

# Pour enseigner les nombres, le calcul et

## la résolution de problèmes au CP

### Introduction

#### **Points importants:**

- Lien entre sens et technique
- Distinction de deux systèmes de numération: oral et écrit (chiffré)
- Travail des différents modes de calcul et construction en étroite relation.
- Rôle de la manipulation et de la verbalisation des élèves dans les apprentissages.
- Cheminements cognitifs pour passer de la manipulation à l'abstraction
- Modélisation dans la résolution de problèmes
- Un texte du savoir (oral avec représentations imagées puis écrit)

#### **Mobiliser et construire des connaissances dans l'activité de résolution de problèmes au CP:**

(Exemple avec un problème additif)

Stratégie 1: dénombrement élémentaire (comptage, sur comptage, décomptage...). Constitution effective des collections (matériel ou dessin). Aucune anticipation du résultat, seulement traduction des données représentées. Pour l'identifier: prendre en compte le type de dénombrement (par un, par paquets), qualité de la représentation (figurative ou schématique), présence de nombres écrits, organisation des collections.

Stratégie 2: dénombrement s'appuyant sur des représentations symboliques des collections figuratives ou schématiques). Montée en abstraction: organisation des collections. Mais élève lit le résultat en attribuant le nombre inconnu à la bonne collection. Évite encore le calcul.

Stratégie 3: calcul (frises numériques, schémas conventionnels, écritures mathématiques formelles ou transitaires).

#### **Comment créer les conditions de la réussite des élèves?**

Objectif de fin de CP: résoudre problème où une partie est inconnue (autre partie et tout connus).

Mettre en réseau les connaissances des élèves: allier jeu sur les variables des énoncés, moments d'acquisition de connaissances par les élèves, moments de réinvestissement lors de résolution de problèmes, moments où le professeur apportera des informations permettant certains sauts conceptuels. Nécessite des moments d'institutionnalisation pour identifier avec tous les élèves les montées en abstraction: donc prévoir moments de verbalisation.

Interroger les domaines numériques, les procédures de dénombrement ou de calcul mobilisables. Taille des nombres en jeu élément important pour faire évoluer les procédures des élèves. Prévoir des moments de travail des techniques de calcul en ligne et de calcul mental afin de constituer un répertoire de faits numériques pouvant être rappelés pour la résolution de problèmes (pas que travail sur les décompositions additives des nombres). Jouer avec les variables numériques et le contexte (prix, longueur, masse).

#### **Cheminements cognitifs et adaptations de l'enseignement.**

Mobilisation du comptage plus fréquente que le décomptage.

Ruptures:

- Passage de la manipulation au dessin puis au schéma.
- Passage d'une collection non organisée à une collection avec partition en deux sous-collections ou décomposition des nombres.
- Passage d'un dénombrement oral à l'écriture de nombres.
- Passage de l'écriture additive à soustractive.

Des modalités d'institutionnalisation: faire expliciter les productions des élèves, si possible les hiérarchiser en fonction de l'efficacité. Dès que possible, s'appuyer sur des écrits.

Le traitement des erreurs: écrire l'ensemble des réponses au tableau et demander lesquelles ne sont pas possibles et pourquoi?



# 1. Quels systèmes de numération enseigner, pourquoi et comment?

## **Deux systèmes de numération objets d'enseignement au CP**

Fin de maternelle: nom des nombres jusqu'à 30 —> numération orale.

Système de numération chiffrée: aspects décimaux et positionnels des écritures chiffrées.

### Des nombres sans numération, ça existe

4 procédures pour comparer les quantités:

- Correspondance terme à terme
- Nom du nombre par comptage un à un
- Nom du nombre par comptage de dix en dix
- Écriture chiffrée

### Le système de numération oral utilisé en France: le nom des nombres

Comptine numérique: des régularités, des dizaines « repérants »: dix, vingt, trente... Pas repérants: soixante-dix et quatre-vingt-dix. Mettre en jeu deux types de comptine: « grande comptine » 1 à 19 et « petite comptine » 1 à 9. Puis comptine des dizaines avec un écart de une ou deux dizaines (selon petite ou grande comptine).

### Le système de numération écrit chiffré utilisé dans le monde: une écriture partagée des nombres.

Numération écrite chiffrée n'est pas la version écrite de de la numération orale. Utilise 10 symboles, les chiffres 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 et 9. Suite de chiffres alignés va désigner un nombre selon un principe décimal et un principe positionnel. Dizaine c'est dix unités simples: première facette du principe décimal. (Puis centaine, millier...) Utilisation de dix pour générer les unités de numération supérieures: deuxième facette du principe décimal.

Système de numération écrit chiffré pas besoin d'une connaissance de la numération orale mais doit comprendre la dizaine comme nouvelle unité de dénombrement et synonyme de 10.

### Le rôle des deux systèmes de numération dans l'apprentissage du nombre.

Numération orale essentiellement ordinale: dernier nombre est le n-ième et le cardinal.

Numération chiffrée permet d'écrire n'importe quel chiffre dès que ses principes ont été compris.

Un des objectifs des problèmes est d'apprendre et distinguer ces deux systèmes.

Autres représentations (doigts, constellations..) ne sont pas des systèmes car ne permettent pas de désigner tous les nombres entiers et de faire des calculs efficacement.

### Apprendre et enseigner les systèmes de numération:

Nombre de dizaines pas explicite dans la numération orale.

Procédure « nom du nombre par comptage de dix en dix »: écriture chiffrée pas nécessaire, obtenir le nom du nombre en considérant le maximum de dizaines pour recourir à la comptine des dizaines puis à celle de un en un pour les éléments restants.

Procédure « écriture chiffrée »: organiser la collection en un maximum de dizaines puis la coder avec des chiffres.

## **La dizaine au cœur des itinéraires d'enseignement**

### Deux itinéraires d'enseignement:

La dizaine est au cœur des deux enseignements.

- Premier itinéraire: enseigner la numération écrite chiffrée à partir de la numération orale. Comptage un en un —> « nom du nombre par comptage de dix en dix » —> écriture chiffrée.
- Deuxième itinéraire: construction des deux systèmes indépendamment pour ensuite faire des liens. Ici l'écriture chiffrée est un accès à la quantité sans le nom du nombre (donc utilisation de grands nombres).

La dizaine en amont des systèmes de numération: à faire avant la numération écrite chiffrée

La dizaine: comment la travailler? Difficulté : percevoir qu'une dizaine et dix désignent le même nombre (utiliser du matériel emboîtable).

## II. Calcul et sens des opérations.

### Quelles formes et modalités de calcul enseigner au CP?

Calcul mental	Calcul en ligne	Calcul posé
Modalité de calcul sans recours à l'écrit = système oral	Modalité de calcul écrit ou partiellement écrit sans utilisation des algorithmes d'opérations posées = systèmes oral et écrits	Modalité de calcul écrit qui requiert l'application d'un algorithme opératoire = système écrit chiffré

### Comment passer du comptage au calcul?

Un des enjeux du CP: passer des procédures de comptage aux procédures de calcul. Codage mathématique ( $4+3=7$ ) introduit pas le professeur dans un moment bilan de résolution de problèmes.

### Quelles opérations enseigner au CP?

Rapport Villani-Torossian: aborder les 4 opérations dès le CP en confrontant les élèves à des situations qui leur donnent du sens et permettent de les conceptualiser.

L'addition et la soustraction: relèvent du même champ (additif), ne pas les séparer. Sont abordées dès la maternelle sans aucun formalisme, symbolisation au CP + apparition du signe =. Algorithme opératoire de l'addition (posée) au CP mais soustraction au CE1.

La multiplication et la division: dès la maternelle des situations de partages équitables et de produit. Manipuler des configurations rectangles (tablette de chocolat par ex) pour travailler partage et visualiser commutativité de la multiplication. Apparition du symbole « x » possible en fin de CP mais pas attendu. Signe « : » non. Pas d'algorithmes opératoires de ces opérations au CP.

### Comment enseigner le calcul mental et le calcul en ligne au CP?

Pratique régulière.

Mémorisation des faits numériques: calculs mémorisés disponibles immédiatement. Important pour soulager la mémoire de travail. A retenir au CP: compléments à 10, doubles jusqu'à 10 et dizaines entières, moitiés jusqu'à 20, décompositions jusqu'à 10 et tables d'addition jusqu'à 10. Donc développer une fluence en calcul.

Le calcul en ligne: proche du calcul mental mais un écrit vient soutenir la mémoire de travail donc peut gérer des calculs plus complexes ou avec nombres plus élevés. Construire en même temps la représentation des nombres et leurs décompositions. Entraîne souvent la mise en œuvre implicite des propriétés des nombres et opérations en jeu: commutativité, associativité, distributivité de la multiplication sur l'addition. Axer le travail en classe sur explication et confrontation des procédures pour trouver la moins coûteuse et la plus sûre et l'institutionnaliser.

Estimation et calcul: en CP peut estimer l'ordre de grandeur d'une quantité. A travailler.

### Comment enseigner l'addition posée?

Permet de réinvestir les faits numériques et les connaissances de la numération écrite chiffrée: aspect positionnel (aligner unités) et aspect décimal (10 unités = 1 dizaine).

### Quelques difficultés fréquentes autour du calcul

Se révèlent en contexte et s'interprètent à partir des erreurs observées.

Difficultés observées: comprendre le langage symbolique du calcul, mémoriser et mobiliser le répertoire additif, réaliser une addition posée (disposition des chiffres ou gestion des retenues ou erreurs de calculs).

Remédiations: faire verbaliser, manipulation, utiliser le jeu.

Focus: séquence de calcul:

- une séance longue de découverte (30-45 min): échauffement (ex: furet), entraînement (ex: les doubles), recherche (ex: les presque doubles).
- Des séances courtes: entraînement et appropriation puis fluence.

### III. Résolution de problèmes et modélisation

**Dans les BO, triple objectif autour des problèmes:**

- Apprendre à résoudre des problèmes,
- Aborder des nouvelles notions et consolider les acquis
- Développer des capacités de recherche, raisonnement, communication.

Donc doit faire acquérir aux élèves les connaissances et compétences pour:

- Comprendre le problème
- Etablir une stratégie pour le résoudre,
- Mettre en œuvre la stratégie
- Revenir sur la solution et prendre du recul

**Attendus de fin de CP:**

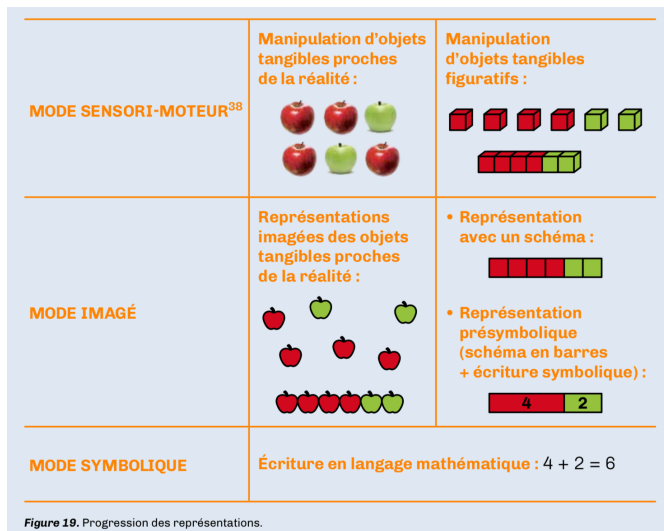
Champ additif	Champ multiplicatif
<ul style="list-style-type: none"> <li>- Résoudre des problèmes additifs et soustractifs en une ou deux étapes</li> <li>- Modéliser ces problèmes à l'aide de schémas ou d'écritures mathématiques</li> <li>- Connaître le sens des signes « + » et « - »</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Résoudre des problèmes de multiplication ou de division, en une étape, sur des petits nombres, avec le recours à la manipulation.</li> </ul>

**Trois types de problèmes:**

- Basiques (élémentaires): problèmes arithmétiques à une étape.
- Complexes: plusieurs étapes. Élève doit donc identifier, connecter et résoudre les problèmes basiques sous-jacents. Dès le début du cycle 2.
- Atypiques: « pour apprendre à chercher »

**Fondamentaux de la démarche d'enseignement de la résolution de problèmes (maternelle/ cycle 2).**

Vers l'abstraction: de la manipulation à la représentation symbolique en passant par la verbalisation. Différencier manipulation passive (ex: nombre de jetons visibles dans une boîte) et active (ex: boîte fermée). Matériel change de statut: pour constater puis pour valider.



L'enseignant doit verbaliser ses procédures pour que les élèves puissent verbaliser les leurs.

### **Faire évoluer les procédures:**

Trois types de procédures:

- Dénombrer plutôt élémentaire.
- Dénombrer s'appuyant sur des représentations symboliques des collections.
- Calcul, plus ou moins explicites ou formalisés.

### **Problèmes arithmétiques au CP et au cycle 2: la modélisation pour aider à résoudre des problèmes.**

Représenter: traduire par un dessin la situation.

Modéliser: traduire mathématiquement la situation. Amène à la procédure et au calcul.

Les problèmes additifs: passer du dessin figuratif au schéma grâce au matériel.

Évolution des stratégies repose sur : grandeur des nombres, connaissances mobilisables en calcul, contraint sur l'objectif de l'activité et les connaissances et compétences visées.

Les problèmes multiplicatifs: permettent de construire le sens de la multiplication et de la division.

Cherche: le tout, une part ou le nombre de parts. Faire comprendre la symétrie entre problèmes multiplicatifs et situations de partage.

### **Quelques éléments du continuum didactique aux cycles 2 et 3**

- Le sens des opérations et la « symétrie » entre les opérations
- Lien avec la comparaison: formules « de plus » et « de moins » compliquées pour les élèves.
- Résoudre des problèmes complexes
- Lien avec l'introduction ultérieure de la fraction

### **Les écrits en résolution de problèmes et l'importance de l'institutionnalisation**

Les supports des élèves: cahier du jour (pas que sur l'ardoise) et cahier de référence en mathématiques.

Les outils collectifs: affiche montre les étapes (énoncé, modélisation en langage mathématique et représentation schématique).

Le rôle essentiel de l'institutionnalisation: En deux temps: mise en commun durant la séance et institutionnalisation finale.

## 10. Quels matériels et pour quelle utilisation en mathématiques au CP?

### **Les matériels utiles dans l'apprentissage des mathématiques**

Choix du matériel: forme, taille, couleur sont des variables didactiques. Foisonnement de couleurs peut nuire à la compréhension des notions en jeu en détournant l'élève des objectifs d'apprentissages visés. L'utilisation du matériel doit être régulière, constante et sur une période longue. Transparence du matériel utilisé: commencer par des représentations figuratives et avancer petit à petit vers des représentations plus abstraites. Nature du matériel: éviter l'utilisation d'un matériel qui ressemble trop à des objets de la vie de tous les jours. Explication du lien entre le matériel et le concept qu'il représente.

Les outils et logiciels du numérique éducatif.

### **Matériels incontournables devant être mis à disposition des élèves dans les classes**

- Cubes emboîtables sécables.
- Frise numérique
- Tableau des nombres

## Matériels complémentaires pouvant être mis à disposition des élèves

- Matériel de numération en base 10 (cube unité/ barre dizaine). Limite: nombre d'unités toujours inférieur à 10.
- Tableau de numération. Limite: enfermer le nombre dans des cases sans donner du sens.
- La monnaie. Limite: billet de 10 n'est pas un assemblage physique de 10 pièces de un.

## V. Le jeu dans l'apprentissage des mathématiques

### Le jeu, nécessaire... mais pas suffisant!

Bénéfices du jeu:

- Evolution du sens donné aux notions mathématiques en manipulant et en se décentrant des objets d'apprentissage
- Développement de compétences mobilisant logique, rigueur, concentration, mémoire et capacités d'abstraction.
- Pertinence d'un outil à différents moments de l'apprentissage
- Modifications de la place de l'écrit

### Analyse d'un jeu

<b>Objectifs visés et place dans la séquence d'apprentissage</b>	<ul style="list-style-type: none"><li>• Le jeu permet-il d'atteindre l'objectif d'apprentissage qui lui est associé ?</li><li>• Est-il utilisé comme situation d'introduction (d'une notion), d'entraînement, d'évaluation ?</li></ul>
<b>Accompagnement et présence du professeur</b>	<ul style="list-style-type: none"><li>• Le professeur doit-il être présent ? Quel est son rôle ?</li></ul>
<b>Communication et échanges (verbalisation – formulation)</b>	<ul style="list-style-type: none"><li>• Le jeu favorise-t-il la communication et les échanges entre élèves ?</li><li>• Une phase de verbalisation est-elle prévue (avec les autres joueurs, avec la classe, avec le professeur) ?</li></ul>
<b>Complexité des règles</b>	<ul style="list-style-type: none"><li>• Les règles sont-elles suffisamment simples pour que l'élève puisse les comprendre rapidement ? Peuvent-elles évoluer au cours de l'apprentissage ?</li><li>• Le nombre de joueurs est-il important pour l'apprentissage ? (On peut jouer seul, à plusieurs les uns « contre » les autres, ou en équipe – jeu collaboratif.)</li><li>• Les élèves peuvent-ils facilement jouer de façon autonome (sans la présence du professeur) ? À quelles conditions (support de suivi, connaissance parfaite des règles ? Comment le professeur accède-t-il alors aux procédures ?...)?</li></ul>
<b>Dans le cas de logiciels ou de jeux sur tablette</b>	<ul style="list-style-type: none"><li>• Quelques points de vigilance :<ul style="list-style-type: none"><li>– la cohérence par rapport aux programmes ;</li><li>– la diversité des tâches proposées ;</li><li>– la mobilisation effective des connaissances pour réussir (et non d'autres stratégies ne reposant pas sur des connaissances mathématiques) ;</li><li>– la qualité des aides mises à disposition ;</li><li>– le suivi des progrès et des résultats des élèves.</li></ul></li></ul>
<b>Évolution du jeu en lien avec la progression et la différenciation</b>	<ul style="list-style-type: none"><li>• Peut-on jouer sur certaines variables pour faire évoluer le jeu (et bloquer certaines procédures mathématiques ou non, par exemple) ou pour différencier ?</li></ul>
<b>Institutionnalisation et traces écrites</b>	<ul style="list-style-type: none"><li>• Une institutionnalisation et/ou des traces écrites sont-elles prévues en lien avec le jeu (apprentissage d'une notion, mémorisation d'une procédure, etc.) ?</li></ul>
<b>Validation</b>	<ul style="list-style-type: none"><li>• L'élève peut-il être tour à tour joueur et arbitre (en lien avec la question de la validation) ?</li><li>• Le jeu est-il autocorrectif ?</li></ul>

## VI. Comment analyser et choisir un manuel de mathématiques pour le CP?

CF P 131 à 136 sur les questions à se poser pour analyser des manuels.

## VII. Programmer sa progression au CP

CF P 141 à 147 pour une progression annuelle.