soumis qu'à des forces conservatives l'énergie mécanique se conserve :

$$\Delta E_M = 0$$

- Si le système est soumis à des forces non conservatives l'énergie mécanique se dissipe :

$$\Delta E_M = w_{nc}$$

Références Bibliographiques

- Alonso –Finn, Cours de physique générale : Tome I Mécanique.
- J. L. Caubarrere et H. Djelouh, J. Fourny et F. Z. Khelladi, Introduction à la mécanique : cours, exercices et travaux pratiques. Office des publications universitaires.
- M. Elbaz, Cours de Mécanique du point Matériel. SMPC1. 2014
- Moreggia, Dynamique du point, PCSI 2011/2012.
- L. Menguy, Dynamique du point Matériel, Lycée Montesquieu, le Mans 2003.
- Site web wwwensa.univoujda.ac.ma/ghammouri/chap3_meca.pdf.
- Site web www.iihe.ac.be/~cvdvelde/Info/Cours/ChapI.pdf.
- L. Menguy, Cinématique du point matériel, Lycée Montesquieu, le Mans, 2003.
- L. Benallegue , M. Debiane A. Gourari et A. Mahamdia physique 1 Mécanique du point Matériel, Faculté de physique USTHB 2011.
- Site web https://www.univ-sba.dz/fsi/downloads/PhysI_Chap-I.pdf