

**BKS PTN-B**

**BIDANG MATEMATIKA**

# PROSIDING

**SEMINAR NASIONAL BIDANG ILMU MIPA  
SEMIRATA 2015**



**UNTAN**  
Universitas Tanjungpura

Fakultas Matematika Dan Ilmu Pengetahuan Alam



**BKS PTN Barat**



**PROSIDING BIDANG MATEMATIKA**  
**SEMINAR DAN RAPAT TAHUNAN (SEMIRATA)**  
**BIDANG ILMU MIPA 2015**  
**BKS PTN BARAT**

Universitas Tanjungpura, 5 -7 Mei 2015

ISBN 978-602-74043-3-5

*Dewan Penyunting*

Penanggung Jawab : Dekan FMIPA UNTAN  
Ketua : Nilamsari Kusumastuti, M.Sc  
Sekretaris : Mariatul Kiftiah, M.Sc  
Anggota : Evy Sulistianingsih, M.Sc  
Setyo Wira Rizki, M.Sc

*Reviewer*

Ketua : Prof. Dr. Tulus, M.Si  
Anggota : Dr. Sugiatno  
Dr. Edi Tandililing  
Dadan Kusnandar, Ph.D  
Dr. Ngudiantoro, M.Si.  
Dr. Demitra, M.Pd  
Dr. Netti Herawati  
Dewi Sri Susanti, M,Si  
Bayu Prihandono, M.Sc

Prosiding ini dapat diakses secara online di:

<http://jurnal.untan.ac.id/index.php/semirata2015/issue/view/449>

**Penerbit :**

**Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam**  
**Universitas Tanjungpura**  
Jalan Jenderal Ahmad Yani, Pontianak 78124  
Telp./Fax.: (0561) 577963  
e-mail: semiratamtk2015@gmail.com

## KATA PENGANTAR

Indonesia memiliki sumber daya alam yang melimpah, dengan potensi besar untuk dapat dioptimalkan demi kemajuan bangsa. Kenyataan ini menyimpan harapan bagi rakyat Indonesia, yang menurut amanat Undang-Undang Dasar Tahun 1945, “Bumi dan air dan kekayaan yang terkandung di dalamnya dikuasai oleh negara dan dipergunakan untuk sebesar-besar kemakmuran rakyat”. Kemakmuran rakyat menjadi amanat pemerintah dalam mengelola kekayaan alam tersebut. Amanat Undang-undang Dasar Tahun 1945 tersebut di atas dapat kita capai jika sumber daya alam yang kita miliki dapat dikelola dengan baik dengan menyinergikan seluruh komponen masyarakat dan berbagai bidang ilmu.

Pengelolaan sumber daya alam (SDA) merupakan suatu hal yang sangat penting dibicarakan dan dikaji dalam kerangka pelaksanaan pembangunan nasional kita. Dengan potensi sumber daya alam yang berlimpah, kita dapat melaksanakan proses pembangunan bangsa ini secara berkelanjutan tanpa harus dibayangi rasa cemas dan takut akan kekurangan modal bagi pelaksanaan pembangunan. Pengelolaan dan pemanfaatan secara optimal kekayaan sumber daya alam ini akan mampu membawa kesejahteraan dan kemakmuran bagi seluruh bangsa Indonesia. Kemampuan bangsa kita dalam menyejahterakan dan memakmurkan rakyat melalui pengelolaan dan pemanfaatan SDA menjadi jalan utama peningkatan daya saing bangsa kita.

Perguruan tinggi sebagai salah satu institusi pendidikan sudah selayaknya dapat memberikan kontribusi dalam pengelolaan dan pemanfaatan SDA bangsa kita sebagai wujud tanggung jawab moral dalam memajukan dan memakmurkan rakyat. Atas dasar tersebut, perguruan tinggi yang tergabung dalam Badan Kerjasama Perguruan Tinggi Negeri wilayah Barat (BKS-PTN Barat) bidang Ilmu MIPA akan menyelenggarakan seminar nasional dengan tema: “Peran Ilmu MIPA dalam pengelolaan SDA untuk meningkatkan daya saing bangsa”. Seminar nasional ini bertujuan untuk mengkomunikasikan dan menghimpun pemikiran dari para pengambil kebijakan, peneliti dan praktisi tentang pengelolaan SDA dan peningkatan daya saing bangsa.

Seminar nasional tahun ini merupakan seminar nasional BKS-PTN Barat bidang ilmu MIPA yang kedua kalinya dilaksanakan Fakultas MIPA Universitas Tanjungpura Pontianak setelah sukses menyelenggarakan kegiatan yang sama pada tahun 2004. Seminar nasional ini dirangkaikan dengan rapat tahunan pada Dekan dan Ketua Program Studi dari fakultas anggota BKS-PTN Barat bidang ilmu MIPA. Selain itu, kegiatan Semirata tahun ini juga sekaligus dirangkaikan dengan kegiatan rapat tahunan MIPANet se-Indonesia.

Kegiatan ini berlangsung atas kerjasama seluruh anggota BKS PTN Barat Bidang MIPA. Kesuksesan kegiatan ini tentu tidak terlepas dari bantuan berbagai pihak. Kami mengucapkan terima kasih dan penghargaan yang setinggi-tingginya kepada seluruh pihak yang telah membantu kesuksesan kegiatan ini. Semoga Allah SWT membalas segala partisipasi kita semua dengan pahala yang berlipat ganda.

Pontianak, Januari 2016

Panitia

## DAFTAR ISI

KATA PENGANTAR	Hal iii
DAFTAR ISI	iv
BUKTI ALTERNATIF KONVERGENSI DERET PELL DAN PELL-LUCAS <i>Baki Swita</i>	1 - 7
PENAKSIR RASIO DAN PRODUK EKSPONENSIAL YANG EFISIEN UNTUK VARIANSI POPULASI PADA SAMPLING ACAK SEDERHANA <i>Mega Elysmayanti, Firdaus, Haposan Sirait, Rustam Efendi</i>	8 - 16
LUAS DENGAN PARTISI SEGITIGA UNTUK FUNGSI CEKUNG <i>Juni Lesti Nengsih, Syamsudhuha, Leli Deswita</i>	17 - 22
EKSISTENSI DAN KETUNGGALAN TITIK TETAP DARI PEMETAAN KANNAN DI RUANG MODULAR <i>Mariatul Kiftiah</i>	23 - 29
OPERATOR PADA RUANG BARISAN TERBATAS <i>Muslim Ansori, Tiryono, Suharsono S, Dorrah Azis</i>	30 - 36
LINGKARAN SINGGUNG LUAR SEGIEMPAT TIDAK KONVEKS <i>Rika Delpita Sari, Mashadi</i>	37 - 46
ANALISIS KERAGAMAN PERCOBAAN TERSARANG DENGAN MENGGUNAKAN MATRIKS RANCANGAN TERPARTISI <i>Sigit Nugroho</i>	47 - 55
ALTERNATIF MENENTUKAN FPB DAN KPK <i>Welly Desriyati, Mashadi, Sri Gemawati</i>	56 - 62
PERAMALAN PENCEMARAN UDARA OLEH <i>PARTICULATE MATTER</i> (PM10) DI PEKANBARU DENGAN METODE BOX JENKINS <i>Ari Pani Desvina</i>	63 - 73
IMPLEMENTASI PENDEKATAN SAINTIFIK PADA PEMBELAJARAN MATEMATIKA SEBAGAI SARANA MELAKUKAN REVOLUSI MENTAL SISWA <i>Armiati</i>	74 - 85

PENINGKATAN KONEKSI MATEMATIS SISWA MELALUI KEARIFAN LOKAL ETNIS MELAYU SAMBAS <i>Bistari</i>	86 - 97
APLIKASI PENDIDIKAN KARAKTER DALAM PENYELESAIAN SOAL MATEMATIKA EKONOMI <i>Dapot Tua Manullang</i>	98 - 106
PENGEMBANGAN LEMBAR KERJA SISWA (LKS) MATEMATIKA BERBASIS <i>RECIPROCAL TEACHING</i> PADA MATERI LINGKARAN KELAS VIII SMP NEGERI 11 KOTA JAMBI <i>Dewi Iriani, Okta Marlina</i>	107 - 114
IDENTIFIKASI <i>IDEOLOGICAL, SENTIMENTAL, DAN SOCIOLOGICAL COMPONENTS</i> DARI <i>MATHEMATICAL VALUES</i> DALAM BUKU MATEMATIKA SEKOLAH MENENGAH PERTAMA SEMESTER I KELAS VII YANG MENERAPKAN KURIKULUM 2013 <i>Dewi Rahimah</i>	115 - 124
PENGEMBANGAN MODEL PEMBELAJARAN BERBASIS PEMECAHAN MASALAH UNTUK MENGONSTRUKSI BERPIKIR TINGKAT TINGGI DALAM PEMBELAJARAN MATEMATIKA DI SMA/MA <i>Edi Syahputra, Edy Surya</i>	125 - 137
PEMBELAJARAN MATEMATIKA SMP BERBASIS BUDAYA MELAYU DAN <i>SOFTWARE WINGEOM</i> <i>Edy Surya</i>	138 - 150
PENGEMBANGAN KONEKSI DAN KOMUNIKASI MATEMATIS SISWA DALAM PEMBELAJARAN MATEMATIKA MELALUI PENDEKATAN <i>RECIPROCAL TEACHING</i> <i>EdyTandililing</i>	151 - 160
PENERAPAN PEMBELAJARAN TRIGONOMETRI YANG BERBANTUKAN <i>MACROMEDIA FLASH 8</i> UNTUK MENINGKATKAN HASIL BELAJAR MAHASISWA PROGRAM STUDI PENDIDIKAN MATEMATIKA FKIP UNIVERSITAS BENGKULU <i>Effie Efrida Muchlis , Syafdi Maizora</i>	161 - 170
PEMBELAJARAN MATEMATIKA DALAM MEMBENTUK KARAKTER <i>Hasratuddin</i>	171 - 181
PENGEMBANGAN INSTRUMEN PENELITIAN PEMBELAJARAN STATISTIKA BERBASIS PENDIDIKAN KARAKTER UNTUK MEMBENTUK KARAKTER <i>ENTREPRENEUR</i> MAHASISWA <i>Ichsan</i>	182 - 188

ANALISA KESULITAN PEMBUKTIAN MATEMATIS MAHASISWA PADA MATA KULIAH ANALISIS REAL <i>Kartini, Elfis Suanto</i>	189 - 199
MERANCANG AKTIVITAS BELAJAR MATEMATIKA UNTUK MENGEMBANGKAN KETERAMPILAN PENALARAN SISWA <i>Mukhtar, Muliawan Firdaus</i>	200 -207
PENERAPAN PEMBELAJARAN KOOPERATIF <i>THINK PAIR SQUARE</i> UNTUK MENINGKATKAN HASIL BELAJAR MATEMATIKA PADA SISWA KELAS X.1 SMAN 9 PEKANBARU <i>Nahor Murani Hutapea</i>	208 – 218
PENERAPAN PEMBELAJARAN BERDASARKAN MASALAH UNTUK MENINGKATKAN HASIL BELAJAR MAHASISWA PENDIDIKAN MATEMATIKA FKIP UNIVERSITAS RIAU PADA MATA KULIAH PENGEMBANGAN KURIKULUM MATEMATIKA SEKOLAH MENENGAH <i>Rini Dian Anggraini</i>	219 – 227
PENGEMBANGAN BAHAN AJAR BERBASIS <i>INQUIRY</i> DENGAN PENDEKATAN <i>ATI</i> UNTUK MENFASILITASI PEMECAHAN MASALAH MATEMATIS MAHASISWA <i>Risnawati</i>	228 – 238
ANALISIS PROSES BERPIKIR MAHASISWA YANG MEMILIKI KECERDASAN VISUAL-SPASIAL DALAM PEMECAHAN MASALAH MATA KULIAH KALKULUS II <i>Rohati</i>	239 – 249
PENINGKATAN KUALITAS PEMBELAJARAN STRATEGI BELAJAR MENGAJAR MATEMATIKA (SBMM) MAHASISWA PENDIDIKAN MATEMATIKA JPMIPA FKIP UNJA T.A 2012/2013 <i>Roseli Theis</i>	250 – 261
EFEKTIFITAS PENGEMBANGAN LKS DENGAN PENDEKATAN <i>SCIENTIFIC</i> UNTUK PEMBELAJARAN GEOMETRI DI SEKOLAH DASAR <i>Sofnidar, Husni Sabil</i>	262 – 272
PENERAPAN <i>RECIPROCAL TEACHING</i> DALAM MODEL PEMBELAJARAN KOOPERATIF TIPE STAD UNTUK MENINGKATKAN HASIL BELAJAR MAHASISWA PADA MATA KULIAH KALKULUS I <i>Susda Heleni</i>	273 – 283

PENGEMBANGAN MEDIA PEMBELAJARAN MATEMATIKA SMP UNTUK MENGKONSTRUKSI VOLUME BANGUN RUANG <i>Syofni</i>	284 – 294
ANALISIS KESALAHAN DALAM MENYELESAIKAN SOAL-SOAL GEOMETRI SISWA KELAS IX SMPN SE-KECAMATAN TAMPAN PEKANBARU <i>Titi Solfitri, Yenita Roza</i>	295 – 303
METODE ESTIMASI PARAMETER DAN METODE <i>EQUATING</i> PADA UKURAN SAMPEL KECIL BERDASARKAN ITEM RESPON THEORY <i>Wardani Rahayu</i>	304 – 313
MENINGKATKAN KEMAMPUAN PEMECAHAN MASALAH MATEMATIKA DENGAN MENGGUNAKAN PENDEKATAN MATEMATIKA REALISTIK <i>Yelli Ramalisa, Feri Tiona Pasaribu</i>	314 – 325
PEMBELAJARAN MATEMATIKA KREATIF BERBASIS <i>THEORY OF TREE</i> DAN NILAI KARAKTER <i>Yulis Jamiah</i>	326 – 338
STUDI KOMPARASI MODEL PEMBELAJARAN KOOPERATIF STAD, TPS, DAN NHT TERHADAP HASIL BELAJAR MATEMATIKA SISWA KELAS VIII SMPN PEKANBARU TAHUN PELAJARAN 2013/2014 <i>Zulkarnain</i>	339 – 349
ESTIMASI TINGKAT KEMATIAN BAYI DAN HARAPAN HIDUP BAYI KABUPATEN SAMBAS PROVINSI KALIMANTAN BARAT TAHUN 2010 DENGAN MENGGUNAKAN METODE SULLIVAN <i>Ahmad Iqbal Baqi</i>	350 -356
SOLUSI KESTABILAN PADA MASALAH MULTIPLIKATIF PARAMETRIK <i>Budi Rudianto, Narwen</i>	357 - 362
ESTIMASI TINGKAT KEMISKINAN PADA LEVEL DESA DI KABUPATEN MUKOMUKO DENGAN MENGGUNAKAN SMALL AREA ESTIMATION <i>Etis Sunandi, Pepi Novianti, Idhia Sriliana, Dian Agustina</i>	363 - 371
STATISTIKA INFERENSI MENGGUNAKAN <i>RPLUGIN.SPSS</i> <i>Hendra Perdana, Dedi Rosadi</i>	372 - 377
UJI BANDING LABORATORIUM TERHADAP KERAPATAN SPORA <i>TRICHODERMA SP.</i> <i>Naomi Nesyana Debataraja, Nilamsari Kusumastuti, Evy Sulistianingsih,</i>	378 - 384

*Shantika Martha*

- OPTIMISASI PENJADWALAN PERAWAT DENGAN *GOAL PROGRAMMING*: SEBUAH STUDI KASUS DI RUMAH SAKIT UMUM PADANGSIDIMPUAN  
*Pratiwi Siregar, M. D. H. Gamal, Habibis Saleh* 385 - 398
- PENYELESAIAN *TRAVELLING SALESMAN PROBLEM* (TSP) DENGAN METODE *BRANCH AND BOUND* (Aplikasi Permasalahan Pengangkutan Barang Kantor Pos Palembang)  
*Putra BJ Bangun, Sisca Octarina, Bran Valbert Purba* 399 - 408
- EVALUASI KUALITAS WEBSITE STUDIO DATA UNIVERSITAS TANJUNGPURA PONTIANAK DENGAN MENGGUNAKAN WEBQUAL 4.0  
*Shantika Martha, Ilhamsyah* 409 - 418
- PERAMALAN STOK BERAS BULOG PEKANBARU DENGAN MENGGUNAKAN MODEL PEMULUSAN WINTER DAN *ARMA(p,q)*  
*Sigit Sugiarto, M.D.H. Gamal, Arif Sanjaya* 419 - 429
- PERAN EDUKASI DAN KLORINASI DALAM PENGENDALIAN PENYAKIT MENULAR: SEBUAH PENDEKATAN KONTROL OPTIMUM  
*Toni Bakhtiar* 430 - 440
- SOLUSI PERSAMAAN MAXWELL DALAM SISTEM KOORDINAT SILINDER YANG MEMBENTUK MEDAN MAGNET  
*Leli Deswita* 441 - 448
- VALUE-AT-RISK* DI BAWAH *CAPM* TERDITRIBUSI *LAGGED*DENGAN VOLATILITAS TAK KONSTAN  
*Sukono, Sudradjat Supian, Dwi Susanti* 449 - 458
- RUMUS UNTUK MENENTUKAN SUKU KE-*k* BARISAN BILANGAN PRIMA DARI SUATU BILANGAN BULAT *n*  
*Musraini M, Asli Sirait, Rolan Pane, Polorida* 459 - 466



**ANALISIS KERAGAMAN PERCOBAAN TERSARANG DENGAN  
MENGUNAKAN MATRIKS RANCANGAN TERPARTISI  
(ANALYSIS OF VARIANCE OF NESTED EXPERIMENTS  
USING PARTITIONED DESIGN MATRICES)**

**SigitNugroho**

Prodi Magister Statistika, Jurusan Matematika FMIPA Universitas Bengkulu, Bengkulu

[sigit.nugroho.1960@gmail.com](mailto:sigit.nugroho.1960@gmail.com)

**ABSTRACT**

*This paper presents how to calculate the sums of squares, to determine the degrees of freedom, to calculate the means of squares, and to calculate the test statistics of the source of variation for the nested experiments using partitioned matrices. Using such matrices are easier to compute rather than using a full design matrix, since the partitioned design matrices are having full column rank.*

*Keywords: Partitioned Design Matrices, Nested Experiments, Analysis of Variance.*

**ABSTRAK**

*Artikel ini menyajikan bagaimana menghitung jumlah kuadrat, menentukan derajat bebas, menghitung kuadrat tengah dan menghitung statistik uji dari sumber keragaman percobaan tersarang dengan menggunakan matriks terpartisi. Penggunaan matriks semacam ini akan mempermudah perhitungan daripada menggunakan matriks rancangan penuh, karena matriks rancangan terpartisinya memiliki rank kolom penuh.*

*Katakunci: Matriks Rancangan Terpartisi, Percobaan Tersarang, Analisis Keragaman.*

**1. PENDAHULUAN**

Dekomposisi QR tak dapat digunakan untuk penghitungan Jumlah Kuadrat komponen-komponen sumber keragaman suatu rancangan percobaan apabila banyaknya baris matriks rancangan yang juga menyatakan banyaknya amatan atau respon lebih kecil dari jumlah seluruh parameter yang digunakan. Metode matriks rancangan terpartisi berdasarkan komponen keragaman dapat menjadi solusi penghitungan Jumlah Kuadrat tersebut [5].

Dalam percobaan berfaktor atau percobaan faktorial, terminology faktorial ini merujuk pada kelas tertentu yang perlakuan-perlakuannya dibentuk dengan mengali silangkan taraf-taraf masing-masing faktor. Tiap taraf dari setiap factor muncul dengan setiap taraf factor lainnya. Interaksi dua atau lebih factor umumnya menjadi telaahan dalam penelitian. Sehingga untuk satu ulangan akan terdapat sejumlah hasil kali silang

seluruh taraf perlakuan yang digunakan, yang juga menyatakan banyaknya satuan percobaan yang harus dipersiapkan untuk satu ulangan [4].

Jika tiap taraf faktor A mencakup beberapa taraf faktor B, maka didefinisikan bahwa faktor B tersarang didalam faktor A. Suatu percobaan dengan dua atau lebih faktor yang memenuhi definisi ini disebut dengan percobaan factor tersarang (*Nested Factor Experiment*). Taraf-taraf faktor tersarang tidak harus muncul dalam semua kombinasi, namun taraf-taraf faktor berubah untuk setiap kombinasi faktor-faktor lainnya. Dengan tidak mengalisilangkan taraf-taraf faktor yang digunakan, kita tidak dapat mengevaluasi interaksi antar faktor yang digunakan [4].

Dalam percobaan tersarang, faktor-faktor membentuk sebuah hirarki. Dari tiapfaktor yang dipilih pada tahap pertama, dipilih beberapa taraf factor tahap kedua, dan seterusnya.Oleh karenanya, percobaan tersarang juga sering disebut dengan percobaan hirarki atau percobaan sub-sampling. Misalkan A adalah factor pertama yang terdiri dari a taraf, faktor B terdiridari b taraf yang tersarang di dalam tiap taraf faktor A, dan sejumlah c sampel diambil pada tiap taraf faktor B. Percobaan ini sering disebut dengan percobaan tersarang 2 (dua) tahapdan model rancangan percobaan ini adalah [1] :

$$Y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_{j(i)} + \varepsilon_{k(ij)} \quad ; \quad i = 1, \dots, a \quad j = 1, \dots, b \quad k = 1, \dots, c$$

dimana  $Y_{ijk}$  adalah nilai pengamatan ke- $k$  yang tersarang pada faktor  $B$  taraf ke- $j$  dan faktor  $A$  taraf ke- $i$ ,  $\mu$  adalah rataan umum,  $\alpha_i$  adalah pengaruh faktor  $A$  taraf ke- $i$ ,  $\beta_{j(i)}$  merupakan pengaruh faktor  $B$  taraf ke- $j$  yang tersarang pada faktor  $A$  taraf ke- $i$  dan  $\varepsilon_{k(ij)}$  adalah komponen galat pengamatan ke- $(ijk)$ .

Asumsi untuk model diatas dengan faktor  $A$  bersifat tetap : (1) jumlah semua pengaruh perlakuan sama dengan nol,  $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_a = 0$ ; (2) faktor  $B$  berdistribusi Normal dengan rata-rata nol dan varian tertentu,  $\beta_{j(i)} \sim N(0, \sigma_\beta^2)$ ; (3) galat pengamatan juga berdistribusi normal dengan rata-rata nol dan varian tertentu,  $\varepsilon_{k(ij)} \sim N(0, \sigma_\varepsilon^2)$ ; (4) faktor  $B$  dan galat pengamatan saling bebas. Bila factor  $A$  bersifat acak, asumsi pertama diganti dengan  $\alpha_i \sim N(0, \sigma_\alpha^2)$ , serta faktor  $A$  saling bebas terhadap faktor  $B$  dan galat pengamatan.

Sedangkan untuk percobaan tersarang 3 (tiga) tahap, sebagai pengembangan dari percobaan tersarang 2 (dua) tahap, notasi aljabar biasa penghitungan jumlah kuadratnya adalah seperti berikut[1]:

$$Y_{ijkl} = \mu + \alpha_i + \beta_{j(i)} + \gamma_{k(ij)} + \varepsilon_{l(ijk)} \quad i = 1, 2, \dots, a \quad j = 1, 2, \dots, b \quad k = 1, 2, \dots, c \quad l = 1, 2, \dots, r$$

$Y_{ijkl}$  pengamatan ke- $l$  pada faktor  $C$  taraf ke- $k$  yang tersarang pada faktor  $B$  taraf ke- $j$  dan faktor  $A$  taraf ke- $i$ ,  $\mu$  rataan umum,  $\alpha_i$  pengaruh faktor  $A$  taraf ke- $i$ ,  $\beta_{j(i)}$  pengaruh faktor  $B$  taraf ke- $j$  yang tersarang pada faktor  $A$  taraf ke- $i$ ,  $\gamma_{k(ij)}$  pengaruh faktor  $C$  taraf ke- $k$  yang

tersarang pada faktor  $A$  taraf ke- $i$  dan faktor  $B$  taraf ke- $j$ ,  $\varepsilon_{l(ijk)}$  komponen galat pengamatan ke- $(ijkl)$ . Asumsi modelnya juga mirip dan merupakan pengembangan dari percobaan tersarang dua tahap.

Generalisasi model diatas atau sering disebut dengan Percobaan Tersarang Multi-tahap seimbang (*balanced multi-stage nested experiment*) dapat dituliskan sebagai berikut :

$$Y_{ij...u} = \mu + \beta_{1i} + \beta_{2j(i)} + \dots + \beta_{p(ij\dots)} + \varepsilon_{u(ij\dots)}$$

$$i = 1, 2, \dots, k_1; j = 1, 2, \dots, k_2; \dots; u = 1, 2, \dots, n; N = n \prod_{i=1}^p k_i$$

Dengan derajat bebas sumber keragaman (perlakuan) pada tahap ke- $i$  adalah  $k_1 k_2 \dots (k_i - 1)$ . Nilai Harapan Kuadrat Tengah (*Expected Mean Square*) untuk percobaan tersarang multi-tahap memiliki bentuk umum seperti berikut : untuk tahapan ke- $i$  nilai harapan kuadrat

tengahnya adalah  $\sigma_\varepsilon^2 + \sum_{m=i}^p \left( \frac{N}{\prod_{l=1}^m k_l} \right) \sigma_m^2$

## 2. NOTASI ALJABAR BIASA

Jumlah kuadrat merupakan suatu ukuran yang proporsional dengan keragaman dari suatu sumber keragaman. Untuk percobaan tersarang dua tahap, sumber keragaman Total atau sumber keragaman respon dipilah menjadi sumber keragaman faktor A, sumber keragaman faktor B yang tersarang didalam A, dan sumber keragaman Galat pengamatan. Secara geometri sumber keragaman total merupakan resultan dari jumlah kuadrat faktor-faktor A, B yang tersarang didalam A, dan galat pengamatan dimana mereka saling ortogonal satu sama lain.

Dalam notasi aljabar biasa, untuk percobaan tersarang 2 (dua) faktor, jumlah kuadrat jumlah kuadrat tersebut dapat dituliskan seperti berikut [1][4]:

$$JK [Total] = \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^c Y_{ijk}^2 - \frac{Y^2}{abc}$$

$$JK [A] = \frac{1}{bc} \sum_{i=1}^a Y_{i..}^2 - \frac{Y^2}{abc} \tag{1}$$

$$JK [B(A)] = \frac{1}{c} \sum_{i=1}^a Y_{ij.}^2 - \frac{Y^2}{abc} - JK [A]$$

$$JK [Galat] = JK [Total] - JK [A] - JK [B(A)]$$

Sedangkan untuk percobaan tersarang 3 (tiga) tahap, perhitungan jumlah kuadratnya menggunakan formula berikut [1][4]:

$$\begin{aligned}
 JK[Total] &= \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^c \sum_{l=1}^n Y_{ijkl}^2 - \frac{Y_{\dots}^2}{abcn} \\
 JK[A] &= \frac{1}{bcn} \sum_{i=1}^a Y_{i\dots}^2 - \frac{Y_{\dots}^2}{abcn} \\
 JK[B(A)] &= \frac{1}{cn} \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b Y_{ij\dots}^2 - \frac{1}{bcn} \sum_{i=1}^a Y_{i\dots}^2 \\
 JK[C(B(A))] &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^c Y_{ijk\dots}^2 - \frac{1}{cn} \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b Y_{ij\dots}^2 \\
 JK[Galat] &= JK[Total] - JK[A] - JK[B(A)] - JK[C(B(A))]
 \end{aligned} \tag{2}$$

Selanjutnya, dapat dibuat generalisasi formula Jumlah Kuadrat untuk percobaan tersarang multi-tahap.

Pengujian hipotesis adanya pengaruh tahap ke- $i$  dapat dilakukan dengan menggunakan statistic uji  $F = \frac{KT[Tahap\ ke-i]}{KT[Tahap\ ke-(i+1)]}$  yang menyebar menurut sebaran  $F$  dengan derajat bebas  $k_1 k_2 \dots (k_i - 1)$  dan  $k_1 k_2 \dots k_i (k_{i+1} - 1)$ . Untuk tahapan ke- $p$  nilai  $k_{p+1} = n$ .

### 3. PENGGUNAAN NOTASI ALJABAR MATRIKS

Dengan menggunakan notasi aljabar matriks, model percobaan tersarang **dua tahap**, yang merupakan salah satu model linier, dapat dituliskan menjadi:

$$Y_{abn \times 1} = X_{abn \times (1+a+ab)} \beta_{(1+a+ab) \times 1} + \epsilon_{abn \times 1}$$

Dengan  $Y_{abn \times 1}$  adalah vektor amatan berukuran  $abn \times 1$ ,  $X_{abn \times (1+a+ab)}$  adalah matriks rancangan berukuran  $abn \times (1+a+ab)$  yang dipartisi menjadi  $[1_\mu | A | B]$  dengan  $1_\mu$  adalah vektor 1 yang berukuran  $abn \times 1$ ,  $A$  adalah matriks  $A_{abn \times a} = 1_{n \times 1} \otimes (I_{a \times a} \otimes 1_{b \times 1})$ ,  $B$  adalah matriks  $B_{abn \times ab} = 1_{n \times 1} \otimes I_{ab \times ab}$ , serta  $\beta_{(1+a+ab) \times 1}$  adalah vektor parameter model berukuran  $(1+a+ab) \times 1$ , sedangkan  $\beta_{1 \times (1+a+ab)}^t = (\mu, \alpha_1, \dots, \alpha_a, \beta_{1(1)}, \dots, \beta_{1(a)}, \beta_{2(1)}, \dots, \beta_{2(a)}, \dots, \beta_{b(a)})$  dan  $\epsilon_{abn \times 1}$  adalah vektor galat percobaan berukuran  $abn \times 1$ .

Untuk model percobaan tersarang **tiga tahap**, notasi dalam bentuk aljabar matriksnya adalah:

$$Y_{abcn \times 1} = X_{abcn \times (1+a+ab+abc)} \beta_{(1+a+ab+abc) \times 1} + \epsilon_{abcn \times 1}$$

Dengan  $Y_{abcn \times 1}$  adalah vektor amatan berukuran  $abcn \times 1$ ,  $X_{abcn \times (1+a+ab+abc)}$  adalah matriks rancangan berukuran  $abcn \times (1+a+ab+abc)$  yang dipartisi menjadi  $[1_\mu | A | B | C]$  dengan  $1_\mu$  adalah vektor 1 yang berukuran  $abcn \times 1$ ,  $A$  adalah matriks  $A_{abcn \times a} = 1_{n \times 1} \otimes (I_{a \times a} \otimes 1_{bc \times 1})$ ,  $B$  adalah matriks  $B_{abcn \times ab} = 1_{n \times 1} \otimes (I_{ab \times ab} \otimes 1_{c \times 1})$ ,  $C$  adalah matriks  $C_{abcn \times abc} = 1_{n \times 1} \otimes I_{abc \times abc}$  serta  $\beta_{(1+a+ab+abc) \times 1}$  adalah vektor parameter model berukuran  $(1+a+ab+abc) \times 1$ , serta vector  $\beta_{1 \times (1+a+ab+abc)}^t = (\mu, \alpha_1, \dots, \alpha_a, \beta_{1(1)}, \dots, \beta_{b(a)}, \gamma_{1(11)}, \dots, \gamma_{k(ij)})$  dan  $\epsilon_{abcn \times 1}$  adalah vektor galat percobaan berukuran  $abcn \times 1$ .

Berikut ini adalah teorema-teorema yang berkaitan dengan dengan distribusi bentuk kuadrat:

### Teorema1

Andaikan vector acak  $Y_{n \times 1} \sim N(\mathbf{0}, I)$ , dan misalkan  $U = Y^t Y$ . Maka  $U$  berdistribusi kai-kuadrat dengan derajat bebas  $n$  [2].

### Teorema2

Andaikan vector acak  $Y_{n \times 1} \sim N(\mathbf{0}, I)$ . Bentuk kuadrat  $Y^t A Y$  berdistribusi kai-kuadrat dengan derajat bebas  $K$  jika hanya jika  $A$  adalah matriks simetrik idempoten dengan rank  $(A) = K$ . [2]

### Teorema3

Andaikan vektor acak  $Y_{n \times 1} \sim N(\mu, \Sigma)$ , dimana  $\Sigma$  mempunyai rank  $n$ . Jika  $A \Sigma B = \mathbf{0}$ , maka kedua bentuk kuadrat  $Y^t A Y$  dan  $Y^t B Y$  saling bebas [2].

Secara umum, rank maksimum dari matriks  $A$  berukuran  $n \times p$  adalah  $\min(n, p)$  [6]. Sehingga dapat dikatakan bahwa rank dari sebuah vector berukuran  $n \times 1$  adalah  $\min(n, 1) = 1$ . Menurut Harville [3], matriks  $A$  berukuran  $n \times n$  dikatakan *nonsingular* jika hanya jika  $\text{rank}(A) = n$ . Salah satu sifat umum dari *kroncker product* adalah  $\text{rank}(A \otimes B) = \text{rank}(A) \text{rank}(B)$  [6]. Berikut ini beberapa teorema dan lemma yang berkaitan dengan rank:

### Teorema4

$\text{rank} A' = \text{rank} A = r$  sehingga rank baris sama dengan rank kolom [7].

### Teorema5

Jika  $A$  merupakan matriks berukuran  $n \times n$ , maka  $\det(A) = 0$  jika hanya jika  $\text{rank}(A) < n$ .  
 [7]

### Teorema6

Jika  $A$  merupakan matriks berukuran  $m \times n$  dengan  $\text{rank } m$ , maka  $A^- = A'(AA')^{-1}$  dan  $AA^- = I$ . Jika  $\text{rank}$  dari matriks  $A$  adalah  $n$ , maka  $A^- = (A'A)^{-1}A'$  dan  $A^-A = I$ [2].

### Teorema7

Jika matriks  $A$  simetris dan idempotent dengan  $\text{rank } r$ , maka  $\text{rank}(A) = \text{tr}(A) = r$ [6].

### Lemma 8

Satu-satunya matriks idempotent berukuran  $n \times n$  dengan  $\text{rank } n$  adalah matriks identitas  $I_n$ [3].

Formula Jumlah Kuadrat dalam notasi aljabar matriks sebagaimana pada persamaan (1) untuk percobaan tersarang dua tahap dapat dituliskan sebagai berikut :

$$\begin{aligned}
 JK[Total] &= Y^tY - Y^t\mathbf{1}_\mu(\mathbf{1}_\mu^t\mathbf{1}_\mu)^{-1}\mathbf{1}_\mu^tY \\
 JK[A] &= Y^tA(A^tA)^{-1}A^tY - Y^t\mathbf{1}_\mu(\mathbf{1}_\mu^t\mathbf{1}_\mu)^{-1}\mathbf{1}_\mu^tY \\
 JK[B(A)] &= Y^tB(B^tB)^{-1}B^tY - Y^tA(A^tA)^{-1}A^tY \\
 JK[Galat] &= Y^tY - Y^tB(B^tB)^{-1}B^tY
 \end{aligned} \tag{3}$$

Dengan  $A$  adalah matriks  $A_{abn \times a} = \mathbf{1}_{n \times 1} \otimes (I_{a \times a} \otimes \mathbf{1}_{b \times 1})$  dan  $B$  adalah matriks  $B_{abn \times ab} = \mathbf{1}_{n \times 1} \otimes I_{ab \times ab}$ .

Misalkan  $L = \mathbf{1}_\mu(\mathbf{1}_\mu^t\mathbf{1}_\mu)^{-1}\mathbf{1}_\mu^t$ ,  $M = A(A^tA)^{-1}A^t$ , dan  $N = B(B^tB)^{-1}B^t$ , dimana matriks-matriks  $L, M$ , dan  $N$  berukuran  $abn \times abn$ , dapat ditunjukkan dengan mudah bahwa matriks-matriks  $L, M$ , dan  $N$  adalah matriks-matriks yang simetris dan idempoten. Juga dapat diperlihatkan bahwa matriks-matriks  $ML = LM = L$ ,  $MN = NM = M$ , dan  $LN = NL = L$  yang selanjutnya berakibat bahwa  $M - L, N - M$  dan  $I - N$  juga simetris dan idempoten. Dengan demikian  $\text{rank}(M - L) = a - 1$ ,  $\text{rank}(N - M) = a(b - 1)$ , dan  $\text{rank}(I - N) = ab(n - 1)$ .

Dari argumentasi diatas, menurut Teorema 2, distribusi dari  $Y^t(M - L)Y$  adalah kai-kuadrat dengan derajat bebas  $a - 1$ , distribusi dari  $Y^t(N - M)Y$  adalah kai-kuadrat dengan derajat bebas  $a(b - 1)$ , dan distribusi dari  $Y^t(I - N)Y$  adalah kai-kuadrat dengan derajat bebas  $ab(n - 1)$ .

Selanjutnya dapat dengan mudah diperlihatkan bahwa  $(N - M)I(I - N) = \mathbf{0}$  dan  $(M - L)I(N - M) = \mathbf{0}$ . Menurut Teorema 3,  $(Y^t(N - M)Y)$  dan  $(Y^t(I - N)Y)$  saling bebas,

maka distribusi rasio  $(Y^t(N - M)Y)/(a(b - 1))$  terhadap  $(Y^t(I - N)Y)/(ab(n - 1))$  adalah  $F$  dengan derajat bebas  $a(b - 1)$  dan  $ab(n - 1)$ , dan  $(Y^t(M - L)Y)$  dan  $(Y^t(N - M)Y)$  saling bebas, sehingga distribusi rasio  $(Y^t(M - L)Y)/(a - 1)$  terhadap  $(Y^t(N - M)Y)/(a(b - 1))$  adalah  $F$  dengan derajat bebas  $a - 1$  dan  $a(b - 1)$ .

Formula Jumlah Kuadrat dalam notasi aljabar matriks sebagaimana pada persamaan (2) untuk percobaan tersarang tiga tahap dapat dituliskan sebagai berikut :

$$\begin{aligned}
 JK[Total] &= Y^tY - Y^t\mathbf{1}_\mu(\mathbf{1}_\mu^t\mathbf{1}_\mu)^{-1}\mathbf{1}_\mu^tY \\
 JK[A] &= Y^tA(A^tA)^{-1}A^tY - Y^t\mathbf{1}_\mu(\mathbf{1}_\mu^t\mathbf{1}_\mu)^{-1}\mathbf{1}_\mu^tY \\
 JK[B(A)] &= Y^tB(B^tB)^{-1}B^tY - Y^tA(A^tA)^{-1}A^tY \\
 JK[C(B(A))] &= Y^tC(C^tC)^{-1}C^tY - Y^tB(B^tB)^{-1}B^tY \\
 JK[Galat] &= Y^tY - Y^tC(C^tC)^{-1}C^tY
 \end{aligned} \tag{4}$$

Dengan  $A$  adalah matriks  $A_{abcn \times a} = \mathbf{1}_{n \times 1} \otimes (I_{a \times a} \otimes \mathbf{1}_{bc \times 1})$ ,  $B$  adalah matriks  $B_{abcn \times ab} = \mathbf{1}_{n \times 1} \otimes (I_{ab \times ab} \otimes \mathbf{1}_{c \times 1})$ ,  $C$  adalah matriks  $C_{abcn \times abc} = \mathbf{1}_{n \times 1} \otimes I_{abc \times abc}$ .

Misalkan  $L = \mathbf{1}_\mu(\mathbf{1}_\mu^t\mathbf{1}_\mu)^{-1}\mathbf{1}_\mu^t$ ,  $M = A(A^tA)^{-1}A^t$ ,  $N = B(B^tB)^{-1}B^t$  dan  $P = C(C^tC)^{-1}C^t$ , dimana matriks-matriks  $L, M, N$  dan  $P$  berukuran  $abcn \times abc$ , dapat ditunjukkan dengan mudah bahwa matriks-matriks  $L, M, N$  dan  $P$  adalah matriks-matriks yang simetris dan idempoten. Juga dapat diperlihatkan bahwa matriks-matriks  $ML = LM = L$ ,  $MN = NM = M$ ,  $PN = NP = N$ ,  $MP = PM = M$  dan  $LN = NL = L$  yang selanjutnya berakibat bahwa  $M - L, N - M, P - N$  dan  $I - P$  juga simetris dan idempoten. Dengan demikian  $rank(M - L) = a - 1$ ,  $rank(N - M) = a(b - 1)$ ,  $rank(P - N) = ab(c - 1)$  dan  $rank(I - P) = abc(n - 1)$ .

Dari argumentasi diatas, menurut Teorema 2, distribusi dari  $Y^t(M - L)Y$  adalah kai-kuadrat dengan derajat bebas  $a - 1$ , distribusi dari  $Y^t(N - M)Y$  adalah kai-kuadrat dengan derajat bebas  $a(b - 1)$ , distribusi dari  $Y^t(P - N)Y$  adalah kai-kuadrat dengan derajat bebas  $ab(c - 1)$  dan distribusi dari  $Y^t(I - P)Y$  adalah kai-kuadrat dengan derajat bebas  $abc(n - 1)$ .

Selanjutnya dapat dengan mudah diperlihatkan bahwa  $(P - N)I(I - P) = \mathbf{0}$ ,  $(N - M)I(P - N) = \mathbf{0}$  dan  $(M - L)I(N - M) = \mathbf{0}$ . Menurut Teorema 3,  $(Y^t(P - N)Y)$  dan  $(Y^t(I - P)Y)$  saling bebas, maka distribusi rasio  $(Y^t(P - N)Y)/(ab(c - 1))$  terhadap  $(Y^t(I - P)Y)/(abc(n - 1))$  adalah  $F$  dengan derajat bebas  $ab(c - 1)$  dan  $abc(n - 1)$ ,  $(Y^t(N - M)Y)$  dan  $(Y^t(P - N)Y)$  saling bebas, maka distribusi rasio  $(Y^t(N - M)Y)/(a(b - 1))$  terhadap  $(Y^t(P - N)Y)/(ab(c - 1))$  adalah  $F$  dengan derajat bebas  $a(b - 1)$  dan  $ab(c - 1)$ , dan  $(Y^t(M - L)Y)$  dan  $(Y^t(N - M)Y)$  saling bebas, sehingga distribusi rasio  $(Y^t(M - L)Y)/(a - 1)$  terhadap  $(Y^t(N - M)Y)/(a(b - 1))$  adalah  $F$  dengan derajat bebas  $a - 1$  dan  $a(b - 1)$ .

#### 4. PENUTUP

Penggunaan Matriks Rancangan Terpartisi secara operasional mempermudah perhitungan jumlah kuadrat komponen sumber keragaman karena rank matriks partisi sumber keragamannya berpangkat penuh, sehingga cukup digunakan invers matriks biasa.

Komponen formula perhitungan jumlah kuadrat memiliki bentuk umum  $Y^tZ(Z^tZ)^{-1}Z^tY$  dengan  $Z$  adalah elemen partisi matriks rancangan yang berkaitan dengan tahapan penyarangan.  $Z$  untuk penyerangan tahap pertama, kedua, ketiga dan seterusnya menggunakan notasi  $A, B, C$  dan seterusnya. Untuk faktor koreksi  $Z = \mathbf{1}_\mu(\mathbf{1}_\mu^t\mathbf{1}_\mu)^{-1}\mathbf{1}_\mu^t$ .

Untuk percobaan tersarang dua tahap,  $A_{abn \times a} = \mathbf{1}_{n \times 1} \otimes (I_{a \times a} \otimes \mathbf{1}_{b \times 1})$  dan  $B_{abn \times ab} = \mathbf{1}_{n \times 1} \otimes I_{ab \times ab}$  dengan pengaturan elemen vektor pengamatan  $Y$  disesuaikan. Sedangkan untuk percobaan tersarang tiga tahap,  $A_{abcn \times a} = \mathbf{1}_{n \times 1} \otimes (I_{a \times a} \otimes \mathbf{1}_{bc \times 1})$ ,  $B_{abcn \times ab} = \mathbf{1}_{n \times 1} \otimes (I_{ab \times ab} \otimes \mathbf{1}_{c \times 1})$ , dan  $C_{abcn \times abc} = \mathbf{1}_{n \times 1} \otimes I_{abc \times abc}$  dengan pengaturan elemen vektor pengamatan  $Y$  disesuaikan.

#### 5. UCAPAN TERIMAKASIH

Terimakasih saya ucapkan kepada Renny Alvionita yang telah membantu dalam mencari bahan referensi serta menguji beberapa persyaratan tentang kesimetrisan dan keidempotenan matriks yang dipakai sehingga dapat dipergunakan didalam skripsinya. Terimakasih juga diucapkan kepada Pepi Novianti yang juga telah membantu memeriksa apa yang telah dilakukan Renny Alvionita sebagai bagian dari skripsinya.

#### 6. PUSTAKA

- [1]. Dean A, Voss D. *Design and Analysis of Experiments*. New York: Springer; 1999.
- [2]. Graybill, FA. *Theory and Application of The Linear Model*. California: Wadsworth Publishing Company; 1976.
- [3]. Harville, DA. *Matrix Algebra From a Statistician's Perspective*. New York: Springer; 2008.
- [4]. Lentner M, Bishop T. *Experimental Design and Analysis*. Blacksburg: Valley Book Company; 1986.
- [5]. Nugroho, S. *Metode Matriks Rancangan Terpartisi Untuk Penghitungan Jumlah Kuadrat Percobaan Tiga Faktor*. Surabaya: Konferensi Nasional Matematika XVII ITS; 2014.



- [6]. Rencher AC, SchaaljeGB. *Linear Models in Statistics*. Second Edition. New Jersey: John Wiley & Sons;2008.
- [7]. **Seber, GAF**. *A Matrix Handbook for Statisticians*. John Wiley & Sons. New Jersey. 2008.



Fakultas Matematika Dan Ilmu Pengetahuan Alam

**UNTAN**  
Universitas Tanjungpura



**PROSIDING**  
**SEMIRATA 2015**